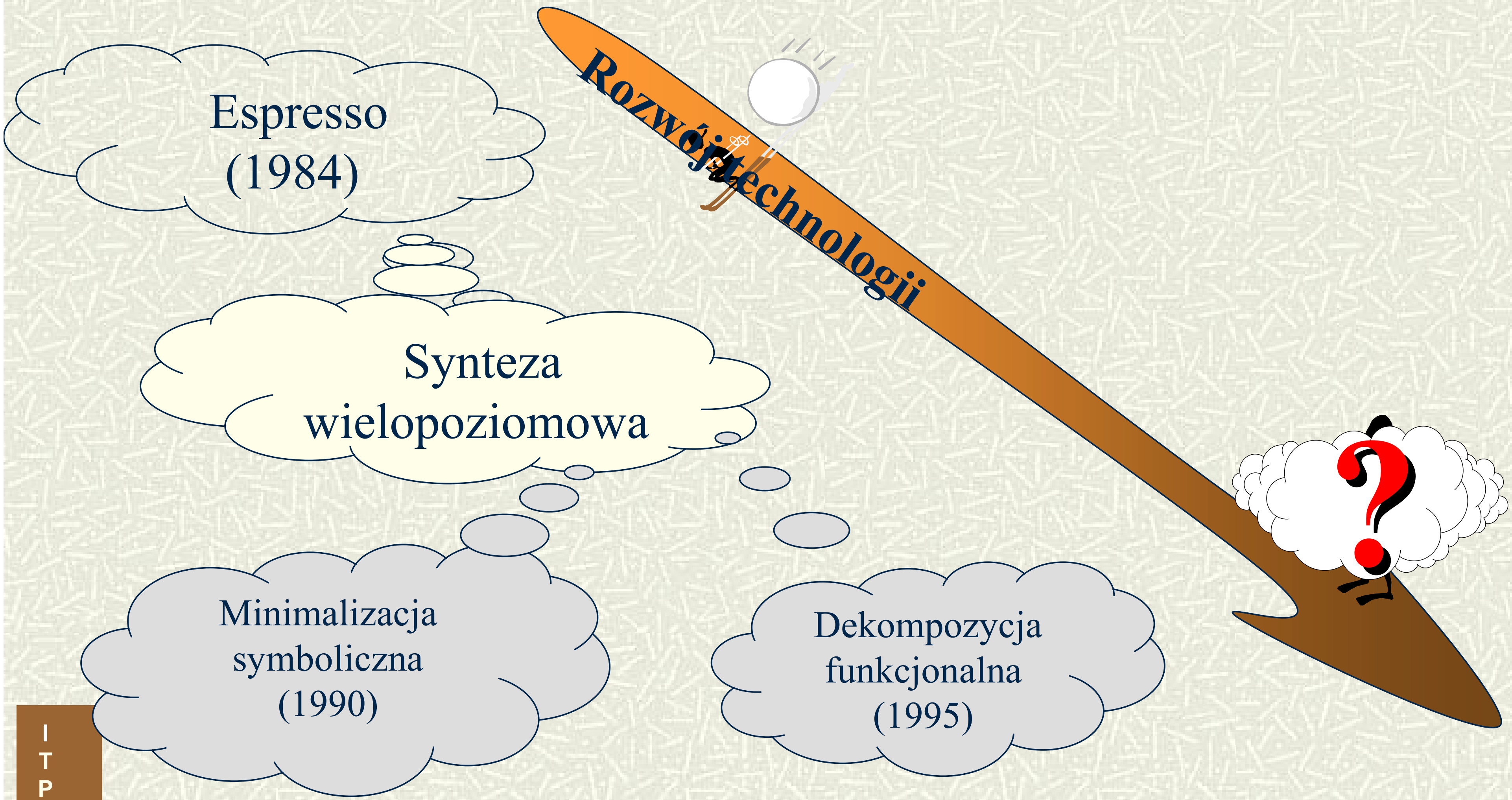
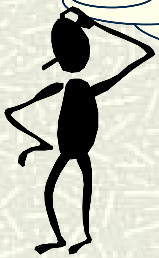
# Zaawansowane procedury syntezy logicznej



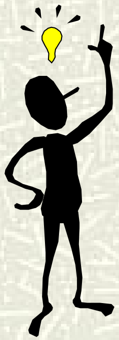

I T P W

ZPT

# Dekompozycja funkcjonalna



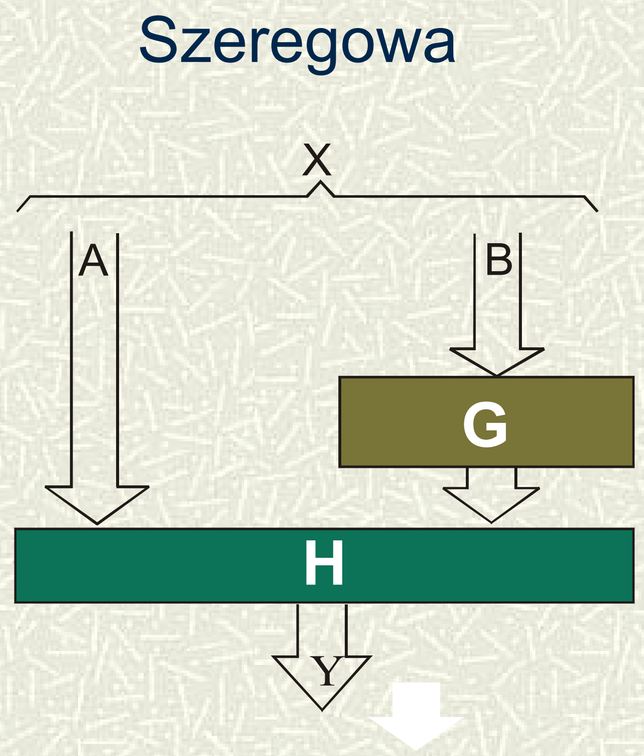
**Niestety metoda dekompozycji polegająca na zastosowaniu twierdzenia Curtisa jest absolutnie nieprzydatna w automatycznych obliczeniach komputerowych**

