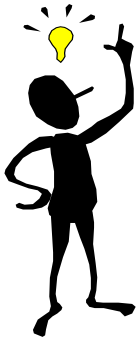
Dekompozycja funkcji boolowskich

(zwana również dekompozycją funkcjonalną)

Rewelacyjna i rewolucyjna metoda syntezy logicznej

Przegapiona przez twórców oprogramowania komercyjnego

Dostępna wyłącznie w oprogramowaniu uniwersyteckim



Dekompozycja funkcjonalna

(Metoda klasyczna: rozdz. 3.5 książka SUL)

Tablicą dekompozycji funkcji f nazywamy macierz dwuwymiarową o kolumnach etykietowanych wartościami zmiennych funkcji f ze zbioru B oraz o wierszach etykietowanych wartościami zmiennych funkcji f ze zbioru A. *Liczbę istotnie różnych kolumn* tej macierzy ze względu na ich zawartość nazywamy ich krotnością i oznaczamy symbolem $\nu(A|B)$.

B

A

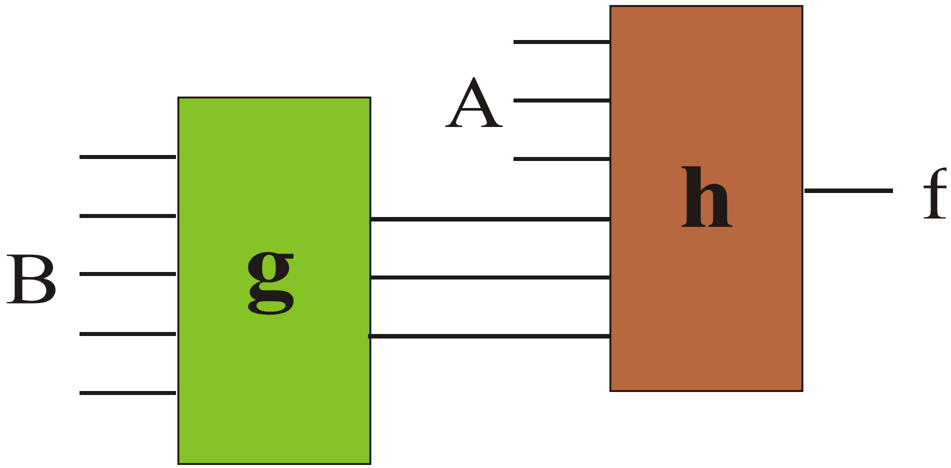
$x_1x_2x_3$ / x_4x_5	000	001	...
00	0	1	
01	1	0	
⋮			

Elementami macierzy M są wartości, jakie przyjmuje funkcja *f* na wektorach złożonych z odpowiednich etykiet i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Klasyczne twierdzenie o dekompozycji

Niech będzie dana funkcja boolowska f oraz podział zbioru zmiennych wejściowych funkcji f na dwa rozłączne zbiory A i B, to wówczas:

$$f(A,B) = h(g_1(B),.., g_j(B),A) \Leftrightarrow \nu(A|B) \leq 2^j.$$



B (*bound set*), A (*free set*)

Przykład

B

A

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	010	100	110	101	011	111
00	1	1	1	1	0	0	0	0
01	0	1	1	1	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	1	1	1	0

