

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ 1. ВРЕМЕННАЯ СТОИМОСТЬ ДЕНЕГ

Основная цель лекции:

- a) Разобрать экономический смысл концепции временной стоимости денег;
- b) Изучить формулы, интерпретацию и применение расчета простых и сложных процентов, эффективной ставки;
- c) Познакомиться с понятием ставки дисконтирования и ее экономическим содержанием

На этой лекции мы

- Разберем экономическую суть временной стоимости денег
- Изучим формулы, интерпретацию и применение расчета простых и сложных процентов
- Научимся определять эффективную ставку
- Познакомимся с процессами дисконтирования и наращивания
- Опишем экономические составляющие ставки дисконтирования
- Изучим инфляцию и ее учет в расчетах
- Разберемся с понятиями неопределенности, риска и премии за риск

Термины

Наращение - процесс перевода денежной суммы от прошлого момента к будущему

Дисконтирование – процесс перевода денежной суммы от будущего момента времени к прошлому

Номинальная процентная ставка - та процентная ставка, которая зафиксирована в договоре (например, кредита или депозита)

Эффективная процентная ставка - та процентная ставка, которая дает тот же эффект с точки зрения итоговой денежной суммы, но при условии начисления 1 раз в год

Инфляция – падение покупательской способности денег во времени

Потребительская корзина - набор товаров и услуг, характеризующий уровень и структуру потребления экономического субъекта

Номинальная процентная ставка – процентная ставка, которая отражает реальные цены активов (и тем самым включает в себя инфляцию)

Реальная процентная ставка - процентная ставка, очищенная от инфляции

Неопределенность - отсутствие точной информации о будущем развитии событий, течении процессов и финансовых результатах

Риск - измеримая возможность наступления неблагоприятных финансовых последствий (потери всех или части инвестированных денег) в результате неопределенности

План лекции:

1. Введение
2. Экономическая суть концепции временной стоимости денег
3. Простые и сложные проценты
4. Дисконтирование и наращение
 - а. Влияние частоты начисления процентов на результат
 - б. Эффективная процентная ставка
5. Определение ставки дисконтирования
 - а. Инфляция и ее учет
 - б. Риски и премии за риск
 - с. Безрисковая ставка

ВВЕДЕНИЕ

Финансовая математика – это основа всей современной теории экономики и финансов. В курсе финансовой математики мы будем разбирать основные термины, концепции, формулы и инструменты из различных сфер математики, которые необходимы для выполнения финансово-экономических расчетов. Без математики экономики и финансов просто не существовало бы!

Однако, справедливости ради, следует отметить, что в подавляющем большинстве случаев сложность математических формул и концепций, которые используются в экономике и финансах невелика, и соответствует классической школьной программе, плюс основы теории вероятностей и математической статистики.

Безусловно, в отдельных узких областях (например, в ценообразовании опционов или продвинутых моделях портфельного анализа) используются весьма сложные концепции, например, стохастические дифференциальные уравнения или методы Монте-Карло. Но такие области являются сугубо нишевыми, и подавляющее большинство финансовых аналитиков не будут ими заниматься в своей профессиональной карьере.

В нашем курсе будем разбирать только самые важные и базовые аспекты финансовой математики, которые максимально пригодятся широкому кругу финансовых аналитиков и специалистов по инвестициям, а также будут полезны для всех слушателей.

Поскольку рассчитать график платежей, эффективную ставку по кредиту и сравнить инвестиции по доходности – это полезный практический навык, которым должен владеть любой образованный человек. Можно сказать, что финансовая математика – это основа финансовой грамотности!

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СУТЬ КОНЦЕПЦИИ ВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ ДЕНЕГ

И начнем мы с краеугольной концепции всех финансов – концепции временной стоимости денег. Эту концепцию экономисты и финансисты применяют всегда и везде, начиная от оценки

привлекательности инвестиционных проектов, заканчивая расчетами платежей по кредитам и лизингу.

Итак, концепция временной стоимости денег гласит: сумма денежных средств, доступная в настоящий момент, имеют большую ценность (стоимость), чем эта же сумма в какой-то момент времени в будущем. Временную стоимость денег можно ощутить даже в обычной, бытовой жизни. Например, мы видим, что цены постоянно растут, и с каждым годом мы вынуждены оставлять в магазинах все большие и большие суммы, чтобы купить примерно одинаковый продуктовый набор. С другой стороны, все мы знаем, что деньги «должны работать» и мы можем их инвестировать, тем самым зарабатывая и преумножая капитал.