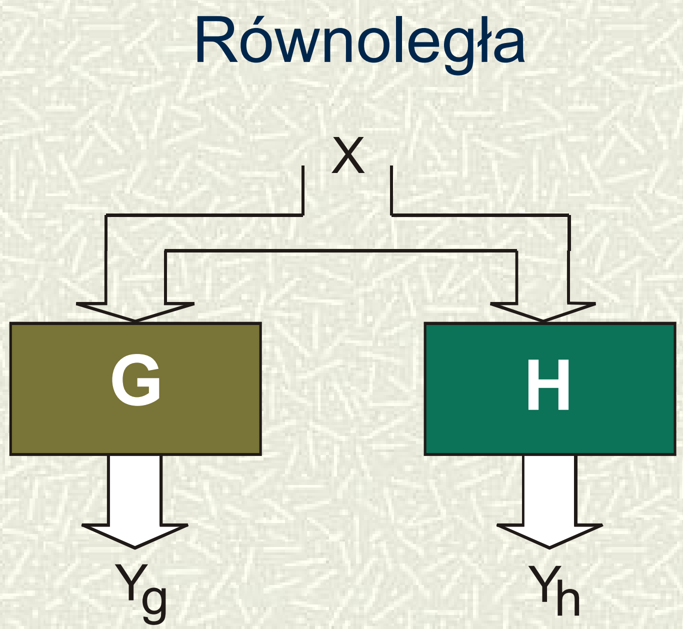


Znacznie skuteczniejsza jest metoda dekompozycji, w której obliczenia są wykonywane przy pomocy tzw. rachunku podziałów

# Algorytmy dekompozycji

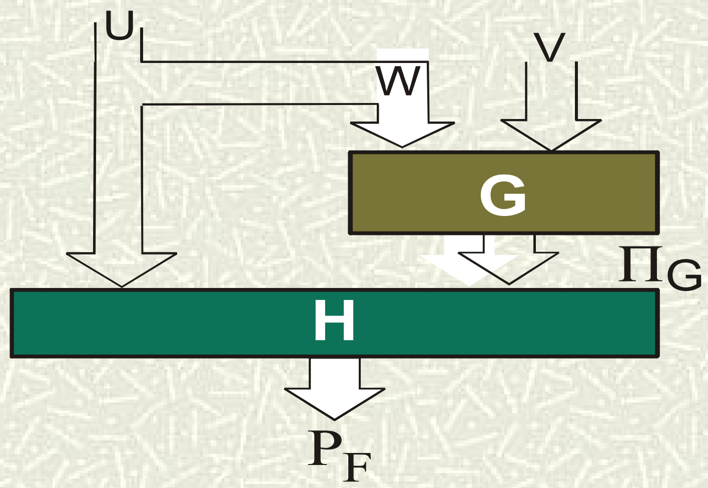
**Dekompozycję funkcjonalną nazywać będziemy szeregową, dla odróżnienia od równoległej**



# Twierdzenie o dekompozycji

**… w ujęciu rachunku podziałów**




***U*, *V* są rozłącznymi podzbiorami *X***
**oraz $W \subset U$**

Funkcję $F: \mathbf{B}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ można zrealizować w strukturze:

$$F = H(U, G(V,W))$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $\Pi_G \geq P_{V \cup W}$ taki, że:

$$P_U \cdot \Pi_G \leq P_F$$

I
T
P
W

ZPT

# Elementy rachunku podziałów

***Podziałem*** na zbiorze $S$ jest system zbiorów $P = \{B_i\}$, którego bloki są rozłączne, czyli

$$B_i \cap B_j = \phi, \text{ jeśli tylko } i \neq j.$$

Dla $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P = \{\{1,2\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}$ jest podziałem na $S$.

$$P = (\overline{1,2}; \overline{3,5}; \overline{4,6})$$

Iloczyn podziałów oraz relacja $\leq$.

I
T
P
W

ZPT

# Elementy rachunku podziałów…

Powiemy, że podział $P_a$ jest *nie większy* od $P_b$ (co oznaczamy: $P_a \leq P_b$), jeśli każdy blok z $P_a$ jest zawarty w pewnym bloku z $P_b$.

Iloczynem podziałów $P_a \bullet P_b$ nazywamy największy (względem relacji ≤) podział, który jest nie większy od $P_a$ oraz $P_b$.

$$P_a = (\overline{1,2,4};\overline{3,5,6}) \qquad P_b = (\overline{1,4};\overline{2,6};\overline{3,5}) \qquad P_c = (\overline{1,2};\overline{4};\overline{6};\overline{3,5})$$

$P_c \leq P_a$ Tak

$P_c \not\leq P_b$ NIE!