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

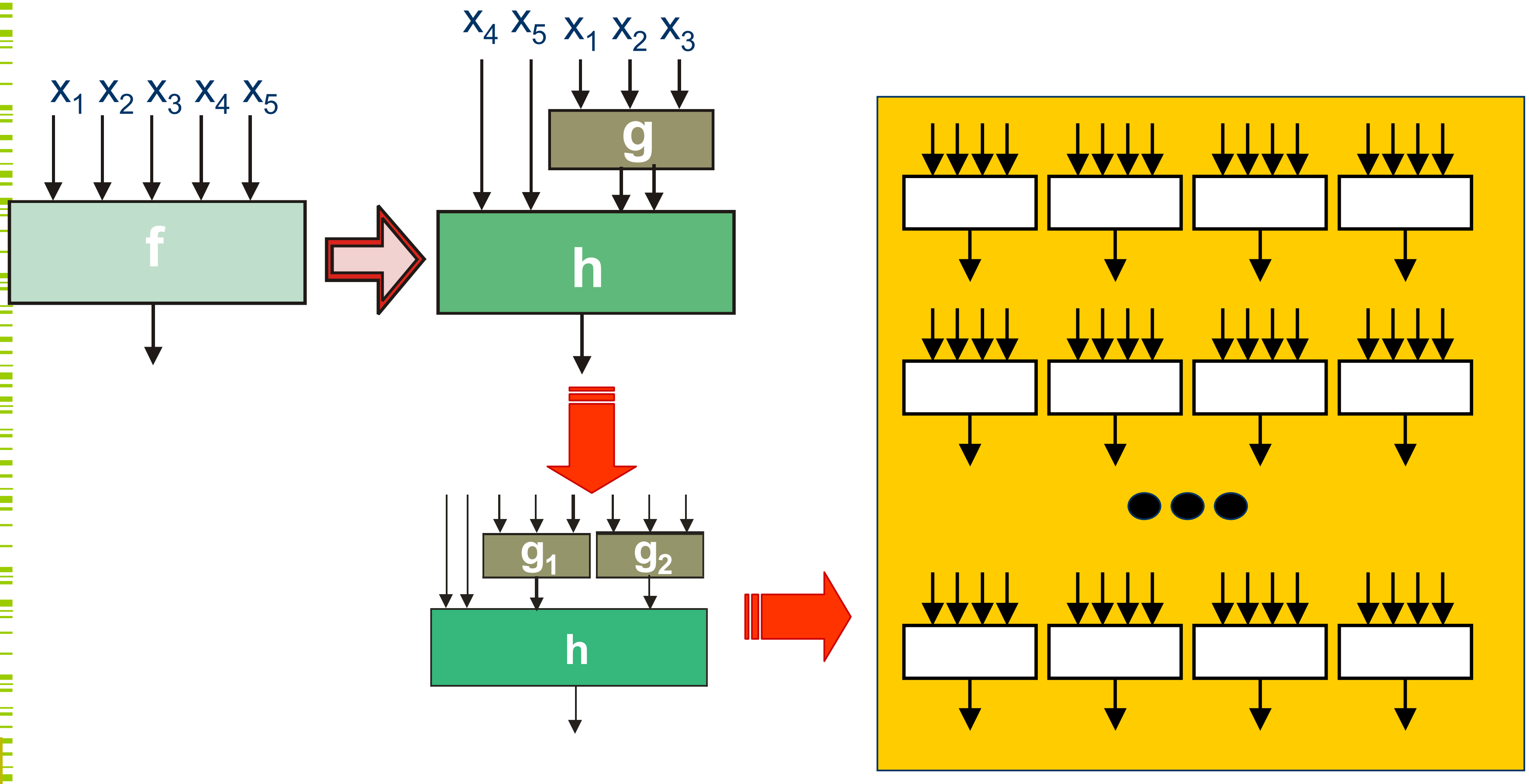
x_4x_5 \ g_1g_2	00	01	10	11
0 0	1	1	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	0	0
1 1	0	0	1	0

Istnieje dekompozycja !

$$f = h(x_4, x_5, g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3))$$

I T P W ZPT

Praktyczne znaczenie dekompozycji

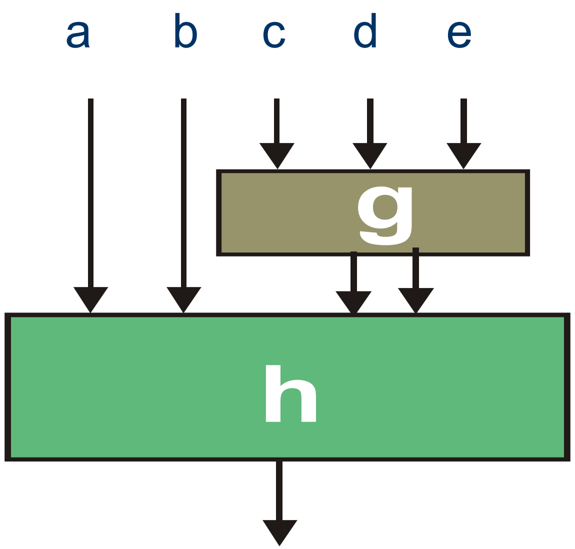


I
T
P
W

ZPT

Przykład trochę trudniejszy

cde / a b	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	–	0	1	–	0	1	0
01	–	–	–	–	1	1	–	–
10	–	0	1	0	0	–	0	1
11	0	1	–	–	–	–	–	–
	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7



Istnieje dekompozycja !

$$f = h(a,b,g_1(c,d,e), g_2(c,d,e))$$

I T P W

ZPT

Przykład trochę trudniejszy

B

A

a b \ cde	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	–	0	1	–	0	1	0
01	–	–	–	–	1	1	–	–
10	–	0	1	0	0	–	0	1
11	0	1	–	–	–	–	–	–
	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7

c	d	e	g_1	g_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

a b \ g_1g_2	00	01	11	10
0 0	1	0	0	–
0 1	1	1	–	–
1 0	0	0	1	–
1 1	0	1	–	–

I T P W ZPT

Jak obliczać dekompozycję

I T P W

ZPT

Relacja zgodności kolumn

Kolumny $\{k_r, k_s\}$ są zgodne, jeśli nie istnieje wiersz i, dla którego elementy K_{ir}, K_{is} są określone i różne, tzn. odpowiednio: 0, 1 albo 1, 0.

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
1	-	0	1	-	0	1
-	-	-	-	1	1	-
-	0	1	0	0	-	0
0	1	-	-	-	-	0

ITPW ZPT

Relacja zgodności kolumn

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
1	-	0	1	-	0	1
-	-	-	-	1	1	-
-	0	1	0	0	-	0
0	1	-	-	-	-	0

Kolumny zgodne można „sklejać”

{K1,K4,K7}

{K5,K6}

1	0		
-	1		
0	0		
0	-		

ITPW ZPT

Relacja zgodności

Relacja zgodności jest zwrotna, symetryczna, ale nie jest przechodnia.

