الجمهوريـــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــالي و البحـــــث العلـــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
كلية الرياضيات و الاعلام الالي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Cours et exercices corrigés d'Analyse 2

Première année Licence MI
Mathématiques et Informatique

Par :

Dr BOUHARIS Epouse OUDJDI DAMERDJI Amel

U.S.T.O – M.B

Année universitaire 2020-2021

Table des matières

Avant propos

Ce polycopié est un support pédagogique, destiné aux étudiants de la première année Licence LMD, domaine : Mathématiques et Informatique MI et conforme au programme officiel. C'est un cours illustrant les outils de base concernant le calcul intégral et la résolution des équations différentielles d'ordre 1 et 2.

Dans ce cours on commence par expliquer les notions dans le cas général, puis on illustre le tout par des exemples clairs, des exercices avec corrigés détaillés et quelques exercices sans solutions à la fin de chaque chapitre.

Ce polycopié décrit le programme de la matière Analyse 2 enseignée au deuxième semestre, aux étudiants de la première année MI, il concerne les concepts de base du calcul intégral, qu'on trouve non seulement en mathématiques mais également dans d'autres disciplines tel que la physique, la chimie, la biologie, ... etc. Il est composé de trois chapitres, le premier étant une introduction aux intégrales indéfinies et leurs propriétés, ainsi que les méthodes et techniques de calcul de primitives ; qui sont indispensables dans tout calcul intégral. Dans le deuxième chapitre, on passe à l'étude des intégrales définies à savoir l'intégrale de Riemann, tout en passant par les sommes de Darboux, sommes de Riemann et leurs propriétés. Enfin, dans le troisième chapitre, on introduit les équations différentielles ainsi que leurs méthodes de résolution, sachant qu'elles régissent différents phénomènes, on introduit d'abord celles du premier ordre, linéaires avec et sans second membre puis deux cas particuliers du cas non linéaires à savoir les équations de Bernoulli et les équations de Riccati et on passe enfin à la résolution des équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients constants.

CHAPITRE 1

Intégrales indéfinies

Introduction

Dans ce chapitre, notre objectif est de de donner à l'étudiant les concepts de base dans le calcul intégral où on présente les différentes techniques d'intégration qui lui seront utiles dans toute la suite du programme de ce semestre sachant les intégrales définies et la résolution des équations différentielles ou dans n'importe quelle discipline faisant intervenir le calcul intégral.

1.1 Intégrales indéfinies

Définition 1.1.1 .

Soit f une fonction d'un intervalle fermé $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit F une fonction dérivable sur $[a,b]$. F est dite primitive de f sur $[a,b]$ si

$$\forall x \in [a,b], \; F'(x) = f(x).$$

Proposition 1.1.2 .

Si F et G sont deux primitives de f sur $[a,b]$, alors

$$F - G = c \; , c \in \mathbb{R}.$$

Preuve :
En effet, car $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0, \forall x \in [a,b]$ alors $F - G$ est une fonction constante sur $[a,b]$. □

Exemple 1.1.3 .

Les fonctions F et G définies sur $[1,2]$ par $F(x) = \ln x$ et $G(x) = \ln x + \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sont deux primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,2]$.

Définition 1.1.4 .

L'ensemble de toutes les primitives de la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est appelé intégrale indéfinie de f, noté $\int f(x)\,dx$, alors si F est une primitive de f sur $[a,b]$, on a

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \; , c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.1.5 .

$\forall x \in [1,2] : \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \; , c \in \mathbb{R}.$

Remarque : Une fonction f admettant une primitive sur $[a,b]$, n'est pas forcément continue sur $[a,b]$.

Exemple 1.1.6 .

Soit la fonction f *définie par*

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & si\ x\in\left]0,1\right] \\ 0\ , & si\ x=0 \end{cases}$$

f *admet comme primitive sur* $[0,1]$ *la fonction* F *définie par*

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & si\ x\in\left]0,1\right] \\ 0\ , & si\ x=0 \end{cases}\ ,\ car\ F'(x)=f(x)\,,\forall x\in[0,1]\,.$$

or f *est discontinue en* $x=0$ *donc discontinue sur* $[0,1]$.

Propriétés 1 .

Si f *et* g *sont deux fonctions admettant des primitives sur* $[a,b]$, *alors* $f+g$ *et* αf *où* $\alpha\in\mathbb{R}$ *admettent des primitives aussi et on a*

1. $\int(f+g)(x)\,dx=\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx.$
2. $\int(\alpha f)(x)\,dx=\int\alpha f(x)\,dx=\alpha\int f(x)\,dx.$
3. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)\,.$
4. $\int f'(x)\,dx=f(x)+c\ ,\ c\in\mathbb{R}.$

1.1.1 Primitives usuelles

Fonction f	**Primitive de** f **:** $\int f(x)\,dx$
$\alpha\ ;\ \ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x + c$
$x^{\alpha}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}\ ;\ x \in \mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{g'(x)}{g(x)}\ ;\ g(x) \neq 0$	$\ln\lvert g(x)\rvert + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
chx	$shx + c$
shx	$chx + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}\ x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{1-x^2}\ ; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ; \forall x \in \left]-1, 1\right[$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arg shx + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$	$\arg chx + c$

où $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Méthodes de calcul des primitives

1.2.1 Intégration par parties - IPP -

Théorème 1.2.1 *Soient* u *et* v *deux fonctions dérivables de classe* C^1 *sur* $[a, b]$; *alors :*

$$\int u'(x)\, v(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u(x)\, v'(x)\, dx$$

Preuve :
En effet

$$u(x)\,v(x) = \int [u(x)\,v(x)]'\,dx = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx.$$

□

Remarque :

1. Dans certains exemples, il faut appliquer cette méthode plusieurs fois pour avoir le résultat.
2. On peut écrire la formule de l'intégration par parties en utilisant les différentielles de fonctions comme suit :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

telle que $df = f'(x)\,dx$.

Exemples 1.2.2 .

1. $I_1 = \int xe^x dx$

IPP : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où $I_1 = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$

2. $I_2 = \int \arctan x dx$

IPP : $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{cases}$

d'où $I_2 = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$

3. $I_3 = \int (\ln x)^2 dx$

IPP 1 : $\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\frac{\ln x}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

d'où $I_3 = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2J$

IPP 2 : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

d'où $J = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$

donc $I_3 = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + c',\quad c' \in \mathbb{R}.$

4. $I_4 = \int e^x \cos x dx$

IPP 1 : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

d'où $I_4 = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - J$

IPP 2 : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

d'où $J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I_4 + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$

donc $I_4 = e^x \sin x + e^x \cos x - I_4 - c \Leftrightarrow I_4 = \frac{e^x}{2}[\sin x + \cos x] + c'\ ,\ c' \in \mathbb{R}.$

Remarque

Dans certaines primitives, il faudra appliquer l'intégration par parties plusieurs fois pour avoir le résultat comme c'est le cas pour la primitive $I = \int P(x)\, e^x dx$, avec P un polynôme de degré n, où il faudra intégrer par parties n fois.

Exemples 1.2.3 ***Exemple 1.2.4*** $I = \int (x^2-1)\, e^x dx$

Exemple 1.2.5 *IPP 1 :* $\begin{cases} u = x^2-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où $I = (x^2-1)\, e^x - 2\int xe^x dx$

IPP 2 : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

Donc $I = (x^2-1)\, e^x - 2e^x(x-1) + c'\ ,\ c' \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Changement de variables - CV -

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction dérivable de classe C^1 sur $[a,b]$, telle que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ alors on a

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Il suffit de faire le changement de variables

$$x = \varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad dx = \varphi'(t)\, dt.$$

Exemples 1.2.6

1. $I_1 = \int \cos x . e^{\sin x} dx$
   CV : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, *d'où*
   $I_1 = \int e^t dt = e^t + c,\ c \in \mathbb{R}$, *alors* $I_1 = e^{\sin x} + c,\ c \in \mathbb{R}$.
2. $I_2 = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$
   CV : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$, *d'où*
   $I_2 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c,\ c \in \mathbb{R}$, *alors* $I_2 = \arctan(e^x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.
3. $I_3 = \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
   CV : $t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, *d'où*
   $I_3 = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + c,\ c \in \mathbb{R}$ *alors* $I_3 = \frac{1}{4}(\arcsin x)^4 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

1.2.3 Intégration de certaines expressions contenant le trinôme ax^2+bx+c

Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Etape 1 : On transforme le dénominateur en le mettant sous la forme canonique i.e, la somme ou la différence de deux carrés

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right], \tag{1.1}$$

On pose $\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm M^2$ et on remarque que le signe qu'on aura dépendra du signe du discriminant du trinôme $\Delta = b^2 - 4ac$.

En effet ,

$$ax^2+bx+c = \begin{cases} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - M^2\right] & \text{si } \Delta > 0 \\ \\ a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + M^2\right] & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

et la primitive I_1 prendra la forme suivante

$$I_1 = \int \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm M^2\right]} = \frac{1}{aM^2}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2ax+b}{2aM}\right)^2 \pm 1\right]}$$

<u>Etape 2</u> : On fait le changement de variables suivant :

$$t = \frac{2ax+b}{2aM} \Rightarrow dt = \frac{dx}{M} \Leftrightarrow dx = Mdt$$

ensuite on remplace dans I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{aM}\int \frac{dt}{t^2 \pm 1}$$

d'où :

<u>1^{er} Cas</u> : Si $I_1 = \frac{1}{aM}\int \frac{dt}{t^2+1}$ alors

$$I_1 = \frac{1}{aM}\arctan t + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$I_1 = \frac{1}{aM}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2aM}\right) + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

<u>$2^{ème}$ Cas</u> : Si $I_1 = \frac{1}{aM}\int \frac{dt}{t^2-1}$ alors

$$I_1 = \frac{1}{2aM}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$I_1 = \frac{1}{aM}\ln\left|\frac{2ax+b-2aM}{2ax+b+2aM}\right| + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.2.7 $I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

On décompose le trinôme x^2+2x+5

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2 - 1 + 5 = (x+1)^2 + 4,$$

d'où

$$I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1},$$

puis on fait le changement de variables

$$CV : t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dx \Leftrightarrow dx = 2dt,$$

et on remplace dans I

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\arctan t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Calcul de $I_2 = \int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx$

Etape 1 : On dérive le dénominateur $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$.
Etape 2 : On écrit le numérateur en fonction de la dérivée du dénominateur

$$\alpha x + \beta = \alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2a}\left(2ax + \frac{2a\beta}{\alpha} + b - b\right)$$

d'où

$$\alpha x + \beta = \frac{\alpha}{2a}\left[(2ax+b) + \frac{2a\beta}{\alpha} - b\right]$$

puis on remplace dans I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2a\beta}{\alpha}-b\right)}{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \text{ par les propriétés (1)} \end{aligned}$$

alors

$$I_2 = \frac{\alpha}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right)I_1$$

où I_1 est la primitive qu'on a calculée précédemment.

Exemple 1.2.8 $I = \int \frac{(3x-1)}{x^2-x+1}dx$

On dérive le dénominateur $(x^2-x+1)' = 2x-1$

$$3x-1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x - \frac{2}{3} - 1 + 1\right) = \frac{3}{2}\left[(2x-1) + \frac{1}{3}\right]$$

puis on remplace dans I

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-1)+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

donc

$$I = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2}J$$

où

$$J=\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

et là on décompose le trinôme x^2-x+1

$$x^2-x+1=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\right]$$
$$x^2-x+1=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

puis on remplace dans J

$$J=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}$$

et on fait le changement de variables

$$CV:t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Rightarrow dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx\Leftrightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt,$$

puis on remplace dans J

$$J=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

donc

$$J=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Calcul de $I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

On transforme le trinôme ax^2+bx+c en le mettant sous la forme canonique comme pour le modèle de la primitive I_1, puis on fait le même changement de variables,

$$\text{CV}:t=\frac{2ax+b}{2aM}\Rightarrow dt=\frac{dx}{M}\Leftrightarrow dx=Mdt$$

pour obtenir l'une des primitives suivantes

$$\begin{cases} I_3=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm1}}, \text{ où } t^2-1>0 \text{ si } a>0\\ I_3=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ où } 1-t^2>0 \text{ si } a<0\end{cases}$$

d'où :

Cas 1 : Si $I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$, alors

$$I_3 = \arg sht + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : Si $I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$ et $t^2 - 1 > 0$, alors

$$I_3 = \arg cht + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Cas 3 : Si $I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$et $1 - t^2 > 0$, alors

$$I_3 = \arcsin t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.9 *Calculer la primitive* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
On a

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

d'où

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}}$$

$$CV : t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Leftrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

alors

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \arg sht + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

$$I = \arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Calcul de $I_4 = \int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Etape 1 : On dérive le trinôme $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.
Etape 2 : On écrit le numérateur en fonction de cette dérivée comme on l'avait fait pour la primitive I_2,

$$\alpha x + \beta = \frac{\alpha}{2a}\left[(2ax+b) + \frac{2a\beta}{\alpha} - b\right]$$

puis on remplace dans I_4

$$\begin{array}{rcl} I_4 & = & \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2a\beta}{\alpha}-b\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\ & = & \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ & = & \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right) I_3 \end{array}$$

pour la 1ère primitive , il suffit de faire le changement de variables

$t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (2ax + b)\, dx$ alors

$$\begin{aligned} \int \tfrac{(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \tfrac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + k,\ k \in \mathbb{R}. \\ &= \sqrt{ax^2 + bx + c} + k,\ k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donc

$$I_4 = \frac{\alpha}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(\beta - \frac{b\alpha}{2a}\right) I_3$$

où I_3 est la primitive calculée précédemment.

Exemple 1.2.10 *Calculer la primitive* $I = \int \frac{5x+3}{\sqrt{10+4x+x^2}} dx.$

On a

$$\left(10 + 4x + x^2\right)' = 2x + 4$$

$$\begin{aligned} 5x + 3 &= 5\left(x + \tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{5}{2}\left(2x + \tfrac{6}{5} + 4 - 4\right) \\ &= \tfrac{5}{2}\left[(2x + 4) - \tfrac{14}{5}\right] \end{aligned}$$

d'où

$$I = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4) - \frac{14}{5}}{\sqrt{10 + 4x + x^2}} dx = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)}{\sqrt{10 + 4x + x^2}} dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{10 + 4x + x^2}}$$

pour la 1ère primitive on fait le changement de variables

$$t = 10 + 4x + x^2 \Rightarrow dt = (2x + 4)\, dx$$

alors

$$\begin{aligned} \int \tfrac{(2x+4)}{2\sqrt{10+4x+x^2}} dx &= \int \tfrac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}, \\ &= \sqrt{10 + 4x + x^2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

et pour la 2ème primitive on décompose le trinôme $10 + 4x + x^2$

$$10 + 4x + x^2 = (x + 2)^2 + 6$$

puis on le remplace dans la primitive

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10 + 4x + x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1}}$$

CV : $t = \frac{x+2}{\sqrt{6}} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{6}} dx \Leftrightarrow dx = \sqrt{6} dt$ *alors*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10 + 4x + x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \arg sh t + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = 5\sqrt{10 + 4x + x^2} - 7 \arg sh\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + c,\ \textit{avec}\ c = c_1 + c_2.$$

1.2.4 Intégration des fractions rationnelles

Définition 1.2.11 *Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, la fonction f définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ s'appelle fonction ou fraction rationnelle, elle est définie en tout point x de $\mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$.*

Pour l'intégration des fonctions rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, on distingue deux cas

1er Cas :

Si $d^\circ P \geq d^\circ Q$ (où d° désigne le degré) alors on effectue une division Euclidienne suivant les puissances décroissantes de x alors

$$P(x) = Q(x).S(x) + R(x),$$

où $S(x)$ et $R(x)$ sont deux polynômes tels que $d^\circ R < d^\circ Q$, par conséquent

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

2ème Cas :

Si $d^\circ P < d^\circ Q$ alors on utilise la décomposition de $\frac{P}{Q}$ en éléments simples.

Décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples

On peut décomposer la fonction f en éléments simples suivant la forme du dénominateur $Q(x)$ après l'avoir factorisé, comme suit

- Si
$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$
où $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, .., n$ alors
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$
où A_i sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1, .., n$.
- Si
$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2}\ldots(x - a_n)^{m_n},$$
où $a_i \in \mathbb{R}$, $m_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = 1, .., n$ alors
$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\left[\frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_1^2}{(x-a_1)^2} + .. + \frac{A_1^{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}\right] + \left[\frac{A_2^1}{x-a_2} + \frac{A_2^2}{(x-a_2)^2} + .. + \frac{A_2^{m_2}}{(x-a_2)^{m_2}}\right] + \\ &\ldots + \left[\frac{A_n^1}{x-a_n} + \frac{A_n^2}{(x-a_n)^2} + .. + \frac{A_n^{m_n}}{(x-a_n)^{m_n}}\right].\end{aligned}$$
où A_i^j sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1, .., n$ et $j = 1, .., m_i$.
- Si
$$Q(x) = \left(x^2 + b_1x + c_1\right)\left(x^2 + b_2x + c_2\right)\ldots\left(x^2 + b_nx + c_n\right),$$
où $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $b_i^2 - 4c_i < 0, \forall i = 1, .., n$ alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2} + .. + \frac{A_nx+B_n}{x^2+b_nx+c_n}$$
où A_i, B_i sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1, .., n$.

- Si

$$Q(x) = \left(x^2 + b_1 x + c_1\right)^{m_1} \left(x^2 + b_2 x + c_2\right)^{m_2} \ldots \left(x^2 + b_n x + c_n\right)^{m_n}$$

où $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $b_i^2 - 4c_i < 0, m_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = 1,..,n$
alors :

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \left[\frac{A_1^1 x + B_1^1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_1^2 x + B_1^2}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + .. + \frac{A_1^{m_1} x + B_1^{m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}\right] \\ & + \left[\frac{A_2^1 x + B_2^1}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{A_2^2 x + B_2^2}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + .. + \frac{A_2^{m_2} x + B_2^{m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}}\right] + \\ & \ldots + \left[\frac{A_n^1 x + B_n^1}{x^2+b_nx+c_n} + \frac{A_n^2 x + B_n^2}{(x^2+b_nx+c_n)^2} + .. + \frac{A_n^{m_n} x + B_n^{m_n}}{(x^2+b_nx+c_n)^{m_n}}\right]. \end{aligned}$$

où A_i^j sont des constantes réelles à déterminer pour $i = 1,..,n$ et $j = 1,..,m_i$.

Remarque :

1. Les fractions du type $\frac{A}{(x-a)^l}$ et $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$ avec $l, s \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in \mathbb{R}$ et $p^2 - 4q < 0$, sont appelées éléments simples respectivement de première et seconde espèce.
2. Pour le calcul des constantes réelles, on utilise soit la méthode d'identification ou bien la méthode des limites.

Exemples 1.2.12 *Décomposer les fractions suivantes en éléments simples*

1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2}$.
Tout d'abord on factorise le dénominateur $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, *puis on décompose la fraction* f *en éléments simples*

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

où A *et* B *sont deux constantes réelles qu'on va déterminer en utilisant la méthode des limites.*
Pour calculer la constante A, *on multiplie* $f(x)$ *par* $(x-2)$

$$(x-2) f(x) = \frac{x+3}{x-1} = A + \frac{B(x-2)}{x-1}$$

puis en faisant tendre x *vers* 2, *on obtient*

$$A = 5$$

ensuite pour calculer la constante B, *on multiplie* $f(x)$ *par* $(x-1)$

$$(x-1) f(x) = \frac{x+3}{x-2} = \frac{A(x-1)}{x-2} + B$$

puis en faisant tendre x *vers* 1, *on obtient*

$$B = -4,$$

ainsi on a la décomposition

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{x-2} - \frac{4}{x-1}.$$

2. $f(x) = \frac{5-x}{(x^2-4x+4)(x+1)}$.
On remarque que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ *, alors on a*

$$f(x) = \frac{5-x}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}$$

où A, B *et* C *sont des constantes réelles qu'on va déterminer en utilisant la méthode d'identification, on a*

$$\frac{5-x}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{x^2(A+C) + x(-A+B-4C) - 2A + B + 4C}{(x-2)^2(x+1)}$$

d'où on récupère le système suivant

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 4C = -1 \\ -2A + B + 4C = 5 \end{cases} \tag{1.2}$$

puis on résoud ce système et on a

$$\begin{aligned} (1.2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -A = C \\ B - 3C = -1 \\ B + 6C = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{3} \\ B = 1 \\ C = \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi on a la décomposition

$$\frac{5-x}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{-2}{3(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{3(x+1)}.$$

3. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)}$.
On remarque que le polynôme $x^2 + x + 1$ *ne peut pas être factorisé car son discriminant* Δ *est négatif alors on a*

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

où A, B *et* C *sont des constantes réelles à déterminer.*
On a

$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{x^2(A+B) + x(A-B+C) + A - C}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

d'où par identification on récupère le système suivant

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B + C = 0 \\ A - C = 0 \end{cases}$$

puis on résoud ce système et on trouve

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases},$$

ainsi on a la décomposition

$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}.$$

4. $f(x) = \frac{4x^3-5}{(x^2-3x+5)(-x^2+x-2)}$.
On remarque que les polynômes (x^2-3x+5) *et* $(-x^2+x-2)$ *ne peuvent pas être factorisés car leurs discriminants sont négatifs alors on a la décomposition*

$$f(x) = \frac{4x^3-5}{(x^2-3x+5)(-x^2+x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2-3x+5} + \frac{Cx+D}{-x^2+x-2},$$

où A, B, C *et* D *sont des constantes réelles à déterminer (en exercice).*

5. $f(x) = \frac{2x^5-1}{(2x^2-x+1)(x^2+1)^2}$
On remarque que les polynômes $2x^2-x+1$ *ne peuvent pas être factorisés car leurs discriminants sont négatifs alors on a la décomposition*

$$f(x) = \frac{2x^5-1}{(2x^2-x+1)(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{2x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

où A, B, C, D, E *et* F *sont des constantes réelles à déterminer (en exercice). Dans les deux derniers exemples on a donné la décomposition en élément simples tout en laissant au lecteur à titre d'exercices le soin de continuer les calculs.*

Intégration

Pour l'intégration des fonctions rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, on a donc besoin d'intégrer les éléments simples de $1^{ère}$ et $2^{ème}$ espèce.

