Problem kodowania

s \ x	0	1	0	1
A	A	B	0	0
B	A	C	0	0
C	D	C	0	0
D	A	B	0	1

Wariant I

A = 00
B = 01
C = 10
D = 11

Wariant II

A = 00
B = 11
C = 01
D = 10

Wariant I

$$D_1 = Q_1\overline{Q}_2 + x\overline{Q}_1 Q_2$$

$$D_2 = \overline{x} Q_1\overline{Q}_2 + x Q_1 Q_2 + x\overline{Q}_1\overline{Q}_2$$

$$y = x Q_1 Q_2$$

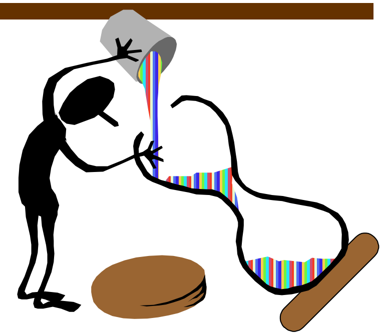
Wariant II

$$D_1 = x\overline{Q}_2 + \overline{x}\,\overline{Q}_1 Q_2$$

$$D_2 = x$$

$$y = x Q_1\overline{Q}_2$$

Kodowanie



Jak przewidzieć (obliczyć) najlepsze kodowanie stanów?

Czy realne jest sprawdzenie wszystkich możliwości

3 stany - 3 różne kodowania

4 stany - 3 różne kodowania

5 stanów - 140 kodowań

7 stanów - ??? kodowań

9 stanów - ??? kodowań

I T P W ZPT

KODOWANIE

Jedyną rozsądną z punktu widzenia dzisiejszych technologii i realną do omówienia w ograniczonym[1)] czasie wykładu jest metoda wykorzystująca podział z własnością podstawienia.

1) Ale i takie uproszczone ujęcie nie zawsze jest możliwe. Wtedy zachęcam Państwa do samodzielnego studiowania następnych plansz.

A wszystkich wytrwałych w tym procesie specjalnie nagradzam na egzaminie.

I T P W

ZPT

Elementy rachunku podziałów

Podziałem na zbiorze S jest system zbiorów $P = \{B_i\}$, którego bloki są rozłączne, czyli

$$B_i \cap B_j = \phi, \text{ jeśli tylko } i \neq j.$$

Dla $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P = \{\{1,2\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}$ jest podziałem na S.

$$\Pi = (\overline{1,2}; \overline{3},5; \overline{4,6})$$

Iloczyn podziałów, suma podziałów oraz relacja $\leq$.

ITPW ZPT

Elementy rachunku podziałów…

Powiemy, że podział Π_a jest *nie większy* od Π_b (co oznaczamy: $\Pi_a \leq \Pi_b$), jeśli każdy blok z Π_a jest zawarty w pewnym bloku z Π_b.

$$\Pi_a = (\overline{1,2,4};\overline{3,5,6}) \qquad \Pi_b = (\overline{1,4};\overline{2,6};\overline{3,5}) \qquad \Pi_c = (\overline{1,2};\overline{4};\overline{6};\overline{3,5})$$

$\Pi_c \leq \Pi_a$ Tak

$\Pi_c \not\leq \Pi_b$ NIE!

$\Pi(0)$ – podział najmniejszy

$\Pi(1)$ – podział największy

I
T
P
W
ZPT

Elementy rachunku podziałów…

Iloczynem podziałów $\Pi_a \bullet \Pi_b$ nazywamy największy (względem relacji $\leq$) podział, który jest nie większy od Π_a oraz Π_b.

$$\Pi_a = (\overline{1,2,4};\overline{3,5,6}) \qquad \Pi_b = (\overline{1,4};\overline{2,6};\overline{3,5})$$

$$\Pi_a \bullet \Pi_b = (\overline{1,4};\overline{2};\overline{6};\overline{3,5})$$

Elementy rachunku podziałów…

Sumą podziałów $\Pi_a + \Pi_b$ nazywamy najmniejszy (względem relacji ≤) podział, który jest nie mniejszy od Π_a oraz Π_b.

