Esercizi per Analisi Funzionale

Barbieri Edoardo, Borra Davide, Fragomeno Aleksander V.,
Sarra Leonardo, Troncana Filippo

A.A. 2024/2025

Indice

I. Spazi di Banach

Esercizio I.1. Struttura di $\mathbb{R}^n$

Testo. Si dimostri che

(i) $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$.

(ii) $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma euclidea

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{se } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Soluzione.

(i)
- **Somma:** Le proprietà di $(\mathbb{R}^n, +)$ seguono direttamente da quelle di $(\mathbb{R}, +)$ applicate componente a componente.
- **Prodotto per scalari:**
  - **Distributività 1:** Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$, bisogna dimostrare che $k(u + v) = ku + kv$

    $$k((u_1, ..., u_n) + (v_1, ..., v_n)) = k(u_1, ..., u_n) + k(v_1, ..., v_n)$$

    Per le definizioni di somma e prodotto per scalari in $\mathbb{R}^n$

    $$k(u_1 + v_1, ..., u_n + v_n) = (ku_1, ..., ku_n) + (kv_1, ..., kv_n)$$

    $$(k(u_1 + v_1), ..., k(u_n + v_n)) = (ku_1 + kv_1, ..., ku_n + kv_n)$$

    Per la proprietà associativa in $\mathbb{R}$, si ha la tesi.
  - **Distributività 2:** Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, bisogna dimostrare che $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$

    $$(k_1 + k_2)(v_1, ..., v_n) = k_1(v_1, ..., v_n) + k_2(v_1, ..., v_n)$$

    Per la definizione di somma in $\mathbb{R}$ e di prodotto per scalari in $\mathbb{R}^n$.

    $$((k_1 + k_2)v_1, ..., (k_1 + k_2)v_n) = (k_1v_1, ..., k_1v_n) + (k_2v_1, ..., k_2v_n)$$

    Per la definizione di somma in $\mathbb{R}^n$.

    $$((k_1 + k_2)v_1, ..., (k_1 + k_2)v_n) = (k_1v_1 + k_2v_1, ..., k_1v_n + k_2v_n)$$

    Per la proprietà distributiva in $\mathbb{R}$, si ha la tesi.
  - **Pseudo-associatività:** Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, bisogna dimostrare che $k_1(k_2v) = (k_1k_2)v$

    $$k_1(k_2(v_1, ..., v_n)) = (k_1k_2)(v_1, ..., v_n)$$

    Per definizione di prodotto per scalari in $\mathbb{R}^n$

    $$k_1(k_2v_1, ..., k_2v_n) = ((k_1k_2)v_1, ..., (k_1k_2)v_n)$$

    $$(k_1(k_2v_1), ..., k_1(k_2v_n)) = ((k_1k_2)v_1, ..., (k_1k_2)v_n)$$

    Per la proprietà associativa in $\mathbb{R}$, si ha la tesi.
  - **Neutro:** Bisogna dimostrare che $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall v \in \mathbb{R}^n, v \cdot 1 = v$
    Siano $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
    Per definizione di neutro $v = \alpha v$

    $$(v_1, ..., v_n) = \alpha(v_1, ..., v_n)$$

    Per la definizione di prodotto per scalari in $\mathbb{R}^n$.

    $$(v_1, ..., v_n) = (\alpha v_1, ..., \alpha v_n)$$

    Da cui

    $$v_i = \alpha v_i \qquad \forall i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n$$

    Per la proprietà degli inversi in $\mathbb{R}$

    $$\underbrace{v_1 \cdot v_1^{-1}}_{1} = \alpha \underbrace{v_1 \cdot v_1^{-1}}_{1} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 1$$

- **Dimensione finita:** vogliamo mostrare che $\mathbb{R}^n$ ammette una base finita: esibiamo una tale base. Definiamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$ come

$$\beta = \{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

con e_i vettore di $\mathbb{R}^n$ con tutti gli elementi nulli tranne l'i-esimo, che è 1. Sia ora $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, allora possiamo scrivere v come combinazione lineare di elementi di β:

$$v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$$

dunque β è una base di $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sia $\{x(h)\}_h$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$, vogliamo provare che converge. Consideriamo le successioni corrispondenti alle singole componenti $\{x_i(h)\}_h \subset \mathbb{R}$, allora esse sono a loro volta successioni di Cauchy, quindi per completezza di $\mathbb{R}$ convergono. Sia x_i il limite di $\{x_i(h)\}_n$, allora possiamo definire il candidato limite della successione di vettori $\{x(h)\}_h$ come il vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$. Verifichiamo che effettivamente vale $\lim_{h\to\infty} \|x(h) - x\| = 0$. Per la disuguaglianza triangolare, fissato un $\varepsilon > 0$ esiste un N tale che per ogni $h > N$ e per ogni $k > 0$ vale

$$\begin{aligned}|x_i(h) - x_i| = |x_i(h) - x_i(h+k) + x_i(h+k) - x_i| &\leq |x_i(h) - x_i(h+k)| + |x_i(h+k) - x_i| \leq \\ \leq \|x(h) - x(h+k)\| + |x_i(h+k) - x_i| &< \varepsilon + |x_i(h+k) - x_i|\end{aligned}$$

in particolare, per la convergenza componente a componente, $|x_i(h+k) - x_i|$ è infinitesimo per $k \to \infty$, quindi poiché $|x_i(h) - x_i|$ non dipende da k, deve essere

$$|x_i(h) - x_i| < \varepsilon$$

da cui abbiamo la verifica della definizione di limite

$$\|x(h) - x\| = \left(\sum_{i=1} |x_i(n) - x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \sqrt{n}.$$

Esercizio I.2. Struttura di $\mathbb{R}^\infty$

Testo. Si consideri $\mathbb{R}^\infty$ e si mostri che:

(i) È un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione infinita.

(ii) La funzione

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}^+} |x_i|^2}$$

è una norma su $\mathbb{R}^\infty$

(iii) Non è uno spazio di Banach rispetto a quella norma.

Soluzione.

(i) La struttura di spazio vettoriale è evidente (si noti che $\mathbb{R}^\infty \cong \mathbb{R}[x]$), procediamo a dimostrare la dimensione infinita.
Supponiamo che esista una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ finita, ma dunque esiste tra questi elementi, un indice massimo non zero, che chiameremo h.
Allora esiste in $\mathbb{R}^\infty$ un elemento della forma $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} = (\delta_h(i))_{i \in \mathbb{Z}^+}$[1], che chiaramente non è combinazione lineare di nessun elemento di $\mathcal{B}$.
In particolare l'insieme $\{(\delta_j(i)_{i \in \mathbb{Z}^+})\}_{j \in \mathbb{Z}^+}$ è una base.

(ii) Evidentemente, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ed $\|\lambda \cdot \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$, manca da dimostrare la disuguaglianza triangolare. Prendiamo $x, y \in \mathbb{R}^\infty$, ma allora possiamo identificarli come membri di $\mathbb{R}^n$ per un qualche $n \in \mathbb{Z}^+$ (con stessa norma, in quanto ogni indice maggiore di n ha contributo nullo), dunque la disuguaglianza triangolare tiene.

(iii) Prendiamo la sequenza $\{(2^{-h/2})_{h \leq n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, abbiamo che questa è di Cauchy (infatti la differenza tra due elementi è sempre limitata da $2^{-i/2}$ dove i è l'ultimo indice su cui coincidono) e convergerebbe (sempre abbastanza evidentemente) a $(2^{-h/2})_{h \in \mathbb{N}}$ che ha norma 2 ma non è un elemento di $\mathbb{R}^\infty$ in quanto ha un numero infinito di elementi non nulli.

[1] Dove δ_i è la delta di Kronecher

Esercizio I.3. Struttura di ℓ^2

Testo. Sia $\ell^2 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2 < +\infty\}$ dotato della norma

$$\|x\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostrare che

(i) $\mathbb{R}^\infty \subset \ell^2$;

(ii) ℓ^2 è uno spazio vettoriale di dimensione infinita;

(iii) $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ è uno spazio vettoriale normato;

(iv) $\mathbb{R}^\infty$ è denso in ℓ^2.

Soluzione.

(i) Sia $x \in \mathbb{R}^\infty$, allora esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $x(n) = 0$, dunque la serie si riduce ad una somma finita, che è quindi finita:

$$\|x\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{N} |x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

(ii) È sufficiente esibire un sottoinsieme linearmente indipendente ed infinito. Poiché $\mathbb{R}^\infty \subset \ell^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, è sufficiente considerare una sua base.

(iii) Per verificare che si tratta di uno spazio vettoriale è sufficiente provare che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^\mathbb{N}$: in particolare si verifica che, presi $x, y \in \ell^2$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)+y(n)|^2 &\le \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)+y(n)|(|x(n)|+|y(n)|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)+y(n)||x(n)| + \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)+y(n)||y(n)| \\ &\underset{(\mathrm{H})}{\le} \underline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)+y(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

da cui, dividendo ambo i membri per la quantà evidenziata, si ottiene la stima

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)+y(n)|^2 \le \left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |y(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 < +\infty \qquad \Longrightarrow x+y \in \ell^2$$

È importante notare come nel passaggio evidenziato con (H) sia stata applicata la disuguaglianza di Hölder. Ora, per $x \in \ell^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^2 |x(n)|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^2 < +\infty \qquad \Longrightarrow \lambda x \in \ell^2.$$

In particolare ℓ^2 è un sottospazio di $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ e dunque uno spazio vettoriale.
Verifichiamo ora gli assiomi di norma: la verifica della disuguaglianza triangolare e dell'omogeneità è analoga alla chiusura per somma e prodotto per scalare appena provata, quindi è sufficiente verificare che $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Anche questa prova è tuttavia banale, in quanto $\|x\|$ è il radicale di una somma di quantità non negative, quindi affinché si annulli tutti gli addendi devono essere nulli, e ciò implica che $x = 0$.

(iv) Vogliamo provare che la chiusura di $\mathbb{R}^\infty$ in ℓ^2 è ℓ^2 stesso. In particolare, per l'equivalenza tra chiusura e chiusura sequenziale propria delle topologie primo-numerabili (in particolare quindi delle topologie indotte da norme), è sufficiente mostrare che per ogni $x \in \ell^2$ esiste una successione $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}^\infty$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\ell^2} = 0$. Fissato $x \in \ell^2$, possiamo considerare la successione $\{x_n\}_n$ definita come

$$x_n(k) = \begin{cases} x(k) & k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

allora si ha

$$\|x_n - x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

in particolare, $\|x_n - x\|_{\ell^2}$ è il residuo $(n+1)$-esimo della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)|^2$ quindi provare che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\ell^2} = 0$ è equivalente a provare che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)|^2$ converge, ma ciò è vero per ipotesi in quanto $x \in \ell^2$.

Esercizio I.4. Struttura di $\mathcal{C}^m$

Testo. Si consideri $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ con $m \in \mathbb{N}$ e Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ a chiusura compatta e si mostri che:

(i) È un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione infinita.

(ii) Posto $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$, la funzione

$$\|f\| = \sum_{i=0}^{m} \sup_{[a,b]} |f^{(i)}|$$

è una norma su $\mathcal{C}^m([a,b])$.

Soluzione.

(i) Prendiamo $f, g \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora possiamo notare che per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ vale

$$\frac{\partial^m(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)}{\partial x_i^m} = \lambda \frac{\partial^m f}{\partial x_i^m} + \mu \frac{\partial^m g}{\partial x_i^m}$$

Combinazione lineare di funzioni continue su $\bar{\Omega}$ e quindi continua, dunque $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$

(ii) Consideriamo le tre proprietà di norma:

- Una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha valore assoluto con estremo superiore nullo su un compatto se e solo se questa è identicamente nulla su di esso, e dato che questo compatto è chiusura di un aperto, se è identicamente nulla allora tutte le sue derivate lo sono.
- L'omogeneità segue da quella del valore assoluto e dalla linearità della derivata.
- Anche la disuguaglianza triangolare segue quasi automaticamente, infatti

$$\|f+g\| = \sum_{i=0}^{m} \sup_{\bar{\Omega}} |(f+g)^{(i)}| \leq \sum_{i=0}^{m} \sup_{\bar{\Omega}}(|f^{(i)}| + |g^{(i)}|) \leq \sum_{i=0}^{m} \sup_{\bar{\Omega}} |f^{(i)}| + \sup_{\bar{\Omega}} |g^{(i)}| =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sup_{\bar{\Omega}} |f^{(i)}| + \sum_{i=0}^{m} \sup_{\bar{\Omega}} |g^{(i)}| = \|f\| + \|g\|$$

Esercizio I.5. $\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$

Testo. Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Dimostrare che $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y$
$|$ per ogni $x, y \in E$.

Soluzione. Per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x-y\| + \cancel{\|y\|} - \cancel{\|y\|} = \|x-y\|$$

$$\|y\| - \|x\| = \|y - x + x\| - \|x\| \leq \|y-x\| + \cancel{\|x\|} - \cancel{\|x\|} = \|x-y\|$$

da cui

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x-y\| \geq |\|x\| - \|y|.$$

Esercizio I.6. Magrezza dei sottospazi di dimensione finita

Testo. Sia $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale normato di dimensione infinita e sia $F \subset E$ un sottospazio di dimensione finita. Si mostri che:

(i) F è chiuso.

(ii) F ha parte interna vuota.

Soluzione.

(i) Vediamo F come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale normato di dimensione finita su un campo completo $\mathbb{K}$, sia $\{e^1, ..., e^n\}$ una base di F. Segue allora che F è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, che è completo in quanto $\mathbb{K}$ lo è (in effetti una successione di Cauchy in $\mathbb{K}^n$ ha come limite il vettore dato dai limiti componente per componente). Dunque anche $\mathbb{K}$ è completo e dunque chiuso in $(E, \|\cdot\|)$.

(ii) Dimostriamo che ogni sottospazio proprio di uno spazio vettoriale normato ha parte interna vuota. Sia V un sottospazio di E e supponiamo che abbia interno non vuoto, cioè esistono $x \in V, r > 0$ tali che $B(x,r) \subset V$, proviamo che $V = E$. Sia $y \in E$, allora $z = x + \frac{r}{2\|y\|}y \in B(x,r) \subset V$, ma poichè V è un sottospazio vettoriale, $y = \frac{2\|y\|}{r}(z-x) \in V$. Dunque $V = E$. D'altra parte ovviamente F è un sottospazio vettoriale proprio di E (ha dimensione finita mentre E no) dunque segue che F ha parte interna vuota.

Esercizio I.7. Equivalenza delle norme

Testo. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, sia

$$\|x\|_{\mathbb{K}^n} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_{\mathbb{K}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

(i) Provare che ogni norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{K}^n$ è equivalente a $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$. In particolare tutte le norme su $\mathbb{K}^n$ sono equivalenti.

(ii) Sia $(F, \|\cdot\|_F)$ uno spazio vettoriale normato e $L : \mathbb{K}^n \to F$ una mappa lineare. Allora L è continua.

Soluzione.

(i) Consideriamo $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_{\mathbb{K}^n} = 1\}$, che è compatta rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$.
Inoltre $\|\cdot\| : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ è continua infatti sia $\varepsilon > 0$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e poniamo $M := \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}$ con $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canonica di $\mathbb{K}^n$ allora se $\delta = \frac{\varepsilon}{Mn}$, per ogni $y \in \mathbb{K}^n$ t.c. $\|x-y\|_{\mathbb{K}^n} \leq \delta$ abbiamo:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| = \|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\|e_i\| \leq M\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq Mn\|x-y\|_{\mathbb{K}^n} \leq \delta Mn = \varepsilon.$$

Allora per il Teorema di Weierstrass esistono $\hat{x}, \check{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ punti di massimo e minimo rispettivamente della norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{S}^{n-1}$. Fissato ora un qualsiasi $x \in \mathbb{K}^n$, per omogeneità della norma vale

$$\|x\| = \|x\|_{\mathbb{K}^n} \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \right\|$$

dove $x/\|x\|_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{S}^{n-1}$, quindi vale la stima

$$\|\check{x}\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \right\| \leq \|\hat{x}\|$$

da cui

$$\|\check{x}\|\|x\|_{\mathbb{K}^n} \leq \|x\| = \|x\|_{\mathbb{K}^n} \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \right\| \leq \|x\|_{\mathbb{K}^n}\|\hat{x}\|.$$

In particolare è sufficiente porre $c := \max\{\|\check{x}\|^{-1}, \|\hat{x}\|\}$ per ottenere la stima

$$\frac{1}{c}\|x\|_{\mathbb{K}^n} \leq \|x\| \leq c\|x\|_{\mathbb{K}^n}.$$

(ii) Consideriamo $x \in \mathbb{K}^n$ qualsiasi e $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ la sua decomposizione rispetto ad una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ di $\mathbb{K}^n$, poichè L è lineare allora dimostrare che è continua equivale a dimostrare che è limitata:

$$\|L(x)\| = \|\sum_i x_i L(e_i)\| \leq \sum_i |x_i|\|L(e_i)\| \leq \max_i \|L(e_i)\|\|x\|_1 = c\|x\|_{\mathbb{K}^n}.$$

per un qualche $c \in \mathbb{K}$ dato che per il punto (i) le norme su $\mathbb{K}^n$ sono equivalenti.

Esercizio I.8. Norma iniziale indotta da una mappa lineare

Testo. Sia $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale normato, sia E un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $T : E \to F$ una mappa lineare iniettiva. Si mostri che la funzione $\|\cdot\|_T : E \to [0, +\infty]$ definita da $\|v\|_T := \|T(v)\|_F$ è una norma su E.

Soluzione. Dimostriamo i tre assiomi di norma:

(i) Dato che T è iniettiva, vale $\ker T = \{0\}$, dunque $\|v\|_T = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

(ii) L'omogeneità segue direttamente dalla linearità di T e dall'omogeneità di $\|\cdot\|_F$.

(iii) Per la linearità di T abbiamo:

$$\|v + w\|_T = \|T(v) + T(w)\|_F \leq \|T(v)\|_F + \|T(w)\|_F = \|v\|_T + \|w\|_T$$

Esercizio I.9. Dimensione finita e $\mathbb{K}^n$

Testo. Assumiamo che E sia un s.v.d.f su $\mathbb{K}$ e $n = \dim_{\mathbb{R}} E$

(i) E e $\mathbb{K}^n$ sono linearmente isomorfi.

