Domande analisi funzionale

1 aprile 2021

ENUNCIATI

- Teorema grafico chiusa. E,F Banach
- Teorema di proiezione su un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert. disuguaglianza variazionale
- Teorema di Ascoli-Arzelà. $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(K)$ K compatto in $\mathbb{R}^n$
- Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet in uno spazio di Hilbert. isomorfismo di Riesz-Frechet
- Teorema di Banach-Steinhauss. Banach-Normato E Banach F normato
- Teorema di debole compattezza sequenziale della palla unitaria chiusa.
- Teorema di caratterizzazione di spazi vettoriali normati di dimensione finita, di Riesz.
- Teorema di rappresentazione rispetto ad una base di Hile- bert numerabile.

ESERCIZI

- Sia $(E, \|\cdot\|)$ s.v.n su $K = \mathbb{R}$ e supponiamo che $\dim_{\mathbb{R}} E' < \infty$ allora vale che $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$.
- Siano $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ due s.v.n e E', F' i relativi duali allora se essi sono topologicamente isomorfi provare che non è detto che E, F siano topologicamente isomorfi. OK
- $B_{C^1([0,1])}$ è compatta in $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$? No, è relativamente compatta ma non è chiusa
- Consideriamo sullo spazio $C^0([a,b])$ le norme $\|\cdot\|_{L^1}, \|\cdot\|_\infty$. Sono equivalenti?
- Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, allora $(L^2(X,\mu), \|\cdot\|_{L^2})$ è sempre separabile?
- Sia
$$f\colon (C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto f(u) := u'(0)$$
Allora f è un funzionale lineare e continuo? $\to$ $l_n \in C^1([a,b])$ $0<a<b<+\infty$
- Sia $T : l^2 \to l^2$ l'applicazione tale per cui $T(x)(n) := \frac{x(n)}{n}$ e sia $M := T(l^2)$ non
  - provare che T è iniettiva.
  - L'applicazione $T^{-1} : M \to l^2$ è continua?
- Siano $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert e $A : H \to H$ un operatore lineare e continuo.
  1. Supponiamo $\exists \alpha > 0$ per cui
  $$(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2 \qquad \forall u \in H$$
  $\to$ biiettiva $\to$ disug
  Allora A è invertibile e $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \frac{1}{\alpha}$
  2. Provare che esistono H and A per cui
  $$(Au, u) > 0 \qquad \forall u \in H \setminus \{0\}$$
  $\to$ $A(x)(n) = \frac{x(n)}{n}$ $\downarrow$ vale la disug ma non è sur.
  Ma A non è invertibile.

esempio in cui non commutano

ripetere tutto quello che so :)

- Nozioni possibili di base in uno s.H.
- Sia $(E, \|\cdot\|)$ s.v.n su $K = \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ lineare ma discontinuo, provare che $\ker f$ è denso in E.
- Sia
$$C := \left\{ x \in l^2 \big| |x(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$
C è compatto in $(l^2, \|\cdot\|_{l^2})$? boh ?
- Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ s.H. su $K = R, C$ e sia $M \subset H$ un sottospazio vettoriale chiuso. Qual'è la caratterizzazione di $w = P_M u$? $\rightsquigarrow (u-w, v) = 0 \quad \forall v \in M$
- Sullo spazio $C^1([a,b])$, consideriamo le norme
$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad \|f\| := |f(a)| + \|f'\|_\infty$$
Le due norme sono equivalenti?
- Sia $E := \{u \in C^0([0,1]) | u(0) = 0\}, \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ non è di Hilbert
$$f : E \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto f(u) := \int_a^1 u(t)\, dt$$
Provare che
  1. $f \in E' \setminus \{0\}, \|f\|_{E'} = 1$ e non esiste $\overline{u} \in B_E | f(\overline{u}) = \|f\|_{E'}$.
  2. $\forall u \in E$
  $$dist(u, M) = \left| \int_0^1 u(t)\, dt \right|$$
  E $dist(u, M) < 1, \forall u \in B_E$.
  3. Dato $u \in E \setminus M, \nexists \overline{u} \in M | dist(u, M) = \|u - \overline{u}\|$

