Matematica Discreta
Laurea in Informatica

Andrea Favero

Luglio 2016

Indice

Capitolo 1

Grafi

1.1 Grafi non orientati

Definizione 1.1 (grafo non orientato semplice). Un *grafo non orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, E) dove: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme finito di *vertici* (o *nodi*) ed E è un insieme di coppie *non ordinate* di vertici dette *spigoli*[1] o *lati*. Il grafo è detto *semplice* perché non può avere né cappi né spigoli paralleli.

Esempio 1.1.1. In Figura 1.1 è rappresentato il seguente grafo non orientato semplice:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_2, v_3), (v_4, v_7), (v_6, v_5), (v_4, v_2), (v_3, v_5), (v_5, v_7)\}$$

Si dice che lo spigolo (v_1, v_3) ha come *estremi* i vertici v_1 e v_3. ■

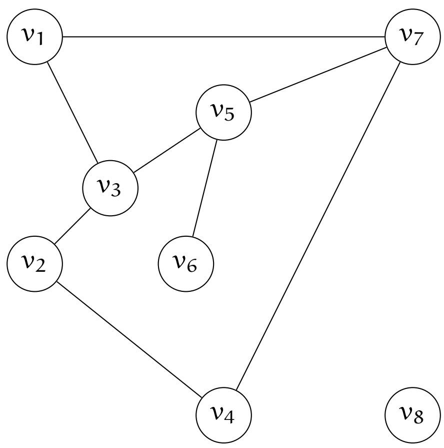


Figura 1.1: un grafo semplice non orientato

In molti libri di testo E viene rappresentato come $E = \{\ \{v_i, v_j\},\ \dots, \{v_k, v_m\}\ \}$ perché non c'è alcun ordine tra gli spigoli.

[1]In inglese gli spigoli sono denominati *edges*, per questo motivo l'insieme che li contiene è chiamato E.

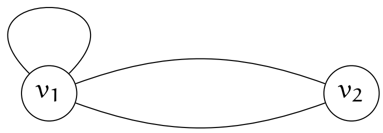


Figura 1.2: un grafo non orientato che non è semplice

Esempio 1.1.2. Il grafo non orientato in Figura 1.2 non è semplice poiché presenta un cappio sul vertice v_1 e ci sono due spigoli paralleli tra i vertici v_1 e v_2. ■

Definizione 1.2. Uno spigolo è detto *incidente* nei suoi estremi. I vertici di uno spigolo sono detti *adiacenti*.

Definizione 1.3 (percorso). Un *percorso* è una sequenza di vertici *non necessariamente distinti* in cui ogni coppia di vertici consecutivi forma uno spigolo.

Definizione 1.4 (cammino). Un *cammino* è una sequenza di vertici *distinti* in cui ogni coppia di vertici consecutivi forma uno spigolo. Alternativamente si può dire che un cammino è un percorso i cui vertici sono tutti distinti.

Esempio 1.1.3. Nel grafo in Figura 1.3 è presente il cammino v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2. Un'altra notazione per indicare il cammino è: $(v_4, v_7, v_5, v_3, v_2)$. Lo stesso tipo di notazione è valido anche per i percorsi.

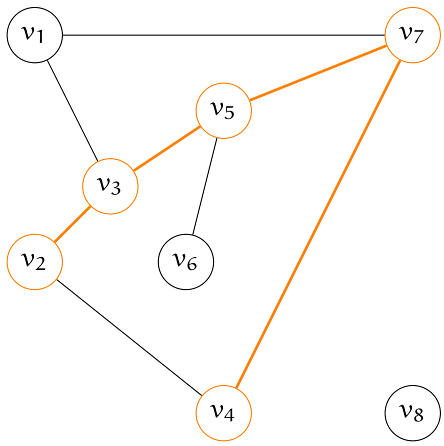


Figura 1.3: un cammino v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2

■

Teorema 1.1.1. *Se un grafo contiene un percorso che ha come estremità i vertici v_1 e v_n allora dal percorso è possibile estrarre un cammino che ha come estremità v_1 e v_n.*

Dimostrazione. Sia P un percorso che ha come estremità i vertici v_1 e v_n. Se un vertice v_i (con $i \in \{1, \ldots, n\}$) si ripetesse nel percorso, allora esisterebbe un sottopercorso $v_i - v_{k_1} - \cdots - v_{k_h} - v_i$ contenuto in P. Togliendo il sottopercorso $v_i - v_{k_1} - \cdots - v_{k_h}$ da P si potrebbe costruire un percorso più corto. Una volta tolti da P tutti i sottopercorsi che contengono nodi ripetuti, P è un cammino di estremità v_1 e v_n. □

Definizione 1.5 (circuito). Cammino nel quale il primo e l'ultimo vertice sono adiacenti.

Esempio 1.1.4. Il grafo in Figura 1.4 contiene il circuito: v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 - v_4.

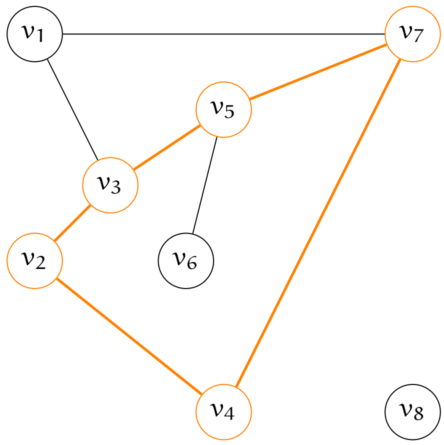


Figura 1.4: un circuito v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 - v_4

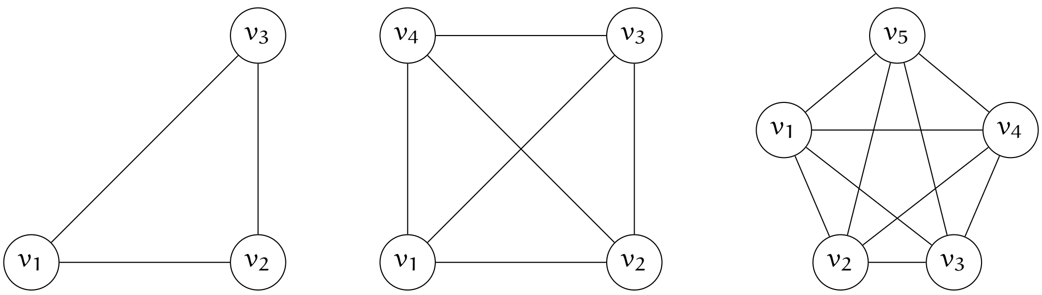
■

Definizione 1.6 (lunghezza di un circuito/cammino). La lunghezza di un circuito o di un cammino è il numero degli spigoli formati dai nodi del cammino/circuito.