Таким образом, на бытовом уровне можно ощутить временную стоимость денег как возможность положить деньги сейчас в банк и заработать на них, либо как уменьшение того объема экономических благ, которые на эту сумму можно будет купить в будущем.

Поскольку любой человек может инвестировать свои накопления под некоторый процент, то можно сформулировать следующим образом: чем раньше мы получаем деньги, тем это выгоднее для нас! Это главное практическое следствие из концепции временной стоимости денег.

Концепция временной стоимости денег применяется практически во всех сферах экономики и финансов:

- оценка ценных бумаг, недвижимости и других финансовых и нефинансовых активов (это сложная тема, которую мы затронем совсем немного);
- оценка привлекательности отдельных инвестиционных проектов и целого бизнеса (рассмотрим в последующих лекциях);
- расчеты платежей по кредитам и лизингам (будут изучены в следующей лекции);
- расчеты будущих финансовых обязательств для физического лица или для компании

- определение требуемой доходности инвестиций и многое другое

ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Все мы в течение жизни слышали термин «процентная ставка». Его используют в новостях, когда говорят о инструментах денежно-кредитной политики, реализуемой ЦБ РФ, его мы видим в договорах депозитов и кредитов в банке и т.д. Так что же это такое?

Процентная ставка – это количественное отражение временной стоимости денег, которая может интерпретироваться как:

- Ставка доходности, которую требует инвестор, чтобы вложить деньги в данную инвестицию. Например, инвестору предложили вложить деньги в проект, обещая 10% годовых. Однако инвестор считает, что в проекты, которые приносят менее 15% годовых, ему вкладывать неинтересно, и отказывается. Таким образом, в этом примере 15% - это и есть требуемая ставка доходности для данного инвестора;
- Альтернативная стоимость (т.н. «вмененные издержки») – альтернативные возможности вложений для конкретного инвестора. Например, у инвестора есть возможность вместо покупки акций положить деньги на депозит под 12% годовых. Тогда прогнозируемую доходность акций он будет сравнивать с этой ставкой, 12%, и она будет выступать альтернативной стоимостью для него;
- Математический параметр (называется «ставка дисконтирования»), который используется для выполнения расчетов. Ставка дисконтирования – это параметр, который используется для сравнения денежных сумм в разные моменты времени. Мы будем более подробно разбирать понятие ставки дисконтирования чуть позже.

Процентная ставка бывает двух видов:

- простая процентная ставка – применяется только к основной сумме долга

- сложная процентная ставка - учитывает начисление процентов на всю сумму, включая ранее начисленные проценты.
Ситуация, когда проценты начисляются на уже накопленные проценты, называется капитализацией.

Можно сформулировать следующим образом на примере банковского депозита: если вы будете каждый год снимать проценты со счета, то начисление будет идти по простой процентной ставке. Если же вы будете оставлять проценты на счету, то расчет доходности будет происходить по сложной ставке.

Разберем на примере. Если положить 100 руб в банк под 10% годовых (простые), то через год будет

$$100 + 100 \cdot 10\% = 110 \text{ руб,}$$

через два года будет

$$110 + 100 \cdot 10\% = 120 \text{ руб}$$

через три года будет

$$120 + 100 \cdot 10\% = 130 \text{ руб}$$

и т.д. Если же положить 100 руб в банк под 10% годовых (сложные), то через год будет

