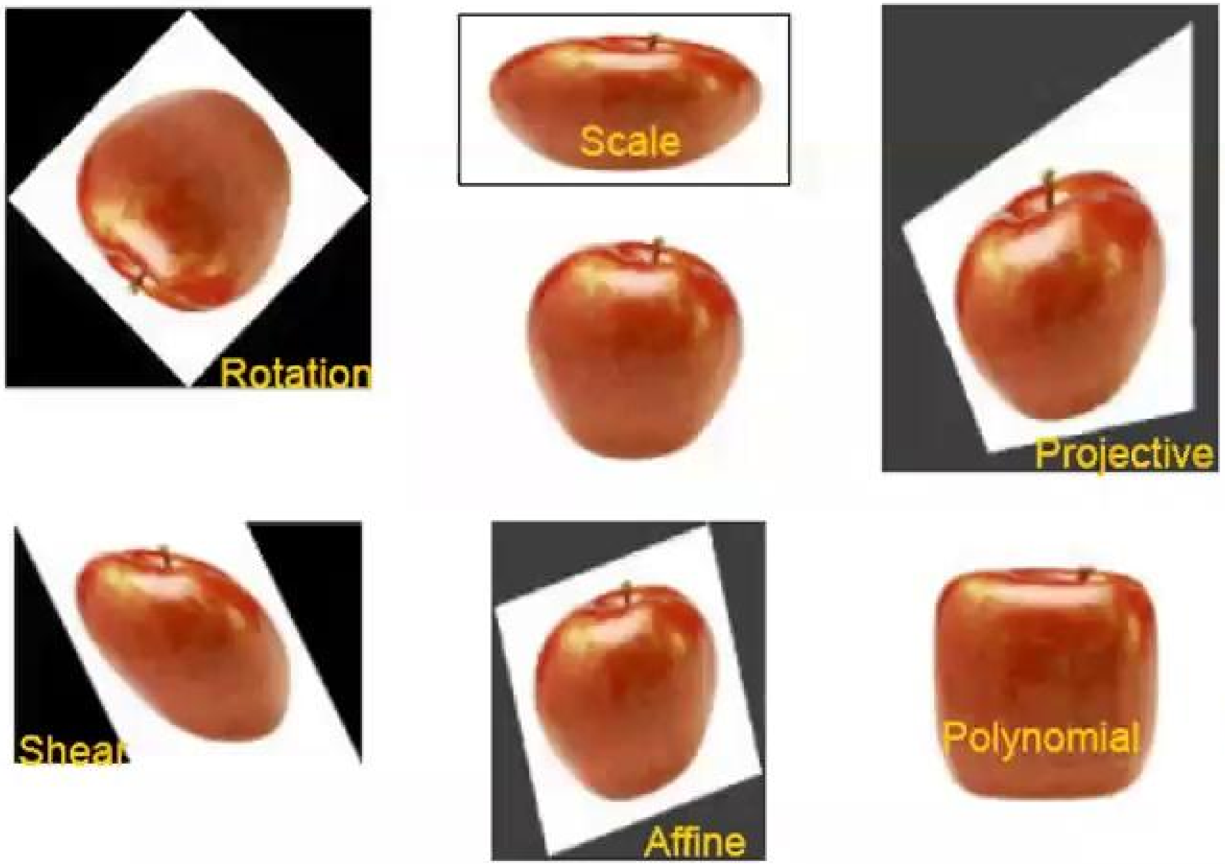
Transformações Geométricas sobre Imagens



Cortesia Gonzalez & Woods

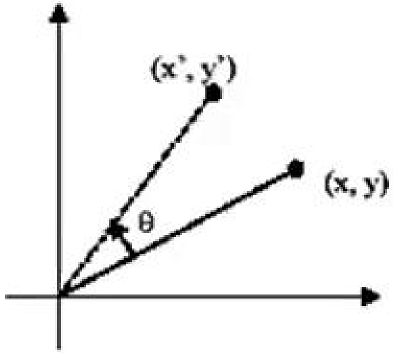
Muito usadas em computação gráfica para gerar efeitos especiais

Funções MATLAB: griddata, interp2, maketform, imtransform

Operações Geométricas sobre Imagens

- Rotação, translação e escala (R.T.E.)
  - R.T.E. de um objeto imagem

    posição original do pixel *(x,y)* => nova posição *(x',y')*



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$ translação por $\begin{bmatrix} t_x & t_y \end{bmatrix}$