- lineare: perché è lin. l'int.
- cont: $|f(u)| = \left| \int_a^1 u(t)\,dt \right| \leq \int_a^1 |u(t)|\,dt \leq \sup_{t \in (a,1)} |u(t)| \cdot (1-a) = (1-a)\|u\|_\infty$ ✓
  (* lim. per Weier.)
- $|f(u)| \leq (1-a)\|u\| \leq \|u\| \leq 1$
  $\longrightarrow \|f\|_{E'} \leq 1$
  def. (un in E)

RIFLESSIVITÁ

- $(c, \|\cdot\|_{l^\infty})$ è riflessivo? $\longrightarrow$ NO: perché
- $(L^\infty((0,1)), \|\cdot\|_{L^\infty})$ è riflessivo? $\longrightarrow$ NO
- Per quali $p \in [1, +\infty]$, $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ è riflessivo? $\longrightarrow p = 2$

TOPOLOGIE DEBOLI

- Sia $(f_h)_h, f \in L^2((0,1))$ tali per cui $f_h(x) \to f(x), q.o., \forall x \in (0,1)$ allora vale che $f_h \rightharpoonup f$?
- Sia
$$C := \{u \in L^2((0,1)) | 0 \leq u(x) \leq 1, q.o.\, x \in (0,1)\}$$
Provare che C è sequenzialmente compatto.
- Sia $f_h : (0,1) \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni definita da
$$f_h(x) = \begin{cases} \sqrt{h} & 0 < x \leq \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{1}{h} < x \leq 1 \end{cases}$$
SI
Allora $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^2((0,1))$?
- Sia $f_h : (0,1) \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni definita da
$$f_h(x) = \begin{cases} -h^2 x + h & 0 < x \leq \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{1}{h} < x \leq 1 \end{cases}$$
NO
Allora $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^1((0,1))$?

- Siano $(f_h)_h, f \in L^p((0,1))$ e $(g_h)_h, g \in L^{p'}((0,))$ dove $1 \leq p < \infty$ e $p' = \frac{p}{p-1}$, supponiamo che

$$\begin{aligned} f_h &\to f \quad L^p((0,1)) \\ g_h &\rightharpoonup g \quad L^{p'}((0,1)) \end{aligned}$$

  Allora $f_h g_h \rightharpoonup fg$ in $L^1((0,1))$

- Siano $f_h(x) := \sin(hx)$, provare che
  1. $(f_h)_h \subset L^p((-\pi,\pi)), \forall p \in [1,+\infty]$.
  2. $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^p((-\pi,\pi))$.

- Siano $(f_h)_h$ ed f in $L^2((a,b))$
  1. Se $f_h \to f$ in $L^2((a,b))$, allora vale che $f_h^2 \to f^2$ in $L^1((a,b))$. $\longrightarrow$ $\boxed{\text{C-S}}$ su p.s. di L^2 !!!
  2. Se $fh \rightharpoonup f$ in $L^2((a,b))$, allora vale che $f_h^2 \rightharpoonup f^2$ in $L^1((a,b))$?

- Sia $(H,(\cdot,\cdot))$ s.H. su $K = \mathbb{R}$ e sia $B := \{e_h | h \in \mathbb{N}\}$ una base di H.
  1. B è chiusa?
  2. B è totalmente limitata?
  3. Provare che $e_h \rightharpoonup 0$.

- Sia $(E, \|\cdot\|)$ s.v.n su $K = \mathbb{R}$ e supponiamo che $\dim_{\mathbb{R}} E' < \infty$ allora vale che $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$.

E spazio di dim finita $\Rightarrow$ $\dim E = \dim E'$ se $\dim E' < +\infty \Rightarrow \dim E'' < +\infty$

E isomorfo ad un sottospazio del suo biduale $\Rightarrow$ $\dim E \leq \dim E'' < +\infty$

$\Rightarrow \dim E < +\infty$

$(E, \|\cdot\|)$ e $(E', \|\cdot\|_{E'})$ sono topologicamente isomorfi $\Rightarrow$ se $\dim E' < +\infty \Rightarrow \dim E < +\infty$

- Consideriamo sullo spazio $C^0([a,b])$ le norme $\|\cdot\|_{L^1}, \|\cdot\|_\infty$. Sono equivalenti?

