Matematica Discreta
Laurea in Informatica

Andrea Favero

Luglio 2016

Indice

1 Grafi **3**
1.1 Grafi non orientati 3
1.2 Grafi orientati 5
1.3 Prime proprietà dei grafi non orientati 8
1.4 Prime proprietà dei grafi orientati 10
1.5 Sottografi 12
1.6 Grafi bipartiti 12
1.7 Grafi isomorfi 13

Capitolo 1

Grafi

1.1 Grafi non orientati

Definizione 1.1 (grafo non orientato semplice). Un *grafo non orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, E) dove: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme finito di *vertici* (o *nodi*) ed E è un insieme di coppie *non ordinate* di vertici (*spigoli*[1][2]). Il grafo è detto *semplice* perché non può avere né cappi né spigoli paralleli.

Esempio 1.1.1.

$$V = \{v_1, \ldots, v_8\}$$

$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_2, v_3), (v_4, v_7), (v_6, v_5), (v_4, v_2), (v_3, v_5), (v_5, v_7)\}$$

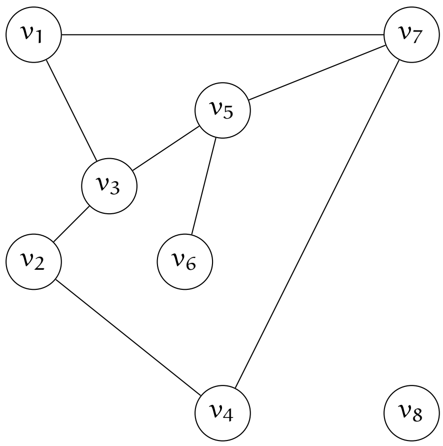


Figura 1.1: un grafo semplice non orientato

Lo spigolo (v_1, v_3) ha come *estremi* i vertici v_1 e v_3.

Esempio 1.1.2. Il grafo non orientato in figura 1.2 non è semplice poiché presenta un cappio sul vertice v_1 e ci sono due spigoli paralleli tra i vertici v_1 e v_2.

[1] L'insieme si chiama E perchè in inglese gli spigoli sono denominati *edges*

[2] In molti libri di testo E, viene rappresentato come $E = \{\ \{v_1, v_3\},\ \{v_1, v_7\},\ \ldots\}$ perché non c'è alcun ordine tra gli spigoli.

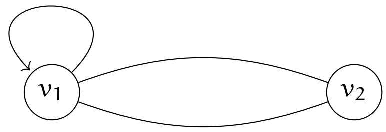


Figura 1.2: un grafo non orientato che non è semplice

Definizione 1.2. Uno spigolo è detto *incidente* nei suoi estremi ed i suoi vertici sono detti *adiacenti.*

Definizione 1.3 (cammino). Un *cammino* è una sequenza di vertici *distinti* in cui ogni coppia di vertici consecutivi è uno spigolo.

Esempio 1.1.3. v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 è un cammino. Un'altra notazione per indicare il cammino è: $(v_4, v_7, v_5, v_3, v_2)$.

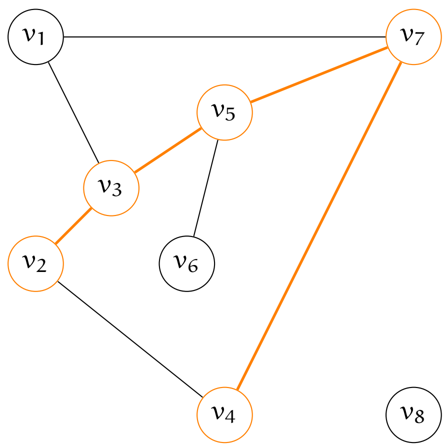


Figura 1.3: un cammino v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2

Definizione 1.4 (circuito). Cammino nel quale il primo e l'ultimo vertice sono adiacenti.

Esempio 1.1.4. Il grafo in figura 1.4 ha il circuito: v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 - v_4.

Definizione 1.5 (lunghezza di un circuito/cammino). La lunghezza di un circuito o di un cammino è il numero degli spigoli formati dai nodi del cammino/circuito.

Definizione 1.6 (grafo connesso). Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega, altrimenti si dice *disconnesso.*

Definizione 1.7 (grafo completo). Un grafo è *completo* se per ogni coppia di vertici esiste uno spigolo che li collega. Se il grafo ha n vertici allora è un grafo k_n.

