Matematica Discreta
Laurea in Informatica

Andrea Favero

Luglio 2016

Indice

Capitolo 1

Grafi

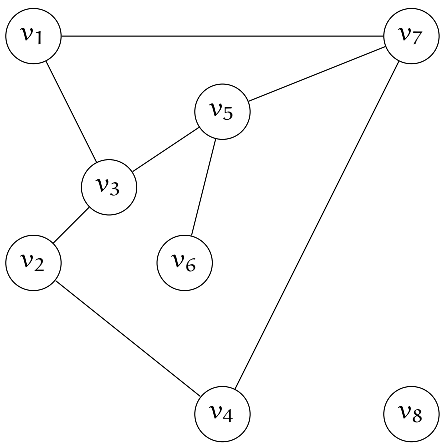
1.1 Grafi non orientati

Definizione 1.1 (grafo non orientato semplice). Un *grafo non orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, E) dove: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme finito di *vertici* (o *nodi*) ed E è un insieme di coppie *non ordinate* di vertici (*spigoli*[1]).

Esempio 1.1.1.

$$V = \{v_1, \ldots, v_8\}$$

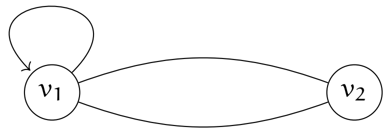
$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_2, v_3), (v_4, v_7), (v_6, v_5), (v_4, v_2), (v_3, v_5), (v_5, v_7)\}$$



Il grafo è detto *semplice* perché non può avere né cappi né spigoli paralleli. Lo spigolo (v_1, v_3) ha come *estremi* i vertici v_1 e v_3.

Esempio 1.1.2. Il grafo non orientato nella figura precedente non è semplice poiché presenta un cappio sul vertice v_1 e ci sono due spigoli paralleli tra i vertici v_1 e v_2.

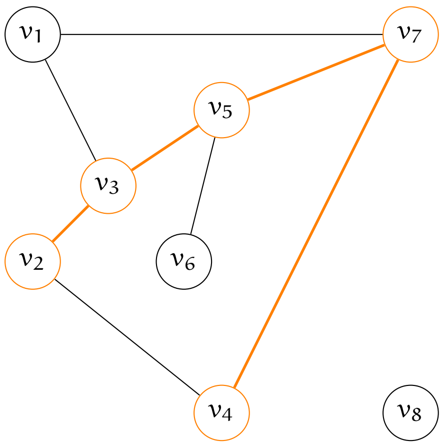
[1] Il nome dell'insieme è E perchè in inglese gli spigoli sono chiamati *edges*



Definizione 1.2. Uno spigolo è detto *incidente* nei suoi estremi ed i suoi vertici sono detti *adiacenti*.

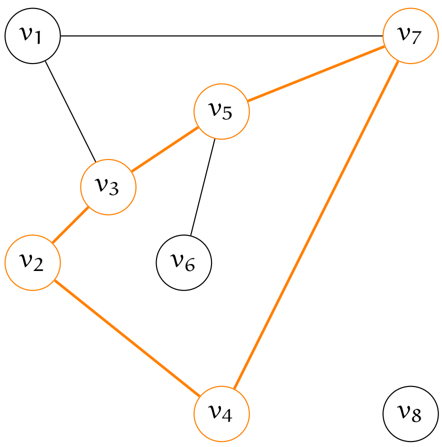
Definizione 1.3 (cammino). Un *cammino* è una sequenza di vertici *distinti* dove ogni coppia di vertici consecutivi è uno spigolo.

Esempio 1.1.3. v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 è un cammino. Un'altra notazione per indicare il cammino è: $(v_4, v_7, v_5, v_3, v_2)$.



Definizione 1.4 (circuito). Cammino nel quale il primo e l'ultimo vertice sono adiacenti.

Esempio 1.1.4. v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 - v_4 è un circuito.