Pary zgodne umożliwiają wyznaczenie maksymalnych zbiorów kolumn zgodnych.

Zbiór $K = \{k_1,...,k_p\}$ nazywamy **maksymalnym zbiorem kolumn zgodnych (maksymalną klasą zgodności),** jeżeli każda para k_i, k_j wzięta z tego zbioru jest zgodna oraz nie istnieje żaden inny zbiór kolumn zgodnych K', zawierający K.

I
T
P
W

ZPT

Obliczanie MKZ-ów

Problem obliczania maksymalnych klas zgodnych można sprowadzić do znanego problemu obliczania maksymalnych klik w grafie lub do problemu kolorowania grafu.

Najprostsza metoda polega na łączeniu par kolumn zgodnych w trójki, trójek w czwórki itd.

Redukując zbiory mniejsze zawarte w większych oblicza Maksymalne Klasy Zgodności

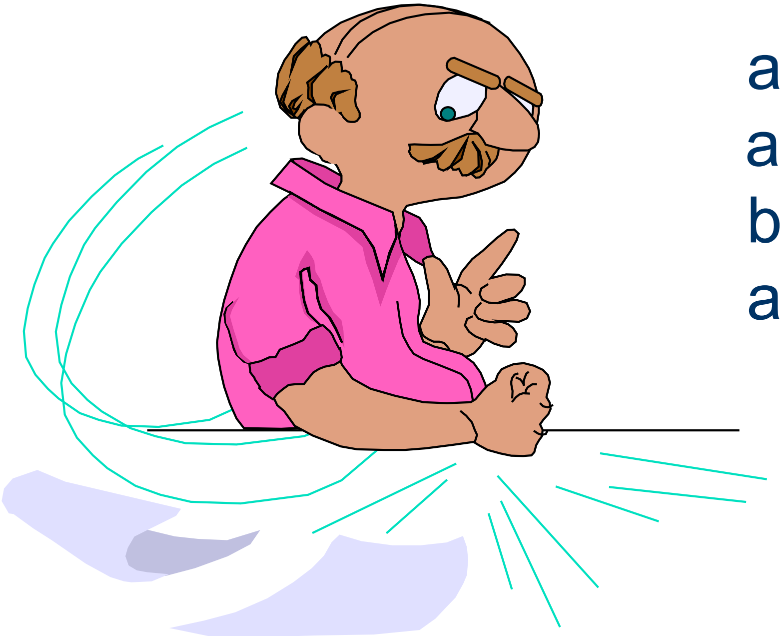
I T P W ZPT

Metoda bezpośrednia

Pary zgodne:

a, b
b, c
a, c

$\Rightarrow$ {a, b, c}



a, b, c
a, b, d
b, c, d
a, c, d

$\Rightarrow$ {a, b, c, d}

$\Rightarrow$ i.t.d.

Przykład - obliczanie klas zgodności

Pary zgodne:

cde / a b	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	–	0	1	–	0	1	0
01	–	–	–	–	1	1	–	–
10	–	0	1	0	0	–	0	1
11	0	1	–	–	–	–	–	–
	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7

K0, K1 sprzeczna

K0, K2 sprzeczna

K0, K3 zgodna

K0, K4 zgodna

0,3
0,4
0,6

1,3
1,4
1,5
1,6

2,5
2,7

3,4
3,6

4,5
4,6

5,7

I T P W ZPT

Przykład – obliczanie klas zgodności

0,3
0,4
0,6

1,3
1,4
1,5
1,6

2,5
2,7

3,4
3,6

4,5
4,6

5,7

0,3,4
0,3,6
0,4,6
1,3,4
1,3,6
1,4,5
1,4,6
2,5,7
3,4,6

Maksymalne klasy zgodności:

0,3,4,6

1,3,4,6

1,4,5

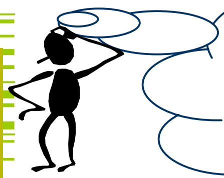
2,5,7

Przykład – obliczanie klas zgodności

Z rodziny MKZ wybieramy minimalną liczbę klas (lub podklas) pokrywającą zbiór wszystkich kolumn.

	Wybieramy:	Ostatecznie:
0,3,4,6	0,3,4,6	0,3,4,6
1,3,4,6	1,4,5	1,5
1,4,5	2,5,7	2,7
2,5,7		

Kolumny powtarzające się usuwamy



Komentarz: formalnie obliczamy pokrycie..

$$\bigcup_{KZ \in RKZ_S} KZ = K$$

I T P W ZPT

Sklejanie kolumn – funkcja h

ab \ cde	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	-	0	1	-	0	1	0
01	-	-	-	-	1	1	-	-
10	-	0	1	0	0	-	0	1
11	0	1	-	-	-	-	-	-
	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7