Definizione 1.7 (grafo connesso). Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega, altrimenti si dice *disconnesso* o *sconnesso*.

Definizione 1.8 (grafo completo). Un grafo è *completo* se ogni sua coppia di vertici è collegata da uno spigolo. Se un grafo completo ha n vertici allora si dice che è un grafo k_n.

Esempio 1.1.5. In Figura 1.5 sono rappresentati 3 grafi completi.



Nell'ordine:

- un grafo k_3
- un grafo k_4
- un grafo k_5

Figura 1.5: un k_3, k_4 e k_5

■

Definizione 1.9 (grafo bipartito). Un grafo $G = (V, E)$ è *bipartito* se i suoi vertici sono partizionati in due sottoinsiemi di V, rispettivamente U e W, ed ogni suo spigolo è incidente in un vertice di U ed in uno di W (notare che $U \cap W = \emptyset$ e $U \cup W = V$).

Esempio 1.1.6. Due grafi bipartiti sono rappresentati in Figura 1.6.

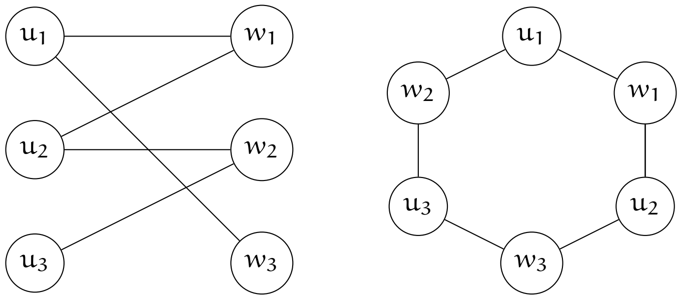


Figura 1.6: 2 grafi bipartiti

■

Definizione 1.10 (grafo bipartito completo k_{n_1,n_2}). Un grafo bipartito è *completo* se tutti i suoi vertici partizionati in un sottoinsieme sono adiacenti a tutti i vertici dell'altro sottoinsieme.

Esempio 1.1.7. Due grafi bipartiti completi sono rappresentati in Figura 1.7.

Nell'ordine:

- un grafo $k_{1,3}$
- un grafo $k_{2,4}$

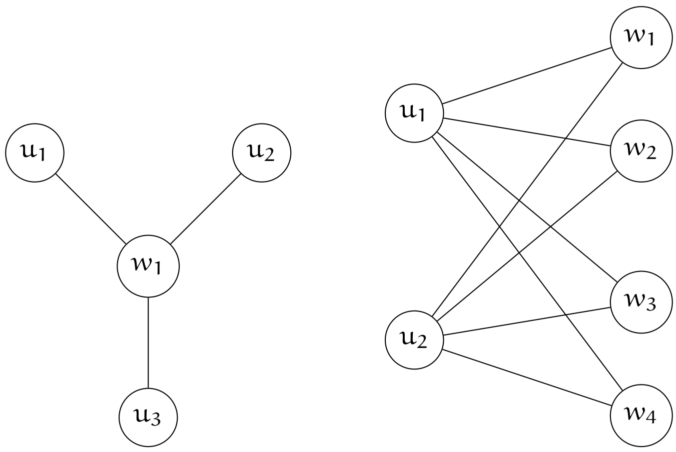


Figura 1.7: 2 grafi bipartiti completi

■

Definizione 1.11 (foresta). Una *foresta* è un grafo senza cicli (*aciclico*).

Esempio 1.1.8. In Figura 1.8 è rappresentata una foresta.

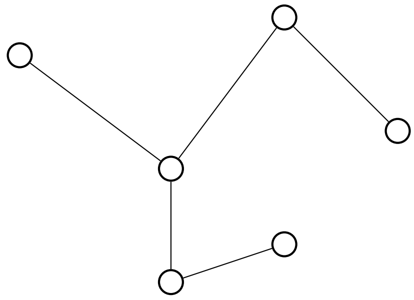


Figura 1.8: Una foresta

■

Definizione 1.12 (albero). Un *albero* è una foresta connessa.

SPOSTARE FORESTA E GRAFO (AGGIUNGENDO ESEMPIO PER QUEST'ULTIMO) DOPO AVER CREATO UN CAPITOLO SUGLI ALBERI
aggiungere una sezione per i multigrafi

1.2 Grafi orientati

Definizione 1.13 (grafo orientato semplice). Un *grafo orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, A) dove: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme finito di vertici (o nodi) ed A è un insieme di *coppie ordinate* di vertici dette *archi*.

Esempio 1.2.1.

$$G = (V, A) \text{ con } V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e}$$

$$A = \{(v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_2)\}$$

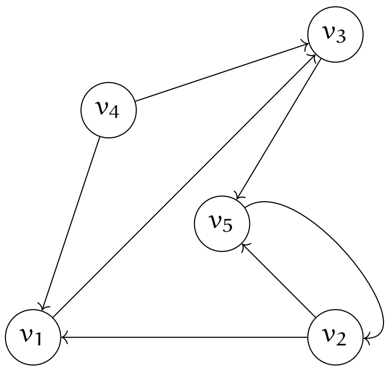


Figura 1.9: un grafo orientato semplice

■

Il grafo è semplice perché non ha né cappi né archi paralleli. Il nodo iniziale di un arco è detto *testa* e quello finale è detto *coda*.

Esempio 1.2.2.

$$G = (V, A) \quad V = \{v_1, v_2\} \quad A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\}$$

G è un grafo orientato. L'arco $(v_1, v_2) \in A$ ha v_1 come nodo iniziale e v_2 come finale.

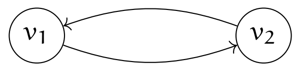


Figura 1.10: un grafo orientato semplice

■

Esempio 1.2.3. L'immagine in Figura 1.11 non rappresenta un grafo orientato semplice perché i vertici v_1 e v_2 sono collegati da due archi paralleli (ovvero due archi che hanno lo stesso nodo iniziale ed anche quello finale), inoltre c'è un cappio su v_1.

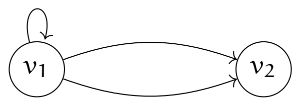


Figura 1.11: grafo orientato che non è semplice (un *multigrafo* orientato)

■

Definizione 1.14 (cammino orientato). Un *cammino orientato* è una sequenza di nodi distinti dove, ogni coppia di nodi consecutivi nel cammino è collegata da un arco.

Esempio 1.2.4. Nel grafo in Figura 1.12 è presente il cammino orientato:

$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2$$

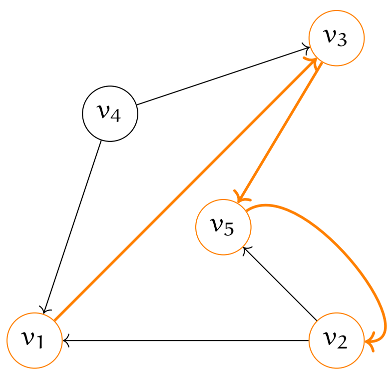


Figura 1.12: cammino orientato

■

Definizione 1.15 (circuito orientato). Cammino orientato nel quale esiste un arco dal primo all'ultimo nodo.

Esempio 1.2.5. In Figura 1.13 è rappresentato il circuito orientato

$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_1$$

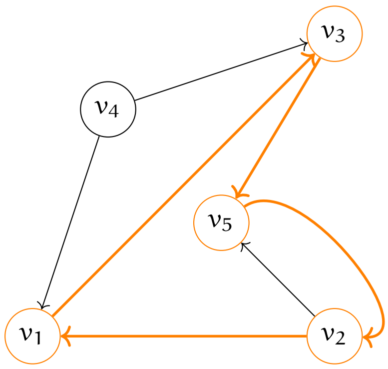


Figura 1.13: circuito orientato

■

Definizione 1.16 (grafo fortemente connesso). Per ogni coppia di nodi esiste un cammino orientato che li collega.

Esempio 1.2.6.

$$G(V = \{v_1, v_2, v_3\},\ A = \{(v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2)\})$$

è un grafo fortemente connesso ed è in Figura 1.14

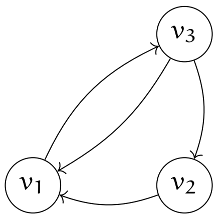


Figura 1.14: grafo fortemente connesso

■

Definizione 1.17 (torneo). Un torneo è un grafo orientato semplice in cui ogni coppia di vertici *distinti* è collegata da un arco (che può avere qualsiasi direzione ovvero, dati $u, v \in V$ può essere (u, v) oppure (v, u)). È chiamato torneo perché, un tale grafo di n nodi corrisponde a un torneo in cui ogni membro di un gruppo di n giocatori gioca contro tutti gli altri $n - 1$ giocatori e ad ogni partita un giocatore vince e l'altro perde.

Esempio 1.2.7. In Figura 1.15 è rappresentato un torneo.

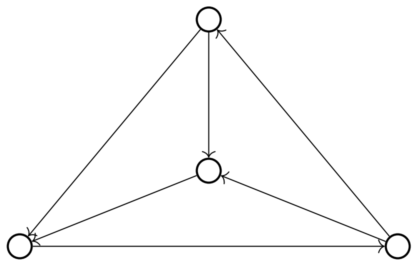


Figura 1.15: Un torneo

■

1.3 Prime proprietà dei grafi non orientati

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato semplice. Non è difficile notare che il minimo numero di spigoli che un grafo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è:

$$\frac{|V|\ (|V| - 1)}{2}$$

($|V|$ indica la *cardinalità* di V. La cardinalità di un insieme finito è un numero naturale che rappresenta la quantità di elementi che costituiscono l'insieme.)

Esempio 1.3.1. In Figura 1.16 sono rappresentati dei grafi che hanno il massimo numero di spigoli che è possibile avere rispetto al numero dei loro vertici $|V| = 3$ e $|V| = 4$.

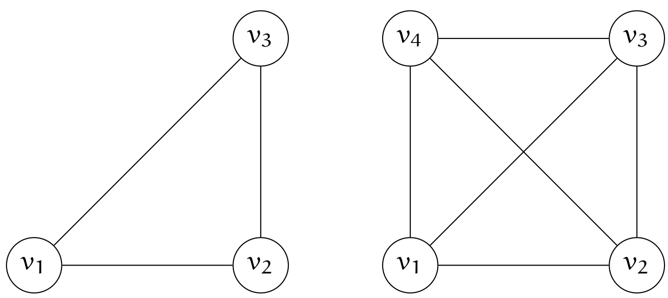


Figura 1.16: due grafi rispettivamente con $|V| = 3$ e $|V| = 4$

■

Definizione 1.18 (grado di un vertice). Si chiama *grado* di un vertice v e si indica con $gr(v)$ il numero di spigoli incidenti in v.

Esempio 1.3.2. $gr(v_1) = 1, \quad gr(v_2) = 3, \quad gr(v_3) = gr(v_4) = gr(v_5) = 2.$

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10 = 2|E| = 2 \times 5$$

Il grafo relativo all'esempio è in 1.17

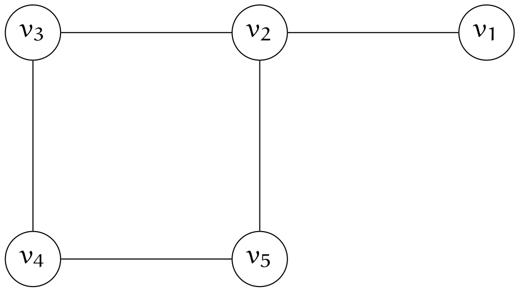


Figura 1.17

■

Teorema 1.3.1. *In ogni grafo semplice non orientato* $G = (V, E)$*, la somma dei gradi di tutti i vertici è uguale al doppio del numero degli spigoli.*

$$\sum_{v \in V} \mathrm{gr}(v) = 2|E| \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Per induzione su $m = |E|$:
caso base: $m = 0$

$\mathrm{gr}(v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad |E| = 0.$

passo induttivo: $P(m-1) \implies P(m)$

sia $G = (V, E)$ un grafo con m spigoli. Si suppone che 1.1 sia valida $\forall$ grafo con $m-1$ spigoli. Siano $(\bar{u}, \bar{v}) \in E$ e $G' = (V, E' = E \setminus \{(\bar{u}, \bar{v})\})$ ottenuto da G togliendo $(\bar{u}, \bar{v})$.
Si può notare che $\mathrm{gr}_G(\bar{u}) = \mathrm{gr}_{G'}(\bar{u}) + 1$, $\mathrm{gr}_G(\bar{v}) = \mathrm{gr}_{G'}(\bar{v}) + 1$ mentre, $\forall x \in V$ tale che $x \neq \bar{u}, x \neq \bar{v}$ si ha $\mathrm{gr}_G(x) = \mathrm{gr}_{G'}(x)$.
$|E'| = |E| - 1 = m - 1 \implies$ in G' vale l'ipotesi induttiva $\implies \sum_{v \in V} \mathrm{gr}_{G'}(v) = 2|E'|$.
In G:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} \mathrm{gr}(v) &= \sum_{\substack{v \in V \\ v \neq \bar{u} \\ v \neq \bar{v}}} \mathrm{gr}_G = (v) + \mathrm{gr}_G(\bar{u}) + \mathrm{gr}_G(\bar{v}) \\
&= \sum_{\substack{v \in V \\ v \neq \bar{u} \\ v \neq \bar{v}}} \mathrm{gr}_{G'}(v) + \mathrm{gr}_{G'}(\bar{u}) + 1 + \mathrm{gr}_{G'}(\bar{v}) + 1 \\
&= \sum_{v \in V} \mathrm{gr}_{G'}(v) + 2 \underbrace{=}_{\text{ipotesi induttiva}} 2|E'| + 2 \\
&= 2(m-1) + 2 \\
&= 2m \\
&= 2|E|
\end{aligned}$$

□

Corollario 1.3.2. *In ogni grafo non orientato, il numero dei vertici di grado dispari è pari.*

Dimostrazione. Siano $G = (V, E)$ un grafo non orientato semplice, $V_d = \{v \in V \mid gr(v)$ è dispari$\}$ e $V_p = \{v \in V \mid gr(v)$ è pari$\}$; quindi $V_d \cap V_p = \emptyset$ e $V_d \cup V_p = V$.

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} gr(v) &= 2|E| \\ &= \underbrace{\sum_{v\in V_p} gr(v)}_{\text{pari}} + \sum_{v\in V_d} gr(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}}\end{aligned}$$

Poichè la somma dei gradi dei vertici che hanno grado pari è un numero pari, allora anche la somma dei gradi dei vertici che hanno grado dispari è un numero pari perché:

$$\sum_{v\in V_d} gr(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}} - \underbrace{\sum_{v\in V_p} gr(v)}_{\text{pari}}$$

e la differenza tra due numeri pari è un numero pari. Essendo quindi la somma dei gradi dei vertici di grado dispari un numero pari, allora anche il numero dei vertici di grado dispari è un numero pari. Questo perchè se si sommano n numeri dispari, la loro somma è un numero pari se e solo se n è pari. □

Esercizio 1.3.1. Trovare $G = (V, E)$ con $|V| = 7$ e $gr(v) = 5$ $\forall v \in V$.
Svolgimento: non esiste alcun grafo di questo tipo, per il corollario di cui sopra. Infatti ho 7 vertici di grado dispari ma, il numero dei vertici di grado dispari deve essere un numero pari, assurdo. ■

1.4 Prime proprietà dei grafi orientati

Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato semplice. Allora il minimo numero di archi che questo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è $|V| \cdot (|V| - 1)$.

Esempio 1.4.1. Due grafi orientati con il loro massimo numero di archi possibili sono rappresentati in Figura 1.18 ■

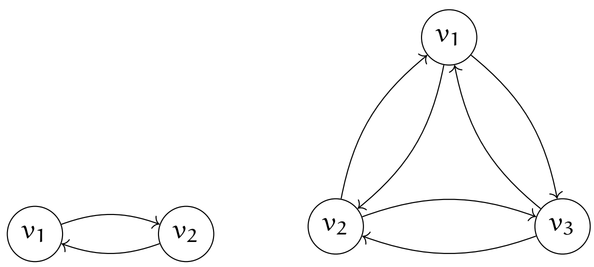


Figura 1.18: Due grafi orientati con il loro massimo numero di archi possibile

Definizione 1.19 (grado entrante di un vertice). Si chiama grado *entrante* di un vertice v e si indica con $\mathrm{In\text{-}deg}(v)$ il numero di archi entranti nel vertice v.

Definizione 1.20 (grado uscente di un vertice). Si chiama grado *uscente* di un vertice v e si indica con $\mathsf{Out\text{-}deg}(v)$ il numero di archi uscenti dal vertice v.

Esempio 1.4.2. La Figura 1.19 rappresenta un grafo con $\mathsf{In\text{-}deg}(v_1) = 1$ e $\mathsf{Out\text{-}deg}(v_1) = 3$

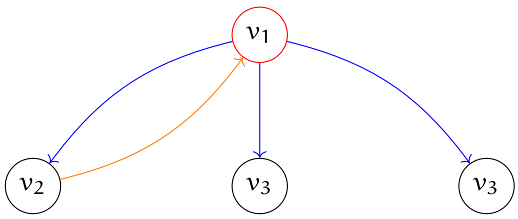


Figura 1.19: esempio con $\mathsf{In\text{-}deg}(v_1) = 1$ e $\mathsf{Out\text{-}deg}(v_1) = 3$

■

Teorema 1.4.1. *In ogni grafo orientato semplice* $G = (V, A)$ *sono uguali tra loro: la somma dei gradi uscenti dei nodi, la somma dei gradi entranti dei nodi, il numero di archi del grafo.*

$$\sum_{v \in V} \mathsf{In\text{-}deg}(v) = \sum_{v \in V} \mathsf{Out\text{-}deg}(v) = |A| \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Per induzione su $m = |A|$:
caso base: $m = 0$
$\sum_{v \in V} \mathsf{In\text{-}deg}(v) = \sum_{v \in V} \mathsf{Out\text{-}deg}(v) = m = |A| = 0.$
passo induttivo: $P(m-1) \implies P(m)$
sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con m archi. Si suppone che 1.2 sia valida ∀ grafo orientato con $m - 1$ archi.
Sia $(\bar{u}, \bar{v}) \in A$ e sia $G' = (V,\ A' = A \setminus \{\ (\bar{u}, \bar{v})\ \})$ ottenuto da G togliendo $(\bar{u}, \bar{v})$. Allora:[2]

$$\sum_{v \in V} \mathsf{In\text{-}deg}_G(v) = \sum_{v \in V} \mathsf{In\text{-}deg}_{G'}(v) + 1$$

$$\sum_{v \in V} \mathsf{Out\text{-}deg}_G(v) = \sum_{v \in V} \mathsf{Out\text{-}deg}_{G'}(v) + 1$$

