Minimalizacja automatu

Minimalizacja automatu to minimalizacja liczby stanów.

Jest to transformacja automatu o danej tablicy przejść-wyjść na równoważny mu (pod względem przetwarzania sygnałów cyfrowych) automat o mniejszej liczbie stanów wewnętrznych.

Jest to prawie zawsze możliwe, gdyż w procesie pierwotnej specyfikacji często wprowadzane są stany nadmiarowe lub równoważne.

Minimalizacja liczby stanów

S \ x	a	b	c	d	a	b	c	d
S1	–	S3	S4	S2	–	1	1	1
S2	S4	–	–	–	0	–	–	–
S3	S6	S6	–	–	0	1	–	–
S4	–	S6	S1	S5	–	0	0	1
S5	–	–	S2	–	–	–	1	–
S6	S3	–	S2	S3	0	–	0	1

	a	b	c	d	a	b	c	d
A	C	B	C	A	0	1	1	1
B	C	C	A	–	0	1	1	–
C	B	C	A	B	0	0	0	1

Czysty zysk – zamiast trzech przerzutników tylko dwa!

I T P W ZPT

Minimalizacja liczby stanów

Relacja zgodności na zbiorze stanów S:

(pary stanów zgodnych)

Maksymalne zbiory stanów zgodnych

(Maksymalne Klasy Zgodności)

Selekcja zbiorów zgodnych spełniających tzw.:

– **warunek pokrycia**
– **warunek zamknięcia**

I T P W

ZPT

Pojęcia podstawowe

Dwa stany wewnętrzne Si, Sj są **zgodne**, jeżeli dla każdego wejścia v mają one niesprzeczne stany wyjść, a ich stany następne są takie same lub niesprzeczne.

S \ x	a	b	c	d	a	b	c	d
1	–	3	4	2	–	1	1	1
2	4	–	–	–	0	–	–	–
3	6	6	–	–	0	1	–	–
4	–	6	1	5	–	0	0	1
5	–	–	2	–	–	–	1	–
6	3	–	2	3	0	–	0	1

Stany zgodne warunkowo

Stany zgodne

Stany sprzeczne

Dwa stany wewnętrzne S_i, S_j są **zgodne warunkowo,** jeżeli ich stany wyjść są niesprzeczne oraz dla pewnego $v \in V$ para stanów następnych do S_i, S_j (ozn. S_k, S_l):

$$(S_i, S_j) \neq (S_k, S_l)$$

Stany Si, Sj są **sprzeczne,** jeżeli dla pewnego $v \in V$ ich stany wyjść są sprzeczne.

Relacja zgodności

Ze względu na zgodność warunkową w obliczeniach (wszystkich!) par zgodnych posługujemy się tzw. tablicą trójkątną.

Tablica trójkątna zawiera tyle kratek, ile jest wszystkich możliwych par stanów. Na przykład dla automatu o 5 stanach:

Tablica trójkątna

2				
3	v			
4		x		
5			(i,j)	
	1	2	3	4

Kratki tablicy wypełniamy symbolami:

v – jeżeli para stanów jest zgodna,

x – jeżeli para stanów jest sprzeczna, lub

(i,j) - parą (parami stanów następnych), jeżeli jest to para zgodna warunkowo.

I T P W

ZPT

Tablica trójkątna - przykład

	a	b	c	d	a	b	c	d
1	–	3	4	2	–	1	1	1
2	4	–	–	–	0	–	–	–
3	6	6	–	–	0	1	–	–
4	–	6	1	5	–	0	0	1
5	–	–	2	–	–	–	1	–
6	3	–	2	3	0	–	0	1

	1	2	3	4	5
2	v				
3	36	46			
4	×	v	×		
5	24	v	v	×	
6	×	34	v	1,2; 3,5	×

Tablica trójkątna - przykład

Po wypełnieniu tablicy sprawdzamy, czy pary stanów sprzecznych (zaznaczone ×) nie występują przypadkiem jako pary stanów następnych. Jeśli są takie pary, to należy je skreślić (czyli zaznaczyć ×). Proces ten trzeba powtarzać tak długo, aż sprawdzone zostaną wszystkie krzyżyki.