Intégration des éléments simples de $1^{ère}$ espèce $\frac{A}{(x-a)^l}$, $l \in \mathbb{N}^*$

- Si $l = 1$ alors $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Si $l > 1$ alors $\int \frac{A}{(x-a)^l} dx = \int A(x-a)^{-l} dx = \frac{A(x-a)^{-l+1}}{1-l} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Intégration des éléments simples de $2^{ème}$ espèce $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ avec $p^2-4q<0$ On décompose le polynôme x^2+px+q sous la forme de la somme de deux carrés car $p^2-4q<0$, et on a

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} \end{aligned}$$

on pose $\frac{p}{2} = -\alpha$ et $\frac{4q-p^2}{4} = \beta^2$, d'où

$$x^2 + px + q = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

puis on remplace

$$\begin{aligned}\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} &= \frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k} \\ &= \frac{Mx+N}{\beta^{2k}\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^k}\end{aligned}$$

et on fait le changement de variables suivant

$$t = \frac{x-\alpha}{\beta} \Leftrightarrow x = \beta t + \alpha \Rightarrow dx = \beta dt,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx &= \frac{1}{\beta^{2k-1}}\int \frac{M(\beta t+\alpha)+N}{[t^2+1]^k}dt \\ &= \frac{M}{\beta^{2k-2}}\int \frac{t}{[t^2+1]^k}dt + \frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}\int \frac{1}{[t^2+1]^k}dt\end{aligned}$$

par conséquent l'intégration des éléments simples de $2^{ème}$ espèce : $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ se ramène par le changement de variables à $x = \beta t + \alpha$ au calcul des deux primitives qu'on note par :

$$I_k = \int \frac{t}{[t^2+1]^k}dt \text{ et } J_k = \int \frac{1}{[t^2+1]^k}dt$$

Calcul de I_k :

- Si $k = 1$ alors $I_1 = \int \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Si $k > 1$ alors on fait un deuxième changement de variables $u^2 = t^2 + 1 \Rightarrow 2udu = 2tdt$ et on a

$$I_k = \int \frac{t}{[t^2+1]^k}dt = \int \frac{u}{u^{2k}}du = \int u^{1-2k}du = \frac{u^{2-2k}}{2-2k} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$I_k = \frac{1}{2(1-k)u^{2k-2}} + c = \frac{1}{2(1-k)(t^2+1)^{k-1}} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Calcul de J_k :

- Si $k = 1$ alors $J_1 = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

- Si $k > 1$ alors on fait une intégration par parties et on a

$$\begin{cases} u = \frac{1}{[t^2+1]^k} \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2kt\left[t^2+1\right]^{-k-1} dt \\ v = t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{t}{[t^2+1]^k} + 2k \int \frac{t^2+1-1}{[t^2+1]^{k+1}} dt \\ J_k &= \frac{t}{[t^2+1]^k} + 2k \left[\int \frac{1}{[t^2+1]^k} dt - \int \frac{1}{[t^2+1]^{k+1}} dt \right] \\ J_k &= \frac{t}{[t^2+1]^k} + 2kJ_k - 2kJ_{k+1} \end{aligned}$$

et on a la formule de récurrence suivante

$$J_{k+1} = \frac{1}{2k} \left[\frac{t}{[t^2+1]^k} + (2k-1) J_k \right], k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2. \tag{1.3}$$

Exemples 1.2.13 *Calculer les primitives suivantes en utilisant la décomposition en éléments simples :*

1. $I_1 = \int \frac{x^2}{x^3-1} dx$

   Tout d'abord on remarque que le degré du numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur, alors on factorise le dénominateur en remarquant que $x_0 = 1$ est une racine du polynôme $x^3 - 1$, alors on effectue la division Euclidienne du polynôme $x^3 - 1$ par le polynôme $x - 1$ ou on utilise la méthode d'identification, ou bien en remarquant qu'il s'agit de l'identité remarquable

   $$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

   d'où

   $$I_1 = \int \frac{x^2}{x^3-1} dx = \int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$$

   on a alors la décomposition en éléments simples

   $$I_1 = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \right] dx$$

   où A, B et C sont des constantes réelles à déterminer, on a

   $$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

   ici on va utiliser l'exemple précédant où on a calculé la décomposition en éléments simples de cette fraction, on a alors

   $$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) \right] + c,\ c \in \mathbb{R}, \\ &= \frac{1}{3} \ln\left|x^3-1\right| + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $I_2 = \int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2} dx$

On a la décomposition en éléments simples suivante

$$I_2 = \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+4\right)^2} \right] dx$$

où A, B, C, D *et* E *sont des constantes réelles à déterminer, on a*

$$\frac{x^3}{(x+1)\left(x^2+4\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+4\right)^2}$$

alors en développant le second terme puis par identification on récupère le système suivant :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 1 \\ 8A + 4B + C + D = 0 \\ 4B + 4C + D + E = 0 \\ 16A + 4C + E = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

ensuite on résoud ce système et on trouve

$$A = \frac{-1}{25}, B = \frac{1}{25}, C = \frac{24}{25}, D = \frac{-4}{5}, E = \frac{-16}{5}$$

d'où

$$I_2 = \frac{-1}{25} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{25} \int \frac{x+24}{x^2+4} dx - \frac{4}{5} \int \frac{x+4}{\left(x^2+4\right)^2} dx$$

et là on intègre chaque primitive à part :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+24}{x^2+4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + 24 \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(x^2+4\right) + 12 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(x^2+4\right) + 12 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c_1,\ \ c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{\left(x^2+4\right)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2} dx + 4 \int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} K + 4L \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c_2,\ \ c_2 \in \mathbb{R}. \\ &= -\frac{1}{x^2+4} + c_2,\ \ c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

et

$$L=\int\frac{1}{\left(x^{2}+4\right)^{2}}dx=\frac{1}{16}\int\frac{1}{\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{2}+1\right)^{2}}dx$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\left[t^{2}+1\right]^{2}}dt=\frac{1}{8}J_{2},\ c_{2}\in\mathbb{R},\ \textit{avec le CV : }t=\frac{x}{2}$$

or d'après la formule (1.3) *on a*

$$J_{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^{2}+1}+J_{1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^{2}+1}+\arctan t\right]+c_{3},\ c_{3}\in\mathbb{R},$$

d'où

$$L=\frac{1}{16}\left[\frac{t}{t^{2}+1}+\arctan t\right]+c_{3},\ c_{3}\in\mathbb{R},$$

donc

$$L=\frac{1}{16}\left[\frac{2x}{x^{2}+4}+\arctan\frac{x}{2}\right]+c_{3},\ c_{3}\in\mathbb{R},$$

par conséquent,

$$\int\frac{x+4}{\left(x^{2}+4\right)^{2}}dx=-\frac{1}{2\left(x^{2}+4\right)}+\frac{1}{4}\left[\frac{2x}{x^{2}+4}+\arctan\frac{x}{2}\right]+c_{3},\ c_{3}\in\mathbb{R},$$

et enfin on a

$$I_{2}=\frac{-1}{25}\ln|x+1|+\frac{1}{50}\ln\left(x^{2}+4\right)+\frac{7}{25}\arctan\frac{x}{2}+\frac{2\left(1-x\right)}{5\left(x^{2}+4\right)}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

1.2.5 Intégration des fonctions irrationnelles

Primitives du type $\int R\left(x,x^{\frac{k}{l}},x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$

Pour calculer ce type de primitives, on calcule d'abord α le dénominateur commun des fractions $\frac{k}{l},\frac{m}{n},....,\frac{r}{s}$, c'est à dire : $\alpha=PPCM\left(l,n,...,s\right)$, puis on fait le changement de variables

$$x=t^{\alpha}\Rightarrow dx=\alpha t^{\alpha-1}dt$$

Exemple 1.2.14 *Calculer la primitive :* $I=\int\frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx$

On a $\alpha=PPCM\left(2,4\right)=4$

$$CV:\ x=t^{4}\Rightarrow dx=4t^{3}dt$$

d'où

$$I=4\int\frac{t^{5}}{t^{3}+1}dt$$

qui est une fraction rationnelle telle que le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur alors on fait une division Euclidienne et on a

$$I=4\int\left[t^{2}-\frac{t^{2}}{t^{3}+1}\right]dt=\frac{4}{3}\left[t^{3}-\ln\left|t^{3}+1\right|\right]+c,\ c\in\mathbb{R},$$
$$=\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}}-\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right]+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Primitives du type $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$

Pour calculer ce type de primitives, on calcule d'abord α le dénominateur commun des fractions $\frac{k}{l}, \frac{m}{n}, .., \frac{r}{s}$, c'est à dire :

$\alpha = PPCM\,(l, n, ..., s)$, puis on fait le changement de variables

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\alpha}$$

Exemple 1.2.15 *Calculer la primitive* $I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = \int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x} dx$

On a $\alpha = 2$

$$CV : x + 4 = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x} dx = 2\int \frac{(t^2-4)+4}{t^2-4} dt = 2\left[\int dt + 4\int \frac{dt}{t^2-4}\right] \\ &= 2\left[t + \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right] + c,\ c \in \mathbb{R}, \\ &= 2\left[\sqrt{x+4} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right] + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primitives du type $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,\ a \neq 0.$

Pour ce type de primitives on peut utiliser les Substitutions d'Euler, où on distingue deux cas

1^{er} Cas

Si $a > 0$ alors on fait un changement de variables en posant

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \tag{1.5}$$

en faisant un choix quelconque du signe avant la racine. Supposons qu'on choisit le signe $+$ pour la suite des calculs, alors on élève les deux membres de l'équation (1.5) au carré, d'où

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + t^2 + 2\sqrt{a}xt$$

ce qui est équivalent à

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}.$$

Exemple 1.2.16 $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} dx$

On a $a = 1 > 0$ alors on pose

$$\sqrt{x^2+9} = x + t$$

d'où

$$x^2 + 9 = x^2 + 2xt + t^2 \Leftrightarrow x = \frac{9 - t^2}{2t}$$

alors

$$dx = \frac{(-2t)(2t) - (9-t^2)\,2}{4t^2}$$
$$= \frac{-2t^2-18}{4t^2}dt \;=\; \frac{-t^2-9}{2t^2}dt$$

et

$$\sqrt{x^2+9} = \frac{9+t^2}{2t}$$

on remplace le tout dans la primitive I et on obtient

$$I = -\frac{1}{4}\int \frac{(9-t^2)^2}{t^3}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{81-18t^2+t^4}{t^3}dt$$
$$= -\frac{1}{4}\left[81\int\frac{dt}{t^3} - 18\int\frac{dt}{t} + \int t dt\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{-81}{2t^2} - 18\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right] + c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

donc

$$I = -\frac{1}{4}\left[\frac{-81}{2\left(2x^2+9-2x\sqrt{x^2+9}\right)} - 18\ln\left|\sqrt{x^2+9}-x\right| + x^2 + \frac{9}{2} - x\sqrt{x^2+9}\right] + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

2ème Cas

Si $a<0$ alors le discriminant Δ du trinôme ax^2+bx+c est forcément positif, i.e, $\Delta>0$ donc le polynôme ax^2+bx+c admet deux racines réelles distinctes α et β, telles que

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \tag{1.6}$$

et dans ce cas, on fait un autre changement de variables où on pose

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t \tag{1.7}$$

ici on peut choisir l'une des deux racines trouvées soit α soit β, puis on élève les deux membres de l'équation (1.7) au carré, tout en remplaçant le trinôme par sa forme factorisée (1.6) d'où

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 t^2$$

ce qui est équivalent à

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)\,t^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

Remarque : Si le discriminant Δ du trinôme ax^2+bx+c est nul, alors le signe de a est forcément positif sinon la racine carrée du trinôme ne serait pas définie et donc le polynôme ax^2+bx+c admet une racine réelle double α et on a

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$$

alors

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|\,.$$

Exemple 1.2.17 $I = \int \sqrt{2x - x^2} dx$

$a = -1 < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 2x - x^2 = x(2 - x)$ *ici* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 2$

$\overset{CV}{\Rightarrow} \sqrt{2x - x^2} = xt \Leftrightarrow x(2 - x) = x^2 t^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{t^2+1}$

alors

$$dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt \text{ et } \sqrt{2x - x^2} = \frac{2t}{t^2+1},$$

d'où

$$I = -8 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt = -8 \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^3} dt$$
$$I = -8 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} + 8 \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$$
$$I = -8J_2 + 8J_3$$

où J_2 *et* J_3 *sont données par la formule* (1.3) *, on a*

$$J_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2} + 3J_2\right) = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}J_2$$

d'où

$$I = -8J_2 + 8J_3 = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2J_2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

donc

$$I = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - 2J_2 + c, c \in \mathbb{R}.$$
$$I = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{t^2+1} - \arctan t + c, c \in \mathbb{R}.$$

où $t = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$ *, par conséquent*

$$I = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{2}(x - 1) - \arctan \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Remarque : Il existe une troisième substitution d'Euler si $c > 0$ où on fait le changement de variables suivant

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \tag{1.8}$$

là aussi le signe avant la racine reste au choix, puis on met les deux membres de l'équation (1.8) au carré, d'où

$$ax^2 + bx + c = t^2x^2 + c + 2\sqrt{c}xt$$

ce qui est équivalent à

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}.$$

Exemple 1.2.18 $I = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$

$$\begin{aligned} c = 1 > 0 &\overset{CV}{\Rightarrow} \sqrt{x^2 - x + 1} = xt + 1 \\ &\Rightarrow x^2 - x + 1 = (xt+1)^2 = x^2t^2 + 2xt + 1 \\ &\Rightarrow x = \frac{2t+1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2\left(t^2+t+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}dt \end{aligned}$$

$$et \ \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2+t+1}{1-t^2}$$

d'où

$$I = \int \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\ln|2t+1| + c \ , c \in \mathbb{R}.$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|2t+1| + c \ , c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2-x+1}+x-1}{x}\right| + c \ , c \in \mathbb{R}.$$

1.2.6 Intégration des fonctions trigonométriques

Primitives du type $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Dans ce genre de primitives on distingue plusieurs cas
Primitives du type $\int R(\cos x) \sin x dx$
Ici on fait le changement de variables $t = \cos x$, d'où $dt = -\sin x dx$
Primitives du type $\int R(\sin x) \cos x dx$
Ici on fait le changement de variables $t = \sin x$, d'où $dt = \cos x dx$

Exemple 1.2.19 $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
CV : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \ dx$, *d'où*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} \\ &= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c \ , \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donc

$$I = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c \ , \ c \in \mathbb{R}.$$

Primitives du type $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$
Ici on fait le changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$, d'où :

$$x = 2\arctan t \text{ alors } dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

et on a:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}$$

car

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\tan^2\frac{x}{2}+1=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\Leftrightarrow\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1}$$

d'où

$$\sin x=\frac{2t}{t^2+1}$$

et

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

d'où

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exemple 1.2.20 $I=\int\frac{dx}{\sin x}$
CV : $t=\tan\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=2\arctan t\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ *et on a :* $\sin x=\frac{2t}{t^2+1}$ *d'où*

$$\begin{aligned}I&=2\int\frac{dt}{t}=2\ln|t|+c,c\in\mathbb{R}.\\&=2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c,c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primitives du type $\int R(\tan x)\,dx$

Si la fonction à intégrer ne dépend que de la tangente alors on fait le changement de variables $t=\tan x$, d'où $x=\arctan t$ et donc $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$.

Exemple 1.2.21 $I=\int tg^2x dx$

$$CV: t=\tan x\Leftrightarrow x=\arctan t\Rightarrow dx=\frac{1}{1+t^2}dt$$

alors

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t^2}{1+t^2}dt\\&=\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt\\&=\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt\\&=t-\arctan t+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

donc

$$I=\tan x-x+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Primitives du type $\int R\left(\sin^n x, \cos^k x\right) dx$

Si n et k sont deux entiers naturels pairs

Dans ce cas on effectue la linéarisation comme suit :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right),$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right).$$

En effet, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

Exemple 1.2.22 $I = \int \sin^4 x dx$

On a $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$, *alors*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int \left(1 - \cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \left(\cos 2x\right)^2\right] dx \\ &= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \int \left(\cos 2x\right)^2 dx\right] \end{aligned}$$

or $\left(\cos 2x\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4x\right)$, *donc*

$$\int \left(\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int \left(1 + \cos 4x\right) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$I = \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right] + c, c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent,

$$I = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Si n et k sont deux entiers relatifs pairs

Dans ce cas on fait le changement de variables $t = \tan x$, d'où $x = \arctan t$ et donc $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ et on a

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

et

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

Exemple 1.2.23 $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

CV : $t = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ *et on a* $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, *d'où*

$$\begin{aligned} I &= \int \left(1 + t^2\right) dt = t + \frac{t^3}{3} + c \\ &= \tan x + \frac{\left(\tan x\right)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primitives $\int \cos kx \cos nx dx, \int \sin kx \cos nx dx, \int \sin kx \sin nx dx$

Pour ce genre de primitives , on utilise les formules trigonométriques connues

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \cos a \sin b - \sin a \cos b$$

pour avoir les transformations suivantes

$$\begin{aligned}
\cos kx . \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right] \\
\sin kx . \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \sin(k-n)x\right] \\
\sin kx . \sin nx &= \frac{1}{2}\left[-\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.24 $I = \int \sin 5x . \sin 3x dx.$
On applique la formule

$$\sin 5x . \sin 3x = \frac{1}{2}\left[-\cos 8x + \cos 2x\right]$$

d'où

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \left[-\cos 8x + \cos 2x\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}\sin 8x + \sin 2x\right] + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1.2.7 Intégration de certaines fonctions irrationnelles à l'aide de transformations trigonométriques

On considère les primitives du type $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, avec $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, et $\Delta \neq 0$.

On commence par effectuer la décomposition canonique (1.1),

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

puis on fait le changement de variables $t = x + \frac{b}{2a}$, donc $dt = dx$ et de là on se ramène à l'une des trois forme suivantes :

- $\int R\left(t, \sqrt{n^2t^2 + k^2}\right) dt$ où on fait le changement de variables $t = \frac{k}{n}\tan z$.
- $\int R\left(t, \sqrt{n^2t^2 - k^2}\right) dt$, tel que $n^2t^2 - k^2 \geq 0$, où on fait le changement de variables $t = \frac{k}{n \sin z}$.
- $\int R\left(t, \sqrt{k^2 - n^2t^2}\right) dt$, tel que $k^2 - n^2t^2 \geq 0$, où on fait le changement de variables $t = \frac{k}{n}\sin z$.

Exemple 1.2.25 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(-x^2-2x)^3}}$

On a

$$-x^2 - 2x = -\left[(x+1)^2 - 1\right] = 1 - (x+1)^2$$

on fait le changement de variables $t = x + 1,$ *donc* $dt = dx$ *et de là on se ramène à*

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$$

on fait alors un deuxième changement de variables $t = \sin z \Rightarrow dt = \cos z dz,$ *d'où*

$$I = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \tan z + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

or

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

donc

$$I = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + c$$

par conséquent

$$I = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

1.3 Enoncés des exercices

Exercice 1
Calculer les primitives suivantes

1. $I = \int (x + \sqrt{x})\, dx,$
2. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}},$
3. $I = \int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}) dx.$

Exercice 2
Calculer les primitives suivantes

1. $I = \int x \sin x dx,$
2. $I = \int \arcsin x dx,$
3. $I = \int x \arctan x dx,$
4. $I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Exercice 3
Calculer les primitives suivantes

1. $I = \int \frac{dx}{(\sin 3x)^2},$
2. $I = \int \frac{dx}{5-2x},$
3. $I = \int (\sin x)^2 \cos x dx,$
4. $I = \int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} dx,$
5. $I = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx,$
6. $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx,$
7. $I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx,$
8. $I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx,$
9. $I = \int \frac{1}{1+2x^2} dx,$
10. $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx,$
11. $I = \int \frac{1}{4-9x^2} dx,$
12. $I = \int \frac{1}{2(\sin x)^2 + 3(\cos x)^2} dx.$

Exercice 4
Calculer les primitives du type $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

1. $I = \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx,$
2. $I = \int \frac{1}{x^2+3x+1} dx,$
3. $I = \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx,$
4. $I = \int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} dx.$

Exercice 5
Calculer les primitives du type $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

1. $I=\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}dx,$
2. $I=\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx,$
3. $I=\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx,$
4. $I=\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx.$

Exercice 6

Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

1. $I=\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx,$
2. $I=\int \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2}dx,$
3. $I=\int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-3x^2+7x-5}dx,$
4. $I=\int \frac{x^4+1}{(x^3+5x^2+7x+3)(x^2+1)}dx,$
5. $I=\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx$.

Exercice 7

Calculer les primitives des fonctions irrationnelles suivantes

1. $I=\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx,$
2. $I=\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}dx,$
3. $I=\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x^2}dx,$
4. $I=\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx.$

Exercice 8

Calculer les primitives du type $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

1. $I=\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}dx,$
2. $I=\int \frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}dx,$
3. $I=\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

Exercice 9

Calculer les primitives des fonctions trigonométriques suivantes

1. $I=\int \frac{1}{5-3\cos x}dx,$
2. $I=\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx,$
3. $I=\int (\cos x)^2\,dx,$
4. $I=\int (tgx)^4\,dx.$

1.4 Corrigés des exercices

Exercice 1

1. $I = \int (x + \sqrt{x})\, dx = \int \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c, c \in \mathbb{R}$.
2. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c, c \in \mathbb{R}$.
3. $I = \int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}) dx = \int (3x^{\frac{-1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{4}) dx = 6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. $I = \int x \sin x dx$

   IPP : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

   d'où $I = \sin x - x\cos x + c, c \in \mathbb{R}$.
2. $I = \int \arcsin x dx$

   IPP : $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = x \end{cases}$

   d'où $I = x \arcsin x - \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, c \in \mathbb{R}$.
3. $I = \int x \arctan x dx$

   IPP : $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x^2+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

   d'où
   $$I = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$
   $$I = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \arctan x - \frac{x}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$
4. $I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

   IPP : $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

   d'où
   $$I = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

1. $I = \int \frac{dx}{(\sin 3x)^2}$
   $$CV : t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$$
   d'où
   $$I = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3} \cot(t) + c = -\frac{1}{3} \cot(3x) + c, c \in \mathbb{R}.$$
2. $I = \int \frac{dx}{5-2x}$
   $$CV : t = 5 - 2x \Rightarrow dt = -2dx$$
   d'où
   $$I = \frac{-1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + c = -\frac{1}{2} \ln|5-2x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I = \int (\sin x)^2 \cos x dx$

$$CV : t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \Rightarrow I = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(\sin x)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. $I = \int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} dx$

$$CV : t = 1 + \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx$$

d'où

$$I = \int \frac{-1}{2t^2} dt = \frac{1}{t} + c = \frac{1}{\cos x} + c = \frac{1}{2(1+\cos 2x)} + c, c \in \mathbb{R}.$$

5. $I = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

$$CV : t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$\Rightarrow I = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(\arctan x)^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

6. $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx$

$$CV : t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

d'où

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |\arcsin x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

7. $I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

$$CV : t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$
$$\Rightarrow I = \int \cos t.dt = \sin t + c = \sin(\ln x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

8. $I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

$$CV : t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

d'où

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin(e^x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

9. $I = \int \frac{1}{1+2x^2} dx = \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2} dx$

$$CV : t = \sqrt{2}x \Rightarrow dt = \sqrt{2} dx$$

d'où

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}x\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

10. $I=\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}x\right)^2}}dx$

$$CV: t=\sqrt{3}x \Rightarrow dt=\sqrt{3}dx$$

d'où

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin t+c=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{3}x\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

11. $I=\int \frac{1}{4-9x^2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx$

$$CV: t=\frac{3}{2}x \Rightarrow dt=\frac{3}{2}dx$$

d'où

$$I=\frac{1}{6}\int \frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

donc

$$I=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{1+\frac{3}{2}x}{1-\frac{3}{2}x}\right|+c=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

12. $I=\int \frac{1}{2(\sin x)^2+3(\cos x)^2}dx=\int \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\frac{1}{2(\tan x)^2+3}dx$

$$CV: t=\tan x \Rightarrow dt=\frac{1}{(\cos x)^2}dx$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{1}{2t^2+3}dt=\frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2+1}dt$$

$$CV: u=\sqrt{\frac{2}{3}}t \Rightarrow du=\sqrt{\frac{2}{3}}dt$$

d'où

$$I=\frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan u+c=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tan x\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4

1.

$$I=\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

2.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^2+3x+1}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}+1}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}dx \\ &= \frac{4}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1}dx \end{aligned}$$

et en utilisant le changement de variables

$$t = \frac{2x+3}{\sqrt{5}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{5}}dx$$

on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{-2}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{1-t^2}dx = \frac{-1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-1}{1+t}\right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + c,\ \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. $I = \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$
On commence par dériver le dénominateur : $(5x^2-3x+2)' = 10x-3$ ensuite on écrit le numérateur en fonction de cette dérivée

$$3x-2 = 3\left(x-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{10}\left(10x - \frac{20}{3} - 3 + 3\right) = \frac{3}{10}\left[(10x-3) - \frac{11}{3}\right]$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx = \int \frac{\frac{3}{10}\left[(10x-3)-\frac{11}{3}\right]}{5x^2-3x+2}dx \\ &= \frac{3}{10}\left[\int \frac{(10x-3)}{5x^2-3x+2}dx - \frac{11}{3}\int \frac{1}{5x^2-3x+2}dx\right] \\ &= \frac{3}{10}\ln\left(5x^2-3x+2\right) - \frac{11}{10}\int \frac{1}{5x^2-3x+2}dx \end{aligned}$$

et on a

$$\int \frac{1}{5x^2-3x+2}dx = \int \frac{1}{5\left[\left(x-\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{31}{100}\right]}dx$$

$$= \frac{20}{31}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right)^2 + 1\right]}dx = \frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right) + c$$

donc

$$I = \frac{3}{10}\ln\left(5x^2-3x+2\right) - \frac{11}{5\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. $I = \int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} dx$
En effectuant la division Euclidienne, on obtient

$$6x^4 - 5x^3 + 4x^2 = \left(2x^2 - x + 1\right)\left(3x^2 - x\right) + x$$

d'où

$$\frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} = 3x^2 - x + \frac{x}{2x^2 - x + 1}$$

et on a alors

$$I = \int \left[\left(3x^2 - x\right) + \frac{x}{2x^2 - x + 1}\right] dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{x}{2x^2 - x + 1} dx$$

$$\left(2x^2 - x + 1\right)' = 4x - 1$$

et

$$x = \frac{1}{4}\left[(4x-1)+1\right],$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{2x^2 - x + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{(4x-1)+1}{2x^2 - x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln\left(2x^2 - x + 1\right) + \int \frac{1}{2x^2 - x + 1} dx\right] \end{aligned}$$

et on a

$$2x^2 - x + 1 = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]$$

Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2 - x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} dx \\ &= \frac{8}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donc

$$I = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\ln\left(2x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c.$$

Exercice 5

1. $I=\int\frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}dx$

$$2-3x-4x^2=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=-4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right]$$

d'où

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]}}dx=\frac{4}{\sqrt{41}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right)^2}}dx$$
$$I=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

2. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}=\arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

3. $I=\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$
On commence par dériver

$$\left(4x^2+4x+3\right)'=8x+4$$

ensuite on écrit le numérateur en fonction de cette dérivée

$$x+3=\frac{1}{8}\left[(8x+4)+20\right],$$

d'où

$$I=\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{(8x+4)+20}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$
$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{2}\int\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$

et on a

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]}}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}}dx\\ &= \frac{1}{2}\arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

d'où

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\arg sh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

4. $I=\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$

$$\left(3+4x-4x^2\right)'=4-8x$$

et on a

$$x+3=-\frac{1}{8}\left[(-8x+4)-28\right]$$

d'où

$$I=-\frac{1}{8}\int \frac{(-8x+4)-28}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx=-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1\right]}}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\\ &= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{2}+c\end{aligned}$$

d'où

$$I=-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\left(\frac{2x-1}{2}\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 6 :

1. $I=\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx$

   On décompose la fraction en éléments simples

$$I=\int\left[\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-2)}\right]dx,$$

puis on calcule les constantes A, B et C d'où

$$I=\int \frac{A\,(x-1)\,(x-2)+B\,(x-2)+C\,(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x-2)}dx$$

$$I=\int \frac{x^2\,(A+C)+x\,(-3A+B-2C)+2A-2B+C}{(x-1)^2\,(x-2)}dx$$

donc par identification on a

$$\begin{cases} A+C=0\\ -3A+B-2C=0\\ 2A-2B+C=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C\\ B+C=0\\ -2B-C=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{-1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)} \right] dx \\ &= -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donc

$$I = \frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I = \int \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2} dx$
En effectuant la division Euclidienne, on a

$$x^4 = \left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right)(x-2) + \left(5x^2 - 4\right)$$

d'où

$$I = \int \left[x - 2 + \frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2} \right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2} dx$$

On factorise ensuite le dénominateur $x^3 + 2x^2 - x - 2$, soit en remarquant qu'il admet comme racine $x = 1$, ensuite en utilisant sa division Euclidienne par $(x-1)$, soit la méthode de l'identification, soit en factorisant directement comme c'est le cas ici