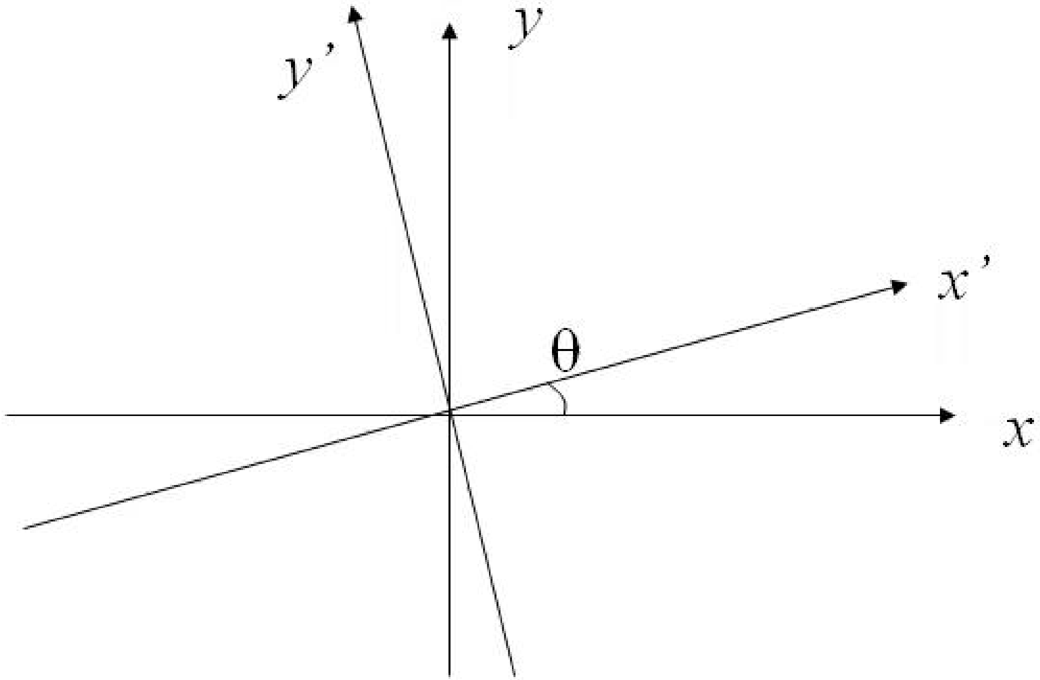
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ rotação de θ em torno da origem sentido anti-horário

preservam ângulo e comprimento

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ escalamento por s_x e s_y

escalamento uniforme $s_x = s_y$
(preserva ângulo e forma)
escalamento diferenciado $s_x \neq s_y$

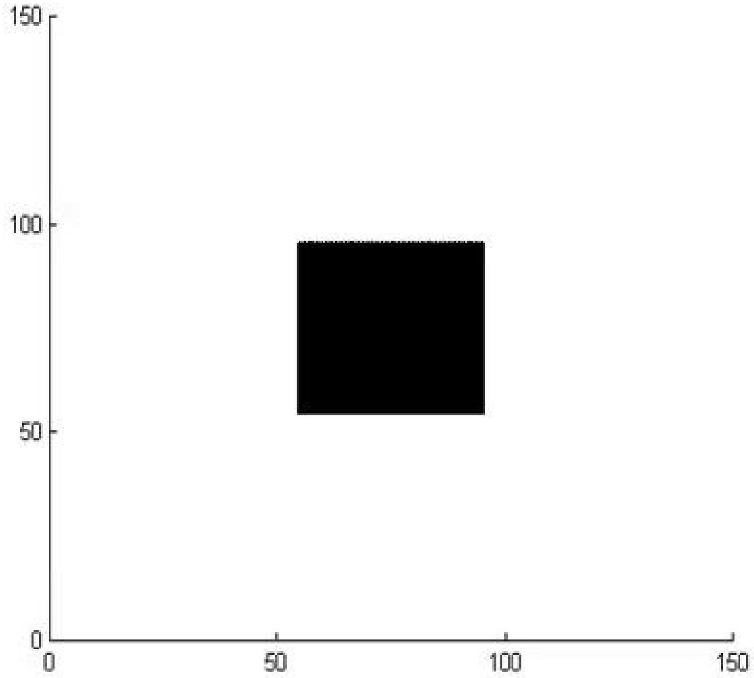
Rotação

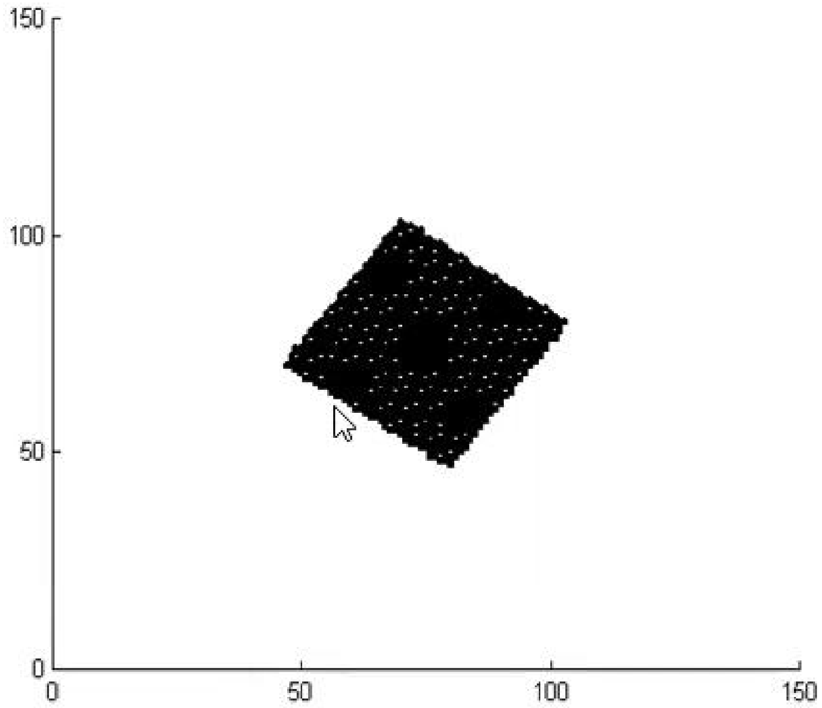


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

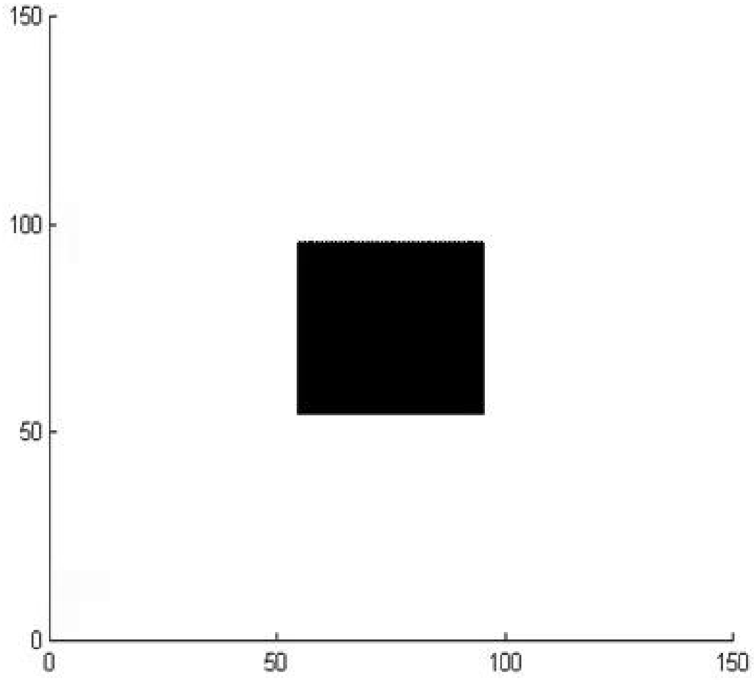
- <u>Problemas</u>: rotação de uma área sólida binária

