Cameroon Desk ACADEMY
Site Web : cameroondeskacademy.com
Email : cameroondesk@gmail.com
Contact : (+237) 655755295/682096279

PREPARATION AUX CONCOURS D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
CONCOURS ENSP DOUALA 2021

CONCOURS ENSPD Niveau 1
Epreuve de Mathématiques
Session 2021
Durée : 3h

Exercice 1

Le Sultan dit Ali Baba : « Voici 2 urnes, 4 boules blanches (b) et 4 boules noires (n). Repartis les boules dans les urnes, mais je rendrais ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche ».

1-) Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 noires dans la deuxième ?

2-) Idem avec $2b + 2n$ dans la première urne et $2b + 2n$ dans la deuxième urne.

3-) Idem avec 3b dans la première urne et $1b + 4n$ dans la deuxième

4-) Comment Ali Baba maximise t'il ses chances ?

Exercice 2

1-) On considère une fonction f, définie et continue sur le segment [-a, a]. Démontrez que si la fonction f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

On considère la fonction F impaire et 2π $-$périodique définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Par : $F(x) = \begin{cases} x \; si \; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \; si \; \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

On pose : $A_n(F) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx$

2-) Montrer que pour tout entier naturel n, $A_n(F) = \frac{2}{\pi}(1-(-1)^n)\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx$

3-) En déduire la valeur de $A_{2n}(F)$

4-) Montrer que pour tout entier naturel n, $A_{2n+1}(F) = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}$

5-) On admet que pour tout réel x, $F(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n(F)\sin(nx)$

a-) Montrer que $\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

b-) En déduire que : $\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{(n)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n)^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Exercice 3

Soit (E), l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie :

$10Z\overline{Z} + 3\left(Z^2 - \overline{Z}^2\right) = 4$

1-) Démontrons que (E) est une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques (centre, foyer, excentricité et directrice)

2-a) Déterminer l'expression analytique de la similitude directe S de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$

b-) Soit ρ l'endomorphisme associé a S et $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ une base du plan. Déterminer $\rho(\vec{\imath}) = e_1$ et $\rho(\vec{\jmath}) = e_2$

c-) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2})$ forme une base du plan.

3-) Soit (E') l'image de (E) par x.

a-) Déterminer l'expression de (E') dans le repère $(o,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

b-) On pose $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$, un point de (E') dans le repère $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, et $\overrightarrow{OM'} = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}$ dans le repère $(\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2})$. Déterminer x' et y' en fonction de X' et Y'

c-) Donner la nature des éléments caractéristiques de (E')

d-) Tracer (E) et (E') dans le repère $(o,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

Exercice 4

Partie A

Soient $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même, de classe C^1, tel que pour tout réel x,

$f\big(f(x)\big) = ax + b$

1-) Montrer que pour tout réel x, $f(ax+b) = af(x) + b$. En déduire que pour tout réel x, $f'(ax+b) = f'(x)$

2-) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = aU_n + b$. Montrer que U_n est convergente de limite $l = \frac{b}{1-a}$

3-) Montrer que f' est constante. En déduire l'expression de f

4-) Que faire si $a \in]1, +\infty[$

Partie B

Soit $t \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ $g(n) = x^2(\ln(x))^n$

1-) On pose : $J_n(t) = \int_t^1 g_n(x)dx$ et $I_n(t) = \int_0^1 g_n(x)dx$

Prouver que J_n existe

2-) Montrer que : $I_n - J_n$ est une primitive sur $[0;1]$ $de\ g_n$, qui s'annule pour tout $t = 0$

3-) Calculer la $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(t)$