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= x^2(x+2) - (x+2) \\ &= (x+2)\left(x^2 - 1\right) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

et on décompose en éléments simples la fraction d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2} dx &= \int \frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx \\ &= \int \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)} \right] dx, \end{aligned}$$

puis on calcule les constantes A, B et C par la méthode d'identification où on récupère le système d'équations suivant

$$\begin{cases} -2A + C = 5 \\ 3A + B = 0 \\ 8A - C = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -3A \\ -2A + C = 5 \\ 6A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{-1}{2} \\ C = \frac{16}{3} \end{cases}$$

d'où

$$\int \frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{(x-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{16}{3} \int \frac{dx}{(x+2)}$$

alors
$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + c$$
donc
$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I = \int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-3x^2+7x-5}dx$
On remarque que $x = 1$ est une racine du polynôme $x^3 + 2x^2 - x - 2$, alors on effectue sa division Euclidienne par $(x-1)$ et on obtient la factorisation suivante
$$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x-1)\left(x^2 - 2x + 5\right)$$
puis on remarque que le discriminant Δ du trinôme $x^2 - 2x + 5$ est négatif alors on ne peut plus le factoriser et on le garde tel qu'il est
$$I = \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-2x+5)}dx$$
puis on calcule les constantes A, B et C par la méthode d'identification où on récupère le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A - B + C = -3 \\ 5A - C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -A + C = -1 \\ 5A - C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -A + C = -1 \\ 4A = -4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \\ C = -2 \end{cases},$$
d'où
$$I = \int \frac{-1}{(x-1)} + \frac{3x-2}{(x^2-2x+5)}dx = -\ln|x-1| + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx$$
$(x^2 - 2x + 5)' = 2x - 2$, et on a
$$3x - 2 = \frac{3}{2}\left[(2x-2) + 2 - \frac{4}{3}\right] = \frac{3}{2}\left[(2x-2) + \frac{2}{3}\right]$$
d'où
$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)+\frac{2}{3}}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right) + \int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$$
et
$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$
Donc
$$I = \ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. $I=\int \frac{x^4+1}{(x^3+5x^2+7x+3)(x^2+1)}dx$
On remarque que

$$x^3+5x^2+7x+3=(x+1)^2(x+3),$$

et donc on a

$$I=\int \frac{x^4+1}{(x+1)^2(x+3)(x^2+1)}dx=\int\left[\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+3)}+\frac{Dx+E}{x^2+1}\right]dx$$

puis on calcule les constantes A,B,C,D et E par la méthode d'identification où on récupère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A+C+D=1 \\ 4A+B+2C+5D+E=0 \\ 4A+3B+2C+7D+5E=0 \\ 4A+B+2C+3D+7E=0 \\ 3A+3B+C+3E=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-C-D \\ B-2C+D+E=-4 \\ 3B-2C+3D+5E=-4 \\ B-2C-D+7E=-4 \\ 3B-2C-3D+3E=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1-C-D \\ 2D-6E=0 \\ 6D+2E=-2 \\ B-2C-D+7E=-4 \\ 3B-2C-3D+3E=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-C-D \\ D=\frac{-3}{10} \\ E=\frac{-1}{10} \\ B-2C=\frac{-18}{5} \\ 3B-2C=\frac{-13}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{-3}{4},D=\frac{-3}{10},E=\frac{-1}{10},B=\frac{1}{2},C=\frac{41}{20}$$

d'où

$$I=\frac{-3}{4}\int\frac{dx}{(x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{41}{20}\int\frac{dx}{(x+3)}-\frac{1}{10}\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx$$

$$I=\frac{-3}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{41}{20}\ln|x+3|-\frac{1}{10}\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+c,c\in\mathbb{R}.$$

donc

$$I=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x+3)^{41}}{(x+1)^{15}(x^2+1)^3}\right|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{10}\arctan x+c,c\in\mathbb{R}.$$

5. $I=\int\frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx=\int\frac{1}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}dx$
d'où

$$I=\int\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}\right]dx$$

puis on calcule les constantes A, B, C, D et E par la méthode d'identification où on récupère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3A-2B-2C+D=0 \\ 5A+3B+2C-2D+E=0 \\ -5A-2B-C+2D+F-E=0 \\ 3A+B-D-F=0 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=-1 \\ E=0 \\ F=-1 \end{cases}$$

d'où

$$I=\int\left[\frac{-1}{x}+\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\right]dx$$

$$I=-\ln|x|+\ln|x-1|-L-K$$

où

$$L=\int\frac{1}{x^2-x+1}dx \text{ et } K=\int\frac{1}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx$$

$$L=\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c, c\in\mathbb{R}$$

$$K=\int\frac{1}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx=\frac{16}{9}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}dx=\frac{8}{3\sqrt{3}}\int\frac{1}{\left[t^2+1\right]^2}dt=\frac{8}{3\sqrt{3}}J_2$$

où

$$J_{k+1}=\int\frac{1}{\left[t^2+1\right]^{k+1}}dt=\frac{1}{2k}\left[\frac{t}{\left[t^2+1\right]^k}+(2k-1)J_k\right]$$

alors

$$J_2=\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}+J_1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right]+c, c\in\mathbb{R}$$

donc

$$K=\frac{4}{3\sqrt{3}}\left[\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right],$$

et enfin, on a

$$I=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{2x-1}{3\left(x^2-x+1\right)}+c, c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 7

1. $I=\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx=\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{6x^{\frac{1}{4}}}dx$
   Soit $k=PPCM\,(2,3,4)=12$, et faisons le changement de variables

$$CV: x=t^{12}\Rightarrow dx=12t^{11}dt$$

d'où

$$I = 2\int \left(t^{26} - t^{12}\right) dx = \frac{2}{27}t^{27} - \frac{2}{13}t^{13} + c = \frac{2}{27}x^{\frac{27}{12}} - \frac{2}{13}x^{\frac{13}{12}} + c$$

donc

$$I = \frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}dx$

$$CV : \frac{1-x}{1+x} = t^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

d'où

$$I = \int \frac{-4t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}dt = \int \left[\frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}\right] dt$$

en utilisant la méthode d'identification, avec un calcul simple, on récupère les constantes

$$A = -1, B = -1, C = 0, D = 2,$$

et donc

$$I = \int \frac{-1}{(1-t)} - \frac{1}{1+t} + \frac{2}{1+t^2}dt = \ln|1-t| - \ln|1+t| + 2\arctan t + c, c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

On utilise le même changement de variables que pour la primitive précédante

$$CV : \frac{1-x}{1+x} = t^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

d'où

$$I = \int \frac{-4t^2}{\left(1+t\right)^2\left(1-t\right)^2}dt = \int \left[\frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{\left(1-t\right)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{\left(1+t\right)^2}\right] dt$$

en utilisant la méthode d'identification, avec un calcul simple, on récupère les constantes

$$\begin{cases} A = C = 1 \\ B = D = -1 \end{cases},$$

et donc

$$I = \left[\int \frac{1}{(1-t)} - \frac{1}{\left(1-t\right)^2} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{\left(1+t\right)^2}\right] dt$$

$$I = -\ln|1-t| + \ln|1+t| - \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{1+t} + c, c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$I=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{2t}{1-t^2}+c=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c,c\in\mathbb{R}.$$

4. $I=\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx$

$$CV:\frac{2+3x}{x-3}=t^2\Leftrightarrow x=\frac{2+3t^2}{t^2-3}\Rightarrow dx=\frac{-22t}{(t^2-3)^2}dt$$

d'où

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{-22t^2}{\left(t-\sqrt{3}\right)^2\left(t+\sqrt{3}\right)^2}dt\\&=\int\left[\frac{A}{\left(t-\sqrt{3}\right)}+\frac{B}{\left(t-\sqrt{3}\right)^2}+\frac{C}{t+\sqrt{3}}+\frac{D}{\left(t+\sqrt{3}\right)^2}\right]dt\end{aligned}$$

en utilisant la méthode d'identification, avec un calcul simple, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}A+C=0\\A\sqrt{3}+B-C\sqrt{3}+D=-22\\-3A-2\sqrt{3}B-3C+2\sqrt{3}D=0\\-3\sqrt{3}A+3B+3\sqrt{3}C+3D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-C\\B-2\sqrt{3}C+D=-22\\-2\sqrt{3}B+2\sqrt{3}D=0\\3B+6\sqrt{3}C+3D=0\end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases}A=-C\\B+D=-11\\B=D\\c=\frac{11}{2\sqrt{3}}\end{cases}$$

d'où on a les constantes

$$A=-\frac{11}{2\sqrt{3}},C=\frac{11}{2\sqrt{3}},B=D=\frac{-11}{2},$$

et donc

$$I=-\frac{11}{2\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\left(t-\sqrt{3}\right)}-\frac{11}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\sqrt{3}\right)^2}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t+\sqrt{3}}-\frac{11}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\sqrt{3}\right)^2}$$

d'où

$$I=-\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|t-\sqrt{3}\right|+\frac{11}{2\left(t-\sqrt{3}\right)}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{3}\right|+\frac{11}{2\left(t+\sqrt{3}\right)}+c,c\in\mathbb{R}$$

alors

$$I=\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}}\right|+\frac{11t}{t^2-3}+c,c\in\mathbb{R}$$

et enfin

$$I=\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right|+\sqrt{3x^2-7x-6}+c,c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 8

Dans cet exercice on va utiliser les substitutions d'Euler :

1. $I = \int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}dx$

$$a = 1 > 0 \overset{CV}{\Rightarrow} \sqrt{x^2-1} = -x+t \Leftrightarrow -1 = -2xt+t^2 \Leftrightarrow x = \frac{t^2+1}{2t}$$

alors

$$dx = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$$
$$\text{et } \sqrt{x^2-1} = \frac{t^2-1}{2t} \Rightarrow x-\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{t},$$

d'où

$$I = \int \frac{t^2-1}{2t}dt = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

donc

$$I = \frac{1}{2}\left[x^2 + x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right] + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I = \int \frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}dx$

$$a = -1 < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 2x-x^2 = x(2-x)$$

$$\overset{CV}{\Rightarrow} \sqrt{2x-x^2} = xt \Leftrightarrow (2-x) = xt^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{t^2+1}$$

alors

$$dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt$$
$$\text{et } \sqrt{2x-x^2} = \frac{2t}{t^2+1} \Rightarrow 2x-x^2 = \frac{4t^2}{(t^2+1)^2},$$

d'où

$$I = -\int \frac{t^2+1}{2t^2}dt = \frac{-1}{2}t + \frac{1}{2t} + c = \frac{-1}{2}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} + \frac{x}{2\sqrt{2x-x^2}} + c$$
$$= \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}dx$

$$a = 1 > 0 \overset{CV}{\Rightarrow} \sqrt{x^2+x+1} = -x+t \Leftrightarrow x+1 = -2xt+t^2$$

d'où

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t} \Rightarrow dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt$$

et

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2+t+1}{(1+2t)}$$

et

$$1+x = \frac{t\,(t+2)}{1+2t}$$

alors

$$I = \int \frac{2}{t\,(t+2)}dt = \int \left[\frac{A}{t} + \frac{B}{t+2}\right] dt,$$

où

$$A = 1, B = -1$$

donc

$$I = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+2}dt = \ln|t| - \ln|t+2| + c = \ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + c, c \in \mathbb{R}$$

et enfin

$$I = \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right| + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9

1. $I = \int \frac{1}{5-3\cos x}dx$

$$CV : t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

d'où

$$I = \int \frac{1}{1+4t^2}dt = \frac{1}{2}\arctan(2t) + c = \frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I = \int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$
On utilise le même changement de variables que la primitive précédente

$$CV : t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

et

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

d'où

$$I = \int \frac{4t}{(1+t)^2\,(1+t^2)}dt = \int \left[\frac{A}{(1+t)} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}\right] dt,$$

et en faisant les calculs et l'identification , on obtient un système d'équations qu'on résoud et on obtient

$$A = C = 0, B = -2, D = 2$$

alors

$$I = \int \left[\frac{-2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t^2} \right] dt = \frac{2}{1+t} + 2\arctan t + c, c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$I = \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I = \int \cos^2 x.dx$
   On utilise la linéarisation

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$$

   d'où

$$I = \frac{1}{2}\int (\cos(2x) + 1)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. $I = \int (\tan x)^4\, dx$

$$CV : t = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

   alors

$$I = \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int \left[\left(t^2 - 1\right) + \frac{1}{1+t^2} \right] dt = \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + c$$
$$= \frac{1}{3}(\tan x)^3 - \tan x + x + c, c \in \mathbb{R}.$$

1.5 Exercice sans solution.

Calculer les primitives suivantes

1. $I = \int x^3 \cosh(3x)\, dx$,
2. $I = \int x^3 \sinh(3x)\, dx$,
3. $I = \int x^n \ln x dx$, tel que $n \neq -1$,
4. $I = \int \sin x \ln(\tan x)\, dx$,
5. $I = \int \arctan(\sqrt{x})\, dx$,
6. $I = \int (\tanh(2x+1) + \coth(2x-1))\, dx$.

CHAPITRE 2

Intégrales définies

Introduction

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'intégration des fonctions définies et bornées dans un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. L'intégrale définie d'une fonction f positive et continue sur $[a, b]$ mesure l'aire de la partie du plan comprise entre (Γ) la courbe de la fonction $y = f(x)$, l'axe des abscisses $y = 0$ et les droites $x = a$ et $x = b$.

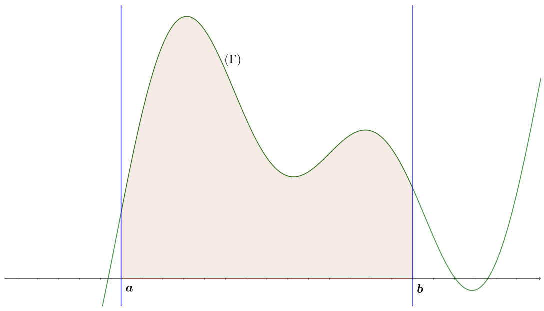

FIGURE 2.1 – Représentation géométrique de l'intégrale de f sur $[a, b]$

2.1 Sommes de Darboux

2.1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 2.1.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$, toute suite finie de nombres $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ telle que :*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle le pas de cette subdivision le nombre réel positif noté

$$\delta(d) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

2.1.2 Sommes de Darboux

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On pose :

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \forall i = 1, .., n.$$

On considère

$$s(f,d)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1}) \text{ et } S(f,d)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Ces deux sommes sont dites sommes de Darboux, respectivement inférieure et supérieure de f relativement à la subdivision à d.

Propriétés 2 (des sommes de Darboux) *1. Pour toute subdivision d de $[a,b]$:*

$$s(f,d)\leq S(f,d).$$

2. Si d et d' sont deux subdivisions de $[a,b]$, tels que $d\subset d'$ (d' est dite plus fine que d), alors

   (a) $s(f,d)\leq s(f,d')$,

   (b) $S(f,d')\leq S(f,d)$.

3. Si d_1 et d_2 sont deux subdivisions quelconques de $[a,b]$, alors

$$s(f,d_1)\leq S(f,d_2).$$

4. Si $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, alors

$$m(b-a)\leq s(f,d)\leq S(f,d)\leq M(b-a)$$

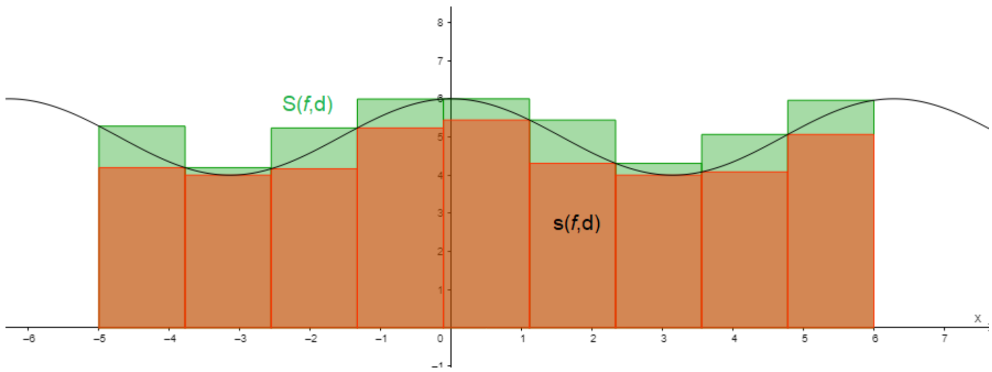

FIGURE 2.2 – Sommes de Darboux

Notation 2.1.2 *A chaque fonction f définie et bornée sur $[a,b]$, on associe l'ensemble $D_*(f)$ (respectivement $D^*(f)$), constitué de toutes les sommes de Darboux infèrieures (respectivement supèrieures), obtenues de toutes les subdivisions de $[a,b]$.*

Proposition 2.1.3 *On a*

$$\sup D_*(f)\leq \inf D^*(f). \tag{2.1}$$

Preuve :
L'ensemble $D^*(f)$ est non vide et minoré, donc admet une borne infèrieure et l'ensemble $D_*(f)$ est non vide et majoré, donc admet une borne supèrieure. Soient d_1 et d_2 sont deux subdivisions quelconques de $[a,b]$: $s(f,d_1) \in D_*(f)$ et $S(f,d_2) \in D^*(f)$, on a alors $s(f,d_1) \leq S(f,d_2)$, d'où $S(f,d_2)$ est un majorant de $D_*(f)$, donc $\sup D_*(f) \leq S(f,d_2)$, car $\sup D_*(f)$ est le plus petit des majorants de $D_*(f)$, alors $\sup D_*(f)$ est un minorant de $D^*(f)$ donc $\sup D_*(f) \leq \inf D^*(f)$ car $\inf D^*(f)$ est le plus grand des minorants de $D^*(f)$. □

Notation 2.1.4 *On note*

$$\sup D_*(f) = \int_{*a}^{b} f(x)dx$$

et on l'appelle intégrale infèrieure de f sur $[a,b]$ et on note

$$\inf D^*(f) = \int_{a}^{*b} f(x)dx$$

et on l'appelle intégrale supèrieure de f sur $[a,b]$.

Corollaire 2.1.5 *On a*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{*b} f(x)dx$$

2.2 Fonctions intégrables

Définition 2.2.1 *Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction bornée, on dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, si :*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{*b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

cette intégrale est appelée intégrale définie de f sur $[a,b]$, a et b sont appelés les bornes d'intégration, x est une variable dite "muette". Le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de x, il dépend de a et de b

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(y)\,dy = \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

Notation On note par $R([a,b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

Théorème 2.2.2 (de Darboux) *Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction bornée ; pour que f soit (Riemann)-intégrable ; il faut et il suffit que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists d \text{ subdivision de } [a,b] \text{ telle que } S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon.$$

Preuve :
La condition est nécessaire en effet, supposons que f est intégrable sur $[a,b]$ alors

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{*b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

c'est à dire que

$$\sup D_* (f) = \inf D^* (f) = \int_a^b f(x)dx$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux subdivisions d' et d'' de $[a,b]$ telles que :

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, d') \tag{2.2}$$

et

$$S(f, d'') < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

d'où

$$S(f, d'') - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < s(f, d') + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow S(f, d'') - s(f, d') < \varepsilon.$$

La condition est suffisante d'après ce qui précède, en effet, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision d de $[a,b]$ telle que

$$S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon$$

alors on a

$$S(f,d) - \varepsilon < s(f,d) < S(f,d)$$

donc $S(f,d) = \sup D_* (f)$ et on a

$$s(f,d) < S(f,d) < s(f,d) + \varepsilon$$

donc $s(f,d) = \inf D^*(f)$, d'où

$$\inf D^*(f) \leq \sup D_*(f)$$

et d'après (2.1), on a $\sup D_*(f) \leq \inf D^*(f)$, par conséquent,

$$\inf D^*(f) = \sup D_*(f)$$

d'où f est intégrable car

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{*b} f(x)dx.$$

□

Théorème 2.2.3 *Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction bornée ; alors*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta(d)\to 0} s(f,d)$$

et

$$\int_{a}^{*b} f(x)dx = \lim_{\delta(d)\to 0} S(f,d)$$

Corollaire 2.2.4 *Etant donnée $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de l'intervalle $[a,b]$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(d_n) = 0$, alors*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s(f,d_n)$$

et

$$\int_{a}^{*b} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(f,d_n)$$

en particulier, si f est intégrable sur $[a,b]$, alors on a

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s(f,d_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,d_n).$$

Remarque : Pour que l'intégrabilité de la fonction f sur $[a,b]$ soit exprimée par les sommes de Darboux, on doit considérer une subdivision d de $[a,b]$ dont le pas $\delta(d)$ tend vers zéro.

Exemples 2.2.5 *1. Etant donnée la fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x)=2$, $\forall x\in[a,b]$ et soit $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas $\delta(d)$ tend vers zéro, alors on a*

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=2=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=m_i, \forall i=1,..,n$$

et donc

$$s(f,d)=S(f,d)=2\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=2(b-a).$$

d'où

$$D^*(f)=D_*(f)=\{2(b-a)\}$$

alors f est intégrable sur $[a,b]$ car

$$\sup D_*(f)=\inf D^*(f)=\int_a^b f(x)\,dx=2(b-a).$$

2. Soient $a,b\in\mathbb{R}$, tels que $a<b$ et la fonction de Dirichlet f définie sur $[a,b]$ par

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & si\ x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

soit $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas $\delta(d)$ tend vers zéro, alors on a $\forall i=1,..,n$

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=1,$$
$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=0,$$

donc

$$s(f,d)=0\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=0,$$
$$S(f,d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=(b-a),$$

d'où

$$D^*(f)=\{(b-a)\},$$
$$D_*(f)=\{0\}$$

alors

$$\sup D_*(f)=0$$
$$\inf D^*(f)=(b-a).$$

par conséquent la fonction f n'est pas intégrable sur $[a,b]$.

2.3 Sommes de Riemann

2.3.1 Sommes de Riemann

Définition 2.3.1 *Soit* $f : [a, b] \to R$, *une fonction bornée et* $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *une subdivision de* $[a, b]$ *et soient* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *des nombres réels tels que :*
$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, *alors le nombre*

$$\sigma(f, d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

est appelé ***somme de Riemann*** *de* f *correspondant à* d *et au système de points* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

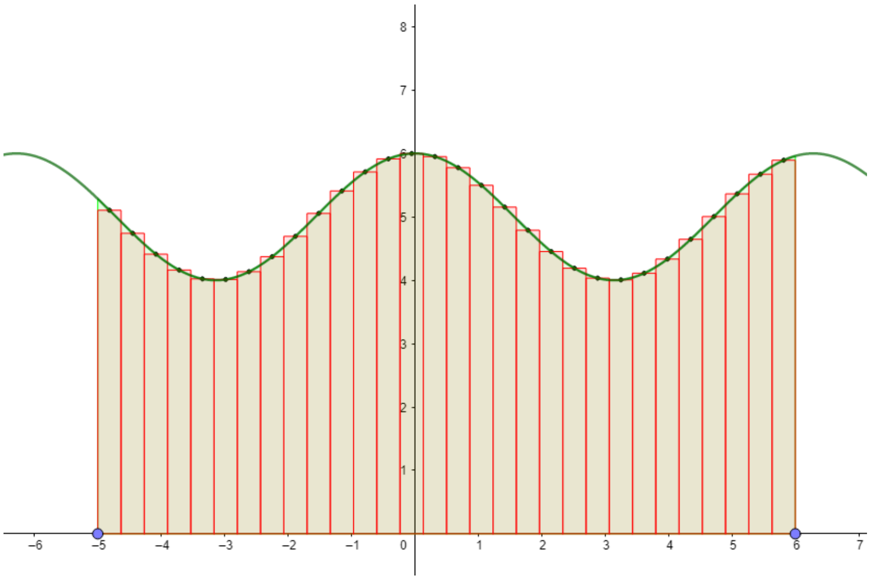

FIGURE 2.3 – Sommes de Riemann

Théorème 2.3.2 *Si* f *est intégrable sur* $[a, b]$ *alors :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta(d) \to 0} \sigma(f, d).$$

Remarque : On peut prendre ξ_i l'une des bornes des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, par exemple $\xi_i = x_i$. D'où

$$\sigma(f, d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i).$$

2.3.2 Subdivision régulière

Définition 2.3.3 *Une subdivision régulière $d_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ est une subdivision telle que tous les intervalles partiels sont de longueur égale, et on a*

$$\begin{cases} x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \end{cases}, \forall i = 1, .., n.$$

D'où

$$\delta(d_n) = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \delta(d_n) = 0,$$

Par conséquent, si f est intégrable sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \quad (2.4)$$

en effet,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(d_n)\to 0} \sigma(f, d_n) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(x_i) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right).$$

2.4 Propriétés de l'intégrale définie

On considère $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Théorème 2.4.1 *Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Preuve :
Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \;/\; |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

alors pour toute subdivision d vérifiant $\delta(d) < \alpha$, en particulier la subdivision régulière où $\delta(d) = \frac{b-a}{n}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \left(|x_1 - x_2| < \frac{b-a}{n} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

en particulier pour $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tel que $f(\alpha_i) = M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $f(\beta_i) =$

$m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, d'où on a

$$\begin{aligned} |\alpha_i - \beta_i| < \tfrac{b-a}{n} \quad & \Rightarrow |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| < \tfrac{\varepsilon}{(b-a)} \\ & \Rightarrow M_i - m_i < \tfrac{\varepsilon}{(b-a)} \end{aligned}$$

alors

$$(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

donc

$$S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon$$

par conséquent f est intégrable sur $[a,b]$. □

Définition 2.4.2 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe un entier n et une subdivision $\{x_0, ..., x_n\}$ telle que f soit continue sur chaque intervalle partiel $]x_{i-1}, x_i[$, et admette une limite finie à droite de x_{i-1} et une limite finie à gauche de x_i pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.*

Corollaire 2.4.3 *Les fonctions continues par morceaux sont intégrables.*

Théorème 2.4.4 *Si la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone sur $[a,b]$. alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Preuve :
On suppose que f est croissante sur $[a,b]$, et on considère d la subdivision régulière sur $[a,b]$, alors on a $m_i = f(x_{i-1})$ et $M_i = f(x_i)$, $\forall i = 1, ..., n$, d'où

$$\begin{aligned} S(f,d) - s(f,d) \quad & = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\tfrac{b-a}{n} \\ & = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\tfrac{b-a}{n} \\ & = \tfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ & = \tfrac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

donc pour que f soit intégrable sur $[a,b]$, il suffit de choisir d telle que

$$n > \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{\varepsilon}.$$

□

Proposition 2.4.5 *Si la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors la restriction de f à tout intervalle $[c,d] \subset [a,b]$ est encore intégrable.*

Proposition 2.4.6 *Si f et g sont deux fonctions bornées et définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telles que f est intégrable sur $[a,b]$ et l'ensemble $\{x \in [a,b] \ / \ f(x) \neq g(x)\}$ est fini alors la fonction g est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.*

Exemple 2.4.7 *Calculer les intégrales suivantes, en utilisant les sommes de Riemann*

1. $I = \int_1^3 \alpha . dx$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

   On pose $f(x) = \alpha$ (fonction constante) sur l'intervalle $[1,3]$ et on considère la subdivision régulière $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[1,3]$, d'où on a

$$\begin{cases} x_i = 1 + \frac{2i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n} \end{cases}, \forall i = 1, .., n ,$$

   d'où

$$f(x_i) = f\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = \alpha, \forall i = 1, .., n.$$

   f est continue sur $[1,3]$ alors f est intégrable sur $[1,3]$, alors d'après (2.4) on a

$$\int_1^3 \alpha . dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} (n\alpha) = 2\alpha.$$

2. $I = \int_0^1 x dx$.