{K0,K3,K4,K6} {K1,K5} {K2,K7}

ab \ g_1g_2	00	01	11	10
00	1	0	0	-
01	1	1	-	-
10	0	0	1	-
11	0	1	-	-

Nowe kodowanie kolumn – funkcja g

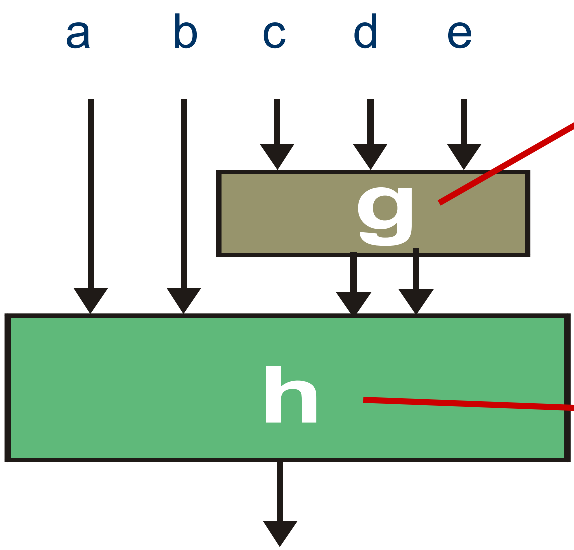
ab \ cde	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	-	0	1	-	0	1	0
01	-	-	-	-	1	1	-	-
10	-	0	1	0	0	-	0	1
11	0	1	-	-	-	-	-	-
	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7

ab \ g_1g_2	00	01	11	10
00	1	0	0	-
01	1	1	-	-
10	0	0	1	-
11	0	1	-	-

c	d	e	g_1	g_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

I T P W ZPT

Co uzyskaliśmy



c	d	e	g_1	g_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

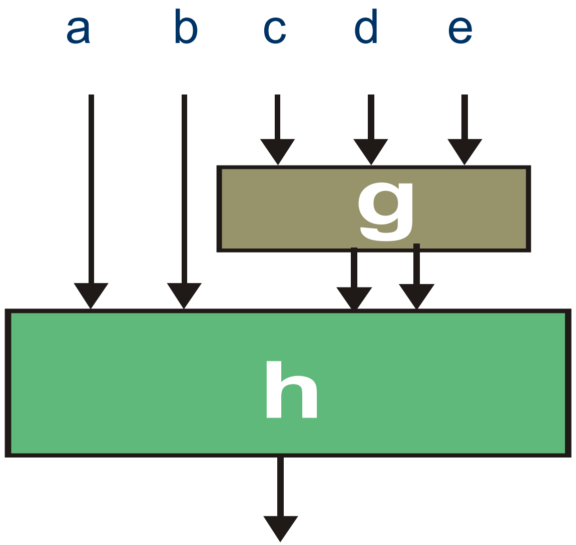
ab \ g_1g_2	00	01	11	10
00	1	0	0	-
01	1	1	-	-
10	0	0	1	-
11	0	1	-	-

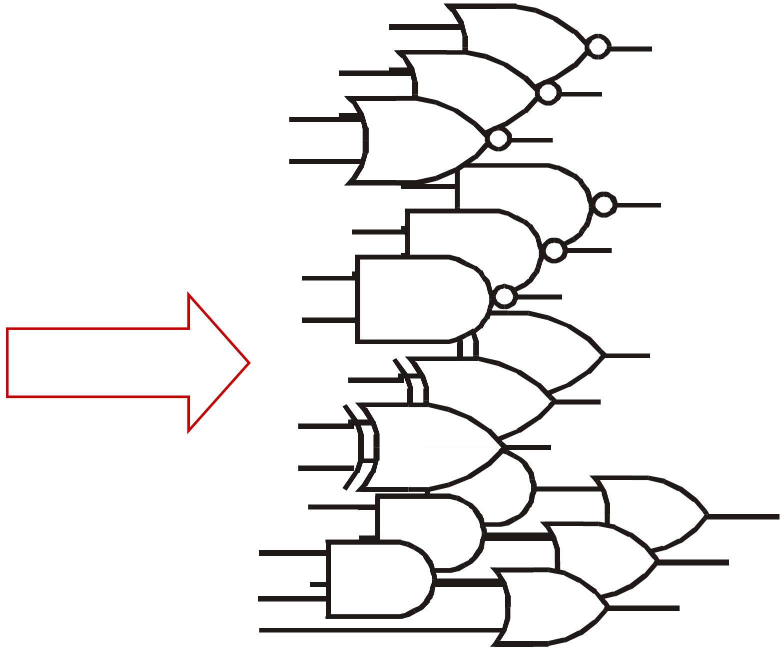
Opis funkcji g i h tablicami prawdy wystarczy dla realizacji w strukturach FPGA

Ale funkcje g i h można obliczyć jawnie…

czyli po procesie dekompozycji można je minimalizować

uzyskując w rezultacie …





…strukturę na bramkach

Przykład – funkcje g_1 i g_2

c	d	e	g_1	g_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

cd \ e	0	1
00	0	0
01	1	0
11	0	1
10	0	0

cd \ e	0	1
00	0	1
01	1	0
11	0	1
10	0	1

$$g_1 = \boxed{\bar{c}d\bar{e}} + \boxed{cde}$$

$$g_2 = \boxed{\bar{c}d\bar{e}} + \boxed{ce} + \boxed{\bar{d}e}$$

ITPW
ZPT

Przykład – funkcja h

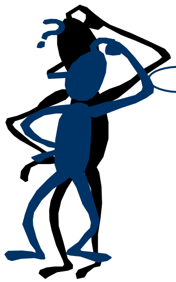
ab \ g_1g_2	00	01	11	10
00	1	0	0	-
01	1	1	-	-
11	0	1	-	-
10	0	0	1	-

Uwaga:
Przestawiliśmy wiersze

$$h = \boxed{\overline{a}\,\overline{g}_2} + \boxed{bg_2} + \boxed{ag_1}$$

Jak usprawnić obliczanie MKZ?

