



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики

Суперкомпьютерное моделирование и технологии

Задание 2

Студент 638 группы

М. И. Хабибулин

Москва, 2022

Содержание

1	Постановка задачи	4
2	Аналитическое решение	4
3	Описание численного алгоритма	5
4	Результаты запуска программы	6
4.1	Polus	6

1 Постановка задачи

Необходимо предоставить аналитическое решение и программную реализацию алгоритма численного решения задачи вычисления следующего интеграла:

$$I = \int \int \int_G (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy dz, \quad (1)$$

где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

Также необходимо исследовать масштабируемость полученной программной реализации.

2 Аналитическое решение

$$I = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz =$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^1 r \cdot r \, dz =$$

$$x^2 + y^2 = r^2 = z^2$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr \int_r^1 r^2 \, dz = 2\pi \int_0^1 \frac{r^3}{3} \Big|_r^1 dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r) \, dr =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Рис. 1: Аналитическое решение интеграла.

Таким образом, получаем аналитическое решение: $\frac{\pi I}{6}$.

3 Описание численного алгоритма

Данная задача решается численно с использованием метода Монте-Карло:

1. Задаем функцию $F(x, y, z)$ следующего вида:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & (x, y, z) \in G, \\ 0 & (x, y, z) \notin G. \end{cases} \quad (2)$$

2. Далее преобразуем исходный интеграл:

$$I = \int \int \int_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{G'} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (3)$$

где G' — прямоугольник: $a_1 \leq x \leq b_1$, $a_2 \leq y \leq b_2$, $a_3 \leq z \leq b_3$.

3. После этого семплируем случайные точки из G' и на них считаем значение функции F .
4. Окончательный результат получается из соотношения:

$$I' \approx |G'| \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(p_i). \quad (4)$$

5. Процесс продолжается до тех пор, пока значение ошибки не будет меньше некоторого наперед заданного значения ε : $|I - I'| < \varepsilon$.

4 Результаты запуска программы

4.1 Polus

Точность ε	Число MPI-процессов	Время работы (с)	Ускорение	Ошибка
$3.0 \cdot 10^{-5}$	1	0.00219904	1	2.19904e-05
$3.0 \cdot 10^{-5}$	4	0.00137322	1.601	1.37322e-05
$3.0 \cdot 10^{-5}$	16	0.00084548	2.6	1.27422e-05
$3.0 \cdot 10^{-5}$	32	0.00063389	3.469	1.27422e-05
$5.0 \cdot 10^{-6}$	1	0.0038484	1	3.66476e-07
$5.0 \cdot 10^{-6}$	4	0.0018367	2.095	3.45779e-07
$5.0 \cdot 10^{-6}$	16	0.0011828	2.9765	3.27479e-07
$5.0 \cdot 10^{-6}$	32	0.0009872	3.898	3.27479e-07
$1.5 \cdot 10^{-6}$	1	0.00391767	1	3.27479e-07
$1.5 \cdot 10^{-6}$	4	0.00273235	1.433	3.28379e-07
$1.5 \cdot 10^{-6}$	16	0.00187639	2.087	3.12478e-07
$1.5 \cdot 10^{-6}$	32	0.00127639	3.069	3.12478e-07

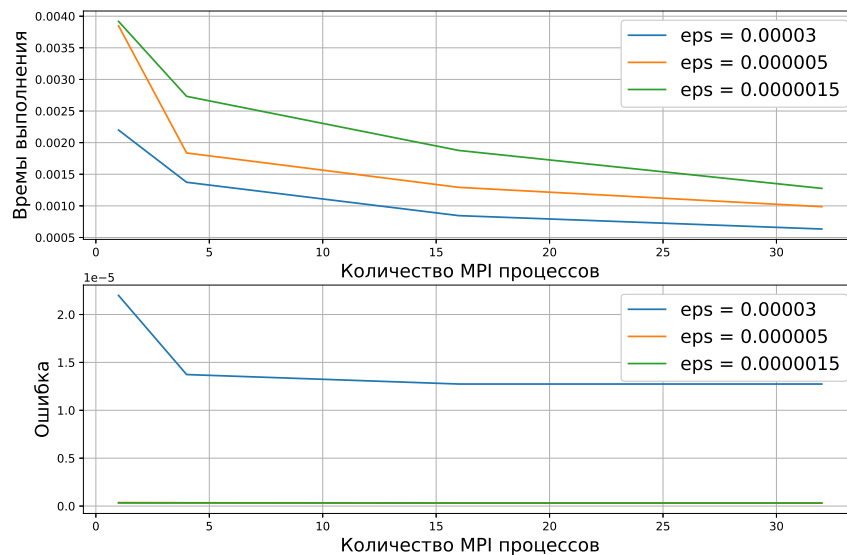


Рис. 2. Графики времени выполнения программы и ошибки на суперкомпьютере Polus в зависимости от количества процессов.