(ii) Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su E. Allora $(E, \|\cdot\|_1)$ e $(E, \|\cdot\|_2)$ sono topologicamente isomorfi.

(iii) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $T_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)'$ definita come

$$T_{\mathbb{K}}(u)(v) := (u, v)_{\mathbb{K}^n} \text{ se } u, v \in \mathbb{K}^n.$$

dove $(\cdot, \cdot)_{K^n}$ è il prodtto scalare standard su $\mathbb{K}^n$. Dimostrare che $T_{\mathbb{K}}$ sia un isomorfismo isometrico

(iv) Sia $\|\cdot\|$ una norma su E e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora $(E, \|\cdot\|)$ e $(E', \|\cdot\|_{E'})$ sono topologicamente isomorfi

Soluzione.

(i) Sia $\beta = (u_1, \ldots, u_n) \subset E$ una base e definiamo $T \colon \mathbb{K}^n \to E$ nel modo seguente: $\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $T(x) := \sum_{i=1}^n x_i u_i$. Allora la linearità e l'iniettività seguono direttamente dalla definizione e dal fatto che β sia una base di E. Per quanto riguarda la surriettività questa segue dal Teorema di Nullità + Rango osservando che i due s.v. hanno la stessa dimensione e che T è iniettiva.

(ii) Voglio mostrare che la mappa definita al punto (i) $T \colon (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|_E)$ sia in realtà un isomorfismo topologico, dove $\|\cdot\|$ è una qualunque norma su $\mathbb{K}^n$. T è continua per il secondo punto dell'esercizio 7, inoltre poichè su $\mathbb{K}^n$ tutte le norme sono equivalenti allora $\forall v \in E$ $\|T^{-1}(v)\| \leq c\|T^{-1}(v)\|_T =: c\|v\|_E$ per qualche $c \in \mathbb{K}$ e quindi anche l'inversa è continua. Dunque considerando ora $\|\cdot\|_1$ e sfruttando il fatto che T è un isomorfismo topologico segue immediatamente che $c_1\|T^{-1}(x)\|_{\mathbb{K}^n} \leq \|x\|_1 \leq c_2\|T^{-1}(x)\|_{\mathbb{K}^n}$ per opportuni $c_1, c_2 \in \mathbb{K}^n$ e analogamente per $\|\cdot\|_2$. Unendo quindi questi risultati segue che $d_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d_2\|x\|_2$ ovvero sono equivalenti il che è equivalente a dire che $id \colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ è un isomorfismo topologico.

(iii) La linearità di $T_{\mathbb{K}^n}$ segue per computo diretto. Ora dimostro che è iniettiva. Sia $u \in \mathbb{K}^n$ t.c. $T(u) = \mathbf{0}$, allora $\forall v \in \mathbb{K}^n$ $(u, v) = 0$. In particolare deve valere per $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$ cioè $(u, e_i) = 0 \Leftrightarrow u_i = 0$ dunque $u = 0$ e quindi T iniettiva. Ora ricordando che (almeno in dimensione finita) $\dim(\mathbb{K}^n) = n = \dim((\mathbb{K}^n)')$ allora sempre per Nullità + Rango segue anche la surriettività. Per quanro riguarda la continuità di $T_{\mathbb{K}^n}$ e della sua inversa la si ottiene subito sfruttando la che è biettiva, che le norme su $\mathbb{K}^n$ sono tutte equivalenti e che $T_{\mathbb{K}^n}$ induce una norma su $\mathbb{K}^n$. Ora dalla definizione di $\|\cdot\|_{(\mathbb{K}^n)'}$ se fissiamo $u \in \mathbb{K}^n$ $\|u\|_{\mathbb{K}^n} = \frac{T(u)(u)}{\|u\|_{\mathbb{K}^n}} \leq \|T(u)\|_{(\mathbb{K}^n)'}$ e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\forall v \in \mathbb{K}^n$ $\frac{|T(u)(v)|}{\|v\|_{\mathbb{K}^n}} \leq \frac{\|u\|_{\mathbb{K}^n}\|v\|_{\mathbb{K}^n}}{\|v\|_{\mathbb{K}^n}} = \|u\|_{\mathbb{K}^n} \implies \|T(u)\|_{(\mathbb{K}^n)'} \leq \|u\|_{\mathbb{K}^n}$ e quindi $\|T(u)\|_{(\mathbb{K}^n)'} = \|u\|_{\mathbb{K}^n}$

(iv) Considero $T' \colon E' \to (\mathbb{K}^n)'$ la mappa aggiunta di T definita sopra, cioè $T'(f)(v) := f(T(v))$ se $f \in E'$, $v \in \mathbb{K}^n$. La linerità è evidente per linearità di $f, g \in E'$. Sia $f \in \mathbb{E}'$ t.c. $T'(f) = \mathbf{0}$, allora $\forall v \in \mathbb{K}^n$ $T'(f)(v) = T(f(v)) = 0$. Poichè T è in particolare un isomorfismo algebrico allora manda basi in basi quindi se $\{e_i\}_{i=1}^n$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$ allora $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$ è una base di E e vale anche $T(f(e_i)) = 0$. Dunque $\forall w \in E, w = \sum_{i=1}^n a_i T(e_i)$ con $a_i \in \mathbb{K}^n$ allora $f(w) = 0$ per linearità di f cioè $f = 0$ e quindi T' iniettiva (e surriettività per N+R). Per la continuità di T' e $(T')^{-1}$ è sufficiente osservare che esse sono applicazioni lineari tra spazi di dimensione finita, e dunque continue per quanto provato in esercizio 1.7.

Esercizio I.10. Norma sui funzionali lineari e continui

Testo. Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Si mostri che $L := \hom(E, F)$, ovvero l'insieme delle funzioni $E \to F$ lineari e continue, è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con una norma definita da

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_F : x \in B_E\}$$

Soluzione. La struttura di spazio vettoriale è banale, quindi dimostriamo gli assiomi di norma.

(i) Il fatto che $\|\bar{0}\| = 0$ è evidente. Supponiamo che $\|T\| = 0$ ed esista $x \in E$ tale che $T(x) \neq 0$; notiamo che T deve essere costantemente nulla su B_E, quindi $x \in E \setminus B_E$, ma Consideriamo

$$\hat{x} := \frac{x}{\|x\|_E} \in B_E \Rightarrow \|\hat{x}\|_E = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Assurdo, dunque non esiste tale x e T è identicamente nulla su E.

(ii) L'omogeneità segue direttamente dalla linearità degli elementi di L.

(iii) Notiamo che

$$\|T + R\| = \sup\{\|T(x) + R(x)\|_F : x \in B_E\} \leq \sup\{\|T(x)\|_F + \|R(x)\|_F : x \in B_E\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|T(x)\|_F : x \in B_E\} + \sup\{\|R(x)\|_F : x \in B_E\} = \|T\| + \|R\|$$

Esercizio I.11. ASSURDAMENTE LUNGO (c e c_0)

Testo. Sia

$$c := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists \lim_{n\to\infty} x(n) \in \mathbb{R}\}$$

e

$$c_0 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists \lim_{n\to\infty} x(n) = 0\}$$

Provare che:

(i) c e c_0 sono sottospazi vettoriali chiusi di $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$;

(ii) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ non è separabile ma $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ e $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ sono spazi di Banach separabili e sono topologicamente isomorfi;

(iii) $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ e $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ non sono isometricamente isomorfi;

(iv) Sia $T_0 : (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^\infty}) \to (c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})'$ la mappa lineare definita da

$$T_0(x)(y) := \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \quad \forall x \in \ell^1, y \in c_0.$$

Allora T_0 è un'isometria, cioè $\|T_0(x)\|_{(c_0,\|\cdot\|_{\ell^\infty})'} = \|x\|_{\ell^1}\ \forall x \in c_0$

(v) Sia $f \in (c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})'$ e sia $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita come $x(n) := f(e_n)$ se $n \in \mathbb{N}$, allora $x \in \ell^1$.

(vi) Sia $T_\infty : (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1}) \to (\ell^\infty)'$ la mappa lineare definita da:

$$T_\infty(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \quad \forall x \in \ell^1, y \in \ell^\infty$$

Allora T_∞ è ancora un'isometria, cioè: $\|T_\infty(x)\|_{\ell^\infty} = \|x\|_{\ell^1}, \quad \forall x \in \ell^1$.

(vii) T_∞ non è surgettiva.

Soluzione.

(i) Mostriamo come prima cosa che c è un sottospazio chiuso di ℓ^∞. Sia quindi $(x_h)_h \subset c$ per cui $\exists x \in \ell^\infty$ tale che $\|x - x_h\|_{\ell^\infty} \to 0$ per $h \to +\infty$ mostriamo che $x \in c$. Siccome la successione $(x_h)_h$ converge a $x \in \ell^\infty$ allora

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H = H(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall h > H(\varepsilon) \quad |x(n) - x_h(n)| < \varepsilon \text{ da un certo } \bar{N} \text{ in poi}$$

Fissiamo perciò $h > H$ e otteniamo $\forall n > \bar{N}$

$$-\varepsilon < x(n) - x_h(n) < \varepsilon$$

$$x_h(n) - \varepsilon < x(n) < x_h(n) + \varepsilon$$

Poichè $x_h \in c$ allora $\exists l_h := \lim_{n\to\infty} x_h(n) \in \mathbb{R}$. Mandando dunque $n \to \infty$ ottengo

$$l_h - \varepsilon \leq \liminf_n x(n) \leq \limsup_n x(n) \leq l_h + \varepsilon$$

$$0 \leq \limsup_n x(n) - \liminf_n x(n) \leq 2\varepsilon$$

Perciò per l'arbitrarietà di ε ottengo:

$$\limsup_n x(n) = \liminf_n x(n) = \lim_n x(n) =: l$$

e poichè $l \in [l_h - \varepsilon, l_h + \varepsilon]$ si ha $l \in \mathbb{R}$ e quindi $x \in c$.
Analogamente si dimostra che c_0 è chiuso osservando che in questo caso $l_h = 0$ e $\limsup_n x(n) = \liminf_n x(n) = \lim_n x(n) =: l$ con $l \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ dunque per arbitrarietà di ε, $l = 0$.

(ii) Assumiamo per assurdo che ℓ^∞ sia separabile e sia $\overline{D} = \ell^\infty$ con $D := \{d_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty$.
Definiamo $z \in \ell^\infty$ come:

$$z(n) := \begin{cases} 2 & \text{se } |d_n(n)| < 1 \\ 0 & \text{se } |d_n(n)| \geq 1 \end{cases}$$

Allora $\|z\|_{\ell^\infty} = 2$, dunque $z \in \ell^\infty$. Sia ora $d_i \in D$ allora

$$\begin{aligned} \|z - d_i\|_{\ell^\infty} &= \sup_n |z(n) - d_i(n)| \\ &\geq |z(i) - d_i(i)| \\ &\geq \begin{cases} |z(i)| - |d_i(i)| & \text{se } |d_n(n)| < 1 \\ |d_i(i)| - |z(i)| & \text{se } |d_n(n)| \geq 1 \end{cases} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Perciò ℓ^∞ non è separabile.
Mostriamo ora che c_0 è separabile. Sia $\mathbb{Q}^\infty := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : \exists \overline{n} : x(n) = 0 \ \ \forall n > \overline{n}\}$, ovviamente $\mathbb{Q}^\infty \subset c_0$, dunque sia $x \in c_0$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Poichè $x(n) \to 0$ per $n \to \infty$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ t.c. $|x(n)| < \varepsilon \ \forall n > N$.
Scegliamo dunque y tale che $y(n) = 0 \ \forall n > N$.
Ora per densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ per ogni $n \leq N$ riesco a trovare un $y(n) \in \mathbb{Q}$ tale che $|x(n) - y(n)| < \varepsilon$.
Dunque per costruzione $\|x - y\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$ con $y \in \mathbb{Q}^\infty$. Analogamente si dimostra che c è separabile considerano $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}^\infty := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : \exists q \in \mathbb{Q}, \exists \overline{n} : x(n) = q \ \ \forall n > \overline{n}\}$. Infatti sia $x \in c$ e sia $l \in \mathbb{R}$ tale che $x(n) \to l$ per $n \to \infty$, allora di nuovo esiste un $N \in \mathbb{N}$ t.c. $|x(n) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > N$. Scegliamo dunque y tale che $y(n) = r \ \forall n > N$ dove $r \in \mathbb{Q}$ è tale che $|l - r| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > N$. Così infatti $|x(n) - r| \leq |x(n) - l| + |l - r| < \varepsilon$
Ora ancora per densià di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ per ogni $n \leq N$ riesco a trovare un $y(n) \in \mathbb{Q}$ tale che $|x(n) - y(n)| < \varepsilon$.
Dunque per costruzione $\|x - y\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$ con $y \in \mathbb{Q}^\infty$.
Infine mostriamo che c e c_0 sono topologicamente isomorfi. Consideriamo la mappa $T : c \to c_0$ definita come:

$$T(x) = (l, x(1) - l, x(2) - l, \dots) \quad \forall x \in c$$

dove $l = \lim_{n\to\infty} x(n)$. Intanto osserviamo che T è ben definita, ora proviamo che T sia un isomorfismo topologico:

- T lineare: banale
- T iniettiva: $T(x) = 0 \iff (l, x(1) - l, x(2) - l, \dots) = 0 \iff l = 0$ e $x(i) - l = 0$ per ogni $i > 0$, dunque $x(i) = 0 \ \forall i > 0$ cioè $x = 0$.

- T surgettiva: Sia $y \in c_0$ e definiamo $x \in c$ così $x(n) := y(n+1) + y(1)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora, poichè $y(n) \to 0$, $x(n) \to y(1)$ quindi effettivamente $x \in c$ inoltre $T(x) = y$.
- T continua:

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_{\ell^\infty} = \sup_n |T(x)(n)| = \sup_n\{|l|, |x(1)-l|, |x(2)-l|, \dots\} \leq \\ \leq |l| + \|x - \hat{l}\|_{\ell^\infty} \leq |l| + \|x\|_{\ell^\infty} + \|\hat{l}\|_{\ell^\infty} = 2|l| + \|x\|_{\ell^\infty} \leq 3\|x\|_{\ell^\infty}\end{aligned}$$

  dove con $\hat{l}$ indico la successione costantemente uguale a l e osservando che $|l| \leq \sup_n x(n)$ poichè l è il limite finito di x.
- T^{-1} continua: per il Teorema dell'inversa limitata dato che T è lineare, continua e biettiva ed inoltre $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ e $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ sono spazi di Banach essendo chiusi in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ che è Banach.

(iii) Proviamo che esiste $\xi \in c \setminus \{0\}$ tale che per ogni $x \in c$ e per un appropriato $\lambda = \pm 1$, vale: $\|\xi + \lambda x\|_{\ell^\infty} = \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty}$.
Sia $\xi \in c \setminus \{0\}$ definita da: $\xi(n) \equiv l > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sia $x \in c$ con $\lim_n x(n) = m \in \mathbb{R}$, allora ci sono due possibili casi: o esiste $\bar{n}$ tale che $\|x\|_{\ell^\infty} = x(\bar{n})$ oppure $\|x\|_{\ell^\infty} = \lim_n |x(n)|$.
Nel primo caso poniamo $\lambda = sgn(x(\bar{n}))$, si ha:

$$\begin{aligned}\|\xi + \lambda x\|_{\ell^\infty} &\geq |\xi(\bar{n}) + \lambda x(\bar{n})| = |l + |x(\bar{n})|| \\ &= l + |x(\bar{n})| = \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty}\end{aligned}$$

mentre l'altra disuguaglianza è ovvia grazie a quella triangolare.
Nel secondo caso invece poniamo $\lambda = sgn(m)$, da cui per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\xi + \lambda x\|_{\ell^\infty} \geq |\xi(n) + \lambda x(n)|$$

da cui ricaviamo: $\|\xi + \lambda x\|_{\ell^\infty} \geq \lim_n |\xi(n) + \lambda x(n)| = |l + |m|| = l + |m| = \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty}$.
Proviamo ora che per ogni $\xi \in c_0$ esiste $x \in c_0 \setminus \{0\}$ tale che per $\lambda = \pm 1$ vale:

$$\|\xi + \lambda x\|_{\ell^\infty} = \|\xi\|_{\ell^\infty} < \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty}$$

Sia $\xi \in c_0 \setminus \{0\}$, definiamo: $x \in c_0$ come

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{4}\|\xi\|_{\ell^\infty} & se\ n = N \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

dove $N > 0$ è tale che: $|\xi(n)| < \frac{1}{4}\|\xi\|_{\ell^\infty}$ per tutti gli $n \geq N$ (tale N esiste perché $\lim_n \xi(n) = 0$). Ma allora:

$$\begin{aligned}|\xi(n) + \lambda x(n)| &= \begin{cases} |\xi(N) + \lambda x(N)| & se\ n = N \\ |\xi(n)| & altrimenti \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} |\xi(N)| + \frac{1}{4}\|\xi\|_{\ell^\infty} & se\ n = N \\ |\xi(n)| & altrimenti \end{cases} \\ &\leq \|\xi\|_{\ell^\infty} < \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty}\end{aligned}$$

Possiamo ora concludere questo punto. Per assurdo sia $T : c \to c_0$ un isomorfismo isometrico, e sia $\xi \in c \setminus \{0\}$ tale che valga la prima proprietà. Ma allora per $T(\xi)$ esiste $x \in c_0 \setminus \{0\}$ tale che valga la seconda proprietà, questo è un assurdo perchè:

$$\|\xi + \lambda(T^{-1}x)\|_{\ell^\infty} = \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|T^{-1}x\|_{\ell^\infty} = \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty}$$

Per la prima proprietà e perchè T e T^{-1} preservano la norma, d'altra parte però:

$$\|T(\xi + \lambda(T^{-1}x))\|_{\ell^\infty} = \|T(\xi) + \lambda x)\|_{\ell^\infty} < \|T(\xi)\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty} = \|\xi\|_{\ell^\infty} + \|x\|_{\ell^\infty}$$

per la seconda proprietà e perchè T è lineare e preserva la norma; poichè dovrebbe essere: $\|T(\xi + \lambda(T^{-1}x))\|_{\ell^\infty} = \|\xi + \lambda T^{-1}(x)\|_{\ell^\infty}$, concludiamo per assurdo.