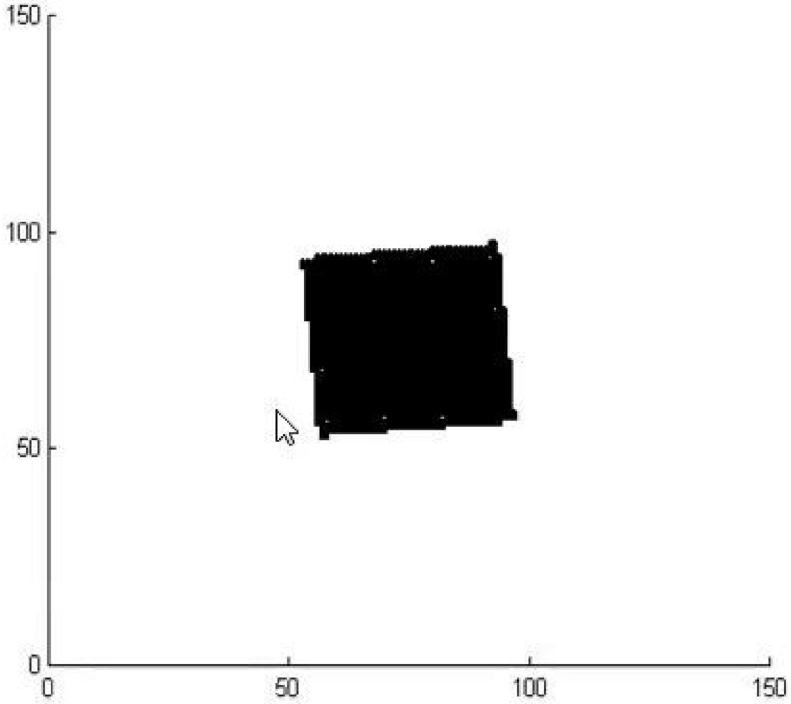




Rotação

- <u>Problemas</u>: rotação de uma área sólida binária



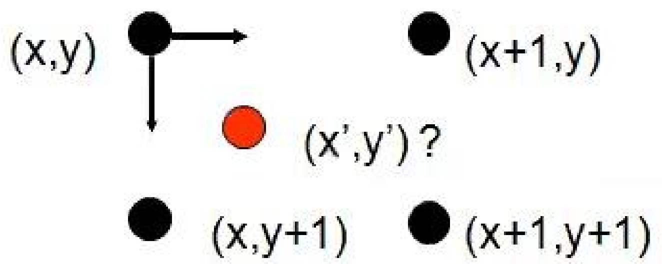


Implementação de Transformações Geométricas

- *Transformação Direta* (*Forward transform*)
  - mapear coordenadas da imagem de entrada para a imagem de saída

    se os valores obtidos na saída ocorrerem em coordenadas fracionárias ?

- *Transformação Reversa* (*Reverse transform*)
  - à partir das coordenadas inteiras da imagem de saída, buscar as coordenadas correspondentes na imagem de entrada
    - *obtém valores na imagem de entrada em coordenadas fracionárias por interpolação*



Princípio Básico

- $(x,y) \rightarrow (x',y')$ é uma transformação geométrica

- Recebemos valores dos pixels em (x,y) e queremos obter os valores desconhecidos em (x',y'), geralmente c/ interpolação

- Usualmente (x',y') não são coordenadas inteiras, logo temos que estimar os valores desconhecidos por interpolação à partir dos valores conhecidos nas posições inteiras (x,y)

Implementação MATLAB : `z'=interp2(x,y,z,x',y',método);`

Exemplo MATLAB

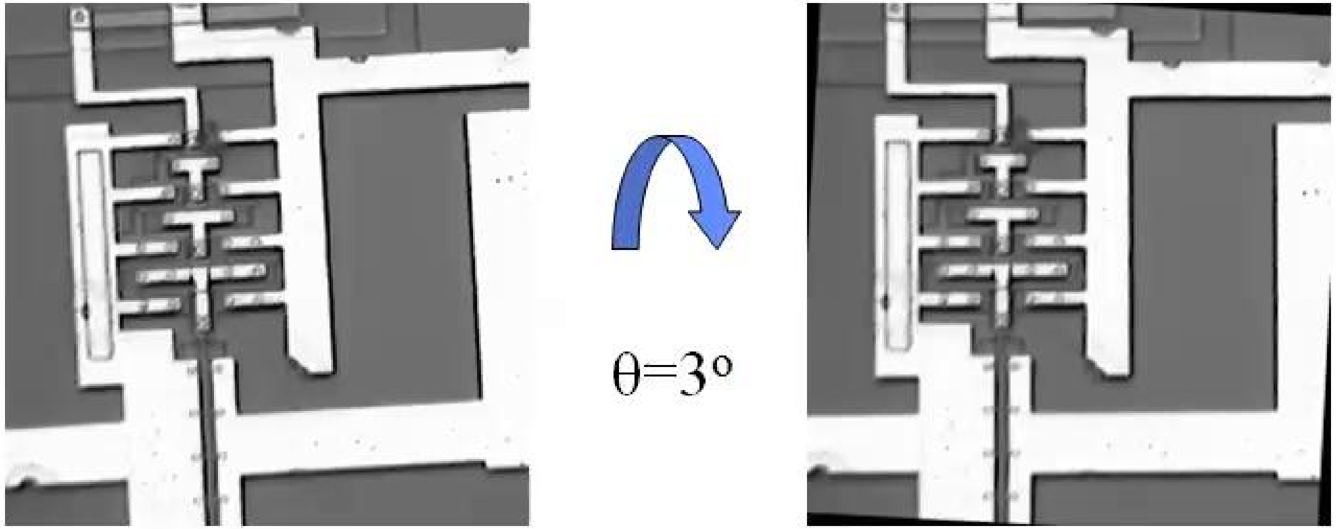
```
z=imread('cameraman.tif');

% coordenadas originais
[x,y]=meshgrid(1:256,1:256);

% novas coordenadas
a=2;
for i=1:256;
  for j=1:256;
    x1(i,j)=double(a*x(i,j));
    y1(i,j)=double(y(i,j)/a);
  end;
end;

% Faz a interpolação
z1=interp2(double(x),double(y),double(z),x1,y1,'cubic');
figure,imshow(uint8(z1)),
```

