EPREUVE DE MATHEMATIQUES
CONCOURS ENSP DOUALA 2020

CONCOURS ENSPD Niveau 1
Epreuve de Mathématiques
Session 2020
Durée : 3h

Calculatrice non programmable autorisée. Encadrer tous les résultats

Exercice 1

I-) Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité P, l'information reçue d'une personne est transmise tel qu'elle a la personne suivante. Avec une probabilité 1-p, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On trouve P_n, la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte

1-) Donnez une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n

2-) En déduire la valeur de P_n en fonction de P et de n

3-) En déduire la valeur de $\lim_{n \to \infty} P_n$. Qu'en pensez-vous ?

II-) On répète une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est, on définit la variable aléatoire X par le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir le succès pour la première fois.

1-) Déterminer la loi de probabilité X

2-) Vérifier que $\lim_{n \to \infty} | \sum_{k=1}^{n} P(X = K) | = 1$

Exercice 2

On rappelle que :

Pour deux fonctions dérivables f et g, la dérivée $f^\circ g$ est donnee par : $(f^\circ g)' = g' \times f^\circ g$

Pour une fonction continue f sur $\mathbb{R}$, la fonction $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en 0.

I-) On considère la fonction définie sur $]-1,1[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $G(x) = -F(x)$

1-) Calculer la dérivée de F

2-) Simplifier l'expression $F(\sin(x))$ pour tout x

3-) Simplifier l'expression $G(\cos(x))$ pour tout $x \in]0,\pi[$

4-) Que représente :

a-) F pour la fonction sin ?

b-) G pour la fonction cos ?

II-) Dans toute la suite de l'exercice, la fonction F ci-dessous sera notée *arcsin* et pour la fonction G *arccos*.

1-) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$

2-) On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} arccos\sqrt{t}\,dt$$

a-) Montrer que f peut s'écrire sous la forme : $G(sin^2(x)) + H(cos^2(x))$ ou G et H sont des fonctions définies par intégrale à déterminer.

b-) Justifier pourquoi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer clairement que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 2sinxconx|\arcsin(|sinx|) - arccos(|cosx|)|$

c-) Montrer que f est π −périodique et paire

d-) Simplifier $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $arccosx + arcsinx = \frac{\pi}{2}$

e-) Justifier clairement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4}$

f-) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et conclure.

Exercice 3

1-) Un nombre à deux chiffres est quatre fois la somme de ses chiffres, et le carré de cette somme est 2,25 le nombre lui-même. Trouvez ce nombre.

2-) La somme de trois termes positifs d'une progression arithmétique est 21. Si on additionne à terme, les chiffres 2,3 et 9 respectivement, alors, les nouveaux numéros obtenus forment une progression géométrique. Trouvez ces chiffres.

3-) Résoudre l'équation : $log(2^x + x^2 - 64) = x(1 - log5)$

Exercice 4

1-) Soient $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$

Déterminer le produit AB.

2-) Calculer le déterminant de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}$

3-) Soit une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$f(x, y, z) = (x_1 + x_2 - x_3; x_1 - 2x_2 + 3x_3)$ avec $x = x_1$; $y = x_2$ et $z = x_3$

et soient $B = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (f_1, f_2)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Déterminer la matrice de l'application f dans les bases B et B'