

Matematica Discreta
Laurea in Informatica

Andrea Favero

Luglio 2016

Indice

1	Grafi	3
1.1	Grafi non orientati	3
1.2	Grafi orientati	5
1.3	Prime proprietà dei grafi non orientati	8
1.4	Prime proprietà dei grafi orientati	10

Capitolo 1

Grafi

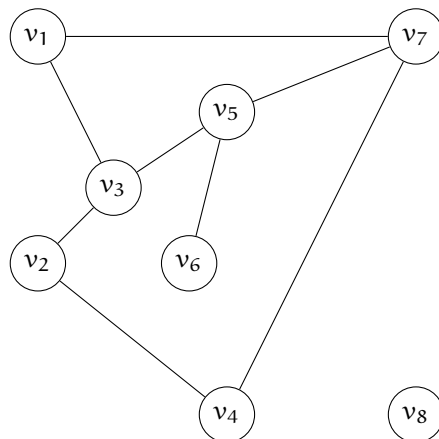
1.1 Grafi non orientati

Definizione 1.1 (grafo non orientato semplice). Un *grafo non orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, E) dove: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme finito di *vertici* (o *nodi*) ed E è un insieme di coppie *non ordinate* di vertici (*spigoli*¹). Il grafo è detto *semplice* perché non può avere né cappi né spigoli paralleli.

Esempio 1.1.1.

$$V = \{v_1, \dots, v_8\}$$

$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_2, v_3), (v_4, v_7), (v_6, v_5), (v_4, v_2), (v_3, v_5), (v_5, v_7)\}$$



Lo spigolo (v_1, v_3) ha come *estremi* i vertici v_1 e v_3 .

Esempio 1.1.2. Il grafo non orientato in figura 1.1 non è semplice poiché presenta un cappio sul vertice v_1 e ci sono due spigoli paralleli tra i vertici v_1 e v_2 .

Definizione 1.2. Uno spigolo è detto *incidente* nei suoi estremi ed i suoi vertici sono detti *adiacenti*.

¹Il nome dell'insieme è E perché in inglese gli spigoli sono chiamati *edges*

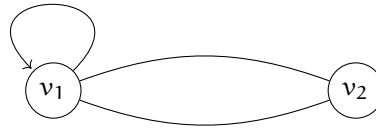
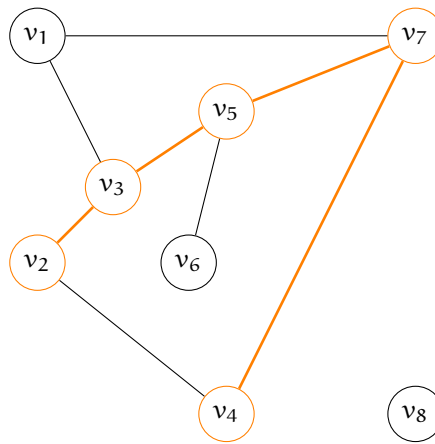


Figura 1.1: un grafo non orientato non semplice

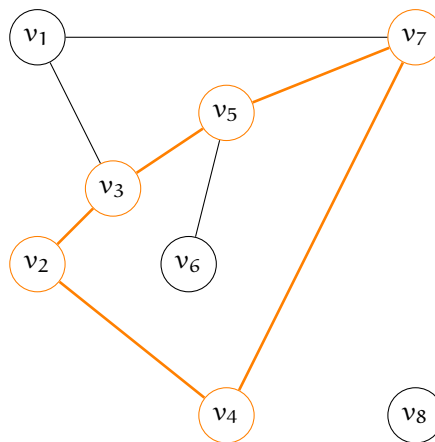
Definizione 1.3 (cammino). Un *cammino* è una sequenza di vertici *distinti* dove ogni coppia di vertici consecutivi è uno spigolo.

Esempio 1.1.3. $v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2$ è un cammino. Un'altra notazione per indicare il cammino è: $(v_4, v_7, v_5, v_3, v_2)$.



Definizione 1.4 (circuito). Cammino nel quale il primo e l'ultimo vertice sono adiacenti.

Esempio 1.1.4. $v_4 - v_7 - v_5 - v_3 - v_2 - v_4$ è un circuito.