(iv) Cominciamo col mostrare che T_0 sia ben definita. Sia $x \in \ell^1$ e $y \in c_0$, mostriamo che $T_0(x) \in c_0'$:

$$|T_0(x)(y)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)\right| \leq |\sup_n y(n)| \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)\right| \leq \|y\|_{\ell^\infty}\|x\|_{\ell^1}$$

Perciò la serie converge sempre. Ora, che $T_0(x)$ sia lineare è banale, inoltre dalla disuguaglianza sopra segue immediatamente che $T_0(x)$ è limitato e quindi poichè lineare anche continuo.
Ora mostriamo che T_0 è un'isometria:

- T_0 iniettiva: Sia $x \in \ell^1$ e $T_0(x) = 0$. Allora $\forall y \in c_0$ vale $T_0(x)(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n) = 0$ in particolare se fisso $m \in \mathbb{N}$ e scelgo $y = e_m$ ottengo $T_0(x)(e_m) = x(m) = 0$. Per l'arbitrarietà di m concludo $x = 0$.
- T_0 surgettiva: Cominciamo col mostrare che preso $y \in c_0$ allora

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} y(n)e_n$$

ovvero che la successione $\left(\sum_{n=1}^{N} y(n)e_n\right)_N$ converga a y in $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$, infatti

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left| y(m) - \left(\sum_{n=1}^{N} y(n)e_n\right)(m)\right| = \sup_{m>N} |y(m)|$$

ed ora $\sup_{m>N} |y(m)| \to 0$ per $N \to \infty$ poichè $y \in c_0$. Allora sia $f \in c_0'$ e $y \in c_0$

$$f(y) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} y(n)e_n\right) = f\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} y(n)e_n\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} y(n)f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)f(e_n)$$

dove la terza uguaglianza segue dalla linearità e continuità di f. Ora se definisco $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $x(n) := f(e_n)$ e $x \in \ell^1$ allora avrei $T(x) = f$ e concludo.
- $\|T_0(x)\|_{c_0'} = \|x\|_{\ell^1}\ \forall x \in \ell^1$: Per ogni $N \in \mathbb{N}$ definiamo $y_N \in c_0$ come

$$y_N(n) := \begin{cases} 0 & \text{se } x(n) = 0 \text{ e } 1 \le n \le N \\ \frac{x(n)}{|x(n)|} & \text{se } x(n) \neq 0 \text{ e } 1 \le n \le N \\ 0 & \text{se } n > N \end{cases}$$

Osserviamo che y_N è ben definito poichè $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$ e $\|y_N\|_{\ell^\infty} = 1\ \forall N \in \mathbb{N}$. Allora, $\forall x \in \ell^1$ vale che

$$\begin{aligned}\|T_0(x)\|_{c_0'} &= \sup\{|T_0(x)(y)| : \|y\|_{\ell^\infty} \le 1\} \\ &\ge \sup\{|T_0(x)(y)| : \|y\|_{\ell^\infty} = 1\} \\ &\ge \sup\{|T_0(x)(y_N)| : N \in \mathbb{N}\} = \sup_N \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y_N(n)| \\ &= \sup_N \sum_{n=1}^{N} |x(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \|x\|_{\ell^1}\end{aligned}$$

infine

$$\begin{aligned}\|T_0(x)\|_{c_0'} &= \sup\{|T_0(x)(y)| : \|y\|_{\ell^\infty} \le 1\} \\ &\le \sup\{\|y\|_{\ell^\infty}\|x\|_{\ell^1} : \|y\|_{\ell^\infty} \le 1\} = \|x\|_{\ell^1}\end{aligned}$$

quindi $\|T_0(x)\|_{c_0'} = \|x\|_{\ell^1}$.

(v) Sia $f \in (c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})'$ e sia $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $x(n) := f(e_n)$, mostriamo che $x \in \ell^1$. Per definizione di norma duale abbiamo che $\forall y \in c_0$

$$|f(y)| \le \|f\|_{c_0'}\|y\|_{\ell^\infty}$$

in particolare per $y = y_N$ definito come sopra vale

$$\|f\|_{c_0'} = \|f\|_{c_0'}\|y_N\|_{\ell^\infty} \ge |f(y_N)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_N(n)x(n)\right| = \left|\sum_{n=1, x(n)\neq 0}^{N} \frac{x(n)^2}{|x(n)|}\right| = \sum_{n=1, x(n)\neq 0}^{N} |x(n)|$$

Dunque per $N \to \infty$ si ottiene $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \|x\|_{\ell^1} \le \|f\|_{c_0'} < \infty$ dove l'ultima disuguaglianza segue dalla continuità di f. Perciò $x \in \ell^1$

(vi) Procedendo come nel caso di T_0 si dimostra che T_∞ è ben definita ed è un'isometria lineare, infatti tutti i ragionamenti fatti nel caso c_0 continuano a valere anche su ℓ^∞

(vii) Sia $l : (c, \|\cdot\|_{\ell^\infty}) \to \mathbb{R}$ la mappa definita da

$$l(y) := \lim_{n\to\infty} y(n)$$

Allora è facile verificare che $l \in (c, \|\cdot\|\ell^\infty)'$. Da un corollario di Hahn-Banach possiamo estendere l ad una funzionale $\hat{l} \in (\ell^\infty)'$, inoltre notiamo che $\hat{l} \neq 0$ e $\hat{l} \equiv 0$ su c_0. Ora supponiamo esista $x \in \ell^1$ t.c. $T_\infty(x) = \hat{l}$, allora $\forall y \in \ell^\infty$, $T_\infty(x)(y) = \hat{l}(y)$. Poichè $\ell^1 \subset \ell^\infty$ allora in particolare deve valere per $y = x$ e dunque avrei

$$T_\infty(x)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2$$

$$\hat{l}(x) = \lim_{n\to\infty} x(n) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la serie assoluta di $x(n)$ converge e quindi $x(n)$ è un infinitesimo. Ma allora mettendo insieme ottengo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 = 0$$

E poichè è una somma di termini tutti positivi allora $x(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, cioè $x = 0$. Ma allora otterei $\hat{l} = T_\infty(0) = 0$ che è un assurdo. Cioè T_∞ non è surgettiva.

Esercizio I.12. Distanza da iperpiani in spazi normati

Testo. Sia $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale normato e $M \subset E$ l'iperpiano (chiuso passante per 0) $M = \{x \in E : f(x) = 0\}$ dove $f \in E' \backslash \{0\}$. Si mostri che:

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \ \forall x \in E$$

Soluzione. Dalla catena di disuguaglianze valida $\forall x \in E,\ y \in M$:

$$|f(x)| = |f(x - y)| \leq \|f\|_{E'} \|x - y\|$$

segue che $\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \leq \|x - y\|$, per l'arbitrarietà di $y \in M$ allora $\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \leq \operatorname{dist}(x, M)$.
Per mostrare la disuaguaglianza opposta, per definizione di $\|f\|_{E'}$ si ha che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in E$ tale che $\|y\| = 1$ e $|f(y)| \geq \frac{\|f\|_{E'}}{1+\varepsilon}$. Poniamo $\lambda = \frac{f(y)}{f(x)}$ e $m = y - \lambda x$ allora è chiaro che $f(m) = 0 \implies m \in M$ e che $y = \lambda(\frac{m}{\lambda} + x)$. Ma allora

$$1 = \|y\| = \|\lambda(\frac{m}{\lambda} + x)\| \geq \frac{\|f\|_{E'}}{(1 + \varepsilon)|f(x)|} \operatorname{dist}(x, M)$$

poichè $\|\frac{m}{\lambda} + x\| = \|x - (-\frac{m}{\lambda})\| \geq \operatorname{dist}(x, M)$ (si noti che $-\frac{m}{\lambda} \in M$ poichè M è un sottospazio), si conclude allora per l'arbitrarietà di ε.

Esercizio I.13. Funzionale e distanze su $\mathcal{C}^0([0, 1])$

Testo. Sia $E = \{u \in \mathcal{C}^0([0, 1]) : u(0) = 0\}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, $f : E \to \mathbb{R}$, $f(u) = \int_0^1 u(t)dt$ e $M = \{u \in E : f(u) = 0\}$. Si mostri che:

(i) $f \in E' \backslash \{0\}$, $\|f\|_{E'} = 1$ e non esiste nessun $\bar{u} \in B_E$ tale che $f(\bar{u}) = \|f\|_{E'}$

(ii) $\operatorname{dist}(u, M) = |\int_0^1 u(t)dt|$ per ogni $u \in E$ e $\operatorname{dist}(u, M) < 1$ per ogni $u \in B_E$

(iii) per un dato $u \in E \backslash M$, non esiste alcun $\bar{u} \in M$ tale che $\operatorname{dist}(u, M) = \|u - \bar{u}\|_\infty$

Soluzione.

(i) Ovviamente $u(x) = x$ appartiene ad E pertanto f non è la mappa nulla. La linearità è ovvia e segue dalla linearità dell'integrale, mentre la continuità segue poichè se $(u_h)_h$ è una successione convergente in $(E, \|\cdot\|)$, allora il limite passa sotto il segno di integrale e vale $\lim_{h\to\infty} f(u_h) = f(\lim_{h\to\infty} u_h)$. Per $u \in B_E$, da $|f(u)| = |\int_0^1 u(t)dt| \leq \max|u(t)| = 1$ segue subito che $\|f\|_{E'} \leq 1$. Per mostrare la disuguaglianza opposta è sufficiente (per la continuità della norma) trovare una successione $(u_h)_h \in B_E$ tale che $\lim_{h\to\infty} f(u_h) = 1$.

Consideriamo allora per ogni $h \in \mathbb{N}^*$ la funzione definita su $[0,1]$, $u_h(x) = x^{\frac{1}{h}}$. Chiaramente si ha che $u_h \in B_E$ $\forall h \in \mathbb{N}^*$ inoltre $f(u_h) = \frac{h}{h+1} \to 1$ per $h \to +\infty$. Per la seconda parte assumiamo per assurdo che esista $\bar{u} \in B_E$ tale che $f(\bar{u}) = \|f\|_{E'}$. Ma allora $1 = f(\bar{u}) = \int_0^1 \bar{u}(t)dt \leq \|\bar{u}(t)\|_\infty \leq 1 \implies \|\bar{u}(t)\|_\infty = 1$ assurdo poichè dovrebbe valere $0 = \int_0^1 1 - \bar{u}(t)dt$ ma per la continuità dell'integranda, da $1 - u(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0,1]$ e $1 - u(0) = 1 > 0$ si ha l'assurdo.

(ii) Per l'esercizio 12 si ha che $\text{dist}(u, M) = \frac{|f(u)|}{\|f\|_{E'}} = |f(u)|$ per quanto provato nella prima parte di (i). Inoltre se $\bar{u} \in B_E$, per quanto provato nella seconda parte di (i) allora $|f(\bar{u})| < \|f\|_{E'} = 1$.

(iii) Per assurdo se esistesse tale $\bar{u} \in M$ si avrebbe che $\|u - \bar{u}\|_\infty = |f(u)| \neq 0$. Ma allora sia $v = \frac{u-\bar{u}}{\|u-\bar{u}\|} \in B_E$, ovviamente vale per linearità:

$$|f(v)| = \frac{|f(u - \bar{u})|}{\|u - \bar{u}\|_\infty} = \frac{|f(u)|}{\|u - \bar{u}\|_\infty} = 1$$

assurdo per quanto mostrato in (i).

Esercizio I.14. Linearità come non l'avete MAI, *MA PROPRIO MAI* vista

Testo. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e sia $p: V \to \mathbb{R}$. Provare che sono equivalenti:

(i) p è sublineare, cioè è subadditiva e positivamente 1-omogenea

(ii) $p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \leq \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2)$ per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0,\ v_1, v_2 \in V$

Soluzione. Chiaramente (i) $\implies$ (ii) per la subadditività, notando che $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \in V$ e applicando poi la 1-omogeneità sui due addendi.
Viceversa (ii) $\implies$ (i), infatti per la subadditività basta usare la disuguaglianza con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, mentre per la 1-omogeneità basta sostituire $\lambda_2 = 0$ per ottenere $p(\lambda v) \leq \lambda p(v)$. Viceversa (per $\lambda \neq 0$, altrimenti ovvio) vale $\lambda p(v) = \lambda p(\frac{\lambda}{\lambda} v) \leq \frac{\lambda}{\lambda} p(\lambda v) = p(\lambda v)$.

Esercizio I.15. Operazioni insiemistiche su convessità e proprietà topologiche

Testo. Sia $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale normato su $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di E. Si provi che:

(i) se A è convesso, lo è anche $\bar{A}$ e $A + A = 2A$

(ii) se A, B sono convessi, anche $A \pm B$ lo è

(iii) se A è aperto, anche $A \pm B$ lo è

(iv) se A è compatto e B chiuso, $A \pm B$ è chiuso

(v) se A, B sono solo chiusi, $A \pm B$ non è necessariamente chiuso

Soluzione.

(i) É sufficiente provare la convessità prendendo come estremi solo punti di ∂A. Poichè E è normato, in particolare è primo numerabile e dunque $\bar{A}$ coincide con la sua chiusura sequenziale. In particolare se $x, y \in \partial A$ allora esistono due successioni $(x_h)_h,\ (y_h)_h \subset A$ tali che $x_h \to x$ e $y_h \to y$. Allora poichè A è convesso, si ha che $\forall h \in \mathbb{N},\ tx_h + (1-t)y_h \subset A$ $\forall t \in [0,1]$, passando al limite si ha dunque che $tx + (1-t)y \subset \bar{A}$ $\forall t \in [0,1]$, cioè $\bar{A}$ è convesso.
Per il secondo punto, proviamo la doppia inclusione. Sia $x \in 2A$, $x = 2a$ per qualche $a \in A$, allora $x = 2a = a + a \in A + A$. Viceversa se $x \in A + A$, $x = a + b$ per qualche $a, b \in A$. Poichè A è convesso, $\frac{a+b}{2} \in A$ e quindi $x = 2 \cdot \frac{a+b}{2} \in 2A$.

(ii) La dimostrazione è del tutto analoga a quanto fatto nel punto sopra, poichè per $x = a \pm b,\ y = c \pm d,\ a, c \in A,\ b, d \in B$ per la convessità di A e B:

$$\forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y = [ta + (1-t)c] \pm [tb + (1-t)d] \in A \pm B$$

(iii) Poichè per definizione $A \pm B = \bigcup_{b \in B} (A \pm b)$ e $A \pm b$ è aperto per ogni $b \in B$ (è la traslazione di A che è aperto), ricordando che gli aperti sono stabili per unioni arbitrarie, si ottiene l'asserto.

(iv) Sia $(a_h \pm b_h)_h \subset A \pm B$ tale che $\lim_{h\to\infty}(a_h \pm b_h) = x$. Poichè A è compatto, esiste una sottosuccessione di $(a_h)_h$ convergente a un punto di A, diciamo $\lim_{k\to\infty} a_{h_k} = a \in A$. Osserviamo che $\forall k$, $\pm\, b_{h_k} = (a_{h_k} \pm b_{h_k}) - a_{h_k} \to x - a$. Se è il caso con il "+" allora poniamo $b \doteqdot x - a \in B$ perchè B è chiuso. Dunque $x = a + b \in A + B$ e l'insieme è chiuso. Analogamente per il caso "$-$" dove basta porre $-b \doteqdot x - a \in -B$ e quindi $x = a - b \in A - B$.

(v) Basta considerare i seguenti insiemi: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \geq \frac{1}{|x|}\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \geq \frac{1}{|x|}\}$, (chiaramente A, B sono chiusi) allora poichè $\forall a = (a_1, a_2) \in A,\ b = (b_1, b_2) \in B,\ a_2, b_2 > 0 \implies a_2 + b_2 > 0 \implies (0, 0) \notin A + B$. D'altra parte se consideriamo le successioni $a_n = (-n, \frac{1}{n}) \subset A,\ b_n = (n, \frac{1}{n}) \subset B$ si ha che $A + B \ni a_n + b_n = (0, \frac{2}{n}) \to (0, 0) \in \overline{A + B}$

Esercizio I.16. Controesempio di Hahn-Banach geometrico su densi

Testo. Consideriamo $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ come uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$ e sia $A := \ell^1$ il sottospazio lineare di c_0. Si dimostri che, per ogni $x_0 \in c_0 \setminus \ell^1$, non esiste un iperpiano chiuso $[f = \alpha]$ che separi A e $\{x_0\}$.

Soluzione. Per assurdo, sia $f \in E'$ un iperpiano affine chiuso che separa A e $\{x_0\}$. Allora esiste $a \in A$ tale che $f(a) \neq 0$, altrimenti avremmo $f_{|A} \equiv 0$ e, quindi, per il criterio di densità per sottospazi (si noti che A è denso in $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$), si avrebbe $f \equiv 0$, assurdo per definizione di iperpiano. Ma allora per linearità $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(\frac{ax}{|f(a)|}) = x$ e dunque $f(A) = \mathbb{R}$. Ma per definizione di iperpiano abbiamo che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq \alpha\ \forall x \in A$, assurdo.
Per completezza, proviamo che $\bar{\ell^1} = c_0$. Sia $f \in c_0 \setminus \ell^1$, cioè $\sum_{i\in\mathbb{N}} |f(i)| = \infty$ e $lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$. Definiamo $g \in \ell^1$ come:

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & n \leq n_\varepsilon \\ 0 & n > n_\varepsilon \end{cases}$$

Allora chiaramente $g \in \ell^1$ e vale:

$$\|f - g\|_{\ell^\infty} = \sup_{n > n_\varepsilon} |f(n)| < \varepsilon$$

Esercizio I.17. Successione di operatori su $\mathbb{R}^\infty$

Testo. Sia $T_h : (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ una successione di operatori lineari continui ottenuti definendo $y = T_h(x)$ come:

$$y(n) = \begin{cases} nx(n), & \text{se } 1 \leq n \leq h \\ x(n), & \text{se } n > h \end{cases}$$

Si provi che:

(i) esiste $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ tale che: $T(x) = \lim_{h\to\infty} T_h(x)$, con $y(n) = T(x)(n) = nx(n)\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

(ii) T è lineare ma non è limitata (dunque nemmeno continua)

(iii) T è iniettiva e surgettiva con inversa T^{-1} continua

Soluzione.