$$\Pi a = (\overline{1,2};\overline{3,4};\overline{5,6};\overline{7,8,9})$$

$$\Pi b = (\overline{1,6};\overline{2,3};\overline{4,5};\overline{7,8};\overline{9})$$

$$\Pi a + \Pi b = (\overline{1,2,3,4,5,6};\overline{7,8,9})$$

I T P W ZPT

Własność podstawienia

Podział Π na zbiorze stanów automatu M=<S, V, δ> ma własność podstawienia (*closed partition*), gdy zachodzi:

$$\forall v_p \in V, \forall (s_i, s_j \in b_k),\ b_k \in \Pi \Rightarrow \underset{b_m \in \Pi}{\exists} (\delta(s_i, v_p)), (\delta(s_j, v_p)) \in b_m$$

Podział ma własność podstawienia, gdy elementy bloku podziału pod wpływem dowolnej litery wejściowej przechodzą na siebie lub na inny blok podziału Π

I T P W ZPT

Twierdzenie

Dany jest automat M o zbiorze stanów S, $|S| = n$. Do zakodowania stanów potrzeba $Q_1, \ldots, Q_k$ elementów pamięci.

Jeżeli istnieje podział Π z własnością podstawienia i jeżeli r spośród k zmiennych kodujących $Q_1, \ldots, Q_k$, gdzie $r = \lceil \log_2 \beta(\Pi) \rceil$, jest przyporządkowanych blokom podziału Π tak, że wszystkie stany zawarte w jednym bloku są oznaczone tymi samymi zmiennymi $Q_1, \ldots, Q_r$, to funkcje $Q'_1, \ldots, Q'_r$, są niezależne od pozostałych $(k - r)$ zmiennych. I odwrotnie, gdy pierwsze r zmiennych stanu następnego $Q'_1, \ldots, Q'_r$ $(1 \leq r < k)$ mogą być wyznaczone z wartości wejść i pierwszych r zmiennych $Q_1, \ldots, Q_r$ niezależnie od wartości pozostałych zmiennych, to istnieje podział Π z własnością podstawienia taki, że dwa stany s_i, s_j są w tym samym bloku podziału wtedy i tylko wtedy, gdy są oznaczone tą samą wartością pierwszych r zmiennych.

I T P W ZPT

Przykład 1

s \ x	0	1	0	1
A	A	F	0	0
B	E	C	0	1
C	C	E	0	1
D	F	A	1	0
E	B	F	1	1
F	D	E	0	0

$$\pi_1 = \left(\overline{A,B,E};\overline{C,D,F}\right)$$

$$\tau = \left(\overline{A,D};\overline{B,C};\overline{E,F}\right)$$

Nie wystarcza to do zakodowania

Kodowanie wg	Π_1	τ	
A	0	0	0
B	0	0	1
C	1	0	1
D	1	0	0
E	0	1	0
F	1	1	0

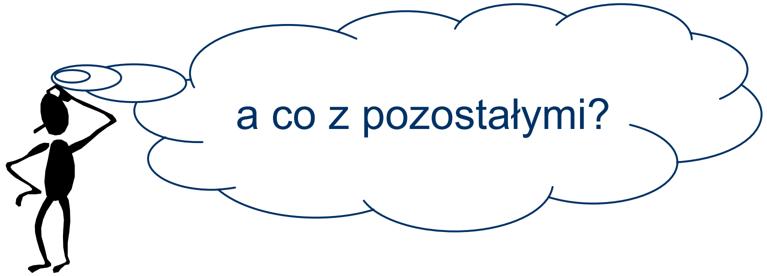
Przykład 1…

x / s	0	1	0	1
A	A	F	0	0
B	E	C	0	1
C	C	E	0	1
D	F	A	1	0
E	B	F	1	1
F	D	E	0	0

Co to znaczy, że zastosujemy kodowanie wg podziału zamkniętego:

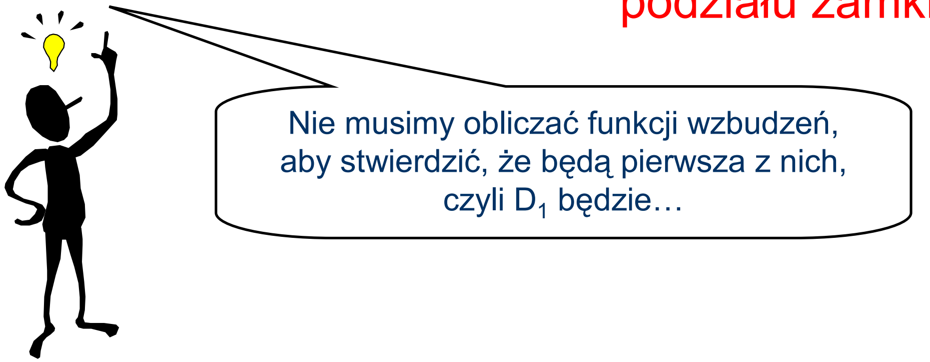
A 0 0 0
B 0 0 1
C 1 0 1
D 1 0 0
E 0 1 0
F 1 1 0

$$Q_1' = D_1 = f(x,Q_1)$$



Niestety tylko jedną zmienną zakodowaliśmy wg podziału zamkniętego, zatem:

$$Q_2' = D_2 = f(x,Q_1,Q_2,Q_3)$$
$$Q_3' = D_3 = f(x,Q_1,Q_2,Q_3)$$



ITPW ZPT

Przykład 1…

A może jest więcej podziałów zamkniętych:

s \ x	0	1	0	1
A	A	F	0	0
B	E	C	0	1
C	C	E	0	1
D	F	A	1	0
E	B	F	1	1
F	D	E	0	0

Później wykażemy, że oprócz Π_1

$$\pi_1 = \left(\overline{A,B,E};\overline{C,D,F}\right)$$

jest Π_2

$$\pi_2 = \left(\overline{A,C};\overline{B,D};\overline{E,F}\right)$$

Kodowanie wg Π_1 Π_2

	Π_1	Π_2	
A	0	0	0
B	0	0	1
C	1	0	0
D	1	0	1
E	0	1	0
F	1	1	0

Jest to kodowanie jednoznaczne

$$\Pi_1 \bullet \Pi_2 = \Pi(0)$$

ITPW ZPT

PRZYKŁAD 1 c.d.

Przy tak dobranym kodowaniu pierwsza funkcja wzbudzeń Q_1' tego automatu będzie zależna od jednej zmiennej wewnętrznej, a druga i trzecia łącznie (Q_2', Q_3') od dwóch zmiennych wewnętrznych, czyli

$$Q_1' = f(x,Q_1)$$

$$Q_2' = f(x,Q_2,Q_3)$$

$$Q_3' = f(x,Q_2,Q$$

Kto

Q_1',

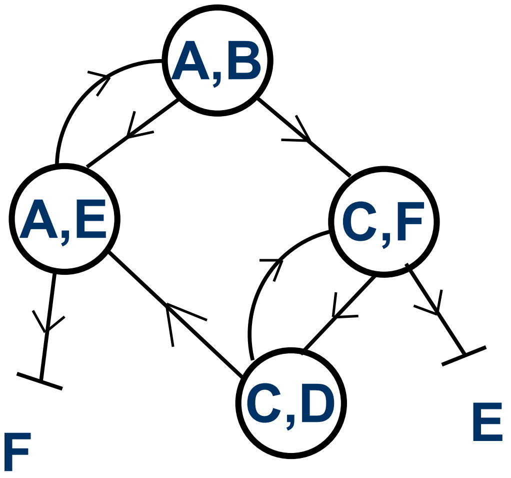
Jeśli wyjdzie inacz

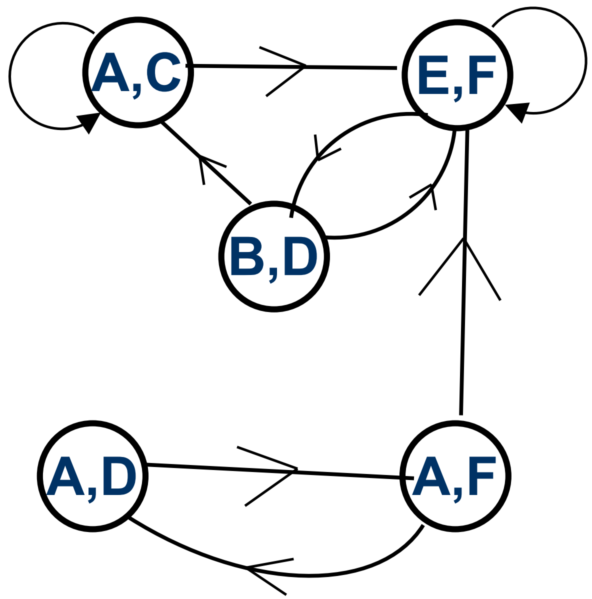
Dla całego roku!

