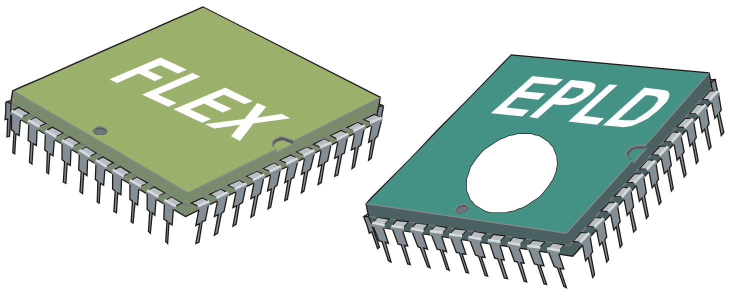
Minimalizacja funkcji boolowskich

Zagadnienie intensywnych prac badawczych od początku lat pięćdziesiątych 20 wieku.

Ogromny wzrost zainteresowania minimalizacją f.b. powstał ponownie w latach 80.

Przyczyna: możliwość realizacji układów logicznych w strukturach scalonych o złożoności milionów bramek logicznych.



I T P W ZPT

Metody minimalizacji funkcji boolowskich

- Graficzne
- Analityczne
- Komputerowe

Absolutnie nieprzydatne do obliczeń komputerowych

Tablice Karnaugha
Metoda Quine'a – McCluskey'a

Omówienie całego Espresso jest nierealne!

Pierwsze skuteczne narzędzie do minimalizacji wieloargumento[wych] wielowyjściowych funkcji boolowskich (Uniwersytet Kalifornijski w Berkeley) :

Metoda i system Espresso (1984)

Ze względu na ograniczony zakres wykładu omówimy wyłącznie:

Metodę tablic Karnaugha
Metodę Ekspansji (przykładową procedurę Espresso)

ITPW ZPT

Metoda tablic Karnaugha

Tablica K. jest prostokątem złożonym z 2^n kratek, z których każda reprezentuje jeden pełny iloczyn (minterm) zmiennych binarnych.

W kratki wpisuje się wartości funkcji.

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	-	0
01	1	1
11	1	0
10	0	0

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2$$

W tablicy K. różniącym się tylko o negację pełnym iloczynom przyporządkowane są leżące obok siebie pola tablicy (sąsiednie kratki). Korzysta się z faktu, że dla dowolnego A:

