... CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

Université de Yaoundé I

École Nationale Supérieure
Polytechnique de Yaoundé (ENSPY)

BP 8390 Tel/Fax : 222 22 45 47
Yaoundé, Cameroun

REPUBLIC OF CAMER...
Peace-Work-Fatherlan...

The University of Yaound...

National Advanced Schoo...
Engineering of Yaounde (NA...

PO BOX 8390 Tel/Fax: 222 2...
Yaounde, Cameroon

| CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE DES INGENIEURS DANS LES FILIERES DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES | |
|---|---|
| **MATHEMATIQUES 2** | Durée : 3 heures |
| | Session : 2024 |

**EXERCICE 1 : ( 7 points)**

Le plan complexe (E) est rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{u}, \vec{v})$. Soit $f$ la transformation au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{12x+5y+1}{13} \\ y' = \frac{5x-12y-5}{13} \end{cases}$

**I)** On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ les affixes respectives des points M et M'.

1. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$. **1 pt**
2. $z''$ l'affixe du point $M'' = (f \circ f)(M)$. Exprimer $z''$ en fonction de z. **0,5**

**II)** Soit $(E_1)$ l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = M$.

1. Montrer que $(E_1)$ est la droite d'équation $x - 5y = 1$. **0,75 pt**
2. Soit M un point n'appartenant à $(E_1)$ et $M' = f(M)$. Montrer que les droites (MM') et (E... sont perpendiculaires. **0,75 pt**
3. Montrer que pour tout point M du plan, le milieu du segment $[MM']$ appartient à $(E_1)$ où $M' = f(M)$ **0,75 pt**
4. Reconnaitre la transformation $f$. **0,75 pt**
5. Soit $(E_2)$ l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)$ appartient à l'axe $(O ;\vec{v})$.
Vérifier que le point $A(0, -\frac{1}{5})$ appartient à $(E_2)$ **0,5 pt**

**III)**

1. Calculer $(1+2i)^2$ et déterminer les vecteurs dont les affixes z sont solutions de l'équatio...
$z^2 + (-1 + 2i)z - 2i = 0$. **1 pt**
2. Déterminer l'ensemble (D) des points du plan ayant pour affixe les solutions de l'équation : $13z = (12 + 5i)\bar{z} + 1 - 5i$ **1 pt**

**EXERCICE 2 : (6 Points)**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - (i - 4)z + 5 - 5i = 0$ **1,5 pt**

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

A tout nombre z différent de 3, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z^2}{\bar{z}-3}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z. On note $(\Gamma)$ l'ensemble des point $M$ du plan d'affixe $z$, tels que $Z$ soit un nombre réel.

a) On pose z= $x + iy$ où $x$ *et* $y$ sont des réels. Déterminer en fonction de $x$ *et* $y$ la partie réelle et la partie imaginaire de $Z$. **1 pt**

b) Démontrer que $(\Gamma)$ est la réunion de l' hyperbole $(H)$ d'équation $(x-1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ et de la droite $(D)$ dont on déterminera une équation, privé du point de coordonnées $(3; 0)$. **1 pt**

c) Déterminer le centre $\Omega$, les foyers, les asymptotes et l'excentricité de $(H)$ **1,5 pt**

d) Tracer $(H)$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. **1 pt**

**EXERCICE 3: (7 points)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $R = (O; \vec{u}; \vec{v})$.

I) On considère le polynôme complexe P défini pour tout complexe $z$ par
$P(z) = 5z^4 - 24z^3 + 42z^2 - 24z + 5$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation $P(z) = 0$. **0,25 pt**
2. Soit $z_0$ un nombre complexe non nul.

a) Comparer $P(z_0)$ et $P(\overline{z_0})$ ; montrer que $P\left(\frac{1}{z_0}\right) = \frac{1}{z_0^4}P(z_0)$. **1 pt**

b) En déduire que si $z_0$ est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors son conjugué et son inverse le sont aussi. **1 pt**

c) Calculer $P(2+i)$. **1 pt**

d) En déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $P(z) = 0$. **1 pt**

II) Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives : $2 + i$ et $2 - i$.

1. Montrer que l'écriture complexe de la similitude directe $f$ de centre O qui transforme B en A est $z' = \frac{3+4i}{5}z$ **1 pt**
2. Déterminer une équation de l'image de la droite (OB) par $f$. **1 pt**
3. Soit G isobarycentre des points O, A et B. Déterminer l'affixe de l'image du point G par $f$. **0,75 pt**