Obliczanie podziału zamkniętego

s \ x	0	1
A	A	F
B	E	C
C	C	E
D	F	A
E	B	F
F	D	E

Tworzymy graf par następników
dla różnych wierzchołków początkowych





A,B ⇒ $\Pi_1 = \left(\overline{A,B,E};\overline{C,D,F}\right)$

A,C ⇒ $\Pi_2 = \left(\overline{A,C};\overline{B,D};\overline{E,F}\right)$

A,D ⇒ $\Pi(1)$

PRZYKŁAD 2

s \ x	0	1	Z
A	H	B	0
B	F	A	0
C	G	D	0
D	E	C	1
E	A	C	0
F	C	D	0
G	B	A	0
H	D	B	0

Do zakodowania stanów automatu M potrzebne są 3 podziały 2-blokowe, takie że:

$$\Pi_a \bullet \Pi_b \bullet \Pi_c = \Pi(0)$$

Generujemy podziały zamknięte

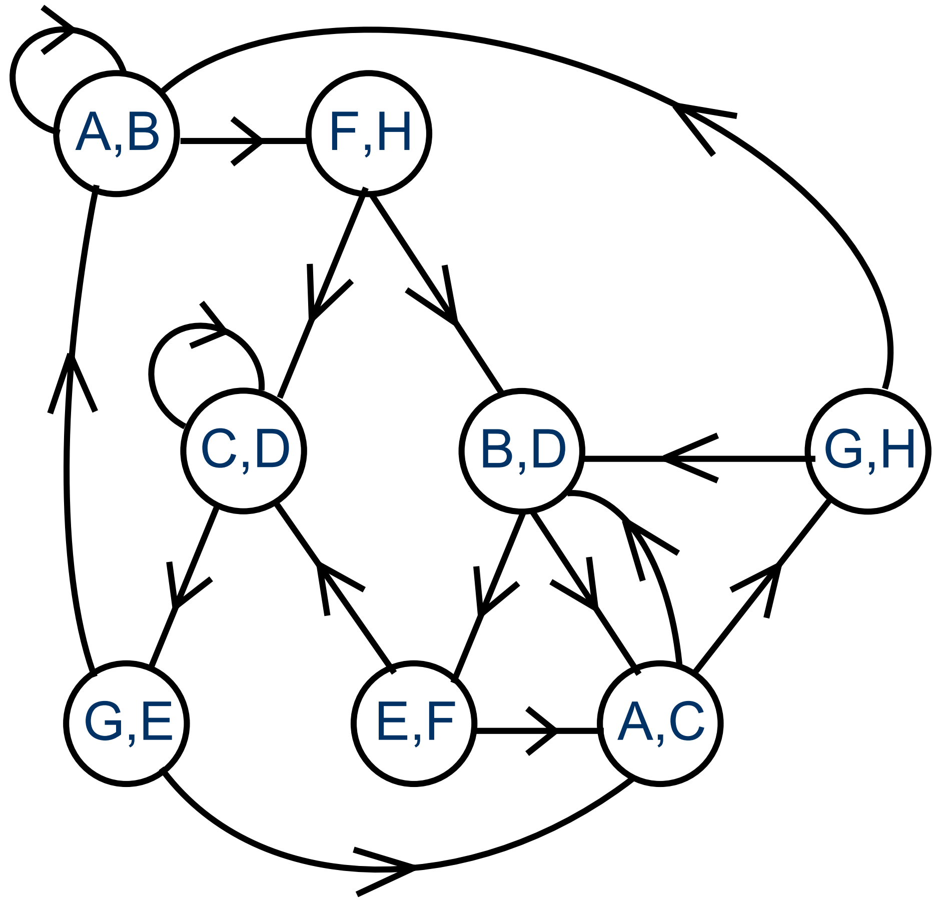
I T P W ZPT

PRZYKŁAD 2 c.d.