$$A\bar{x} + Ax = A$$

Dla uzyskania efektu sąsiedztwa współrzędne pól opisuje się kodem Gray'a

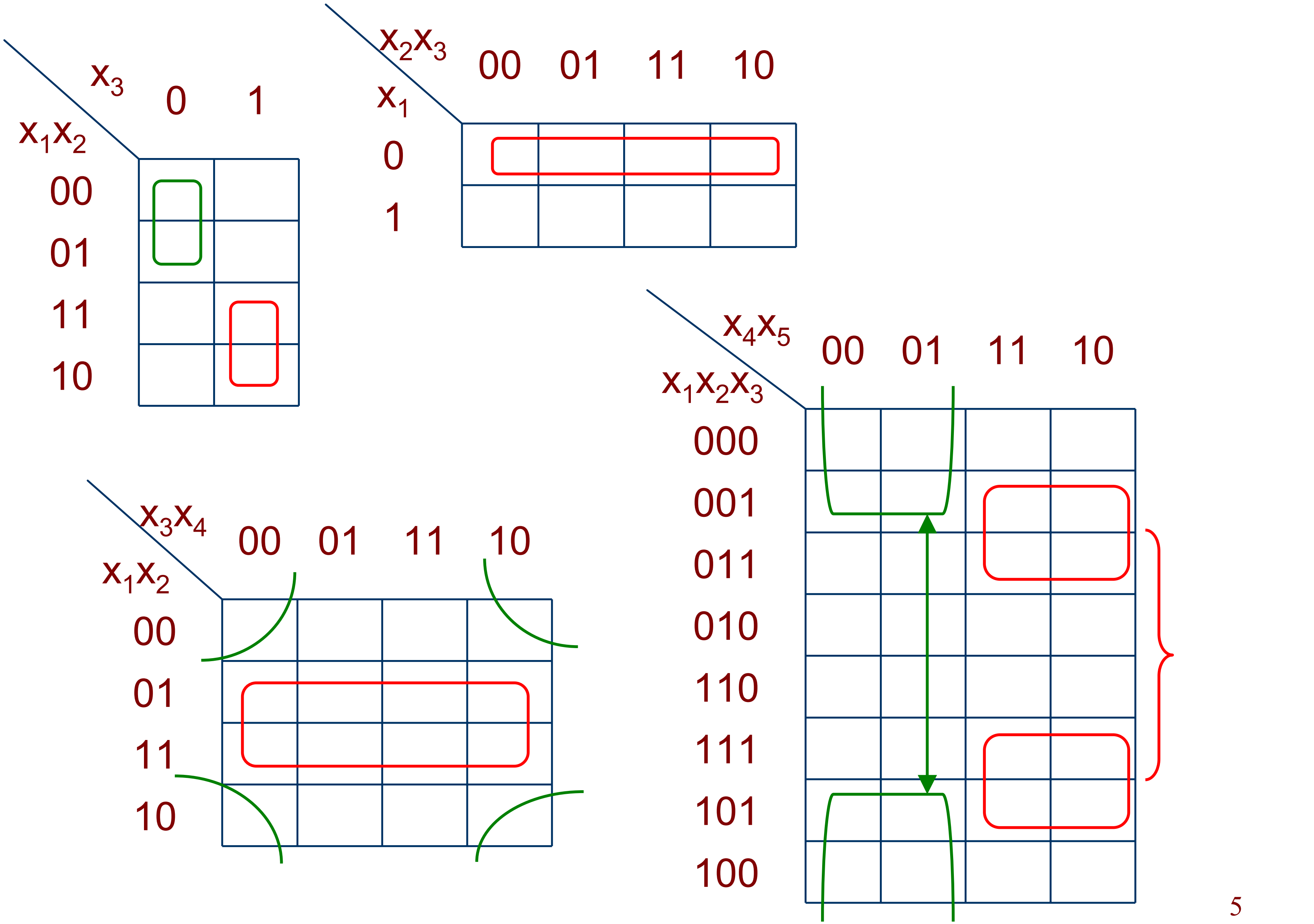
I T P W ZPT

Kod Gray'a

0	00	000	0000
1	01	001	0001
	11	011	0011
	10	010	0010
		110	0110
		111	0111
		101	0101
		100	0100
			1100
			1101
			1111
			1110
			1010
			1011
			1001
			1000

I T P W ZPT

Przykłady sklejeń



I T P W ZPT

Przykładzik

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

1) Wpisanie funkcji do tablicy

2) Zakreślanie pętelek

Z pętelkami kojarzymy iloczyn zmiennych (prostych lub zanegowanych)

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	1
01	0	1
11	1	1
10	0	1

$$f = \boxed{x_1x_2} + \boxed{x_3}$$

Wpisywanie funkcji ułatwia…

…opis kratek tablic Karnaugha wg NKB

$$A_D = L(A_{NKB}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j$$

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_1x_2x_3$ \ x_4x_5	00	01	11	10
000	0	1	3	2
001	4	5	7	6
011	12	13	15	14
010	8	9	11	10
110	24	25	27	26
111	28	29	31	30
101	20	21	23	22
100	16	17	19	18

Przykładzik

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Wpisanie funkcji do tablicy

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	1
01	0	1
11	1	1
10	0	1

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

Zakreślanie pętelek i kojarzenie z nimi odpowiednich iloczynów jest trudniejsze

Przykład

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

x_1	x_2 \ x_3	0	1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1
1	0	1	0

$$f = \boxed{x_2\bar{x}_3} + \boxed{x_1x_2} + \boxed{x_1\bar{x}_3}$$

x_1	x_2 \ x_3	0	1	
0	0	0	0	$\bar{x}_1$
0	1	1	0	
1	1	1	1	x_1
1	0	1	0	

x_1	x_2 \ x_3	0	1	
0	0	0	0	$\bar{x}_2$
0	1	1	0	x_2
1	1	1	1	
1	0	1	0	$\bar{x}_2$

x_1	x_2 \ x_3	0	1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1
1	0	1	0
		$\bar{x}_3$	x_3

I T P W ZPT

Przykład

$f = \Sigma[0, 5, 6, 7, 10, (2, 3, 11, 12)]$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	–	–
01	0	1	1	1
11	–	0	0	0
10	0	0	–	1

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$$f = \boxed{\bar{x}_1 x_3} + \boxed{\bar{x}_2 x_3} + \boxed{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4} + \boxed{\bar{x}_1 x_2 x_4}$$

Implikant funkcji boolowskiej

Implikant danej funkcji f jest to iloczyn literałów (zmiennych prostych i zanegowanych) o następującej własności: dla wszystkich kombinacji wartości zmiennych, dla których implikant jest równy jedności, również funkcja f jest równa jedności.

Prosty implikant jest to implikant, który zmniejszony o dowolny literał przestaje być implikantem.

