3.1. Parmi les distributions de charges suivantes, quelles sont celles pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique ? Exprimer alors ce champ en précisant sa direction et son sens :

1) fil de longueur ℓ de densité linéique de charge λ.

2) fil infini de densité linéique de charge λ.

3) circonférence de densité linéique de charge λ.

4) disque de densité surfacique de charge σ.

5) plan infini (π) de densité surfacique de charge σ.

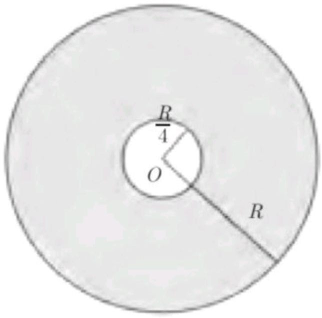
6) sphère de rayon R chargée uniformément :

a) en surface avec une densité surfacique σ ;

b) en volume avec une densité volumique ρ.

Dans le cas de la sphère, donner l'allure des courbes $E(r)$ et $V(r)$.

3.2. *1)* On creuse dans une sphère de centre O_1 et de rayon R une cavité sphérique de même centre O_1 et de rayon $\frac{R}{4}$. Il n'y a pas de charge dans la cavité. Dans le volume sphérique restant, la densité volumique de charges est $\rho_0 = \text{cte} > 0$.



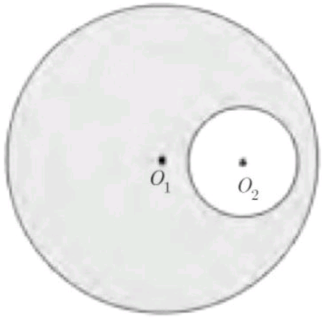
En utilisant le principe de superposition, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel $V(r)$ qui en résulte (en prenant $V(\infty) = 0$) dans les trois cas suivants :

a) $r \leqslant \frac{R}{4}$

b) $\frac{R}{4} \leqslant r \leqslant R$

c) $r \geqslant R$

Donner l'allure des courbes $E(r)$ et $V(r)$.



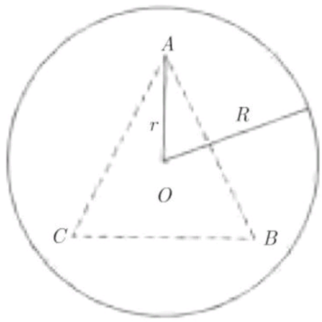
2) La cavité est centrée en O_2 tel que $O_1\,O_2 = \frac{R}{2}$.

Exprimer :

a) le champ en un point M intérieur à la cavité en fonction de $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1M}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2M}$. Que peut-on en conclure ?

b) Le champ en un point N extérieur à la sphère de rayon R en fonction de $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1N}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2N}$.

3.3. Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge $+3q$ ($q > 0$) répartie uniformément dans son volume avec une densité uniforme ρ. À l'intérieur de la sphère se trouvent trois charges ponctuelles, chacune égale à $-q$, placées aux sommets A, B et C d'un triangle équilatéral ayant O comme centre de gravité.



1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}_1$ créé en A par les deux charges B et C, en fonction de $r = OA$.

2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}_2$ créé en A par la distribution volumique de charges.

3) En déduire l'expression de r pour que la charge placée en A soit en équilibre.

4) Déterminer le potentiel électrostatique V_1 créé en A par les charges ponctuelles $-q$ placées en B et C. Calculer le potentiel V_2 créé par la distribution volumique de charges sachant que $V_2(0) = 0$. En déduire le potentiel total V_A au point A.

3.4. On considère une certaine distribution de charges positives et négatives à symétrie sphérique de centre O, telle que le potentiel électrique $V(M)$ qu'elle crée en un point M distant de r du point O soit de la forme (potentiel dit écranté) :

$$V(M) = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(-r/a)$$

où A et a sont des constantes positives.

1) Quelles sont les dimensions de A et de a ?

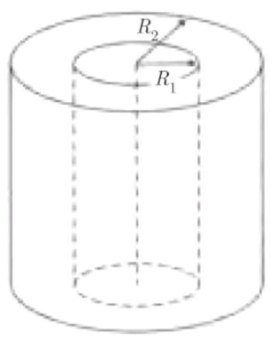
2) Calculer le champ $\vec{E}(M)$ correspondant, en tout point de l'espace (excepté O).

3) À partir de l'expression de ce champ sur une sphère de centre O et de rayon r, déterminer la charge interne $Q(r)$ contenue dans cette sphère. En déduire la charge totale de la distribution.

4) Calculer la densité volumique de charge ρ, à la distance r, en précisant son signe.

5) Montrer qu'au point O, il existe une charge positive finie, dont on précisera la valeur en fonction des données. Quelle est alors l'expression du champ au voisinage de O ?

6) Comment peut-on finalement décrire la distribution de charge proposée ?



3.5. Exprimer le champ électrique créé en tout point de l'espace par une distribution volumique de charge $\rho(> 0)$ répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$,

1) en utilisant le théorème de Gauss,

2) à partir de l'équation locale :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3.6. Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge Q répartie uniformément avec une densité volumique $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$.

1) Exprimer le potentiel en tout point de l'espace en utilisant les équations locales de Laplace et de Poisson.

2) En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$.

3) Retrouver l'expression de $\vec{E}(r)$ en appliquant le théorème de Gauss.