W metodzie dekompozycji jednym z najważniejszych algorytmów jest algorytm obliczania maksymalnych klas zgodności



Czy nie można stosowanej do tej pory metody bezpośredniej zastąpić czymś skuteczniejszym?

I T P W

ZPT

Jak usprawnić obliczanie MKZ?

W celu sprawniejszego obliczania MKZ wprowadzimy dwie nowe metody:

a) **metodę wg par zgodnych**
b) **metodę wg par sprzecznych**

Algorytm MKZ wg par zgodnych

E – relacja zgodności $(e_i,e_j) \in E$

$R_j = \{ e_i \mid i < j \text{ oraz } (e_i,e_j) \in E\}$

RKZ_k $\quad RKZ_{k+1}$ $\quad KZ \in RKZ_k$

a) $R_{k+1} = \phi$, RKZ_{k+1} jest powiększana o klasę $KZ = \{k+1\}$

b) $KZ \cap R_{k+1} = \phi$, KZ bez zmian

c) $KZ \cap R_{k+1} \neq \phi$, $KZ' = KZ \cap R_{k+1} \cup \{k+1\}$

ITPW ZPT

Przykład

$$R_j = \{ e_i \mid i < j \text{ oraz } (e_i,e_j) \in E\}$$

E:
1,2
1,3
1,5
2,3
2,4
2,5
3,5
3,6
4,6

$R_1 = \phi$

$R_2 = 1$

$R_3 = 1,2$

$R_4 = 2$

$R_5 = 1,2,3$

$R_6 = 3,4$

ITPW ZPT

Przykład c.d.

a) $R_{k+1} = \phi$, RKZ_{k+1} jest powiększana o klasę KZ = {k+1}

b) $KZ \cap R_{k+1} = \phi$, KZ bez zmian

c) $KZ \cap R_{k+1} \neq \phi$, $KZ' = KZ \cap R_{k+1} \cup \{k+1\}$

$R_1 = \phi$	{1}
$R_2 = 1$	{1,2}
$R_3 = 1,2$	{1,2,3}
$R_4 = 2$	{2,4}, {1,2,3}
$R_5 = 1,2,3$	~~{2,5}~~, {1,2,3,5}, {2,4}
$R_6 = 3,4$	{3,6}, {4,6}, {1,2,3,5}, {2,4}

Rodzina MKZ

I T P W ZPT

Algorytm MKZ wg par sprzecznych

Zapisać pary sprzeczne w postaci koniunkcji dwuskładnikowych sum

Koniunkcję dwuskładnikowych sum przekształcić do minimalnego wyrażenia boolowskiego typu suma iloczynów

Wtedy MKZ są uzupełnieniami zbiorów reprezentowanych przez składniki iloczynowe tego wyrażenia

I
T
P
W

ZPT

Ten sam przykład

Pary zgodne		Pary sprzeczne
E:	1,2	1,4
	1,3	1,6
	1,5	2,6
	2,3	3,4
	2,4	4,5
	2,5	5,6
	3,5	
	3,6	
	4,6	

I
T
P
W

ZPT

Przykład...

Pary sprzeczne:

(k1, k4), (k1, k6), (k2, k6), (k3, k4), (k4, k5), (k5, k6)

Obliczamy wyrażenie boolowskie typu „koniunkcja sum”:

$(k1 + k4)\ (k1 + k6)\ (k2 + k6)\ (k3 + k4)\ (k4 + k5)\ (k5 + k6) =$

Porządkujemy:

$(k4 + k1)\ (k4 + k3)\ (k4 + k5)\ (k6 + k1)\ (k6 + k2)\ (k6 + k5) =$

Przekształcamy wyrażenie do postaci „suma iloczynów”:

$= (k4 + k1k3k5)\quad (k6 + k1k2k5) =$

$k4k6 + k1k2k4k5 + k1k3k5k6 + k1k2k3k5$

I
T
P
W

ZPT

Przykład...

Klasy zgodne uzyskamy odejmując od zbioru $\{k1,...,k6\}$, zbiory tych ki, które występują w jednym składniku wyrażenia typu „suma iloczynów”

$$\{k1,...,k6\} - \{k4, k6\} = \{k1, k2, k3, k5\}$$
$$\{k1,...,k6\} - \{k1, k2, k4, k5\} = \{k3, k6\}$$
$$\{k1,...,k6\} - \{k1, k3, k5, k6\} = \{k2, k4\}$$
$$\{k1,...,k6\} - \{k1, k2, k3, k5\} = \{k4, k6\}$$

Warto umiejętnie dobierać metodę...