Exemplo de Rotação



Rotação

Exemplo de rotação de uma imagem

(trabalho de J.P.S. Oliveira e L.R. Erpen - PPGCC-UFRGS, 2000-1)

Escala

a=2

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala

Exemplo de mudança de escala de uma imagem

(a)

(b)

(c)

(trabalho de J.P.S. Oliveira e L.R. Erpen - PPGCC-UFRGS, 2000-1)

Reflexão

- Reflexão em trono do eixo *x*, eixo *y* ou da origem (coordenadas homogeneas)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexão em torno de $y = x$ e $y = -x$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexão em trono de uma linha arbitrária $y=ax + b$
  - combinar translação/rotação => refletir => inverter translação/rotação

Reflexão

(a)

original

(b)

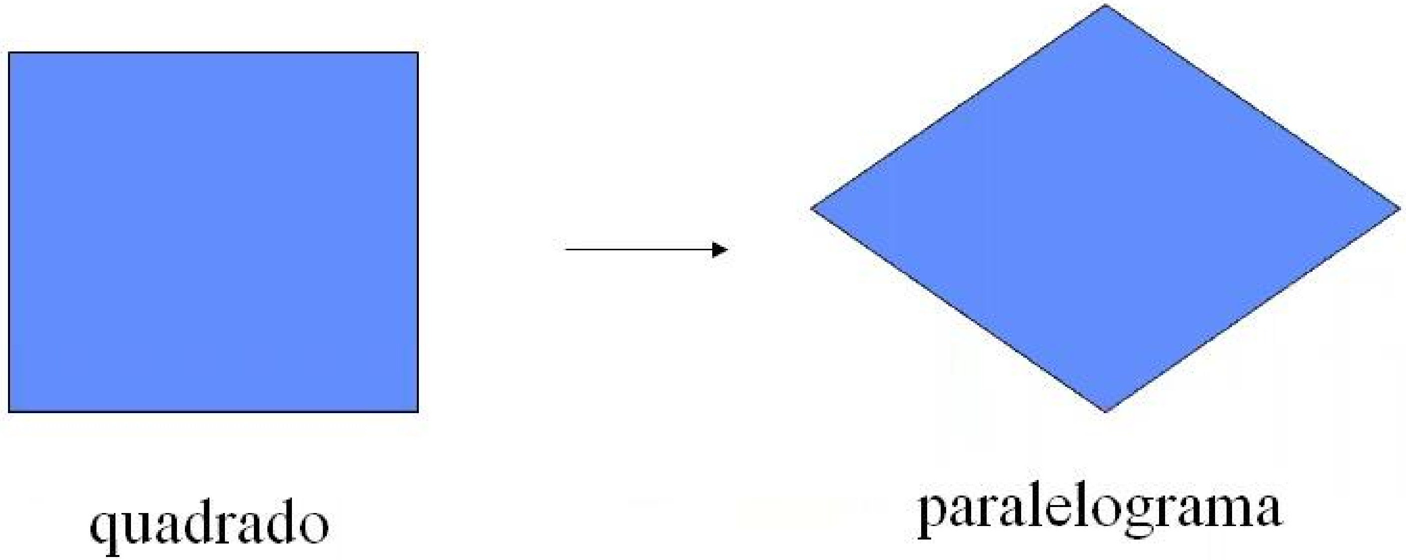
reflexão horizontal

(c)

reflexão vertical

(trabalho de J.P.S. Oliveira e L.R. Erpen - PPGCC-UFRGS, 2000-1)

Transformação Afim (genérica)