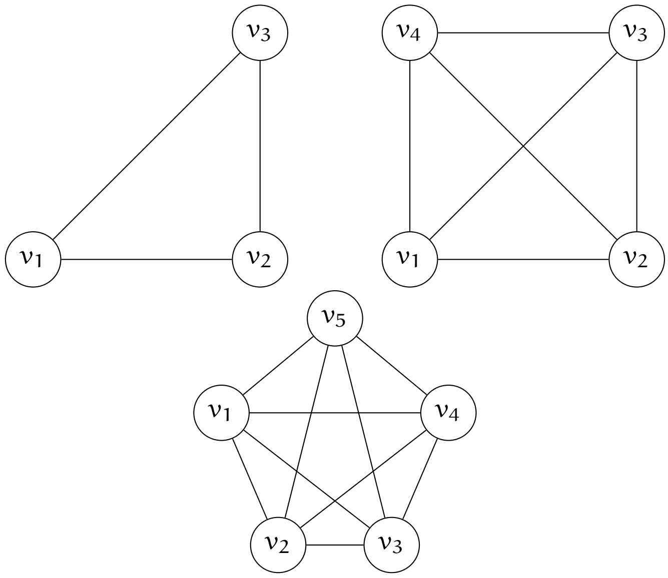
Definizione 1.5 (grafo connesso). Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega.

Definizione 1.6 (grafo completo). Un grafo è *completo* se per ogni coppia di vertici esiste uno spigolo che li collega.

Esempio 1.1.5. 3 grafi completi:

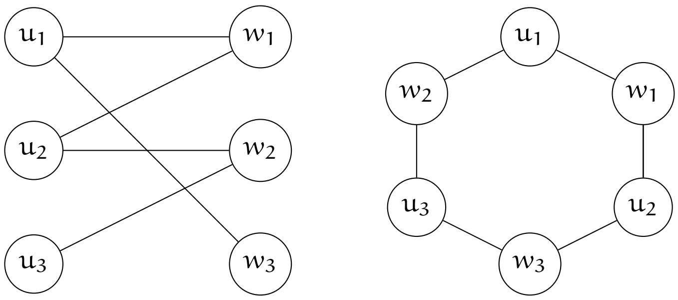
Nell'ordine:

- un grafo k_3
- un grafo k_4
- un grafo k_5



Definizione 1.7 (grafo bipartito). Un grafo è *bipartito*[2] se i suoi vertici sono partizionati in due sottoinsiemi, U e V, e ogni spigolo è incidente in un vertice di U e uno di V.

Esempio 1.1.6. Due grafi bipartiti.



1.2 Grafi orientati

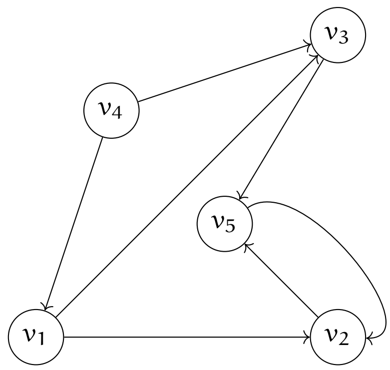
Definizione 1.8 (grafo orientato semplice). Un *grafo orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, A) dove: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme finito di vertici (o nodi) ed A è un insieme di *coppie ordinate* di vertici dette *archi*.

[2] I grafi bipartiti saranno discussi in seguito

Esempio 1.2.1.

$$G(V, A) \text{ con } V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e}$$

$$A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_2)\}$$

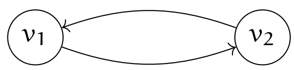


Il grafo è semplice perché non ha né cappi né archi paralleli. Essendo orientato il grafo ha un *nodo iniziale* ed un *nodo finale*.

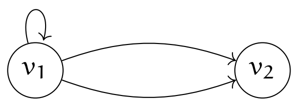
Esempio 1.2.2.

$$G(V, A) \quad V = \{v_1, v_2\}, \quad A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\}$$

G è un grafo orientato. L'arco $(v_1, v_2) \in A$ ha v_1 come nodo iniziale e v_2 come finale.