$$P_a \bullet P_b = (\overline{1,4};\overline{2};\overline{6};\overline{3,5})$$

I
T
P
W

ZPT

# Elementy rachunku podziałów…

## Podział ilorazowy

Niech $P_a$ i $P_b$ są podziałami na $S$ oraz $P_a \geq P_b$. Podział $P_a \mid P_b$ jest podziałem ilorazowym $P_a$ i $P_b$, jeżeli jego elementy są blokami $P_b$, a bloki są blokami $P_a$. Na przykład:

$$P_a = \overline{1,6,7}; \overline{2,3,8}; \overline{4,5}$$

$$P_b = \overline{1}; \overline{2,8}; \overline{3}; \overline{4,5}; \overline{6,7}$$

$$P_a | P_b = \overline{(1)(6,7)}; \overline{(3)(2,8)}; \overline{(4,5)}$$

I T P W

ZPT

# Przykład

```
.type fr
.i 10
.o 1
.p 25
0010111010 0
1010010100 0
0100011110 0
1011101011 0
1100010011 0
0100010110 0
1110100110 0
0100110000 0
0101000010 0
0111111011 1
0000010100 1
1101110011 1
0100100000 1
0100011111 1
0010000110 1
1111010001 1
1111101001 1
1111111111 1
0010000000 1
1101100111 1
0010001111 1
1111100010 1
1010111101 1
0110000110 1
0100111000 1
.e
```

*Synteza układów logicznych* str. 197

**Można wykazać, że funkcja ta jest zależna od**

**7 argumentów!**

$$X = \{x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$

ITPW

ZPT

# Specyfikacja funkcji – podziałami

$$P_3 = \{\overline{3,5,6,8,9,11,12,13,14,20,25};\ \overline{1,2,4,7,10,15,16,17,18,19,21,22,23,24}\}$$

$$P_5 = \{\overline{2,3,5,6,9,11,14,15,16,19,21,24};\ \overline{1,4,7,8,10,12,13,17,18,20,22,23,25}\}$$

$$P_6 = \{\overline{4,7,9,13,15,17,19,20,21,22,24};\ \overline{1,2,3,5,6,8,10,11,12,14,16,18,23,25}\}$$

$$P_7 = \{\overline{2,5,6,7,8,9,11,12,13,15,16,19,20,22,24};\ \overline{1,3,4,10,14,17,18,21,23,25}\}$$

$$P_8 = \{\overline{1,4,5,8,9,10,12,13,16,17,19,22,25};\ \overline{2,3,6,7,11,14,15,18,20,21,23,24}\}$$

$$P_9 = \{\overline{2,8,11,13,16,17,19,23,25};\ \overline{1,3,4,5,6,7,9,10,12,14,15,18,20,21,22,24}\}$$

$$P_{10} = \{\overline{1,2,3,6,7,8,9,11,13,15,19,22,24,25};\ \overline{4,5,10,12,14,16,17,18,20,21,23}\}$$

$$P_f = \{\overline{1,2,\ldots,9};\ \overline{10,\ldots,25}\}$$

I
T
P
W

ZPT

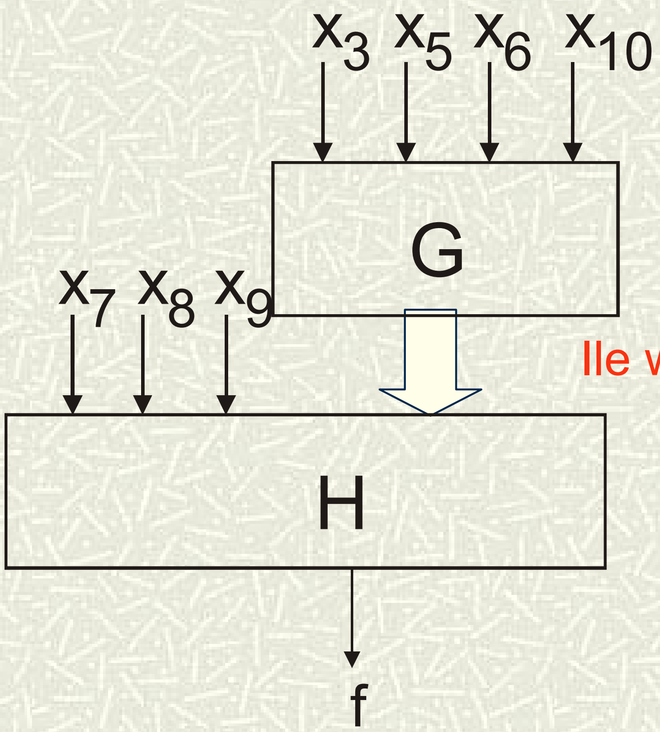
# Ustalenie zbiorów U i V

$X = \{x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$

Przyjmujemy arbitralnie…

$U = \{x_7, x_8, x_9\}$

$V = \{x_3, x_5, x_6, x_{10}\}$




Ile wyjść z bloku G???

I T P W

ZPT

# Obliczenie podziałów $P_U$, $P_V$

$P_U = P_7 \bullet P_8 \bullet P_9$

$P_V = P_3 \bullet P_5 \bullet P_6 \bullet P_{10}$

Nie ma sprawy:
To proste

$$P_U = (\overline{1,4,10}\,;\overline{2,11}\,;\overline{3,14,18,21}\,;\overline{5,9,12,22}\,;\overline{6,7,15,20,24}\,;\overline{8,13,16,19}\,;\overline{17,25}\,;\overline{23})$$

$$P_V = (\overline{1}\,;\overline{2}\,;\overline{3,6,11}\,;\overline{4,17}\,;\overline{5,14}\,;\overline{7,22}\,;\overline{8,25}\,;\overline{9}\,;\overline{10,18,23}\,;\overline{12}\,;\overline{13}\,;\overline{15,19,24}\,;\overline{16}\,;\overline{20}\,;\overline{21})$$