$$100 + 100 \cdot 10\% = 110 \text{ руб,}$$

через два года будет

$$110 + 110 \cdot 10\% = 121 \text{ руб}$$

через три года будет

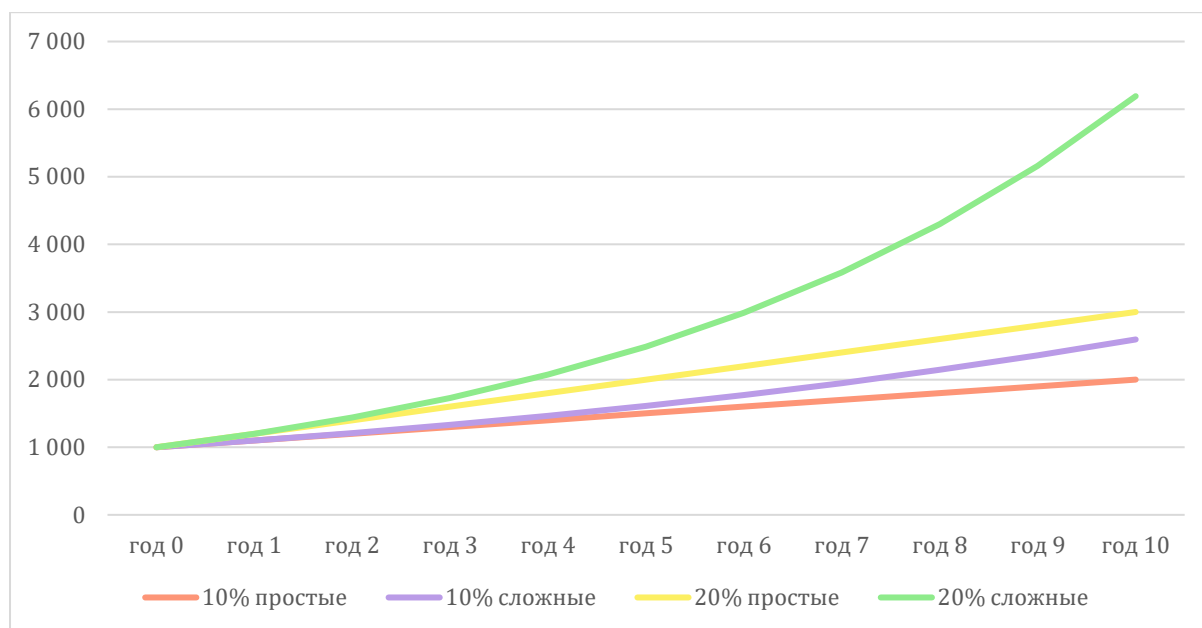
$$120 + 121 \cdot 10\% = 133,1 \text{ руб}$$

и т.д.

На практике обычно простые проценты используются для расчетов внутри года, а сложные - для расчетов на горизонтах более года.

Что самое важное в разнице между простыми и сложными процентами? Это тот факт, что по мере увеличения срока и процентной ставки сложные проценты обеспечивают огромный (нелинейный, то график не будет прямой линией!) рост по сравнению с простыми процентами, при которых сумма растет линейно (см. красную и желтую линии на графике ниже, они

представляют собой прямые). В этом легко убедиться, построив графики зависимости накопленной суммы от процентной ставки и срока:



Видно, что если в начале разница не такая существенная, то через 10 лет сложные проценты дадут результат в 1,5 раза выше для ставки 10% годовых и в более чем 2 раза выше для 20% годовых. Именно поэтому такую роль в современной банковской системе получила т.н. капитализация процентов, которая позволяет воспользоваться силой сложного процента!

ДИСКОНТИРОВАНИЕ И НАРАЩЕНИЕ

Для решения большинства прикладных задач в экономике и финансах необходимо как-то сравнивать денежные суммы, которые приходят в различные моменты времени, а для этого нам нужно иметь возможность приводить денежные суммы к одному моменту времени (практические примеры таких расчетов приведем чуть ниже). Поэтому на базе разобранных концепций сформулируем два определения.

Наращением будем называть процесс перевода денежной суммы от прошлого момента к будущему, а дисконтированием – процесс перевода денежной суммы от будущего момента времени к прошлому.

Денежная сумма в текущий момент обычно называется «текущей стоимостью» или, на английском, Present Value (или **PV**), а в будущей момент времени – «будущей стоимостью» или Future Value (**FV**).

Для осуществления расчетов будущих и текущих стоимостей необходимы ввести формулы, которые формализуют то, что было описано в определении простых и сложных процентов.

Для простых процентов наращение на n периодов вперед по ставке i описывается формулой:

$$FV = PV * (1 + i * n)$$

А дисконтирование на n периодов назад по ставке i :

$$PV = FV / (1 + i * n)$$

Для сложных процентов формулы усложняются и появляются степени вместо умножения. Для наращения имеем:

$$FV = PV * (1 + i)^n$$

А для дисконтирования:

$$PV = FV / ((1 + i)^n)$$

Давайте решим практические задачи на использование этих формул.