s \ x	0	1	Z
A	H	B	0
B	F	A	0
C	G	D	0
D	E	C	1
E	A	C	0
F	C	D	0
G	B	A	0
H	D	B	0

$$\Pi_1 = \left(\overline{A,B,C,D};\overline{E,F,G,H}\right)$$

Graf par następników :



ITPW

ZPT

PRZYKŁAD 2 c.d.

s \ x	0	1	Z
A	H	B	0
B	F	A	0
C	G	D	0
D	E	C	1
E	A	C	0
F	C	D	0
G	B	A	0
H	D	B	0

A,D ⇨ $\overline{A,D};\overline{B,C};\overline{E,H};\overline{F,G}$

D,H ⇨ $\overline{A,D,E,H};\overline{B,C};\overline{F,G}$

B,F ⇨ $\overline{B,C,F,G};\overline{A,D};\overline{E,H}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{D,H} \\ \text{B,F} \end{array}\right\} + = \Pi_2 = \left(\overline{A,D,E,H};\overline{B,C,F,G}\right)$$

PRZYKŁAD 2 c.d.

$$\Pi_1 = (\overline{A,B,C,D};\overline{E,F,G,H})$$

$$\Pi_2 = (\overline{A,D,E,H};\overline{B,C,F,G})$$

Niestety:

$$\Pi_1 \bullet \Pi_2 = (\overline{A,D};\overline{B,C};\overline{E,H};\overline{F,G}) \neq \Pi(0)$$

Potrzebny jest więc jeszcze jeden podział τ:

$$\Pi_1 \bullet \Pi_2 \bullet \tau = \Pi(0)$$

$$\tau = (\overline{A,B,G,H};\overline{C,D,E,F})$$

I T P W ZPT

PRZYKŁAD 2 c.d.

$$\Pi_1 = (\overline{A,B,C,D};\overline{E,F,G,H})$$

$$\Pi_2 = (\overline{A,D,E,H};\overline{B,C,F,G})$$

$$\tau = (\overline{A,B,G,H};\overline{C,D,E,F})$$

Kodowanie wg	Π_1	Π_2	τ
A	0	0	0
B	0	1	0
C	0	1	1
D	0	0	1
E	1	0	1
F	1	1	1
G	1	1	0
H	1	0	0

ITPW ZPT

PRZYKŁAD 2 c.d.

Przy tak dobranym kodowaniu dwie funkcje wzbudzeń Q_1' i Q_2' tego automatu będą zależne od jednej zmiennej wewnętrznej, a trzecia Q_3' (w najgorszym przypadku) od trzech zmiennych, czyli

$$Q_1' = f(x,Q_1)$$
$$Q_2' = f(x,Q_2)$$
$$Q_3' = f(x,Q_1,Q_2,Q_3)$$

Warto zakodować, obliczyć funkcje wzbudzeń Q_1', Q_2', Q_3' i sprawdzić, czy rzeczywiście tak jest.

ITPW

ZPT

Komentarz

Każde inne kodowanie doprowadzi do bardziej skomplikowanych funkcji wzbudzeń.

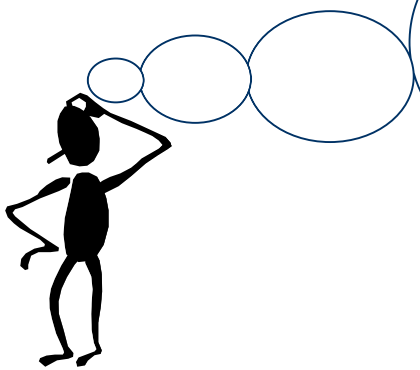
W szczególności dla kodowania wg naturalnego kodu binarnego[1]:

A	0 0 0
B	0 0 1
C	0 1 0
D	0 1 1
E	1 0 0
F	1 0 1
G	1 1 0
H	1 1 1

$$Q_1' = f(x,Q_1)$$
$$Q_2' = f(x,Q_1,Q_2,Q_3)$$
$$Q_3' = f(x,Q_1,Q_2,Q_3)$$

[1] Naturalny kod binarny jest przyjmowany automatycznie do kodowania automatów w komercyjnych systemach projektowania układów cyfrowych