2	∨				
3	3,6	4,6			
4	×	∨	×		
5	2,4	∨	∨	×	
6	×	~~3,4~~	∨	1,2; 3,5	×
	1	2	3	4	5

Wszystkie kratki niewykreślone odpowiadają **parom zgodnym**:

(1,2); (1,3); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,5); (3,6); (4,6).

Obliczanie MKZ

Po wyznaczenie zbioru **par stanów zgodnych**, przystępujemy do obliczenia:

maksymalnych zbiorów stanów zgodnych.

Maksymalne klasy zgodności (MKZ)

...znamy co najmniej trzy metody obliczania MKZ!

I T P W

ZPT

...wracamy do przykładu

Pary zgodne: (1,2); (1,3); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,5); (3,6); (4,6)

1,2 v	1,2,3	MKZ:
1,3 v	1,2,5	1,2,3,5
1,5 v	1,3,5	2,4
2,3 v	2,3,5	3,6
2,4		4,6
2,5 v		
3,5 v		
3,6		
4,6		

MKZ = {{1,2,3,5}, {2,4}, {3,6}, {4,6}}

Algorytm minimalizacji

1) Wyznaczenie **par stanów zgodnych**,

2) Obliczenie **maksymalnych zbiorów stanów zgodnych (MKZ),**

3) Selekcja zbiorów spełniających tzw. **warunek pokrycia (a) i zamknięcia (b):**

a) każdy stan musi wchodzić co najmniej do jednej klasy;

b) dla każdej litery wejściowej wszystkie następniki (stany następne) danej klasy muszą wchodzić do jednej klasy.

I T P W

ZPT

Warunek pokrycia - przykład

	a	b	c	d	a	b	c	d
1	–	3	4	2	–	1	1	1
2	4	–	–	–	0	–	–	–
3	6	6	–	–	0	1	–	–
4	–	6	1	5	–	0	0	1
5	–	–	2	–	–	–	1	–
6	3	–	2	3	0	–	0	1

MKZ = {{1,2,3,5}, {3,6}, { 2,4}, 4,6}}

Aby spełnić warunek pokrycia wystarczy wybrać klasy:

{1,2,3,5}, {4,6}

Warunek zamknięcia - przykład

	a	b	c	d	a	b	c	d
1	–	3	4	2	–	1	1	1
2	4	–	–	–	0	–	–	–
3	6	6	–	–	0	1	–	–
4	–	6	1	5	–	0	0	1
5	–	–	2	–	–	–	1	–
6	3	–	2	3	0	–	0	1

Dla wybranych klas {1,2,3,5},{4,6}} obliczamy ich następniki:

	a	b	c	d
1,2,3,5	4,6	3,6!	2,4!	2
4,6	3	6	1,2	3,5

Nie jest spełniony warunek zamknięcia !

Warunek pokrycia i zamknięcia – druga próba

	a	b	c	d	a	b	c	d
1	–	3	4	2	–	1	1	1
2	4	–	–	–	0	–	–	–
3	6	6	–	–	0	1	–	–
4	–	6	1	5	–	0	0	1
5	–	–	2	–	–	–	1	–
6	3	–	2	3	0	–	0	1

MKZ = {{1,2,3,5}, {3,6}, { 2,4}, {4,6}}

Wybór: {1,2}, {3,5}, {4,6}

		a	b	c	d	a	b	c	d
A	1,2	4	3	4	2	0	1	1	1
B	3,5	6	6	2	–	0	1	1	–
C	4,6	3	6	1,2	3,5	0	0	0	1

	a	b	c	d	a	b	c	d
A	C	B	C	A	0	1	1	1
B	C	C	A	–	0	1	1	–
C	B	C	A	B	0	0	0	1

O.K.

I T P W ZPT

Jeszcze jeden przykład

	0	1	0	1
1	2	6	0	0
2	3	1	1	1
3	–	4	–	0
4	–	5	–	0
5	3	–	1	–
6	7	–	1	–
7	–	8	–	0
8	–	–	–	1

2	×						
3	46	×					
4	~~56~~	×	45				
5	×	v	v	v			
6	×	~~37~~	v	v	~~37~~		
7	68	×	~~48~~	58	v	v	
8	×	v	×	×	v	v	×
	1	2	3	4	5	6	7

I T P W ZPT

Jeszcze jeden przykład c.d.