Esempio 1.1.5. 3 grafi completi sono nella figura 1.5

Nell'ordine:

- un grafo k_3
- un grafo k_4
- un grafo k_5

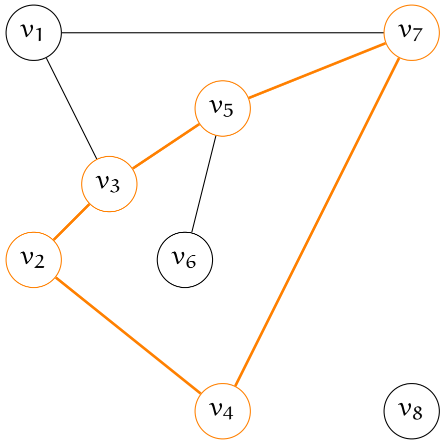


Figura 1.4: un circuito v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 - v_4

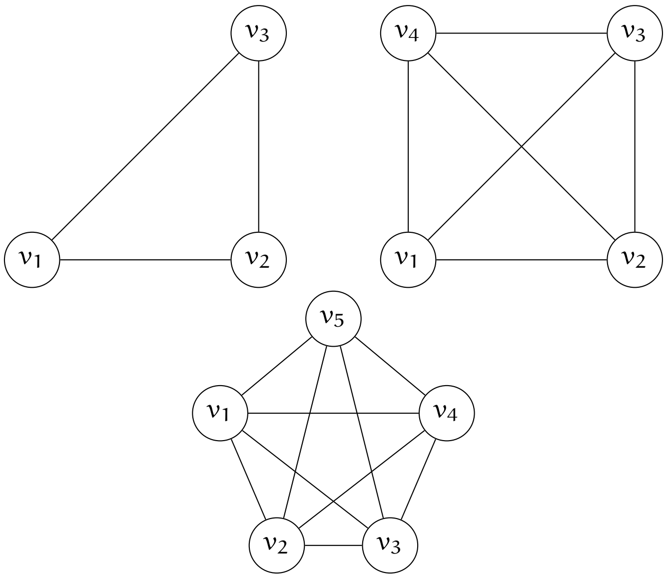


Figura 1.5: un k_3, k_4 e k_5

Definizione 1.8 (grafo bipartito). Un grafo è *bipartito*[3] se i suoi vertici sono partizionati in due sottoinsiemi, U e V, e ogni spigolo è incidente in un vertice di U e uno di V.

Esempio 1.1.6. Due grafi bipartiti sono in figura 1.6.

1.2 Grafi orientati

Definizione 1.9 (grafo orientato semplice). Un *grafo orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, A) dove: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme finito di vertici (o

[3] I grafi bipartiti saranno discussi in seguito

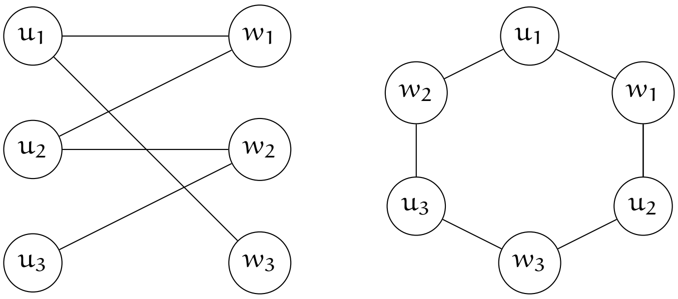


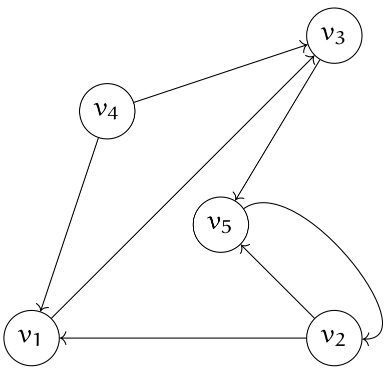
Figura 1.6: 2 grafi bipartiti

nodi) ed A è un insieme di *coppie ordinate* di vertici dette *archi*.

Esempio 1.2.1.

$$G(V, A) \text{ con } V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e}$$

$$A = \{(v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_2)\}$$

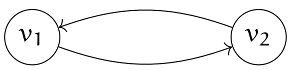


Il grafo è semplice perché non ha né cappi né archi paralleli. Essendo orientato il grafo ha un *nodo iniziale* (*testa*) ed un *nodo finale* (*coda*).