I
T
P
W

ZPT

Implikant funkcji boolowskiej

W interpretacji tablic Karnaugha implikant prosty odpowiada grupie jedynek (i kresek), której nie można powiększyć.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	–	–
01	0	1	1	1
11	–	0	0	0
10	0	0	–	1

Implikant $\bar{x}_1 x_3 x_4$

Prosty implikant $\bar{x}_1 x_3$

To nie jest Implikant!

Formy kanoniczne

Kanoniczna forma sumacyjna

(suma iloczynów)

Kanoniczna forma iloczynowa

(iloczyn sum)

I
T
P
W

ZPT

Kanoniczna forma sumacyjna

$$f(X) = \bigvee_{k=0}^{2^n-1} x_1^{e_{1k}} x_2^{e_{2k}} \cdots x_n^{e_{nk}} f(X_k)$$

$$x^e = \begin{cases} x, & \text{gdy } e = 1 \\ \bar{x}, & \text{gdy } e = 0 \end{cases}$$

$$f(X) = \bigvee_{k=0}^{2^n-1} P_k(X) f(X_k)$$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1\bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

I T P W ZPT

Kanoniczna forma iloczynowa

$$f(X) = \bigwedge_{k=0}^{2^n-1}\left(x_1^{e_{1k}} + x_2^{e_{2k}} + \cdots + x_n^{e_{nk}} + f(X_k)\right)$$

$$x^e = \begin{cases} x, & \text{gdy } e = 0 \\ \bar{x}, & \text{gdy } e = 1 \end{cases}$$

$$f(X) = \bigwedge_{k=0}^{2^n-1}\left(S_k + f(X_k)\right)$$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$$

I
T
P
W

ZPT

Formy kanoniczne – realizacje bramkowe

Realizacja AND-OR

Realizacja NAND

Realizacja OR-AND

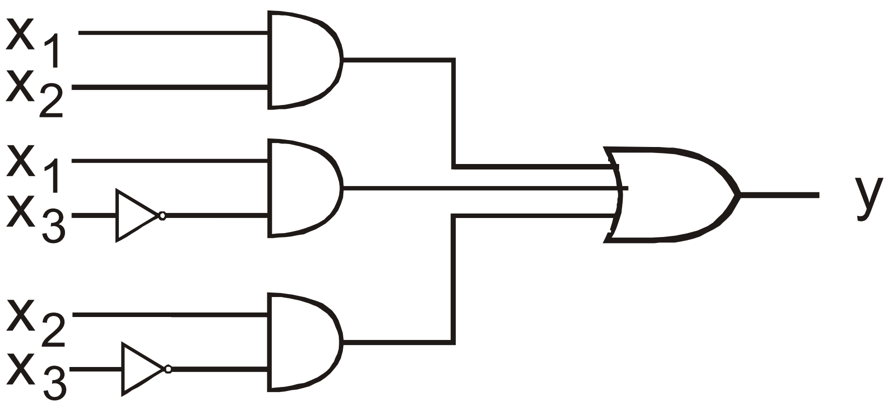
Realizacja NOR

$$y = x_1 x_2 + x_1 \overline{x}_3 + x_2 \overline{x}_3$$

Realizacja AND-OR

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

$$y = x_1x_2 + x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_3$$



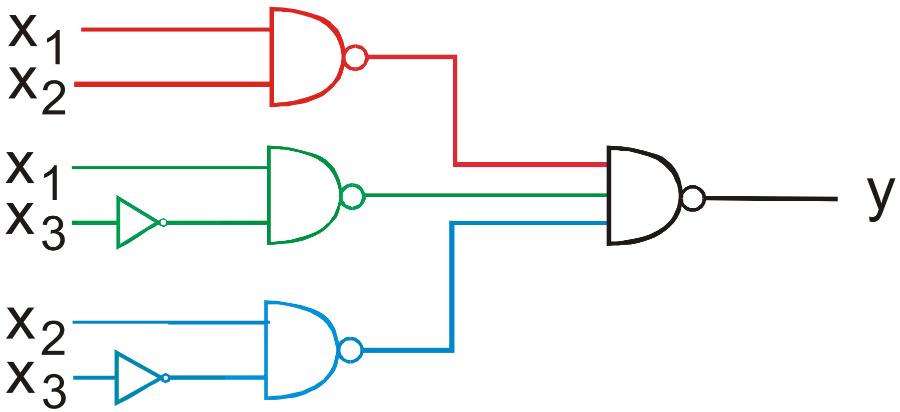
I T P W ZPT

Realizacja NAND

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

$$y = \overline{\overline{x_1x_2 + x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_3}}$$