Pary zgodne:

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,3), (2,5), (2,6), (2,7), (3,4), (3,5), (3,6), (3,8), (4,6), (4,7), (4,8), (5,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8), (7,8),

Pary sprzeczne:

(1,8) (2,4) (2,8) (3,7) (4,5)

Wybór metody jest oczywisty!

I T P W ZPT

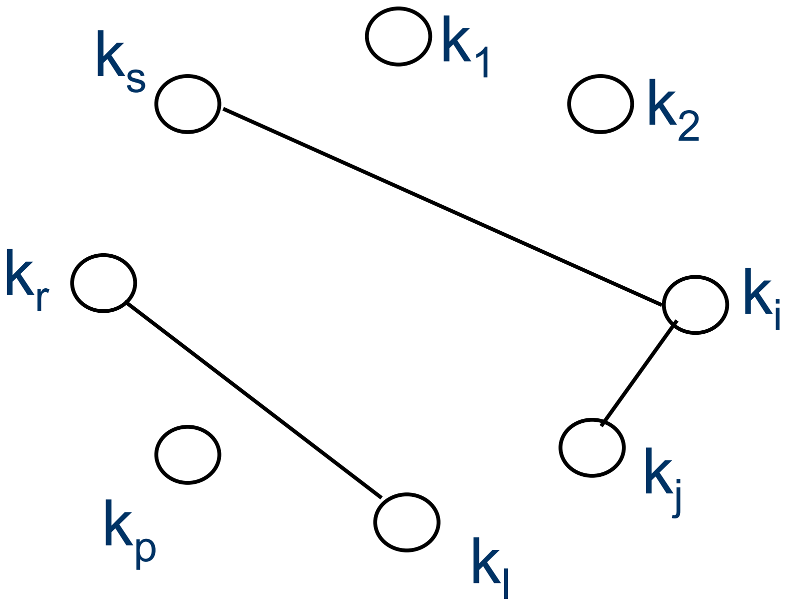
W poszukiwaniu innych metod…

W obliczaniu kolumn, które można „skleić” znajdują zastosowanie algorytmy kolorowania grafu.

Wierzchołki grafu reprezentują kolumny tablicy dekompozycji.

Niezgodne pary kolumn łączy się krawędziami.

Graf niezgodności:



Pary niezgodne:

(k_i, k_j)

(k_i, k_s)

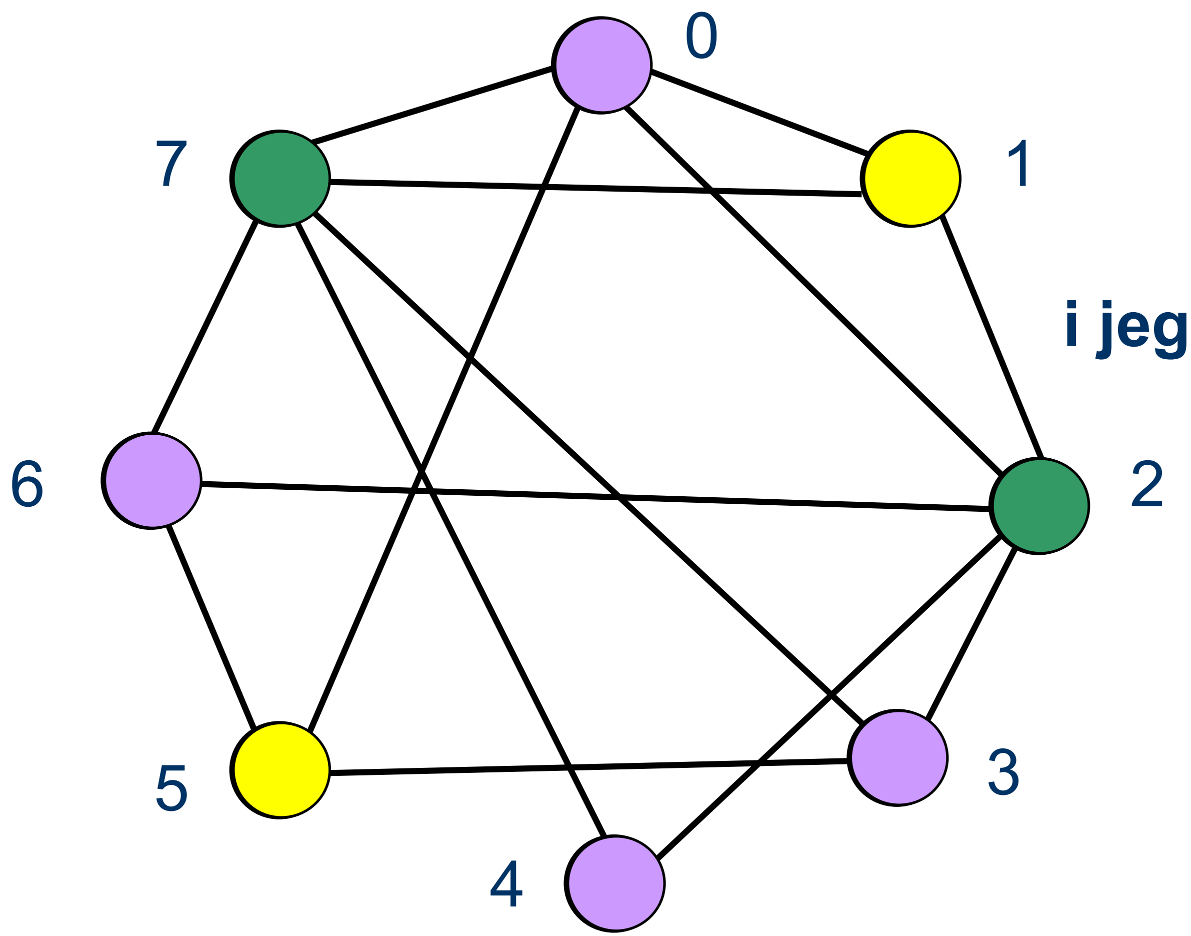
(k_l, k_r)