Esempio 1.2.2.

$$G(V, A) \quad V = \{v_1, v_2\}, \quad A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\}$$

G è un grafo orientato. L'arco $(v_1, v_2) \in A$ ha v_1 come nodo iniziale e v_2 come finale.



Esempio 1.2.3. L'immagine in figura 1.7 non rappresenta un grafo orientato semplice perchè i vertici v_1 e v_2 sono collegati da due archi paralleli (ovvero due archi che hanno lo stesso nodo iniziale ed anche quello finale), inoltre c'è un cappio su v_1.

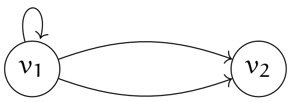


Figura 1.7: grafo orientato che non è semplice

Definizione 1.10 (cammino orientato). Un *cammino orientato* è una sequenza di nodi distinti dove, ogni coppia di nodi consecutivi nel cammino è collegata da un arco.

Esempio 1.2.4. Nel grafo in figura 1.8 è presente il cammino orientato:

$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2$$

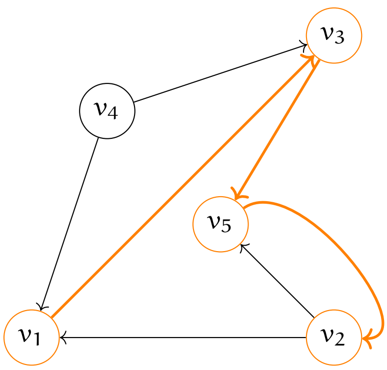


Figura 1.8: cammino orientato

Definizione 1.11 (circuito orientato). Cammino orientato nel quale esiste un arco dal primo all'ultimo nodo.

Esempio 1.2.5. In figura 1.9 è rappresentato il circuito orientato

$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_1$$

Definizione 1.12 (grafo fortemente connesso). Per ogni coppia di nodi esiste un cammino orientato che li collega.

Esempio 1.2.6.

$$G(V = \{v_1, v_2, v_3\},\ A = \{(v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2)\})$$

è un grafo fortemente connesso ed è in figura 1.10

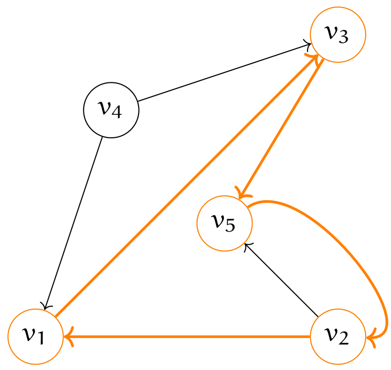


Figura 1.9: circuito orientato

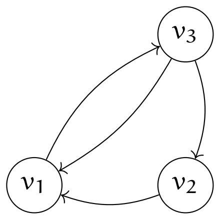


Figura 1.10: grafo fortemente connesso

1.3 Prime proprietà dei grafi non orientati

Sia $G(V, E)$ un grafo non orientato semplice. Non è difficile notare che il minimo numero di spigoli che un grafo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è:

$$\frac{|V|\ (|V|-1)}{2}$$

$|V|$ ed $|E|$ indicano la *cardinalità* di A ed E. La cardinalità di un insieme finito è un numero naturale che rappresenta la quantità di elementi che costituiscono l'insieme.

Esempio 1.3.1. grafi con $|V| = 3$ e $|V| = 4$. (In figura 1.11)

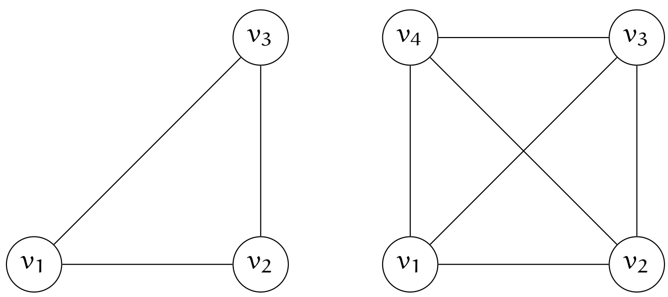


Figura 1.11: due grafi rispettivamente con $V = 3$ ed $V = 4$

Definizione 1.13 (grado di un vertice). Si chiama *grado* di un vertice v e si indica con $gr(v)$ il numero di spigoli incidenti in v.