$|A'| = |A| - 1 = m - 1$ e

$$\sum_{v \in V} \mathsf{In\text{-}deg}_{G'}(v) = \sum_{v \in V} \mathsf{Out\text{-}deg}_{G'}(v) = m - 1 = |A'|$$

Quindi in G' vale l'ipotesi induttiva.
Ora in G:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{v \in V} \mathsf{In\text{-}deg}_G(v) = \sum_{v \in V} \mathsf{Out\text{-}deg}_G(v) \\ &= \underbrace{\underbrace{\sum_{v \in V} \mathsf{In\text{-}deg}_{G'}(v)}_{|A'|=m-1} + 1}_{m=|A|} = \underbrace{\underbrace{\sum_{v \in V} \mathsf{Out\text{-}deg}_{G'}(v)}_{|A'|=m-1} + 1}_{m=|A|} \end{aligned}$$

□

[2] Si somma 1 perché in G ci sono un arco entrante in più su $\bar{v}$ ed uno uscente in più da $\bar{u}$ dato che $(\bar{u}, \bar{v}) \in A$.

1.5 Sottografi

Definizione 1.21 (sottografo). Dato $G = (V, E)$ grafo non orientato semplice, un suo *sottografo* è un grafo $G' = (V', E')$ con $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Definizione 1.22 (sottografo indotto). Dato $G = (V, E)$ grafo non orientato semplice, un suo *sottografo indotto* è un suo sottografo $G' = (V', E')$ tale che $\forall (u, v) \in E$, se $u, v \in V' \implies (u, v) \in E'$.

Esempio 1.5.1. In Figura 1.20 sono rappresentati un grafo $G = (V, E)$, un suo sottografo $G' = (V' = \{a, d, f, e\}, E' = \{(a, d), (a, f)\})$ ed un suo sottografo indotto (da V') $G'' = (V', E'' = \{(a, d), (a, f), (d, f), (f, e)\})$.

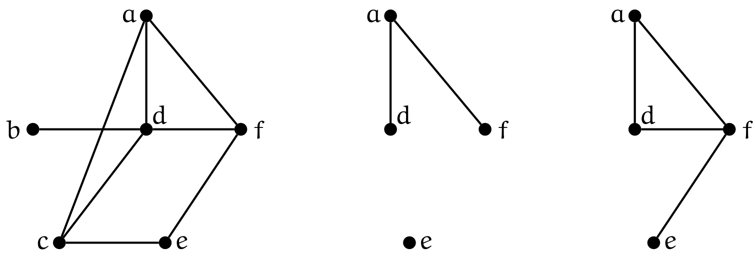


Figura 1.20: Rispettivamente: un grafo $G = (V, E)$, un suo sottografo ed un suo sottografo indotto.

■

1.6 Grafi bipartiti

Riprendiamo ora la discussione sui grafi bipartiti che sono stati definiti a pagina 4. Un grafo è *bipartito* se i suoi vertici sono partizionati in due sottoinsiemi, V_1 e V_2 ed ogni spigolo è incidente in un vertice di V_1 e uno di V_2. Il minimo numero di spigoli che un grafo bipartito può avere è 0, mentre il massimo é $|V_1| \cdot |V_2|$.

Proposizione 1.6.1 (condizione necessaria e sufficiente per grafi bipartiti). *Se* $G = (V, E)$ *è un grafo bipartito e* $G' = (V', E')$ *è un suo sottografo allora* $G' = (V', E')$ *è bipartito. Questo equivale a dire che* G' *non è bipartito* $\iff$ G *non è bipartito.*

Teorema 1.6.2. *Un grafo* $G = (V, E)$ *è bipartito* $\iff$ *ogni circuito di* G *ha lunghezza pari (la lunghezza di un circuito è il numero degli spigoli).*

Dimostrazione. Consideriamo solamente i grafi connessi dato che ogni circuito è contenuto in una componente connessa e se le componenti connesse sono bipartite allora anche il grafo è bipartito.
$\implies$) Sia G un grafo bipartito e $c = x_1$ - ... - x_k - x_1 un suo circuito di lunghezza k (in Figura 1.21). Per la definizione di grafo bipartito i nodi del circuito devono essere del tipo: $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, $x_3 \in V_1$, ...
Più precisamente: $x_j \in V_1$ se j è dispari e $x_j \in V_2$ se j è pari, con $j = 1, \ldots, k$.
Poiché $(x_1, x_k) \in E$, $x_1 \in V_1 \implies x_k \in V_2 \implies k$ è pari e, per come è stato definito il circuito, questo ha lunghezza k.
$\impliedby$) Sia G un grafo con tutti i circuiti di lunghezza pari. Sia $v \in V$, lo "mettiamo" in V_1, tutti i suoi adiacenti li "mettiamo" in V_2, poi prendiamo tutti i vertici distanti 2 da v e li mettiamo in V_1 . . . e così via. In generale se esiste un cammino di lunghezza pari che parte da v ed arriva fino

ad un certo nodo n, allora mettiamo n in V_1, se invece il cammino ha lunghezza dispari allora mettiamo n in V_2. Non possono esistere spigoli che collegano due nodi che si trovano entrambi in V_1 o in V_2. Supponiamo che $\exists u, w$ tali che entrambi appartengono a V_1, che $\exists (u, w) \in E$; deve esistere un cammino $c = u - \cdots - z - w$ di lunghezza pari (quindi con $z \in V_2$), se alla fine del cammino si aggiunge lo spigolo (u, w) allora si ottiene un circuito formato da due cammini, il primo è c che ha lunghezza pari ed il secondo è (u, v) che ha lunghezza dispari. Il circuito allora ha lunghezza dispari, ma è assurdo perchè la nostra ipotesi assume che G sia un grafo che ha solo circuiti di lunghezza pari. Un ragionamento analogo lo si può fare se u e w appartengono a V_2.