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ $\qquad \|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\,dx$ $\qquad$ Corollario 1.39

$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty (b-a)$ $\Rightarrow$ scegliendo $c = \frac{1}{b-a}$

$\Rightarrow \|f\|_{L^1} \leq c\,\|f\|_\infty$ $\qquad$ $C^0[a,b]$ è chiuso in L^1?

$C^0[a,b], \|\cdot\|_{L^1}$ non è di Banach

- Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, allora $(L^2(X,\mu), \|\cdot\|_{L^2})$ è sempre separabile?

No, $L^2(I, \#) = \ell^2(I)$ con I di cardinalità più che numerabile non è separabile

- Sia

$$f\colon (C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto f(u) := u'(0)$$

Allora f è un funzionale lineare e continuo? $\longrightarrow$ $\ln \in C^1([a,b])$ $0<a<b<+\infty$

- Siano $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert e $A : H \to H$ un operatore lineare e continuo.

3.10

1. Supponiamo $\exists \alpha > 0$ per cui

$$(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2 \qquad \forall u \in H$$

bitti va

di sug

Allora A è invertibile e $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \frac{1}{\alpha}$

2. Provare che esistono H and A per cui

$$(Au, u) > 0 \qquad \forall u \in H \setminus \{0\}$$

$A(x)(n) = \frac{x(n)}{n}$

vale la di sug ma non è sur.

Ma A non è invertibile.

1) Mostriamo che A è iniettivo e suriettivo

- <u>A iniettivo</u> Th: $Au = 0 \Rightarrow u = 0$

sia $u \in H$ tc. $Au = 0$ Poichè $\exists \alpha > 0$ tc. $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$

$\Rightarrow (0, u) = 0 \geq \alpha \|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$

- <u>A suriettivo</u> sia $R(A) = \{A(u) : u \in H\}$. Proviamo che $R(A)$ è denso e chiuso in H, infatti se così fosse si avrebbe $R(A) = \overline{R(A)}^H = H$

<u>chiusura di $R(A)$</u>: sia $(u_n)_n \subset H \Rightarrow \alpha \|u_n\|^2 \leq |(Au_n, u_n)| \leq \|Au_n\| \|u_n\|$

$\Rightarrow \|u_n\| \leq \frac{\|Au_n\|}{\alpha}$ se $(Au_n)_n$ è di cauchy $\Rightarrow (Au_n)_n$ converge a un $v \in H \Rightarrow$ anche $(u_n)_n$ converge ad un $u \in H \Rightarrow$ per la continuità di A

$\Rightarrow v = \lim_{n \to +\infty} Au_n = A \lim_{n \to +\infty} u_n = Au \Rightarrow v \in R(A) \Rightarrow R(A)$ è chiuso

<u>densità di $R(A)$</u> Mostriamo che $R(A)^\perp = \{0\}$. Sia $v \in R(A)^\perp$ ie $v \in H$ tc. $(Au, v) = 0 \quad \forall u \in H$ se prendo $u = v \Rightarrow (Av, v) = 0 \geq \alpha \|v\|^2 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow R(A)^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow$ A è biettiva $\Rightarrow$ A è invertibile

<u>$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \frac{1}{\alpha}$</u> so che $\|u_n\| \leq \frac{\|Au_n\|}{\alpha}$. Scelgo $u_n = A^{-1} v \quad \forall n \in \mathbb{N}$ con $v \in B_H \Rightarrow \|A^{-1} v\| \leq \frac{\|v\|}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}$ Passando al sup sui $v \in B_H$ ottengo $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \frac{1}{\alpha}$

2) $H = \ell^2 \quad A : H \to H \quad A(x(n)) = \frac{x(n)}{n}$

<u>A è lineare</u> $A(x+y)(n) = \frac{x(n) + y(n)}{n} = A(x)(n) + A(y)(n)$

$A(\lambda x)(n) = \frac{\lambda x(n)}{n} = \lambda A(x(n))$

<u>A continua</u> $\|Ax\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{x(n)}{n}\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^2\right)^{1/2} = \|x\|_{\ell^2}$