Przykład…

Pary zgodne:	Pary sprzeczne:
0,3	0,1
0,4	0,2
0,6	0,5
1,3	0,7
1,4	1,2
1,5	1,7
1,6	2,3
2,5	2,4
2,7	2,6
3,4	3,5
3,6	3,7
4,5	4,7
4,6	5,6
5,7	6,7

Graf niezgodności

(0,1), (0,2), (0,5), (0,7), (1,2), (1,7), (2,3), (2,4), (2,6), (3,5), (3,7), (4,7), (5,6), (6,7)



i jego kolorowanie

Graf zgodności - przykład

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,3), (2,5), (2,6), (2,7), (3,4), (3,5), (3,6), (3,8), (4,6), (4,7), (4,8), (5,6), (5,7), (5,8),(6,7), (6,8), (7,8),

MKZ1 = $\{S_1, S_2, S_5, S_6, S_7\}$

MKZ2 = $\{S_1, S_4, S_6, S_7\}$

MKZ3 = $\{S_5, S_6, S_7, S_8\}$

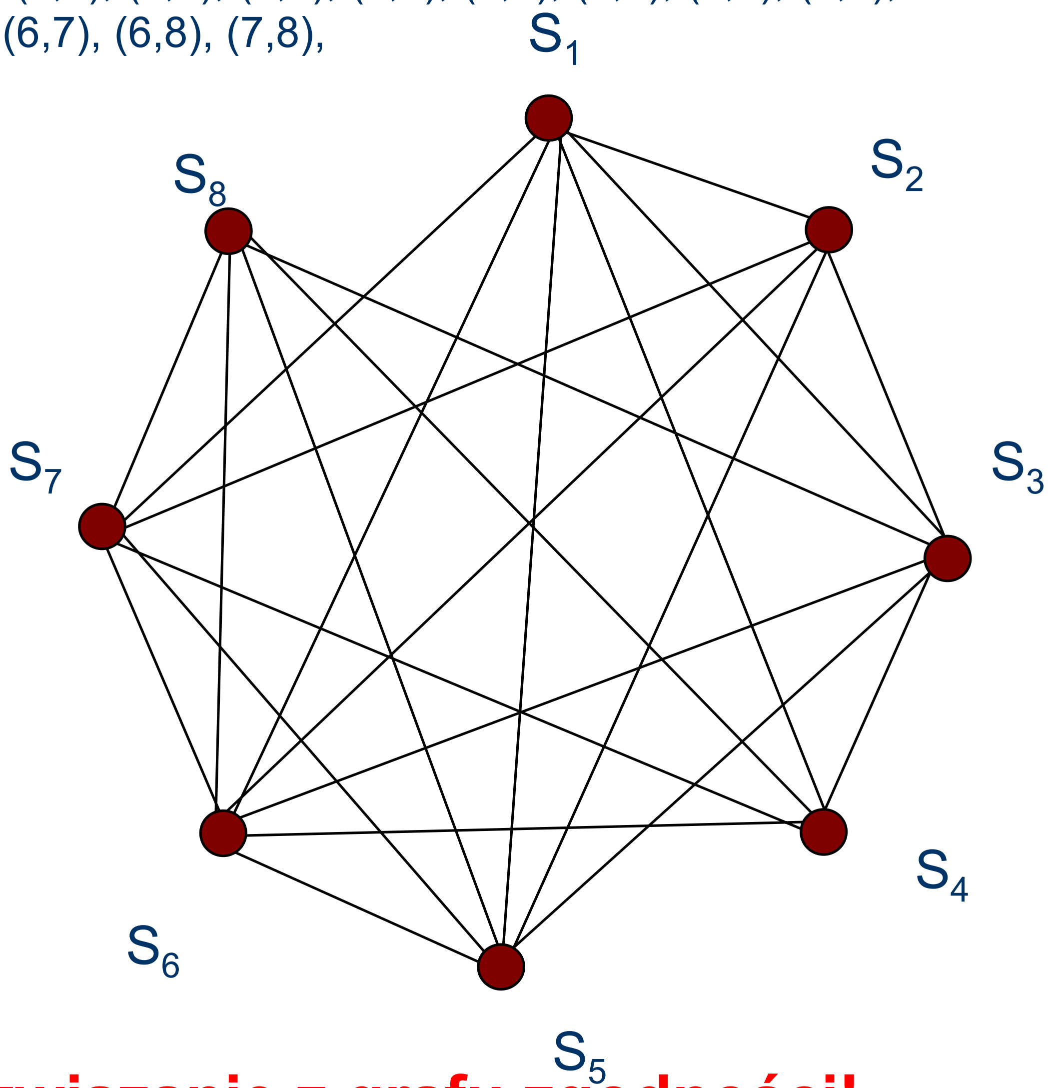