   On pose $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$ et on considère la subdivision régulière $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[0,1]$, d'où :

$$\begin{cases} x_i = \frac{i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \end{cases}, \forall i = 1, .., n ,$$

   d'où

$$f(x_i) = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n}, \forall i = 1, .., n.$$

   f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, donc d'après (2.4) on a

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

2.4.1 Propriétés

1. Soit $f \in R([a,b])$ i.e., une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors

(a) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

(b) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

2. Relation de Chasles
Soient a, b et c trois réels tels que $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, telle que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

4. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, telles que $f(x) \leq g(x)\,, \forall x \in [a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors

(a) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) La fonction $f.g$ est intégrable sur $[a, b]$, mais en général

$$\int_a^b [f(x) . g(x)]\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) . \left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Contre-exemple

On a $\int\limits_1^2 xe^x dx = [e^x (x-1)]_1^2 = e^2$,

par contre $\int\limits_1^2 xdx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^2 = \frac{3}{2}$ et $\int\limits_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e$

alors $\left(\int\limits_1^2 xdx\right)\left(\int\limits_1^2 e^x dx\right) = \frac{3}{2}\left(e^2 - e\right).$

6. Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, et on a :

   (a)
   $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

   (b) Soit g une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors
   $$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|\,dx \\ &\leq c \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.\end{aligned}$$

7. Si $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$ alors
   $$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$
   (la réciproque est fausse.)

   Contre-exemple

   On a $f(x)=x$ sur $[-1,1]$ et $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

8. Si f est continue sur $[a,b]$ et
   $$f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b] \ et \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$
   alors
   $$f(x)=0, \forall x\in[a,b].$$

9. Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, telle que
   $$m\leq f(x)\leq M, \forall x\in[a,b],$$
   alors
   $$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Preuve :

1. (a) On considère une subdivision régulière $d_n=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ de l'intervalle $[a,b]$, comme f est intégrable sur $[a,b]$ alors
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = -\lim_{n\to+\infty}\frac{(a-b)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(b) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^a f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0.$

2. Soient a, b et c trois réels tels que $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. On considère une subdivision $d_n = \{x_0, x_1, .x_{j-1}, c, x_{j+1}.., x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que son pas $\delta(d_n)$ tende vers 0, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\delta(d_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{\delta(d_n)\to 0} \sum_{i=1}^{j-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(c - x_{j-1}) \\
&+ f(x_{j+1})(x_{j+1} - c) + \sum_{i=j+1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{\delta(d_n)\to 0} \left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right) + f(c)(c - x_{j-1})\right] \\
&+ \lim_{\delta(d_n)\to 0} \left[f(x_{j+1})(x_{j+1} - c) + \left(\sum_{i=j+1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right)\right] \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

9. Si on a

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b],$$

alors

$$\begin{aligned}
& m \leq f(x_i) \leq M, \forall x_i \in [a, b] \\
& \Rightarrow m(x_i - x_{i-1}) \leq f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}), \forall i = 1, ..., n \\
& \Rightarrow m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
& \Rightarrow m(b - a) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b - a)
\end{aligned}$$

d'où

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a).$$

□

2.4.2 Théorème de la moyenne

Théorème 2.4.8 *Soient $f,g \in R([a,b])$, g ayant un signe constant sur $[a,b]$, alors il existe un nombre réel $\mu \in [m,M]$, où $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que : $\mu = f(\xi)$.

Preuve :
On suppose que $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ alors d'après la propriété 6.b, on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|\,dx$$

alors $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ et dans ce cas μ peut être quelconque.

Et si $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ alors on a $\forall x \in [a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow mg(x) \leq f(x)\,g(x) \leq Mg(x)$$

alors d'après la propriété 9

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

ce qui implique que

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$

alors il existe $\mu \in [m,M]$, tel que

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$ alors elle atteint toutes les valeurs comprises entre m et M d'où

$$\exists \xi \in [a,b] \text{ telque } \mu = f(\xi).$$

□

Corollaire 2.4.9 *Si f est continue sur $[a,b]$ alors*

$$\exists\xi \in [a,b], \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Exemple 2.4.10 *Soit l'intégrale*

$$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

en appliquant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe un nombre réel $\mu \in [-1,1]$, tel que

$$I = \mu \int_0^\pi \sin x dx$$

puis calculer sa valeur.

Solution

On pose $f(x) = g(x) = \sin x$, on remarque que $g(x) \geq 0, \forall x \in [0,\pi]$, et que

$$\inf_{x\in[0,\pi]} f(x) = -1, \ \sup_{x\in[0,\pi]} f(x) = 1$$

alors d'après le théorème de la moyenne, il existe $\mu \in [-1,1]$ tel que

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \mu \int_0^\pi \sin x dx$$

Et en utilisant la linéarisation, on a $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

d'où

$$\mu = \frac{\pi}{4}.$$

2.5 Exemples d'application

En utilisant les sommes de Riemann d'une fonction à déterminer, calculer les limites suivantes :

1. $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$,
2. $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\ln(i+n)-\ln n}{i+n}$,
3. $l_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)$.

On considère la subdivision régulière $d_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que

$$\begin{cases} x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \end{cases}, \forall i = 1, ..., n \, .$$

Comme la somme de Riemann est telle que

$$\sigma(f, d_n) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \tag{2.5}$$

et si la fonction est intégrable sur $[a, b]$ alors on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{2.6}$$

1.

$$l_1 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

et donc par analogie avec (2.6), on pose $\forall i = 1, ..., n$

$$f(x_i) = \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2},$$

$$x_i = \frac{i}{n} = 0 + \frac{i}{n}.1 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 1$$

alors

$$f(x_i) = \frac{1}{1+(x_i)^2}, \forall i = 1, ..., n$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

f est continue sur $[0, 1]$ alors f est intégrable sur $[0, 1]$, et donc on a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = l_1$$

d'où

$$l_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\begin{aligned} l_2 &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(i+n)-\ln n}{i+n} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{i+n}{n}\right)}{\frac{i}{n}+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)}{\frac{i}{n}+1} \end{aligned}$$

et donc par analogie avec (2.6), on pose $\forall i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \frac{\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)}{\frac{i}{n}+1}, \\ x_i &= \frac{i}{n}+1 \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 2 \end{aligned}$$

alors

$$f(x_i) = \frac{\ln(x_i)}{x_i}, \forall i = 1, ..., n$$

d'où

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et donc on a

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)}{\frac{i}{n}+1} = l_2.$$

d'où

$$l_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx.$$

On fait un changement de variables ,

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

et d'où

$$l_2 = \int_0^{\ln 2} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

3.
$$l_3=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)$$

et donc par analogie avec (2.6), on pose $\forall i=1,...,n$

$$f(x_i)=\tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right),$$
$$x_i=\frac{i\pi}{6n}\Rightarrow a=0 \text{ et } b=\frac{\pi}{6}$$

alors

$$f(x_i)=\tan x_i, \forall i=1,...,n$$

d'où

$$f(x)=\tan x.$$

f est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ alors f est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, et donc on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan x\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{6n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)$$
$$=\frac{\pi}{6}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{i\pi}{6n}\right)\right)=\frac{\pi}{6}l_3,$$

d'où

$$l_3=\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

On fait un changement de variables,

$$t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$$

pour les bornes

$$x=0\Rightarrow t=1$$
$$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et d'où

$$l_3=\frac{-6}{\pi}\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{t}=\frac{-6}{\pi}\left[\ln t\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\pi}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

On remarque ici que ce n'est pas l'unique choix, on pourrait aussi prendre :

(a)
$$x_i=\frac{i}{6n}\Rightarrow a=0, b=\frac{1}{6} \text{ et } f(x)=\tan\pi x,$$

ou bien

(b)

$$x_i = \frac{i\pi}{n} \Rightarrow \; a = 0, b = \pi \text{ et } f(x) = \tan \frac{x}{6},$$

ou bien

(c)

$$x_i = \frac{i}{n} \Rightarrow \; a = 0, b = 1 \text{ et } f(x) = \tan \left(\frac{\pi x}{6} \right).$$

Tous les choix donnent évidemment le même résultat c'est à dire la même valeur de l'intégrale - à faire comme exercice -.

2.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

Preuve :
Comme $f,g \in R([a,b])$ alors $f+\lambda g \in R([a,b]), \forall\lambda \in \mathbb{R}$ et on a

$$[f(x)+\lambda g(x)]^2 \geq 0,\ \forall x \in [a,b],$$

d'où

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\,dx \geq 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},$$

car l'intégrale d'une fonction positive est positive et on a

$$\int_a^b \left[f^2(x)+2\lambda f(x)\,g(x)+\lambda^2 g^2(x)\right]dx \geq 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

ce qui est équivalent à

$$\int_a^b f^2(x)\,dx+\lambda\int_a^b 2f(x)\,g(x)\,dx+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geq 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

en posant

$$A=\int_a^b g^2(x)\,dx =,\ B=2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,\ C=\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

on a

$$A\lambda^2+B\lambda+C \geq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

c'est un trinôme du deuxième degré qui est positif pour tout λ dans $\mathbb{R}$, alors son discriminant Δ est négatif ou nul $(\Delta \leq 0)$

or

$$\Delta = B^2-4AC = 4\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 - 4\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)$$

donc

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

□

2.7 Intégrales et primitives

2.7.1 Intégrale définie en fonction de sa borne supérieure

Définition 2.7.1 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$.*

On appelle $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, l'intégrale de f définie en fonction de sa borne supérieure.

Proposition 2.7.2 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, et soit F son intégrale définie en fonction de sa borne supérieure, alors*

1. *F est continue sur $[a,b]$.*
2. *Si de plus f est continue sur $[a,b]$, F est dérivable sur $[a,b]$ et l'on a*

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } [a,b].$$

Preuve :

1. Pour montrer que F est continue sur $[a,b]$, il suffit de montrer que $\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)\,,\ \forall x \in [a,b]$.

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x)| &= \left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \\ &= \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right|\end{aligned}$$

alors d'après les propriétés de l'intégrale définie on a

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\ dt \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \int_x^{x+h} dt.$$

d'où

$$|F(x+h) - F(x)| \leq h \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

si on pose

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = M,$$

donc

$$|F(x+h) - F(x)| \leq M.h$$

par conséquent quand h tend vers 0, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x).$$

2. Pour montrer que F est dérivable sur $[a,b]$, il suffit de calculer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ pour tout $x \in [a,b]$. Puisque F est continue sur $[a,b]$ alors d'après le théorème de la moyenne, on a :

$$\exists c \in [x, x+h] \text{ tel que } F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = h.f(c),$$

On a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c).$$

Si h tend vers 0, alors c tend vers x , d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x) \text{ car } f \text{ est continue,}$$

donc F est dérivable sur $[a,b]$ et l'on a

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b].$$

□

Conclusion 1 *Toute fonction f continue sur $[a,b]$ admet comme primitive la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, telle que $F(a) = 0$.*

2.7.2 Théorème de Newton-Leibnitz

Théorème 2.7.3 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et F une primitive de f sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \underset{Notation}{=} [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Preuve :

Soit $G(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\forall t \in [a,b] : G(t) - F(t) = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

or

$$G(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

d'où

$$c = -F(a),$$

alors

$$G(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

□

Exemples 2.7.4 *1.* $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\ln 1} = \ln 2.$

2. $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\arcsin 0} = \frac{\pi}{6}.$

2.8 Changement de variables dans une intégrale définie

Théorème 2.8.1 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction de classe C^1, telle que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Preuve :
Il suffit de faire le changement de variables

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt \text{ et } \begin{cases} x = a \Leftrightarrow t = \alpha, \\ x = b \Leftrightarrow t = \beta. \end{cases}$$

□

Exemple 2.8.2 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

$$CV : t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.dx,$$

d'où

$$I = 3\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = 3\,[\arctan x]_0^1 = 3\left(\arctan 1 - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\arctan 0}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

2.9 Intégration par parties dans une intégrale définie

Théorème 2.9.1 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx \tag{2.7}$$

Preuve :
En effet ; il suffit de dériver le produit de fonctions $u(x)\,v(x)$

$$(u(x)\,v(x))' = u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)\,, \forall x \in [a,b],$$

alors en intégrant de a à b on a d'une part

$$\int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b\,,$$

et d'autre part

$$\int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx,$$

donc

$$[u(x)\,v(x)]_a^b = \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx,$$

par conséquent

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

□

On peut écrire l'égalité (2.7) sous la forme

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

Exemple 2.9.2 $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\;dx$

On fait un choix qui nous facilite le calcul de $\int_a^b vdu$

$$IPP : \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\;dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Théorème 2.9.3 *Soit f une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $a \in I,\ a > 0$*
- Si f est paire alors : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
- Si f est impaire alors : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Preuve :
En faisant le changement de variables $t = -x$ on a $dx = -dt$ et

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(-x)\,dx,$$

car la variable d'intégration est muette ; d'où
- Si f est paire alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

- Si f est impaire alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0.$$

□

Théorème 2.9.4 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T \neq 0$, alors pour tout nombre réel a ; on a :*

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

Preuve :
On a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x)\,dx}_{J},$$

pour calculer la troisième intégrale J ; on fait le changement de variables

$$t = x - T \Leftrightarrow x = t + T \Rightarrow dx = dt,$$

d'où

$$J = \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx.$$

donc

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx,$$

et enfin

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

$\square$

Exercice 2.9.5 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.*

1. *Si f est continue sur $[a,b]$ alors f admet une primitive sur $[a,b]$.*
2. *Si f admet une primitive sur $[a,b]$ alors f est continue sur $[a,b]$.*
3. *Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*
4. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors f est continue sur $[a,b]$.*
5. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors f admet une primitive sur $[a,b]$.*
6. *Si f admet une primitive sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Solution :

1. ***Vraie**, pour la preuve ; voir la conclusion 1 .*
2. ***Faux** ;*
   Contre-exemple : Soient f et F deux fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & si \quad x \in \left]0,1\right] \\ 0 \quad , & si \quad x = 0 \end{cases}$$

et

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & si \ \ x \in]0,1] \\ 0 \quad , & si \quad x = 0. \end{cases}$$

On remarque que F est dérivable sur $]0,1]$ et que

$$F'(x) = f(x), \forall x \in]0,1]$$

et

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0,$$

d'où F est dérivable sur $[0,1]$ et

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [0,1]$$

donc F est une primitive de f sur $[0,1]$; mais f est discontinue sur $[0,1]$ car f est discontinue en $x = 0$.

3. ***Vraie**, pour la preuve ; voir le cours théorème* (2.4.1).
4. ***Faux***

   Contre-exemple : On considère la fonction $f(x) = [x]$ (la partie entière de x) sur $[-2,1]$

   f est intégrable sur $[-2,1]$ car f est continue par morceaux sur $[-2,1]$ mais f est discontinue sur $[-2,1]$ car f est discontinue en $x = -1$ et $x = 0$.
5. ***Faux***

   Contre-exemple : On considère la fonction $f(x) = \frac{[x]}{x}$ sur $[1,3]$, f est intégrable sur $[1,3]$ car f est continue par morceaux sur $[1,3]$; mais f n'admet pas de primitives sur $[1,3]$.
6. ***Faux***

   Contre-exemple : On considère la fonction

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & si \ \ x \in]0,1] \\ 0 \quad , & si \quad x = 0 \end{cases}$$

F est dérivable sur $]0,1]$ et on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

alors

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & si \ \ x \in]0,1] \\ 0 \quad , & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Sur l'intervalle $[0,1]$; on pose

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2}, & si \ \ x \in]0,1] \\ 0 \quad , & si \quad x = 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & si \;\; x \in \left]0,1\right] \\ \quad 0 \quad\;\;, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

d'où

$$F'(x) = h(x) - g(x), \;\; \forall x \in [0,1],$$

la fonction h est continue sur $[0,1]$ donc admet une primitive H sur $[0,1]$:

$$H'(x) = h(x), \forall x \in [0,1],$$

par conséquent :

$$g(x) = H'(x) - F'(x) = (H - F)'(x), \;\; \forall x \in [0,1]$$

d'où g admet une primitive sur $[0,1]$, mais g n'est pas intégrable sur $[0,1]$ car g n'est pas bornée sur $[0,1]$.

2.10 Enoncés des exercices

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3,4]$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et la subdivision d de l'intervalle $[-3,4]$ donnée par : $d=\{-3,-2,0,1,4\}$.

1. Calculer les sommes de Darboux inférieures et supérieures associées à f et à d.
2. Calculer le pas de la subdivision d.
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=3x^2$ et la subdivision régulière d_n sur $[0,1]$ telle que $d_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right\}$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,d_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s(f,d_n)$ (Indication $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
2. Que peut-on conclure ?

Exercice 3

En utilisant les sommes de Riemann, calculer l'intégrale $\int\limits_a^b e^x dx$.

Exercice 4

1. Montrer que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable, alors
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx.$$
2. En déduire l'intégrale : $I=\int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+cos^2 x}dx$.

Exercice 5

En utilisant les sommes de Riemann d'une fonction à déterminer, calculer les limites suivantes :

1. $l_1=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{n\alpha+i},(\alpha>0)$,
2. $l_2=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}\right],(p\in\mathbb{N})$,
3. $l_3=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{e}}+\frac{2}{\sqrt[n]{e^2}}+\frac{3}{\sqrt[n]{e^3}}+...+\frac{n}{\sqrt[n]{e^n}}\right]$,
4. $l_4=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{i\pi}{3n}\right)$,
5. $l_5=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}{i+n}$,

6. $l_6 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\cos[\ln(i+n)-\ln n]}{i+n}$,
7. $l_7 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left[\arctan\sqrt{\frac{1}{n}} + \arctan\sqrt{\frac{2}{n}} + .. + \arctan\sqrt{\frac{n}{n}}\right]$,
8. $l_8 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left[e^{\arcsin\frac{1}{n}} + e^{\arcsin\frac{2}{n}} + ... + e^{\arcsin\frac{n}{n}}\right]$,
9. $l_9 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+n)[1+\ln(i+n)-(\ln n)]^2}$,
10. $l_{10} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(n+i)}$,
11. $l_{11} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k}\right]$, (où $[x]$ est la partie entière de x).

Exercice 6

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+n}\ ,\quad V_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. En utilisant les sommes de Riemann ; calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2}U_n + V_n = U_{2n}$.
3. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite est $\frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice 7

Calculer l'intégrale $\int\limits_{-2}^{3} |x|\, dx$.

Exercice 8

Calculer l'intégrale définie de la fonction f sur $[0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ , si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ , si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Exercice 9

Calculer l'aire du plan compris entre l'axe des abcisses, le graphe de la fonction $f(x) = \tan x$ et les deux droites verticales $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{3}$.

2.11 Corrigés des exercices

Exercice 1

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[-3,4]$ et la subdivision $d = \{\underset{x_0}{\underset{\shortparallel}{-3}}, \underset{x_1}{\underset{\shortparallel}{-2}}, \underset{x_2}{\underset{\shortparallel}{0}}, \underset{x_3}{\underset{\shortparallel}{1}}, \underset{x_4}{\underset{\shortparallel}{4}}\}$.

   Les longueurs partielles sont :

   $x_1 - x_0 = 1$, $x_2 - x_1 = 2$, $x_3 - x_2 = 1$, $x_4 - x_3 = 3$.

   On a $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$; il est clair que f est croissante sur $[-3,0]$ et décroissante sur $[0,4]$.

   On a $s(f,d) = \sum_{i=1}^{4} m_i (x_i - x_{i-1})$ où $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $\forall i = 1,..,4$.

   $m_1 = \inf_{x\in[x_0,x_1]} f(x) = \inf_{x\in[-3,-2]} f(x) = f(-3) = \frac{1}{10}$,

   $m_2 = \inf_{x\in[-2,0]} f(x) = f(-2) = \frac{1}{5}$,

   $m_3 = \inf_{x\in[0,1]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$,

   $m_4 = \inf_{x\in[1,4]} f(x) = f(4) = \frac{1}{17}$,

   alors
   $$s(f,d) = \frac{1}{10}(1) + \frac{1}{5}(2) + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{17}(3) = \frac{20}{17} = 1,17,$$

   et $S(f,d) = \sum_{i=1}^{4} M_i (x_i - x_{i-1})$ où $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \forall i = 1,..,4$,

   d'où $M_1 = \sup_{x\in[x_0,x_1]} f(x) = \sup_{x\in[-3,-2]} f(x) = f(-2) = \frac{1}{5}$,

   $M_2 = \sup_{x\in[-2,0]} f(x) = f(0) = 1$,

   $M_3 = \sup_{x\in[0,1]} f(x) = f(0) = 1$,

   $M_4 = \sup_{x\in[1,4]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$,

   alors
   $$S(f,d) = \frac{1}{5}(1) + 1(2) + 1(1) + \frac{1}{2}(3) = \frac{47}{10} = 4,7.$$

2. Le pas de la subdivision d :
   $$\delta(d) = \max_{1\le i\le 4} (x_i - x_{i-1}) = x_4 - x_3 = 4 - 1 = 3.$$

3. La fonction f est continue sur $[-3,4]$ donc intégrable sur $[-3,4]$ mais comme le pas de la subdivision d ne tend pas vers 0, et les sommes de Darboux sont différentes donc elles n'expriment pas l'intégrabilité de la fonction f sur $[-3,4]$.

Exercice 2

1. Comme la subdivision d_n est régulière sur $[0,1]$ alors on a
   $$\begin{cases} x_i = \frac{i}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

On a

$$S(f,d_n)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}) \text{ et } s(f,d_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$$

et comme f est croissante sur $[0,1]$ alors

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=f(x_i)=3x_i^2=3\left(\frac{i}{n}\right)^2, \forall i=1,..,n,$$

et

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=f(x_{i-1})=3x_{i-1}^2=3\left(\frac{i-1}{n}\right)^2, \forall i=1,..,n,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}S(f,d_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}=1,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}s(f,d_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

et en faisant un changement d'indice $j=i-1$ alors

$$i=1\Rightarrow j=0$$
$$i=n\Rightarrow j=n-1$$

et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}s(f,d_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1}j^2$$

or

$$\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\left(\sum_{j=0}^{n}j^2\right)-n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n^2=\frac{n(2n-1)(n-1)}{6}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}s(f,d_n)=1.$$

2. Comme la subdivision d_n est régulière donc son pas tend vers zéro et $\lim_{n\to+\infty}S(f,d_n)=\lim_{n\to+\infty}s(f,d_n)=1$, alors f est intégrable sur $[0,1]$ et on a

$$\int_0^1 f(x)\,dx=1.$$

Exercice 3

On pose $f(x) = e^x$, f est continue sur $[a,b]$ donc intégrable sur $[a,b]$, d'où en considérant une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$, on a

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{a+\frac{i(b-a)}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} e^a \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{(b-a)}{n}}\right)^i = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} e^a e^{\frac{(b-a)}{n}} \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{(b-a)}{n}}}$$

$$= \left(e^a - e^b\right) \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{(b-a)}{n}} \frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{(b-a)}{n}}} = e^b - e^a,$$

car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{b-a}{n}}{\left(1-e^{\frac{(b-a)}{n}}\right)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{1-e^t} = -1$ (limiy=te connue, ou en utilisant soit la règle de l'Hôpital soit l'équivalence).

Exercice 4

1. On fait un changement de variables

$$t = a + b - x \Leftrightarrow x = a + b - t$$

d'où $dt = -dx$ et on a

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt,$$

et comme la variable d'intégration est muette alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

2.

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx,$$

car

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

et

$$\cos(\pi - x) = -\cos x,$$

d'où

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1 + cos^2 x} dx - I \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1 + cos^2 x} dx.$$

on fait un changement de variables

$$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x,$$

alors

$$I = \frac{-\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \left[\arctan t\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 5

Dans tout l'exercice on considère la subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ d'où

$$\begin{cases} x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

1.

$$l_1 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n\alpha + i} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + i} \right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \frac{i}{n}}$$

on pose $x_i = \alpha + \frac{i}{n}$ alors on obtient

$$a = \alpha \text{ et } b = \alpha + 1,$$

$$f(x_i) = \frac{1}{x_i}, \forall i = 1, ..., n$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Comme f est continue sur $[\alpha, \alpha + 1]$ alors f est intégrable sur $[\alpha, \alpha + 1]$, et on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \frac{i}{n}} = l_1$$

donc

$$l_1 = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\alpha+1} = \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right).$$

2.

$$l_2 = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} \right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^p$$

on pose $x_i = \frac{i}{n}$ alors on obtient

$$a = 0, b = 1$$

$$f(x_i) = (x_i)^p, \forall i = 1, ..., n$$

donc
$$f(x) = x^p.$$
Comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p = l_2 \Leftrightarrow l_2 = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

3.
$$l_3 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{e}} + \frac{2}{\sqrt[n]{e^2}} + \frac{3}{\sqrt[n]{e^3}} + \dots + \frac{n}{\sqrt[n]{e^n}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}e^{-\frac{i}{n}}$$
Si on pose $x_i = \frac{i}{n}$, on obtient
$$a = 0, b = 1$$
$$f(x_i) = x_i e^{-x_i}, \forall i = 1, \dots, n$$
donc
$$f(x) = xe^{-x}.$$
Comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}e^{-\frac{i}{n}} = l_3 \Leftrightarrow l_3 = \int_0^1 xe^{-x}dx$$
$$IPP : \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$
d'où
$$l_3 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - 2e^{-1}.$$

4.
$$l_4 = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{i\pi}{3n}\right)$$
alors si on pose $x_i = \frac{i\pi}{n}$ on obtient
$$a = 0, b = \pi$$
$$f(x_i) = \tan\left(\frac{x_i}{3}\right), \forall i = 1, \dots, n$$
donc
$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{3}\right).$$
Comme f est continue sur $[0,\pi]$ alors f est intégrable sur $[0,\pi]$, et on a
$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{i\pi}{3n}\right) = 3l_4 \Leftrightarrow l_4 = \frac{1}{3}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi \tan\left(\frac{x}{3}\right).dx$$

d'où
$$l_4=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}dx=-\left[\ln\left(\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)\right]_0^{\pi}=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2.$$

Dans cet exemple , on peut prendre d'autres choix voir le cours exemple(2.5) .

