1 Descrição do Problema e da Solução

O problema apresentado foi o de encontrar o **preço máximo** que é possível obter através do corte de uma chapa de mármore retangular, podendo esta ser cortada na vertical e/ou na horizontal de modo a produzir peças retangulares especificadas por clientes. Estas especificações são caraterizadas por altura, largura e preço. A chapa de mármore e as especificações das peças apresentam sempre dimensões de valor inteiro, pelo que se optou por representar a placa através de um vetor de vetores (ou matriz) de números inteiros.

Na conceção da solução, realizou-se uma abordagem baseada em **programação dinâmica**: a matriz que representa a chapa de mármore, cujo preço deve ser maximizado através de cortes verticais e horizontais para obter peças, irá guardar o preço máximo de todos os subproblemas possíveis no índice respetivo das suas dimensões. Desta forma, ao iterar cada subproblema e iniciar o "teste" de cortes, será possível maximizar o preço comparando o preço total dos subproblemas resultantes do corte com o preço atual do subproblema em análise. Nesta abordagem, considerou-se que as especificações de peças correspondem a subproblemas iniciais (ou casos base), isto é, desde que seja possível obter a peça especificada a partir de cortes na chapa, considera-se que uma peça é um subproblema de base e guarda-se o seu preço nos índices correspondentes às suas dimensões vertical e horizontal, e vice versa (se possível). Desta forma, é possível não só determinar o melhor preço de um subproblema com base no melhor preço de subproblemas anteriores, como também é possível maximizar um subproblema base caso dê para cortá-lo em outros subproblemas base. Para selecionar um subproblema, ou sub-placa, começa-se por iterar pelas linhas da matriz e iterar pelas respetivas colunas. Depois, é necessário verificar se o subproblema selecionado é passível de ser submetido a cortes, isto é, se a placa tiver altura X e largura Y, no total, é possível realizar $(\frac{X}{2})$ cortes horizontais e $(\frac{Y}{2})$ cortes verticais. Por cada corte realizado, faz-se um comparação entre a soma dos dois subproblemas resultantes e o valor atual da sub-placa em análise. Um corte nunca origina subproblemas cujas dimensões não sejam números inteiros positivos.

Por fim, no final de todas as iterações, a última posição do vetor de vetores representará o valor máximo que é possível obter através do corte da placa de dimensões X por Y, isto é, do maior (e último) subproblema.

2 Análise Teórica

Sendo X a altura, Y a largura, M o maior valor entre X e Y e N o número de especificações de peças:

- Leitura dos dados de entrada: leitura da altura X e largura Y da chapa, do número de peças N e leitura das N especificações de peças num ciclo de complexidade linear e respetiva colocação das peças no vetor. Logo, $O(N)$.
- A seleção da instância (ou subproblema) cujo preço vai ser maximizado é feito iterando pelas linhas e colunas do vetor e, como todos os subproblemas serão instanciados, é $\Theta(X \times Y)$. Para $X = Y$, teríamos $O(X^2)$.
- Cada subproblema será avaliado em todas as configurações de corte vertical e horizontal possíveis e, em cada corte, será guardado o valor máximo entre o preço atual do subproblema e o preço da soma dos subproblemas resultante do corte. Como é sempre necessário testar todos os cortes para averiguar o melhor preço, a complexidade é $O(M)$.
- O preço maximizado da chapa é apresentado em tempo constante, isto é, $\Theta(1)$.

Como tal, a complexidade geral do algoritmo é $O(M^3)$. São testados $X \times Y$ subproblemas e cada um pode ser testado $(\frac{X}{2})+(\frac{Y}{2})$ vezes no pior caso (se puder ser cortado na vertical e na horizontal). Ou seja, $f(X,Y) = (X \times Y)(\frac{X}{2} + \frac{Y}{2})$. No pior caso (quando $Y = X$), fica $(X \times X)(\frac{X}{2} + \frac{X}{2}) = O(X^3)$.