Задача 1. Пусть мы вкладываем 1 000 рублей под 12% годовых на 3 года. Сколько мы получим при начислении простых и сложных процентов?

Решение. Для случая простых процентов: $1000 * (1 + 3 * 12\%) = 1\,360$ руб. Для сложных процентов: $1000 * (1 + 12\%)^3 = 1\,405$ руб. 45 рублей разницы – это эффект капитализации за 3 года.

Задача 2. Человек хочет иметь возможность через 16 лет оплатить образование своему ребенку. Он планирует, что для оплаты учебы в университете, нужно будет иметь \$100 тыс. Если текущая доходность банковского депозита равна 4% годовых, то сколько нужно положить в банк сейчас, чтобы через 16 лет получить нужную сумму?

Решение. Мы знаем, что $FV = \$100$ тыс. Наша задача – определить текущую стоимость этих денег, если мы знаем заявленную временную стоимость (4% годовых): $PV = 100\,000 / (1+0.04)^{16} = \$53\,391$. Если мы положим эту сумму в банк под 4%, то через 16 лет там будет ровно требуемые $\$100\,000$.

Задача 3. Если инвестор получил наследство в размере $\$125$ тыс и хочет вложить его в акции на фондовом рынке, то какую сумму он может ожидать получить через 20 лет, если средняя доходность фондового рынка ожидается 7% годовых?

Решение. Нам нужно найти будущую стоимость по формуле сложных процентов: $FV = 125\,000 * (1+0.07)^{20} = \$483\,711$.

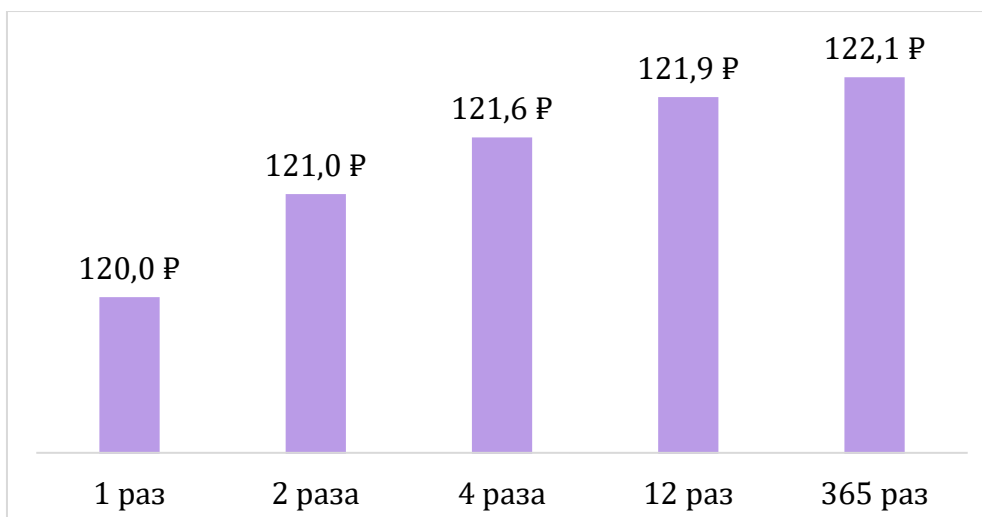
Предыдущие формулы описывали случай, когда проценты начисляются всего один раз за период. Однако в условиях договора может быть предусмотрен другой порядок начисления процентов!

Наращение (и, соответственно, дисконтирование) для начисления процентов по сложной ставке i в течение n периодов, но не 1 раз за период, а с периодичностью m раз за период, рассчитывается по формуле:

$$FV = PV * (1 + i/m) ^ (n*m)$$

В этой формуле заключено объяснение выгоды максимально частой капитализации процентов: в зависимости от условий начисления процентов при одной и той же процентной ставке эффект (то есть, итоговая сумма) будет различным!

Давайте разберем на примере: рассмотрим, сколько денег будет на счету, если мы положим под 20% годовых сумму в 100 руб при условии разной периодичности начисления процентов (ежегодно, раз в полгода, ежеквартально, ежемесячно и ежедневно):



Отчетливо виден эффект роста суммы с ростом числа начислений в год!