	1	2	3	4	5	6	7
2	X						
3	46	X					
4	~~56~~	X	45				
5	X	v	v	v			
6	X	~~37~~	v	v	~~37~~		
7	68	X	~~48~~	58	v	v	
8	X	v	X	X	v	v	X

Pary zgodne:

1,3
1,7
2,5
2,8
3,4
3,5
3,6
4,5
4,6
4,7
5,7
5,8
6,7
6,8

MKZ:

2,5,8
3,4,5
3,4,6
4,5,7
4,6,7
1,3
1,7
6,8

ITPW

ZPT

Jeszcze jeden przykład c.d.

	0	1	0	1
1	2	6	0	0
2	3	1	1	1
3	–	4	–	0
4	–	5	–	0
5	3	–	1	–
6	7	–	1	–
7	–	8	–	0
8	–	–	–	1

MKZ: 2,5,8
3,4,5
3,4,6
4,5,7
4,6,7
1,3
1,7
6,8

Tablica następników

	2,5,8	3,4,5	3,4,6	4,5,7	4,6,7	1,3	1,7	6,8
$\delta(0,S_i)$	33–	– –3	– –7	–3–	–7–	2–	2–	7–
$\delta(1,S_i)$	1– –	45–	45–	5–8	5–8	64	68	– –

I T P W ZPT

Jeszcze jeden przykład c.d.

	0	1	0	1
1	2	6	0	0
2	3	1	1	1
3	–	4	–	0
4	–	5	–	0
5	3	–	1	–
6	7	–	1	–
7	–	8	–	0
8	–	–	–	1

S \ X	0	1	0	1
A	C	C	1	1
B	B	A	1	0
C	A	B	0	0

	A				B	C		
	$\boxed{2,5,8}$	3,4,5	3,4,6	4,5,7	$\boxed{4,6,7}$	$\boxed{1,3}$	1,7	6,8
$\delta(0,S_i)$	3	3	7	3	7	2	2	7
$\delta(1,S_i)$	1	45	45	58	58	46	68	–