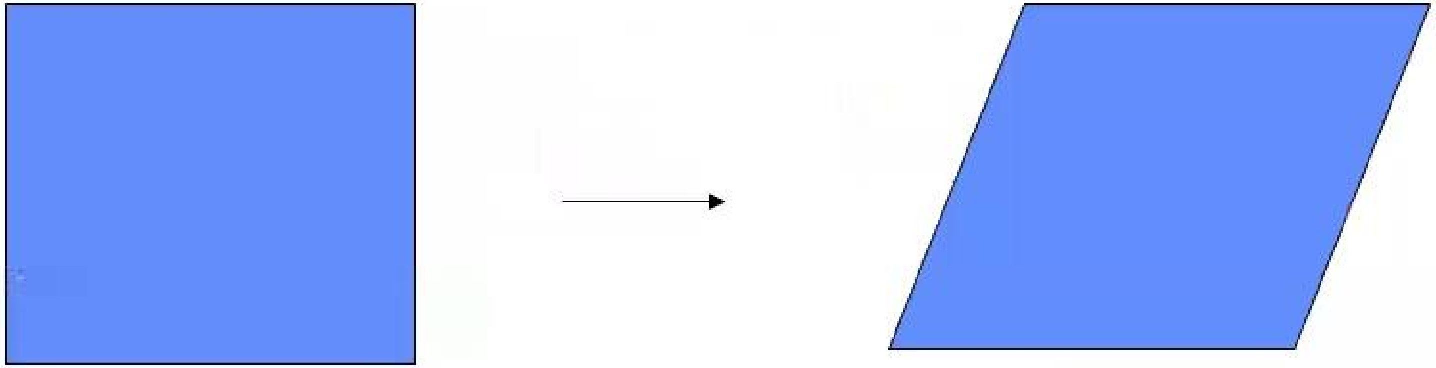
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Exemplo de Transformação Afim

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & 1 \\ .5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$

Cisalhamento



quadrado

paralelograma

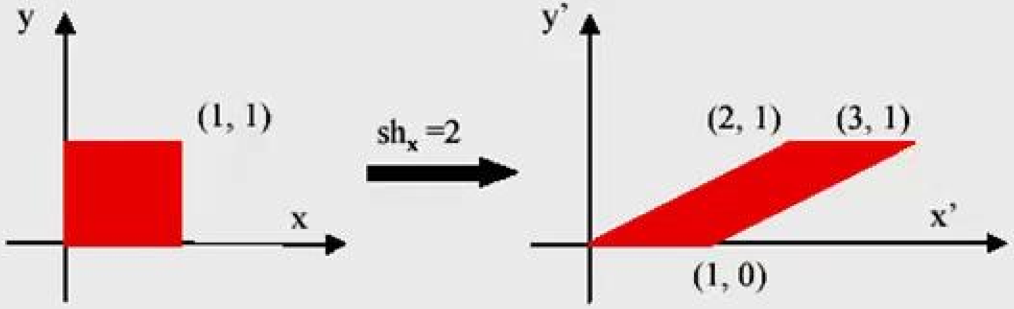
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Cisalhamento

- Transformação que distorce a forma
  - causa o deslizamento de umas camadas sobre as outras de um objeto

- Cisalhamento relativo ao eixo *x*

$$\begin{bmatrix} -1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Pode ser estendido para outros eixos de referência

