	CONTROLE CONTINU HARMONISEE **Janvier 2024**	
	Spécialité : Génie Mécanique	
	MATIERE : ANALYSE I	**Institut Supérieur des technologies et du design industriel**
Durée : 2h00min		**Proposé par : Mr NOUMBI SIDJE Arnaud A.**

Exercice 1 : (06pts)

I. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x\ln x}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' de f. 1pt
2. Dresser le tableau de variation de f. 1pt
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ amet une solution unique α appartenant à l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}\,;2\right]$. 1pt

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$. 1pt

II. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. 0,5pt
2. a. Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. 0,75pt

   b. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall x \in I$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. 0,75pt

Exercice 2 : (06 pts)

Soit la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. 1pt
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f. 2pt
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. 1pt
4. En remarquant que : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ puis en déduire la valeur exacte de $\arctan(\sqrt{2}+1)$. 2pt

Rappels : $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$si\ f'(x) = g'(x)\ alors\ f(x) = g(x) + k\ \ (k \in IR)$

Exercice 3 : (08pts)

On notera respectivement $cosh$, $\sinh$ et $tanh$ les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperbolique définies sur IR par : $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que $tanh$ est une bijection de IR vers un intervalle J à préciser. On note $Argtanh$ sa réciproque. 2pt
2. Exprimer la dérivée de $tanh$ en fonction de $tanh$. 1pt
3. Démontrer que $Argtanh$ est impaire. 1pt
4. Démontrer que $Argtanh$ est dérivable sur J et calculer sa dérivée. 2pt

Rappel : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$ $\quad et \quad f o f^{-1}(x) = f^{-1} o f(x) = x$

5. Exprimer $Argtanh$ à l'aide de fonctions usuelles. 1pt
6. Donner l'allure de la courbe de la fonction $Argtanh$. 1pt