5.
$$l_5=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}{i+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}{\frac{i}{n}+1}$$

alors si on pose $x_i=1+\frac{i}{n}$ on obtient
$$a=1,b=2$$
$$f\left(x_i\right)=\frac{\ln x_i}{x_i},\forall i=1,...,n$$

donc
$$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}.$$

Comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a
$$\int_1^2 f\left(x\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}{\frac{i}{n}+1}=l_5\Leftrightarrow l_5=\int_1^2 f\left(x\right)dx=\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx$$
$$CV:\ t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$$

d'où
$$l_5=\int_0^{\ln 2}tdt=\frac{1}{2}\left(\ln 2\right)^2.$$

6.
$$l_6=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\left[\ln\left(i+n\right)-\ln\left(n\right)\right]}{i+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\left[\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)\right]}{\frac{i}{n}+1}$$

alors si on pose $x_i=1+\frac{i}{n}$ on obtient
$$a=1,b=2$$
$$f\left(x_i\right)=\frac{\cos\left(\ln x_i\right)}{x_i},\forall i=1,...,n$$

donc
$$f\left(x\right)=\frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}.$$

Comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a
$$\int_1^2 f\left(x\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\left[\ln\left(\frac{i}{n}+1\right)\right]}{\frac{i}{n}+1}=l_6$$

d'où

$$l_6 = \int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$CV : \ t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

alors

$$l_6 = \int_0^{\ln 2} \cos t.dt = [\sin t]_0^{\ln 2} = \sin(\ln 2).$$

7.

$$l_7 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\arctan\sqrt{\frac{1}{n}} + ... + \arctan\sqrt{\frac{n}{n}}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \arctan\sqrt{\frac{i}{n}}$$

alors si on pose $x_i = \frac{i}{n}$ on obtient

$$a = 0, b = 1$$
$$f(x_i) = \arctan\sqrt{x_i}, \forall i = 1, ..., n$$

donc

$$f(x) = \arctan\sqrt{x}.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \arctan\sqrt{\frac{i}{n}} = l_7 \Leftrightarrow l_7 = \int_0^1 \arctan\sqrt{x}.dx$$

$$CV : t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2tdt \Rightarrow l_7 = \int_0^1 2t \arctan t.dt$$

$$IPP : \begin{cases} u = \arctan t \\ dv = 2tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{1+t^2} \\ v = t^2 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} l_7 &= \left[t^2 \arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} + [\arctan t - t]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 1 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

8.

$$l_8 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[e^{\arcsin\frac{1}{n}} + e^{\arcsin\frac{2}{n}} + ... + e^{\arcsin\frac{n}{n}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\arcsin\frac{i}{n}}$$

alors si on pose $x_i = \frac{i}{n}$ on obtient :

$$a = 0, b = 1$$
$$f(x_i) = e^{\arcsin(x_i)}, \forall i = 1, ..., n$$

donc

$$f(x) = e^{\arcsin x}.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\arcsin\frac{i}{n}} = l_8 \Leftrightarrow l_8 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{\arcsin x}dx$$

$$CV : t = \arcsin x \Leftrightarrow \sin t = x \Rightarrow dx = \cos t.dt$$

d'où

$$l_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t.dt$$

$$1\grave{e}re \text{ IPP} : \begin{cases} u = \cos t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin t.dt \\ v = e^t \end{cases}$$

d'où

$$l_8 = \left[e^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t.dt = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t.dt$$

$$2\grave{e}me \text{ IPP} : \begin{cases} u = \sin t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos t.dt \\ v = e^t \end{cases}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t.dt = \left[e^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - l_8 \Leftrightarrow l_8 = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - l_8 \Leftrightarrow l_8 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right).$$

9.

$$l_9 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+n)\left[1+\ln(i+n)-(\ln n)\right]^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{i}{n}+1\right)\left[1+\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]^2}$$

alors si on pose $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ on obtient

$$a = 1, b = 2$$
$$f(x_i) = \frac{1}{x_i\left[1+\ln x_i\right]^2}, \forall i = 1, ..., n$$

donc
$$f(x)=\frac{1}{x\left[1+\ln x\right]^2}.$$
Comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a
$$\int_1^2 f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{i}{n}+1\right)\left[1+\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]^2}=l_9$$
donc
$$l_9=\int_1^2\frac{1}{x\left[1+\ln x\right]^2}dx$$
$$CV:t=1+\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}\Rightarrow l_9=\int_1^{1+\ln 2}\frac{dt}{t^2}=\frac{\ln 2}{1+\ln 2}.$$

10. $l_{10}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}$
$$l_{10}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\Rightarrow\ln(l_{10})=\ln\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right),$$
d'où
$$\ln(l_{10})=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right),$$
car ln est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, or
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right)&=\ln\left[\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}(n+i)\right)^{\frac{1}{n}}\right]\\&=\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(n+i)\right)=-\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(n+i)\\&=-\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(n\left(1+\frac{i}{n}\right)\right)\\&=-\ln n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\end{aligned}$$
alors si on pose $x_i=1+\frac{i}{n}$ on obtient :
$$a=1,b=2$$
$$f(x_i)=\ln(x_i),\forall i=1,...,n$$
donc
$$f(x)=\ln x.$$

Comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et on a

$$\int_1^2 \ln x \; dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \ln\left(l_{10}\right)$$

d'où

$$\ln\left(l_{10}\right) = \int_1^2 \ln x.dx$$

$$IPP: \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

donc

$$\ln\left(l_{10}\right) = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1 = \ln\left(4e^{-1}\right)$$

d'où

$$l_{10} = 4e^{-1}.$$

11.

$$l_{11} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k}\right]$$

On a pour tout $k = 1, ..., n$

$$\sqrt{k} - 1 \le \left[\sqrt{k}\right] < \sqrt{k}$$

d'où

$$\begin{array}{l} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}1 \le \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right] < \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k} \\ \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right] < \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k} \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right] \le \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}, \end{array}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$
Par conséquent,

$$l_{11} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

si on pose $x_k = \frac{k}{n}$ alors

$$a = 0, b = 1$$

$$f\left(x_k\right) = \sqrt{\frac{k}{n}}, \forall k = 1, ..., n$$

donc

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = l_{11} \Leftrightarrow l_{11} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}.$$

Exercice 6

1.

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} - \frac{1}{2n},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{i}{n}+1}.$$

On pose $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ alors

$$a = 1, b = 2$$
$$f(x_i) = \frac{1}{x_i}, \forall i = 1, ..., n$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Comme f est continue sur $[1,2]$ alors f est intégrable sur $[1,2]$, et en utilisant les sommes de Riemann, on a

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{i}{n}+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_1^2 \frac{1}{x}.dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$, on fait un changement d'indice :
$i = k - n \Leftrightarrow k = i + n$, d'où

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1+2n},$$

on fait encore un autre changement d'indice : $p = 2i + 1$, alors

$$V_n = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n},$$

d'une autre part, on a

$$\frac{1}{2}U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+2n} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-2} \frac{1}{p+2n},$$

par un changement d'indice. Par conséquent on obtient

$$\frac{1}{2}U_n + V_n = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-2} \frac{1}{p+2n} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = U_{2n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = U_{2n} - \frac{1}{2}U_n,$$

or la suite $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc converge vers la même limite $\ln 2$, et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi et on a

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Exercice 7

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} |x|\,dx &= \int_{-2}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{3} |x|\,dx \\
&= -\int_{-2}^{0} x dx + \int_{0}^{3} x dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{0}^{3} \\
&= \frac{13}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 8

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ , si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ , si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2} f(x)\,dx &= \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{1} dx = [x]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 9

L'aire du plan compris entre l'axe des abcisses, le graphe de la fonction $f(x) = \tan x$ et les deux droites verticales $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{3}$ est égale la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
$$= -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{2}.$$

2.12 Exercices sans solution

Exercice 1
Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$
1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.

Exercice 2
Soit α un réel strictement positif.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i\alpha}{n}} = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}}.$$

Exercice 3
Calculer la limite de la suite

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}.$$

CHAPITRE

3 Equations différentielles

Introduction

Dans ce chapitre, on présente les méthodes de calcul classiques, concernant la résolution des équations différentielles programmées pour ce semestre à savoir les équations différentielles de premier ordre, d'abord linéaires puis celles de Bernoulli et de Riccati ensuite celles du second ordre avec coefficients constants. Il y aura les outils de base avec plus de pratique que de théorie pour permettre à l'étudiant d'assimiler ces notions dont il aura certainement besoin quelque soit son orientation scientifique.

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1.1 *On appelle équation différentielle toute équation dans laquelle figurent l'inconnue qui est une fonction y de classe C^n d'une variable x et ses fonctions dérivées de différents ordres $y', y'', ..., y^{(n)}$,*

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

sachant que la dérivée y' de y par rapport à x est telle que $y' = \frac{dy}{dx}$.

Définition 3.1.2 *On appelle ordre d'une équation différentielle, l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation différentielle.*

Définition 3.1.3 *On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle,*

$$\begin{array}{rccc} y: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y(x) \end{array}$$

telle que y est $n-$fois dérivable en tout point de I et vérifie cette équation différentielle.

Définition 3.1.4 *Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire s'il n'y a pas d'exposant ni pour la fonction inconnue y ni pour ses dérivées successives $y', y'', ..., y^{(n)}$, elle est de la forme*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_n(x)\, y = f(x), \tag{3.1}$$

où f et a_i sont des fonctions continues pour $i = 0, ..., n$ et $a_0 \neq 0$.

Définition 3.1.5 *Si y est fonction d'une seule variable, l'équation est appelée équation différentielle ordinaire (EDO).*

Exemples 3.1.6 .

1. $y' \ln x + x^2 y + \cos x = 0$ *équation différentielle linéaire d'ordre* 1, *car elle est de la forme* (3.1) .
2. $8y'' + y' - 3y = xe^x \sin x$ *équation différentielle linéaire d'ordre* 2, *car elle est de la forme* (3.1) .
3. $y'' + (y')^2 = -1$ *équation différentielle d'ordre* 2, *non linéaire car sa première dérivée est à la puissance* 2.
4. $y^{(4)} + 5yy'' + y = 3$ *équation différentielle d'ordre* 4, *non linéaire.*

3.2 Equations différentielles d'ordre 1

3.2.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à variables séparables

Définition 3.2.1 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *à variables séparables, toute équation de la forme*

$$y' = f(x)\, h(y) \tag{3.2}$$

où f *et* h *sont des fonctions de classe* C^1 *sur intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Résolution

On peut ramener cette équation à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dite à variables séparées de la forme

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

où $g(y) = \frac{1}{h(y)}$, $\forall y \in I$, tel que $h(y) \neq 0$, puis on intègre les deux cotés chacun par rapport à sa variable.

Exemple 3.2.2 *Résoudre (intégrer) les équations différentielles suivantes*

1. $y' - x^2 y = x^2$
2. $y'(x^2 - 3) + 2xy = 0.$
3. $y'(x^2 + 1) = \sqrt{1 - y^2}.$

Solution

1.
$$y' - x^2 y = x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (1 + y)\, x^2$$

en séparant les variables et en supposant que $y \neq -1$, *on a*

$$\frac{dy}{1 + y} = x^2 dx,$$

d'où en intégrant le côté gauche par rapport à y et le côté droit par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} \ln|1+y| &= \frac{1}{3}x^3 + c, c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |1+y| = e^{\frac{1}{3}x^3+c} \\ &\Rightarrow y = e^{\frac{1}{3}x^3+c} - 1, \end{aligned}$$

alors en posant $k = \pm e^c$ on a

$$y(x) = ke^{\frac{1}{3}x^3} - 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'\left(x^2-3\right) - 2xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(x^2-3\right) = 2xy$$

en supposant que $x \neq -\sqrt{3}$ et $x \neq \sqrt{3}$, on a

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2-3}dx,$$

d'où

$$\ln|y| = \ln\left|x^2-3\right| + c, c \in \mathbb{R},$$

alors en posant $k = \pm e^c$ on a

$$y(x) = k\left(x^2-3\right), k \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'\left(x^2+1\right) = \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(x^2+1\right) = \sqrt{1-y^2}$$

en supposant que $y \neq -1$ et $y \neq 1$, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{x^2+1}$$

d'où

$$\arcsin y = \arctan x + k, k \in \mathbb{R},$$

par suite

$$y(x) = \sin(\arctan x + k), k \in \mathbb{R}.$$

Remarque Pour déterminer la constante k il suffit de donner une condition initiale , $y_0 = y(x_0)$.

3.2.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 homogènes

Définition 3.2.3 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *homogène ou sans second membre, toute équation différentielle de la forme*

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = 0 \tag{3.3}$$

où a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La résolution de l'équation (3.3) , consiste à séparer les variables tel que

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx,$$

d'où en intégrant

$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx + c, c \in \mathbb{R}$$

par suite la solution de (3.3) est dite solution homogène et elle est donnée par

$$y_{\text{hom}}(x) = ke^{-\int a(x)dx},\ \text{où } k = e^c.$$

Définition 3.2.4 *Pour une équation homogène, la solution triviale $y = 0$ est une solution.*

Remarque : La solution ici n'est pas unique, mais si on a de plus une solution particulière y_p pour la condition initiale $x_0 \in I$, telle que $y_p = y(x_0)$, alors on pourra calculer la constante k et dans ce cas, l'équation (3.3) possèdera une solution unique.

Exemple 3.2.5 *Résoudre l'équation différentielle homogène $3y' + e^x y = 0$.*

$$3y' + e^x y = 0 \Leftrightarrow 3\frac{dy}{dx} = -e^x y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{3}e^x dx,$$

d'où en intégrant les deux membres

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}\int e^x dx + c, c \in \mathbb{R}$$

par suite

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}e^x + c,$$

donc la solution homogène est donnée par

$$y_{\text{hom}}(x) = ke^{-\frac{1}{3}e^x},\ \text{où } k = \pm e^c$$

telle que $y = 0$ est une solution triviale.

3.2.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre

Définition 3.2.6 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *avec second membre ou non homogène, toute équation différentielle de la forme*

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x) \tag{3.4}$$

où a, b et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec a non identiquement nulle sur I.

Méthode de résolution

Etape 1 Tout d'abord on résoud l'équation homogène Eq. Hom associée à l'équation (3.4),

$$\text{Eq. Hom : } a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0, \tag{3.5}$$

qui est une équation à variables séparables

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{a(x)}{b(x)} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{a(x)}{b(x)}dx,$$

d'où en intégrant on a

$$\ln|y| = -\int \frac{a(x)}{b(x)}dx + c, c \in \mathbb{R}$$

par suite la solution homogène de (3.4) est donnée par

$$\begin{aligned} &|y_{\text{hom}}(x)| = e^{-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx + c} \\ &\Leftrightarrow y_{\text{hom}}(x) = ke^{-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx}, \text{où } k = \pm e^{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Etape 2 Pour avoir la solution générale de l'équation différentielle (3.4), on distingue deux cas :

Cas 1 *Si on connait une solution particulière y_p de l'équation* (3.4)*, alors on donne la solution générale de* (3.4) *par la formule*

$$y_{gle} = y_{\text{hom}} + y_p \tag{3.6}$$

Cas 2 *Si on ne connait pas de solution particulière de l'équation* (3.4)*, alors on procède par la méthode de la variation de la constante, c'est à dire remplacer la solution homogène y_{Hom} dans l'équation* (3.4) *en considérant la constante k comme une fonction de la variable x.*

Preuve de la formule (3.6) **:**
Soit y_p une solution particulière de l'équation (3.4), et y_{gle} une solution générale de l'équation (3.4), alors $y_{gle} - y_p$ est une solution de l'équation homogène (3.5), en effet,

y_p vérifie (3.4) alors

$$a(x)\,y_p'(x) + b(x)\,y_p(x) = f(x)$$

et y_{gle} vérifie aussi (3.4) alors

$$a(x)\,y_{gle}'(x) + b(x)\,y_{gle}(x) = f(x),$$

et en calculant la différence on a

$$a(x)\,(y_{gle}(x) - y_p(x))' + b(x)\,(y_{gle}(x) - y_p(x)) = 0$$

d'où $y_{gle} - y_p$ vérifie l'équation homogène (3.5), ainsi

$$y_{gle} - y_p = y_{\text{hom}} \Leftrightarrow y_{gle} = y_{\text{hom}} + y_p.$$

□

Exemple 3.2.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' \cos x + y \sin x = 1. \tag{3.7}$$

Solution

Equation homogène : On commence par écrire l'équation homogène de l'équation (3.7) *sous la forme*

$$\textit{Eq. Hom} : y' \cos x + y \sin x = 0. \tag{3.8}$$

C'est une équation à variables séparables

$$(3.8) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

d'où en intégrant on a

$$\ln|y| = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + c \Rightarrow y = k\cos x, \text{ où } k = \pm e^c.$$

Par conséquent, la solution homogène de (3.7) *est donnée par*

$$y_{\text{hom}}(x) = k\cos x, \text{ où } k \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

On remarque ensuite que cette équation différentielle admet comme solution particulière évidente la fonction $y_p = \sin x$, *en effet* $y' = \cos x$ *d'où* y_p *vérifie l'équation* (3.7), *donc on peut utiliser le cas 1 et on a*

$$y_{gle}(x) = k\cos x + \sin x, \ k \in \mathbb{R}.$$

Remarque *Si on ne remarque pas que l'équation* (3.7) *admet une solution particulière on peut toujours utiliser la méthode de la variation de la constante* k *dans la solution homogène* $y_{Hom}(x) = k\cos x$. *En effet,*

$$y_{\text{hom}}(x) = k(x)\cos x \Rightarrow y'(x) = k'\cos x - k\sin x$$

alors en remplaçant dans (3.7), *on obtient*

$$k'\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow dk = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

et en intégrant on a

$$k(x) = \tan x + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Puis on remplace dans (3.9) *et on récupère la solution générale directement*

$$y_{gle}(x) = (\tan x + c)\cos x$$
$$\text{d'où } y_{gle}(x) = \sin x + c\cos x, \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.8 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y' + y = e^{-x}, \tag{3.10}$$

avec la solution particulière $y(0) = 1$.

Solution

$$\text{Eq. Hom : } y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

alors en intégrant des deux cotés on obtient

$$\ln|y| = -x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

d'où en posant $k = \pm e^{c_1}$

$$y_{\text{hom}}(x) = ke^{-x}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

La variation de la constante

On fait varier la constante k *, on a alors*

$$y'(x) = k'e^{-x} - ke^{-x},$$

puis on remplace dans (3.10) *pour obtenir*

$$k' = 1 \Leftrightarrow dk = dx$$

d'où en intégrant on a

$$k(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$$

par conséquent

$$y_{gle}(x) = (x + c)e^{-x}, c \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

comme $y(0) = 1$ *alors on remplace dans* (3.11) *pour avoir* $c = 1$ *donc*

$$y(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Exemple 3.2.9 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$\left(1 + x^2\right) y' - \frac{y}{\arctan x} = \arctan x \tag{3.12}$$

$$\text{Eq. Hom : } \left(1 + x^2\right) y' - \frac{y}{\arctan x} = 0,$$

$$\left(1 + x^2\right) y' - \frac{y}{\arctan x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{(1 + x^2)\arctan x}.$$

En intègrant des deux côtés , on obtient

$$\ln|y| = \int \frac{1}{(1 + x^2)\arctan x} dx + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$CV : t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1 + x^2}$$

d'où

$$\ln|y| = \int \frac{dt}{t} + c_1 = \ln|t| + c_1, c_1 \in \mathbb{R},$$

alors

$$\ln|y| = \ln|\arctan x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R},$$

donc en posant $k = \pm e^{c_1}$

$$y_{\text{hom}}(x) = k \arctan x, \text{ où } k \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

<u>La variation de la constante</u>

On fait varier la constante k , *on a alors*

$$y'(x) = k' \arctan x + \frac{k}{1+x^2},$$

puis on remplace dans (3.12) *pour obtenir*

$$\left(1+x^2\right)\left[k' \arctan x + \frac{k}{1+x^2}\right] - k = \arctan x.$$

d'où

$$k'\left(1+x^2\right) = 1 \Leftrightarrow k' = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow dk = \frac{dx}{1+x^2}$$

Par intégration, on obtient

$$k(x) = \arctan x + c,\ c \in \mathbb{R},$$

puis on remplace dans (3.13)

$$y_{\text{hom}}(x) = (\arctan x + c) \arctan x$$

et enfin on a la solution générale

$$y_{gle}(x) = \arctan^2 x + c \arctan x,\ c \in \mathbb{R}.$$

3.2.4 Equations de Bernoulli

Définition 3.2.10 *Une équation de Bernoulli est une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 de la forme*

$$y'(x) + a(x) y(x) + b(x) y^{\alpha}(x) = 0 \tag{3.14}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \neq 1$ *et* a, b *sont deux fonctions données, de classe* C^1 *sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

<u>Méthode de résolution</u>

Tout d'abord, on suppose que $y \neq 0$ car on cherche une solution non triviale.

La résolution consiste à diviser toute l'équation (3.14) par $y^{\alpha}(x)$, ce qui nous conduit après un changement de variables adéquat à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 .

En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} + \frac{a(x)}{y^{\alpha-1}(x)} + b(x) = 0 \tag{3.15}$$

on fait le CV : $z(x) = y^{1-\alpha}(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)}$, puis on dérive

$$z'(x) = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}(x)\, y'(x) = (1-\alpha)\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)},$$

donc $\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} = \frac{1}{1-\alpha} z'(x)$, ensuite on remplace dans (3.15), d'où

$$\frac{1}{(1-\alpha)} z'(x) + a(x)\, z(x) + b(x) = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qu'on sait résoudre.

Exemple 3.2.11 *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$y' + xy = xy^2, \tag{3.16}$$

Solution :

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = 2$.

On suppose que $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.16) *par* y^2

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y} = x \tag{3.17}$$

$$CV : z(x) = y^{-1}(x) = \frac{1}{y(x)}, \text{ d'où } z'(x) = \frac{-y'(x)}{y^2(x)},$$

puis on remplace dans (3.17) *pour trouver*

$$-z' + xz = x \tag{3.18}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On remarque qu'on peut résoudre cette équation par la méthode de séparation des variables ou par la méthode de la variation de la constante.