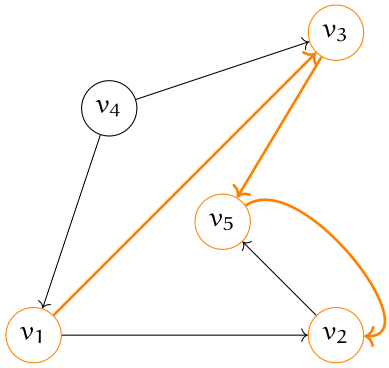
Esempio 1.2.3. L'immagine sottostante non rappresenta un grafo perchè i vertici v_1 e v_2 sono collegati da due archi paralleli (ovvero due archi che hanno lo stesso nodo iniziale ed anche quello finale), inoltre c'è un cappio su v_1.



Definizione 1.9 (cammino orientato). Un *cammino orientato* è una sequenza di nodi distinti dove, ogni coppia di nodi consecutivi nel cammino è collegata da un arco.

Esempio 1.2.4. Nel grafo in figura è presente il cammino orientato:

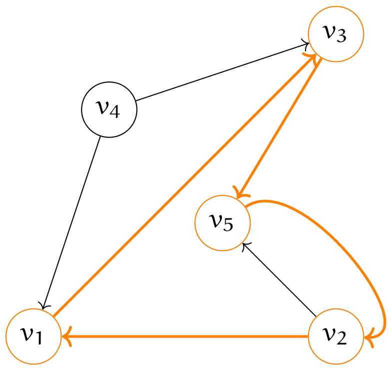
$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2$$



Definizione 1.10 (circuito orientato). Cammino orientato nel quale esiste un arco dal primo all'ultimo nodo.

Esempio 1.2.5. Circuito orientato:

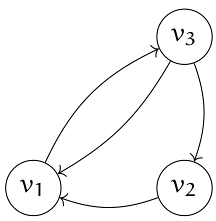
$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_1$$



Definizione 1.11 (grafo fortemente connesso). Per ogni coppia di nodi esiste un cammino orientato che li collega.

Esempio 1.2.6.

$$G(V = \{v_1, v_2, v_3\},\ A = \{(v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2)\})$$



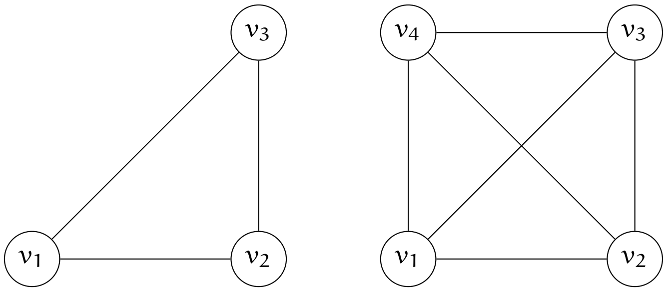
1.3 Prime proprietà dei grafi non orientati

Sia $G(V, E)$ un grafo non orientato semplice. Non è difficile notare che il minimo numero di spigoli che un grafo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è:

$|V|$ ed $|E|$ indicano la *cardinalità* di A ed E. La cardinalità di un insieme finito è un numero naturale che rappresenta la quantità di elementi che costituiscono l'insieme.

$$\frac{|V|\ (|V|-1)}{2}$$

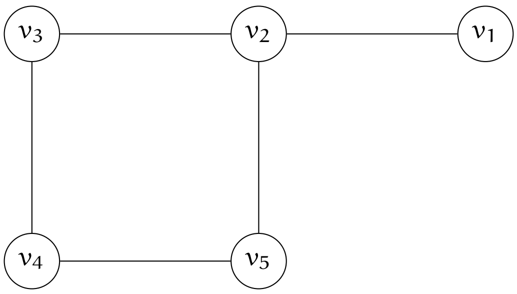
Esempio 1.3.1. grafi con $|V| = 3$ e $|V| = 4$.