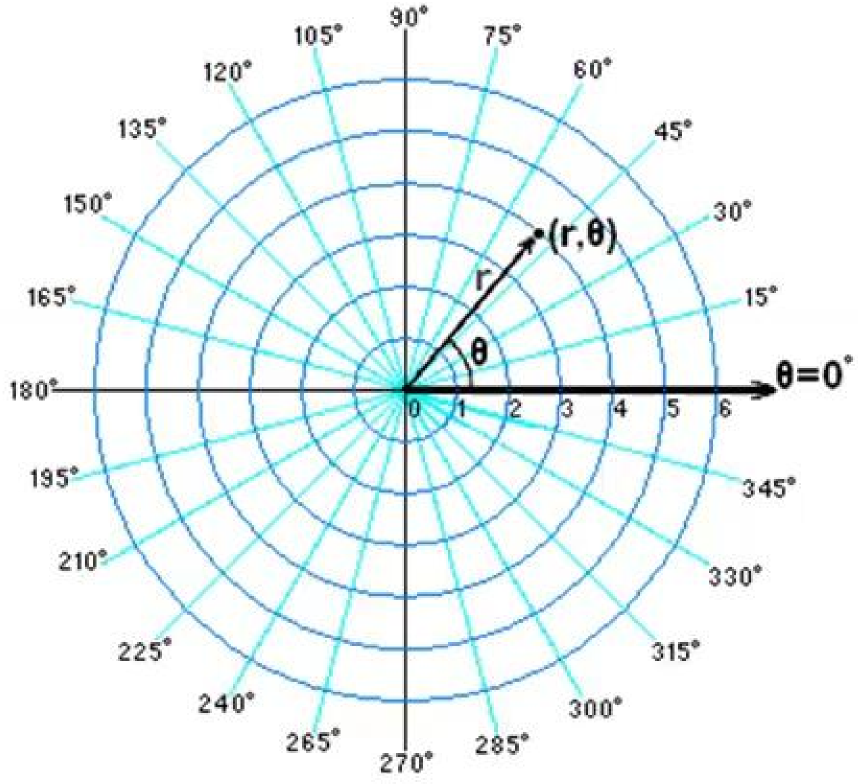
Exemplo de Cisalhamento

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

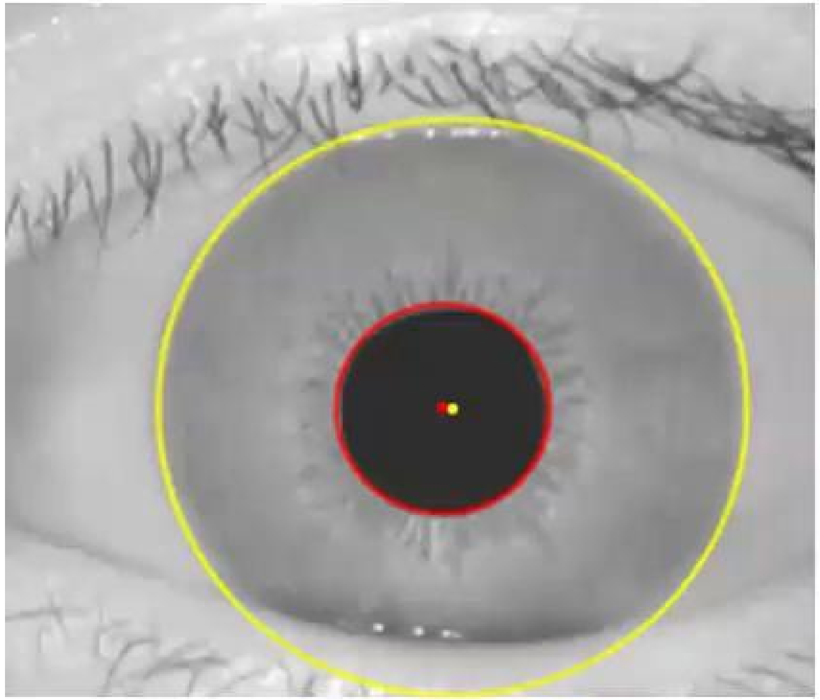
Transformação Polar

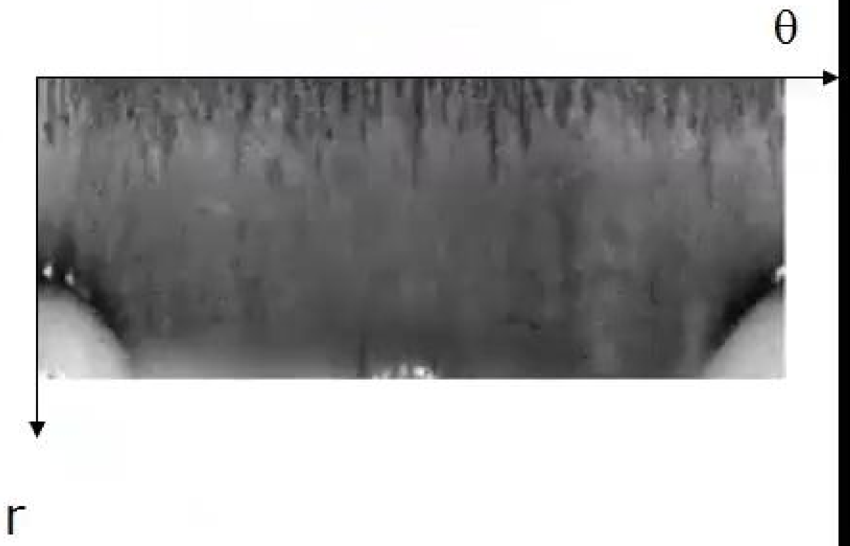
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



Desdobramento da Imagem da Íris





Coordenadas Homogêneas 2-D

- Descreve R.T.E. por $\underline{P}' = M\,\underline{P} + \underline{T}$
  - precisa calcular os valores intermediários de coords. das transf. Sucessivas