I
T
P
W

ZPT

**Jak wyznaczyć $\Pi_G$**

**Podział ilorazowy:**

$$P_u | P_F$$

Względem poprzedniej definicji: $P_u | P_u \cdot P_F$

I
T
P
W

ZPT

# Podział ilorazowy

$$P_U = (\overline{1,4,10};\overline{2,11};\overline{3,14,18,21};\overline{5,9,12,22};\overline{6,7,15,20,24};\overline{8,13,16,19};\overline{17,25};\overline{23})$$

$$P_f = \{\overline{1,2,\ldots,9};\overline{10,\ldots,25}\}$$

$$P_u|P_F = ((1,4)(10);(2)(11);(3)(14,18,21);(5,9)(12,22)$$
$$(6,7)(15,20,24);(8)(13,16,19);(17,25);(23))$$

I
T
P
W

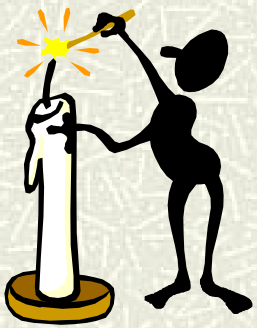
ZPT

# Jak wyznaczyć $\Pi_G$ ???

**Przypomnijmy twierdzenie o dekompozycji:**

**$F = H(U,G(V))$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $\Pi_G \geq P_V$ taki, że:**

$$P_U \cdot \Pi_G \leq P_F$$



**Podział $\Pi_G$ tworzymy z bloków $P_V$ zgodnie z podziałem ilorazowym $P_u|P_F$**

I T P W

ZPT

# Obliczenie $\Pi_G$

$P_u|P_F$ = ((1,4)(10) ; (2)(11) ; (3)(14,18,21) ; (5,9)(12,22) ;

(6,7)(15,20,24) ; (8)(13,16,19) ; (17,25) ; (23))

$$P_V = (\overline{1}; \overline{2}; \overline{3,6,11}; \overline{4,17}; \overline{5,14}; \overline{7,22}; \overline{8,25}; \overline{9}; \overline{10,18,23}; \overline{12}; \overline{13}; \overline{15,19,24}; \overline{16}; \overline{20}; \overline{21})$$

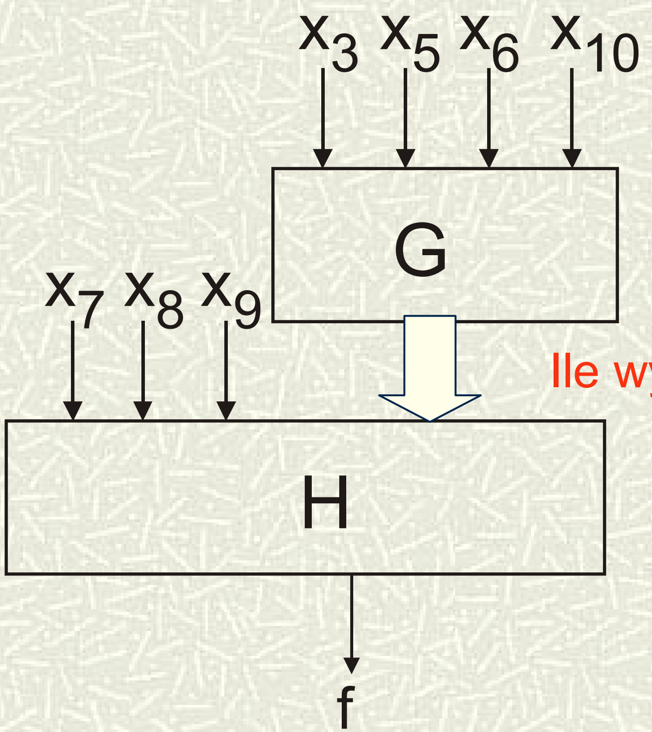
| | |
|---|---|
| $\overline{1}$ $\overline{4,17}$ | $\overline{10,18,23}$ |
| $\overline{3,6,11}$ | $\overline{2}$ $\overline{5,14}$ $\overline{21}$ |
| $\overline{12}$ $\overline{7,22}$ | $\overline{9}$ $\overline{15,19,24}$ $\overline{20}$ |
| $\overline{8,25}$ | $\overline{13}$ $\overline{16}$ |

$$\Pi_g = (\overline{1,3,4,6,7,8,11,12,17,22,25}; \overline{2,5,9,10,13,14,15,16,18,19,20,21,23,24})$$

