RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

Université de Yaoundé I

École Nationale Supérieure
Polytechnique de Yaoundé (ENSPY)

BP 8390 Tel/Fax : 222 22 45 47
Yaoundé, Cameroun

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

The University of Yaoundé I

National Advanced School of
Engineering of Yaoundé (NASEY)

PO BOX 8390 Tel/Fax: 222 22 45 47
Yaoundé, Cameroun

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE DES INGENIEURS DANS LES FILIERES DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES	
MATHEMATIQUES 1	Durée : 3 heures
	Session : 2024

L'épreuve comporte deux exercices et un problème tous indépendants et étalés sur deux pages

Exercice 1 : (06 points)

1) Pour a appartenant à $\mathbb{R}$, justifier que $1 - \cos a - i\sin a = (-2i \sin\frac{a}{2})e^{ia/2}$. 0,5 pt

2) Soit n un entier naturel.

Démontrer que pour tout complexe $z \neq 1$, on a $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. 0,5 pt

3) Dans la suite, θ est un réel de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. On pose $z = e^{i\theta}$.

a) Pour θ décrivant l'intervalle $\left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, quel intervalle décrit $\frac{\theta}{2}$?

Et celui de $\frac{3\theta}{2}$? 0,5 pt

b) Ecrire $1 + z + z^2$, sous la forme $g(\theta)e^{i\theta}$. 0,75 pt

c) En déduire suivant les valeurs de θ, le module et un argument de $1 + z + z^2$ lorsque c'est possible. 1,5 pt

d) Pour quelles valeurs de θ, $1 + z + z^2$ est-il de module 1 ? 0,75 pt

e) Démontrer que z peut se mettre sous la forme $\frac{a+i}{a-i}$ où $a \in \mathbb{R}$. 0,5 pt

4) Le plan complexe étant équipé d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, déterminer le lieu (Σ) des points M d'affixes pouvant se mettre sous la forme $\frac{a+i}{a-i}$ avec a appartenant à $\mathbb{R}$. Justifier. 1 pt

Exercice 2: (04 points)

Pour ouvrir la porte du magasin d'un aéroport, le magasinier doit composer un code (a, b, c, d) constitué de quatre chiffres a, b, c et d non nécessairement distincts. Ces chiffres potentiels sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Une alarme se déclenche si on essaie un code (a', b', c', d') tel que a' ≠ a, b' ≠ b, c' ≠ c et d' ≠ d.

1) Le magasinier se souvient seulement que le code est constitué des chiffres 1, 2, 3 et 4.

a) Faire dans ce cas, la liste de tous les codes qu'il peut essayer de composer. (1 pt)

b) Sachant que le bon code est (4, 3, 2, 1), quels sont ceux des essais précédents qui provoqueraient l'alarme ? (0,75 pt)

c) Si le magasinier fait ici un essai au hasard, quelle est la probabilité qu'il provoque le déclenchement de l'alarme ? (0,75 pt)

2) Un cambrioleur ignorant tout du code fait un essai au hasard à travers un code de quatre chiffres.

a) Quelle est la probabilité pour que la porte s'ouvre ? (0,75pt)

b) Quelle est la probabilité pour que l'alarme déclenche ? (0,75 pt)

Problème : (10 points) On considère un plan orienté (P) contenant un rectangle ABCD de sens direct, de longueur $AB = \ell$ et de largeur $AD = 1$. Sur les côtés $[AB]$ et $[CD]$, on a placé respectivement les points F et E tels que $AFED$ soit un carré de sens direct.

Cette figure est telle qu'il existe une similitude direct s de rapport un réel λ avec :
$s(A) = B$, $s(B) = C$ et $s(C) = E$.

Partie A. (4 points)

1°) En utilisant le rapport λ de la similitude s, démontrer que $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 1 pt

2°) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s. 0,5 pt

3°) Soit Ω le centre de la similitude s. Déterminer les images des points Ω, A et B par la similitude $s \circ s$. Donner alors la nature de la similitude $s \circ s$ et ses éléments caractéristiques. 1 pt

4°) En déduire que Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (BE). 0,5 pt

5°) Quelle est l'image de la droite (CD) par la similitude s ? En déduire une construction de l'image E' de E, par la similitude s. 1 pt

Partie B : (6 points)

Le plan (P) est désormais équipé du repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.

1°) s transforme alors tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z'. Donner l'expression complexe de la similitude s. Donner les coordonnées de l'image D' de D par s. 1 pt

2°) Ici a et b sont deux nombres complexes avec $a\bar{b} + b = 0$ et $b \neq 0$.

L'application f du plan dans lui-même, transformant tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' tel que $z' = a\bar{z} + b$.

On veut déterminer la nature de f et sa caractérisation.

Soit (Δ) l'ensemble des points invariants par f ; c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $f(M) = M$.

a) Démontrer que (Δ) est constituée des points M d'affixe z tel que
$$2Re(\bar{b}z) = |b|^2.$$
En déduire que (Δ) est une droit dont un vecteur directeur est $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = ib$.
(On pourra déterminer une équation cartésienne de (Δ)). 1,25 pt

b) Démontrer que si f transforme M(z) en M'(z'), alors $\frac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\vec{u}}} = \frac{|b|^2 - 2Re(\bar{b}z)}{i|b|^2}$ et pour I d'affixe $z_I = \frac{z+z'}{2}$, on a $2Re(\bar{b}z_I) = |b|^2$. 1,25 pt

c) En déduire que pour M n'appartenant pas à (Δ), (Δ) est la médiatrice de $[MM']$. 1 pt

d) Conclure. 0,5 pt

3°) *Soit σ l'application du plan dans lui-même qui transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' tel que* $z' = -i\bar{z} + 1 + i$. Démontrer que σ est la symétrie *orthogonale d'axe (DF)*. 1 pt

1.1.1.1
2 2 2 2
3 3 3 3