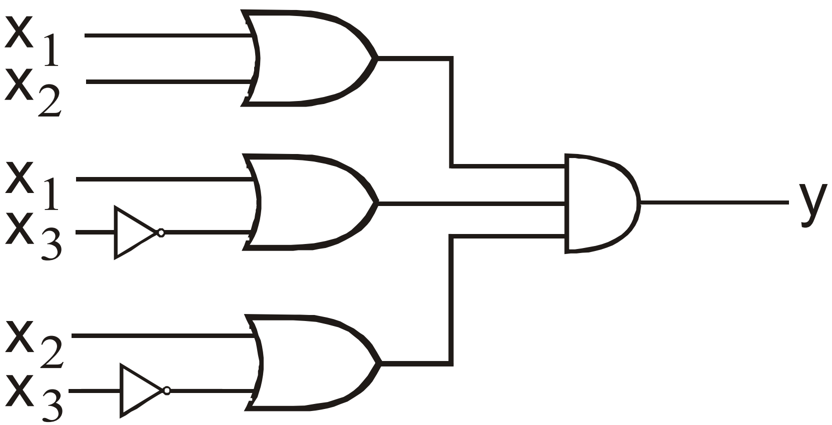
$$y = \overline{\overline{x_1x_2} \bullet \overline{x_1\bar{x}_3} \bullet \overline{x_2\bar{x}_3}}$$



Realizacja OR-AND

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

$$y = (x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x}_3)(x_2 + \overline{x}_3)$$



ITPW

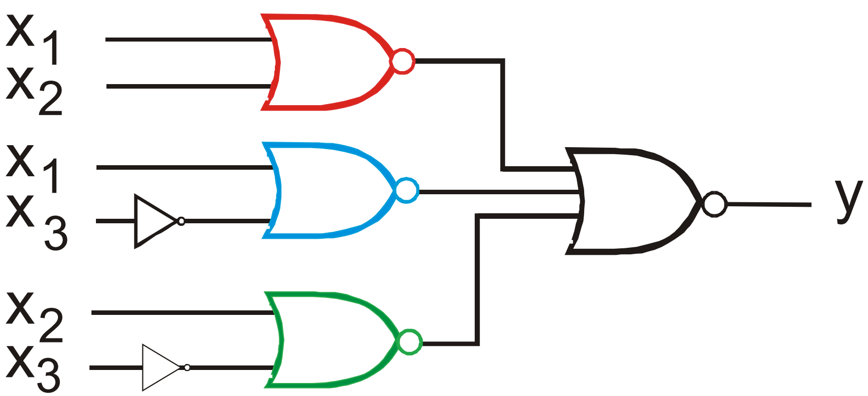
ZPT

Realizacja NOR

$x_1x_2 \backslash x_3$	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

$$y = \overline{\overline{(x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x}_3)(x_2 + \overline{x}_3)}}$$

$$y = \overline{\overline{x_1 + x_2} + \overline{x_1 + \overline{x}_3} + \overline{x_2 + \overline{x}_3}}$$



I
T
P
W

ZPT

Przykład

$$f = \Sigma[0, 5, 6, 7, 10, (2, 3, 11, 12)]$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	0	–	–
01	0	1	1	1
11	–	0	0	0
10	0	0	–	1

$$f = \boxed{(\bar{x}_1 \vee x_3)}\boxed{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)}\boxed{(x_2 \vee \bar{x}_4)}\boxed{(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)}$$

Układy wielowyjściowe - przykład

$y_1 = \Sigma(2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)$

$y_2 = \Sigma(2,3,5,6,7,10,11,14,15)$

$y_3 = \Sigma(6,7,8,9,13,14,15)$

ab \ cd	00	01	11	10
00	**0**	**1**	**3**	**2**
01	**4**	**5**	**7**	**6**
11	**12**	**13**	**15**	**14**
10	**8**	**9**	**11**	**10**

ab \ cd	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

$$y_1 = a\bar{b} + bd + \bar{b}c$$

ab \ cd	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	1
11			1	1
10			1	1

$$y_2 = c + \bar{a}bd$$

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01			1	1
11		1	1	1
10	1	1		

$$y_3 = bc + a\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}$$

7 bramek AND

I T P W ZPT

Układy wielowyjściowe - przykład

ab \ cd	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

ab \ cd	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	1
11			1	1
10			1	1

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01			1	1
11		1	1	1
10	1	1		

$$y_1 = \overset{1}{\bar{b}c} + \overset{2}{\bar{a}bd} + \overset{3}{abd} + \overset{4}{a\bar{b}\bar{c}}$$

$$y_2 = \overset{1}{\bar{b}c} + \overset{2}{\bar{a}bd} + \overset{5}{bc}$$

$$y_3 = \overset{3}{abd} + \overset{4}{a\bar{b}\bar{c}} + \overset{5}{bc}$$

5 bramek AND

… a poprzednio było 7 bramek AND!!!

I T P W ZPT