A limitato $\Rightarrow$ A continuo

$\Rightarrow (Ax, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x(n)^2}{n} \Rightarrow (Ax, x) > 0 \quad \forall x \in \ell^2 \setminus \{0\}$

Sia $y \in \ell^2$ $\quad y(n) = \frac{1}{n}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad A^{-1}(y)$ sarebbe $\quad x(n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ma $x \in \ell^2$

$\Rightarrow$ <u>A non è suriettivo quindi A non è invertibile</u>

- Sullo spazio $C^1([a,b])$, consideriamo le norme

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad \|f\| := |f(a)| + \|f'\|$$

Le due norme sono equivalenti?

$\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f(x)| \quad \Rightarrow \quad |f(a)| \leq \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|f\| = |f(a)| + \|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$

I,13

- Sia $E := \{u \in C^0([0,1]) | u(0) = 0\}$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto f(u) := \int_a^1 u(t)\,dt$$

Provare che

1. $f \in E' \setminus \{0\}$, $\|f\|_{E'} = 1$ e non esiste $\overline{u} \in B_E | f(\overline{u}) = \|f\|_{E'}$.
2. $\forall u \in E$

$$dist(u, M) = \left| \int_0^1 u(t)\,dt \right|$$

E $dist(u, M) < 1, \forall u \in B_E$.

3. Dato $u \in E \setminus M, \nexists \overline{u} \in M | dist(u, M) = \|u - \overline{u}\|$

- lineare: perché è lin. l'int.
- cont: $|f(u)| = \left| \int_a^1 u(t)\,dt \right| \le \int_a^1 |u(t)|\,dt \le \sup_{t\in(a,1)} |u(t)| \cdot (1-a) = (1-a)\|u\|_\infty$ ✓

  (*) lim. per varr.
- $|f(u)| \le (1-a)\|u\| \le \|u\| \le 1$

  $\longrightarrow \|f\|_{E'} \le 1$

  def. $(u_m)_m \subseteq E$

1) Mostriamo che f è continua e lineare e $f \not\equiv 0$

- f lineare $\quad u, v \in E \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad$ linearità dell'integrale

$$f(\lambda u + \mu v) = \int_0^1 \lambda u(t) + \mu v(t)\,dt = \lambda \int_0^1 u(t)\,dt + \mu \int_0^1 v(t)\,dt = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

- f continua $\quad$ sia $u \in E \quad |f(u)| = \left| \int_0^1 u(t)\,dt \right| \le \int_0^1 |u(t)|\,dt$

$\forall t \in [0,1] \quad |u(t)| \le \sup_{[0,1]} |u(t)| = \|u\|_\infty$

$$\Rightarrow |f(u)| \le \int_0^1 |u(t)|\,dt \underset{\text{monotonia dell'integrale}}{\le} \int_0^1 \|u\|_\infty\,dt = \|u\|_\infty \Rightarrow f \text{ limitata} \Rightarrow f \text{ continua}$$

- $f \not\equiv 0$ $\quad$ sia $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad u(t) = t \quad u \in C^0([0,1])$ e $u(0) = 0 \Rightarrow u \in E$

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists u \in E \text{ tc. } f(u) \neq 0 \Rightarrow f \in E' \setminus \{0\}$$

- Mostriamo che $\|f\|_{E'} = 1$

$$\forall u \in B_E \quad |f(u)| \le \|u\| \le 1 \Rightarrow \|f\|_{E'} = \sup_{u \in B_E} |f(u)| \le 1$$

Definiamo la successione $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^+} \subset E \quad u_m(t) = \frac{2}{\pi} \arctan(mt)$

$u_m(0) = 0 \ \forall m$ e $u_m \in C^0([0,1]) \Rightarrow (u_m)_m \subset E$ e inoltre $|\arctan(mt)| \le \frac{\pi}{2}$

$\forall t \in [0,1] \Rightarrow |u_m(t)| \le 1 \ \forall t \in [0,1] \Rightarrow \|u_m\| = \sup_{[0,1]} |u_m(t)| \le 1 \Rightarrow (u_m)_m \subset B_E$

$$|f(u_m)| = \left| \int_0^1 \frac{2}{\pi} \arctan(mt)\,dt \right| = \left| \frac{2}{\pi}(t \arctan(mt)) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{mt}{(mt)^2 + 1}\,dt \right| =$$