(i) Basta provare che $\|T(x) - T_h(x)\|_\infty \to 0$ quando h esplode. Poichè:

$$\|T(x) - T_h(x)\|_\infty = \left(\sum_n |y(n) - y_h(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n\leq h} |y(n) - y_h(n)|^2 + \sum_{n>h} |y(n) - y_h(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left(\sum_{n>h} |(n-1)x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per definizione di $y_h(x) = T_h(x)$. Ma ora provare che l'ultimo addendo tende a zero è equivalente a mostrare che la serie numerica associata converge: $\left(\sum_n |(n-1)x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, vero perchè solo un numero finito di addendi è non nullo.

(ii) Chiaramente $\forall x, y \in \mathbb{R}^\infty,\ k \in \mathbb{R},\ T(kx+y) = \lim_{h\to\infty} T_h(kx+y) = \lim_{h\to\infty} kT_h(x)+T_h(y) = kT(x)+T(y)$ e dunque T è lineare.
Proviamo che è anche illimitata. Vale:

$$\|T\| = \sup_{B_{R^\infty}} \|T(x)\| \geq \sup_h \|T(e_h)\| = sup_h h \to \infty$$

dove $e_h = (0,..,0,1,0,...)$ con 1 in posizione h-esima.

(iii) Si ha $\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^\infty :\ T(x)(n) = nx(n) = 0\ \forall n\}$ ma poichè $n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \implies x(n) = 0\ \forall n \implies \ker(T) = \{0\}$ dunque T è iniettiva. Inoltre per ogni $y \in \mathbb{R}^\infty$ poniamo $x \in \mathbb{R}^\infty$ tale che $x(n) = \frac{y(n)}{n}\ \forall n \in N^*$ allora è facile verificare che $T(x) = y$ e dunque T è surgettiva. Infine osserviamo che $\forall y \in \mathbb{R}^\infty$ abbiamo la seguente stima:

$$\|T^{-1}(y)\|_\infty = \left(\sum_n \left|\frac{y(n)}{n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_n |y(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|y\|_\infty$$

dunque per il teorema di caratterizzazione della continuità per operatori lineari si ha che T^{-1} è continuo.

Esercizio I.18. Norme non equivalenti in dim $= \infty$

Testo. Sia $(E, \|\cdot\|_1)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$ e assumiamo che $\dim_{\mathbb{R}} E = \infty$. Provare che esiste un'altra norma $\|\cdot\|_2$ su E tale che:

(i) $(E, \|\cdot\|_2)$ è ancora uno spazio di Banach;

(ii) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ non sono equivalenti.

Soluzione. Poichè dim $= \infty$ allora esiste una base di Hamel $\beta = \{e_i \mid i \in I\}$ con $\#I = \infty$. Sia allora $T : E \to E$ la mappa lineare definita a partire dalla base β così: $T(e_i) := 2^i e_i$ per ogni $i \in I$. Dunque per ogni $v \in E$, esiste $J \subset I$ con $\#J < \infty$ tale che $v = \sum_{i\in J} a_i e_i$ con $a_i \in \mathbb{R}$ e $T(v) = \sum_{i\in J} 2^i a_i e_i$. T è chiaramente biettiva ma non è limitata e quindi discontinua infatti per ogni $c > 0$ esiste $i \in I$ t.c. $2^i \geq c$ e

$$\frac{\|T(e_i)\|_1}{\|e_i\|_1} = 2^i \geq c$$

(i) Definisco ora per ogni $v \in E$ $\ \|v\|_2 := \|T(v)\|_1$ che è una norma su E per un eserczio precedente e $(E, \|\cdot\|_2)$ è ancora Banach infatti sia $(x_n)_n \subset E$ di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$ allora per linearità di T segue che $(T(x_n))_n \subset E$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_1$ dunque poichè $(E, \|\cdot\|_1)$ è completo esiste $y \in E$ t.c. $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - y\|_1 = 0$ e poichè T è biettiva esiste un unico $x \in E$ t.c. $T(x) = y$ dunque $\|x_n - x\|_2 = \|T(x_n - x)\|_1 = \|T(x_n) - y\|_1 \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0$.

(ii) Ora se per assurdo le due norme fossero equivalenti allora esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $x \in E$ vale $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 = \|T(x)\|_1 \leq c_2\|x\|_1$ ma abbiamo già mostrato che per $x = e_i$ con $i \in I$, T non è limitata dunque abbiamo trovato una contraddizione.

Esercizio I.19. Esistenza di un'inversa discontinua

Testo. Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach con $\dim_{\mathbb{R}} E = \infty$. Dimostrare che esiste un operatore non lineare $T : E \to E$ continuo, biettivo ma con inverso $T^{-1} : E \to E$ discontinuo.

Soluzione. Poichè $\dim E = \infty$, come nella dimostrazione del lemma di Riesz del quasi-ortogonale (o sulla compatezza della palla unitaria, come preferite), segue che esiste una successione $(e_h)_h \subset E$ tale che valgano le seguenti:

1. $\mathcal{C} = \{e_h :\ h \in \mathbb{N}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti
2. $\|e_h\| = 1\ \ \forall h \in \mathbb{N}$
3. $\|e_h - e_k\| \geq \frac{1}{2}\ \ \forall h \neq k$

Dunque $\mathcal{C} \subset S_E$ e per la terza proprietà è un insieme di punti isolati e dunque è un insieme chiuso (facilissimo esercizietto di definizioni di topologia generale). Definiamo allora $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R} :\ g(e_h) = h$. Ricordiamo il seguente:
Teorema dell'estensione di Tietze:

Sia (X,d) uno spazio metrico e siano $C \subset X$ e $g : C \to \mathbb{R}$ rispettivamente, un insieme chiuso e una funzione continua. Allora esiste $\hat{g} : X \to \mathbb{R}$ tale che $\hat{g}_{|C} = g$.
Questo è un teorema molto importante e interessante di topologia generale, che permette anche di dimostrare il teorema di invarianza del dominio, sfortunatamente, non è un facilissimo eserciziettto.
Applichiamo il precedente teorema a $X = S_E,\ C = \mathcal{C},\ g = g$ come definita precedentemente. Definiamo $f : S_E \to \mathbb{R} :\ f(u) = \max\{\hat{g}(u), 1\}$ è il massimo di due funzioni continue, pertanto è continua. Definiamo:

$$T : E \to E : \quad T(u) = \begin{cases} \frac{u}{f(\frac{u}{\|u\|})} & se\ u \neq 0 \\ 0 \quad se\ u = 0 \end{cases}$$

Si ha che f non si annulla su S_E per costruzione e dunque T è ben definita. Proviamo che T è continua. Ovviamente poichè f è continua, dobbiamo provare la continuità solo in $u = 0$. Sia $(x_n)_n \subset E$ una successione tale che $x_n \to 0$, allora osserviamo che: $\|T(x_n)\| \leq \|x_n\|\ \forall n \in \mathbb{N}$ poichè $f(u) \geq 1\ \forall u \in E$ (nei casi in cui $x_n = 0$ si ha chiaramente $\|T(x_n)\| = 0 \leq \|x_n\|$), concludiamo passando al limite.
Proviamo che T è iniettiva: siano $u, v \in E$ tali che $T(u) = T(v)$. Se $T(u) = T(v) = 0$ allora $u = v = 0$, quindi assumiamo $T(u) = T(v) \neq 0$, abbiamo cioè $\frac{u}{f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)} = \frac{v}{f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)}$. Consideriamo l'operatore $S : E \setminus \{0\} \to E :$ $S(u) = f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \cdot u$, si ha che $S\left(\frac{u}{f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)}\right) = S\left(\frac{v}{f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)}\right) \Rightarrow u = v$.
Proviamo che T è surgettiva. Se $v = 0$, allora $v = T(0)$. Se $v \neq 0$, allora $v = T\left(f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)v\right)$. Dunque T è bigettiva.
Proviamo infine che T^{-1} non è continuo. Poniamo $v_h = T(e_h) = \frac{e_h}{f(e_h)} = \frac{e_h}{h}\ \forall h \in \mathbb{N}$, otteniamo così la successione $(v_h)_h \subset E$ e osserviamo che $v_h \to 0$. D'altra parte però, $T^{-1}(v_h) = e_h$ e la successione degli e_h non ha limite in quanto non ha punti d'accumulazione.

Esercizio I.20. Norme Prodotto

Testo. Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ s.v.n. Muniamo $E \times F$ di una delle seguenti norme:

1. $\|(x,y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$;
2. $\|(x,y)\|_{E\times F} = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}$;
3. $\|(x,y)\|_{E\times F} = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$;

(i) Mostrare che $\|(x,y)\|_{E\times F}$ siano effettivamente delle norme.

(ii) Mostrare che se $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ sono spazi di Banach allora $(E \times F, \|(x,y)\|_{E\times F})$ è ancora uno spazio di Banach.

(iii) Mostrare che se $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ sono separabili allora $(E \times F, \|(x,y)\|_{E\times F})$ è ancora separabile.

Soluzione

(i) Proviamo che sono delle norme: la positività e l'omogeneità sono banali e seguono direttamente dalle proprietà di $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_F$. Mostriamo che vale la disuguaglianza triangolare:
siano $x = (a,b)$, $y = (c,d) \in E \times F$

(a) $\|(x+y)\|_{E\times F} = \|(a+c, b+d)\|_{E\times F} = \|a+c\|_E + \|b+d\|_F \leq \|a\|_E + \|b\|_F + \|c\|_E + \|d\|_F = \|x\|_{E\times F} + \|y\|_{E\times F}$

(b) $\|(x+y)\|_{E\times F} = \|(a+c, b+d)\|_{E\times F} = \sqrt{\|a+c\|_E^2 + \|b+d\|_F^2} \leq \sqrt{(\|a\|_E + \|c\|_E)^2 + (\|b\|_F + \|d\|_F)^2} = \|(\|a\|_E, \|b\|_F) + (\|c\|_E, \|d\|_F)\|_{|R^2} \leq \sqrt{\|a\|_E^2 + \|b\|_F^2} + \sqrt{\|c\|_E^2 + \|d\|_F^2} = \|x\|_{E\times F} + \|y\|_{E\times F}$

(c) $\|(x+y)\|_{E\times F} = \max\{\|a+c\|_E, \|b+d\|_F\} \leq \max\{\|a\|_E + \|c\|_E, \|b\|_F + \|d\|_F\} \leq \max\{\|a\|_E, \|b\|_F\} + \max\{\|c\|_E, \|d\|_F\} = \|x\|_{E\times F} + \|y\|_{E\times F}$

(ii) Mostriamo prima che le tre norme sono tra loro tutte equivalenti: sia $(x,y) \in E \times F$ allora valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2} \leq \|x\|_E + \|y\|_F \leq 2\sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}$$

$$\max\{\|x\|_E, \|y\|_F\} \leq \|x\|_E + \|y\|_F \leq 2\max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$$

Dunque è sufficiente dimostrare il tutto solo per la prima norma. Sia $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ una successione di Cauchy, allora $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ t.c. $\forall h, k > N$ vale $\|(x_k, y_k) - (x_h, y_h)\|_{E\times F} = \|x_k - x_h\|_E + \|y_k - y_h\|_F \leq \varepsilon$. Dunque le due successioni $\{(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (E, \|\cdot\|_E)$ e $\{(y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (F, \|\cdot\|_F)$ sono di Cauchy nei loro rispettivi spazi e poichè per ipotesi sono Banach allora convergono. In particolare esiste $x \in E$ t.c. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_x = N_x(\varepsilon)$ per cui vale $\|x_k - x\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k > N_x$ e $y \in F$ t.c. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_y = N_y(\varepsilon)$ per cui vale $\|y_k - y\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k > N_y$. A questo punto se fissiamo $\varepsilon > 0$ allora $\|(x_k, y_k) - (x, y)\|_{E\times F} = \|x_k - x\|_E + \|y_k - y\|_F \leq \varepsilon$ per ogni $k \geq \max\{N_x, N_y\}$ e quindi concludo.

(iii) Mostriamo che se $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ sono separabili allora anche $(E\times F, \|(x, y)\|_{E\times F})$ lo è. Per quanto mostrato ne punto (ii) è sufficiente dimostrarlo per la prima norma.
Siano $A \subset (E, \|\cdot\|_E)$ e $B \subset (F, \|\cdot\|_F)$ due sottoinsiemi densi e numerabili. Proviamo che $C := A \times B$ è un sottoinsieme denso e numerabile di $E \times F$. La numerabilità è banale poichè C è in biiezione con $\mathbb{N}^2$ (A, B lo sono con $\mathbb{N}$) che è in biiezione con $\mathbb{N}$. Sia ora $(x, y) \in E \times F$ arbitrario e mostriamo che esiste una successione in C che converge a quel punto. Per densità di A e B allora esistono due successioni $\{x_h\}_h \subset A$ e $\{y_h\}_h \subset B$ che convergono rispettivamente a x e y. Allora la successione $\{(x_h, y_h)\}_h \subset C$ converge a (x, y) infatti: ripetendo come sopra, $\forall\varepsilon > 0$ $\|(x_h, y_h)-(x, y)\|_{E\times F} = \|x_h-x\|_E+\|y_h-y\|_F \leq \varepsilon$ da un certo k in poi.

Esercizio I.21. Isomorfismo del Duale del Prodotto

Testo. Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ s.v.n. e sia $T : ((E \times F)', \|\cdot\|_{(E\times F)'}) \to (E' \times F', \|\cdot\|_{E'\times F'})$ così definita $T(f) := (f(\cdot, 0), f(0, \cdot)$. Allora T è un isomorfismo topologico.

Soluzione La verifica che T sia ben definita e lineare è banale e segue tutto dalla linearità e continuità di f e dalla definizione di norma prodotto. Mostriamo ora che è biettiva, inziamo dall'iniettiva: sia $f \in (E \times F)'$ t.c. $0 \equiv T(f) = (f(\cdot, 0), f(0, \cdot)) \Leftrightarrow f(x, 0) = f(0, y) = 0$ $\forall(x, y) \in E \times F$ e quindi $f(x, y) = 0$ per linearità di f $\Rightarrow f \equiv 0$. Proviamo ora la surriettività di T:
sia $(g, h) \in E' \times F'$ allora definisco una $f \in (E \times F)'$ in questo modo: $\forall(x, y) \in E \times F,\ f(x, y) := g(x) + h(y)$ Verifichiamo che effettivamente f stia in $(E \times F)'$: ovviamente f è lineare perchè lo sono g e h, mostriamo ora che f sia limitata: prendiamo $(x, y) \in E \times F$, allora $|f(x, y)|_{\mathbb{K}} = |g(x) + h(y)|_{\mathbb{K}} \leq |g(x)|_{\mathbb{K}} + |h(y)|_{\mathbb{K}} \leq A\|x\|_E + B\|y\|_F \leq C(\|x\|_E + \|y\|_F) = C\|(x, y)\|_{E\times F}$ con $A, B > 0$ e $C := \max\{c, d\}$ e ho usato la continuità di g e h insieme al fatto che le norme prodotto sono equivalenti. A questo punto basta notare che $\forall(x, y) \in E \times F$ $T(f)(x, y) = (f(x, 0), f(0, y)) = (g(x) + h(0), g(0) + h(y)) = (g(x), h(y))$ per linearità di g e h. Dunque T è biiettiva. Mostriamo ora che T è limitato: devo mostrare che

$$\|T(f)\|_{E'\times F'} = \|(f(\cdot, 0), f(0, \cdot))\|_{E'\times F'} = \|f(\cdot, 0)\|_{E'} + \|f(0, \cdot)\|_{F'} \leq C\|f\|_{(E\times F)'} \text{per un certo } C > 0 \iff$$

$$\sup\left\{\frac{|f(x, 0)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E} : x \in E\right\} + \sup\left\{\frac{|f(0, y)|_{\mathbb{K}}}{\|y\|_F} : x \in F\right\} \leq C \sup\left\{\frac{|f(x, y)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E + \|y\|_F} : (x, y) \in E \times F\right\}$$

Osserviamo che per defінzione di sup, comunque scelto $x \in E$ $\frac{|f(x,0)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E} \leq \sup\left\{\frac{|f(x,y)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E+\|y\|_F} : (x, y) \in E \times F\right\}$ dunque $\sup\left\{\frac{|f(x,0)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E} : x \in E\right\} \leq \sup\left\{\frac{|f(x,y)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E+\|y\|_F} : (x, y) \in E \times F\right\}$ allora procedendo analogamete per y ottengo la tesi scegliendo $C = 2$ Dimostriamo la continuità dell'inversa: siano $(g, h) \in E' \times F'$

$$\|T^{-1}(g, h)\|_{(E\times F)'} = \|g + h\|_{(E\times F)'} \leq C\|(g, h)\|_{E'\times F'} = C(\|g\|_{E'} + \|h\|_{F'}) \text{ per un certo } C > 0 \iff$$

$$\sup\left\{\frac{|g(x) + h(y)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E + \|y\|_F} : (x, y) \in E \times F\right\} \leq \sup\left\{\frac{|g(x)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E + \|y\|_F} : (x, y) \in E \times F\right\} + \sup\left\{\frac{|h(y)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E + \|y\|_F} : (x, y) \in E \times F\right\} =$$

$$= \sup\left\{\frac{|g(x)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_E} : x \in E\right\} + \sup\left\{\frac{|h(y)|_{\mathbb{K}}}{\|y\|_F} : y \in F\right\} = \|g\|_{E'} + \|h\|_{F'}$$

Dunque in questo caso basta scegliere $C = 1$.

Esercizio I.22. Grafico chiuso

Testo. Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ spazi di Banach. Se $T : E \to F$ è un operatore lineare, denotiamo con $G(T)$ il suo grafico, cioè $G(T) := \{(x, T(x)) : x \in E\}$ e sia $\|x\|_1 := \|x\|_E + \|T(x)\|_F$ se $x \in E$. Si provi che se $G(T)$ è chiuso allora $(E, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach.

Soluzione Ricordiamo che poichè per ipotesi $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ sono Banach allora per l'esercizio 20 $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ è Banach e dunque $G(T)$ è chiuso in $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F}) \Leftrightarrow (G(T), \|\cdot\|_{E\times F})$ è Banach. Prendiamo $\{x_n\}_n \subset (E, \|\cdot\|_1)$ di Cauchy e consideriamo la successione $\{(x_n, T(x_n))\}_n \subset (G(T), \|\cdot\|_{E\times F})$ allora è anch'essa di Cauchy, infatti: $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\|(x_k, T(x_k)) - (x_h, T(x_h))\|_{E\times F} &= \|(x_k - x_h, T(x_k - x_h))\|_{E\times F} = \\ &= \|x_k - x_h\|_E + \|T(x_k - x_h)\|_F = \|x_k - x_h\|_1 \le \varepsilon \quad \forall h, k > \bar{h}\end{aligned}$$

Dunque poichè $(G(T), \|\cdot\|_{E\times F})$ è completo esiste $(x, T(x)) \in G(T)$ t.c:

$$\begin{aligned}&\|(x_k, T(x_k)) - (x, T(x))\|_{E\times F} \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \\ &\|x_k - x\|_E + \|T(x_k - x)\|_F \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \\ &\|x_k - x\|_1 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Ovvero la successione $\{x_n\}_n$ converge in $(E, \|\cdot\|_1)$ poichè, per definzione di $G(T)$, $x \in E$ e quindi $(E, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach.

Esercizio I.23. Controesempio al teorema del grafico chiuso

Testo. Sia $E = C^1([a, b])$ e $F = C^0([a, b])$, con: $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_F = \|\cdot\|_\infty$. Definiamo l'operatore: $T : C^1([a, b]) \to C^0([a, b]), \quad Tu = u'$. Dimostrare che il grafico di T è chiuso in $E \times F$, ma che T è discontinuo. Spiegare perché non si applica il teorema del grafico chiuso in questo caso.

Soluzione. Proviamo che il grafico di T è chiuso. Sia $(u_h, T(u_h))_h \subset G(T)$ una successione tale che $(u_h, T(u_h))_h \to (u, v)$ in $(E \times F, \|\cdot\|_{\infty\times\infty})$, cioè $\|(u_h, u'_h) - (u, v)\|_{\infty\times\infty} = \|u_h - u\|_\infty + \|u'_h - v\|_\infty \to 0$. Dobbiamo provare che $(u, v) \in G(T)$ cioè $v = u'$. Ciò segue subito da $\|u_h - u\|_\infty \to 0$, $\|u'_h - v\|_\infty \to 0$ infatti si può applicare il teorema di scambio tra limite e derivata, da cui ricaviamo che: $v = \lim_{h\to\infty} D(u_h) = D(\lim_{h\to\infty} u_h) = D(u) = u'$.
Proviamo ora che T è discontinuo. T è chiaramente lineare quindi se fosse continuo avremmo anche che: $\|T(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \le c\|f\|_\infty$. Se però consideriamo la famiglia di funzioni data da: $f_h(x) = \exp\left(\frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{h}\right)$ per ogni $h \in \mathbb{R}_{>0}$, allora abbiamo che $f'_h(x) = \frac{-2}{h}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f_h(x)$ e quindi $f_h(x)$ ha massimo solo in $x = \frac{a+b}{2}$ dove vale 1 (che quindi è la sua norma infinito). Grazie allo studio di funzione troviamo anche che f'_h ha massimo in $x = \frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{h}{2}}$ e quindi $\|f'_h\|_\infty = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{h}}$. Troviamo allora che: $\|f'_h\| \le c\|f_h\| = c \Rightarrow \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{h}} \le c \ \forall h \in (0, 1)$, assurdo facendo tendere $h \to 0$.
Il teorema del grafico chiuso dunque non si applica. La ragione è evidente: lo spazio $(E, \|\cdot\|_\infty)$ non è Banach e dunque non sono soddisfatte le ipotesi del teorema. Infatti presa una qualsiasi funzione $f \in C^0([a, b]) \setminus C^1([a, b])$ allora per il teorema di approssimazione di Weierstrass esiste una successione di polinomi a coefficienti reali $(p_h)_h \subset \mathbb{R}[x]$ tale che $p_h \to f$ uniformemente su $[a, b]$. Allora $(p_h)_h$ è una successione di Cauchy in $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, ma non converge a un elemento di $C^1([a, b])$.

II. Alcuni spazi di funzioni

Esercizio II.1. Trasmissione di continuità della convergenza uniforme

Testo. Siano $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue. Supponiamo esista una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in A. Allora f è continua.

Soluzione Per il teorema ponte dimostriao che f è continua per successioni, ovvero sia $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}$ t.c. $x_k \to \bar{x}$ allora mostriamo che $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\bar{x})$.

$$|f(x_k) - f(\bar{x})| \le |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})| \le 2 \sup_{y\in A} |f(y) - f_n(y)| + |f_n(x_k) - f_n(\bar{x})|$$

Ora passando al limsup su k e ricordandomi che le f_n sono continue e quindi continue per successioni ottengo:

$$\limsup_{k\to\infty} |f(x_k) - f(\bar{x})| \le 2 \sup_{y\in A} |f(y) - f_n(y)|$$

A questo punto passando al limite per $n \to \infty$, poichè per ipotesi le f_n convergono uniformemente ad f in A e osservando che a sinistra dell'uguaglianza non c'è dipendenza da n:

$$\limsup_{k\to\infty} |f(x_k) - f(\bar{x})| \le 2 \sup_{y\in A} |f(y) - f_n(y)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dunque

$$0 \geq \limsup_{k\to\infty} |f(x_k) - f(\bar{x})| \geq \liminf_{k\to\infty} |f(x_k) - f(\bar{x})| \geq 0 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(\bar{x})| = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\bar{x})$$

Esercizio II.2. Convergenza uniforme implica continuità sequenziale del limite

Testo. Sia $f_k : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue e sia $(x_h)_h \subset A$. Supponiamo che:

(i) esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f_k \to f$ uniformemente in A.

(ii) esiste un $x \in A$ t.c. $x_h \to x$.

Allora esiste $\lim_{k\to\infty} f_k(x_k) = f(x)$. Il risultato è ancora vero se in (i) invece della convergenza uniforme assumessimo la convergenza puntuale?

Soluzione Poichè per ipotesi le f_k sono continue in A e convergono uniformemente ad f in A allora f è continua per l'esercizio prima, dunque in particolare $f(x_h) \overset{h\uparrow\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Perciò fissato $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, eiste $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $|f(x_h) - f(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall h > N_1$. Inoltre poichè f converge uniformemente in A in particolare converge anche puntualmente dunque eiste $N_2 \in \mathbb{N}$ tale che $|f_h(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall h > N_2, \forall y \in A$. Allora unendo i due risultati e ricordando che $x_h \in A \ \ \forall h \in \mathbb{N}$, otteniamo:

$$|f_k(x_k) - f(x)| \leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \ \forall k > \max\{N_1, N_2\}.$$

e quindi la tesi. Consideriamo invece la successione di funzioni continue

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ xk & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Allora è evidente che converga puntualmente a $\chi_{(0,+\infty)}$ tuttavia non c'è convergenza uniforme poichè $\chi_{(0,+\infty)}$ non è continua. Ora prendiamo la successione definita da $x_k := \frac{1}{k} \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, allora $k_k \overset{k\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Tuttavia $f_k(x_k) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$, mentre $f(0) = 0$, perciò $\exists \lim_{k\to\infty} f_k(x_k) = 1 \neq 0 = f(0)$. Dunque la convrgenza puntuale delle f_k in generale non basta.

Esercizio II.3. C^0 con norma L^2 non è Banach

Testo. Sia $f \in C^0([a,b])$, sia $\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$. Si dimostri che:

(i) $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{L^2})$ è uno spazio vettoriale normato.

(ii) $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{L^2})$ non è uno spazio di Banach.

Soluzione Ovviamente $C^0([a,b])$ è uno s.v. su $\mathbb{R}$, mostriamo che $\|\cdot\|_{L^2}$ sia una norma:

1. Poichè $f(x)$ è continua su [a,b] e $f(x)^2 \geq 0$ allora per la teoria degli integrali segue subito che $\|f\|_{L^2} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
2. L' omogeneità segue dall' omogeneità dell'integrale.
3. La disuguaglianza triagolare segue dalla disuguaglianza di Minkowski.

Mostriamo ora che $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_{L^2})$ non è uno spazio di Banach, ovvero esibiamo una successione di Cauchy che non converge. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ consideriamo:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,0] \\ xn & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Allora $(f_n)_n \subset (C^0([-1,1]), \|\cdot\|_{L^2})$ ed è di Cauchy infatti sia $k > n$ allora

$$\begin{aligned} \|f_k - f_n\|_{L^2}^2 &= \left|\frac{1}{3n} - \frac{2}{3k} + \frac{n}{3k^2}\right| \leq \left|\frac{1}{3n}\right| + \left|\frac{2}{3k}\right| + \left|\frac{n}{3k^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{3n}\right| + \left|\frac{2}{3n}\right| + \left|\frac{n}{3n^2}\right| \to 0 \ \ \textit{quando } n \to \infty \end{aligned}$$

Tuttavia f_n non converge in $(C^0([-1,1])$ con la norma $\|\cdot\|_{L^2})$ infatti mostriamo che converge alla funzione $\chi_{[0,1]}$.

$$\|f_n - \chi_{[0,1]}\|_{L^2}^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} (nx-1)^2 dx = \frac{1}{3n} \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

Tuttavia $\chi_{[0,1]} \notin C^0([a,b])$ e per l'unicità del limite f_n non può convergere a nient'altro.

Esercizio II.4. Compattezza in C^0

Testo. Sia $M > 0$ una costante positiva e sia $\mathcal{F} = \{f \in C^1([a,b]) : \|f\|_{C^1} \leq M\}$. Allora:

(i) $\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

(ii) $\mathcal{F}$ non è compatto in $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Soluzione Intanto per il (un) teorema di Riesz che caratterizza la compattezza delle palle in s.v.n sappiamo che $\mathcal{F}$ non è compatto in $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ poichè $\dim_{\mathbb{R}} C^1([a,b]) = \infty$. Ora mostriamo che $\mathcal{F}$ è limitata in $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ed equicontinua, infine per un corollario del Teorema di Ascoli-Arzelà concludiamo.

1. Sia $f \in \mathcal{F}$ arbitraria allora $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty =: \|f\|_{C^1} \leq M$ e dunque $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_\infty \leq M$.
2. Sia $f \in \mathcal{F}$ arbitraria e $\forall x, y \in [a,b]$ abbiamo $|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \leq \|f'\|_\infty |x-y| \leq M|x-y|$. Dunque sia $\varepsilon > 0$, $x \in [a,b]$ e scegliamo $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ allora $\forall y \in [a,b] \cap [x-\delta, x+\delta]$ $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \leq \varepsilon$ e dunque per l'arbitrarietà di f concludiamo.

Allora per A-A $\overline{\mathcal{F}}^{C^0([a,b])}$ è compatto in $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Esercizio II.5. Scambio segno di derivata e limite

Testo. Sia $\{f_h\}_h \subset C^1(\bar{\Omega})$ e supponiamo che esistano f, g_i (con $i = 1, \ldots, n$) in $C^0(\bar{\Omega})$ tali che, per $h \to \infty$,

$$f_h \to f \quad \text{e} \quad D_i f_h \to g_i \quad \text{uniformemente su } \Omega, \text{ per } i = 1, \ldots, n.$$

Dimostrare che esiste $D_i f(x) = g_i(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Soluzione. Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e per $i = 1, ..., n$, sia $\delta > 0$ tale che $x_0 + te_i \in \Omega$ $\forall t \in [-\delta, \delta]$, dove gli e_i sono gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo allora che $\forall h \in \mathbb{N}$ vale:

$$f_h(x_0 + te_i) = f_h(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+te_i} D_i f_h(t) dt$$

Ora ovviamente: $f_h(x_0 + te_i) \to f(x_0 + te_i)$, $f_h(x_0) \to f(x_0)$, inoltre vale (grazie all'ipotesi di convergenza uniforme delle derivate) il teorema di passaggio sotto il segno di integrale, infatti:
$|\int_{x_0}^{x_0+te_i} D_i f_h(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+te_i} g_i(t)dt| = |\int_{x_0}^{x_0+te_i} D_i f_h(t) - g_i(t)dt| \leq \int_{x_0}^{x_0+te_i} |D_i f_h(t) - g_i(t)|dt \leq |t|\|D_i f_h(t) - g_i(t)|\|_\infty \to 0$
Abbiamo così ottenuto che:

$$f(x_0 + te_i) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+te_i} g_i(t) dt$$

Dunque, posto $f_i(t) = f(x_0 + te_i)$, per il TFC:

$$f_i'(t) = g_i(x_0 + te_i) \quad t \in [-\delta, \delta]$$

Grazie all'arbitrarietà di $x_0 \in \Omega$, ricaviamo infine che:

$$f \in C^1(\Omega) \;\; \text{e} \;\; D_i f(x) = g_i(x) \;\forall x \in \Omega, i = 1, ..., n$$

Esercizio II.6. Successione relativamente compatta in $C^1([a,b])$

Testo. Sia $(f_i)_i \subset C^1([a,b])$. Supponiamo che

(i) $(f_i)_i$ e $(f_i')_i$ siano successioni limitate in $(C^0([a,b]), \|\cdot|\_\infty)$;

(ii) $(f_i)_i$ e $(f_i')_i$ siano successioni equicontinue su $[a,b]$.

Allora $(f_i)_i$ è una successione relativamente compatta in $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1})$, cioè esiste una sottosuccessione di $(f_i)_i$ che converge ad una funzione $f \in C^1([a,b])$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{C^1}$.

Soluzione Vogliamo applicare due volte il corollario del teorema di Ascoli-Arzelà. Dunque poichè $(f_i)_i$ è una successione limitata e equicontinua esiste una $f \in C^0([a,b])$ e una sottosuccessione $(f_{i_j})_j \subset (f_i)_i$ t.c. $\|f_{i_j} - f\|_\infty \overset{j\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Ora poichè anche $(f'_i)_i$ soddisfa le ipotesi del corollario, in paricolare le soddisferà $(f'_{i_j})_j \subset (f'_i)_i$, dunque esiste una $g \in C^0([a,b])$ e una sottosuccessione $(f'_{i_{j_m}})_m \subset (f'_{i_j})_j$ t.c. $\|f'_{i_{j_m}} - g\|_\infty \overset{m\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Allora ovviamente anche $\|f_{i_{j_m}} - f\|_\infty \overset{m\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Ma allora per l'esercizio precedente $f \in C^1([a,b])$ e $f' = g$, e ricordando la definizione di norma C^1 abbiamo:

$$\|f_{i_{j_m}} - f\|_{C^1} = \|f_{i_{j_m}} - f\|_\infty + \|f'_{i_{j_m}} - f'\|_\infty = \|f_{i_{j_m}} - f\|_\infty + \|f'_{i_{j_m}} - g\|_\infty \overset{m\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ovvero la tesi.

Esercizio II.7. Utile disuguaglianza sugli spazi L^p e loro inclusione

Testo. Siano $1 \le p \le q \le \infty$ e sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con μ finita, cioè $\mu(X) < \infty$. Dimostrare che:

$$\|f\|_{L^p} \le \mu(X)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{L^q}.$$

Soluzione. Poniamo $r = \frac{q}{p}$, per la disuguaglianza di Hölder ottieniamo che:

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |f \cdot 1|^p d\mu \le \|f^p\|_{L^r}\|1\|_{L^{r'}}$$

dove r' è il coniugato di r. Ora si ha però che: $\|1\|_{L^{r'}} = \mu(X)^{\frac{1}{r'}} = \mu(X)^{1-\frac{p}{q}}$, inoltre:

$$\|f^p\|_{L^r} = \left(\int_X |f|^{pr}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_X |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} = \|f\|^p_{L^q}$$

Elevando tutto alla $\frac{1}{p}$ concludiamo per monotonia il caso $q \neq \infty$.
Se $q = \infty$ (osserviamo che il caso $p = q = \infty$ è banale e quindi possiamo assumere $p < \infty$) allora vogliamo mostrare che: $\|f\|_{L^p} \le \mu(X)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^\infty}$. Ma poichè:

$$\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X \|f^p\|_{L^\infty} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f^p\|^{\frac{1}{p}}_{L^\infty}\mu(X)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^\infty}\mu(X)^{\frac{1}{p}}$$

Infatti per la prima disuguaglianza abbiamo $|f|^p \le \|f^p\|_{L^\infty}$ $\mu-$q.o. (poichè $p \ge 1$), mentre per la seconda osserviamo che: $|f|^p \le \|f\|^p_{L^\infty}$ $\mu-$q.o., dunque $\|f\|^p_{L^\infty}$ è un maggiorante essenziale di $|f|^p$, segue che $\|f^p\|_{L^\infty} \le \|f\|^p_{L^\infty}$.

Esercizio II.8. Applicazione della disuaguaglianza di Hölder

Testo. Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p < q \le \infty$, allora $u \in L^r(\mathbb{R}^n)$ $\forall r \in [p,q]$ e

$$\|u\|_r \le \|u\|^\alpha_p \|u\|^{1-\alpha}_q$$

Dato che $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Soluzione Definiamo $A := \{x \in \mathbb{R}^n | |u(x)| \le 1\}$ e $B := \{x \in \mathbb{R}^n | |u(x)| > 1\}$. Allora dalla teoria degli integrali di Lebesgue abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, d\mathcal{L}^n = \int_A |u|^r \, d\mathcal{L}^n + \int_B |u|^r \, d\mathcal{L}^n \le \int_A |u|^q \, d\mathcal{L}^n + \int_B |u|^p \, d\mathcal{L}^n$$

Ora poichè $|u|$ è non negativa allora posso "allargare" i domini di integrazione e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, d\mathcal{L}^n \le \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, d\mathcal{L}^n + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, d\mathcal{L}^n < \infty$$

Poichè per ipotesi $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ e quindi anche $\|u\|_r < \infty$ cioè $u \in L^r(\mathbb{R}^n)$.
Ora poichè $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora $u^{r\alpha} \in L^{\frac{p}{r\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ e poichè $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ allora $u^{r(1-\alpha)} \in L^{\frac{q}{r(1-\alpha)}}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre da $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ ottengo $1 = \frac{r\alpha}{p} + \frac{r(1-\alpha)}{q}$ cioè $\frac{p}{r\alpha}$ e $\frac{q}{r(1-\alpha)}$ sono coniugati. Allora dalla disuguaglianza di Hölder:

$$\||u|^r\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{r\alpha}|u|^{r(1-\alpha)} \, d\mathcal{L}^n \le \||u|^{r\alpha}\|_{\frac{p}{r\alpha}} \cdot \||u|^{r(1-\alpha)}\|_{\frac{q}{r(1-\alpha)}}$$

Ovvero

$$\|u\|_r^r \le \|u\|_p^{r\alpha} \cdot \|u\|_q^{r(1-\alpha)}$$

E quindi prendendo la radice r-esima:

$$\|u\|_r \le \|u\|_p^{\alpha} \cdot \|u\|_q^{1-\alpha}$$

Cioè la tesi.

Esercizio II.9. Esempi di funzioni in L^p per tutti i gusti

Testo.

1. Trovare una funzione $f \in L^p((0,1))$ per ogni $p \in [1,\infty)$, ma $f \notin L^\infty((0,1))$.
2. Trovare una funzione $f \in L^p((0,1))$ per un dato $p \in [1,\infty)$, ma $f \notin L^q((0,1))$ per ogni $q \in (p,\infty]$.
3. Trovare una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\liminf_{x\to 0}(|f(x)| \cdot |x|^\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in (0,n)$. Esiste una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\liminf_{x\to 0}(|f(x)| \cdot |x|^n) > 0$?

Soluzione.

1. Sia $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$ su $x \in (0,1)$. Calcoliamo $\forall p \in [1,\infty)$:

$$\int_0^1 (\ln(\frac{1}{x}))^p dx$$

Con il cambio di variabili $\ln(\frac{1}{x}) = y \Rightarrow x = e^{-y},\ dx = -e^{-y}dy$ allora:

$$\int_0^1 (\ln(\frac{1}{x}))^p dx = \int_0^\infty y^p e^{-y} dy = \Gamma(p+1)$$

É noto che la funzione $\Gamma(x)$ converge per ogni $x > 0$ (basta stimare asintoticamente l'integranda, oppure ci si ricorda che $\Gamma(n+1) = n!$ e poi si stima per i valori $x \in (n, n+1)$), quindi $f \in L^p((0,1))$ per tutti i $p \in [1,\infty)$. Ovviamente però f è continua su $(0,1)$ e ivi illimitata, si conclude che $\|f\|_{L^\infty} = \infty$.

2. Fissato $p \in [1,\infty)$, poniamo: $f(x) = \frac{1}{(x\ln^2(x))^{\frac{1}{p}}}$ per $x \in (0,\frac{1}{2}]$ e 0 su $(\frac{1}{2},1)$, allora:

$$\int_0^1 f(x)^p dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{(x\ln^2(x))^{\frac{p}{p}}} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{(x\ln^2(x))} dx = \Big[-\frac{1}{\ln(x)}\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{\ln(2)}$$

e pertanto ha norma p-esima finita.
D'altra parte, per ogni $q > p$, si ha che:

$$\int_0^1 f(x)^q dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{(x\ln^2(x))^{\frac{q}{p}}} dx = +\infty$$

perchè è l'integrale generalizzato con esponente della x maggiore di 1 (Thank you Analisi A).

3. Armati delle stesse idee del secondo punto, definiamo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^n \ln^2(\|x\|)} & se\ \|x\| \in (0,\frac{1}{2}] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Proviamo che $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, vale:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &= \int_0^{1/2} \int_A \frac{1}{r^n \ln^2(r)} r^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2}(\theta_{n-1})... \operatorname{sen}(\theta_2) dr d\mathcal{L}^{n-1} \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{r\ln^2(r)} dr \int_A \operatorname{sen}^{n-2}(\theta_{n-1})... \operatorname{sen}(\theta_2) d\mathcal{L}^{n-1} \\ &= K \int_0^{1/2} \frac{1}{r\ln^2(r)} dr = \frac{K}{\ln(2)}\end{aligned}$$

che è finito. Per dettagli sul calcolo si vedano le note del prof Drago: *Fondamenti di Fisica Matematica: Introduzione alla Teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali del Secondo Ordine, pagina 25*, è un tipico

integrale in coordinate sferiche, si noti che il secondo fattore è limitato su $A = (0, \pi)^{n-2} \times (-\pi, \pi)$ e quindi l'integrale è finito che chiamiamo K.
Inoltre:

$$\liminf_{x \to 0} \frac{\|x\|^\alpha}{\|x\|^n \ln^2(\|x\|)} = \liminf_{r \to 0} \frac{r^\alpha}{r^n \ln^2(r)} = +\infty$$

perchè $n - \alpha > 0$.
Per la seconda domanda invece, la risposta è negativa. Supponiamolo per assurdo, chiamato $a > 0$ tale liminf, allora per definizione di liminf avremmo che per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tale che $\forall x \in B(0, R)$, $|f(x)| > \frac{a-\varepsilon}{|x|^n}$, ma allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \geq \int_{B(0,R)} \frac{a - \varepsilon}{|x|^n} dx = \int_0^R \int_A \frac{a - \varepsilon}{r^n} r^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2}(\theta_{n-1}) ... \operatorname{sen}(\theta_2) dr d\mathcal{L}^{n-1}$$
$$= K \int_0^R \frac{a - \varepsilon}{r} dr = +\infty$$

assurdo.

Esercizio II.10. Controesempio della tendina

Testo. Esibire una successione $(f_n)_n \subset L^p([0, 1])$, con $1 \leq p < \infty$ tale che:

(i) $f_n \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$ in $L^p([0, 1])$

(ii) $\forall x \in [0, 1]$, $(f_n(x))_n \subset \mathbb{R}$ non converge a 0.

Soluzione Sia $(f_n)_n \subset L^p([0, 1])$ la successione delle funzioni tendina, allora sia $p \in [1, \infty]$ fissato e consideriamo

$$\|f_1\|_p = 1, \quad \|f_2\|_p = \|f_3\|_p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f_4\|_p = \|f_5\|_p = \|f_6\|_p = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{p}},$$

e così via si vede che $\|f_n\|_p \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi (i). Ora se $(f_n)_n$ convergesse anche puntualmente in $[0, 1]$ dovrebbe essere contenuta definitivamente in una certo intorno limite. Tuttavia $\forall x \in [0, 1]$, la successione reale $(f_n(x))_n \subset \mathbb{R}$ continu ad assumere infiniti 0 e 1 perciò non può essere contenuta in nessun intorno di 0. Pertanto $(f_n(x))_n \subset \mathbb{R}$ non converge puntualmente a 0 e quindi (ii). Ma vale di più, se la estendiamo a tutto $\mathbb{R}$ in modo che valga 0 fuori da $[0, 1]$ allora non converge nemmeno $\mathcal{L}$-q.o. in $\mathbb{R}$ poichè $\mathcal{L}([0, 1]) = 1 > 0$.

Esercizio II.11. L^∞ versus ∞

Testo. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

(i) Se $f \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, allora $\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty$.

(ii) Se $f \in L^\infty(\Omega) \setminus C^0(\Omega)$, allora non esiste una successione $(f_h)_h \subset C_c^0(\Omega)$ tale che $\lim_{h\to\infty} \|f - f_h\|_{L^\infty} = 0$.

Soluzione.

(i) Ovviamente $\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_\infty$. Se per assurdo fosse $\|f\|_{L^\infty} < \|f\|_\infty$, allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|f\|_{L^\infty} < \|f\|_\infty - \varepsilon$ ma per definizione di $\|f\|_\infty$, $\exists x \in \Omega$ tale che $\|f\|_\infty - \varepsilon < |f(x)|$ (definizione di sup). Poichè f è continua in Ω, l'ultima disuguaglianza vale in tutto un intorno, che è un insieme di misura strettamente positiva (secondo Lebesgue), dunque $\|f\|_{L^\infty}$ non sarebbe il sup essenziale, assurdo.

(ii) Proviamolo per assurdo. Sia $f \in L^\infty(\Omega) \setminus C^0(\Omega)$ e $(f_h)_h \subset C_c^0(\Omega)$ tale che $\lim_{h\to\infty} \|f - f_h\|_{L^\infty} = 0$. Osserviamo che le f_h per definizione sono non nulle solo su insieme compatto, ed essendo continue ammettono massimo per il teorema di Weierstrass, cioè abbiamo provato che $C_c^0(\Omega) \subset C_b^0(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ (la seconda inclusione è ovvia). Osserviamo che grazie alla parte (i), vale $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty}$ su $C_b^0(\Omega)$. Proviamo che $(C_b^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ è Banach. Sia $(f_k)_k \subset C_b^0(\Omega)$ una successione di Cauchy. Allora la funzione f definita puntualmente come $f(x) = \lim_k f_k(x)$ è ben definita perchè $\forall x \in \Omega$, $(f_k(x))_k \subset \mathbb{R}$ è una successione di Cauchy. f è continua perchè limite uniforme di continue e limitata: infatti sia $N > 0$ tale che $\forall n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{2}$, allora:

$$|f(x)| \leq \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \|f_N\|_\infty$$

(infatti $|f(x) - f_N(x)| = \lim_n |f_n(x) - f_N(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \Omega$). Dunque $f \in C_b^0(\Omega)$. Sia $\varepsilon > 0$ e $N > 0$ tale che $\forall n, m \geq N,\ \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Allora per $n \geq N$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \limsup_m |f_m(x) - f_n(x)| \leq \limsup_m \|f_m - f_n\| \leq \varepsilon \ \forall x \in \Omega$$

e dunque $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$. Abbiamo così provato che la funzione f è il limite cercato.
Grazie a tutto quello ch abbiamo provato, la nostra successione originale $(f_h)_h$ ammette limite $g \in C_b^0(\Omega)$, cioè g è un rappresentante della classe di equivalenza di f. Poichè f ammette un rappresentante continuo, è continua in $L^\infty(\Omega)$, assurdo.

Esercizio II.12. Caratterizzazione spazi ℓ^p

Testo. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura dove X è un insieme, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mu = \#$ (la misura del conteggio). Provare che:

(i) se $X = \mathbb{N}$ allora $L^p(X, \mu) = l^p := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ : \|f\|_{L^p}^p = \sum_{n=1}^\infty |f(n)|^p < \infty\}$ e $1 \leq p < \infty$;

(ii) se $X = \mathbb{N}$ allora $\ell^\infty(X, \mu) = \ell^\infty := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ : \|f\|_{\ell^\infty} = \sup_n |f(n)| < \infty\}$ e $p = \infty$;

(iii) se $X = I$ con I un insieme di indici, allora $L^p(I, \mu) = l^p(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \ : \|f\|_{L^p}^p = \sup\{\sum_{i \in J} |f(i)|^p : J \subset I \text{ finito}\} < \infty\}$ e $1 \leq p < \infty$;

(iv) se $X = I$ con I un insieme di indici, allora $L^\infty(I, \mu) = \ell^\infty(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \ : \|f\|_{\ell^\infty} = \sup_{i \in I} |f(i)| < \infty\}$ e $p = \infty$;

Soluzione

(i) Cominciamo col ricordare alcune definizioni,

$$\Sigma^* := \{\varphi : X \to \bar{\mathbb{R}} \text{ misurabili e numerabilmente semplici, t.c.} I_\mu(\varphi \vee 0) < \infty \text{ o } I_\mu(-(\varphi) \vee 0) < \infty\}$$

Allora se $f \in L^p(\mathbb{N}, \#)$ e $f \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{N}} f d\# := \sup\{I_\#(\varphi) : \ \varphi \in \Sigma^*, \varphi \leq f \ \# - q.o. \ n \in \mathbb{N}\}$$

Ora poichè $\#(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$ allora in realtà $\varphi \leq f$ ovunque. Ora notiamo che $f \in \Sigma^*$ infatti è numerabilmente semplice e anche misurabile poichè i misurabili sono proprio le parti di $\mathbb{N}$ e ovviamente $f \leq f$. Allora se $Im(f) = \{a_i\}_i$ e $A_i := f^{-1}(\{a_i\})$ abbiamo: $I_\#(f) = \sum_i a_i \#(A_i)$.
Ora per ogni i fare $a_i \#(A_i)$ vuol dire sommare a_i tante volte quanto $\#(A_i)$, ovvero sommare i $f(k_i)$ tante volte quanto $\#(A_i)$, dove k_i è tale che $f(k_i) = a_i$. Ora poichè gli A_i formano una partizione di $\mathbb{N}$ alla fine faccio proprio $\#(\mathbb{N})$ somme e quindi ottengo $I_\#(f) = \sum_i a_i \#(A_i) = \sum_{n=0}^\infty |f(n)|$. È evidente quindi che $\int_{\mathbb{N}} f \ d\# = \sum_{n=0}^\infty |f(n)|$. Dunque $\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{N}} |f|^p \ d\# = \sum_{n=0}^\infty |f(n)|^p$ e quindi concludo.

(ii) Notando ancora che l'unico insieme che ha misura $\#$ nulla è l'insieme vuoto $\emptyset$, allora i maggioranti essenziali di una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sono proprio i maggioranti poichè non ci possono essere trasgressori. Ma allora poichè il minimo dei maggioranti è proprio l'estremo superiore allora per def $\|f\|_{\ell^\infty} = \sup_n |f(n)| < \infty$

(iii) Riadattiamo le definizione del punto (i) a questo, proviamo innanzitutto che per f positiva e integrabile:

$$\int_I |f| d\# = \sup\{\sum_{i \in J} |f(i)|, \ J \subset I \ \textit{finito}\}$$

Ricordando che:

$$\int_I |f| d\# = \sup_{\varphi \in \Sigma^{-1}(f)} \{I_\#(\varphi)\}$$

con $I_\#(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n |E_n|, \ a_n \in Im(\varphi), \ E_n = \varphi^{-1}(a_n)$.
Definiamo per ogni $J \subset I$ finito, $\varphi_J(x) = f(x)$ se $x \in J$ e 0 altrimenti. Allora è chiaro che $\varphi_J \in \Sigma^{-1}(f)$, infatti i misurabili di I rispetto alla misura $\#$ sono tutti i suoi sottoinsiemi; otteniamo allora che:

$$\sup\{\sum_{i \in J} |f(i)|, \ J \subset I \ \textit{finito}\} \leq \sup_{\varphi \in \Sigma^{-1}(f)} \{I_\#(\varphi)\} = \int_I |f| d\#$$

vogliamo mostrare la disuguaglianza opposta.
Sia $g \in \Sigma^{-1}(f),\ g = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \chi_{E_n}$ con $|\chi_{E_n}| < \infty,\ a_n \neq 0$. Sia $E = \cup_n E_n$, è numerabile, perciò poniamo $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definiamo:

$$g_k(i) = \begin{cases} g(i) & 0 \leq i \leq t_k \\ 0 & i > t_k \end{cases}$$

$$\bar{g}_k(i) = \begin{cases} f(i) & 0 \leq i \leq t_k \\ 0 & i > t_k \end{cases}$$

da cui: $g_k \leq \bar{g}_k \Rightarrow I(g) = \sum_n f(e_n) = \lim_{k\to\infty} I(g_k) \leq \lim_{k\to\infty} I(\bar{g}_k)$. Ma per costruzione per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\bar{g}_k$ è una funzione uguale a f su un insieme di misura finita e nulla altrove, otteniamo che:

$$I(g) \leq \sup\{I(g_J),\ J \subset I \textit{ finito}\} \quad \forall g \in \Sigma^{-1}(f)$$

otteniamo la tesi, cioè:

$$\sup\{I(g):\ g \in \Sigma^{-1}(f)\} \leq \sup\{I(g_J),\ J \subset I \textit{ finito}\}$$

Dunque possiamo concludere perchè (per $p \in [1, \infty)$)

$$f \in L^p(I, \#) \Leftrightarrow |f|^p \textit{ integrabile e } \int_I |f|^p d\# = \sup\{\sum_{i\in J} |f(i)|^p,\ J \subset I \textit{ finito}\} < \infty$$

ie

$$L^p(I, \#) = l^p(I)$$

(iv) Per definizione:

$$f \in L^\infty(I, \#) \Leftrightarrow \exists M > 0 :\ |f(x)| \leq M \quad \# - q.o.\ x \in I$$

cioè per la misura del conteggio:

$$\begin{aligned} f \in L^\infty(I, \#) &\Leftrightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in I \\ &\Leftrightarrow \exists M > 0 : \sup_{x\in I} |f(x)| \leq M \\ &\Leftrightarrow \sup_{x\in I} |f(x)| < \infty \\ &\Leftrightarrow f \in \ell^\infty(I) \end{aligned}$$

Esercizio II.13. Relazione spazi l^p

Testo. Provare che:

(i) $l^p \subset l^q$ se $1 \leq p \leq q \leq \infty$;

(ii) $l^1 \subsetneq \bigcap_{(1,\infty]} l^p$.

Soluzione

(i) Assumiamo prima $p, q < \infty$, e sia $x \in l^p$. Ora considero $A := \{n \in \mathbb{N}\ : x(n) \geq 1\}$ e $B := \{n \in \mathbb{N}\ : x(n) < 1\}$. Allora poichè per ipotesi $x \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0$ A deve necessariamente essere finito altrimenti per ogni $\bar{n}$ potrei sempre trovare un indice per cui la mia successione è sopra 1. Ora:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^q = \sum_{n\in A} |x(n)|^q + \sum_{n\in B} |x(n)|^q \leq \sum_{n\in A} |x(n)|^q + \sum_{n\in B} |x(n)|^p \leq \sum_{n\in A} |x(n)|^q + \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^p < \infty$$

Poichè la somma su A in realtà è finita e $x \in l^p$ per ipotesi, dunque $x \in l^q$.
Se invece $q = \infty$, allora poichè $x \in l^p$ in particolare converge a 0 e quindi è limitata, ovvero $\sup_n |x(n)| < \infty$ e dunque $x \in \ell^\infty$.

