Espresso

. . . mankamenty

I
T
P
W

ZPT

Funkcja 7 argumentów

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	f
1	1	0	0	0	1	0	1	0
2	1	0	1	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	0
4	1	1	1	0	1	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	0	1	1	0	1
7	1	0	1	0	0	0	0	1
8	1	0	1	0	1	1	0	1
9	1	1	1	0	1	0	1	1

	x_2	x_4	x_6	x_7	f
1	0	0	0	1	0
2	0	1	1	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	0	1	1	0
5	1	0	0	1	1
6	0	0	1	0	1
7	0	0	0	0	1
8	0	0	1	0	1
9	1	0	0	1	1

Pamiętamy . . . z ekspansji $f = \overline{x}_4\overline{x}_7 + x_2\overline{x}_6$

Czy można przewidzieć od jakich argumentów funkcja istotnie zależy ???

Przykład z *Synteza układów logicznych* str 65

```
.type fr
.i 10
.o 1
.p 25
0010111010 0
1010010100 0
0100011110 0
1011101011 0
1100010011 0
0100010110 0
1110100110 0
0100110000 0
0101000010 0
0111111011 1
0000010100 1
1101110011 1
0100100000 1
0100011111 1
0010000110 1
1111010001 1
1111101001 1
1111111111 1
0010000000 1
1101100111 1
0010001111 1
1111100010 1
1010111101 1
0110000110 1
0100111000 1
.e
```

Funkcja 10 argumentów

Espresso

```
.i 10
.o 1
.p 6
----00-1-- 1
00--0----- 1
----10-0-0 1
---1--0--1 1
------1-0- 1
-----11--1 1
.e
```

$$f = \bar{x}_5\bar{x}_6x_8 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5 + x_5\bar{x}_6\bar{x}_8\bar{x}_{10} + x_4\bar{x}_7x_{10} + x_7\bar{x}_9 + x_6x_7x_{10}$$

Brak x_3 - 9 argumentów

ITPW ZPT

Zagadka...

```
.type fr
.i 10
.o 1
.p 25
0010111010 0
1010010100 0
0100011110 0
1011101011 0
1100010011 0
0100010110 0
1110100110 0
0100110000 0
0101000010 0
0111111011 1
0000010100 1
1101110011 1
0100100000 1
0100011111 1
0010000110 1
1111010001 1
1111101001 1
1111111111 1
0010000000 1
1101100111 1
0010001111 1
1111100010 1
1010111101 1
0110000110 1
0100111000 1
.e
```

Można wykazać, że funkcja ta jest zależna od…

…zaledwie 7 argumentów!

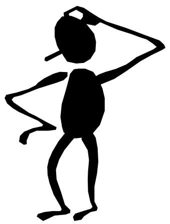
I T P W

ZPT

Wniosek

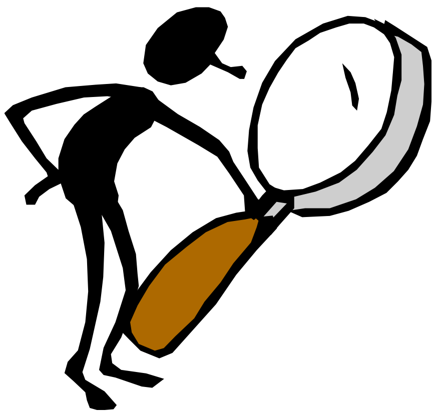
Espresso redukuje składniki iloczynowe

Nie redukuje argumentów!!!



I T P W

ZPT



PROBLEM:

Obliczania minimalnej liczby argumentów od których funkcja istotnie zależy

...jest bardzo istotny w redukowaniu złożoności obliczeniowej procedur minimalizacji funkcji boolowskich, a w konsekwencji może się przyczynić do uzyskiwania lepszych rezultatów.

Nowy sposób opisu funkcji: rachunek podziałów

Elementy rachunku podziałów

Podziałem na zbiorze *S* jest system zbiorów $P = \{B_i\}$, którego bloki są rozłączne, czyli

$$B_i \cap B_j = \phi, \text{ jeśli tylko } i \neq j.$$

Dla $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P = \{\{1,2\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}$ jest podziałem na *S*.