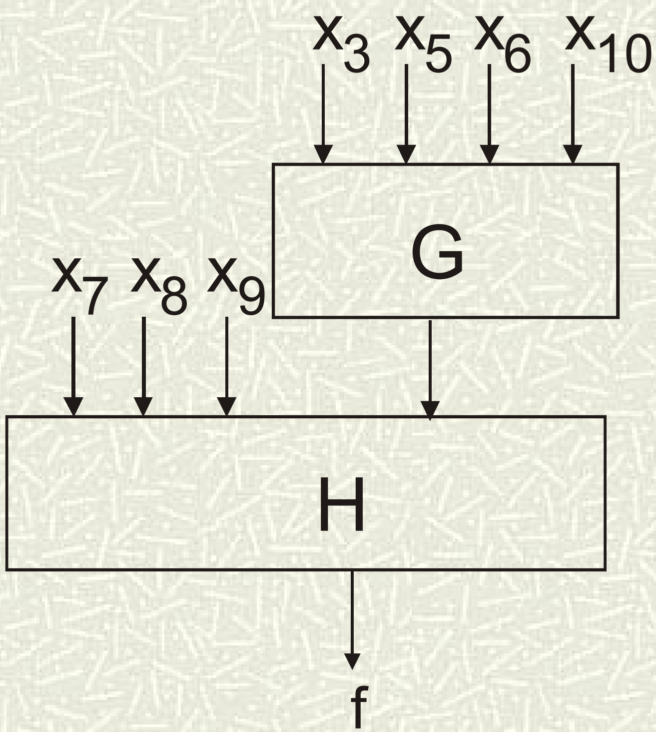
I
T
P
W

ZPT

# Jak było ...

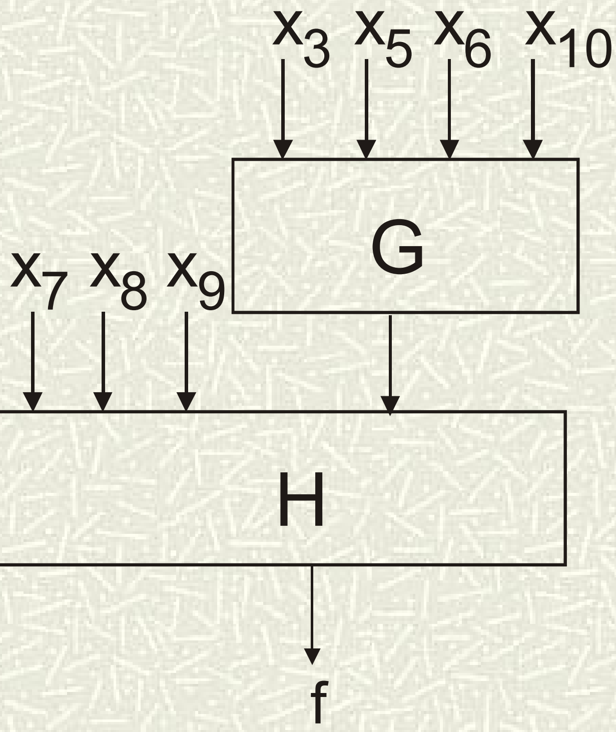



Ile wyjść z bloku G???




**Teraz wiemy, skoro $\Pi_G$ jest dwublokowy**

# Co dalej …




**Zawartość bloków G i H, czyli tablice prawdy funkcji G i H**

# Funkcja G

$$\Pi_g = (\overline{1,3,4,6,7,8,\ 11,12,17,22,25}\,;\overline{2,5,9,10,13,14,15,16,18,19,20,21,23,24})$$

$$P_3 = \{\overline{3,5,6,8,9,11,12,13,14,20,25};\ \overline{1,2,4,7,10.15,16,17,18,19,21,22,23,24}\}$$

$$P_5 = \{\overline{2,3,5,6,9,11,14,15,16,19,21,24};\ \overline{1,4,7,8,10,12,13,17,18,20,22,23,25}\}$$

$$P_6 = \{\overline{4,7,9,13,15,17,19,20,21,22,24};\ \overline{1,2,3,5,6,8,10,11,12,14,16,18,23,25}\}$$

$$P_{10} = \{\overline{1,2,3,6,7,8,9,11,13,15,19,22,24,25};\ \overline{4,5,10,12,14,16,17,18,20,21,23}\}$$

$$P_V = (\overline{1}\,;\overline{2}\,;\overline{3,6,11}\,;\overline{4,17};\overline{5,14};\overline{7,22}\,;\overline{8,25}\,;\overline{9};\overline{10,18,23}\,;\overline{12};\overline{13};\ \overline{15,19,24}\,;\overline{16}\,;\overline{20}\,;\overline{21})$$

| $x_3$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_{10}$ | g |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | ⋮ | | |

I
T
P
W

ZPT

# Funkcja H

$$P_7 = \{\overline{2,5,6,7,8,9,11,12,13,15,16,19,20,22,24};\ \overline{1,3,4,10,14,17,18,21,23,25}\}$$

$$P_8 = \{\overline{1,4,5,8,9,10,12,13,16,17,19,22,25};\ \overline{2,3,6,7,11,14,15,18,20,21,23,24}\}$$

$$P_9 = \{\overline{2,8,11,13,16,17,19,23,25};\ \overline{1,3,4,5,6,7,9,10,12,14,15,18,20,21,22,24}\}$$

$$\Pi_g = (\overline{1,3,4,6,7,8,11,12,17,22,25};\overline{2,5,9,10,13,14,15,16,18,19,20,21,23,24})$$

$$P_U \bullet \Pi_G = (\overline{1,4};\overline{10};\overline{2};\overline{11};\overline{3};\overline{14,18,21}\ldots) \le P_F$$

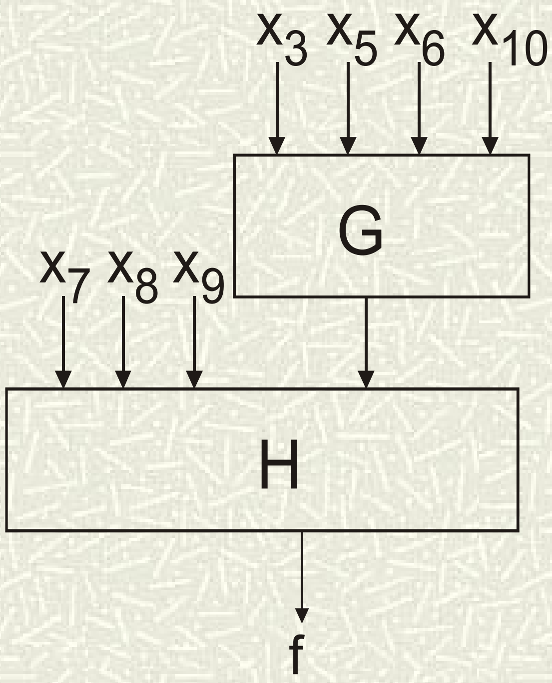
| $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | g | h |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | | ⋮ | | |