Для возможности сравнения разных вариантов начисления процентов (с точки зрения ставок, сроков и частоты начисления), вводятся понятия номинальной и эффективной процентной ставок.

Номинальная процентная ставка - та процентная ставка, которая зафиксирована в договоре (например, кредита или депозита), а эффективная процентная ставка - та процентная ставка, которая дает тот же эффект с точки зрения итоговой денежной суммы, но при условии начисления 1 раз в год:

$$FV = PV * (1 + \text{эф.ставка})$$

В договоре может быть написана одна процентная ставка (номинальная), но фактически из-за начисления процентов несколько раз в год придется заплатить больше денег. И эта фактическая ставка называется эффективной.

Расчет эффективной процентной ставки позволяет сравнивать различные варианты финансирования/ инвестирования и выбирать оптимальный!

Решим практическую задачу.

Задача 4. В кредитном договоре прописана ставка 15% годовых. Если начисление процентов осуществляется ежемесячно, какова эффективная ставка по кредиту?

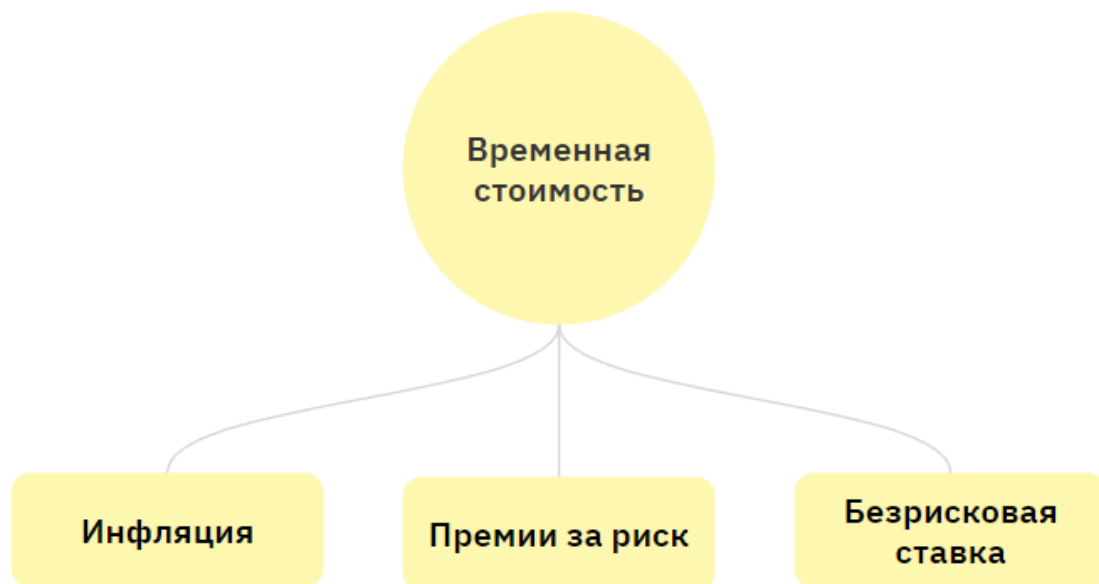
Решение. Найдем сумму, которую мы должны будем вернуть через 1 год, если возьмем в долг 1 условный рубль (для удобства

расчета): $FV = 1 * (1 + 0,15/12)^{(12*1)} = 1.1607$ рубля. Применяя формулу эффективной ставки: $\text{эф.ставка} = 1,1607/1 - 1 = 0,1607 = 16,07\%$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАВКИ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

В чем же заключается экономический смысл ставки дисконтирования? Мы ранее вводили концепцию временной стоимости денег как наблюдаемое на практике явление, но не говорили о его теоретическом объяснении. Давайте это исправим.

С экономической точки зрения ставка дисконтирования представляет собой отражение концепции временной стоимости денег, которая проистекает из трех основных источников:



Разберем эти источники по порядку. Первый источник, самый понятный и прозрачный – это инфляция. Дадим ей определение. Инфляция может быть определена как 1) падение покупательской способности денег во времени; либо как 2) стабильный рост цен на определенный набор товаров и услуг (“потребительскую корзину”) в экономике.