Podzbiory nazywamy blokami

$$\Pi = (\overline{1,2}; \overline{3,5}; \overline{4,6})$$

Podstawowe pojęcia:

Iloczyn podziałów oraz relacja $\leq$.

Elementy rachunku podziałów…

Powiemy, że podział P_a jest *nie większy* od P_b (co oznaczamy: $P_a \leq P_b$), jeśli każdy blok z P_a jest zawarty w pewnym bloku z P_b.

$$\Pi_a = (\overline{1,2,4};\overline{3,5,6}) \quad \Pi_b = (\overline{1,4};\overline{2,6};\overline{3,5}) \quad \Pi_c = (\overline{1,2};\overline{4};\overline{6};\overline{3,5})$$

$\Pi_c \leq \Pi_a$ Tak $\qquad \Pi_c \not\leq \Pi_b$ NIE!

$\Pi(0)$ – podział najmniejszy

$\Pi(1)$ – podział największy

I T P W ZPT

Elementy rachunku podziałów…

Iloczynem podziałów $\Pi_a \bullet \Pi_b$ nazywamy największy (względem relacji $\leq$) podział, który jest nie większy od Π_a oraz Π_b.

$$\Pi_a = (\overline{1,2,4};\overline{3,5,6}) \qquad \Pi_b = (\overline{1,4};\overline{2,6};\overline{3,5})$$

$$\Pi_a \bullet \Pi_b = (\overline{1,4};\overline{2};\overline{6};\overline{3,5})$$

I T P W ZPT

Nowy sposób opisu funkcji - podziały

Funkcja *f*

$P_1 = \{\overline{5};\ \overline{1,2,3,4,6,7,8,9}\}$

$P_2 = \{\overline{1,2,6,7,8};\ \overline{3,4,5,9}\}$

$P_3 = \{\overline{1,3,5,6};\ \overline{2,4,7,8,9}\}$

$P_4 = \{\overline{1,4,5,6,7,8,9};\ \overline{2,3}\}$

$P_5 = \{\overline{7};\ \overline{1,2,3,4,5,6,8,9}\}$

$P_6 = \{\overline{1,5,7,9};\ \overline{2,3,4,6,8}\}$

$P_7 = \{\overline{2,3,6,7,8};\ \overline{1,4,5,9}\}$

$P_f = \{\overline{1,2,3,4};\ \overline{5,6,7,8,9}\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	f
1	1	0	0	0	1	0	1	0
2	1	0	1	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	0
4	1	1	1	0	1	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	0	1	1	0	1
7	1	0	1	0	0	0	0	1
8	1	0	1	0	1	1	0	1
9	1	1	1	0	1	0	1	1

I T P W ZPT

Pojęcie zmiennej niezbędnej

Jeżeli wektory X_a oraz X_b: $f(X_a) \neq f(X_b)$, różnią się dokładnie dla jednej zmiennej to zmienną taką nazywamy niezbędną

Wyjaśnienie i interpretacja w książce:

Warto przeczytać rozdział 3.4

I T P W

ZPT

Redukcja argumentów – przykład

Funkcja *f*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	f
1	1	0	0	0	1	0	1	0
2	1	0	1	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	0
4	1	1	1	0	1	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	0	1	1	0	1
7	1	0	1	0	0	0	0	1
8	1	0	1	0	1	1	0	1
9	1	1	1	0	1	0	1	1