I
T
P
W

ZPT

# Praktyczny wynik dekompozycji funkcji z przykładu

.type fr
.i 10
.o 1
.p 25
0010111010 0
1010010100 0
0100011110 0
1011101011 0
1100010011 0
0100010110 0
1110100110 0
0100110000 0
0101000010 0
0111111011 1
0000010100 1
1101110011 1
0100100000 1
0100011111 1
0010000110 1
1111010001 1
1111101001 1
1111111111 1
0010000000 1
1101100111 1
0010001111 1
1111100010 1
1010111101 1
0110000110 1
0100111000 1
.e



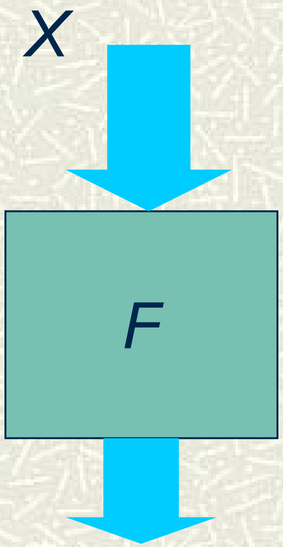

**Tylko 2 komórki**

I T P W

ZPT

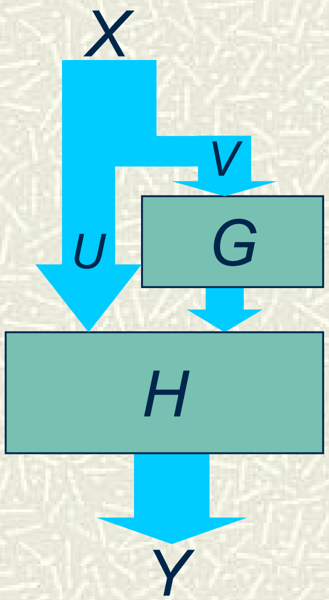
# Dekompozycja zespołu funkcji

Twierdzenie w ujęciu rachunku podziałów jest ogólne, obliczenia są niezależne od liczby wyjść funkcji F.




$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$

Twierdzenie o dekompozycji




I
T
P
W
ZPT

# Przykład dekompozycji zespołu funkcji (SUL Tabl. 8.3)

| | $x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5$ | $y_1\,y_2\,y_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 0 0 0 0 | 0 0 0 |
| 2 | 0 0 0 1 1 | 0 1 0 |
| 3 | 0 0 0 1 0 | 1 0 0 |
| 4 | 0 1 1 0 0 | 0 1 1 |
| 5 | 0 1 1 0 1 | 0 0 1 |
| 6 | 0 1 1 1 0 | 0 1 0 |
| 7 | 0 1 0 0 0 | 0 0 1 |
| 8 | 1 1 0 0 0 | 0 0 1 |
| 9 | 1 1 0 1 0 | 0 0 0 |
| 10 | 1 1 1 0 0 | 1 0 0 |
| 11 | 1 1 1 1 1 | 0 1 1 |
| 12 | 1 1 1 1 0 | 0 1 0 |
| 13 | 1 0 0 0 1 | 0 0 1 |
| 14 | 1 0 0 1 1 | 0 0 0 |
| 15 | 1 0 0 1 0 | 1 0 0 |

$$P_1 = (\overline{1,2,3,4,5,6,7};\overline{8,9,10,11,12,13,14,15})$$

$$P_2 = (\overline{1,2,3,13,14,15};\overline{4,5,6,7,8,9,10,11,12})$$

$$P_3 = (\overline{1,2,3,7,8,9,13,14,15};\overline{4,5,6,10,11,12})$$

$$P_4 = (\overline{1,4,5,7,8,10,13};\overline{2,3,6,9,11,12,14,15})$$

$$P_5 = (\overline{1,3,4,6,7,8,9,10,12,15};\overline{2,5,11,13,14})$$

$$P_F = (\overline{1,9,14};\overline{5,7,8,13};\overline{2,6,12};\overline{4,11};\overline{3,10,15})$$

I
T
P
W

ZPT

# Przykład…

**Dla U = $\{x_3,x_4\}$ oraz V = $\{x_1,x_2,x_5\}$.**

Podział $P_U = P_3P_4$ $(P_i = P(x_i))$, a więc:

$$P_U = \overline{1,7,8,13};\overline{2,3,9,14,15};\overline{4,5,10};\overline{6,11,12}$$

$$P_F = \overline{1,9,14};\overline{5,7,8,13};\overline{2,6,12};\overline{4,11};\overline{3,10,15}$$

$$P_U|P_F = \overline{(1)(7,8,13)};\overline{(2)(9,14)(3,15)};\overline{(4)(5)(10)};\overline{(11)(6,12)}$$

$$P_V = \overline{1,3};\ \overline{2};\overline{4,6,7};\overline{5};\overline{8,9,10,12};\overline{11};\overline{13,14};\overline{15}$$

gdzie bloki $P_V$ są oznaczone kolejno $B_1$, $B_2$, ... $B_8$.