Definizione 1.12 (grado di un vertice). Si chiama *grado* di un vertice v e si indica con $gr(v)$ il numero di spigoli incidenti in v.

Esempio 1.3.2. $gr(v_1) = 1, \quad gr(v_2) = 3, \quad gr(v_3) = gr(v_4) = gr(v_5) = 2.$

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10 = 2|E| = 2 \times 5$$



Teorema 1.3.1. *In ogni grafo semplice non orientato* $G(V, E)$*, la somma dei gradi di tutti i vertici è uguale al doppio del numero degli spigoli.*

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E| \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Per induzione su $m = |E|$:
caso base: $m = 0$
$gr(v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad |E| = 0.$
passo induttivo:
sia $G(V, E)$ un grafo con m spigoli. Si suppone che 1.1 sia valida $\forall$ grafo

con $m-1$ spigoli.
Siano $(\bar{u},\bar{v}) \in E$ e $G'(V, E' = E \setminus \{(\bar{u},\bar{v})\})$ ottenuto da G togliendo $(\bar{u},\bar{v})$.
Si può notare che $gr_G(\bar{u}) = gr_{G'}(\bar{u}) + 1$, $gr_G(\bar{v}) = gr_{G'}(\bar{v}) + 1$ e quindi $\forall x \in V$, $x \neq \bar{u}$, $x \neq \bar{v}$: $gr_G(x) = gr_{G'}(x)$.
$|E'| = |E|-1 = m-1 \implies$ in G' vale l'ipotesi induttiva $\implies \sum_{v\in V} gr_{G'}(v) = 2|E'|$.
In G:

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V} gr(v) &= \sum_{v\in V,\ v\neq\bar{u},\ v\neq\bar{v}} gr_G(v) + gr_G(\bar{u}) + gr_G(\bar{v}) \\
&= \sum_{v\in V,\ v\neq\bar{u},\ v\neq\bar{v}} gr_{G'}(v) + gr_{G'}(\bar{u}) + 1 + gr_{G'}(\bar{v}) + 1 \\
&= \sum_{v\in V} gr_{G'}(v) + 2 \underbrace{=}_{\text{ipotesi induttiva}} 2|E'| + 2 \\
&= 2(m-1) + 2 \\
&= 2m \\
&= 2|E|
\end{aligned}$$

□

Corollario 1.3.2. *In ogni grafo non orientato, il numero dei vertici di grado dispari è pari.*

Dimostrazione. Siano $G(V, E)$ un grafo non orientato semplice, $V_d = \{v \in V \mid gr(v) \text{ è dispari}\}$ e $V_p = \{v \in V \mid gr(v) \text{ è pari}\}$; quindi $V_d \cap V_p = \emptyset$ e $V_d \cup V_p = V$.

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V} gr(v) &= 2|E| \\
&= \underbrace{\sum_{v\in V_p} gr(v)}_{\text{pari}} + \sum_{v\in V_d} gr(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}}
\end{aligned}$$

Poichè la somma dei gradi dei vertici che hanno grado pari è un numero pari, allora anche la somma dei gradi dei vertici che hanno grado dispari è un numero pari perché:

$$\sum_{v\in V_d} gr(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}} - \underbrace{\sum_{v\in V_p} gr(v)}_{\text{pari}}$$

e la differenza tra due numeri pari è un numero pari. Essendo quindi la somma dei gradi dei vertici di grado dispari un numero pari, allora anche il numero dei vertici di grado dispari è un numero pari. Questo perchè se si sommano n numeri dispari, la loro somma è un numero pari se e solo se n è pari. □

Esercizio 1.3.1. Trovare $G(V, E)$ con $|V| = 7$ e $gr(v) = 5$ $\forall v \in V$.
Svolgimento: non esiste alcun grafo di questo tipo, per il corollario di cui sopra.

1.4 Prime proprietà dei grafi orientati

Sia $G(V, A)$ un grafo orientato semplice. Allora il minimo numero di archi che questo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è $|V| \cdot (|V| - 1)$.