x_4 x_6 – zmienne niezbędne

ponieważ wiersze 2 i 8 różnią się na pozycji x_4

a wiersze 4 i 9 na pozycji x_6

$$P_4 = \{\overline{1,4,5,6,7,8,9}; \overline{2,3}\}$$

$$P_6 = \{\overline{1,5,7,9}; \overline{2,3,4,6,8}\}$$

Dalej liczymy iloczyn P_4 P_6

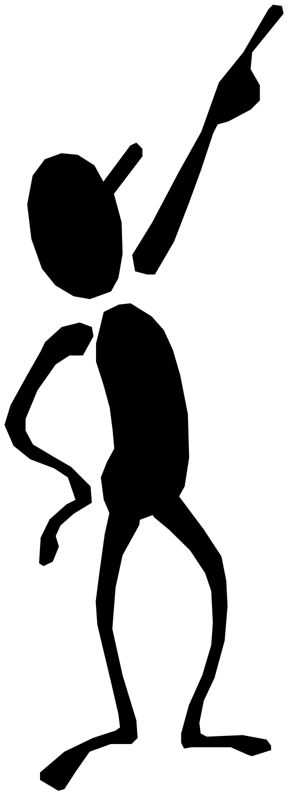
$$P_4 \bullet P_6 = (\overline{1,5,7,9}\ ; \overline{4,6,8}\ ; \overline{2,3})$$

$$P_f = \{\overline{1,2,3,4}; \overline{5,6,7,8,9}\}$$

I T P W ZPT

Redukcja argumentów – przykład

Iloczyn podziałów wyznaczonych przez zmienne niezbędne ma bardzo ważną interpretację



$$P_4 \bullet P_6 = (\overline{1,5,7,9}\,;\overline{4,6,8}\,;\overline{2,3})$$

$$P_f = \{\overline{1,2,3,4};\ \overline{5,6,7,8,9}\}$$

I
T
P
W

ZPT

Redukcja argumentów – przykład c.d.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	f
1	1	0	0	0	1	0	1	0
2	1	0	1	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	0
4	1	1	1	0	1	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	0	1	1	0	1
7	1	0	1	0	0	0	0	1
8	1	0	1	0	1	1	0	1
9	1	1	1	0	1	0	1	1

1, | 5, 7, 9

4, | 6, 8

1, 5	x_1 x_2
1, 7	x_3 x_5 x_7
1, 9	x_2 x_3
4, 6	$\cancel{x_2\ x_3\ x_7}$
4, 8	x_2 x_7

x_1 x_2
x_3 x_5 x_7
x_2 x_3
x_2 x_7

Tu obliczamy minimalne pokrycie kolumnowe

...ale teraz systematycznie...

Redukcja argumentów – przykład c.d.

$x_1 \quad x_2$
$x_3 \quad x_5 \quad x_7$
$x_2 \quad x_3$
$x_2 \quad x_7$

$$(x_1 + x_2)\ (x_3 + x_5 + x_7)(x_2 + x_3)(x_2 + x_7) =$$

$$= (x_2 + x_1)(x_2 + x_3)(x_2 + x_7)(x_3 + x_5 + x_7) =$$

$$= (x_2 + x_1x_3x_7)(x_3 + x_5 + x_7) =$$

$$= x_2x_3 + x_2x_5 + x_2x_7 + x_1x_3x_7 + \ldots$$

$\cup \{x_4, x_6\}$

$\{x_2, x_3, x_4, x_6\}$ $\{x_2, x_4, x_5, x_6\}$ $\{x_2, x_4, x_6, x_7\}$

Tylko to było znalezione przez Espresso

I T P W ZPT

I T P W ZPT

...ale gdybyśmy wiedzieli o tym wcześniej, że

funkcja ta zależy tylko od $\{x_2, x_4, x_6, x_7\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	f
1	1	0	0	0	1	0	1	0
2	1	0	1	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	0
4	1	1	1	0	1	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	0	1	1	0	1
7	1	0	1	0	0	0	0	1
8	1	0	1	0	1	1	0	1
9	1	1	1	0	1	0	1	1

	x_2	x_4	x_6	x_7	f
1	0	0	0	1	0
2	0	1	1	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	0	1	1	0
5	1	0	0	1	1
6	0	0	1	0	1
7	0	0	0	0	1
8	0	0	1	0	1
9	1	0	0	1	1

A taką funkcję można łatwo zminimalizować nawet na tablicy Karnaugha

Redukcja argumentów

Wprowadzenie redukcji argumentów do procedury ekspansji daje – w rozsądnym czasie – wyniki lepsze niż słynne Espresso