Nie martwmy się…

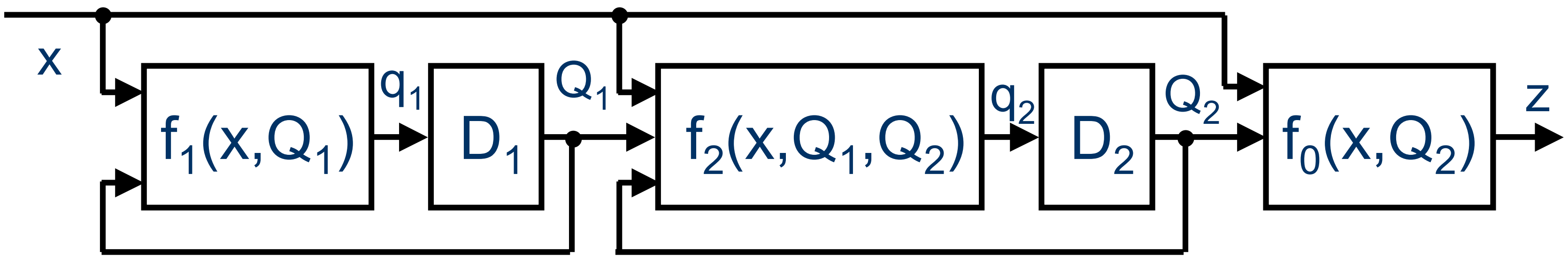


W najnowszych systemach istnieje opcjonalna możliwość wprowadzenia kodowania obliczonego na zewnętrznie przez użytkownika

ITPW ZPT

Dekompozycja szeregowa

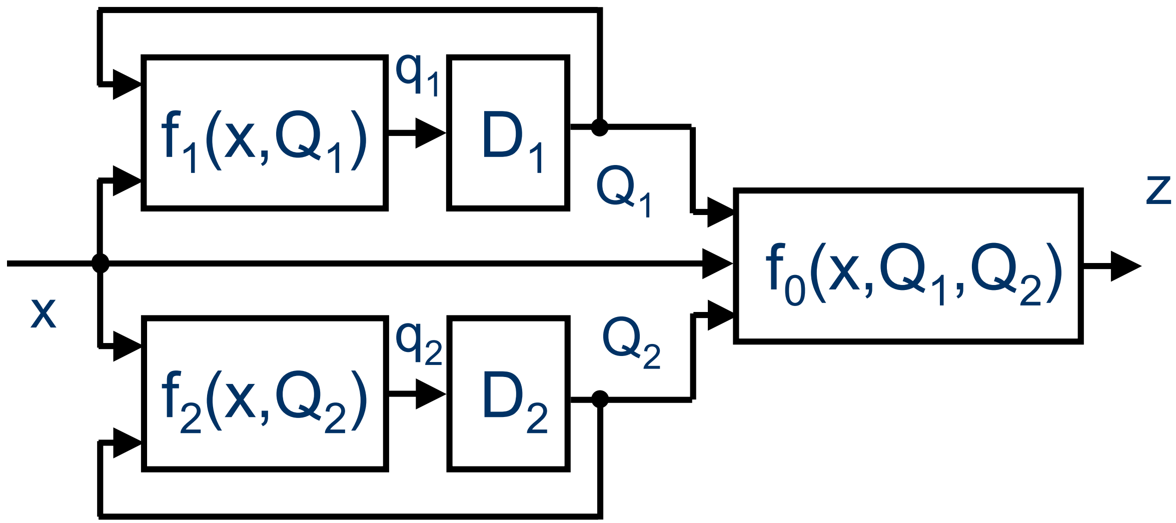
Dany jest automat *M* o zbiorze stanów *S*. Warunkiem koniecznym i wystarczającym dekompozycji szeregowej automatu *M* na dwa szeregowo połączone automaty M_1, M_2 jest istnienie podziału π z własnością podstawienia i podziału τ takich, że $\pi \bullet \tau = 0$.



