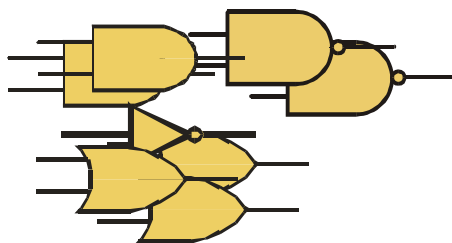


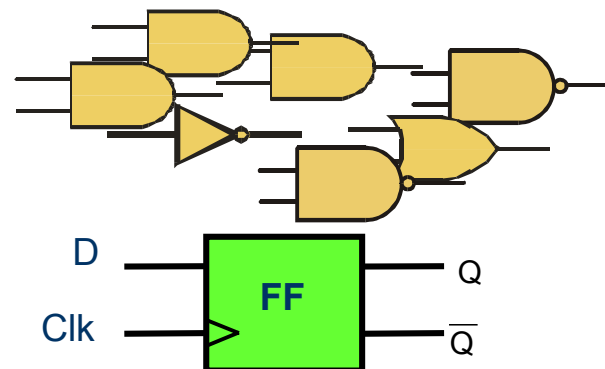
Układy logiczne

Układy logiczne to dział *techniki cyfrowej*, w której układy cyfrowe konstruowane są na poziomie bramek logicznych i przerzutników.

kombinacyjne



sekwencyjne



Funkcja boolowska

Funkcją boolowską zmiennych binarnych x_1, \dots, x_n nazywamy odwzorowanie:

$$f: X \rightarrow Y$$

gdzie:

$$X \subseteq B^n = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}}_{n\text{-razy}}, \quad Y \subseteq B^m$$

Jeżeli $X = B^n$, to funkcję nazywamy zupełną; w przeciwnym przypadku jest to funkcja niezupełna, zwana również funkcją nie w pełni określoną.

Reprezentacje:

Tablica prawdy

Formuła (wyrażenie) boolowskie

... i wiele innych sposobów opisu (np. BDD)

Tablica prawdy

tablicowe przedstawienie odwzorowania f

$$f: B^3 \rightarrow B \quad f(x_1, x_2, x_3)$$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	—
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	—
7	1	1	1	1

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
7	1	1	1	1

Funkcja niezupełna

$$A_D = L(A_{NKB}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j$$

Uproszczony zapis tablicy prawdy

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f = \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	—
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	—
7	1	1	1	1

$$f = \Sigma[(1, 3, 5, 7, (2, 6))]$$

Formuła boolowska

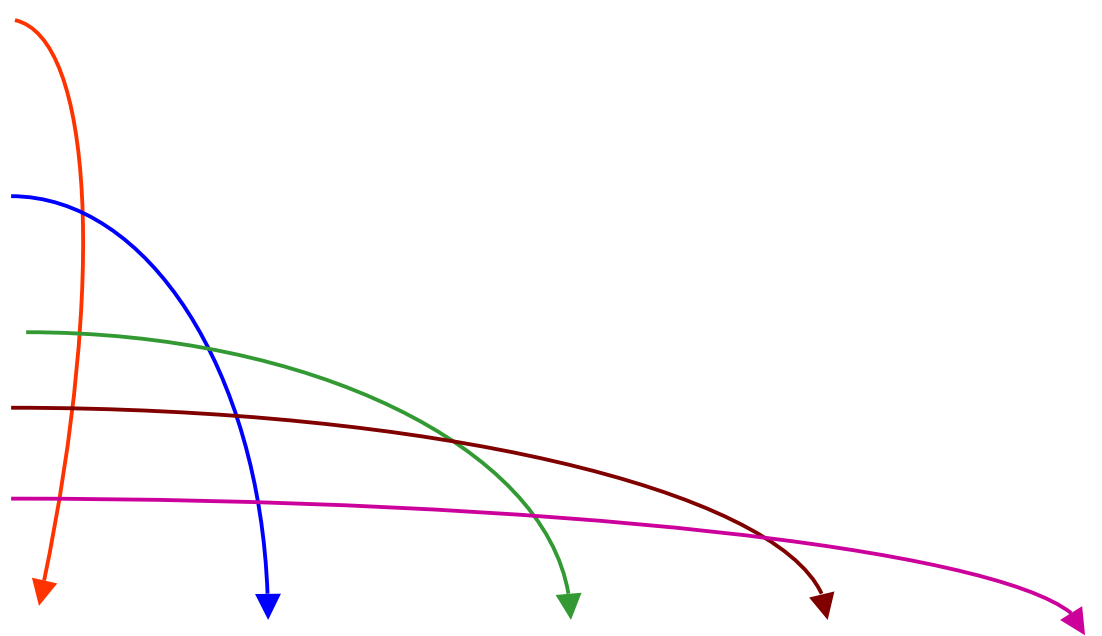
Formuła boolowska to wyrażenie, w którym zmienne boolowskie połączone są operatorami: + (OR),
• (AND), (NOT) \bar{X}

a b	$a + b$	$a \bullet b$	\bar{a}
0 0	0	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	0
1 1	1	1	0

Formuła boolowska - przykład

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

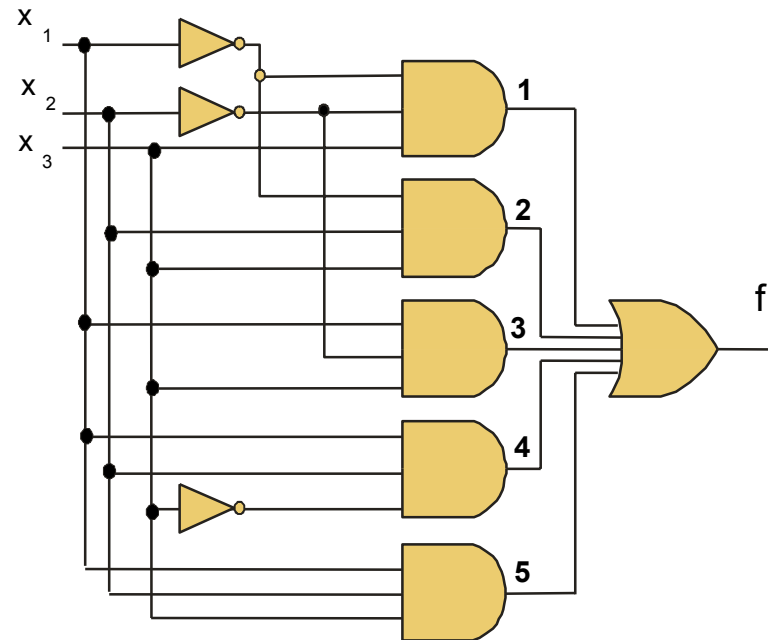
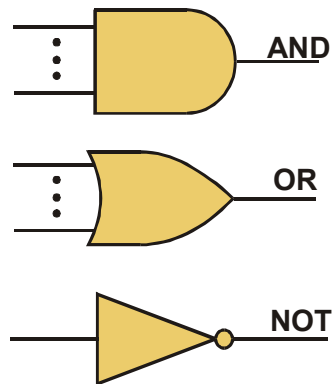
$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$


$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

Ogromne znaczenie formuł boolowskich ...

Operatory logiczne

mają swoje realizacje techniczne tzw. bramki logiczne



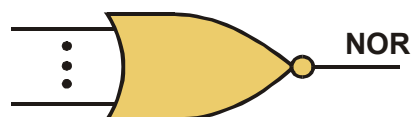
Realizacja funkcji f

$$f = \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3}_1 + \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3}_2 + \underbrace{x_1 \bar{x}_2 x_3}_3 + \underbrace{x_1 x_2 \bar{x}_3}_4 + \underbrace{x_1 x_2 x_3}_5$$

Inne operatory logiczne



$$y = \overline{a \cdot b}$$



$$y = \overline{a + b}$$



$$y = a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$$

NAND (NOT-AND)

NOR (NOT-OR)

EXOR (Exclusive OR)

Prawa i własności algebry Boole'a

Własności stałych

$$a + 0 = a$$

$$a \bullet 0 = 0$$

$$a + 1 = 1$$

$$a \bullet 1 = a$$

Własności negacji

$$a + \bar{a} = 1$$

$$a \bullet \bar{a} = 0$$

Idempotentność

$$a + a = a$$

$$a \bullet a = a$$

Przemienność

$$a + b = b + a$$

$$a \bullet b = b \bullet a$$

Łączność

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

Rozdzielność

$$a + b \bullet c = (a + b) \bullet (a + c)$$

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

Prawa i własności algebry Boole'a c.d.

Prawa De Morgana

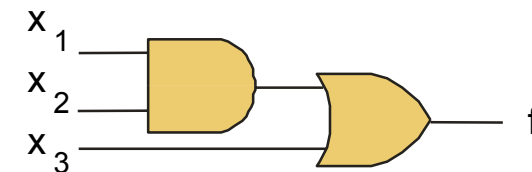
$$y = \overline{a \bullet b} = \bar{a} + \bar{b} \qquad y = \overline{a + b} = \bar{a} \bullet \bar{b}$$

Podwójna negacja

$$\overline{\bar{a}} = a$$

Transformacja formuły

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 = \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 = \\ &= \bar{x}_1 x_3 (\underbrace{\bar{x}_2 + x_2}_{=1}) + x_1 x_3 (\underbrace{\bar{x}_2 + x_2}_{=1}) + x_1 x_2 (\underbrace{\bar{x}_3 + x_3}_{=1}) = \\ &= \bar{x}_1 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2 = \\ &= x_3 + x_1 x_2 \end{aligned}$$

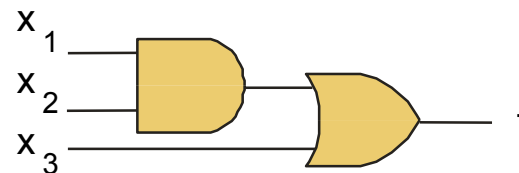
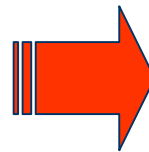
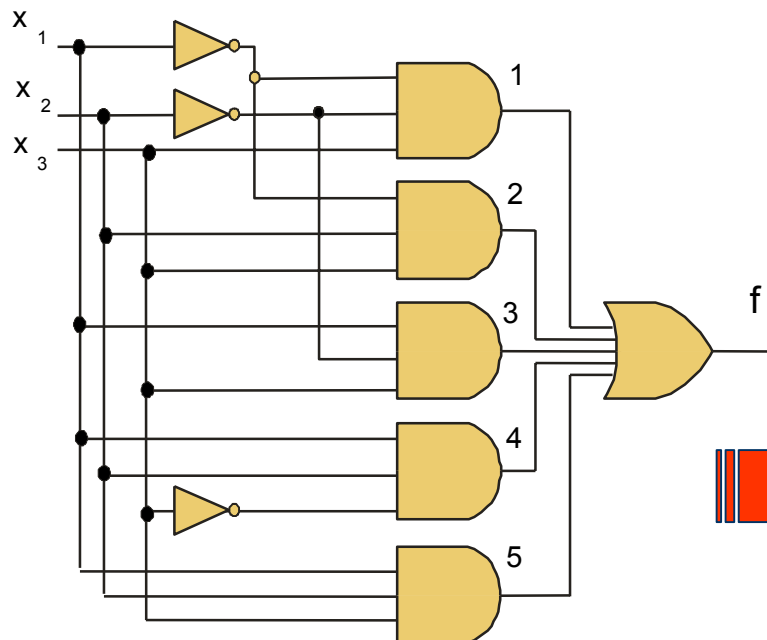
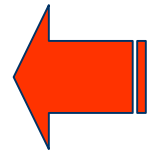


Realizacja uproszczonej
funkcji f

Minimalizacja funkcji boolowskich!!!

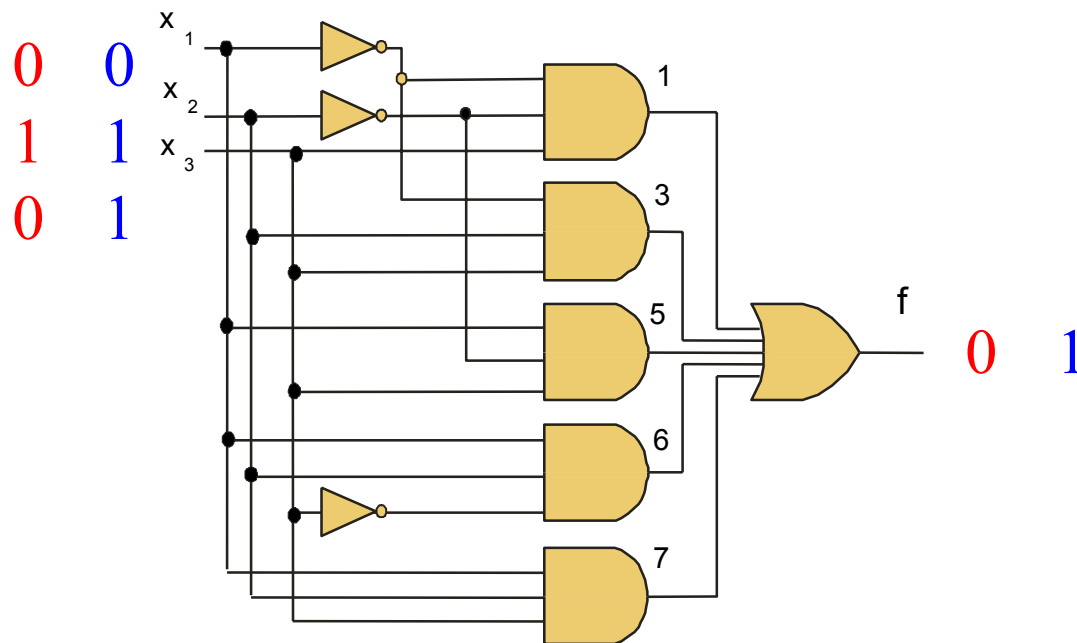
Od funkcji do układu

$$f = \bar{X}_1\bar{X}_2X_3 + \bar{X}_1X_2X_3 + X_1\bar{X}_2X_3 + X_1X_2\bar{X}_3 + X_1X_2X_3$$

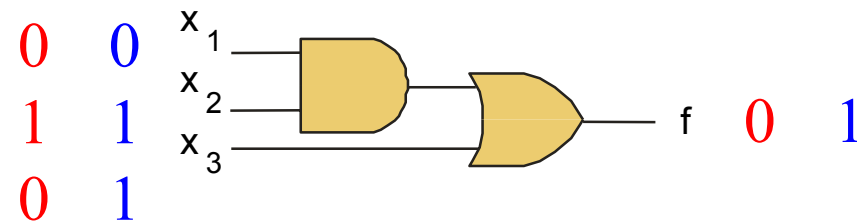


	X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Sens fizyczny minimalizacji

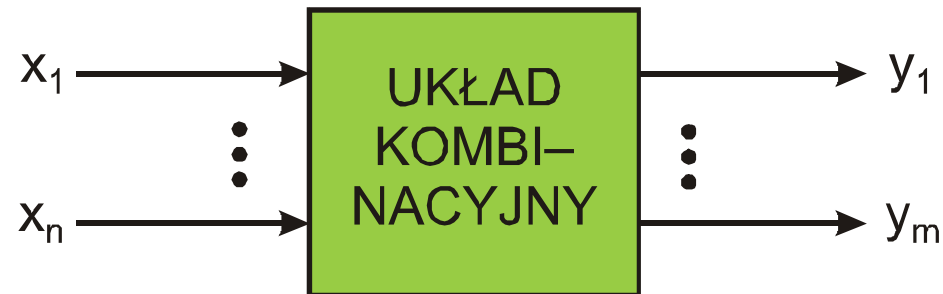


	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



... i typowe zastosowania

Tablica prawdy



S-boxy układów kryptograficznych

Układy arytmetyki rozproszonej algorytmów DSP

Konwertery kodów

Transkodery sygnałów transmisyjnych

...