1.1. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$$

Calculer la circulation de $\vec{A}$ entre les points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ le long des chemins suivants :

a) le segment de droite joignant ces deux points,

b) les segments de droite allant de $(0, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$ puis de $(1, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$ et enfin de $(1, 1, 0)$ jusqu'à $(1, 1, 1)$.

Ce champ vectoriel est-il un gradient ?

1.2. Soit le champ vectoriel :

$$\vec{V}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de :

a) la spirale logarithmique d'équation polaire :

$$r = ae^{k\theta}, \qquad \text{entre} \qquad \theta_1 \text{ et } \theta_2$$

b) la cardioïde :

$$r = a(1 + \cos\theta), \qquad \text{entre} \qquad 0 \text{ et } \pi.$$

1.3. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

Montrer que ce champ est un gradient, et déterminer la fonction scalaire φ dont il dérive par la relation $\quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$.

1.4. Un champ de vecteur $\vec{E}$, dans l'espace orthonormé $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ f(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{où } f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } y.$$

1) Déterminer la fonction f pour que le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel V tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

2) Déterminer alors le potentiel de V.

3) Quelle est la circulation du champ $\vec{E}$ entre les points $A(0, 0, 0)$ et $B(1, 1, 1)$?

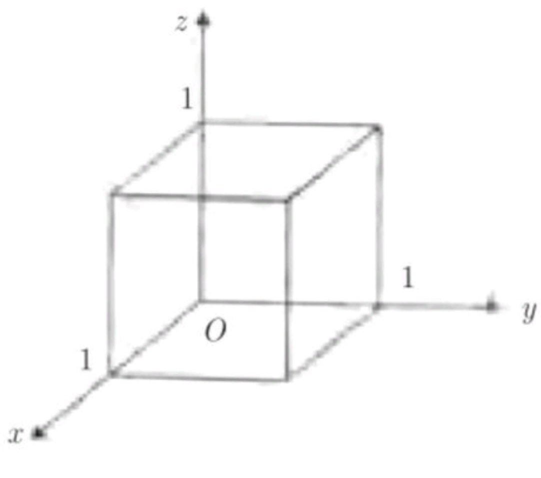
1.5. *1)* On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique : $\vec{V} = \dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$. Montrer que ce champ dérive de la fonction scalaire $f = -\dfrac{1}{r}$ par la relation $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(r)$.

2) Calculer div $\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$.

1.6. Calculer le flux du champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

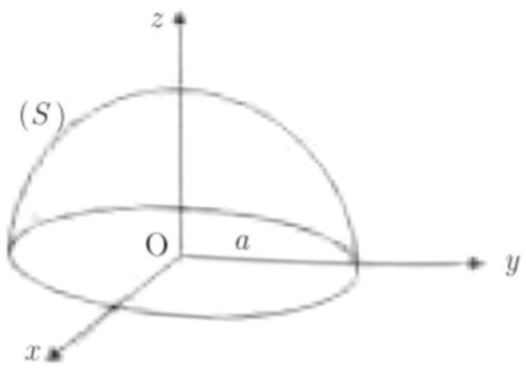
à travers la surface du cube limité par $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.



1.7. Calculer le flux du champ vectoriel :

$$\vec{V}(M) = xz^2\vec{e}_x + (x^2y - z^3)\vec{e}_z + (2xy + y^2z)\vec{e}_z$$

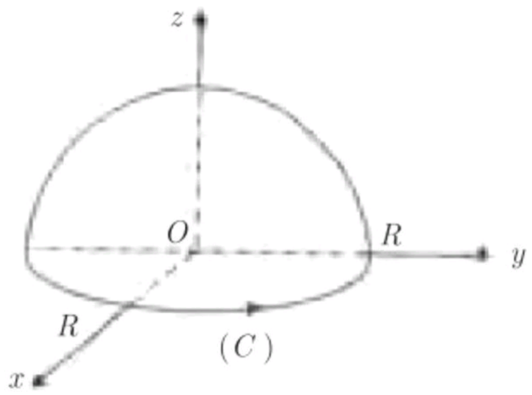
à travers la surface totale de l'hémisphère S limité par $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ et $z = 0$.



1.8. Soit le champ vectoriel :

$$\vec{V} = 2z\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2xy\vec{e}_z$$

1) Montrer que le flux de $\vec{V}$ sortant à travers l'hémisphère de centre O et de rayon R est le même que le flux rentrant à travers la base constituée par le disque de centre O et de rayon R du plan xOy.



2) En déduire le flux sortant à travers l'hémisphère.

1.9. Déterminer le flux du champ de vecteurs $\vec{V} = K\dfrac{\vec{r}}{r^3}(\vec{r} = \overrightarrow{OM})$ à travers une surface fermée contenant l'origine O. Même question pour une surface fermée ne contenant pas le point O.

1.10. Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{V} = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$, dans le cas où S est la surface de l'hémisphère supérieur d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, et (C) le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère.