Correction [illegible] N°1 transport de charges

Exercice 2

1) Determination de la charge totale Q du parallepipede

$$d^3Q = \rho\, dV \Rightarrow Q = \int_0^a\int_0^b\int_0^c \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^a \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)dx \int_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)dy \int_0^c \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dz$$

$$= \rho_0\left[x-\frac{x^2}{2a}\right]_0^a \cdot \left[-\frac{b}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right]_0^b \cdot \left[-\frac{c}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)\right]_0^c$$

$$= \rho_0\left(a-\frac{a^2}{2a}\right)\left(-\frac{b}{\pi}\times -2\right)\left(-\frac{c}{\pi}\times -2\right)$$

$$= \rho_0 \times \frac{a}{2}\times 4\frac{bc}{\pi^2}$$

$$n = \frac{N}{N_A} = [\,]V$$

$$Q = \frac{2abc}{\pi^2}\rho_0$$

$$\cancel{N} = [\,]\,\cancel{N_A}$$

2- Exprumons la charge contenue dans une tranche de de conducteur en fonction de ρ_0, b et c.

$$dQ = \int_0^b\int_0^c \rho\, dy\,dz\,dx$$

$$= dx\int_0^b\int_0^c \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dy\,dz$$

$$= dx\,\rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\int_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\int_0^c \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dy\,dz$$

$$= dx\,\rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\left[-\frac{b}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right]_0^b\left[-\frac{c}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)\right]_0^c$$

$$dQ = \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{4bc}{\pi^2}dx$$

Deduction de la densité lineique de charge $\lambda(x)$

$$\lambda(x) = \frac{dQ}{dx}$$

$$\lambda(x) = \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right) \times \frac{4bc}{\pi^2}$$

EXERCICE 3

1) Determinons la charge $q(t)$ que possède la partie MA en fonction de la charge totale $Q(t)$

$$Q(t) = \rho V \Rightarrow Q(t) = \rho \pi R^2 a$$

or $OA = OM + MA \Rightarrow a = x + MA \Rightarrow MA = a - x$

$$q(t) = \rho\pi R^2 (a-x)$$

$$q(t) = \rho\pi R^2 a \left(\frac{a-x}{a}\right)$$

$$q(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right) Q(t)$$

2) Deduction de l'intensité $i(x,t)$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

or $q(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right) Q(t)$

$$i(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right)\frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right) I(t)$$

Densité de courant $j(x,t)$

$$\vec{J} = \frac{i}{S}\vec{u} \Leftarrow i = \iint j \cdot ds \quad , \quad S = \pi r^2$$

$$\vec{J} = \left(\left(\frac{a-x}{a}\right) I(t) / \pi r^2\right)\vec{u}$$

$$\boxed{J = \left(\frac{a-x}{\pi a r^2}\right) I(t)}$$

Correction du TD N°1 transport de charges

Exercice 2

1) Determination de la charge totale Q du parallepipede

$$d^3Q = \rho\, dV \Rightarrow Q = \int_0^a\int_0^b\int_0^c \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^a \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)dx\int_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)dy\int_0^c \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dz$$

$$= \rho_0\left[x-\frac{x^2}{2a}\right]_0^a \cdot \left[-\frac{b}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right]_0^b \cdot \left[-\frac{c}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)\right]_0^c$$

$$= \rho_0\left(a-\frac{a^2}{2a}\right)\left(-\frac{b}{\pi}\times -2\right)\left(-\frac{c}{\pi}\times -2\right)$$

$$= \rho_0 \times \frac{a}{2}\times 4\frac{bc}{\pi^2}$$

$$Q = \frac{2abc}{\pi^2}\rho_0$$

$n = \frac{N}{N_A} = [\,]V$

$\cancel{\frac{N}{V} = [\,]\times N_A}$

2- Exprimons la charge contenue dans une tranche dx de conducteur en fonction de ρ_0, b et c.

$$dQ = \int_0^b\int_0^c \rho\, dy\, dz\, dx$$

$$= dx\int_0^b\int_0^c \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dy\,dz$$

$$= dx\,\rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\int_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\int_0^c \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)dy\,dz$$

$$= dx\,\rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\left[-\frac{b}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right]_0^b\left[-\frac{c}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)\right]_0^c$$

$$dQ = \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{4bc}{\pi^2}dx$$

Deduction de la densité linéique de charge $\lambda(x)$

$$\lambda(x) = \frac{dQ}{dx}$$

$$\lambda(x) = \rho_0\left(1-\frac{x}{a}\right) \times \frac{4bc}{\pi^2}$$

1) Déterminons la charge $q(t)$ que possède la partie MA en fonction de la charge totale $Q(t)$

$$Q(t) = \rho V \Rightarrow Q(t) = \rho \pi R^2 a$$

or $OA = OM + MA \Rightarrow a = x + MA \Rightarrow MA = a - x$

$$q(t) = \rho \pi R^2 (a-x)$$

$$q(t) = \rho \pi R^2 a \left(\frac{a-x}{a}\right)$$

$$q(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right) Q(t)$$

) Deduction de l'intensité $i(x,t)$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

or $q(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right) Q(t)$

$$i(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right)\frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \left(\frac{a-x}{a}\right) I(t)$$

Densité de courant $j(x,t)$

$$\vec{J} = \frac{i}{S}\vec{u} \Leftarrow i = \iint j \cdot dS \quad , \quad S = \pi r^2$$

$$\vec{J} = \left(\left(\frac{a-x}{a}\right) I(t) / \pi r^2\right)\vec{u}$$

$$\boxed{J = \left(\frac{a-x}{\pi a r^2}\right) I(t)}$$

Exercice 5

Montrons que $j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$

$i(t) = \iint j \cdot dS \Rightarrow I = jS$

or $S_b = S = 2\pi r^2$

$j = \frac{I}{2\pi r^2} \Rightarrow j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$

2) Expression de la loi d'ohm locale

$\vec{J} = \gamma \vec{E}$

Exprimons $\vec{E}(r)$

$\vec{J}(r) = \gamma \vec{E}(r) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\vec{J}(r)}{\gamma} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{j(r)}{\gamma} \vec{e}_r$

$E(r) = \frac{I}{2\pi r^2 \gamma} \vec{e}_r$

Expression du champ et du potentiel

$\vec{E} = -\vec{grad} V$

Deduisons l'expression de $V(r)$

$E(r) = \frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = \int_r^{\infty} E(r) dr$

$= \int_r^{\infty} \frac{I}{2\pi r^2 \gamma} dr$

$= \frac{I}{2\pi \gamma} \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$

$= \frac{I}{2\pi \gamma} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty}$

$V(r) = \frac{I}{2\pi r \gamma}$

3) Exprimons les potentiels au niveau avant et arriere des pattes de la vache.

- En avant

$V(r) = \frac{I}{2\pi r \gamma}$

or $r = d - P/2$

$V_a(r) = \frac{I}{2\pi \gamma (d - P/2)}$

- En arrière

$r = d + P/2$

$$V_b(r) = \frac{I}{2\pi\gamma(d+P/2)}$$

Montrons que la tension entre les pattes vaut $u \simeq \frac{IP}{2\pi\gamma d^2}$

$$u = V_a - V_b \Rightarrow u = \frac{I}{2\pi\gamma}\left[\frac{1}{d-P/2} - \frac{1}{d+P/2}\right]$$

$$= \frac{I}{2\pi\gamma}\left[\frac{1}{d}\left(1-\frac{P}{2d}\right)^{-1} - \frac{1}{d}\left(1+\frac{P}{2d}\right)^{-1}\right]$$

or $\frac{P}{2d} \ll 1 \Rightarrow \left(1+\frac{P}{2d}\right)^{\alpha} = 1 + \alpha\frac{P}{2d} + \dots$

$$u \simeq \frac{I}{2\pi\gamma d}\left[1+\frac{P}{2d} - \left(1-\frac{P}{2d}\right)\right]$$

$$u \simeq \frac{IP}{2\pi\gamma d^2}$$

Déterminons la distance dm pour que la vache survive à la foudre

$$u = RI \Rightarrow I_m = \frac{u}{R} \Rightarrow I_m = \frac{IP}{2\pi\gamma d_m^2 R}$$

$$\Rightarrow d_m^2 = \frac{IP}{2\pi\gamma R I_m}$$

$$d_m = \sqrt{\frac{IP}{2\pi\gamma R I_m}}$$

$$AN: d_m = \sqrt{\frac{15\times10^3 \times 1{,}5}{2\times3{,}14\times2{,}5\times10^{+3}\times25\times10^{-3}}}$$

$d_m =$

5) Cette tension de pas est plus dangereuse pour la vache car sa taille crée une grande différence de potentiel entre ses pattes

Exercice 6 :

1) Rappel de l'expression de la résistance R_b

$$R_b = \frac{\rho l}{S}$$

Justifions que la resistance du sol peut s'exprimer par

$$R_S = \int_{r_T}^{\infty} \frac{\rho dr}{2\pi r L + 2\pi r^2}$$

$$dR_S = \frac{\rho dr}{S}$$

or $S = S_b + S_L \Rightarrow S = 2\pi r^2 + 2\pi r L$

$$dR_S = \frac{\rho dr}{2\pi r^2 + 2\pi r L}$$

$$R_S = \int_{r_T}^{\infty} \frac{\rho dr}{2\pi r^2 + 2\pi r L}$$

3) Effectuons l'application numerique

$$R_S = \int_{r_T}^{\infty} \frac{\rho dr}{2\pi r^2 + 2\pi r L} \Rightarrow R_S = \frac{\rho}{2\pi} \int_{r_T}^{\infty} \frac{dr}{r^2 + rL}$$

or $\int \frac{dr}{r^2 + rL} = -\frac{1}{L} \ln\left(\frac{L+r}{r}\right)$

$$R_S = \frac{\rho}{2\pi} \left[-\frac{1}{L} \ln\left(\frac{L+r}{r}\right)\right]_{r_T}^{\infty}$$

$$= -\frac{\rho}{2\pi L} \left[\ln(1) - \ln\left(\frac{L+r_T}{r_T}\right)\right]$$

$$\boxed{R_S = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{L+r_T}{r_T}\right)}$$