$x = (mt)^2 + 1$

$dx = 2m^2 t\,dt$

$$= \left| \frac{2}{\pi} \arctan(m) - \frac{2}{\pi} \int_1^{1+m^2} \frac{1}{2mx}\,dx \right| = \left| \frac{2}{\pi} \left(\arctan(m) - \log \frac{(1+m^2)}{2m} \right) \right|$$

$$\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} |f(u_m)| = \lim_{m \to +\infty} \left| \frac{2}{\pi} \left(\arctan(m) - \log \frac{(1+m^2)}{2m} \right) \right| = 1$$

$$(u_m)_m \subset B_E \Rightarrow |f(u_m)| \le \|f\|_{E'} \Rightarrow \lim_{m \to +\infty} |f(u_m)| = 1 \le \|f\|_{E'} \Rightarrow \|f\|_{E'} = 1$$

$\nexists\, \bar{u} \in B_E$ tc. $f(u) = \|f\|_{E'} = 1$ Per assurdo supponiamo che tale $\bar{u}$ esista. $\bar{u}$ Riemann integrabile su $[0,1] \Rightarrow \bar{u}$ Lebesgue integrabile su $[0,1]$ $\quad f(\bar{u}) = \int_0^1 \bar{u}(t)\,dt = \int_{[0,1]} \bar{u}\, d\mathcal{L}^1 = 1$ poiché $\int_{[0,1]} 1\, d\mathcal{L}^1 = 1$

$\Rightarrow \int_{[0,1]} \bar{u}\, d\mathcal{L}^1 = \int_{[0,1]} 1\, d\mathcal{L}^1 \Rightarrow \int_{[0,1]} (1-\bar{u})\, d\mathcal{L}^1 = 0$ Essendo $|\bar{u}(t)| \le \|\bar{u}\| \le 1 \quad \forall t \in [0,1]$

ogni funzione continua è misurabile

$\Rightarrow 1-\bar{u}$ è non negativa e misurabile $\Rightarrow \int_{[0,1]} (1-\bar{u})\, d\mathcal{L}^1 = 0 \Rightarrow 1-\bar{u} \equiv 0$

$\mathcal{L}^1$-q.o in $[0,1]$ ie $\bar{u}(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1] \setminus N \quad N$ tc. $\mathcal{L}^1(N) = 0$

Supponiamo che N sia non vuoto ed esisto $t_0 \in [0,1]$ tc. $1 - \bar{u}(t) > 0$

$1-\bar{u}$ continua $\Rightarrow$ per il teorema di permanenza del segno esiste $I = (a,b) \subset [0,1]$ con $a<b$ tc. $t_0 \in I$ e $1-\bar{u}(t) > 0 \quad \forall t \in I \quad I \subset N$ poiché su I la funzione è $\neq 0$ ma $\mathcal{L}^1(I) = b-a > 0 = \mathcal{L}^1(N)$ ↯ $\Rightarrow \bar{u} \equiv 1$ ovunque su $[0,1]$

$\Rightarrow \bar{u}(0) \neq 0 \Rightarrow \bar{u} \notin E$

2) $M = \{u \in E : f(u) = 0\}$ Sia $u \in E$ Proviamo che $\operatorname{dist}(u,M) = \left|\int_0^1 u(t)\,dt\right|$

poiché $f \in E' \setminus \{0\} \Rightarrow \operatorname{dist}(u,M) = \inf\{\|u-u'\| \text{ t.c } u' \in M\} = \frac{|f(u)|}{\|f\|_{E'}} \quad \forall u \in E$ es I.12

$\|f\|_{E'} = 1 \Rightarrow \operatorname{dist}(u,M) = |f(u)| = \left|\int_0^1 u(t)\,dt\right| \quad \forall u \in E$

Se $u \in B_E \Rightarrow \operatorname{dist}(u,M) = |f(u)| \le \|u\| \le 1$ ma sappiamo che $\nexists\, u \in B_E$ tc. $f(u) = 1 \Rightarrow \operatorname{dist}(u,M) < 1$