Méthode de la séparation des variables

$$-z' + xz = x \Leftrightarrow z' = x(z-1) \Leftrightarrow \frac{dz}{z-1} = xdx,$$

et en intégrant de chaque côté on a

$$\begin{aligned} &\ln|z-1| = \tfrac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |z-1| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c.e^{\frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z - 1 = ke^{\frac{x^2}{2}} \text{ avec } k = \pm e^c, \end{aligned}$$

d'où

$$z_{gle}(x) = 1 + ke^{\frac{x^2}{2}}, \text{avec } k = \pm e^c \in \mathbb{R}.$$

et comme $y(x) = \frac{1}{z(x)}$, *alors*

$$y_{gle}(x) = \frac{1}{1 + ke^{\frac{x^2}{2}}}, k \in \mathbb{R}.$$

Pour plus d'explications, on va calculer z *une deuxième fois par la méthode de la variation de la constante*

Méthode de la variation de la constante

On résoud d'abord l'équation homogène

$$-z' + xz = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = x$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\ln|z| = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1,\ \ c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow |z| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c_1} = e^{c_1}.e^{\frac{1}{2}x^2} \\
&\Leftrightarrow z = \pm e^{c_1}.e^{\frac{1}{2}x^2} = ke^{\frac{1}{2}x^2} \text{ avec } k = \pm e^{c_1}.
\end{aligned}$$

alors

$$z_{\text{hom}} = ke^{\frac{1}{2}x^2}. \tag{3.19}$$

On fait varier la constante k *, on a alors*

$$z' = k'e^{\frac{1}{2}x^2} + kxe^{\frac{1}{2}x^2},$$

puis on remplace dans (3.18) *pour obtenir*

$$-k'e^{\frac{1}{2}x^2} - kxe^{\frac{1}{2}x^2} + kxe^{\frac{1}{2}x^2} = x$$

d'où

$$k' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow dk = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

On intègre des deux côtés et on obtient

$$k(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} + K,\ \ K \in \mathbb{R},$$

puis on remplace dans (3.19)

$$z_{gle}(x) = \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} + K\right) e^{\frac{1}{2}x^2}$$

et enfin on a la solution générale

$$z_{gle}(x) = 1 + Ke^{\frac{1}{2}x^2},\ \ K \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.12 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{\sqrt{y}}, \tag{3.20}$$

Solution

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = -\frac{1}{2}$. *On suppose que* $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.20) *par* $y^{-\frac{1}{2}}$

$$y'\sqrt{y} + \frac{2}{x} y^{\frac{3}{2}} = e^x \tag{3.21}$$

$$CV : z(x) = y^{\frac{3}{2}}(x)\,,\ \text{d'où } z'(x) = \frac{3}{2} y'(x)\, y^{\frac{1}{2}}(x)\,,$$

puis on remplace dans (3.21) *et on obtient*

$$\frac{2}{3} z' + \frac{2}{x} z = e^x \tag{3.22}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Equation homogène

$$\frac{2}{3} z' + \frac{2}{x} z = 0 \tag{3.23}$$

$$(3.23) \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{3}{x} dx,$$

en intégrant on obtient

$$\begin{aligned} &\ln|z| = -3\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow |z| = e^{-3\ln|x| + c_1} = e^{c_1} e^{-3\ln|x|} \\ &\Leftrightarrow |z| = \tfrac{e^{c_1}}{x^3} \end{aligned}$$

d'où la solution homogène

$$z_{\text{hom}}(x) = \frac{k}{x^3},\ \text{où } k = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k, *alors*

$$z'(x) = \frac{k'(x)}{x^3} - 3\frac{k(x)}{x^4},$$

et on remplace dans l'équation (3.22) , *ce qui donne*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\left(\frac{k'(x)}{x^3} - 3\frac{k(x)}{x^4}\right) + \frac{2k(x)}{x^4} = e^x &\Leftrightarrow \frac{2}{3}\frac{k'(x)}{x^3} = e^x \\ &\Leftrightarrow dk = \frac{3}{2} x^3 e^x dx \Rightarrow k(x) = \frac{3}{2}\int x^3 e^x dx \end{aligned}$$

puis on intègre par parties 3 fois

IPP 1 : $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où

$$k(x) = \frac{3}{2}\left[x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx\right]$$

IPP 2 : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où

$$k(x) = \frac{3}{2}x^3e^x - \frac{9}{2}\left[x^2e^x - 2\int xe^x dx\right]$$

IPP 3 : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

d'où

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{3}{2}x^3e^x - \frac{9}{2}\left[x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)\right] \\ &= \frac{3}{2}x^3e^x - \frac{9}{2}\left[x^2e^x - 2(xe^x - e^x)\right] + c, \end{aligned}$$

d'où

$$k(x) = \frac{3}{2}e^x\left[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)\right] + c, c \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans la solution homogène z_{Hom}*, on obtient la solution générale de l'équation* (3.22)

$$z_{gle}(x) = \frac{1}{x^3}\left[\frac{3}{2}e^x\left[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)\right] + c\right], c \in \mathbb{R}$$

et comme $y_{gle} = z^{\frac{2}{3}}$ *alors la solution générale de l'équation* (3.20) *est donnée par*

$$y_{gle}(x) = \left(\frac{1}{x^3}\left[\frac{3}{2}e^x\left[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)\right] + c\right]\right)^{\frac{2}{3}}, c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.13 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$y' - \frac{1}{2x}y = 5x^2y^5. \tag{3.24}$$

Solution

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = 5$*. On suppose que* $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.24) *par* y^5

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{2xy^4} = 5x^2 \tag{3.25}$$

CV : $z(x) = y^{-4}(x)$*, d'où*

$$\begin{aligned} z'(x) &= -4y'(x)y^{-5}(x) \\ &\Rightarrow \frac{y'(x)}{y^5(x)} = -\frac{1}{4}z'(x), \end{aligned}$$

puis on remplace dans (3.25) *et on obtient*

$$-\frac{1}{4}z' - \frac{1}{2x}z = 5x^2 \tag{3.26}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Equation homogène

$$-\frac{1}{4}z' - \frac{1}{2x}z = 0 \tag{3.27}$$

$$(3.27) \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{2}{x}dx,$$

en intégrant on obtient

$$\begin{gathered}\ln|z| = -2\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow |z| = e^{-2\ln|x|+c_1} = e^{c_1}e^{-2\ln|x|} = \frac{e^{c_1}}{x^2}\end{gathered}$$

d'où la solution homogène est donnée par

$$z_{\text{hom}}(x) = \frac{k}{x^2}, \text{ où } k = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k. *Soit* $z(x) = \frac{k(x)}{x^2}$ *alors* $z' = \frac{k'}{x^2} - 2\frac{k}{x^3}$, *et on remplace dans l'équation* (3.26) , *ce qui donne*

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\left(\frac{k'}{x^2} - 2\frac{k}{x^3}\right) - \frac{k}{2x^3} = 5x^2 \quad &\Leftrightarrow -\frac{k'}{4x^2} = 5x^2 \Leftrightarrow dk = -20x^4dx \\ &\Rightarrow k = -4x^5 + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

et en remplaçant dans la solution homogène z_{Hom}, *on obtient la solution générale de l'équation* (3.26)

$$z_{gle}(x) = \frac{1}{x^2}\left[-4x^5 + c\right], c \in \mathbb{R}$$

et comme $y_{gle} = z^{-\frac{1}{4}}$ *alors la solution générale de l'équation* (3.24) *est donnée par*

$$y_{gle}(x) = \left(\frac{1}{x^2}\left[-4x^5 + c\right]\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(-4x^3 + cx^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}}, c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.14 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$y' + y - y^2(\cos x - \sin x) = 0. \tag{3.28}$$

Solution

C'est une équation de la forme (3.14) *avec* $\alpha = 2$. *On suppose que* $y(x) \neq 0$ *et on divise* (3.28) *par* y^2

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \cos x - \sin x \tag{3.29}$$

CV : $z(x) = y^{-1}(x) = \frac{1}{y(x)}()$ *d'où*

$$z'(x) = -y'(x)y^{-2}(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} \Rightarrow \frac{y'(x)}{y^2(x)} = -z'(x),$$

puis on remplace dans (3.29) *et on obtient :*

$$-z' + z = \cos x - \sin x \tag{3.30}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Equation homogène

$$-z' + z = 0 \tag{3.31}$$

$$(3.31) \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = dx,$$

en intégrant on obtient

$$\ln|z| = x + c_1, c_1 \in \mathbb{R},$$
$$|z| = e^{x+c_1} = e^{c_1}e^x$$

d'où la solution homogène est donnée par :

$$z_{\text{hom}}(x) = ke^x, \text{ où } k = \pm e^{c_1},$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k*, alors* $z'(x) = k'(x)e^x + k(x)e^x$*, et on remplace dans l'équation* (3.30) *, ce qui donne*

$$-k'e^x - ke^x + ke^x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow -k'e^x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow dk = e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx$$

d'où

$$k(x) = \int e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x dx - \int e^{-x}\cos x dx$$

On utilise l'intégration par parties

$$IPP : \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx$$

alors

$$k(x) = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx - \int e^{-x}\cos x dx = -e^{-x}\sin x + c, c \in \mathbb{R}$$

et en remplaçant dans la solution homogène z_{Hom}*, on obtient la solution générale, de l'équation* (3.30)

$$z_{gle}(x) = e^x\left(-e^{-x}\sin x + c\right) = ce^x - \sin x, c \in \mathbb{R},$$

et comme $y_{gle} = z^{-1}$ *alors la solution générale de l'équation* (3.28) *est donnée par*

$$y_{gle}(x) = (ce^x - \sin x)^{-1} = \frac{1}{ce^x - \sin x}, c \in \mathbb{R}.$$

avec $ce^x - \sin x \neq 0$.

3.2.5 Equations de Riccati

Définition 3.2.15 *Une équation de Riccati est une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 de la forme*

$$y'(x) = a(x)\, y^2(x) + b(x)\, y(x) + c(x) \tag{3.32}$$

où a, b *et* c *sont des fonctions données, continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *avec* $a(x) \neq 0$, $b(x) \neq 0$ *et* $c(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Remarque L'équation de Riccati est non linéaire.

<u>Méthode de résolution</u>

La résolution consiste à trouver d'abord une solution particulière de l'équation (3.32) notée $s(x)$ puis faire le changement de variables suivant

$$y(x) = z(x) + s(x) \Rightarrow y'(x) = z'(x) + s'(x),$$

ensuite on remplace dans (3.32), d'où

$$\begin{aligned} z'(x) + s'(x) &= a(x)\,(z(x) + s(x))^2 + b(x)\,(z(x) + s(x)) + c(x) \qquad (3.33) \\ &= a(x)\, z^2(x) + b(x)\, z(x) + a(x)\, s^2(x) + b(x)\, s(x) + c(x) + 2a(x)\, z(x)\, s(x) \end{aligned}$$

et comme $s(x)$ est une solution particulière de (3.32) alors elle vérifie

$$s'(x) = a(x)\, s^2(x) + b(x)\, s(x) + c(x)$$

donc

$$\begin{aligned} (3.33) \quad &\Leftrightarrow z'(x) = a(x)\, z^2(x) + b(x)\, z(x) + 2a(x)\, z(x)\, s(x) \\ &= a(x)\, z^2(x) + z(x)\,[b(x) + 2a(x)\, s(x)] \\ &\Leftrightarrow z'(x) - z(x)\,(b(x) + 2a(x)\, s(x)) - a(x)\, z^2(x) = 0 \end{aligned}$$

qui est une équation de Bernoulli, avec $\alpha = 2$.

Exemple 3.2.16 *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$xy' - y^2 + (2x+1)\, y - x^2 - 2x = 0, \ \textit{pour } x \neq 0 \tag{3.34}$$

Solution

$$(3.34) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x} y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right) y + x + 2. \tag{3.35}$$

On remarque que l'équation (3.35) *admet la fonction* $s(x) = x$ *comme solution particulière et on fait le changement de variables suivant :*

$$y = z + x \Rightarrow y' = z' + 1,$$

puis on remplace dans (3.35), d'où

$$z' + 1 = \frac{1}{x}(z + x)^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right)(z + x) + x + 2$$

ce qui est équivalent à

$$z' - \frac{1}{x}z^2 + \frac{z}{x} = 0 \Leftrightarrow xz' + z - z^2 = 0 \tag{3.36}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

On divise l'équation (3.36) par z^2, d'où

$$x\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \tag{3.37}$$

$$CV : t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2},$$

alors

$$(3.37) \Rightarrow -xt' + t = 1 \tag{3.38}$$

qui est une équation linéaire d'ordre 1 avec second membre.

<u>Equation homogène</u>

$$-xt' + t = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{x}$$

d'où en intégrant on obtient

$$\begin{gathered} \ln|t| = \ln|x| + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}, \\ |t| = e^{\ln|x| + c_1} = e^{c_1} e^{\ln|x|}, \end{gathered}$$

donc

$$t_{\text{hom}}(x) = kx,\ \text{avec } k = \pm e^{c_1}.$$

<u>Variation de la constante</u>

On fait varier la constante k alors $t' = k'x + k$, d'où

$$(3.38) \Rightarrow k' = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow dk = -\frac{dx}{x^2}$$

alors en intégrant on obtient

$$k(x) = \frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

et en remplaçant dans t_{hom}, on obtient

$$t_{gle}(x) = \left(\frac{1}{x} + c\right)x = 1 + cx,\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

par conséquent on a

$$z_{gle}(x) = \frac{1}{1 + cx},\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

et enfin

$$y_{gle}(x) = z_{gle} + x = \frac{1}{1 + cx} + x,\ \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.17 *Intégrer l'équation différentielle suivante, sachant que la fonction* $s(x) = \frac{1}{x}$ *est une solution particulière*

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}, \tag{3.39}$$

Solution *On fait le changement de variables suivant :*

$$y = z + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = z' - \frac{1}{x^2},$$

puis on remplace dans (3.39) , *d'où*

$$z' - \frac{1}{x^2} + \frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} - \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{x^2},$$

ce qui est équivalent à :

$$z' - \frac{z}{x} - z^2 = 0 \tag{3.40}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

On divise l'équation (3.40) *par* z^2, *tout en supposant que* $z \neq 0$, *d'où*

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} - 1 = 0 \tag{3.41}$$

$$CV : t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2},$$

alors

$$(3.41) \Rightarrow -t' - \frac{t}{x} = 1 \tag{3.42}$$

qui est une équation linéaire d'ordre 1 non homogène,

Equation homogène

$$-t' - \frac{t}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x}$$

d'où en intégrant on obtient

$$\ln|t| = -\ln|x| + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R},$$
$$|t| = e^{-\ln|x| + c_1} = e^{c_1} e^{-\ln|x|},$$

donc

$$t_{\text{hom}}(x) = \frac{k}{x}, \ \textit{avec } k = \pm e^{c_1}.$$

Variation de la constante

On fait varier la constante k *alors* $t' = \frac{k'}{x} - \frac{k}{x^2}$, *d'où*

$$(3.42) \Rightarrow k' = -x \Leftrightarrow dk = -x dx$$

alors en intégrant on obtient

$$k(x) = -\frac{x^2}{2} + c, \ c \in \mathbb{R},$$

et en remplaçant dans t_{Hom}*, on obtient :*

$$t_{gle}(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+c\right) = \frac{-x^2+2c}{2x},\ \ avec\ c \in \mathbb{R},$$

par conséquent on a

$$z_{gle}(x) = \frac{2x}{-x^2+2c},\ \ avec\ c \in \mathbb{R},$$

donc

$$y_{gle}(x) = z_{gle} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{-x^2+2c} + \frac{1}{x},\ \ avec\ c \in \mathbb{R}.$$

et enfin

$$y_{gle}(x) = \frac{x^2+2c}{x\left(-x^2+2c\right)},\ \ avec\ c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.18 *Intégrer l'équation différentielle suivante, sachant que la fonction* $s(x) = x+1$ *est une solution particulière*

$$y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2. \tag{3.43}$$

Solution *On remarque que l'équation* (3.43) *admet comme solution particulière la fonction* $s(x) = x+1$*, et on fait le changement de variables suivant*

$$y = z + (x+1) \Rightarrow y' = z' + 1,$$

puis on remplace dans (3.43) *, d'où*

$$z' + 1 - 2x\left(z + (x+1)\right) + \left(z + (x+1)\right)^2 = 2 - x^2,$$

ce qui est équivalent à

$$z' + 2z + z^2 = 0 \tag{3.44}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

On divise l'équation (3.44) *par* z^2 *tout en supposant que* $z \neq 0$*, d'où*

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{z} + 1 = 0$$

$$CV : t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2},$$

alors

$$(3.41) \Rightarrow -t' + 2t = -1 \tag{3.45}$$

qui est une équation linéaire d'ordre 1 avec second membre.

Equation homogène :

$$-t' + 2t = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = 2 \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = 2dx$$

d'où en intégrant on obtient :

$$\ln|t| = 2x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R},$$
$$\Leftrightarrow |t| = e^{2x+c_1} = e^{c_1}.e^{2x}$$

donc

$$t_{\text{hom}}(x) = ke^{2x},\ \text{avec } k = \pm e^{c_1}.$$

Variation de la constante

Ensuite on fait varier la constante k alors $t' = e^{2x}(k' + 2k)$, d'où

$$(3.45) \Rightarrow k' = e^{-2x} \Leftrightarrow dk = e^{-2x}dx$$

alors en intégrant on obtient :

$$k(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

et en remplaçant dans t_{hom}, on obtient :

$$t_{gle}(x) = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right) = ce^{2x} - \frac{1}{2},\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

par conséquent on a :

$$z_{gle}(x) = \frac{2}{2ce^{2x} - 1},\ \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

donc

$$y_{gle}(x) = z_{gle} + 1 + x = \frac{2}{2ce^{2x} - 1} + 1 + x,\ \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

et enfin

$$y_{gle}(x) = \frac{1 - x + 2ce^{2x}(x+1)}{2ce^{2x} - 1},\ \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

3.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.3.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 3.3.1 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, toute équation de la forme*

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(x) \tag{3.46}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 3.3.2 *On appelle équation homogène ou sans second membre associée à (E) l'équation*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Théorème 3.3.3 *La solution générale y_{gle} de l'équation différentielle non homogène est la somme d'une solution particulière y_p de cette équation non homogène et de la solution y_{Hom} de l'équation homogène*

$$y_{gle} = y_{Hom} + y_p.$$

Preuve :
On vérifie aisément que $y_{\text{hom}} + y_p$ est solution de l'équation (3.46), en effet

$$\begin{aligned} & a\left(y_{\text{hom}} + y_p\right)'' + b\left(y_{\text{hom}} + y_p\right)' + c\left(y_{\text{hom}} + y_p\right) \\ & = \left(ay''_{\text{hom}} + by'_{\text{hom}} + cy_{\text{hom}}\right) + \left(ay''_p + by'_p + cy_p\right) \\ & = f(x) \end{aligned}$$

Réciproquement, si y_p est une solution particulière de l'équation (3.46) et y est est une autre solution de l'équation (3.46) , alors leur différence est solution de l'équation homogène, en effet

$$\begin{aligned} & a\left(y - y_p\right)'' + b\left(y - y_p\right)' + c\left(y - y_p\right) \\ & = \left(ay'' + by' + cy\right) - \left(ay''_p + by'_p + cy_p\right) \\ & = f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

□

Remarques :

- La solution nulle $y = 0$ est une solution triviale de l'équation homogène.
- Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène alors pour tout α, β dans $\mathbb{R}$, on a $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation homogène aussi.

3.3.2 Méthode de résolution

Etape 1

On résoud d'abord l'équation homogène (sans second membre) :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.47}$$

On pose $y = e^{rx}$, où r est une constante, d'où $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$, puis on remplace dans (3.47) d'où

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0$$

ce qui est équivalent à

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3.48}$$

L'équation (3.48) est appelée "équation caractéristique" de l'équation différentielle (3.47) , on résoud cette équation en calculant d'abord son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, où on distingue 3 cas à savoir

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

L'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = 0$

Cas 1 : Si $\Delta > 0$ alors l'équation (3.48) admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et dans ce cas la solution homogène de l'équation (3.47) est sous la forme

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : Si $\Delta = 0$ alors l'équation (3.48) admet une solution double : $r = \frac{-b}{2a}$ et dans ce cas la solution homogène de l'équation (3.47) est sous la forme

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{rx}(A + Bx), \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 3 : Si $\Delta < 0$ alors l'équation (3.48) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \beta + i\omega$ et $r_2 = \beta - i\omega$ et dans ce cas la solution homogène de l'équation (3.47) est sous la forme

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{\beta x}(C\cos\omega x + D\sin\omega x), \ C, D \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

- Si $\Delta \geq 0$ alors on suppose que r est une solution réelle de l'équation caractéristique (3.48) et on fait le changement de variable $y(x) = ae^{rx}z(x)$. On dérive deux fois et on remplace dans (3.47), alors on obtient $e^{rx}[(2ar+b)z' + z''] = 0$, ce qui équivaut à
$$(2ar+b)z' + az'' = 0 \tag{3.49}$$
  — Si r est une solution double de l'équation caractéristique alors
$$r = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow 2ar + b = 0$$
  et dans ce cas
$$(3.49) \Leftrightarrow z'' = 0$$
  d'où en intégrant deux fois on a
$$\begin{aligned} & z(x) = c_1 x + c_2, \ \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow y(x) = ae^{rx}(c_1 x + c_2) = e^{rx}(ac_1 x + ac_2) \end{aligned}$$
  d'où en posant $ac_1 = A$ et $ac_2 = B$ $y(x) = e^{rx}(Ax + B)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

  — Si r est une solution simple de l'équation caractéristique (3.48) alors $2ar + b \neq 0$ et l'autre solution serait $r' = -\left(r + \frac{b}{a}\right)$ car leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$ et dans ce cas
$$(3.49) \Leftrightarrow \frac{z''}{z'} = -\frac{(2ar+b)}{a} = -2r - \frac{b}{a}$$
  d'où en intégrant deux fois on a
$$\begin{aligned} & \ln|z'| = -\left(2r + \tfrac{b}{a}\right)x + c_1, \ \text{avec } c_1 \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow z' = k_1 e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x}, \ \text{avec } k_1 = \pm e^{c_1} \\ & \Rightarrow z(x) = \frac{-k_1}{\left(2r+\frac{b}{a}\right)} e^{-\left(2r+\frac{b}{a}\right)x} + k_2, \ \text{avec } k_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ainsi

$$y(x) = \frac{-ak_1}{\left(2r + \frac{b}{a}\right)} e^{-\left(r+\frac{b}{a}\right)x} + k_2 e^{rx}$$

alors en posant $\frac{-ak_1}{\left(2r+\frac{b}{a}\right)} = A$ et $k_2 = B$, on a

$$y(x) = Ae^{r'x} + Be^{rx},\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (3.48) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \beta + i\omega$ et $r_2 = \beta - i\omega$ et dans ce cas l'équation (3.47) admet deux solutions

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\beta+i\omega)x} = e^{\beta x}(\cos\omega x + i\sin\omega x) \\ y_2 &= e^{(\beta-i\omega)x} = e^{\beta x}(\cos\omega x - i\sin\omega x) \end{aligned}$$

ce qui donne pour former les solutions réelles

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\beta x}\cos\omega x \\ Y_2 &= \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\beta x}\sin\omega x \end{aligned}$$

et comme toute combinaison linéaire est aussi solution de l'équation homogène (3.47) , alors

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{\beta x}\cos\omega x + De^{\beta x}\sin\omega x \\ &= e^{\beta x}(C\cos\omega x + D\sin\omega x) \end{aligned}$$

avec $C, D \in \mathbb{R}$.

□

Etape 2

Pour chercher une solution particulière de l'équation (3.46), on peut utiliser la table 3.1 (ci-dessous) qui dépend de la forme de la fonction $f(x)$.

Exemples 3.3.4 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $2y'' - y' = 3x^2 + 2x - 1$,

2. $y'' + y' + y = 5x + 1$,

3. $y'' - 6y' + 9y = -2e^{3x}$.

Solution

1.

$$2y'' - y' = 3x^2 + 2x - 1. \tag{3.50}$$

Equation homogène

$$2y'' - y' = 0$$

Equation caractéristique

$$2r^2 - r = 0. \tag{3.51}$$

Forme du 2ème membre $f(x) =$	Solution ou pas de l'équation caractéristique EC	Forme de la solution particulière y_p
$P_n(x)$, où P_n polynôme de degré n.	Si 0 n'est pas solution de l'EC	$y_p = R_n(x)$; polynôme de degré n
	Si 0 est une solution de l'EC de multiplicité k	$y_p = x^k R_n(x)$; $R_n(x)$ polynôme de degré n
$P_n(x)e^{\beta x}$ où P_n polynome de degré n.	Si β n'est pas solution de l'EC	$y_p = R_n(x)e^{\beta x}$; $R_n(x)$ polynôme de degré n
	Si β est solution de l'EC de multiplicité k	$y_p = x^k R_n(x)e^{\beta x}$; $R_n(x)$ polynôme de degré n
$P_n(x)cos(\omega x) + Q_m(x)sin(\omega x)$ où P_n polynôme de degré n et Q_m polynôme de degré m.	Si $i\omega$ et $-i\omega$ ne sont pas solutions de l'EC	$y_p = R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)$ où R_j, S_j des polynômes de degré j et $j = max(n, m)$
	Si $i\omega$ et $-i\omega$ sont solutions de l'EC	$y_p = x[R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)]$
$[P_n(x)cos(\omega x) + Q_m(x)sin(\omega x)]e^{\beta x}$ où P_n polynôme de degré n et Q_m polynôme de degré m	Si $\beta + i\omega$ et $\beta - i\omega$ ne sont pas solutions de l'EC	$y_p = [R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)]e^{\beta x}$ où $j = max(n, m)$
	Si $\beta + i\omega$ et $\beta - i\omega$ sont solutions de l'EC	$y_p = x^k e^{\beta x}[R_j(x)cos(\omega x) + S_j(x)sin(\omega x)]$ où R_j, S_j des polynômes de degré j et $j = max(n, m)$

TABLE 3.1 – Forme de la solution particulière

On a $\Delta = 1 > 0$ *ou bien il suffit de remarquer directement que*

$$(3.51) \Leftrightarrow r(2r-1) = 0$$

alors l'équation (3.51) *admet deux solutions réelles distinctes :* $r_1 = 0$ *et* $r_2 = \frac{1}{2}$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x) = A + Be^{\frac{1}{2}x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

<u>*Solution particulière* y_p</u>

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.50) *on remarque que le second membre* $f(x)$ *est un polynôme de degré 2, et que* 0 *est solution de l'équation caractéristique alors d'après la table 3.1, la solution particulière* y_p *de l'équation* (3.50) *aura la forme suivante*

$$y_p(x) = x\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^3 + bx^2 + cx$$

où a, b, c *sont des constantes réelles à déterminer , alors on dérive deux fois* y_p *et on remplace dans l'équation* (3.50) ,

$$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c,\ y_p'' = 6ax + 2b$$

$$(3.50) \Rightarrow -3ax^2 + x(12a - 2b) + 4b - c = 3x^2 + 2x - 1$$

en effectuant une identification entre les deux membres de l'équation, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ 12a - 2b = 2 \\ 4b - c = -1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -7 \\ c = -27 \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.50) *est donnée par*

$$y_p(x) = x\left(-x^2 - 7x - 27\right)$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = \left(A + Be^{\frac{1}{2}x}\right) - x\left(x^2 + 7x + 27\right), A, B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'' + y' + y = 5x + 1. \tag{3.52}$$

On a $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow \Delta = \left(\sqrt{3}i\right)^2$ *alors l'équation* (3.52) *admet deux solutions complexes conjuguées* $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *et* $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *d'où la solution homogène est*

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.52), *on remarque la forme du second membre, on a* $f(x) = 5x + 1$, *un polynôme de degré 1 et on remarque que* $r = 0$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique alors la solution particulière aura la forme suivante*

$$y_p(x) = ax + b$$

où a *et* b *sont des constantes réelles à déterminer, alors on dérive deux fois* y_p *et on remplace dans l'équation* (3.52),

$$y_p' = a,\ y_p'' = 0$$

$$(3.52) \Rightarrow ax + (a + b) = 5x + 1$$

alors par identification on obtient le système $\begin{cases} a = 5 \\ a + b = 1 \end{cases}$

donc

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.52) *est*

$$y_p(x) = 5x - 4$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + 5x - 4, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'' - 6y' + 9y = -2e^{3x}. \tag{3.53}$$

Equation homogène

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Equation caractéristique

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \tag{3.54}$$

On a $\Delta = 0$ *ou bien il suffit de remarquer directement que*

$$(3.54) \Leftrightarrow (r - 3)^2 = 0$$

alors l'équation (3.54) *admet une solution réelle double* $r_0 = 3$, *d'où la solution homogène est*

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^{3x} + Bxe^{3x} = e^{3x}(A + Bx), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.53), *on remarque la forme du second membre* $f(x) = -2e^{3x}$, *et comme* $r = 3$ *est solution double donc de multiplicité* 2, *de l'équation caractéristique* (3.54) *alors la solution particulière aura la forme suivante*

$$y_p(x) = \alpha x^2 e^{3x}$$

où α *est une constante réelle (ou polynôme de degré* 0 *) qu'il faut déterminer. On dérive deux fois* y_p *et on remplace dans l'équation* (3.53),

$$y_p' = \alpha e^{3x}\left(3x^2 + 2x\right),\ y_p'' = \alpha e^{3x}\left(9x^2 + 12x + 2\right)$$

$$(3.53) \Rightarrow 2\alpha e^{3x} = -2e^{3x}$$

alors par identification on a

$$\alpha = -1,$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.53) *est*

$$y_p(x) = -x^2 e^{3x}$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = e^{3x}(A + Bx) - x^2 e^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.3.5 (Supplémentaire) *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y'' + 2y' + 5y = \sin(2x)$.
2. $y'' - 5y' + 6y = e^x(x\sin x + \cos x)$.