- Coordenadas homogêneas
  - permitem representar R.T.E. por operações de multiplicação matricial
    combina transf. sucessivas por combinações de transf. Matriciais
  - ponto cartesiano $(x,y) \rightarrow$ representação homogênea (sx',sy',s)
    representa a mesma posição (x,y) para todo parâmetro s não nulo
    geralmente s = 1
  - transformação $f(x,y) = 0 \rightarrow$ equação homogênea em (sx',sy',s)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sx' \\ sy' \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

R.T.E. em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- R.S.E. sucessivas
  - multiplicar pela esquerda as transformações matriciais básicas

Composição Genérica de Transformações

- Combinando R.T.E.s
  - $\{a_{ij}\}$ determinados pelos parâmetros da R.T.E.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Transformações de corpos-rígidos
    - » envolve apenas translações e rotações
    - » sub-matriz de rotação 2x2 é ortogonal
      - vetores linha são ortonormais
  - Extensão para coordenadas homogêneas 3-D
    - » *(sx,sy,sz,s)* com matrizes de transformação 4x4

Composição Genérica de Transformações (cont.)

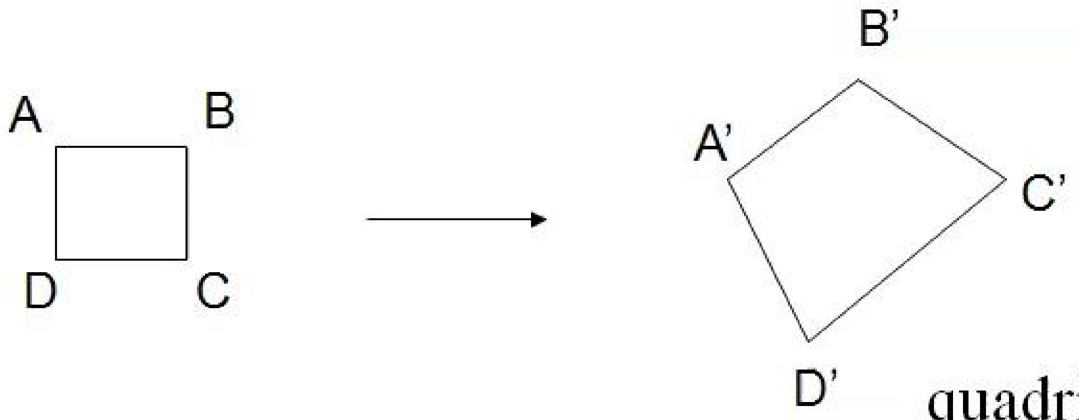
- Transformações afins ~ 6 parâmetros (no plano)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformações projetivas ~8 parâmetros
  - cobrem transformações geométricas mais gerais entre 2 planos
  - usadas em visão computacional (ex: mosaicos de imagens e vistas sintetizadas)

$$\begin{bmatrix} sx' \\ sy' \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{\underline{w}=[x',y']^T} \underline{w} = \frac{A\underline{w} + \underline{b}}{1 + \underline{c}^T \underline{w}}$$

Transformação Projetiva (simula um novo plano de projeção)



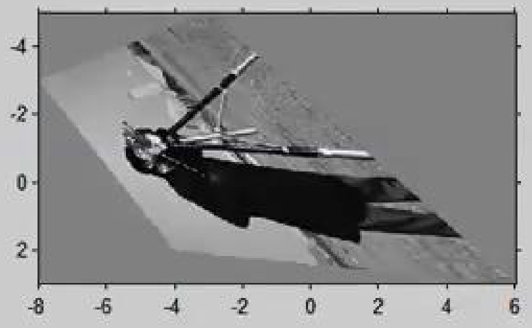
quadrado

quadrilátero

$$x' = \frac{a_1 x \ + a_2 y + a_3}{a_7 x \ + a_8 y + 1}$$

$$y' = \frac{a_4 x + a_5 y + a_6}{a_7 x + a_8 y + 1}$$

Exemplo de Transformação Projetiva



[0 0; 1 0; 1 1; 0 1] ⟶ [-4 2; -8 -3; -3 -5; 6 3]

Deformação Linear de Imagens
(*Linear Warping of Images*)

Photo: JBUK_Planet, http://www.flickr.com/people/jbuk_planet/, Highclere Castle, Highclere Park, Newbury RG20 9RN, England, http://www.highclerecastle.co.uk/, August 26, 2007, Kodak DX6440

Imagem original com distorção perspectiva.

Deformação Linear de Imagens
(*Linear Warping of Images*)

Imagem deformada para corrigir a distorção perspectiva.

Cortesia: Richard Alan Peters II