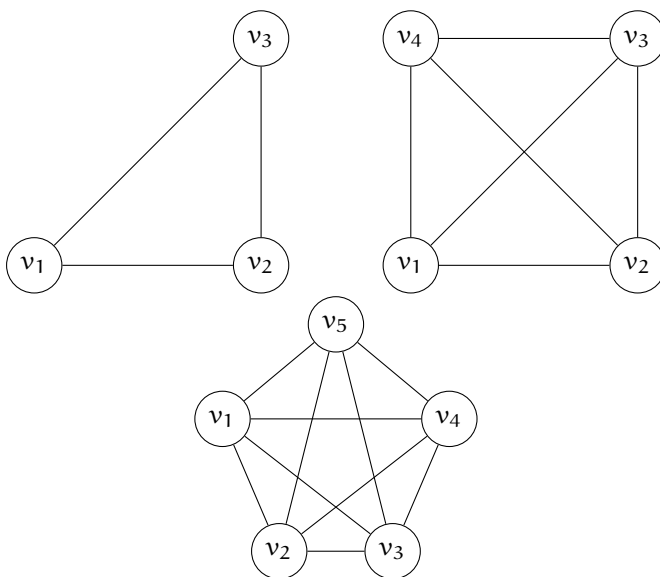
Definizione 1.5 (grafo connesso). Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega.

Definizione 1.6 (grafo completo). Un grafo è *completo* se per ogni coppia di vertici esiste uno spigolo che li collega.

Esempio 1.1.5. 3 grafi completi:

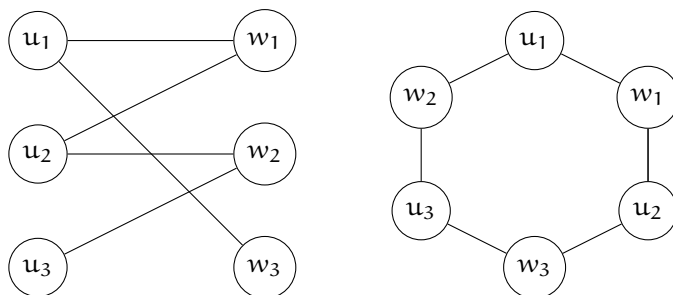
Nell'ordine:

- un grafo K_3
- un grafo K_4
- un grafo K_5



Definizione 1.7 (grafo bipartito). Un grafo è *bipartito*² se i suoi vertici sono partizionati in due sottoinsiemi, U e V , e ogni spigolo è incidente in un vertice di U e uno di V .

Esempio 1.1.6. Due grafi bipartiti.



1.2 Grafi orientati

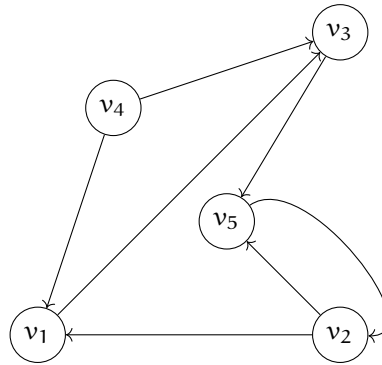
Definizione 1.8 (grafo orientato semplice). Un *grafo orientato semplice* G è una coppia ordinata (V, A) dove: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme finito di vertici (o nodi) ed A è un insieme di *coppie ordinate* di vertici dette *archi*.

²I grafi bipartiti saranno discussi in seguito

Esempio 1.2.1.

$G(V, A)$ con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e

$$A = \{(v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_2)\}$$



Il grafo è semplice perché non ha né cappi né archi paralleli. Essendo orientato il grafo ha un *nodo iniziale* (*testa*) ed un *nodo finale* (*coda*).

Esempio 1.2.2.

$$G(V, A) \quad V = \{v_1, v_2\}, \quad A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\}$$

G è un grafo orientato. L'arco $(v_1, v_2) \in A$ ha v_1 come nodo iniziale e v_2 come finale.



Esempio 1.2.3. L'immagine in figura 1.2 non rappresenta un grafo orientato semplice perché i vertici v_1 e v_2 sono collegati da due archi paralleli (ovvero due archi che hanno lo stesso nodo iniziale ed anche quello finale), inoltre c'è un cappio su v_1 .



Figura 1.2: grafo orientato che non è semplice

Definizione 1.9 (cammino orientato). Un *cammino orientato* è una sequenza di nodi distinti dove, ogni coppia di nodi consecutivi nel cammino è collegata da un arco.