Dekompozycja równoległa

Automat M jest dekomponowalny na dwa podautomaty M_1, M_2 działające równolegle wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiorze S tego automatu istnieją dwa nietrywialne podziały π_1, π_2 z własnością podstawienia takie, że

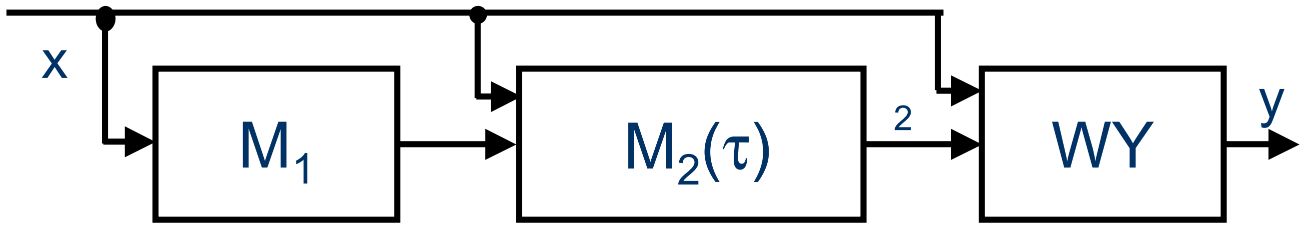
$$\pi_1 \bullet \pi_2 = \pi(0)$$



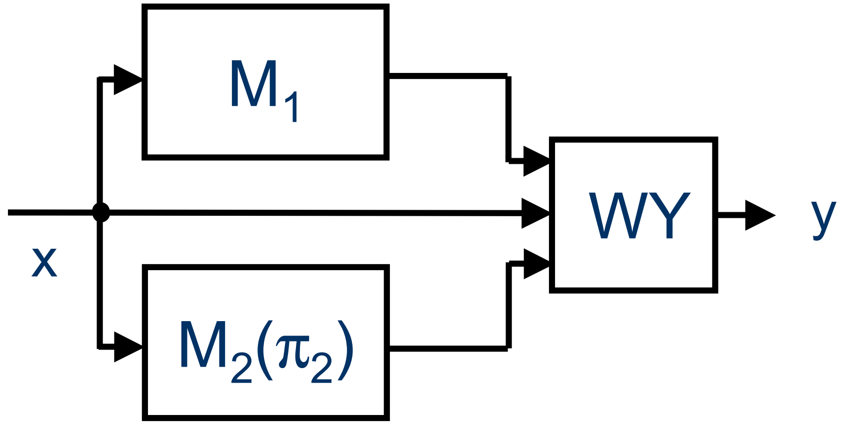
I T P W ZPT

Schematy dekompozycji

Dekompozycja szeregowa



Dekompozycja równoległa



Dekompozycja z autonomicznym zegarem

Niektóre automaty mają dekompozycję, w której występuje autonomiczny zegar – podautomat niezależny od wejść.

Podział π_i zbioru stanów S automatu M jest zgodny z wejściem, jeśli dla każdego stanu $S_j \in S$ i dla wszystkich $v_l \in V$

$$\delta(S_j,v_1),\ \delta(S_j,v_2),\ \ldots,\ \delta(S_j,v_l),\ \ldots,\ \delta(S_j,v_p),$$

są w jednym bloku podziału π_i.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia dekompozycji automatu M, w której występuje autonomiczny zegar o $\lceil \log_2 \beta(\pi) \rceil$ stanach jest, aby istniał podział zamknięty π i nietrywialny zgodny z wejściem podział π_i zbioru stanów S tego automatu, taki że $\pi \geq \pi_i$

I T P W ZPT

PRZYKŁAD 3

s \ x	0	1	0	1
A	D	C	0	1
B	C	D	0	0
C	E	F	0	1
D	F	E	0	0
E	B	A	0	1
F	A	B	0	0

Podział zgodny z wejściem:

$$\Pi_I = \left(\overline{A,B};\overline{C,D};\overline{E,F}\right)$$

Π_I jest zamknięty

$$\Pi_O = \left(\overline{A,C,E};\overline{B,D,F}\right)$$

$$\Pi_I \bullet \Pi_O = \Pi(0)$$

I T P W ZPT

PRZYKŁAD 3

$$\Pi_I = \left(\overline{A,B};\overline{C,D};\overline{E,F}\right) \qquad \Pi_O = \left(\overline{A,C,E};\overline{B,D,F}\right)$$

Kodowanie wg Π_I			wg Π_O
A	0	0	0
B	0	0	1
C	0	1	0
D	0	1	1
E	1	0	0
F	1	0	1

$Q_1' = f(Q_1,Q_2)$

$Q_2' = f(Q_1,Q_2)$

$Q_3' = ???$

$y = f(x,Q_3)$