I T P W ZPT

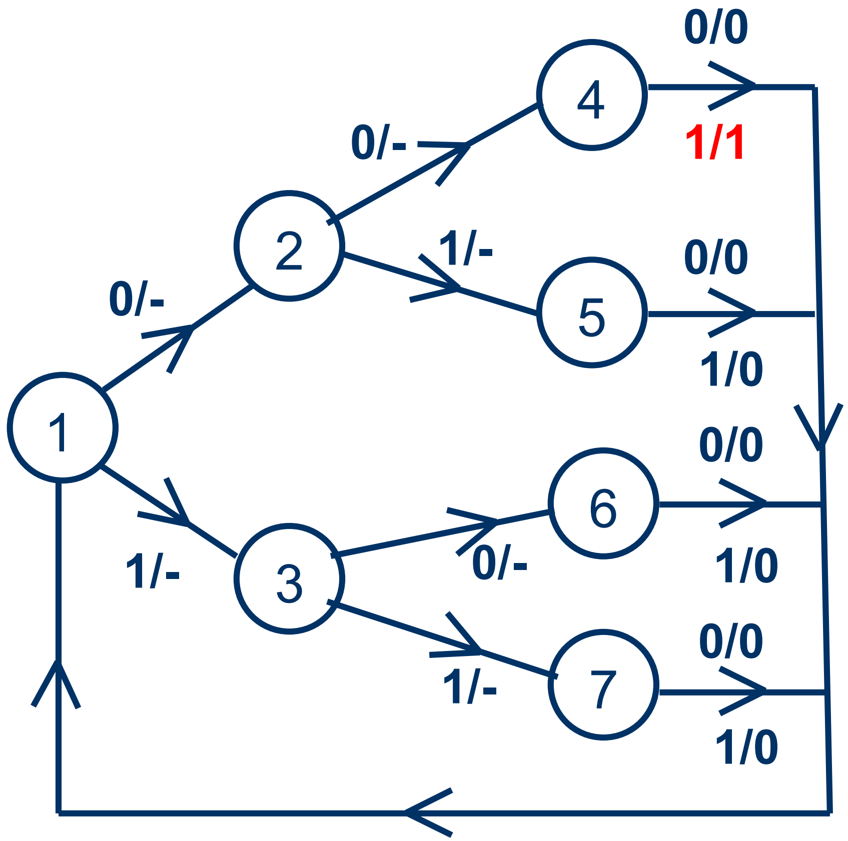
Detektor sekwencji

Zaprojektować układ sekwencyjny Mealy'ego o jednym wejściu binarnym i jednym wyjściu binarnym. Układ ma badać kolejne „trójki" symboli wejściowych.

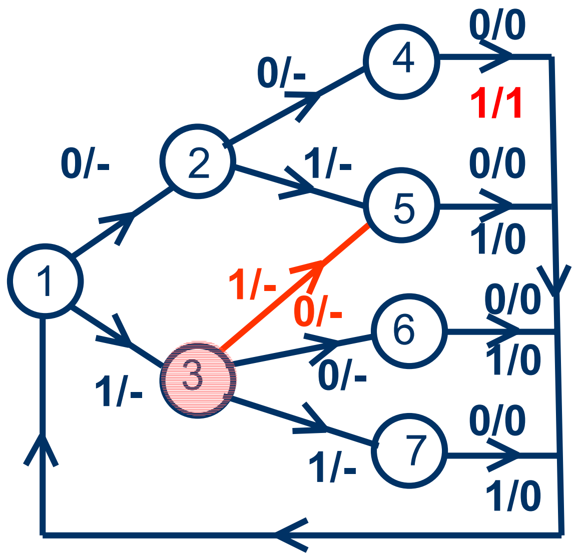
Sygnał wyjściowy pojawiający się podczas trzeciego skoku układu ma wynosić 1, gdy „trójka" ma postać 001, a 0, gdy „trójka" jest innej postaci. Sygnał pojawiający się podczas pierwszego i drugiego skoku układu może być nieokreślony.

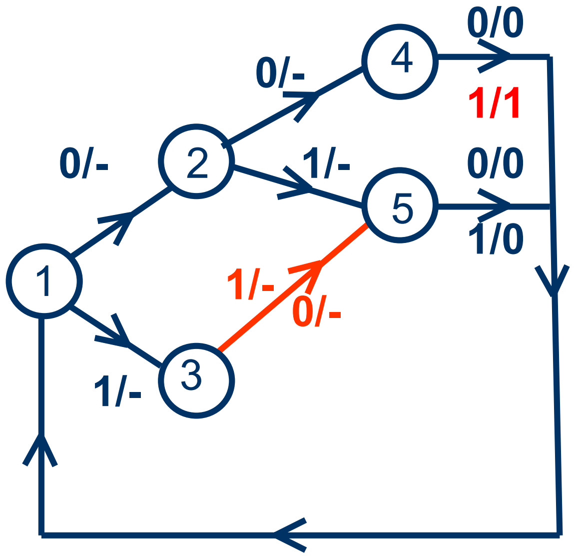
011|001|001|101|010|01

- - 0| - - 1| - - 1| - - 0| - - 0|



Detektor sekwencji





S	0	1	0	1
1	2	3	-	-
2	4	5	-	-
3	6	7	-	-
4	1	1	0	1
5	1	1	0	0
6	1	1	0	0
7	1	1	0	0

S	0	1	0	1
1	2	3	-	-
2	4	5	-	-
3	5	5	-	-
4	1	1	0	1
5	1	1	0	0

Minimalizacja detektora sekwencji

S \ X	0	1	0	1
1	2	3	–	–
2	4	5	–	–
3	5	5	–	–
4	1	1	0	1
5	1	1	0	0

2	2 4, 3 5			
3	2 5, 3 5	~~4 5~~		
4	1 2, 1 3	1 4, 1 5	1 5	
5	1 2, 1 3	1 4, 1 5	1 5	$\boxed{\times}$
	1	2	3	4

Bardzo dużo par zgodnych!