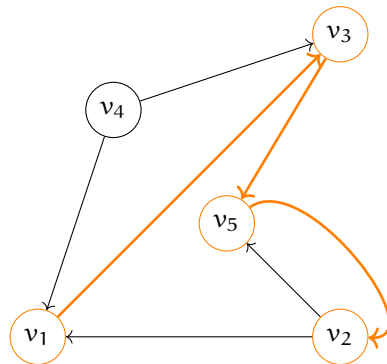


Figura 1.3: cammino orientato

Esempio 1.2.4. Nel grafo in figura 1.3 è presente il cammino orientato:

$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2$$

Definizione 1.10 (ciclo orientato). Cammino orientato nel quale esiste un arco dal primo all'ultimo nodo.

Esempio 1.2.5. Circuito orientato:

$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_1$$

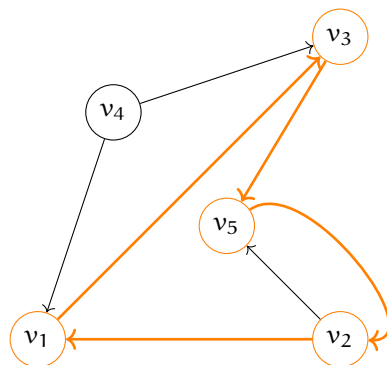
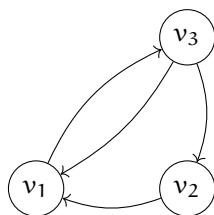


Figura 1.4: circuito orientato

Definizione 1.11 (grafo fortemente connesso). Per ogni coppia di nodi esiste un cammino orientato che li collega.

Esempio 1.2.6.

$$G(V = \{v_1, v_2, v_3\}, A = \{(v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2)\})$$



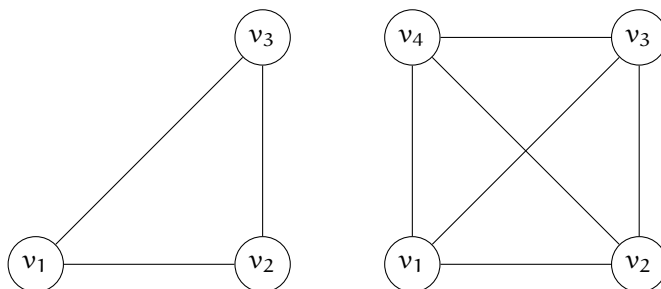
1.3 Prime proprietà dei grafi non orientati

Sia $G(V, E)$ un grafo non orientato semplice. Non è difficile notare che il minimo numero di spigoli che un grafo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è:

$$\frac{|V|(|V| - 1)}{2}$$

$|V|$ ed $|E|$ indicano la *cardinalità* di A ed E . La cardinalità di un insieme finito è un numero naturale che rappresenta la quantità di elementi che costituiscono l'insieme.

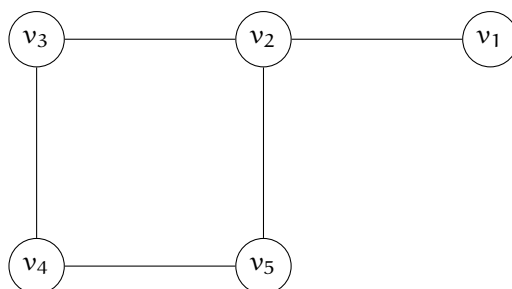
Esempio 1.3.1. grafi con $|V| = 3$ e $|V| = 4$.



Definizione 1.12 (grado di un vertice). Si chiama *grado* di un vertice v e si indica con $\text{gr}(v)$ il numero di spigoli incidenti in v .

Esempio 1.3.2. $\text{gr}(v_1) = 1$, $\text{gr}(v_2) = 3$, $\text{gr}(v_3) = \text{gr}(v_4) = \text{gr}(v_5) = 2$.

$$\sum_{v \in V} \text{gr}(v) = 1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10 = 2|E| = 2 \times 5$$



Teorema 1.3.1. In ogni grafo semplice non orientato $G(V, E)$, la somma dei gradi di tutti i vertici è uguale al doppio del numero degli spigoli.

$$\sum_{v \in V} \text{gr}(v) = 2|E| \quad (1.1)$$

Dimostrazione. Per induzione su $m = |E|$:

caso base: $m = 0$

$$\text{gr}(v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad |E| = 0.$$

passo induttivo:

sia $G(V, E)$ un grafo con m spigoli. Si suppone che 1.1 sia valida \forall grafo con $m - 1$ spigoli.