MKZ4 = $\{S_4, S_6, S_7, S_8\}$

MKZ5 = $\{S_3, S_5, S_6, S_8\}$

MKZ6 = $\{S_3, S_4, S_6, S_8\}$

MKZ7 = $\{S_1, S_2, S_3, S_5, S_6\}$

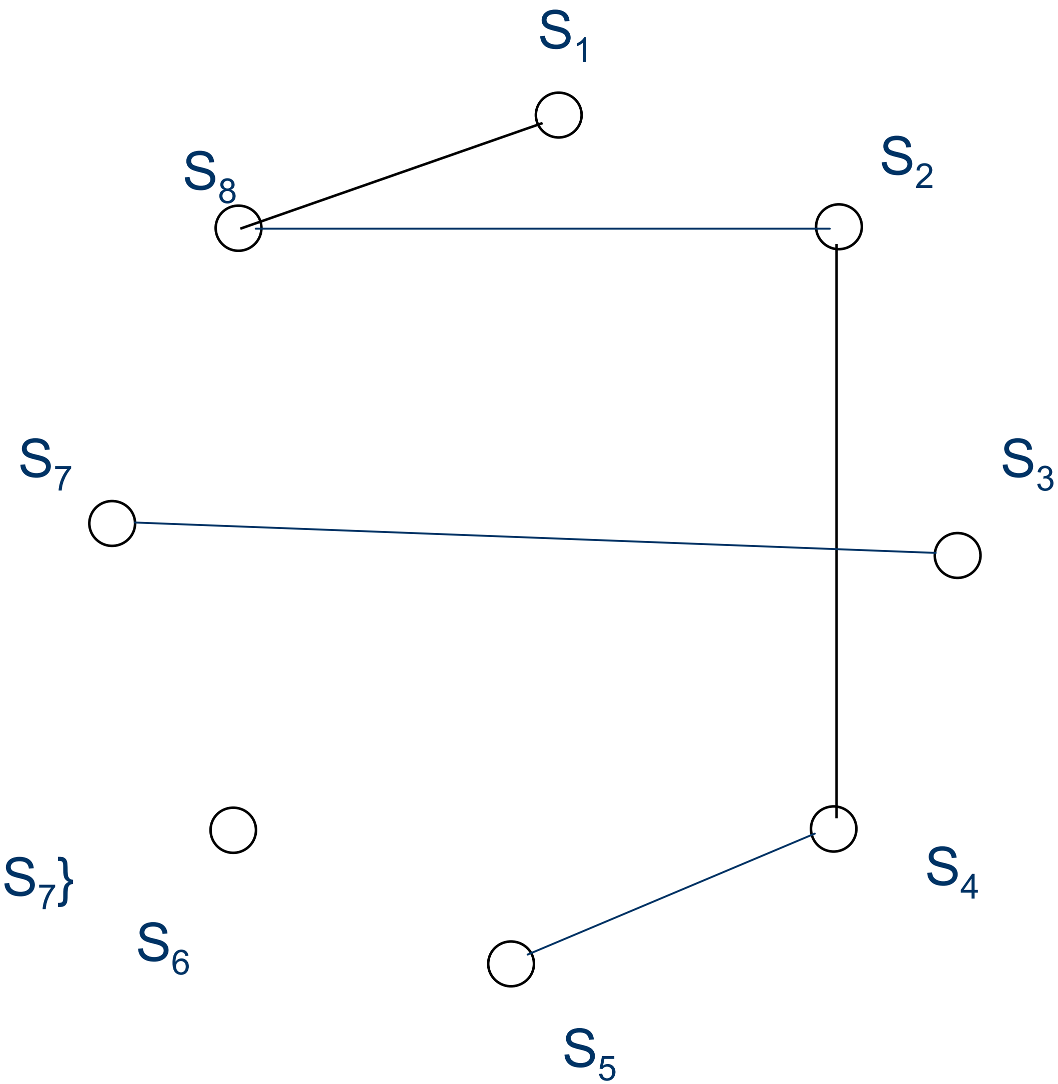
MKZ8 = $\{S_1, S_3, S_4, S_6\}$



Jak zauważyć rozwiązanie z grafu zgodności!

Graf niezgodności - przykład

(S_1, S_8)
(S_2, S_4)
(S_2, S_8)
(S_3, S_7)
(S_4, S_5)



Teraz łatwiej!

$MKZ1 = \{S_1, S_2, S_5, S_6, S_7\}$

$MKZ6 = \{S_3, S_4, S_6, S_8\}$

ITPW ZPT

Zadanie domowe

Warto przeczytać rozdział 2 z książki SUL.
Są tam inne przykłady obliczania MKZ.

...a dla treningu można obliczyć zadanie 2 str. 39

I T P W ZPT