1 Descrição do Problema e da Solução

O problema apresentado foi o de determinar o máximo lucro possível de se obter com a produção de brinquedos (cada qual sujeito a um limite de capacidade individual p_{max}) e de pacotes especiais, cada qual contendo três brinquedos. A optimização do lucro encontra-se também sujeita a um limite de capacidade total de produção p_{total}, isto é, o total de brinquedos produzidos. Na resolução deste problema, realizou-se uma abordagem baseada em **programação linear**. Descrevendo na forma *standard*, foram definidas para o problema uma função objetivo (a ser maximizada), restrições com as variáveis definidas e variáveis não negativas. Durante a implementação com recurso à biblioteca PuLP em Python, guardou-se a informação de cada brinquedo em listas de tuplos, estando cada brinquedo representado sob a forma de tuplo, contendo o lucro (c) e a capacidade máxima de produção diária (p) respetiva. Na leitura de cada pacote, guardou-se o respetivo lucro (c) numa lista e, aos brinquedos $\{k, l, m\}$ contidos no pacote, realizou-se a cada qual a uma associação ao pacote.

Variáveis do problema

- X_i é a variável que representa a quantidade do brinquedo i produzida de entre os N brinquedos.
- Y_j é a variável que representa a quantidade do pacote j produzida de entre os P pacotes.

Descrição do problema: seja N o número de brinquedos e P o número de pacotes.

Função objetivo: função que, uma vez determinado o número ótimo de brinquedos e pacotes, devolverá o lucro máximo que é possível obter.

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i X_i + \sum_{j=1}^{P} c_j Y_j \tag{1}$$

Restrições: No total, a quantidade de brinquedos e a quantidade de pacotes não deve ultrapassar o limite de capacidade de produção total:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i + 3 \times \sum_{j=1}^{P} Y_j <= p_{total} \tag{2}$$

A quantidade de cada brinquedo i produzido e dos pacotes associados ao brinquedo $n_1, ..., n_k$ não deve ultrapassar o limite de capacidade individual do brinquedo:

$$X_i + \sum_{j=1}^{k} Y_{n_j} <= p_{max} \tag{3}$$

A quantidade individual de cada brinquedo i não deve ultrapassar o respetivo limite de capacidade:

$$0 <= X_i <= p_{max} \tag{4}$$

A quantidade individual de cada pacote j não deve ultrapassar o valor mínimo de limite de capacidade individual p de entre os brinquedos $\{k, l, m\}$ que inclui:

$$0 <= Y_j <= min\{p_k, p_l, p_m\} \tag{5}$$

2 Análise Teórica

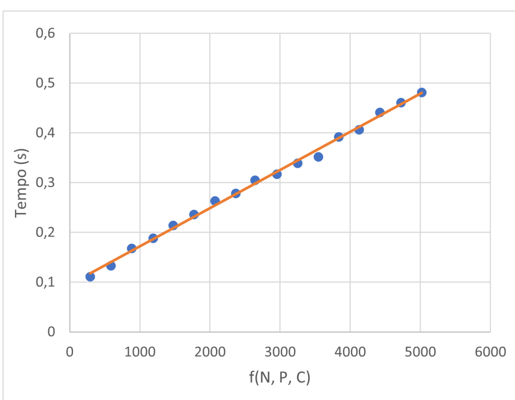
Sendo N o número de brinquedos e P o número de pacotes:

- O número de variáveis do programa linear é dado por $O(N + P)$, existindo assim N variaveis para cada brinquedo e P variáveis para cada pacote de brinquedos.
- O número de restrições do programa linear, no pior caso, é dado por $O(N + 1)$, caso em que todos os N brinquedos se encontram incluidos em pacotes de lucro superior.

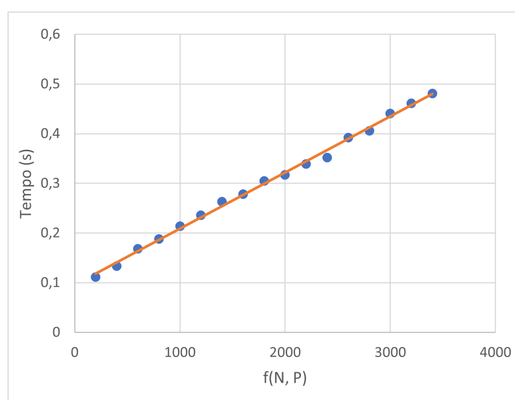
Como tal, de acordo com a análise teórica, a complexidade geral $f(N, P)$ do problema proposto é $O(N + P)$, pois são os termos dominantes de todas as complexidades analisadas.

3 Avaliação Experimental dos Resultados

Os seguintes gráficos de Excel representam os resultados experimentais obtidos para mais de 10 instâncias geradas pelo gerador fornecido para valores incrementais de N e P. O primeiro gráfico (a) traduz os resultados obtidos para o tempo em função de $N + P + C$ com C sendo o número de *constraints* (restrições), enquanto que o gráfico (b) traduz os resultados obtidos para o tempo em função de $N + P$:



(a) Total de variáveis e restrições.



(b) Total de variáveis.

Para ambos os conjuntos de instâncias geradas, verifica-se que o tempo de execução cresce linearmente quer em função de $f(N, P)$, quer em função de $f(N, P, C)$. Como tal, a complexidade temporal do problema corresponde, de um modo geral, à complexidade prevista na análise teórica.