Solution

1.

$$y'' + 2y' + 5y = \sin(2x) \tag{3.55}$$

<u>*Equation homogène*</u>

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

<u>*Equation caractéristique*</u>

$$r^2 + 2r + 5 = 0. \tag{3.56}$$

On a $\Delta = -16 < 0 \Rightarrow \Delta = (4i)^2$ *alors l'équation* (3.56) *admet deux solutions complexes conjuguées*

$$r_1 = -1 - 2i \text{ et } r_2 = -1 + 2i$$

d'où la solution homogène est

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{-x}\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

<u>*Solution particulière* y_p</u>

Pour calculer la solution particulière de (3.55), *on remarque le second membre* $f(x) = \sin(2x)$, *et que* $r = 2i$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique alors la solution particulière prend la forme suivante :*

$$y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

où a *et* b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_p

$$y_p' = 2(b\cos(2x) - a\sin(2x)),\ y_p'' = -4(a\cos(2x) + b\sin(2x))$$

et l'équation (3.55) *devient*

$$\begin{aligned} &(a+4b)\cos(2x) + (-4a+b)\sin(2x) = \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow (a+4b)\cos(2x) + (-4a+b-1)\sin(2x) = 0 \end{aligned}$$

alors on obtient le système

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -4a + b - 1 = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a = -\frac{4}{17} \\ b = \frac{1}{17} \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.55) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{17}(\sin(2x) - 4\cos(2x))$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = e^{-x}[A\cos(2x) + B\sin(2x)] + \frac{1}{17}(\sin(2x) - 4\cos(2x)),\quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'' - 5y' + 6y = e^x(x\sin x + \cos x). \tag{3.57}$$

Equation homogène

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Equation caractéristique

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \tag{3.58}$$

On a $\Delta = 1 > 0$ *alors l'équation* (3.57) *admet deux solutions réelles distinctes* $r_1 = 2$ *et* $r_2 = 3$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^{2x} + Be^{3x},\quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.57), *on a la forme du second membre,* $f(x) = e^x(x\sin x + \cos x)$, *et on note que* $r = 1 + i$ *n'est* *pas solution de l'équation caractéristique, donc la solution particulière aura la forme suivante (voir la table 3.1 ci-dessus)*

$$y_p(x) = e^x[(ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x]$$

où a, b, c *et* d *sont des constantes réelles à déterminer, alors on dérive deux fois* y_p

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x[\sin x((a-c)x+a+b-d)+\cos x((a+c)x+b+c+d)], \\ y_p'' &= e^x[\sin x(-2cx+2a+-2c-2d)+\cos x(2ax+2a+2b+2c)] \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.57), *d'où*

$$\begin{aligned} [x(a+3c)-3a+b-2c+3d]\sin x + [x(-3a+c)+2a-3b-3c+d]\cos x \\ = x\sin x + \cos x \end{aligned}$$

et on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ -3a+c=0 \\ -3a+b-2c+3d=0 \\ 2a-3b-3c+d=1 \end{cases}$$

et après résolution du système on trouve

$$\begin{cases} a=\frac{1}{10},\ b=-\frac{21}{50}, \\ c=\frac{3}{10},\ d=\frac{11}{25}, \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.57) *est*

$$y_p(x) = e^x\left[\left(\frac{1}{10}x-\frac{21}{50}\right)\sin x + \left(\frac{3}{10}x+\frac{11}{25}\right)\cos x\right]$$

et donc la solution générale est

$$y_{gle}(x) = Ae^{2x}+Be^{3x}+e^x\left[\left(\frac{1}{10}x-\frac{21}{50}\right)\sin x + \left(\frac{3}{10}x+\frac{11}{25}\right)\cos x\right],\quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque : En général, on peut chercher la solution particulière en utilisant la méthode de la variation des constantes, notemment si les coefficients de l'équation différentielle ne sont pas constants ou si le second membre $f(x)$ est différent des formes données dans la table 3.1.

En effet, en écrivant la solution homogène

$$y_{\text{hom}} = Ay_1 + By_2$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (3.47), on cherche une solution générale de (3.46) sous la forme

$$y_{gle} = Ay_1 + By_2$$

en considérant A et B comme deux fonctions qui vérifient

$$A'y_1 + B'y_2 = 0$$

alors en dérivant deux fois y_p et en la remplaçant dans (3.46), on obtient

$$a\left(A'y_1' + B'y_2'\right) = f\left(x\right)$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \frac{1}{a}f\left(x\right) \end{cases}$$

qu'on résoud pour avoir A' et B' puis par intégration A et B et enfin la solution générale y_{gle}.

Exemple 3.3.6 *Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisnt la méthode de variation des constantes.*

$$y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x} \tag{3.59}$$

Equation homogène

$$y'' + y = 0 \tag{3.60}$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(r + i\right)\left(r - i\right) = 0 \tag{3.61}$$

alors l'équation (3.61) *admet deux solutions complexes* $r_1 = i$ *et* $r_2 = -i$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}\left(x\right) = A\cos x + B\sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Variation des constantes. On remarque que $y_1 = \cos x$ *et* $y_2 = \sin x$ *sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène* (3.60) , *alors on cherche une solution générale de (3.59) sous la forme*

$$y = A\cos x + B\sin x$$

tel que A *et* B *sont deux fonctions qui vérifient le système*

$$\begin{cases} A'\cos x + B'\sin x = 0, \\ -A'\sin x + B'\cos x = \frac{1}{\sin^3 x}. \end{cases}$$

En multipliant la 1ère équation par $\sin x$ *et la 2ème par* $\cos x$*, puis en faisant la somme, on a*

$$B' = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \Leftrightarrow dB = \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

on intégre des deux côtés, en faisant le changement de variables $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\ dx$ *alors on obtient*

$$B = -\frac{1}{2\sin^2 x} + c_1, \; c_1 \in \mathbb{R}$$

puis en remplaçant dans le système, on a

$$A' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow dA = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

et après intégration on obtient

$$A = \cot x + c_2 = \frac{\cos x}{\sin x} + c_2,\ \ c_2 \in \mathbb{R}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} y_{gle} &= \frac{\cos^2 x}{\sin x} + c_2 \cos x - \frac{1}{2\sin x} + c_1 \sin x \\ &= \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x} + c_1 \sin x + c_2 \cos x = \frac{\cos 2x}{2\sin x} + c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{aligned}$$

avec $c_1,\ \ c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.3.7 *Résoudre l'équation*

$$y'' - \frac{1}{x}y' = x. \tag{3.62}$$

<u>*Equation homogène*</u>

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

ce qui donne

$$\ln|y'| = \ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

d'où

$$y' = c_2 x,\ \ \textit{avec}\ c_2 = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}$$

on intègre pour trouver

$$y_{\text{hom}} = Ax^2 + B,\ \ \textit{avec}\ A, B \in \mathbb{R}\ \textit{et}\ A = \frac{c_2}{2}.$$

<u>*Variation des constantes*</u>
On pose

$$y_1 = x^2\ \ \textit{et}\ y_2 = 1$$

telles que y_1 *et* y_2 *sont deux solutions linéairemnt indépendantes de l'équation homogène et on cherche une solution générale de (3.62) sous la forme*

$$y_p = Ay_1 + By_2$$

tel que A *et* B *sont deux fonctions qui vérifient*

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = x \end{cases}$$

la résolution de ce système donne

$$A' = \frac{1}{2},\ \ B' = -\frac{x^2}{2},$$

ce qui donne après intégration

$$A = \frac{x}{2} + k_1,\ B = -\frac{x^3}{6} + k_2,\ \textit{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{aligned} y_{gle} &= \left(\frac{x}{2} + k_1\right) x^2 - \frac{x^3}{6} + k_2 \\ &= k_2 + k_1 x^2 + \frac{x^3}{3} \ \textit{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque Pour déterminer les constantes $k_1$et k_2, il suffit de donner deux conditions initiales , $y_1 = y(x_0)$ et $y_2 = y'(x_0)$.

3.3.3 Principe de superposition

Théorème 3.3.8 *Etant donnée l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x) \tag{3.63}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f_1, f_2 sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La solution particulière y_p de (3.63) peut être exprimée par la somme des deux solutions particulières y_{p_1} et y_{p_2} des équations différentielles respectives :

$$ay'' + by' + cy = f_1(x)$$

et

$$ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

telles que

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Preuve :

On peut vérifier aisément que $y_{p_1} + y_{p_2}$ est solution de l'équation différentielle (3.63), en effet à cause de la linéarité de l'équation, on a

$$\begin{aligned} a(y_{p_1} + y_{p_2})'' + b(y_{p_1} + y_{p_2})' + c(y_{p_1} + y_{p_2}) &= \left(ay''_{p_1} + by'_{p_1} + cy_{p_1}\right) + \left(ay''_{p_2} + by'_{p_2} + cy_{p_2}\right) \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

□

Remarque Pour la solution générale y_{gle} de l'équation différentielle (3.63), il suffit d'écrire l'équation homogène puis la résoudre pour avoir la solution homogène y_{hom} et on obtient

$$y_{gle} = y_{\text{hom}} + y_{p_1} + y_{p_2}.$$

Exemple 3.3.9 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y'' - 3y' = (x+2)e^{2x} + (3\sin x + 2\cos x)$.
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$.

3. $y'' - 4y' + 3y = 3x + 2 + 4e^{x} + 5e^{-x}$.

Solution

1. On a

$$y'' - 3y' = (x+2)\,e^{2x} + 3\sin x + 2\cos x. \tag{3.64}$$

Equation homogène :

$$y'' - 3y' = 0.$$

Equation caractéristique :

$$r^2 - 3r = 0. \tag{3.65}$$

On a $\Delta = 9 > 0$ *alors l'équation* (3.65) *admet deux solutions réelles distinctes* $r_1 = 0$ *et* $r_2 = 3$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x) = A + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière y_p *de l'équation* (3.65) *on remarque le second membre* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *où* $f_1(x) = (x+2)\,e^{2x}$ *et* $f_2(x) = 3\sin x + 2\cos x$, *alors on va utiliser le principe de superposition tel que*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

où y_{p_1} *et* y_{p_2} *sont les solutions particulières des équations différentielles respectives*

$$y'' - 3y' = (x+2)\,e^{2x}$$

et

$$y'' - 3y' = 3\sin x + 2\cos x.$$

Calcul de y_{p_1}. *On a*

$$y'' - 3y' = (x+2)\,e^{2x}. \tag{3.66}$$

On remarque que $r = 2$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.65) *alors la solution particulière de l'équation* (3.66) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_1}(x) = e^{2x}(ax + b)$$

où a, b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_1}

$$\begin{aligned} y'_{p_1} &= e^{2x}[2ax + a + 2b], \\ y''_{p_1} &= e^{2x}[4ax + 4a + 4b], \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.66), *d'où*

$$\begin{aligned} &e^{2x}[-2ax + (a - 2b)] = e^{2x}(x+2) \\ &\Leftrightarrow e^{2x}[x(-2a-1) + (a - 2b - 2)] = 0 \end{aligned}$$

alors on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -2a - 1 = 0 \\ a - 2b - 2 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = -\frac{5}{4}, \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.66) *est*

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{4}e^{2x}(2x+5).$$

<u>Calcul de y_{p_2}</u>. On a

$$y'' - 3y' = 3\sin x + 2\cos x. \tag{3.67}$$

On remarque que $r = i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique (3.65) *alors la solution particulière de l'équation* (3.67) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_2}(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$$

où α, β sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois y_{p_2}

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= -\alpha\sin x + \beta\cos x, \\ y''_{p_2} &= -\alpha\cos x - \beta\sin x, \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.67), *d'où*

$$(3\alpha - \beta)\sin x + (-\alpha - 3\beta)\cos x = 3\sin x + 2\cos x$$

alors par identification on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 3 \\ -\alpha - 3\beta = 2 \end{cases}$$

et après résolution du système on trouve :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{7}{10}, \\ \beta = -\frac{9}{10}. \end{cases}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.67) *est*

$$y_{p_2}(x) = \frac{7}{10}\cos x - \frac{9}{10}\sin x.$$

D'où la solution particulière de l'équation (3.64) *est*

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}e^{2x}(2x+5) + \left(\frac{7}{10}\cos x - \frac{9}{10}\sin x\right).$$

et donc la solution générale de l'équation (3.64) *est*

$$y_{gle}(x) = A + Be^{3x} - \frac{1}{4}e^{2x}(2x+5) + \left(\frac{7}{10}\cos x - \frac{9}{10}\sin x\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. *On a*

$$y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x. \tag{3.68}$$

Equation homogène

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 2r + 2 = 0. \tag{3.69}$$

On a $\Delta = -4 < 0$ *alors l'équation* (3.69) *admet deux solutions complexes*

$$r_1 = -1 - i \text{ et } r_2 = -1 + i$$

d'où la solution homogène est

$$y_{\text{hom}}(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière y_p *de l'équation* (3.68), *on remarque le second membre* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *où* $f_1(x) = 2x$ *et* $f_2(x) = -\sin x$, *alors on peut utiliser le principe de superposition*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} *et* y_{p_2} *sont les solutions particulières des équations différentielles respectives*

$$y'' + 2y' + 2y = 2x$$

et

$$y'' + 2y' + 2y = -\sin x.$$

Calcul de y_{p_1}. *On a*

$$y'' + 2y' + 2y = 2x. \tag{3.70}$$

On remarque que $r = 0$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.69) *alors la solution particulière de l'équation* (3.68) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_1}(x) = ax + b$$

où a, b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_1}

$$y'_{p_1} = a,$$
$$y''_{p_1} = 0,$$

et on substitue dans l'équation (3.70). *D'où*

$$ax + a + b = x$$

alors on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

d'où

$$a = 1 \text{ et } b = -1.$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.70) *est*

$$y_{p_1}(x) = x - 1$$

Calcul de y_{p_2}. *On a*

$$y'' + 2y' + 2y = -\sin x. \tag{3.71}$$

On remarque que $r = i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique (3.69) *alors la solution particulière de l'équation* (3.71) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_2}(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

où α, β sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois y_{p_2}

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= -\alpha \sin x + \beta \cos x, \\ y''_{p_2} &= -\alpha \cos x - \beta \sin x, \end{aligned}$$

et on remplace dans l'équation (3.71) *, d'où*

$$(\alpha + 2\beta) \cos x + (-2\alpha + \beta) \sin x = -\sin x$$

alors par identification on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

d'où

$$\alpha = \frac{2}{5} \text{ et } \beta = -\frac{1}{5}.$$

Ainsi la solution particulière de l'équation (3.71) *est*

$$y_{p_2}(x) = \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x.$$

D'où la solution particulière de l'équation (3.68) *est*

$$y_p(x) = (x - 1) + \left(\frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \right).$$

et donc la solution générale de l'équation (3.68) *s'écrit*

$$y_{gle}(x) = e^{-x} (A \cos x + B \sin x) + (x - 1) + \left(\frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \right), A, B \in \mathbb{R}.$$

3. *On a*

$$y'' - 4y' + 3y = (3x + 2) + 4e^x + 5e^{-x}. \tag{3.72}$$

Equation homogène

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Equation caractéristique

$$r^2 - 4r + 3 = 0. \tag{3.73}$$

On a $\Delta = 4 > 0$ *alors l'équation* (3.73) *admet deux solutions réelles distinctes* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 3$ *d'où la solution homogène*

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p
Pour calculer la solution particulière y_p *de l'équation* (3.72), *on remarque le second membre,* $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, *où* $f_1(x) = 3x+2$, $f_2(x) = 4e^x$ *et* $f_3(x) = 5e^{-x}$*alors on va utiliser le principe de superposition, tel que*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3},$$

où y_{p_1}, y_{p_2}*et* y_{p_3} *sont les solutions particulières des équations différentielles respectives*

$$y'' - 4y' + 3y = 3x + 2,$$

$$y'' - 4y' + 3y = 4e^x,$$

et

$$y'' - 4y' + 3y = 5e^{-x}.$$

Calcul de y_{p_1}. *On a*

$$y'' - 4y' + 3y = 3x + 2. \tag{3.74}$$

On remarque que $r = 0$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique* (3.73) *alors la solution particulière de l'équation* (3.74) *aura la forme suivante (voir la table 3.1)*

$$y_{p_1}(x) = ax + b$$

où a, b *sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois* y_{p_1}

$$y'_{p_1} = a,$$
$$y''_{p_1} = 0,$$

et on remplace dans l'équation (3.74), *pour ttouver*

$$3ax - 4a + 3b = 3x + 2$$

et l'identification conduit au système suivant

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ -4a + 3b = 2 \end{cases}$$

d'où

$$a = 1 \text{ et } b = 2$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.74) *s'écrit*

$$y_{p_1}(x) = x + 2.$$

Calcul de y_{p_2}. On a

$$y'' - 4y' + 3y = 4e^{x}. \tag{3.75}$$

On remarque que $r = 1$ est solution de l'équation caractéristique (3.73) *. Donc la solution particulière de l'équation* (3.75) *s'écrit*

$$y_{p_2}(x) = \alpha x e^{x}$$

où α est une constante réelle à déterminer. On dérive deux fois y_{p_2}

$$y'_{p_2} = \alpha(1 + x)e^{x},$$
$$y''_{p_2} = \alpha(2 + x)e^{x},$$

et on remplace dans l'équation (3.75) *, d'où*

$$\alpha = -2$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.75) *s'écrit*

$$y_{p_2}(x) = -2xe^{x}.$$

Calcul de y_{p_3}. On a

$$y'' - 4y' + 3y = 5e^{-x}. \tag{3.76}$$

On remarque que $r = -1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique (3.73) *alors la solution particulière de l'équation* (3.76) *aura la forme (voir la table 3.1)*

$$y_{p_3}(x) = \alpha e^{-x}$$

où α est une constante réelle à déterminer. On dérive deux fois y_{p_2}

$$y'_{p_3} = -\alpha e^{-x},$$
$$y''_{p_3} = \alpha e^{x},$$

et on remplace dans l'équation (3.76) *, d'où*

$$\alpha = \frac{5}{8}$$

par conséquent la solution particulière de l'équation (3.76) *s'écrit*

$$y_{p_3}(x) = \frac{5}{8}e^{-x}.$$

D'où la solution particulière de l'équation (3.72)

$$y_p(x) = (x + 2) - 2xe^{x} + \frac{5}{8}e^{-x},$$

et donc la solution générale de l'équation (3.72) *est*

$$y_{gle}(x) = Ae^{x} + Be^{3x} + (x + 2) - 2xe^{x} + \frac{5}{8}e^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.4 Enoncés des exercices

Exercice 1
Résoudre les équations différentielles du 1^{er} ordre suivantes

1. $y' + xy = x$.
2. $y' - \frac{1}{x}y = \ln x$.
3. $y' + y\sin x = \sin x$.
4. $xy' - y = (x-1)\,e^x$.

Exercice 2
Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + xy = xy^2$.
2. $y' = -\frac{1}{x}y^2 + \frac{2}{x}y$.
3. $y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^4}y^{\frac{-3}{4}} = 0$.
4. $y' - y - 2e^{-x}\sqrt{y} = 0$.
5. $(x^3+1)\,y' - 3x^2y + xy^3 = 0$.
6. $y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}$, telle que $s(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.
7. $xy' - y^2 + (2x+1)\,y - x^2 - 2x = 0$, telle que $s(x) = x$ est une solution particulière.

Exercice 3
Résoudre les équations différentielles linéaires du $2^{ème}$ ordre suivantes

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. $y'' + y' - 2y = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$.
4. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x}$.
5. $y'' - 2y' + 2y = (5x+3)\,e^{-x} + (x^2-1)$.
6. $y'' + y' + y = 3e^x + (13x-4)\cos 2x + 6\sin 2x$.
7. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$.

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles avec des conditions initiales associées suivantes

1. $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.
2. $y'' + 2y' + 5y = 3$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. $-2y'' + 3y' + 2y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

3.5 Corrigés des exercices

Exercice 1

1. $y' + xy = x$ ...(1)
   On peut résoudre cette équation différentielle par l'une des deux méthodes suivantes où on suppose que $y \neq 1$, car $y = 1$ est une solution triviale de l'équation.

   - Méthode de la séparation des variables

     $$y' + xy = x \Leftrightarrow y' = x\,(1-y) \Leftrightarrow \frac{dy}{1-y} = xdx$$

     alors

     $$\begin{array}{l} \int \frac{dy}{1-y} = \int xdx \Leftrightarrow \ln|1-y| = \frac{-1}{2}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow |1-y| = e^c.e^{\frac{-1}{2}x^2} \Leftrightarrow 1-y = \pm e^c.e^{\frac{-1}{2}x^2} \end{array}$$

     d'où

     $$y_{gle} = 1 - Ke^{\frac{-x^2}{2}} \text{ avec } K = \pm e^c.$$

   - Méthode de la variation de la constante
     Tout d'abord on résoud l'équation homogène

     $$y' + xy = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -x \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -xdx$$

     alors

     $$\ln|y| = \frac{-1}{2}x^2 + c \Leftrightarrow y_{\text{hom}} = Ke^{\frac{-x^2}{2}}, \text{avec } K = e^c$$

     ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

     $$y' = K'e^{\frac{-x^2}{2}} - xKe^{\frac{-x^2}{2}},$$

     puis on remplace dans (1), on obtient

     $$K'e^{\frac{-x^2}{2}} - xKe^{\frac{-x^2}{2}} + xKe^{\frac{-x^2}{2}} = x \Leftrightarrow K' = xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow dK = xe^{\frac{x^2}{2}}dx$$

     alors

     $$K = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{x^2}{2}} + c,$$

     par conséquent

     $$y_{gle} = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right)e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 + ce^{\frac{-x^2}{2}}.$$

2. $y' - \frac{1}{x}y = \ln x$ ...(2)
   D'abord on résoud l'équation homogène

   $$y' - \frac{1}{x}y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

on suppose que $y \neq 0$, car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation homogène, d'où

$$\begin{aligned}
&\ln|y| = \ln x + c' \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{\ln x + c'} = e^{c'} x \\
&\Leftrightarrow y_{\text{hom}} = Kx, \text{ avec } K = \pm e^{c'}
\end{aligned}$$

ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$y' = K'x + K,$$

puis on remplace dans (2), on obtient

$$K'x = \ln x \Leftrightarrow dK = \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow K = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent :

$$y_{gle} = x \left(\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c \right), c \in \mathbb{R}.$$

3. $y' + y \sin x = \sin x$ ... (3)
On peut résoudre cette équation différentielle par l'une des deux méthodes suivantes où on suppose que $y \neq 1$, car $y = 1$ est une solution triviale de l'équation.