Esempio 1.3.2. $gr(v_1) = 1, \quad gr(v_2) = 3, \quad gr(v_3) = gr(v_4) = gr(v_5) = 2.$

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10 = 2|E| = 2 \times 5$$

Il grafo relativo all'esempio è in 1.12

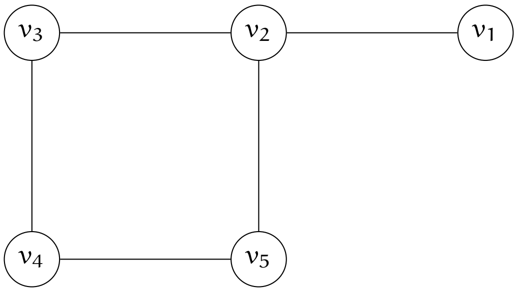


Figura 1.12

Teorema 1.3.1. *In ogni grafo semplice non orientato* $G(V, E)$*, la somma dei gradi di tutti i vertici è uguale al doppio del numero degli spigoli.*

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E| \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Per induzione su $m = |E|$:
caso base: $m = 0$
$gr(v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad |E| = 0.$
passo induttivo: $P(m-1) \implies P(m)$
sia $G(V, E)$ un grafo con m spigoli. Si suppone che 1.1 sia valida $\forall$ grafo con $m-1$ spigoli.
Siano $(\bar{u}, \bar{v}) \in E$ e $G'(V, E' = E \setminus \{(\bar{u}, \bar{v})\})$ ottenuto da G togliendo $(\bar{u}, \bar{v})$.
Si può notare che $gr_G(\bar{u}) = gr_{G'}(\bar{u}) + 1$, $gr_G(\bar{v}) = gr_{G'}(\bar{v}) + 1$ e quindi $\forall x \in V,\ x \neq \bar{u},\ x \neq \bar{v}:\ gr_G(x) = gr_{G'}(x)$.
$|E'| = |E| - 1 = m - 1 \implies$ in G' vale l'ipotesi induttiva $\implies \sum_{v \in V} gr_{G'}(v) = 2|E'|$.
In G:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} gr(v) &= \sum_{v \in V,\ v \neq \bar{u},\ v \neq \bar{v}} gr_G(v) + gr_G(\bar{u}) + gr_G(\bar{v}) \\
&= \sum_{v \in V,\ v \neq \bar{u},\ v \neq \bar{v}} gr_{G'}(v) + gr_{G'}(\bar{u}) + 1 + gr_{G'}(\bar{v}) + 1 \\
&= \sum_{v \in V} gr_{G'}(v) + 2 \underbrace{=}_{\text{ipotesi induttiva}} 2|E'| + 2 \\
&= 2(m-1) + 2 \\
&= 2m \\
&= 2|E|
\end{aligned}$$

□

Corollario 1.3.2. *In ogni grafo non orientato, il numero dei vertici di grado dispari è pari.*

Dimostrazione. Siano $G(V, E)$ un grafo non orientato semplice, $V_d = \{v \in V \mid gr(v) \text{ è dispari}\}$ e $V_p = \{v \in V \mid gr(v) \text{ è pari}\}$; quindi $V_d \cap V_p = \emptyset$ e $V_d \cup V_p = V$.

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} gr(v) &= 2|E| \\ &= \underbrace{\sum_{v\in V_p} gr(v)}_{\text{pari}} + \sum_{v\in V_d} gr(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}}\end{aligned}$$

Poichè la somma dei gradi dei vertici che hanno grado pari è un numero pari, allora anche la somma dei gradi dei vertici che hanno grado dispari è un numero pari perché:

$$\sum_{v\in V_d} gr(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}} - \underbrace{\sum_{v\in V_p} gr(v)}_{\text{pari}}$$

e la differenza tra due numeri pari è un numero pari. Essendo quindi la somma dei gradi dei vertici di grado dispari un numero pari, allora anche il numero dei vertici di grado dispari è un numero pari. Questo perchè se si sommano n numeri dispari, la loro somma è un numero pari se e solo se n è pari. □

Esercizio 1.3.1. Trovare $G(V, E)$ con $|V| = 7$ e $gr(v) = 5\ \forall v \in V$.
Svolgimento: non esiste alcun grafo di questo tipo, per il corollario di cui sopra. Infatti $5 \cdot 7$ è un numero dispari.

1.4 Prime proprietà dei grafi orientati

Sia $G(V, A)$ un grafo orientato semplice. Allora il minimo numero di archi che questo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è $|V| \cdot (|V| - 1)$.