Do wyznaczenia MKZ wykorzystamy pary sprzeczne, których jest znacznie mniej (dwie).

Minimalizacja detektora sekwencji

Pary sprzeczne zapisujemy w postaci wyrażenia boolowskiego typu iloczyn (koniunkcja) dwu-składnikowych sum.

W detektorze sekwencji pary sprzeczne są: (2, 3); (4, 5).
Na tej podstawie zapisujemy wyrażenie: $(2 \vee 3)\ (4 \vee 5)$,
które po wymnożeniu uzyskuje postać:

$$(2 \vee 3)\ (4 \vee 5) = 2\,4 \vee 2\,5 \vee 3\,4 \vee 3\,5$$

Odejmując od zbioru S = {1, 2, 3, 4, 5} wszystkich stanów zbiory zapisane w poszczególnych składnikach uzyskujemy rodzinę wszystkich MKZ.

$\{1, 2, 3, 4, 5\} – \{2, 4\} = \{1, 3, 5\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\} – \{2, 5\} = \{1, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\} – \{3, 4\} = \{1, 2, 5\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\} – \{3, 5\} = \{1, 2, 4\}$

I T P W ZPT

Minimalizacja detektora sekwencji

S \ X	0	1	0	1
1	2	3	-	-
2	4	5	-	-
3	5	5	-	-
4	1	1	0	1
5	1	1	0	0

MKZ: {1, 3, 5}, {1, 3, 4}, {1, 2, 5}, {1, 2, 4}

Klasy {1, 3, 5}, {1, 2, 4} spełniają warunek pokrycia,

Funkcja przejść dla wszystkich MKZ

S \ X	0	1
135	125	135
134	125	135
125	124	135
124	124	135

ale nie spełniają warunku zamkniętości – stany następne: {1,2,5} !

Dokładamy klasę {1,2,5}

Klasy: {1,3,5}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5} spełniają warunek pokrycia i zamkniętości

S \ X	0	1	0	1
A 135	125	135	0	0
B 125	124	135	0	0
C 124	124	135	0	1

Automat minimalny!

S \ X	0	1	0	1
A	B	A	0	0
B	C	A	0	0
C	C	A	0	1

ITPW ZPT

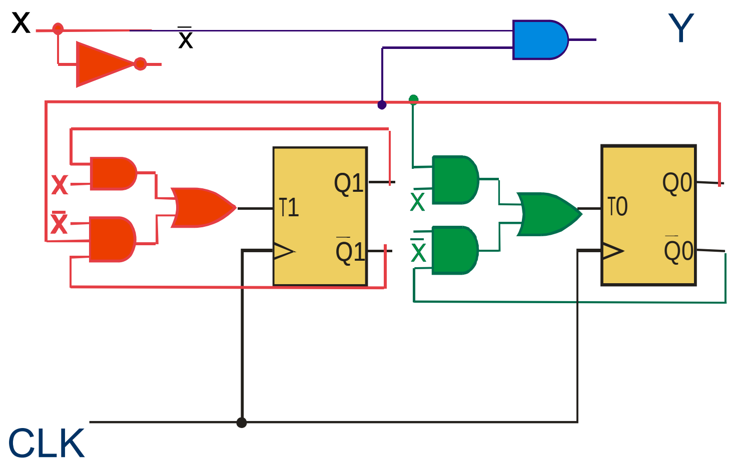
...a to już było

S \ X	0	1	0	1
A	B	A	0	0
B	C	A	0	0
C	C	A	0	1

Uzyskany automat był już realizowany na przerzutnikach i bramkach – wykład cz6, plansze 15 do 21.

Omówiliśmy cały proces syntezy !

Zaprojektować układ sekwencyjny Mealy'ego o jednym wejściu binarnym i jednym wyjściu binarnym. Układ ma badać kolejne „trójki" symboli wejściowych. Sygnał wyjściowy pojawiający się podczas trzeciego skoku układu ma wynosić 1, gdy „trójka" ma postać 001, a 0, gdy „trójka" jest innej postaci. Sygnał pojawiający się podczas pierwszego i drugiego skoku układu może być nieokreślony.



ITPW ZPT