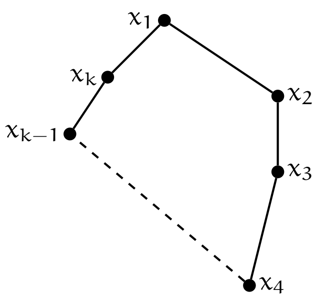


Figura 1.21: circuito parte $\Longrightarrow$) della dimostrazione

□

Algorithm 1 Algoritmo per verifica bipartizione di un grafo

Da ripetere $\forall$ componente connessa di $G = (V, E)$:
$V_1 = V_2 = \emptyset$
prendo un qualsiasi $v \in V$ e lo metto in V_1
for each $u \in V_1 \cup V_2$ do
  {La prima volta entro per forza nell'if perché u può essere solo uguale a v}
  if $u \in V_1$ then
    aggiungo a V_2 tutti i vertici adiacenti a u che non sono in $V_1 \cup V_2$
  else
    aggiungo a V_1 tutti i vertici adiacenti a u che non sono in $V_1 \cup V_2$
  end if
end for
G è bipartito $\iff$ ogni spigolo ha una estremità in V_1 ed una in V_2

1.7 Connettività e tagli

Definizione 1.23 (Connessione di 2 vertici). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e siano $u, v \in V$. u e v sono *connessi* se esiste un cammino che ha come estremità u e v.

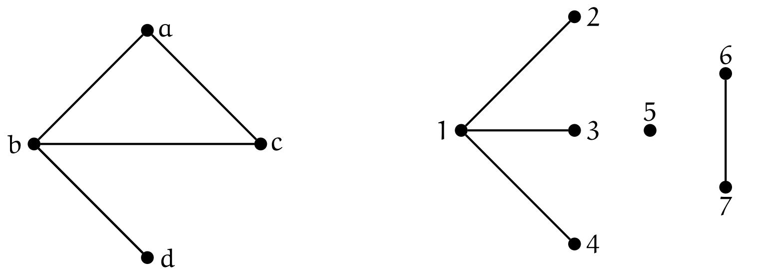
La connessione è una relazione di equivalenza nell'insieme V dei vertici:

- u è connesso a se stesso (riflessività)

- u è connesso a $v \implies v$ è connesso a u (simmetria)
- u è connesso a v e v è connesso a $t \implies u$ è connesso a t (transitività)

u e v sono connessi solo se, partizionato V in $V_1, V_2, \ldots, V_k$ insiemi, sia u che v appartengono allo stesso insieme V_i (con $1 \leqslant i \leqslant k$). I k insiemi rappresentano le *componenti connesse* del grafo G. Tale grafo G è *connesso* se esiste una unica partizione[3] (quindi $k = 1$), altrimenti si dice *sconnesso* ($k \geqslant 1$). Le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali.

Esempio 1.7.1. In Figura 1.22 sono rappresentati un grafo connesso ed un grafo sconnesso con 3 componenti connesse.



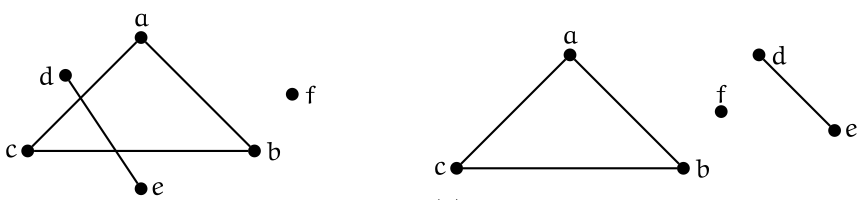
(a) grafo connesso

(b) grafo sconnesso con 3 componenti connesse

Figura 1.22: un grafo connesso ed un grafo sconnesso

■

Esempio 1.7.2. In Figura 1.23 sono rappresentati un grafo e le sue componenti connesse (ovvero i suoi sottografi connessi massimali).



(a) un grafo G

(b) le componenti connesse di G

Figura 1.23: un grafo e le sue componenti connesse

■

Definizione 1.24 (taglio). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e sia $S \subseteq V$. Il *taglio* (*cut*) associato ad S è l'insieme degli *spigoli che hanno esattamente una estremità* in S e si indica con $\delta(S)$.

$$\delta(S) = \{(u, v) \in E \colon |S \cap \{u, v\}| = 1\}$$

Si dice che $\delta(S)$ separa u e v se $|S \cap \{u, v\}| = 1$.

[3] Una *partizione* di V è una sua scomposizione in parti disgiunte

Esempio 1.7.3. esempio: $V = \{a, b, c, d, e\}$ sono i nodi del grafo in Figura 1.24 che, ha come taglio associato ad $S = \{a, b\}$ l'insieme $\delta(S) = \{(a, d), (a, c), (b, c), (b, e)\}$.

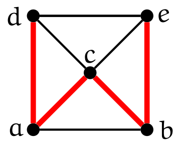


Figura 1.24: Taglio associato ad $S = \{a, b\}$

■

Teorema 1.7.1. *Sia* $P = u - \cdots - v$ *un cammino su un grafo* $G = (V, E)$ *e sia* $\delta(S)$ *un taglio che separa* u *da* v*, allora* $|P \cap \delta(S)| \geqslant 1$*.* [4]

Dimostrazione. Per la definizione di taglio $\exists S \subset V$ in cui $u \in S$ o $v \in S$ ma, sia u che v non possono appertenere entrambi allo stesso insieme S. Supponiamo che $u \in S$ (un ragionamento analogo lo si può fare per v), allora DA TERMINARE!!! Lemma 1.3.1 pag 14 Conforti-Faenza □

Teorema 1.7.2. *Sia* $G = (V, E)$ *un grafo non orientato, allora* $u, v \in V$ *appartengono alla stessa componente connessa di* $G \iff \delta(S) \neq \emptyset \; \forall \delta(S \neq \emptyset)$ *che separa* u *e* v*.*

Dimostrazione. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato connesso, sia $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ e sia $\delta(S)$ un taglio di G che separa due nodi u e v. Dato che G è connesso allora esiste un cammino P tra u e v, per il Teorema 1.7.1 sappiamo che $|P \cap \delta(S)| \geqslant 1$ quindi $\delta(S) \neq \emptyset$. DA TERMINARE!!! Lemma 1.3.3 pag 14 Conforti-Faenza □

CAMMINO-MINIMO(G, v)

// $G = (V, E)$ è un grafo e $v \in V$ è un suo vertice
// l'lgoritmo determina se $\exists$ un cammino tra i vertici u e v
$C = \emptyset$
$C \leftarrow v$ // prendere v e metterlo nell'insieme C
// Si esaminano tutti i nodi nella componente connessa
for each $v \in V$
    Aggiungere a C tutti i vertici adiacenti ad u che non sono già in C
// Arrivati a questo punto, C è la componente connessa che contieve v
// se contiene anche u allora $\exists$ un cammino tra u e v
// notare che $\delta(C) \neq \emptyset$

Definizione 1.25 (connettività sugli spigoli). Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Si dice connettività sugli spigoli e si indica con $\lambda(G)$ il minimo numero di spigoli la cui rimozione trasforma G in un grafo sconnesso.