Esempio 1.4.1. Due grafi orientati con il loro massimo numero di archi possibili sono in figura 1.13

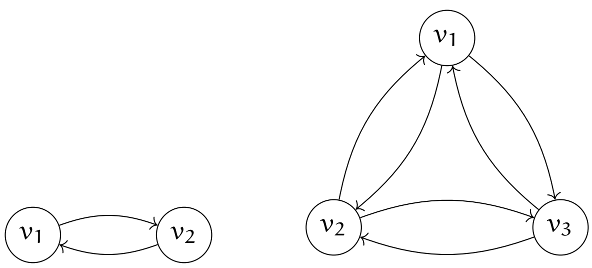


Figura 1.13: Due grafi orientati con il loro massimo numero di archi possibile

Definizione 1.14 (grado entrante di un vertice)**.** Si chiama grado *entrante* di un vertice v e si indica con $\text{In-deg}(v)$ il numero di archi entranti nel vertice v.

Definizione 1.15 (grado uscente di un vertice)**.** Si chiama grado *uscente* di un vertice v e si indica con $\text{Out-deg}(v)$ il numero di archi uscenti dal vertice v.

Esempio 1.4.2. La figura 1.14 rappresenta un grafo con $\text{In-deg}(v_1) = 1$ e $\text{Out-deg}(v_1) = 3$

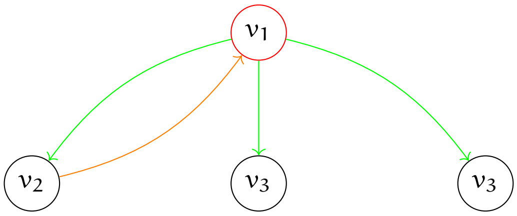


Figura 1.14: esempio con $\text{In-deg}(v_1) = 1$ e $\text{Out-deg}(v_1) = 3$

Teorema 1.4.1. *In ogni grafo orientato semplice* $G(V, A)$ *sono uguali tra loro: la somma dei gradi uscenti dei nodi, la somma dei gradi entranti dei nodi, il numero di archi del grafo.*

$$\sum_{v\in V} \text{In-deg}(v) = \sum_{v\in V} \text{Out-deg}(v) = |A| \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Per induzione su $m = |A|$:
caso base: $m = 0$
$\sum_{v\in V} \text{In-deg}(v) = \sum_{v\in V} \text{Out-deg}(v) = m = |A| = 0$.
passo induttivo: $P(m - 1) \implies P(m)$
sia $G(V, E)$ un grafo orientato con m archi. Si suppone che 1.2 sia valida $\forall$ grafo orientato con $m - 1$ archi.
Sia $(\bar{u}, \bar{v}) \in A$ e sia $G'(V,\ A' = A \setminus \{\ (\bar{u}, \bar{v})\ \})$ ottenuto da G togliendo $(\bar{u}, \bar{v})$.
Allora:

Si somma $+1$ perché in G c'è un arco entrante in più su $\bar{v}$ ed uno uscente in più da $\bar{u}$ dato che $(\bar{u}, \bar{v}) \in A$.

$$\sum_{v\in V} \text{In-deg}_G(v) = \sum_{v\in V} \text{In-deg}_{G'}(v) + 1$$
$$\sum_{v\in V} \text{Out-deg}_G(v) = \sum_{v\in V} \text{Out-deg}_{G'}(v) + 1$$

$|A'| = |A| - 1 = m - 1$ e

$$\sum_{v\in V} \text{In-deg}_{G'}(v) = \sum_{v\in V} \text{Out-deg}_{G'}(v) = m - 1 = |A'|$$

Quindi in G' vale l'ipotesi induttiva.
Ora in G:

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{v\in V} \text{In-deg}_G(v) = \sum_{v\in V} \text{Out-deg}_G(v) \\ &= \underbrace{\underbrace{\sum_{v\in V} \text{In-deg}_{G'}(v)}_{|A'|=m-1} + 1}_{m=|A|} = \underbrace{\underbrace{\sum_{v\in V} \text{Out-deg}_{G'}(v)}_{|A'|=m-1} + 1}_{m=|A|}\end{aligned}$$

□

1.5 Sottografi

Definizione 1.16 (sottografo). Dato $G(V, E)$ grafo non orientato semplice, un suo *sottografo* è un grafo $G'(V', E')$ con $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Definizione 1.17 (sottografo indotto). Dato $G(V, E)$ grafo non orientato semplice, un suo *sottografo indotto* è un suo sottografo $G'(V', E')$ tale che $\forall (u, v) \in E$, se $u, v \in V' \implies (u, v) \in E'$.