**Jak wyznaczyć $\Pi_G$ ???**

I
T
P
W

ZPT

# Przykład c.d.

$$P_U = \overline{1,7,8,13}; \overline{2,3,9,14,15}; \overline{4,5,10}; \overline{6,11,12}$$

$$P_F = \overline{1,9,14}; \overline{5,7,8,13}; \overline{2,6,12}; \overline{4,11}; \overline{3,10,15}$$

$$P_V = \overline{1,3}; \ \overline{2}; \overline{4,6,7}; \overline{5}; \overline{8,9,10,12}; \overline{11}; \overline{13,14}; \overline{15}$$

$$P_U|P_F = \overline{(1)(7,8,13)}; \overline{(2)(9,14)(3,15)}; \overline{(4)(5)(10)}; \overline{(11)(6,12)}$$

| (2) | (9,14) | (3,15) |
|---|---|---|
| $\overline{2}$ | $\overline{8,9,10,12}$<br>$\overline{13,14}$ | $\overline{1,3}$<br>$\overline{15}$ |
| $\overline{4,6,7}$ | | $\overline{5}$ |
| | | $\overline{11}$ |

$$\Pi_G = \overline{2,4,6,7}; \ \overline{8,9,10,12,13,14}; \ \overline{1,3,5,11,15}$$

I
T
P
W

ZPT

# Przykład c.d.

**Dla U = {$x_3$,$x_4$} oraz V = {$x_1$,$x_2$,$x_5$}.**

$$P_U = \overline{1,7,8,13}; \overline{2,3,9,14,15}; \overline{4,5,10}; \overline{6,11,12}$$

$$P_V = \left( \overset{000}{\overline{1,3}};\ \overset{001}{\overline{2}};\ \overset{010}{\overline{4,6,7}};\ \overset{011}{\overline{5}};\ \overset{110}{\overline{8,9,10,12}};\ \overset{111}{\overline{11}};\ \overset{101}{\overline{13,14}};\ \overset{100}{\overline{15}} \right)$$

**Należy zakodować bloki $\Pi_G$**

$$\Pi_G = \overset{01}{\overline{2,4,6,7}};\ \overset{10}{\overline{8,9,10,12,\ 13,14}};\ \overset{00}{\overline{1,3,5,11,15}}$$

$$P_U \bullet \Pi_G \leq P_F$$

ITPW

ZPT

# Tablice prawdy G i H

**G:**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_5$ | $g_1$ | $g_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{1,3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{2}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\overline{4,6,7}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\overline{5}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | . . . | | | . . . | |

$$P_1 = (\overline{1,2,3,4,5,6,7};\overline{8,9,10,11,12,13,14,15})$$
$$P_2 = (\overline{1,2,3,13,14,15};\overline{4,5,6,7,8,9,10,11,12})$$
$$P_3 = (\overline{1,2,3,7,8,9,13,14,15};\overline{4,5,6,10,11,12})$$
$$P_4 = (\overline{1,4,5,7,8,10,13};\overline{2,3,6,9,11,12,14,15})$$
$$P_5 = (\overline{1,3,4,6,7,8,9,10,12,15};\overline{2,5,11,13,14})$$

$$\Pi_G = \overset{01}{\overline{2,4,6,7}}\;;\;\overset{10}{\overline{8,9,10,12,\ 13,14}}\;;\;\overset{00}{\overline{1,3,5,11,15}}$$

**H:**

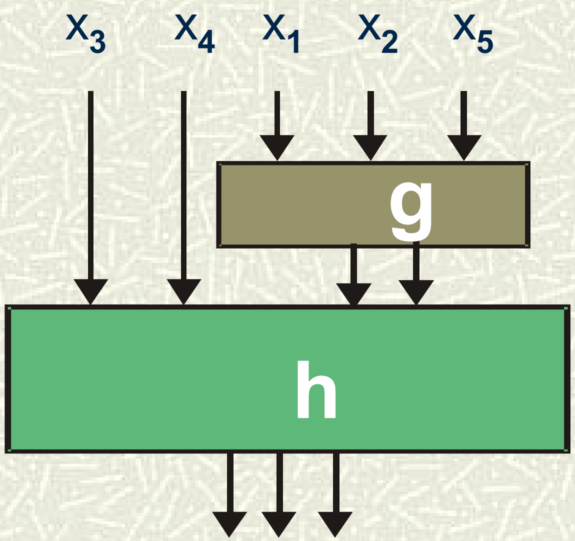
| | $x_3$ | $x_4$ | $g_1$ | $g_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{7}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\overline{8,13}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\overline{3,15}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | . . . | | | | . . . | | |

I
T
P
W

ZPT

# Co uzyskaliśmy…

Funkcje g i h można obliczyć jawnie…z tablic prawdy można uzyskać realizacje na bramkach.