(ii) Sia $p > 1$ e consideriamo la successione x così definità $x(n) := \frac{1}{n}$, allora:

$$\sum_n |x(n)|^p = \sum_n \frac{1}{n^p} < \infty$$

Poichè è una serie armonica con potenza $p > 1$, inoltre ovviamente $x \xrightarrow{n\uparrow\infty} 0$. Ma allora $x \in \bigcap_{(1,\infty]} l^p$, tuttavia per lo stesso motivo $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$ perciò $x \notin l^1$, dunque la tesi.

Esercizio II.14. Cubo di Hilbert

Testo. Sia

$$C := \left\{x \in l^2 : |x(n)| \leq \frac{1}{n}\right\} \equiv \prod_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$$

Provare che C è compatto in $(l^2, \|\cdot\|_{l^2})$

Soluzione Vogliamo usare il Teorema di Frèchet. Sia $(x_k)_k \subset C$ una successione che converge ad un $x \in l^2$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{l^2}$. Ma allora vuol dire che definitivamente rispetto a k la serie $\sum_n |x_k(n) - x(n)|^2$ ha somma finita quindi necessariamente deve esserci anche convegrenza puntualmente, ovvero $\forall n \in \mathbb{N}$ fissato, $x_k(n) \xrightarrow{k\uparrow\infty} x(n)$. Ma allora poichè $\forall k \in \mathbb{N},\ |x_k(n)| \leq \frac{1}{n}$ allora passando al limite su k ho $|x(n)| \leq \frac{1}{n}$, dunque $x \in C$. Per la limitatezza basta osservare che $\forall x \in C$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in C} \|x\|_{l^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

e dunque C limitato. Ora fissiamo $\varepsilon > 0$ e $x \in C$, allora poichè abbiamo mostrato che $\|x\|_{l^2} < \infty$ vuol dire che il resto dela serie converge a 0, ovvero $\exists N_\varepsilon > 0$ t.c. $\sum_{n>N_\varepsilon} |x(n)|^2 \leq \varepsilon^2$. Dunque per il Teorema di Frèchet C è compatto in $(l^2, \|\cdot\|_{l^2})$.

Esercizio II.15. Compatezza in ℓ^∞

Testo. Sia $C := \{x \in \ell^\infty : |x(n)| \leq a_n\}$, dove (a_n) è una successione data di numeri reali non negativi tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dimostrare che C è un insieme compatto in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$.

Soluzione. Mostreremo che l'insieme è chiuso totalmente limitato, poichè lo spazio è metrico ciò proverà la compattezza. Proviamo che C è chiuso. Sia $(x_h)_h \subset C$ tale che $x_h \to x$ in ℓ^∞, ie, $\sup_n |x(n) - x_h(n)| \to 0$. Per definizione di sup allora, $\forall n \in \mathbb{N},\ |x(n) - x_h(n)| \to 0$ e quindi $|x(n)| - |x_h(n)| \to 0$. Dunque $\forall \varepsilon > 0,\ \exists H > 0$ tale che $\forall h \geq H :\ |x(n)| - |x_h(n)| < \varepsilon \Rightarrow |x(n)| < |x_h(n)| + \varepsilon \leq a_n + \varepsilon$, mandando $\varepsilon \to 0$ otteniamo $\forall n \in \mathbb{N},\ x(n) \leq a_n$, cioè $x \in C$.
Proviamo che è totalmente limitato. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $N > 0$ tale che $\forall n \geq N,\ a_n < \varepsilon$. Definiamo allora:

$$C_N = \{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N :\ \forall i \in \{1, ..., N\},\ x_i \leq a_i\}$$

Allora C_N è compatto in $\mathbb{R}^N$ con la norma del sup (sono comunque tutte equivalenti) e quindi esiste $E \subset C_N$ finito tale che che C_N è ricoperto da palle centrate in E di raggio ε. Consideriamo allora per ogni $x \in E$ la palla di raggio ε centrata in $\bar{x} = (x_1, ..., x_N, 0, 0, ...) \in \ell^\infty$, proviamo che $C \subset \cup_{x\in E} B(\bar{x}, \varepsilon)$ (e quindi avremmo terminato). Sia $z \in C$, chiamiamo $\bar{z} = (z(1), ..., z(N)) \in C^N$, allora esiste $x \in E$ tale che $\bar{z} \in B(x, \varepsilon)$ inoltre $\forall n > N,\ |z(n)| \leq a_n < \varepsilon$, ie è contenuta nella palla centrata in 0 di raggio ε, in definitiva $z \in B(\bar{x}, \varepsilon)$.

III. Spazi di Hilbert

Esercizio III.1. Proprietà prodotto scalare

Testo. Sia H uno spazio pre-Hilbertiano su $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$. Dimostrare che:

(i)
$$|(x, y)|_{\mathbb{K}} \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x, y \in H \quad \text{(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)}$$
e vale l'uguaglianza se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

(ii) la mappa $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ è continua.

Soluzione

(i) Dalla definzione di prodotto scalare osserviamo che si tratta di una forma sesquilineare (bilineare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ovvero lineare nella prima componente e antilineare nella seconda. Ora scrivendo $\|\cdot\|$ per indicare la norma indotta dal prodotto scalare, osserviamo che $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$0 \leq \|x-\lambda y\|^2 = (x-\lambda y, x-\lambda y) = (x, x)+(x, -\lambda y)+(-\lambda y, x)+(-\lambda y, -\lambda y) = (x, x)-\bar{\lambda}(x, y)-\lambda(y, x)+|\lambda|^2(y, y)$$

Ora scegliendo $\lambda = (x,y)(y,y)^{-1}$, e ricordando che $(x,x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{K}$, otteniamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$(x,x) - \overline{(x,y)(y,y)^{-1}}(x,y) - (x,y)(y,y)^{-1}(y,x) + \overline{(x,y)(y,y)^{-1}}(x,y)(y,y)^{-1}(y,y) =$$

$$= (x,x) - (y,x)(y,y)^{-1}(x,y) - \cancel{(x,y)(y,y)^{-1}(y,x)} + \cancel{(y,x)(x,y)(y,y)^{-1}} = (x,x) - |(x,y)|^2_{\mathbb{K}}(y,y)^{-1}$$

Allora portando il secondo addendo dall'altra parte dell'uguale e moltiplicando per (y,y) ottengo:

$$|(x,y)|^2_{\mathbb{K}} \leq (x,x)(y,y) = \|x\|^2\|y\|^2 \implies |(x,y)|_{\mathbb{K}} \leq \|x\|\|y\|$$

Ora assumiamo valga l'uguaglianza, ovvero da quello che abbiamo scritto nel punto (i):

$$\|x - \lambda y\|^2 = 0 \Longrightarrow x - \lambda y = 0 \Longrightarrow x = \lambda y \ \text{ cioè } x \text{ e } y \text{ sono linearmente dipendenti}$$

Se invece x e y sono linearmente dipendenti allora $x = cy$ con $c \in \mathbb{K}$, dunque:

$$(x,y) = (cy,y) = c(y,y) = c\|y\|^2 = c\|y\|\|y\| = \|cy\|\|y\| = \|x\|\|y\|$$

(ii) Mostriamo che $(\cdot,\cdot)$ è continua per successioni. Sia $\{(x_k,y_k)\}_k \subset H \times H$ una successione che converge a $(x,y) \in H \times H$, ovvero $\|(x_k,y_k) - (x,y)\|_{H\times H} \xrightarrow{k\uparrow\infty} 0$. Allora $\|x_k - x\| \xrightarrow{k\uparrow\infty} 0$ e $\|y_k - y\| \xrightarrow{k\uparrow\infty} 0$. Dunque

$$|(x_k,y_k) - (x,y)|_{\mathbb{K}} \leq |(x_k,y_k) - (x_k,y)|_{\mathbb{K}} + |(x_k,y) - (x,y)|_{\mathbb{K}} =$$

$$= |(x_k, y_k - y)|_{\mathbb{K}} + |(x_k - x, y)|_{\mathbb{K}} \leq \|x_k\|\|y_k - y\| + \|x_k - x\|\|y\| \xrightarrow{k\uparrow\infty} 0$$

Dove osserviamo che $\|x_k\|$ è limitata poichè converge a $\|x\|$

Esercizio III.2. Identità di polarizzazione

Testo. Sia $(H,(\cdot,\cdot))$ un spazio reale pre-Hilbert e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta. Allora vale che, per ogni $x,y \in H$,

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad \forall x,y \in H (\text{ identità di polarizzazione}).$$

Soluzione. Dimostriamo prima di tutto che

$$(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

Prendiamo

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)$$

Da cui segue banalmente la tesi.
Ora andiamo a sfruttare dall'identità del parallelogramma otteniamo che:

$$-\|x-y\|^2 = \|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2$$

Andiamo ora a sostituirlo

$$\frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

Esercizio III.3. Spazi pre-Hilbert e isomorfismi isometrici

Testo. Siano $(H_i,(\cdot,\cdot)_i)$ $(i = 1,2)$ spazi pre-Hilbert reali e siano $\|\cdot\|_i$ le rispettive norme indotte. Sia $T : H_1 \to H_2$ un isomorfismo isometrico. Allora vale:

$$\forall x,y \in H_1, \quad (T(x),T(y))_2 = (x,y)_1.$$

Soluzione. Per l'esercizio III.2, prendendo $x,y \in H_1$, si ha:

$$(T(x),T(y))_2 = \frac{1}{4}\left(\|T(x)+T(y)\|_2^2 - \|T(x)-T(y)\|_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|T(x+y)\|_2^2 - \|T(x-y)\|_2^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_1^2 - \|x-y\|_1^2\right) = (x,y)_1,$$

Da cui concludiamo

Esercizio III.4. Proprietà spazio pre-Hilbert: Teorema di Pitagora

Testo. Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio pre-Hilbert su $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta. Siano $x, y, z \in H$. Provare che:

(i) Se H è uno spazio pre-Hilbert reale, allora vale:

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{(Teorema di Pitagora).}$$

(ii) Se H è uno spazio pre-Hilbert complesso, allora vale:

$$x \perp y \iff \|\lambda x + \mu y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = |\mu| = 1.$$

Inoltre l'enunciato (i) non vale: dare un controesempio.

(iii) Vale:

$$(I)\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\| \iff \exists \lambda \in [0,1] \text{ tale che } y = \lambda x + (1-\lambda)z.$$

Inoltre (I) non vale se la norma non è indotta da un prodotto scalare: dare un controesempio.

Soluzione.

(i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ osserviamo che :

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2.$$

Quindi vale:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff 2(x,y) = 0 \iff x \perp y.$$

(ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ osserviamo che:

$$\|\lambda x+\mu y\|^2 = (\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y) = \lambda\overline{\lambda}(x,x)+\lambda\overline{\mu}(x,y)+\mu\overline{\lambda}(y,x)+\mu\overline{\mu}(y,y) = \|x\|^2+2Re(\lambda\overline{\mu}(x,y))+\|y\|^2$$

Dove abbiamo utilizzato che $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$, $\mu\overline{\mu} = |\mu|^2 = 1$ e $\mu\overline{\lambda}(y,x) = \overline{\lambda\overline{\mu}(x,y)}$. Quindi:

$\implies$ $x \perp y \Rightarrow (x,y) = 0$. Quindi $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad Re(z(x,y)) = Re(0) = 0$. Permettendoci di ottenere la tesi:

$$\|\lambda x+\mu y\|^2 = \|x\|^2+2Re(\lambda\overline{\mu}(x,y)+\|y\|^2 = \|x\|^2+0+\|y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = |\mu| = 1$$

$\impliedby$ Supponiamo $\|\lambda x+\mu y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$, cioè: $Re(\lambda\overline{\mu}(x,y)) = Re(0) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = |\mu| = 1$. E sapendo che $(x,y) = Re((x,y)) + iIm((x,y)) = 0$ se dimostriamo che le componenti sono nulle, abbiamo finito perchè implicherebbe che $(x,y) = 0 \Rightarrow x \perp y$

* $Re((x,y)) = 0 \quad (\lambda = \mu = 1)$
* $Im((x,y)) = Re(-i(x,y)) = 0 \quad (\lambda = i, \mu = -1)$.

Dunque otteniamo la tesi

Controesempio: Sia $H = \mathbb{C}$ con il prodotto scalare $(z,w) = z\overline{w}$ se $z, w \in \mathbb{C}$. Ci basta prendere $x = 1$ e $y = i$, infatti:

- $\|1+i\|^2 = (1+i, 1+i) = (1+i)(1-i) = 1+1 = \|1\|^2 + \|i\|^2$
- $(1, i) = -i$

Quindi non vale (i).

(iii) $\implies$ wlog $x = 0$. Supponiamo quindi che valga $\|z\| = \|y\| + \|y - z\|$. Inoltre vale:

* $\|z\|^2 = \|y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\|y\|\|y-z\|$
* $\|z\|^2 = \|y - (y-z)\|^2 = \|y\|^2 + \|y-z\|^2 - 2Re(y-z, y)$

Segue che $-Re(y-z, y) = \|y\|\|y-z\|$ a questo punto usiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e si ha che:

$$\|y-z\| \cdot \|y\| = -Re((y-z, y)) \leq |(y-z, y)|_{\mathbb{K}} \leq \|y-z\| \cdot \|y\|.$$

Otteniamo che $|(y-z, y)|_{\mathbb{K}} = \|y-z\| \cdot \|y\|$ e dall'Esercizio III.1 $y-z$ e y sono linearmente dipendenti ovvero $\exists \mu \in \mathbb{K}$ t.c. $y - z = \mu y \Rightarrow y = \frac{1}{1-\mu}z = \lambda z$ (se μ fosse 1, $z = 0$ e l'esercizio non avrebbe senso) Inoltre sappiamo che deve valere (I):

$$\|z\| = |\lambda|\|z\| + \|\lambda z - z\| = |\lambda - 1|\|z\| + |\lambda|\|z\| \implies 1 - |\lambda| = |\lambda - 1| \quad \text{da cui segue} \quad \lambda \in [0,1].$$

$\Longleftarrow$ Supponiamo che $\exists \lambda \in [0,1]$ tale che $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. Si vede banalmente che:

$$\|x-y\| + \|y-z\| = \|(1-\lambda)(x-z)\| + \|\lambda(x-z)\| = |1-\lambda|\|x-z\| + |\lambda|\|x-z\| = \|x-z\|.$$

Controesempio: Considero $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|^{\ell_1})$ che è uno spazio di Banach, la norma $\|\cdot\|^{\ell_1}$ è definita così:

$$\|(x,y)\| = |x| + |y| \quad \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora $\|\cdot\|$ non è indotta da un prodotto scalare, infatti non vale l'uguaglianza del parallelogramma ($\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$). Si può vedere prendendo $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$ allora:

- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|(1,1)\|^2 + \|(1,-1)\|^2 = 4 + 4 = 8$
- $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(\|(1,0)\|^2 + \|(0,1)\|^2) = 2 \cdot 2 = 4$

Dimostriamo che non vale (I), prendiamo $x = (1,0)$, $y = (1,1)$, $z = (0,1)$:

$$\|x-z\| = \|(1,-1)\| = 2 = \|(0,-1)\| + \|(1,0)\| = \|x-y\| + \|y-z\|$$

Supponiamo, per assurdo, che esiste $\lambda \in [0,1]$ tale che $y = \lambda x + (1-\lambda)z$:

$$(1,1) = y = \lambda x + (1-\lambda)z = \lambda(1,0) + (1-\lambda)(0,1) = (\lambda, 1-\lambda).$$

Cioè $(1,1) = (\lambda, 1-\lambda)$ che è assurdo, quindi non vale $(I)-$

Esercizio III.5. $(\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^\infty})$ è pre-Hilbert

Testo. Dimostrare che $(\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^\infty})$ è uno spazio pre-Hilbert, ma non è uno spazio di Hilbert.

Soluzione. Consideriamo la seguente mappa:

$$(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^\infty} : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$$

$$(x,y)_{\mathbb{R}^\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \quad \text{per } x, y \in \mathbb{R}^\infty.$$

Innanzitutto dimostriamo che è un prodotto scalare, cioè che si rispettano le seguenti proprietà:

- Il funzionale $\mathbb{R}^\infty \ni x \to (x,y)$ è lineare su $\mathbb{R}$:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^\infty, \quad (x_1+x_2, y)_{\mathbb{R}^\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}(x_1(n)+x_2(n))y(n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_1(n)y(n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_2(n)y(n) = (x_1,y)_{\mathbb{R}^\infty} + (x_2,y)_{\mathbb{R}^\infty}.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda x, y)_{\mathbb{R}^\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x(n)y(n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) = \lambda(x,y)_{\mathbb{R}^\infty}.$$

- Vale $(x,y)_{\mathbb{R}^\infty} = \overline{(y,x)_{\mathbb{R}^\infty}}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^\infty, \quad (x,y)_{\mathbb{R}^\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n) = (y,x)_{\mathbb{R}^\infty} = \overline{(y,x)_{\mathbb{R}^\infty}}.$$

- Vale $(x,x) \in \mathbb{R}$ e $(x,x)_{\mathbb{R}^\infty} > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}, \quad (x,x)_{\mathbb{R}^\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)^2 > 0.$$

Banalmente induce la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^\infty}$ e abbiamo visto nell'esercizio (I.2) che $(\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^\infty})$ non è uno spazio di Banach e perciò non è uno spazio di Hilbert.

Esercizio III.6. Esempi di spazi non Hilbert

Testo. Dimostrare che $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{C^0([a,b])}, (\cdot,\cdot))$, $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ e $(L^p(0,1), \|\cdot\|_{L^p})$, con $p \neq 2$, non sono spazi di Hilbert.

Soluzione. Supponiamo che siano Hilbert e proviamo che non soddisfano l'identità del parallelogramma, ovvero che esistono elementi $f, g \in X$ tali per cui:

$$\|f+g\|_X^2 + \|f-g\|_X^2 \neq 2(\|f\|_X^2 + \|g\|_X^2)$$

.