Esempio 1.5.1. In figura 1.15 sono raffigurati un grafo $G(V, E)$, un suo sottografo $G'(V' = \{a, d, f, e\}, E' = \{(a, d), (a, f)\})$ ed un suo sottografo indotto (da V') $G''(V', E'' = \{(a, d), (a, f), (d, f), (f, e)\})$.

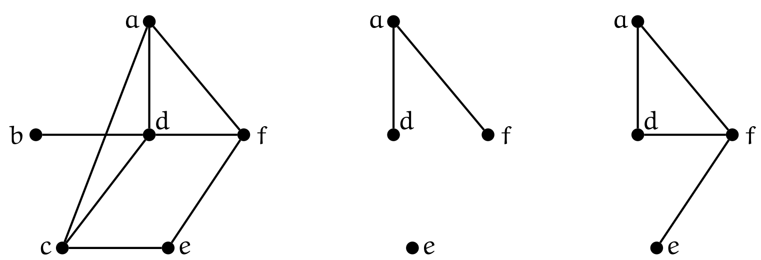


Figura 1.15: Rispettivamente: un grafo $G(V, E)$, un suo sottografo ed un suo sottografo indotto.

1.6 Grafi bipartiti

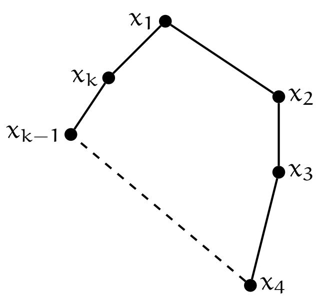
Riprendiamo ora la discussione sui grafi bipartiti che sono stati definiti a pagina 5. Un grafo è *bipartito* se i suoi vertici sono partizionati in due sottoinsiemi, V_1 e V_2 ed ogni spigolo è incidente in un vertice di V_1 e uno di V_2. Il minimo numero di spigoli che un grafo bipartito può avere è 0, mentre il massimo é $|V_1| \cdot |V_2|$.

Proposizione 1.6.1 (condizione necessaria e sufficiente per grafi bipartiti). *Se* $G(V, E)$ *è un grafo bipartito e* $G'(V', E')$ *è un suo sottografo allora* $G'(V', E')$

è bipartito. Questo equivale a dire che G' *non è bipartito* $\iff$ G *non è bipartito.*

Teorema 1.6.2. *Un grafo* $G(V, E)$ *è bipartito* $\iff$ *ogni circuito di* G *ha lunghezza pari (la lunghezza di un circuito è il numero degli spigoli).*

Dimostrazione. Dimostriamo prima $\Longrightarrow$) e poi $\Longleftarrow$).
$\Longrightarrow$) Sia G un grafo bipartito e $C = x_1$ - ... - x_k - x_1 un suo circuito di lunghezza k. Per la definizione di grafo bipartito i nodi del circuito devono essere del tipo: $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, $x_3 \in V_1$, ...
Più precisamente: $x_j \in V_1$ se j è dispari e $x_j \in V_2$ se j è pari, con $j = 1, \dots, k$.
Poiché $(x_1, x_k) \in E$, $x_1 \in V_1 \Longrightarrow x_k \in V_2 \Longrightarrow k$ è pari e, per come è stato definito il circuito, questo ha lunghezza k.
$\Longleftarrow$) Sia G un grafo con tutti i circuiti di lunghezza pari. Sia $v \in V$, lo "mettiamo" in V_1, tutti i suoi adiacenti allora stanno in V_2. DA COMPLETARE $\square$



ci va l'algoritmo...

1.7 Grafi isomorfi

Definizione 1.18 (grafi isomorfi). Due grafi $G(V, E)$ e $G'(V', E')$ sono *isomorfi* se esiste una corrispondenza biunivoca (*isomorfismo*) tra i vertici di V e quelli di V' tali che: due vertici di V sono adiacenti in $G \iff$ i corrispondenti vertici di V' sono adiacenti in G'.

Stabilire se due grafi sono isomorfi è un problema difficile, l'unico modo che si ha per sapere se lo sono è "cercare l'isomorfismo". Due grafi sono isomorfi se:

- hanno lo stesso numero di vertici
- hanno lo stesso numero di spigoli
- hanno lo stesso numero di vertici con lo stesso grado
- hanno gli stessi sottografi indotti
- i complementari devono essere isomorfi