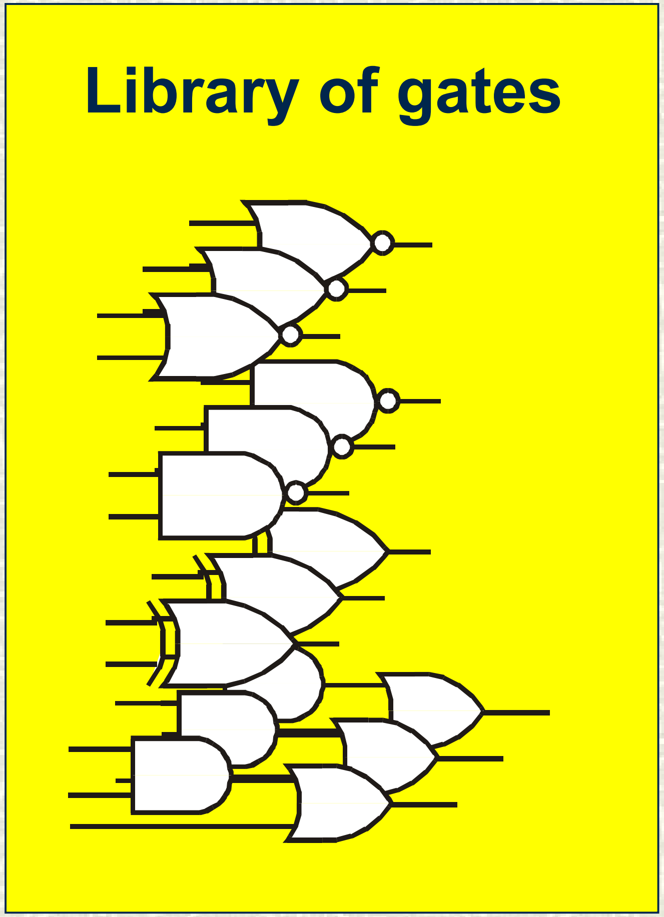

**Ale dla struktur FPGA wystarczy schemat dekompozycji i tablice prawdy.**

**Proces minimalizacji jest niepotrzebny!!!**

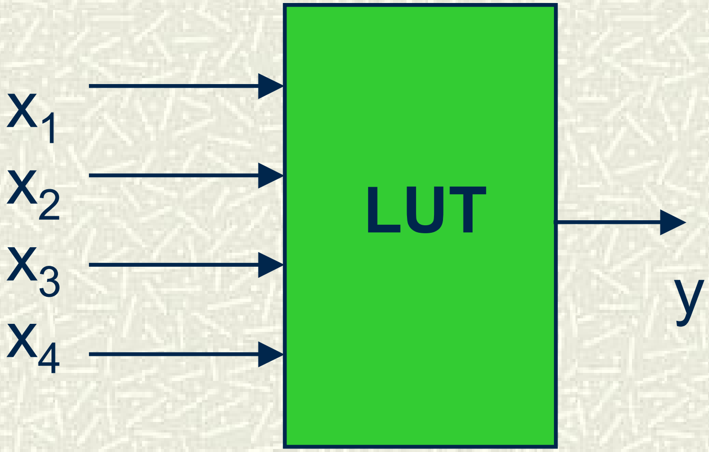
I T P W

ZPT

# Przyczyna wad systemów komercyjnych




Komórka LUT struktur FPGA




$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4) \;!!!$$

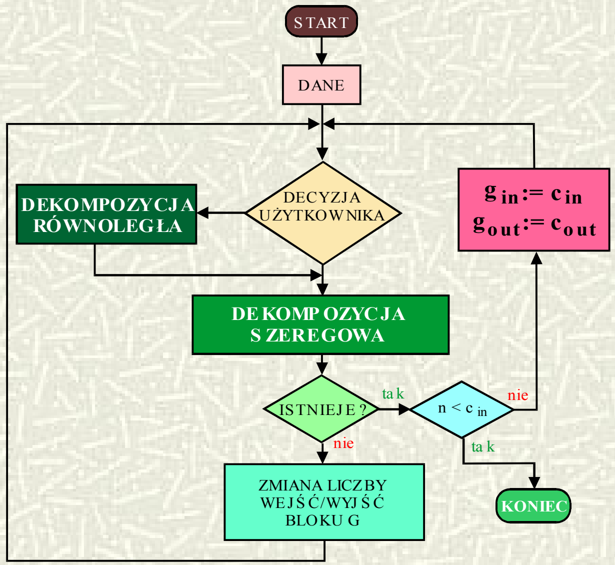
I T P W

ZPT

# Przykład z *Synteza układów logicznych*

.type fr
.i 10
.o 1
.p 25
0010111010 0
1010010100 0
0100011110 0
1011101011 0
1100010011 0
0100010110 0
1110100110 0
0100110000 0
0101000010 0
0111111011 1
0000010100 1
1101110011 1
0100100000 1
0100011111 1
0010000110 1
1111010001 1
1111101001 1
1111111111 1
0010000000 1
1101100111 1
0010001111 1
1111100010 1
1010111101 1
0110000110 1
0100111000 1
.e

**Demain**




**Demain 2 komórki LUT**

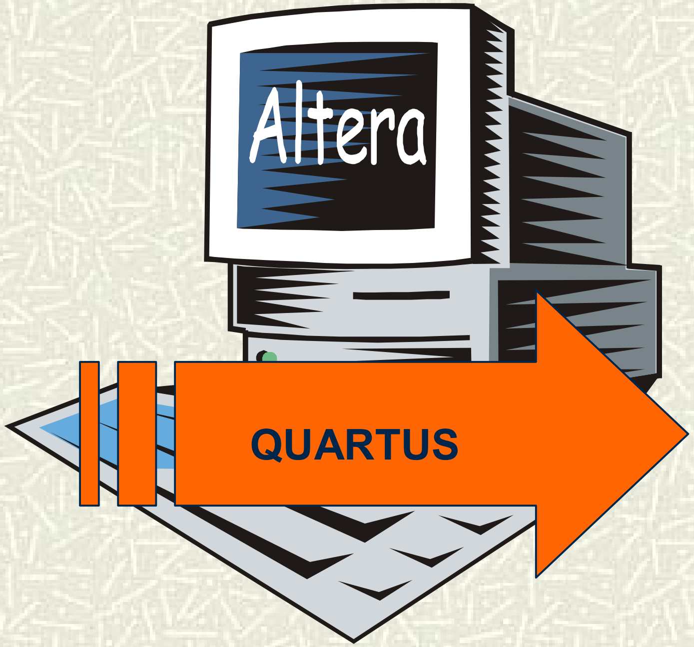
**Szczegółowy opis w książce *Synteza układów logicznych*, przykład 9.5, str. 257**

**Amerykański System MAX+PLUSII**

**23 komórki LUT**

# Zagadka

Na ilu komórkach zrealizuje tę funkcję amerykański system QUARTUS?




?? kom. (FLEX)

lub ?? kom. (Stratix)!!!

ITPW

ZPT