[4] Con $P \cap \delta(S)$ facciamo riferimento all'intersezione dell'insieme formato da tutti gli spigoli che sono parte del cammino P con $\delta(S)$

1.8 Grafi isomorfi

Definizione 1.26 (grafi isomorfi). Due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ sono *isomorfi* se esiste una corrispondenza biunivoca (*isomorfismo*) tra i vertici di V e quelli di V' tale che: due vertici di V sono adiacenti in $G \iff$ i corrispondenti vertici di V' sono adiacenti in G'.

Stabilire se due grafi sono isomorfi è un problema difficile, per sapere se lo sono si può "cercare l'isomorfismo". Due grafi sono isomorfi se:[5]

1. hanno lo stesso numero di vertici
2. hanno lo stesso numero di spigoli
3. hanno lo stesso numero di vertici con lo stesso grado
4. hanno gli stessi sottografi indotti
5. i loro complementari devono essere isomorfi

Esempio 1.8.1. In Figura 1.25 sono rappresentati 2 grafi isomorfi

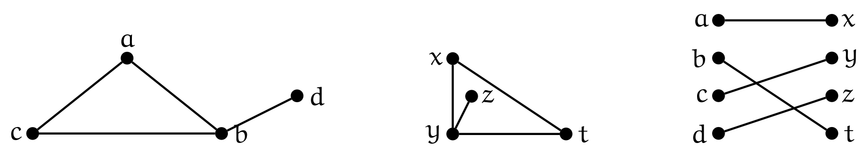


Figura 1.25: 2 grafi isomorfi

■

Esempio 1.8.2. In Figura 1.26 sono rappresentati 2 grafi complementari non isomorfi

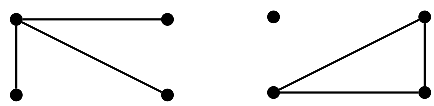
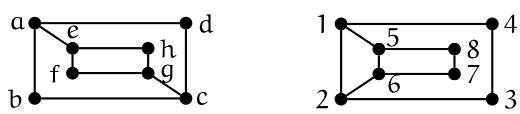


Figura 1.26: 2 grafi complementari non isomorfi

■

Se le prime tre condizioni della lista sono verificate, si può provare a costruire il possibile isomorfismo controllando che la condizione 4 sia verificata. Lo si può fare costruendo sottografi indotti *accoppiando tra loro vertici che nel grafo di partenza hanno stesso grado e sono a loro volta collegati tra loro.*



...

[5]sono condizioni necessarie ma *non sufficienti*

Capitolo 2

Combinatoria

2.1 Principi di addizione e moltiplicazione

Definizione 2.1 (Principio di addizione). Si vuole scegliere un oggetto tra gli elementi di m insiemi *disgiunti*. Il primo insieme contiene r_1 oggetti, il secondo contiene r_2 oggetti, ..., l'n-esimo contiene r_m oggetti. Il numero di possibili scelte di un oggetto da uno degli m insiemi disgiunti è $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$.

Esempio 2.1.1. In una scuola vengono offerti due corsi opzionali, uno di scacchi e uno di violino. Il corso di violino viene frequentato da 40 studenti, quello di scacchi 30. Quanti studenti hanno scelto corsi opzionali?

Soluzione: Per poter utilizzare il principio di addizione è necessario che gli insiemi siano disgiunti ed in questo caso, non si sa se lo sono oppure no perché, alcuni studenti potrebbero frequentare sia il corso di scacchi che quello di violino. Per ottenere degli insiemi disgiunti è necessario dividere gli studenti in tre gruppi: quelli che frequentano solo il corso di violino, quelli che frequentano solo il corso di scacchi e quelli che li frequentano entrambi. Dai dati del problema non è chiaro quanti siano i k studenti che frequentano entrambi i corsi. La cardinalità dei nuovi insiemi ottenuti è la seguente:

$$\begin{aligned} 40 - k &= \#\text{ studenti che frequentano solamente il corso di violino} \\ 30 - k &= \#\text{ studenti che frequentano solamente il corso di scacchi} \\ k &= \#\text{ studenti che frequentano entrambi i corsi} \end{aligned}$$

Per il principio di addizione ci sono quindi $(40 - k) + (30 - k) + k$ studenti che hanno scelto di frequentare i corsi opzionali. ■

Definizione 2.2 (Principio di moltiplicazione). Si supponga che un esperimento (un processo/procedura) possa essere suddiviso in m ordinate fasi successive con r_1 differenti esiti per la prima fase, r_2 differenti esiti per la seconda fase,..., r_m differenti esiti per l'm-esima fase. Se il numero di esiti di ciascuna fase è *indipendente* dalle scelte fatte durante le fasi precedenti e se *le m-uple dei risultati finali sono tutte differenti tra di loro*, allora in totale, l'esperimento ha $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m$ differenti esiti.

Definizione 2.3 ((Alternativa) principio di moltiplicazione). Si effettuano m scelte in modo sequenziale. Se:

1. la prima scelta è tra r_1 possibili elementi, la seconda tra r_2 possibili elementi, numero che non dipende dal risultato della prima scelta, ..., la m-esima tra r_m possibili elementi, numero che non dipende dal risultato delle $m-1$ scelte precedenti.

2. m-uple di scelte distinte producono risultati distinti.

allora il numero di scelte distinte è $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m$.

Esempio 2.1.2. Si lanciano due dadi, uno verde ed uno rosso poi si osserva l'esito dell'esperimento.

1. Quanti differenti esiti possono esserci?

2. Quanti possono essere i differenti esiti relativi all'uscita di due facce diverse?

Soluzione:

1. Ogni dado ha sei facce distinte. La prima parte dell'esperimento consiste nel lanciare un dado, la seconda nel lanciare l'altro. Per il principio di moltiplicazione vi sono quindi $6 \cdot 6 = 36$ possibili esiti per questo esperimento.