- Méthode de la séparation des variables

$$\begin{aligned}
&y' + y \sin x = \sin x \Leftrightarrow \tfrac{y'}{1-y} = \sin x \\
&\Leftrightarrow \tfrac{dy}{1-y} = \sin x.dx \Leftrightarrow \ln|1-y| = \cos x + c', \ c' \in \mathbb{R}, \\
&\Leftrightarrow |1-y| = e^{c'}.e^{\cos x} \Leftrightarrow 1 - y = K.e^{\cos x} \text{ avec } K = \pm e^{c'},
\end{aligned}$$

d'où

$$y = 1 - Ke^{\cos x}, K \in \mathbb{R}.$$

- Méthode de la variation de la constante
Tout d'abord on résoud l'équation homogène

$$y' + y \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\sin x.dx$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\ln|y| = \cos x + c' \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{\cos x + c'} = e^{c'}.e^{\cos x} \\
&\Leftrightarrow y = \pm e^{c'}.e^{\cos x}
\end{aligned}$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = K.e^{\cos x}, \text{ avec } K = \pm e^{c'} \in \mathbb{R},$$

ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$y' = K'e^{\cos x} - K \sin x e^{\cos x},$$

puis on remplace dans (3), on obtient

$$K'e^{\cos x} = \sin x \Leftrightarrow dK = \sin x.e^{-\cos x} dx \Rightarrow K = e^{-\cos x} + c, c \in \mathbb{R},$$

par conséquent

$$y_{gle} = 1 + ce^{\cos x}, c \in \mathbb{R}.$$

4. $xy' - y = (x-1)\,e^x ...\,(4)$
Tout d'abord on résoud l'équation homogène

$$xy' - y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

on suppose que $y \neq 0$, car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation homogène, d'où

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\ln|y| = \ln|x| + c' \\ &\Leftrightarrow |y| = e^{\ln|x|+c'} = e^{c'} e^{\ln|x|} \end{aligned}$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = Kx, \text{ avec } K = \pm e^{c'},$$

ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$y' = K'x + K,$$

puis on remplace dans (4) , on obtient

$$K'x^2 = (x-1)\,e^x \Leftrightarrow dK = \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right) dx$$

d'où

$$K = \int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx + c, c \in \mathbb{R}$$

pour la première primitive on utilise l'intégration par parties

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \\ dv = e^x dx \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = e^x \end{array} \right.$$

alors

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2} dx,$$

d'où

$$K = \frac{e^x}{x} + c,$$

par conséquent

$$y_{gle} = e^x + cx, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

1.

$$y' + xy = xy^2. \tag{3.77}$$

On remarque que c'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation (3.77) par y^2 en supposant que $y \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y} = x, \tag{3.78}$$

puis on fait le changement de variable suivant

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2},$$

ensuite on remplace dans (3.78) et on obtient

$$-z' + xz = x$$

qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre par la méthode de séparation des variables (ou par la méthode de la variation de la constante) comme sui

$$-z' + xz = x \Leftrightarrow \frac{z'}{z-1} = x \Leftrightarrow \frac{dz}{z-1} = xdx$$

on suppose que $z \neq 1$ car $z = 1$ est une solution triviale de l'équation, d'où

$$\ln|z-1| = \frac{x^2}{2} + c' \Leftrightarrow z = Ke^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

donc

$$y_{gle} = \frac{1}{Ke^{\frac{x^2}{2}} + 1}.$$

2.

$$y' = -\frac{1}{x}y^2 + \frac{2}{x}y. \tag{3.79}$$

C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation (3.79) par y^2 en supposant que $y \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{xy} = -\frac{1}{x} \tag{3.80}$$

puis on fait le changement de variable suivant

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2},$$

ensuite on remplace dans (3.80) et z vérifie l'équation

$$-z' - \frac{2z}{x} = -\frac{1}{x}$$

et on voit bien qu'on peut résoudre cette équation par la séparation de variables (ou par la méthode de la variation de la constante) comme suit

$$\begin{array}{c} -z' - \frac{2z}{x} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{z'}{1-2z} = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{dz}{1-2z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{-2dz}{1-2z} = -2\frac{dx}{x} \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{l} \ln|1-2z| = -2\ln|x| + c' \Leftrightarrow |1-2z| = e^{-2\ln|x|+c'} = e^{-2\ln|x|}e^{c'} \\ \Leftrightarrow 1-2z = \frac{K}{x^2}, \text{ avec } K = \pm e^{c'} \\ \Leftrightarrow z = \frac{x^2-K}{2x^2}, \text{ avec } K = \pm e^{c'} \in \mathbb{R} \end{array}$$

donc

$$y_{gle} = \frac{2x^2}{x^2 - K}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

3.
$$y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^4} y^{\frac{-3}{4}} = 0. \tag{3.81}$$
C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = \frac{-3}{4}$, alors on divise l'équation (3.81) par $y^{\frac{-3}{4}}$ en supposant que $y \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation et on obtient
$$y' y^{\frac{3}{4}} + \frac{y^{\frac{7}{4}}}{x} - \frac{1}{x^4} = 0, \tag{3.82}$$
puis on fait le changement de variable suivant :
$$z = y^{\frac{7}{4}} \Rightarrow z' = \frac{7}{4} y^{\frac{3}{4}} y',$$
ensuite on remplace dans (3.82) et on obtient
$$\frac{4}{7} z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^4} \tag{3.83}$$
qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre par la méthode de la variation de la constante comme suit

<u>Equation homogène</u>
$$\frac{4}{7} z' + \frac{1}{x} z = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = \frac{-7}{4x} \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{-7dx}{4x}$$
où on suppose que $z \neq 0$ car $z = 0$ est une solution triviale de l'équation homogène, d'où
$$\begin{aligned} \ln|z| = \tfrac{-7}{4} \ln|x| + c' &\Leftrightarrow |z| = e^{\frac{-7}{4} \ln|x| + c'} \\ &\Leftrightarrow |z| = e^{c'} . e^{\frac{-7}{4} \ln|x|} \\ &\Leftrightarrow z = \pm e^{c'} . e^{\frac{-7}{4} \ln|x|} \end{aligned}$$
d'où
$$z_{\text{hom}} = K x^{-\frac{7}{4}}, \text{ avec } K = \pm e^{c'} \in \mathbb{R},$$
ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où
$$z' = K' x^{-\frac{7}{4}} - \frac{7}{4} K x^{-\frac{11}{4}},$$
puis on remplace dans (3.83) , on obtient
$$\frac{4}{7} K' x^{-\frac{7}{4}} = x^{-4} \Leftrightarrow dK = \frac{7}{4} x^{\frac{-9}{4}} \Rightarrow K = -\frac{7}{5} x^{\frac{-5}{4}} + c$$
alors
$$z_{\text{hom}} = -\frac{7}{5} x^{-3} + c x^{-\frac{7}{4}}$$
par conséquent
$$y_{gle} = \left(-\frac{7}{5} x^{-3} + c x^{-\frac{7}{4}} \right)^{\frac{4}{7}}.$$

4.
$$y' - y - 2e^{-x}\sqrt{y} = 0 \tag{3.84}$$
C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = \frac{1}{2}$, alors on divise l'équation (3.84) par $y^{\frac{1}{2}}$ en supposant que $y \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation et on a
$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} - 2e^{-x} = 0 \tag{3.85}$$
puis on fait le changement de variable suivant
$$z = y^{\frac{1}{2}} \text{ alors } z' = \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}y',$$
ensuite on remplace dans (3.85) et on obtient
$$2z' - z = 2e^{-x} \tag{3.86}$$
qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre par la méthode de la variation de la constante comme suit

Equation homogène
$$2z' - z = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{2}$$
d'où
$$\begin{array}{c} \ln|z| = \frac{x}{2} + c', c' \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow |z| = e^{\frac{x}{2}+c'} = e^{c'}.e^{\frac{x}{2}} \end{array}$$
d'où
$$z_{\text{hom}} = Ke^{\frac{x}{2}}, \text{ avec } K = \pm e^{c'} \in \mathbb{R},$$
ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où
$$z' = K'e^{\frac{x}{2}} + \frac{K}{2}e^{\frac{x}{2}},$$
puis on remplace dans (3.86) , on obtient
$$K'e^{\frac{x}{2}} = e^{-x} \Leftrightarrow dK = e^{\frac{-3x}{2}}dx \Rightarrow K = \frac{-2}{3}e^{\frac{-3x}{2}} + c, c \in \mathbb{R},$$
alors
$$z_{gle} = \frac{-2}{3}e^{-x} + ce^{\frac{x}{2}},$$
par conséquent
$$y_{gle} = \left(\frac{-2}{3}e^{-x} + ce^{\frac{x}{2}}\right)^2, c \in \mathbb{R},$$

5.
$$\left(x^3 + 1\right)y' - 3x^2y + xy^3 = 0 \tag{3.87}$$

C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 3$, alors on divise l'équation (3.87) par y^3 en supposant que $y \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation et on a

$$\left(x^3+1\right)\frac{y'}{y^3} - \frac{3x^2}{y^2} + x = 0 \tag{3.88}$$

puis on fait le changement de variable suivant

$$z = y^{-2} = \frac{1}{y^2} \text{ alors } z' = -2y^{-3}y',$$

ensuite on remplace dans (3.88) et on obtient

$$\frac{-z'}{2}\left(x^3+1\right) - 3x^2z + x = 0 \tag{3.89}$$

qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre par la méthode de la variation de la constante comme suit

<u>Equation homogène</u>

$$\frac{-z'}{2}\left(x^3+1\right) - 3x^2z = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{6x^2}{x^3+1} \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{6x^2dx}{x^3+1}$$

comme $z > 0$ alors

$$\begin{gathered}\ln z = -2\ln\left|x^3+1\right| + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow z = e^{-2\ln\left|x^3+1\right|+c_1} = e^{c_1}.e^{-2\ln\left|x^3+1\right|}\end{gathered}$$

d'où

$$z_{\text{hom}} = \frac{K}{\left(x^3+1\right)^2},\ \text{avec } K = e^{c_1} \in \mathbb{R}_+,$$

ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$z' = \frac{K'\left(x^3+1\right)^2 - 6x^2\left(x^3+1\right)K}{\left(x^3+1\right)^4},$$

puis on remplace dans (3.89) , on obtient

$$\frac{K'}{2\left(x^3+1\right)} = x \Leftrightarrow dK = \left(2x^4+2x\right)dx$$

donc

$$K = \frac{2x^5}{5} + x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

alors

$$z_{gle} = \frac{2x^5+5x^2+c'}{5\left(x^3+1\right)^2},\ \text{avec } c' = 5c \in \mathbb{R}$$

par conséquent

$$y_{gle} = \frac{\sqrt{5}\left|x^3+1\right|}{\sqrt{\left|2x^5+5x^2+c\right|}}, c \in \mathbb{R}.$$

6.
$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}. \tag{3.90}$$

C'est une équation de Riccati, comme $s = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de l'équation, alors on fait le changement variable $y = z + \frac{1}{x}$, d'où $y' = z' - \frac{1}{x^2}$, alors en remplaçant dans l'équation (3.90), on obtient

$$z' - \frac{z}{x} - z^2 = 0 \tag{3.91}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, alors on divise l'équation (3.91) par z^2 en supposant que $z \neq 0$ car $z = 0$ est une solution triviale de l'équation et on a

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} - 1 = 0 \tag{3.92}$$

ensuite on fait le changement de variables suivant

$$t = z^{-1} = \frac{1}{z} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}$$

d'où

$$(3.92) \Leftrightarrow t' + \frac{t}{x} + 1 = 0 \text{ avec } t = z^{-1} \tag{3.93}$$

qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre comme d'habitude

<u>Equation homogène</u>

$$\begin{aligned} t' + \frac{t}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{-dx}{x} \\ \Leftrightarrow \ln|t| = -\ln|x| + c',\ c' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

d'où

$$t_{\text{hom}} = \frac{K}{x}, \text{ avec } K = \pm e^{c'} \in \mathbb{R}$$

ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$t' = \frac{K'x - K}{x^2}$$

$$\begin{aligned} (3.93) \Rightarrow \frac{K'}{x} &= -1 \Leftrightarrow dK = -xdx \\ &\Rightarrow K = -\frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc

$$t_{gle} = \frac{2c - x^2}{2x},$$

par suite

$$z_{gle} = \frac{2x}{2c - x^2},$$

et la solution générale est donnée par

$$y_{gle} = \frac{2x}{2c - x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 2c}{x\left(2c - x^2\right)}, c \in \mathbb{R}.$$

7.
$$xy' - y^2 + (2x+1)\,y - x^2 - 2x = 0. \tag{3.94}$$

C'est une équation de Riccati, et comme $s = x$ est une solution particulière de l'équation, alors on fait le changement variable $y = z + x$, d'où $y' = z' + 1$, alors en remplaçant dans l'équation (3.94), on obtient

$$xz' + z - z^2 = 0, \tag{3.95}$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. La division par z^2 de l'équation (3.95) - en supposant que $z \neq 0$ car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation - donne

$$x\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \tag{3.96}$$

ensuite on fait le changement de variables suivant

$$t = z^{-1} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}$$

d'où

$$(3.96) \Leftrightarrow -xt' + t - 1 = 0 \text{ avec } t = z^{-1} \tag{3.97}$$

qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre comme suit

<u>Equation homogène</u> :

$$-xt' + t = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{x}$$

d'où

$$\begin{aligned} \ln|t| &= \ln|x| + c', \;\; c' \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow |t| = e^{\ln|x|+c'} = e^{\ln|x|}.e^{c'} \end{aligned}$$

alors

$$t_{\text{hom}} = Kx, \text{ avec } K = \pm e^{c'} \in \mathbb{R}.$$

ensuite on fait varier la constante K comme fonction de x d'où

$$t' = K'x + K$$

$$(3.97) \Rightarrow K' = \frac{-1}{x^2} \Leftrightarrow dK = \frac{-1}{x^2}dx$$

donc

$$K = \frac{1}{x} + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

alors

$$t_{gle} = 1 + cx, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$z_{gle} = \frac{1}{1+cx}, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

par conséquent

$$y_{gle} = \frac{1}{1+cx} + x = \frac{1 + x + cx^2}{1+cx}, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ (équation homogène)
   Equation caractéristique

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -2.$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = Ae^{2x} + Bxe^{2x},\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

2. $y'' + y' - 2y = 0$ (équation homogène)
   Equation caractéristique

$$r^2 + r - 2 = 0 \Longleftrightarrow (r+2)(r-1) = 0 \Leftrightarrow r = -2 \vee r = 1$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = Ae^{-2x} + Be^{x},\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' + y' + y = 0$ (équation homogène)
   Equation caractéristique

$$r^2 + r + 1 = 0 \overset{\Delta<0}{\Longleftrightarrow} (r - r_1)(r - r_2) = 0$$

où $r_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,
d'où

$$y_{\text{hom}} = e^{\frac{-x}{2}} \left[A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right],\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

4.

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x}. \tag{3.98}$$

On sait que la solution générale de cette équation $y_{gle} = y_{\text{hom}} + y_p$, où y_{hom} est la solution de l'équation homogène et y_p est une solution particulière de l'équation (3.98).

Equation homogène

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Equation caractéristique

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Longleftrightarrow (r-3)(r-2) = 0 \Leftrightarrow r = 2 \vee r = 3$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = Ae^{2x} + Be^{3x},\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière y_p, on utilise le principe de superposition, on a

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est solution particulière de l'équation $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$ et y_{p_2} est solution particulière de l'équation $y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$.

- $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} ... (1)$
  On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (1). Comme $r = 3$ est solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
$$y_{p_1} = \alpha x e^{3x},$$
  puis on la dérive deux fois
$$y' = \alpha (1 + 3x) e^{3x} \text{ et } y'' = \alpha (6 + 9x) e^{3x},$$
  et en remplaçant dans (1), on obtient
$$\alpha e^{3x} = 2e^{3x} \Leftrightarrow \alpha = 2,$$
  d'où
$$y_{p_1} = 2xe^{3x}.$$
- $y'' - 5y' + 6y = e^{4x} ... (2)$
  On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (2). Comme $r = 4$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
$$y_{p_2} = \beta e^{4x},$$
  puis on la dérive deux fois
$$y' = 4\beta e^{4x} \text{ et } y'' = 16\beta e^{4x}$$
  et en remplaçant dans (2), on obtient
$$2\beta e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2},$$
  d'où
$$y_{p_2} = \frac{1}{2} e^{4x}.$$

donc
$$y_p = 2xe^{3x} + \frac{1}{2} e^{4x}$$
et par conséquent
$$y_{gle} = Ae^{2x} + Be^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2} e^{4x}.$$

5. $y'' - 2y' + 2y = (5x + 3) e^{-x} + x^2 - 1.$
   Equation homogène
$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$
   Equation caractéristique
$$r^2 - 2r + 2 = 0 \overset{\Delta<0}{\Longleftrightarrow} (r - r_1)(r - r_2) = 0,$$

où $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$,
d'où

$$y_{\text{hom}} = e^x (A \cos x + B \sin x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière y_p, on utilise le principe de superposition

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = (5x + 3)\, e^{-x}$ et y_{p_2} est solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = x^2 - 1$.

- $y'' - 2y' + 2y = (5x + 3)\, e^{-x} ...\, (3)$
  On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (3) . Comme $r = -1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme

  $$y_{p_1} = (\alpha x + \beta)\, e^{-x},$$

  puis on la dérive deux fois

  $$y' = (\alpha - \beta - \alpha x)\, e^{-x} \text{ et } y'' = (-2\alpha + \beta + \alpha x)\, e^{-x},$$

  puis en remplaçant dans (3) et en faisant l'identification, on obtient le système suivant
  $$\begin{cases} -4\alpha + 5\beta = 3 \\ 5\alpha = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{7}{5} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

  d'où
  $$y_{p_1} = \left(x + \frac{7}{5} \right) e^{-x}.$$

- $y'' - 2y' + 2y = x^2 - 1 ...\, (4)$
  On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (4) . Comme $r = 0$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme

  $$y_{p_2} = ax^2 + bx + c,$$

  puis on la dérive deux fois

  $$y' = 2ax + b \text{ et } y'' = 2a.$$

  En remplaçant dans (4) et après identification, on obtient le système suivant
  $$\begin{cases} 2a = 1 \\ -4a + 2b = 0 \\ 2a - 2b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

  d'où
  $$y_{p_2} = \frac{1}{2} x^2 + x.$$

donc

$$y_p = \left(x + \frac{7}{5}\right) e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + x$$

et par conséquent :

$$y_{gle} = e^x(A\cos x + B\sin x) + \left(x + \frac{7}{5}\right) e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + x, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

6. $y'' + y' + y = 3e^x + (13x - 4)\cos 2x + 6\sin 2x$.

<u>Equation homogène</u>

$$y'' + y' + y = 0.$$

<u>Equation caractéristique</u>

$$r^2 + r + 1 = 0 \Longleftrightarrow (r - r_1)(r - r_2) = 0,$$

où $r_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $r_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
d'où

$$y_{\text{hom}} = e^{\frac{-1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière y_p, on utilise le principe de superposition

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est solution particulière de l'équation

$$y'' + y' + y = 3e^x$$

et y_{p_2} est solution particulière de l'équation

$$y'' + y' + y = (13x - 4)\cos 2x + 6\sin 2x.$$

- $y'' + y' + y = 3e^x ... (5)$
  On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (5). Comme $r = 1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme $y_{p_1} = \alpha e^x$, puis on la dérive deux fois :

  $$y' = y'' = \alpha e^x,$$

  et en remplaçant dans (5), on obtient

  $$3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

  d'où

  $$y_{p_1} = e^x.$$

- $y'' + y' + y = (13x - 4)\cos 2x + 6\sin 2x ...\ (6)$
  On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (6) . Comme $r = 2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme

$$y_{p_2} = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x,$$

on la dérive deux fois

$$y' = (a + 2d + 2cx)\cos 2x + (c - 2b - 2ax)\sin 2x$$

et

$$y'' = (4c - 4ax - 4b)\cos 2x + (-4a - 4cx - 4d)\sin 2x$$

puis en remplaçant dans (6) et après identification, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -2a - 3c = 0 \\ -4a - 2b + c - 3d = 6 \\ -3a + 2c = 13 \\ a - 3b + 4c + 2d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{43}{13} \\ c = 2 \\ d = \frac{6}{13} \end{cases}$$

d'où

$$y_{p_2} = \left(-3x + \frac{43}{13}\right)\cos 2x + \left(2x + \frac{6}{13}\right)\sin 2x,$$

donc

$$y_p = e^x + \left(-3x + \frac{43}{13}\right)\cos 2x + \left(2x + \frac{6}{13}\right)\sin 2x$$

et par conséquent :

$$y_{gle} = e^{\frac{-1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + e^x + \left(-3x + \frac{43}{13}\right)\cos 2x + \left(2x + \frac{6}{13}\right)\sin 2x$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

7. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$

<u>Equation homogène</u>

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

<u>Equation caractéristique</u>

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Longleftrightarrow (r - r_1)(r - r_2) = 0,$$

où $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$
d'où

$$y_{\text{hom}} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)\ ,A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière y_p, on utilise le principe de superposition

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est solution particulière de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 2x$
et y_{p_2} est solution particulière de l'équation
$y'' + 2y' + 2y = -\sin x$.

- $y'' + 2y' + 2y = 2x ... (7)$
  On cherche une solution particulière y_{p_1} de l'équation (7) . Comme $r = 0$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
  $$y_{p_1} = ax + b,$$
  on la dérive deux fois
  $$y' = a \text{ et } y'' = 0,$$
  puis en remplaçant dans (7) et après identification, on obtient le système suivant
  $$2ax + 2a + 2b = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$
  d'où
  $$y_{p_1} = x - 1.$$
- $y'' + y' + y = -\sin x ... (8)$
  On cherche une solution particulière y_{p_2} de l'équation (8) . Comme $r = i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors elle est de la forme
  $$y_{p_2} = \alpha \cos x + \beta \sin x,$$
  on la dérive deux fois
  $$y' = -\alpha \sin x + \beta \cos x \text{ et } y'' = -\alpha \cos x - \beta \sin x$$
  puis en remplaçant dans (8) et après identification, on obtient le système suivant
  $$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{5} \\ \beta = \frac{-1}{5} \end{cases}$$
  d'où
  $$y_{p_2} = \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x,$$
  donc
  $$y_p = x - 1 + \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x,$$

et par conséquent :

$$y_{gle} = e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + x - 1 + \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. On a
$$y'' + y = 2\cos x, \tag{3.99}$$
avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.
Equation homogène
$$y'' + y = 0.$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow (r+i)(r-i) = 0,$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = \alpha \cos x + \beta \sin x \ , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.99) on remarque que le second membre $f(x) = 2\cos x$, et que $r = i$ est solution de l'équation caractéristique alors la solution particulière y_p de l'équation (3.99) s'écrit

$$y_p(x) = x(a\cos x + b\sin x)$$

où a et b sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois y_p puis on remplace dans l'équation (3.99),

$$\begin{aligned} y' &= (a+bx)\cos x + (b-ax)\sin x \\ y'' &= (-2a-bx)\sin x + (2b-ax)\cos x \end{aligned}$$

alors

$$2b\cos x - 2a\sin x = 2\cos x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

d'où

$$y_p = x\sin x.$$

Par suite

$$y_{gle}(x) = \alpha\cos x + (\beta + x)\sin x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

d'où en dérivant

$$y'(x) = (-\alpha + 1)\sin x + (\beta + x)\cos x$$

et en remplaçant par les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$, on a

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = -1$$

donc la solution est donnée par

$$y(x) = (x-1)\sin x.$$

2. On a

$$y'' + 2y' + 5y = 3, \tag{3.100}$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Equation homogène

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Equation caractéristique

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Longleftrightarrow (r - r_1)(r - r_2) = 0,$$

où $r_1 = -1 - 2i$ et $r_1 = -1 + 2i$, alors

$$y_{\text{hom}} = e^{-x}(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x) \ , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.100) on remarque que le second membre $f(x) = 3$, et que $r = 0$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors la solution particulière y_p de l'équation (3.100) s'écrit

$$y_p(x) = a$$

où a est une des constante réelle à déterminer. On dérive deux fois y_p puis on remplace dans l'équation (3.100) ,

$$5a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{5}$$

alors

$$y_p = \frac{3}{5}.$$

Par suite

$$y_{gle}(x) = e^{-x}(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x) + \frac{3}{5}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

d'où en dérivant

$$y'(x) = e^{-x}\left[(-\alpha + 2\beta)\cos 2x - (2\alpha + \beta)\sin 2x\right]$$

et en remplaçant par les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$, on a

$$\alpha = \frac{2}{5} \text{ et } \beta = \frac{1}{5}$$

donc la solution est donnée par

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x) + \frac{3}{5}.$$

3. On a

$$-2y'' + 3y' + 2y = \sin x, \tag{3.101}$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Equation homogène

$$-2y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Equation caractéristique

$$-2r^2 + 3r + 2 = 0 \Longleftrightarrow (2r+1)(2-r) = 0 \Longleftrightarrow r = -\frac{1}{2} \vee r = 2$$

d'où

$$y_{\text{hom}} = \alpha e^{-\frac{1}{2}x} + \beta e^{2x} \ , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière y_p

Pour calculer la solution particulière de l'équation (3.101) on remarque que le second membre $f(x) = \sin x$ et que $r = i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors la solution particulière y_p de l'équation (3.101) s'écrit

$$y_p(x) = a\cos x + b\sin x$$

où a et b sont des constantes réelles à déterminer. On dérive deux fois y_p puis on remplace dans l'équation (3.101) ,

$$\begin{aligned} y' &= -a\sin x + b\cos x \\ y'' &= -a\cos x - b\sin x \end{aligned}$$

alors

$$(4a+3b)\cos x + (-3a+4b)\sin x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+3b=0 \\ -3a+4b=1 \end{cases}$$

d'où

$$a = \frac{4}{25} \text{ et } b = \frac{-3}{25}$$

donc

$$y_p = \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x.$$

Par suite

$$y_{gle}(x) = \alpha e^{-\frac{1}{2}x} + \beta e^{2x} \ + \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

d'où en dérivant

$$y'(x) = \frac{-\alpha}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + 2\beta e^{2x} \ - \frac{4}{25}\sin x - \frac{3}{25}\cos x$$

et en remplaçant par les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient

$$\alpha = \frac{-22}{125} \text{ et } \beta = \frac{2}{125}$$

donc la solution est donnée par

$$y_{gle}(x) = \frac{-22}{125}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{2}{125}e^{2x} \ + \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x.$$

3.6 Exercices sans solution

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles de 1er ordre suivantes

1. $xy' + y = y^2 \ln x$,
2. $x^2y' + xy = 2(\sqrt{x}+1)\sqrt{y}$,
3. $(x^3+1)\,y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$, en considérant $y(x) = -x$ comme solution particulière.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles de 2ème ordre suivantes

1. $y'' + 2y' + 4y = e^x \sin 2x$,
2. $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 3) \cos x$,
3. $y'' - 6y' + 9y = 5 \cos x - \sin x$,
4. $y'' - y' = e^x + \cos x$,
5. $y'' + y' + y = \sin x - x^2$.

Bibliographie

[1] K. Allab, Eléments d'analyse, Fonctions d'une variable réelle, $1^{ère}$ et $2^{ème}$ année d'université, Ecoles scientifiques -OPU- 1984.

[2] E. Azoulay, Problèmes corrigés de mathématiques - 2 éd. Paris : Dunod, 2002.

[3] C. Baba-Hamed, K. Benhabib, Analyse 2, Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 2012.

[4] A. Hitta, Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994.

[5] L. Chambadal, Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

[6] J. M. Monier, Analyse PCSI-PTSI, Dunod, Paris 2003.

[7] N. Piscounov, Calcul differentiel et intégral Tome 1, $9^{ème}$ édition, Edition Mir, Moscou, 1980.

[8] N. Piscounov, Calcul differentiel et intégral Tome 2, $7^{ème}$ édition, Edition Mir, Moscou, 1980.