Где потребительская корзина - набор товаров и услуг, характеризующий уровень и структуру потребления экономического субъекта. Для обычного человека потребительская корзина обычно состоит из продуктов питания (хлеб, молоко, мясо, яйца, овощи, фрукты, десерты), одежды, обуви, трат на развлечения, транспорт,

бензин и т.д. Из этого определения уже следует, что для разных экономических субъектов в зависимости от их потребительского поведения инфляция будет различной!

Этот момент очень важен, потому что показывает субъективность инфляции: для любых двух человек инфляция за один и тот же период времени будет разной!

Когда в экономике присутствует инфляция, то стоимость денег в стране возрастает и процентные ставки становятся выше.

Поэтому для анализа используются два термина: номинальная процентная ставка - отражает реальные цены активов (включает в себя инфляцию), и реальная процентная ставка - процентная ставка, очищенная от инфляции. Эти две величины связаны т.н. уравнением Фишера:

$$(1 + R_{ном}) = (1 + R_{реал}) * (1 + I)$$

Вторым источником временной стоимости денег, который присутствует даже в ситуации, когда в экономике нет инфляции (как, например, в определенные периоды времени в Японии) – это риск. Понятие риска тесно связано с понятием неопределенности.

Неопределенность - отсутствие информации о будущем развитии событий, течении процессов и финансовых результатах.

А риск - измеримая возможность наступления неблагоприятных финансовых последствий (потери всех или части инвестированных денег) в результате неопределенности. То есть разница между ними в том, что когда мы говорим о рисках, мы подразумеваем возможность количественно определить размер и вероятность наступления неблагоприятных последствий (убытков).

Существует множество классификаций, видов и типов рисков, которые выходят за рамки финансовой математики. Главными рисками для большинства участников рынка являются кредитный риск (риск неисполнения контрагентом своих финансовых обязательств, например, когда заемщик не возвращает деньги банку, то для банка это – кредитный риск), риск ликвидности (то есть риск неспособности расплатиться по своим текущим обязательствам) и рыночный риск (риск неблагоприятного изменения цен, ставок и курсов валют).

Чем выше риск вложения денег, тем больше должна быть доходность, чтобы субъект был готов инвестировать. Это повышение доходности в зависимости от наличия риска называется премией за риск. И если в сделке есть риск, то для осуществления этой сделки требуемая доходность будет включать в себя эту премию за риск.

И, наконец, третий источник временной стоимости. Даже в отсутствии инфляции и рисков любой рациональный экономический субъект хочет получить некоторую доходность за свои вложения вследствие психологического предпочтения потратить сейчас, а не позже. Это называется премией за отложенное потребление.

Чтобы субъект был готов отложить потребление и инвестировать свои деньги (то есть временно расстаться с ними), ему нужно взамен предложить какую-то дополнительную, ненулевую доходность, которую и называют безрисковой ставкой.

А вот как ее определять - это сложный методологический вопрос, на который нет однозначного ответа и который на практике решают в зависимости от условий конкретной задачи...

Таким образом, наличие этих трех одновременных источников (инфляции, премии за риск и безрисковой процентной ставки) является объяснением того, что в любой экономической ситуации любой рациональный субъект при любых условиях будет предпочитать получить деньги раньше, а не позже, то есть для него деньги имеют временную стоимость!

На этой лекции мы

- Разобрали экономическую суть временной стоимости денег
- Изучили формулы, интерпретацию и применение расчета простых и сложных процентов
- Научились определять эффективную ставку
- Познакомились с процессами дисконтирования и наращивания
- Описали экономические составляющие ставки дисконтирования
- Изучили понятие инфляции и ее учет в расчетах

- Разобрались с понятиями неопределенности, риска и премии за риск

Анонс следующей лекции

В следующей лекции мы рассмотрим использование изученных формул для проведения практических процентных расчетов. Мы научимся проводить расчет графиков платежей по кредиту, расчет процентов и погашения основной суммы долга, расчет эффективной ставки по кредиту. Познакомимся с формулами расчета аннуитетов и научимся рассчитывать основные параметры облигаций.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика
2. А. Лобанов. Энциклопедия финансового риск-менеджмента