AN: $R_S =$

Exercice 4 :

1) Rappelons la loi d'ohm locale

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$[\vec{J}] = A.m^{-2}$, $[\vec{E}] = V.m^{-1}$, $[\gamma] = S.m^{-1}$

2) Exprimons la resistance R_a de l'axone

$$R_a = \frac{\rho_a l}{S}$$

or $S = \pi r_1^2$

$$\boxed{R_a = \frac{\rho_a l}{\pi r_1^2}}$$

3) Exprimons la resistance de fuite R_f de l'axone

$$I_f(r) = \iint \vec{J}_{rad}\, d\vec{S} = J_{rad}(r) \cdot 2\pi r l$$

$$J_{rad} = \frac{I_f}{2\pi r l}$$

~~En~~ app $\vec{J} = \gamma \vec{E} \Rightarrow J_{rad}(r) = \frac{1}{\rho_m} E(r)$, $E(r) = -\frac{dV}{dr}$

$$-\frac{1}{\rho_m} \cdot \frac{dV}{dr} = \frac{I_f}{2\pi r l}$$

$$-dV = \frac{\rho_m I_f}{2\pi r l} dr$$

$$\int_{r_1}^{r_1+e} -dV = \int_{r_1}^{r_1+e} \frac{\rho_m I_f}{2\pi r l} dr$$

$$V(r_1+e) - V(r_1) = \frac{\rho_m}{2\pi l} \left[\ln r\right]_{r_1}^{r_1+e}$$

$$R_f = \frac{\rho_m}{2\pi l} \ln\left(\frac{r_1+e}{r_1}\right)$$

$$= \frac{\rho_m}{2\pi l} \ln\left(1 + \frac{e}{r_1}\right)$$

or $\frac{e}{r_1} \ll 1$ DL $\ln(1+x) = x$

DL $\ln\left(1+\frac{e}{r_1}\right) \simeq \frac{e}{r_1}$

$$\boxed{R_f = \frac{\rho_m e}{2\pi r_1 l}}$$

4) Exprimons λ

$$R_f = \lambda R_a \Rightarrow \frac{\rho_m e}{2\pi r_1 l} = \frac{\lambda \rho_a l}{\pi r_1^2} \Rightarrow \lambda = \frac{\rho_m e r_1}{2 l^2 \rho_a}$$

Exercice 1 :

1) Relation liant la conductivité à la mobilité en faisant intervenir d'autres grandeurs

$\vec{J} = nq\vec{v} = \sigma \vec{E}$

$nq\mu\vec{E} = \sigma \vec{E} \Rightarrow nq\mu = \sigma$

$$\boxed{\mu = \frac{\sigma}{nq}}$$

2) D'apres Lorentz la charge se deplace dans le sens du champ electrique. Donc $\vec{v}$ et $\vec{E}$ sont de même sens et $\mu > 0$ si $q > 0$.

$\vec{v}$ et $\vec{E}$ sont de sens opposé et $\mu < 0$ si $q < 0$.

Comme q et μ ont le meme sens alors $q\mu > 0$. donc la conductivite est toujours positive.

3) Relation liant plusieurs types de porteurs

~~σ n = C. N_A~~ $\sigma = nq\mu$

$$\sigma = \sum_i n_i q_i \mu_i$$

4) Relation liant plusieurs porteurs en fonctions de la concentrati

or $n = C . N_A$

$$\sigma = \sum_i C_i N_A q_i \mu_i$$

$$\sigma = N_A \sum_i C_i q_i \mu_i$$

5) Application à l'eau pure

Ses porteurs sont H_3O^+ et HO^-

Leur concentration vaut $[H_3O^+] = [HO^-] = 10^{-7}$ mol/L d'apres l'eqt ①

① $H_3O^+ + HO^- \rightleftarrows 2H_2O$

Leur densité volumique vaut $n = C . N_A$

La conductivité de l'eau pure est

$$\sigma = n_1 q_1 \mu_1 + n_2 q_2 \mu_2$$

$$\sigma = ne(\mu_{H_3O^+} - \mu_{HO^-})$$

~~$\sigma = 4{,}4\ S.m^{-1}$~~ $\sigma = 5{,}65 \times 10^{-6}\ S.m^{-1}$

6) Application au HCl

$$Cl^- + H_3O^+ \rightleftharpoons HCl + H_2O$$

calcul des concentrations

$$[Cl^-] = [H_3O^+] = [HCl]$$

$$[Cl^-] = [H_3O^+] = 0{,}1\ mol/L$$

La Conductivité du HCl est

$$\sigma = n_{H_3O^+} q_{H_3O^+} \mu_{H_3O^+} + n_{Cl^-} q_{Cl^-} \mu_{Cl^-}$$

$$\sigma = n \times e(\mu_{H_3O^+} - \mu_{Cl^-})$$

$$\sigma = 4{,}4\ S.m^{-1}$$

L'ion hydronium joue un rôle preponderante car $\mu_{H_3O^+} > \mu_{Cl^-}$