3) $u \in E \setminus M \Rightarrow \nexists\, \bar{u} \in M$ tc. $\operatorname{dist}(u,M) = \|u - \bar{u}\|$

fissiamo $u \in E \setminus M$ e supponiamo esista $\bar{u} \in M$ tc. $\operatorname{dist}(u,M) = \|u-\bar{u}\|$

ie $\|u-\bar{u}\| = \left|\int_0^1 u(t)\,dt\right| \qquad \bar{u} \in M \Rightarrow \int_0^1 \bar{u}(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow \|u-\bar{u}\| = \left|\int_0^1 u(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 u(t) - \bar{u}(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |u(t) - \bar{u}(t)|\,dt \le \|u-\bar{u}\|$

da cui $\|u-\bar{u}\| = \int_0^1 |u(t) - \bar{u}(t)|\,dt$

Poiché $\|u-\bar{u}\| \ge |u(t) - \bar{u}(t)| \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow \int_{[0,1]} (\|u-\bar{u}\| - |u-\bar{u}|)\, d\mathcal{L}^1 = 0$

$\Rightarrow \|u-\bar{u}\| - |u-\bar{u}| \equiv 0 \quad \mathcal{L}^1$-q.o in $[0,1] \Rightarrow$ per continuità $\|u-\bar{u}\| - |u-\bar{u}| = 0$

$\forall t \in [0,1] \Rightarrow$ per $t=0 \quad \|u-\bar{u}\| = 0 \Leftrightarrow u = \bar{u}$ ma $\bar{u} \in M$ e $u \in E \setminus M$ ↯

RIFLESSIVITÀ

- $(c, \|\cdot\|_{l^\infty})$ è riflessivo? $\longrightarrow$ NO: perché
- $(L^\infty((0,1)), \|\cdot\|_{L^\infty})$ è riflessivo? $\longrightarrow$ NO
- Per quali $p \in [1, +\infty]$, $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ è riflessivo? $\longrightarrow$ $p=2$

· $(\mathcal{L}^\infty((0,1)), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty})$ non è riflessivo

Proviamo che $\mathcal{L}^1((0,1))$ non è riflessivo. Poiché se $(E, \|\cdot\|)$ è riflessivo allora $(B_E, \sigma(E,E'))$ è sequenzialmente compatta, proviamo che $B_{\mathcal{L}^1((0,1))}$ non è debolmente sequenzialmente compatta

Sia $(f_n)_n$ con $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \le x \le 1/n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\|f_n\|_{\mathcal{L}^1} = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int_0^{1/n} n\,dx = 1 \Rightarrow (f_n)_n \subset B_{\mathcal{L}^1}$

Proviamo che non esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ che converge debolmente ad un elemento $f \in \mathcal{L}^1((0,1))$; per assurdo, supponiamo esista

ie $\forall g \in \mathcal{L}^\infty((0,1)) \quad \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_{n_k} g\,dx = \int_0^1 f g\,dx$

Definiamo la successione $(g_i)_i \subset \mathcal{L}^\infty((0,1))$ come $g_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{i} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Fissato $i \in \mathbb{N}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 f_{n_k} g_i\,dx = n_k \int_0^{1/n_k} g_i\,dx$

Sia k tc $\frac{1}{n_k} \le \frac{1}{i} \Rightarrow \int_0^1 f_{n_k} g_i\,dx = n_k \int_0^{1/n_k} 1\,dx = 1 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_{n_k} g_i\,dx = 1$

D'altra parte $\forall f \in \mathcal{L}^1(0,1) \quad \lim_{i\to+\infty} \int_0^1 f g_i\,dx = \lim_{i\to+\infty} \int_0^{1/i} f\,dx = 0$

$\Rightarrow 1 = \lim_{i\to+\infty} \left(\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_{n_k} g_i\,dx \right) = \lim_{i\to+\infty} \int_0^1 f g_i\,dx = 0 \quad \lightning$

$\Rightarrow \mathcal{L}^1((0,1))$ non è riflessivo

Ma E è riflessivo $\Leftrightarrow$ E' è riflessivo e 2 spazi topologicamente isomorfi sono riflessivi se uno di essi lo è $\Rightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega) \equiv (\mathcal{L}^1(\Omega))' \Rightarrow \mathcal{L}^\infty$ non è riflessivo

TOPOLOGIE DEBOLI

- Sia $(f_h)_h, f \in L^2((0,1))$ tali per cui $f_h(x) \to f(x), q.o., \forall x \in (0,1)$ allora vale che $f_h \rightharpoonup f$?