3 Avaliação Experimental dos Resultados

O seguinte gráfico de Excel representa os resultados experimentais obtidos para mais de 10 instâncias geradas para valores incrementais de X e Y. Cada valor de tempo correspondente foi obtido realizando a média entre o menor e o maior valor obtidos para mais de 10 execuções por instância:

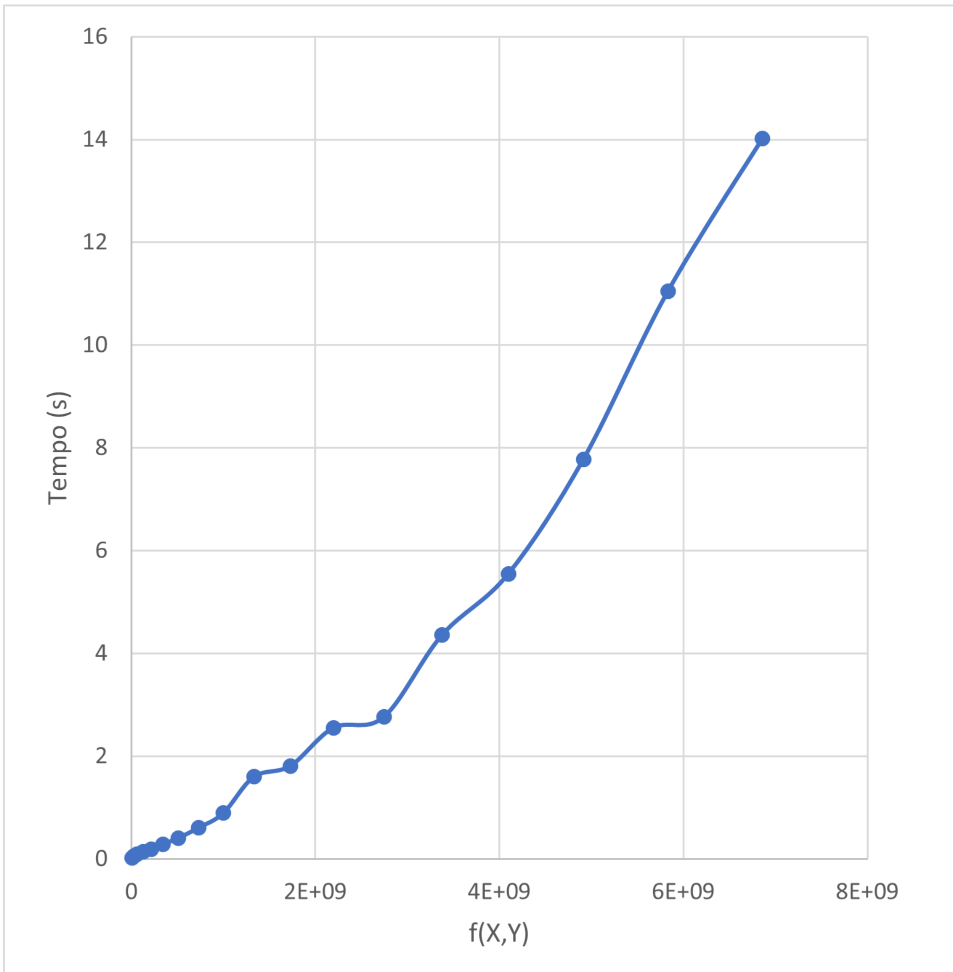

Figure 1: Complexidade temporal obtida para o problema.

Os dados apresentados revelam um gráfico aproximadamente reto, o que nos permite concluir que a complexidade temporal do problema corresponde à prevista na análise teórica: a reta obtida para o tempo em função do pior caso $O(M^3)$ revela a existência de uma relação de **linearidade**, ou seja, o problema apresenta, de facto, complexidade temporal $O(M^3)$. É de realçar que as flutuações obtidas nos resultados do tempo de execução devem-se ao método escolhido (mencionado anteriormente) para selecionar o valor de tempo para cada instância.