2. Si utilizza ancora il principio di moltiplicazione: nella prima fase della procedura viene lanciato un dado in cui possono comparire tutte le 6 facce. La seconda fase della procedura, indipendentemente dal particolare valore del primo dado può avere come valori solamente cinque facce.Per questo motivo ci sono $6 \cdot 5 = 30$ esiti. Si noti che per poter applicare il principio di moltiplicazione il vincolo "due facce diverse" deve essere trasformato in "il valore del primo dado lanciato deve essere differente da quello del secondo". (Una soluzione alternativa che non applica il principio è la seguente: poiché un dado ha sei facce distinte, ci sono solamente sei casi in cui possono uscire due dadi con la stessa faccia. Per questo motivo numero di esiti in cui i due dadi hanno facce distinte sono $36 - 6 = 30$). ■

Quando si cerca di risolvere un problema di combinatoria solitamente si cerca di suddividerlo in un moderato numero sottoproblemi di più facile risoluzione. Potrebbero esserci modi più intelligenti per risolverlo ma, se si riesce a ridurlo ad un insieme di sottoproblemi di cui si ha più familiarità, allora è meno probabile compiere degli errori.

Esempio 2.1.3. In uno scaffale di una biblioteca ci sono 11 libri in inglese (distinti), 7 in francese (distinti) e 4 in russo (distinti). In quanti modi si possono scegliere una coppia (non ordinata) di libri che non siano della stessa lingua?

Soluzione: Per il principio di moltiplicazione le coppie non ordinate di libri di inglese e francese ottenibili sono $11 \cdot 7 = 77$, quelle di inglese e russo sono $11 \cdot 4 = 44$, quelle di francese e russo sono $7 \cdot 4 = 28$. Questi tre principi di scelte sono tra loro disgiunti e quindi per il principio di addizione ci sono $77 + 44 + 28 = 149$ diversi modi di scegliere. ■

Esempio 2.1.4. Si hanno disposizione le lettere *a, b, c, d, e, f*, per formare sequenze di lunghezza 3. Quante se ne possono formare con le seguenti regole?

1. Le ripetizioni sono ammesse

2. Le ripetizioni non sono ammesse

3. Le ripetizioni non sono ammesse ed è presente la lettera e

4. Le ripetizioni sono ammesse ed è presente la lettera e

Soluzione:

1. Con le ripetizioni ci sono 6 scelte per ciascun carattere della sequenza. Per il principio della moltiplicazione ci sono $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ sequenze di tre lettere con ripetizione.

2. Senza ripetizioni ci sono 6 scelte per la prima lettera, 5 per le rimanenti per la seconda, 4 per la terza. Per il principio di moltiplicazione ci sono $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sequenze di tre lettere senza ripetizione.

3. Se la sequenza deve contenere la lettera e, allora ci sono 3 scelte relative alla posizione di e nella sequenza:

$$\underline{\mathrm{e}}\,\_\,\_ \qquad \_\,\underline{\mathrm{e}}\,\_ \qquad \_\,\_\,\underline{\mathrm{e}}$$

   Come si può vedere, in ciascun diagramma rimangono 5 scelte per la prima posizione non occupata dalla lettera e, poi ne rimangono 4 per la seconda posizione non occupata. Per il principio di addizione e per quello della moltiplicazione si hanno in totale $5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 60$ scelte.

4. ...

$$\underline{\mathrm{e}}\,\_\,\_ \qquad \underline{\cancel{\mathrm{e}}}\,\underline{\mathrm{e}}\,\_ \qquad \underline{\cancel{\mathrm{e}}}\,\underline{\cancel{\mathrm{e}}}\,\underline{\mathrm{e}}$$

... ■

2.2 Permutazioni e disposizioni semplici

Appendice A

Principio di Induzione

Per prima cosa viene fornita la definizione di *induzione ordinaria*:

Definizione A.1 (Induzione ordinaria). Sia P un predicato definito sui numeri naturali. Se

1. $P(i)$ è vero per un $i \in \mathbb{N}$
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq i$

allora $P(m)$ è vera $\forall m \in \mathbb{N}$ t.c. $m \geq i$.
La prima condizione è chiamata *caso base*, la seconda *passo induttivo*.

Esempio A.0.1. Provare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{A.1}$$

Definiamo la proposizione $P(n)$ ponendola uguale all'equazione (A.1) e verifichiamo che sia valida per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Si nota facilmente che $P(0)$ è vera perché $0 = \frac{0}{2}$.

Ora dobbiamo provare che

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Per provare la validità di una implicazione bisogna assumere che la prima proposizione (quella a sinistra del simbolo $\Rightarrow$) sia vera e dimostrare la validità della seconda. Assumiamo quindi che $P(n)$ sia vera e dimostriamo che lo è anche $P(n+1)$. $P(n+1)$ corrisponde a:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{A.2}$$

Se si prende l'equazione (A.1) e le si somma ad entrambi i membri il valore $n+1$, dopo un paio di semplificazioni al secondo membro si otterrà l'equazione (A.2). Questa argomentazione è valida per ciascuon $n \in \mathbb{N}$ e quindi il principio di induzione ci dice che $P(m)$ è vero $\forall m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

■

Scrivere dimostrazioni per induzione non è una cosa semplice, può capitare di cadere vittima di alcuni tranelli.

Esempio A.0.2. Proviamo ad usare l'induzione per dimostrare che "tutti i cavalli sono dello stesso colore".
Riformuliamo l'affermazione in modo da rendere esplicito n.

"In ogni insieme di $n \geq 1$ cavalli, tutti i cavalli hanno lo stesso colore". Dimostrare il caso base ($n = 1$) è semplice: in un insieme con un solo cavallo è presente un solo cavallo che quindi ha lo stesso colore di se stesso. Per questo motivo $P(1)$ è vera.

Nel passo induttivo assumiamo che $P(n)$ sia vera $\forall n \geq 1$, ovvero che in qualsiasi insieme di n cavalli ciascuno di essi abbia lo stesso colore degli altri.

Supponiamo ora di avere un insieme di $n+1$ cavalli: $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$. Dobbiamo provare che questi cavalli sono tutti dello stesso colore: per la nostra assunzione i primi n cavalli $n_1, \ldots, n_n$ sono tutti dello stesso colore ma, sempre per la nostra assunzione, sono dello stesso colore anche i cavalli che appartengono all'insieme $\{c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$. ... ■

Definizione A.2 (Induzione forte). ...