Siano $(\bar{u}, \bar{v}) \in E$ e $G'(V, E' = E \setminus \{(\bar{u}, \bar{v})\})$ ottenuto da G togliendo (\bar{u}, \bar{v}) .

Si può notare che $\text{gr}_G(\bar{u}) = \text{gr}_{G'}(\bar{u}) + 1$, $\text{gr}_G(\bar{v}) = \text{gr}_{G'}(\bar{v}) + 1$ e quindi $\forall x \in V, x \neq \bar{u}, x \neq \bar{v}: \text{gr}_G(x) = \text{gr}_{G'}(x)$.

$$|E'| = |E| - 1 = m - 1 \implies \text{in } G' \text{ vale l'ipotesi induttiva} \implies \sum_{v \in V} \text{gr}_{G'}(v) = 2|E'|.$$

In G :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \text{gr}(v) &= \sum_{v \in V, v \neq \bar{u}, v \neq \bar{v}} \text{gr}_G(v) + \text{gr}_G(\bar{u}) + \text{gr}_G(\bar{v}) \\ &= \sum_{v \in V, v \neq \bar{u}, v \neq \bar{v}} \text{gr}_{G'}(v) + \text{gr}_{G'}(\bar{u}) + 1 + \text{gr}_{G'}(\bar{v}) + 1 \\ &= \sum_{v \in V} \text{gr}_{G'}(v) + 2 \underbrace{\quad}_{\text{ipotesi induttiva}} 2|E'| + 2 \\ &= 2(m - 1) + 2 \\ &= 2m \\ &= 2|E| \end{aligned}$$

□

Corollario 1.3.2. *In ogni grafo non orientato, il numero dei vertici di grado dispari è pari.*

Dimostrazione. Siano $G(V, E)$ un grafo non orientato semplice, $V_d = \{v \in V \mid \text{gr}(v) \text{ è dispari}\}$ e $V_p = \{v \in V \mid \text{gr}(v) \text{ è pari}\}$; quindi $V_d \cap V_p = \emptyset$ e $V_d \cup V_p = V$.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \text{gr}(v) &= 2|E| \\ &= \underbrace{\sum_{v \in V_p} \text{gr}(v)}_{\text{pari}} + \sum_{v \in V_d} \text{gr}(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}} \end{aligned}$$

Poichè la somma dei gradi dei vertici che hanno grado pari è un numero pari, allora anche la somma dei gradi dei vertici che hanno grado dispari è un numero pari perché:

$$\sum_{v \in V_d} \text{gr}(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pari}} - \underbrace{\sum_{v \in V_p} \text{gr}(v)}_{\text{pari}}$$

e la differenza tra due numeri pari è un numero pari. Essendo quindi la somma dei gradi dei vertici di grado dispari un numero pari, allora anche il numero

dei vertici di grado dispari è un numero pari. Questo perchè se si sommano n numeri dispari, la loro somma è un numero pari se e solo se n è pari. \square

Esercizio 1.3.1. Trovare $G(V, E)$ con $|V| = 7$ e $\text{gr}(v) = 5 \forall v \in V$.

Svolgimento: non esiste alcun grafo di questo tipo, per il corollario di cui sopra.

1.4 Prime proprietà dei grafi orientati

Sia $G(V, A)$ un grafo orientato semplice. Allora il minimo numero di archi che questo può avere è 0 (ogni vertice è isolato) mentre il massimo è $|V| \cdot (|V| - 1)$.

Definizione 1.13 (grado entrante di un vertice). Si chiama grado *entrante* di un vertice v e si indica con $\text{In-deg}(v)$ il numero di archi entranti nel vertice v .

Definizione 1.14 (grado uscente di un vertice). Si chiama grado *uscente* di un vertice v e si indica con $\text{Out-deg}(v)$ il numero di archi uscenti dal vertice v .

Esempio 1.4.1. La figura 1.5 rappresenta un grafo con $\text{In-deg}(v_1) = 1$ e $\text{Out-deg}(v_1) = 3$

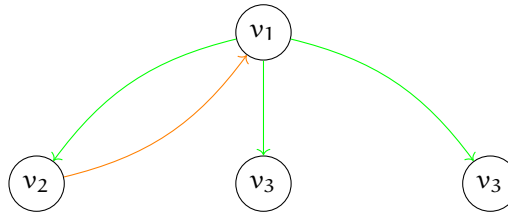


Figura 1.5: esempio con $\text{In-deg}(v_1) = 1$ e $\text{Out-deg}(v_1) = 3$