$f_h \rightharpoonup f$ in $L^2((0,1)) \iff \int_0^1 f_h g \, dx \longrightarrow \int_0^1 f g \, dx \quad \forall g \in L^2((0,1))$

$f_h(x) \to f(x)$ per q.o $x \in (0,1)$

- Sia
$$C := \{u \in L^2((0,1)) | 0 \leq u(x) \leq 1, q.o.\, x \in (0,1)\}$$
Provare che C è sequenzialmente compatto.

- Sia $f_h : (0,1) \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni definita da
$$f_h(x) = \begin{cases} \sqrt{h} & 0 < x \leq \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{1}{h} < x \leq 1 \end{cases}$$
Allora $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^2((0,1))$?

$f_h \rightharpoonup 0$ in $L^2((0,1)) \iff \int_0^1 f_h g \, dx \longrightarrow \int_0^1 \underbrace{f}_{f=0} g \, dx = 0 \quad \forall g \in L^2((0,1))$

$$\int_0^1 f_h g \, dx = \int_0^{1/h} \sqrt{h} g \, dx = \sqrt{h} \int_0^{1/h} g \, dx \xrightarrow[h \to +\infty]{} 0$$

- Sia $f_h : (0,1) \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni definita da

$$f_h(x) = \begin{cases} -h^2 x + h & 0 < x \leq \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{1}{h} < x \leq 1 \end{cases}$$

Allora $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^1((0,1))$?

$$\int_0^1 f_h g\, dx = \int_0^{1/h} (-h^2 x + h) g\, dx = -h^2 \int_0^{1/h} x g\, dx + h \int_0^{1/h} g\, dx \leq -h^2 \|g\|_{L^\infty} \int_0^{1/h} x\, dx + h \|g\|_{L^\infty} \int_0^{1/h} 1\, dx$$

$g \in L^\infty((0,1)) \Rightarrow \sup_{[0,1]} |g| < +\infty$

$\inf\{M>0 : |g(x)| \leq M \ \ \mu\text{-q.o}\}$

$$= -\|g\|_{L^\infty} h^2 \frac{1}{2h^2} + h \|g\|_{L^\infty} = \frac{1}{2} \|g\|_{L^\infty}$$

- Siano $f_h(x) := \sin(hx)$, provare che

  1. $(f_h)_h \subset L^p((-\pi,\pi)), \forall p \in [1,+\infty]$.
  2. $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^p((-\pi,\pi))$.

$f_h(x) = \sin(hx)$ $\quad f \in L^p((-\pi,\pi))$ $\quad 1 \leq p < +\infty$ se $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \right)^{1/p}$

$\|\sin(hx)\|_{L^p}^p = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(hx)|^p dx$

$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M>0 : |f(x)| \leq M \ \ \mu\text{-q.o } x \in X\}$ $\quad |\sin(hx)| \leq 1 \quad \forall h \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (-\pi,\pi)$

$\Rightarrow \|f\|_{L^\infty} < +\infty \Rightarrow f \in L^p((-\pi,\pi)) \quad \forall p \in [1,+\infty]$ poichè $L^q \subseteq L^p \quad \forall p \leq q$

$\Rightarrow L^\infty \subset L^p \quad \forall p \in [1,+\infty)$

$f \in L^1(-\pi,\pi) \Rightarrow$ per il lemma di Riemann-Lebesgue $\lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$

il $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = 0$

La misura dell'intervallo di integrazione è finita, quindi vale

$L^p(-\pi,\pi) \subset L^1(-\pi,\pi) \quad \forall p \in (1,+\infty]$

$\Rightarrow$ scelgo $f \in L^{p'}((-\pi,\pi)) \Rightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

$= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) f_n(x) dx$

$\Rightarrow \langle f, f_n \rangle_{L^{p'} \times L^p} \longrightarrow \langle f, 0 \rangle_{L^{p'} \times L^p} = 0$ il $f_n \rightharpoonup 0$

- Siano $(f_h)_h$ ed f in $L^2((a,b))$

  1. Se $f_h \to f$ in $L^2((a,b))$, allora vale che $f_h^2 \to f^2$ in $L^1((a,b))$. $\longrightarrow$ $\boxed{C-S}$ su p.s. di L^2 !!!
  2. Se $fh \rightharpoonup f$ in $L^2((a,b))$, allora vale che $f_h^2 \rightharpoonup f^2$ in $L^1((a,b))$?

$f_n \to f$ in $L^2((a,b)) \Rightarrow \|f_n - f\|_{L^2} \longrightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 < +\infty$

$f_n^2 \to f^2$ in $L^1(a,b) \Rightarrow \int_a^b |f_n^2 - f^2| \, dx$

Analisi Funzionale

Domande III Appello Orale 2025

23 giugno 2025

1 Primo Interrogato

1. - Dare la definizione di base di Hamel;
   - Dimostrare che $L^2(0,1)$ ha dimensione infinita.
     $\mathbb{R}[x] \subset L^2(0,1)$*; in particolare i monomi sono linearmente indipendenti per il Teorema Fondamentale dell'Algebra*

2. Si consideri la successione $f_h :]0,1[\to \mathbb{R}$ data da $(h = 2, 3, \dots)$

$$f_h(x) := \begin{cases} \sqrt{h} & 0 < x < 1/h \\ 0 & 1/h \leq x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

   - È vero che $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,1)$?
     Sì, usare la disuguaglianza di Hölder e convergenza monotona
   - È vero che $f_h \rightharpoonup 0$ in $L^1(0,1)$?
     Sì, stimare con la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$

2 Secondo Interrogato

1. È vero che, dati due spazi vettoriali normati E, F, se $E' \cong F'$ allora $E \cong F$?
   No, basta considerare $\mathbb{R}^\infty$ *e* ℓ^2

2. Si considerino due successioni $(f_h)_h, (g_h)_h \subset L^2$, con $g_h \to g$ in L^2,
   - se $f_h \to f$ in L^2, è vero che $f_h g_h \rightharpoonup fg$ il L^2? *Sì*
   - se $f_h \rightharpoonup f$ in L^2, è vero che $f_h g_h \rightharpoonup fg$ il L^2? *No*

3 Terzo Interrogato

1. Si verifichi che $\log\left(\frac{1}{x}\right) \in L^p(0,1)$ per ogni $p \in [1, +\infty[$ senza stimarla con la funzione Γ.

2. Dato un aperto non vuoto e limitato Ω, dire se $\mathbf{C}^0(\bar{\Omega})$ è un sottospazio chiuso di $L^\infty(\bar{\Omega})$.
   Cfr. Note di Analisi B – Teorema 4.1 o Esercizio 2.1 delle schede di Analisi Funzionale

3. Dire per quali $p \in [1, +\infty]$ lo spazio ℓ^p è riflessivo e perché.
   Teorema di Rappresentazione di Riesz per $L^p(X, \mu) = L^p(\mathbb{N}, \#)$

4 Quarto Interrogato

1. $L^2(X, \mu)$ è sempre separabile?
   No, si vede con $L^2(\mathbb{R}, \#)$ *e la caratterizzazione degli spazi di Hilbert (separabile se e solo se base di Hilbert numerabile):* $\{\chi_{\{x\}} : x \in \mathbb{R}\}$ *è una base di Hilbert non numerabile in quanto ogni funzione in* $L^2(\mathbb{R}, \#)$ *è non zero al più su un insieme numerabile di indici, oppure si può fornire una famiglia più che numerabile di aperti disgiunti, che si ottiene traslando la palla unitaria.*

2. Una successione in $L^2(0,1)$ puntualmente convergente quasi ovunque è debolmente convergente?
   La successione $f_h(x) = h\chi_{[0,1/h]}$ *converge puntualmente quasi ovunque ma non debolmente in* $L^2(0,1)$*: è sufficiente utilizzare come funzione test* $g(x) \equiv 1$.