Przykład z *Synteza układów logicznych* str 65

```
.type fr
.i 10
.o 1
.p 25
0010111010 0
1010010100 0
0100011110 0
1011101011 0
1100010011 0
0100010110 0
1110100110 0
0100110000 0
0101000010 0
0111111011 1
0000010100 1
1101110011 1
0100100000 1
0100011111 1
0010000110 1
1111010001 1
1111101001 1
1111111111 1
0010000000 1
1101100111 1
0010001111 1
1111100010 1
1010111101 1
0110000110 1
0100111000 1
.e
```

Funkcja TL27
10 argumentów

Espresso

```
.i 10
.o 1
.p 6
----00-1-- 1
00--0----- 1
----10-0-01
---1--0--1 1
------1-0-  1
-----11--1 1
.e
```

9 argumentów
6 termów

Funkcja TL27

Funkcja TL27 przed redukcją

.type fr
.i 10
.o 1
.p 25
0010111010 0
1010010100 0
0100011110 0
1011101011 0
1100010011 0
0100010110 0
1110100110 0
0100110000 0
0101000010 0
0111111011 1
0000010100 1
1101110011 1
0100100000 1
0100011111 1
0010000110 1
1111010001 1
1111101001 1
1111111111 1
0010000000 1
1101100111 1
0010001111 1
1111100010 1
1010111101 1
0110000110 1
0100111000 1
.e

Pandor

Realizacja funkcji f1
Ilość zmiennych = 7
Ilość wektorów = 25
R3 = {1,2,4,6,7,9,10}

0001110 0
1001000 0
0101110 0
1010111 0
1101011 0
0101010 0
1100010 0
0101000 0
0110010 0
0111111 1
0001000 1
1111011 1
0100000 1
0101111 1
0000010 1
1111001 1
1110101 1
1111111 1
0000000 1
1110011 1
0000111 1
1110010 1
1001101 1
0100010 1
0101100 1

Jedno z 10 rozwiązań po redukcji argumentów

I T P W ZPT

Przykład TL27

Funkcja 10 argumentów, 25 wektorów w TP

Wynik Espresso – 9 argumentów, 6 termów

$$f = \bar{x}_5\bar{x}_6x_8 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5 + x_5\bar{x}_6\bar{x}_8\bar{x}_{10} + x_4\bar{x}_7x_{10} + x_7\bar{x}_9 + x_6x_7x_{10}$$

Wynik Pandora po RedArg – 7 argumentów, 5 termów

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_7 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_1x_{10} + \bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_6 + x_7\bar{x}_9$$

I T P W

ZPT

Funkcja KAZ

Przed redukcją

```
.type fr
.i 21
.o 1
.p 31
100110010110011111101 1
111011111011110111100 1
001010101000111100000 1
001001101100110110001 1
100110010011011001101 1
100101100100110110011 1
001100100111010011011 1
001101100011011011001 1
110110010011001001101 1
100110110011010010011 1
110011011011010001100 1
010001010000001100111 0
100110101011111110100 0
111001111011110011000 0
101101011100010111100 0
110110000001010100000 0
110110110111100010111 0
110000100011110010001 0
001001000101111101101 0
100100011111100110110 0
100011000110011011110 0
110101000110101100001 0
110110001101101100111 0
010000111001000000001 0
001001100101111110000 0
100100111111001110010 0
000010001110001101101 0
101000010100001110000 0
101000110101010011111 0
101010000001100011001 0
011100111110111101111 0
.end
```

Pandor

Jedno z wielu rozwiązań po redukcji **argumentów**

```
01010 1
10110 1
00100 1
01001 1
01000 1
11010 1
10011 0
01110 0
10100 0
11000 0
11011 0
10000 0
00010 0
01111 0
00011 0
11111 0
00000 0
01101 0
00110 0
```

Przykład KAZ

Silnie nieokreślona funkcja 21 argumentów, 31 wektorów w TP

Wynik Espresso – 9 argumentów, 3 termy

$$f = \bar{x}_2 x_{14} \bar{x}_{19} x_{21} + x_7 \bar{x}_8 \bar{x}_{12} + x_5 x_8 \bar{x}_{20}$$

Wynik Pandora – 5 argumentów, 3 termy

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_9 \bar{x}_{19} + \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_9 + x_2 x_{19} \bar{x}_{20}$$

ITPW ZPT