1. Caso $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{C^0([a,b])})$:
   Definiamo le funzioni: $f, g \in C^0([a,b])$ nel seguente modo, $f(x) = \frac{b-x}{b-a},\ g(x) = \frac{x-a}{b-a}$.
   É facilmente verificabile che $\|f\|_{C^0([a,b])} = \|g\|_{C^0([a,b])} = \|f+g\|_{C^0([a,b])} = \|f-g\|_{C^0([a,b])} = 1$, ma allora $\|f+g\|^2_{C^0([a,b])} + \|f-g\|^2_{C^0([a,b])} = 1^2 + 1^2 = 2$ e $2(\|f\|^2_{C^0([a,b])} + \|g\|^2_{C^0([a,b])}) = 2(1+1) = 4$ e quindi abbiamo concluso.

2. Caso $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ con $p \neq 2$:
   (Thank you, Analisi A mod2!!) Definiamo: $x = (1,1,0,...)$ e $y = (1,-1,0,...)$. Ovviamente abbiamo $x, y \in l^p$, inoltre $(x+y) = (2,0,...)$, $(x-y) = (0,2,0,...)$ e quindi: $\|x+y\|^2_{l^p} + \|x-y\|^2_{l^p} = [(2^p)^{\frac{1}{p}}]^2 + 2^2 = 8$, d'altra parte $2(\|x\|^2_{l^p} + \|y\|^2_{l^p}) = 2((2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2) = 4 \cdot (2^{1/p})^2$, diversi se $p \neq 2$.

3. Caso $(L^p(0,1), \|\cdot\|_{L^p})$ con $p \neq 2$:
   Se $p = \infty$ basta ragionare come nel caso $C^0([a,b])$ con $a = 0, b = 1$ e quindi scegliere $f(x) = 1-x,\ g(x) = x$.
   Se $p \neq \infty$ scegliamo f, g come sopra, allora: $\|f\|_{L^p} = (\int_0^1 (1-x)^p dx)^{1/p} = (\frac{1}{p+1})^{1/p}$
   $\|g\|_{L^p} = (\frac{1}{p+1})^{1/p}$
   $\|f+g\|_{L^p} = (\int_{(0,1)} 1^p dx)^{1/p} = 1$
   $\|f-g\|_{L^p} = (2\int_0^{1/2} (1-2x)^p dx)^{1/p} = (\frac{1}{p+1})^{1/p}$
   E quindi concludiamo poichè:

   $$1 + \left(\frac{1}{p+1}\right)^{2/p} = 4\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2/p} \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{p+1}\right)^{2/p} = 1 \Leftrightarrow p = 2$$

   Infatti la funzione $(\frac{1}{x+1})^{2/x}$ è monotona crescente.

Esercizio III.7. Distanze in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{l^\infty})$

Testo. Consideriamo lo spazio di Banach $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{l^\infty})$. Sia

$$K := \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

e $u = (1,0)$. Dimostrare che, per ogni $w = (0,y)$ con $|y| \leq 1$:

$$\|u-w\|_{l^\infty} = \min\{\|u-v\|_{l^\infty} : v \in K\} = \operatorname{dist}(u,K) = 1.$$

In particolare, non esiste unicità della proiezione su insiemi convessi in uno spazio di Banach generale.

Soluzione Calcoliamo il primo membro: $\|u-w\|_{l^\infty} = \|(1,-y)\|_{l^\infty} = \sup\{|1|, |-y|\} = 1$. Osserviamo che poichè $w \in K$, a questo punto è sufficiente dimostrare che $\operatorname{dist}(u,K) \geq 1$. Ciò è molto semplice, infatti:

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(u,K) &= \inf\{\|u-v\|_{l^\infty} : v \in K\} = \inf\{\|(1,-y)\|_{l^\infty} : (0,y) \in K\} \\ &= \inf_{y\in\mathbb{R}}\{\sup\{1, |-y|\}\}\end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni $y \in \mathbb{R}$, $\sup\{1, |y|\} \geq 1 \Rightarrow \inf_{y\in\mathbb{R}}\{\sup\{1,|-y|\}\} \geq 1$, dunque abbiamo concluso.

Esercizio III.8. III.8 Isomorfismo di Riesz-Fréchet

Testo. Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ e sia $T : H \to H'$ l'isomorfismo di Riesz-Fréchet. Si dimostri che:

$$(f,g)_{H'} = \overline{(T^{-1}(f), T^{-1}(g))_H} \quad \text{con } f, g \in H'$$

definisce un prodotto scalare su H' che induce la norma duale $\|\cdot\|_{H'}$.

Soluzione. Innanzitutto dimostriamo che è un prodotto scalare, cioè che si rispettano le seguenti proprietà:

- Il funzionale $H' \ni f \to (f,g)$ è lineare su $\mathbb{K} \quad \forall g \in H'$:
  (Ricordiamo che che $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$)

$$\forall f_1, f_2 \in H', \quad (f_1+f_2, g)_{H'} = \overline{(T^{-1}(f_1+f_2), T^{-1}(g))_H} = (T^{-1}(g), T^{-1}(f_1+f_2))_H =$$

$$(T^{-1}(g), T^{-1}(f_1)+T^{-1}(f_2))_H = (T^{-1}(g), T^{-1}(f_1))_H + (T^{-1}(g), T^{-1}(f_2))_H =$$

$$\overline{(T^{-1}(f_1), T^{-1}(g))_H} + \overline{(T^{-1}(f_2), T^{-1}(g))_H} = (f_1, g)_{H'} + (f_2, g)_{H'}.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda f, g)_{H'} = \overline{(T^{-1}(\lambda f), T^{-1}(g))_H} = (T^{-1}(g), T^{-1}(\lambda f))_H = (T^{-1}(g), \overline{\lambda} T^{-1}(f))_H =$$

$$= \overline{\overline{\lambda}}(T^{-1}(g), T^{-1}(f))_H = \lambda (T^{-1}(g), T^{-1}(f))_H = \lambda \overline{(T^{-1}(f), T^{-1}(g))_H} = \lambda (f,g)_{H'}.$$

- Vale $(f,g)_{H'} = \overline{(g,f)_{H'}} \quad \forall g, f \in H'$:

$$\forall g, f \in H', \quad (f,g)_{H'} = \overline{(T^{-1}(f), T^{-1}(g))_H} = (T^{-1}(g), T^{-1}(f))_H = \overline{\overline{(T^{-1}(f), T^{-1}(g))_H}} = \overline{(g,f)_{H'}}.$$

- Vale $(f,g)_{H'} \in \mathbb{R}$ e $(x,x)_{H'} > 0 \quad \forall f \in H' \setminus \{0\}$:

$$\forall f \in H' \setminus \{0\}, \quad (f,f)_{H'} = \overline{(T^{-1}(f), T^{-1}(f))_H} = (T^{-1}(f), T^{-1}(f))_H > 0.$$

Rimane da dimostrare che il prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_H$ induce la norma duale su H':
Andiamo a far vedere che $\forall f \in H' \quad \|f\|_{H'} = \|f\|$ dove $\|\cdot\| := \sqrt{(f,g)_{H'}}$.
Dato che T è biettiva abbiamo che $\forall f \in H'$, $\exists u \in H$ t.c. $T(u) = f$:

- $\|f\|_{H'} = \|T(u)\|_{H'} = \|u\|_H$, per il fatto che T isometrica.
- $\|f\| = \sqrt{(f,f)_{H'}} = \sqrt{\overline{(T^{-1}(f), T^{-1}(f))_H}} = \sqrt{(T^{-1}(f), T^{-1}(f))_H} = \sqrt{(u,u)_H} = \|u\|_H$

  Quindi le due norme coincidono.

Esercizio III.9. Sottospazi ortogonali

Testo. Sia M un sottospazio lineare di uno spazio di Hilbert H su $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Dimostrare che:

1. $M^\perp$ è chiuso;
2. M è denso in H se e solo se $M^\perp = \{0\}$;
3. $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$.

Soluzione.

1. Ricordiamo che $M^\perp = \{y \in H : (x,y) = 0, \ \forall x \in M\}$. Sia $x \in M$, poniamo $M_x^\perp = \{y \in H : (x,y) = 0\}$ e osserviamo che $M_x^\perp$ è chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la mappa $(x,\cdot) : H \to \mathbb{K}$ che è continua. Allora $M^\perp = \cap_{x \in M} M_x^\perp$ è chiuso.

2. Supponiamo M denso in H. Proviamo un fatto generale, ovvero: $\overline{M}^\perp = M^\perp$.
   '$\subset$': si ha $M \subset \overline{M} \Rightarrow \overline{M}^\perp \subset M^\perp$
   '$\supset$': sia $y \in M^\perp$, allora $(x,y) = 0 \ \forall x \in M$. Sia $x \in \overline{M}$ e $(x_h)_h \subset M$ tale che $x_h \to x$ (la successione esiste perchè la chiusura è uguale alla chiusura sequenziale). Sfruttiamo ancora la continuità del prodotto scalare: $(x,y) = (\lim_h x_h, y) = \lim_h (x_h, y) = \lim_h 0 = 0$ e dunque abbiamo concluso.
   Concludiamo questo caso poichè $\{0\} = H^\perp = \overline{M}^\perp = M^\perp$.
   Viceversa supponiamo che $M^\perp = \{0\}$. Sia $f \in H'$ tale che $f \equiv 0$ su M, proviamo che allora $f \equiv 0$ globalmente. Sia $T : H \to H'$ l'isomorfismo di Riesz-Fréchet e sia $z \in H$ tale che $T(z) = f$. Abbiamo che per ogni $x \in M$. $0 = f(x) = T(z)(x) = (x,z)$ e quindi $z \in M^\perp = \{0\}$, ie $z = 0$, ma allora f è la mappa identicamente nulla in quanto $(y,0) = 0 \ \forall y \in H$.

3. Per il teorema di decomposizione ortogonale, abbiamo che $H = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp = \overline{M} \oplus (\overline{M})^\perp$. Abbiamo già provato che $\overline{M}^\perp = M^\perp$, dunque $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$.

Esercizio III.10. Oggi cuciniamo: mappe bilineari e matrici

Testo. Sia $E = \mathbb{R}^n$ e sia $|\cdot|$ la norma euclidea. Dimostrare che:

1. $a : E \times E \to \mathbb{R}$ è una mappa bilineare se e solo se esiste un'unica matrice reale $n \times n$, $A = [a_{ij}]_{ij}$, tale che:
$$a(u, v) = (Au, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$
dove $(\cdot, \cdot)$ denota il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$.
2. Se $a : E \times E \to \mathbb{R}$ è una mappa bilineare, allora è anche continua.
3. Sia A una matrice reale $n \times n$ tale che: $(Au, u) > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora A è invertibile.
4. L'implicazione inversa dell'enunciato (iii) non è valida.

Soluzione.

1. Supponiamo che a sia bilineare, sia $B = [b_{ij}]_{ij} = [a(e_i, e_j)]_{ij}$ è una matrice reale. Siano $u = \sum_i u_i e_i,\ v = \sum_j v_j e_j \in \mathbb{R}^n$, osserviamo che: $a(u, v) = a(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j) = \sum_{i,j} u_i v_j a(e_i, e_j) = \sum_{i,j} u_i v_j b_{ij} = \sum_j v_j \sum_i b_{ij} u_i = \sum_j v_j (B^t u)_j = (B^t u, v)$, quindi basta definire $A = B^t$ per ottenere l'identità cercata, inoltre se C è un'altra matrice per la quale vale $a(u, v) = (Cu, v)\ \forall u, v \in \mathbb{R}^n$, allora per ogni $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $((A - C)u, u) = (Au, u) - (Cu, u) = a(u, u) - a(u, u) = 0$ e quindi deve essere $A - C = 0$.
Viceversa sia A l'unica matrice reale per cui vale quell'identità, proviamo che $a(\cdot, \cdot)$ è bilineare. Abbiamo che $a(\lambda u + \mu v, w) = (A(\lambda u + \mu v), w) = \lambda(Au, w) + \mu(Av, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w)$. La linearità nel secondo argomento è analoga.
2. Sia $(x, y) \in E \times E$. Poichè le mappe: $a(x, \cdot) : E \to \mathbb{R}$ e $a(\cdot, y) : E \to \mathbb{R}$ sono lineari e E ha dimensione finita, allora sono continue. Sia $(x_n, y_n)_n \subset E \times E$ tale che $(x_n, y_n)_n \to (x, y)$.Allora: $|a(x_n, y_n) - a(x, y)| \leq |a(x_n, y_n) - a(x_n, y)| + |a(x_n, y) - a(x, y)| = |a(x_n, y_n - y)| + |a(x_n - x, y)| \to 0$ poichè $a(x_n, \cdot)$ e $a(\cdot, y)$ sono continue.
3. Definiamo $T : E \to E : \ T(u) = Au$, proviamo che è invertibile. T è iniettiva: infatti è ovviamente lineare, inoltre $Au = 0$ con $u \neq 0$, allora $0 = (Au, u) > 0$, assurdo. Proviamo che è surgettiva. É noto dall'algebra lineare che l'immagine di T è generata dalle colonne di A, pertanto la tesi è equivalente a dimostrare che le colonne di A formano una base di E, cioè che sono linearmente indipendenti. Chiamiamo $A_i,\ i = 1, .., n$ tali colonne, sia $a_1 A_1 + ... + a_n A_n = 0$ una combinazione lineare. Per assurdo un qualche coefficiente è non nullo, quindi $a = (a_1, ..., a_n) \neq 0 \Rightarrow (Aa, a) > 0$, contro $Aa = a_1 A_1 + ... + a_n A_n = 0$. Pertanto T, e conseguentemente anche A, sono invertibili.
4. Basta considerare $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $u = (1, -1)$, allora A è invertibile ma $(Au, u) = 0$.

Esercizio III.11. Esercizio su funzionale stimato dal basso (anche detta coercività)

Testo. Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ uno spazio di Hilbert e sia $A : H \to H$ un operatore lineare continuo.

1. Supponiamo che esista una costante $\alpha > 0$ tale che:
$$(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$
Allora A è invertibile e:
$$\|A^{-1}\|_{L(H,H)} \leq \frac{1}{\alpha}.$$
2. Dimostrare che esistono uno spazio H e un operatore A tali che:
$$(Au, u) > 0 \quad \forall u \in H \setminus \{0\},$$
ma A non è invertibile.

Soluzione.

1. Proviamo che A è iniettiva e surgettiva. Sia u tale che $Au = 0$, allora $0 = (Au, u) \geq \alpha\|u\|^2$ e quindi $\|u\|^2 = 0 \Rightarrow u = 0$. Proviamo che è surgettiva, sia $R(A) = \{Au : u \in H\}$ l'immagine di A, proviamo che è un insieme chiuso e denso. Sia $(Ax_n)_n \subset R(A)$ tale ch $Ax_n \to y$ in H, proviamo che $y \in R(A)$. Abbiamo che $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$ tale che $\forall n, h \geq N$, $\|Ax_n - Ax_h\| < \varepsilon$. Allora $\alpha\|x_n\|^2 \leq |(Ax_n, x_n)| \leq \|Ax_n\| \cdot \|x_n\| \Rightarrow \|x_n\| \leq \frac{\|Ax_n\|}{\alpha}$ e quindi la successione degli $(x_n)_n$ è di Cauchy. Sia x il limite, per continuità abbiamo subito che $y = \lim_n Ax_n = A \lim_n x_n = Ax$.
   Per provare la densità basta provare che $R(A)^\perp = \{0\}$. Se $v \in R(A)^\perp$ allora $(Au, v) = 0\ \forall u \in H$, quindi $0 = (Av, v) \geq \alpha\|v\|^2$ implica $v = 0$. Dunque A è invertibile. Inoltre abbiamo che per $x \in B_H : \|x\| \leq \frac{\|Ax\|}{\alpha} \leq \frac{\|A\|\cdot\|x\|}{\alpha} \leq \frac{\|A\|}{\alpha}$ Passando al sup otteniamo: $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|} \leq \frac{1}{\alpha}$.

2. Consideriamo $H = l^2$ e $A(x)(n) = \frac{x(n)}{n}$ per $x \in l^2$, è lineare poichè $A(\lambda x + y)(n) = \frac{\lambda x(n)+y(n)}{n} = \lambda\frac{x(n)}{n} + \frac{y(n)}{n} = \lambda A(x)(n) + A(y)(n)$. Inoltre è continuo perchè per $x \in l^2$ abbiamo $\|Ax\|_{l^2} = \Big(\sum_n (\frac{x(n)}{n})^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_n (x(n))^2\Big)^{1/2} = \|x\|_{l^2}$.
   Inoltre per $u \in l^2\backslash\{0\}$ vale: $(Au, u) = \sum_n \frac{u^2(n)}{n} > 0$ ma A non è surgettivo, infatti per $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ supponiamo esista $z \in l^2$ tale che $Az = x$, allora deve essere dalla definizione di A: $z = (1, 1, 1, ...)$ ma evidentemente $z \notin l^2$.

Esercizio III.12. Proiezione rispetto a sistemi-ortonormali finiti

Testo. Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ un spazio pre-Hilbert su $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta. Sia $A := \{u_h : 1 \leq h \leq m\}$ un sistema ortonormale finito. Allora per ogni $u \in H$:

$$\left\|u - \sum_{h=1}^{m}(u, u_h)u_h\right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{h=1}^{m}|(u, u_h)|^2 = \|u\|^2 - \left\|\sum_{h=1}^{m}(u, u_h)u_h\right\|^2.$$

Inoltre $\sum_{h=1}^m (u, u_h)u_h$ coincide con la proiezione ortogonale di u su $M := \operatorname{span}_{\mathbb{K}} A$, cioè $P_M u = \sum_{h=1}^m (u, u_h)u_h$.

Soluzione.

$$\left\|u - \sum_{h=1}^{m}(u, u_h)u_h\right\|^2 = (u, u) - 2Re(u, \sum_{h=1}^{m}(u, u_h)u_h) + (\sum_{h=1}^{m}(u, u_h)u_h, \sum_{h=1}^{m}(u, u_h)u_h) =$$

$$= \|u\|^2 - 2Re(\sum_{h=1}^{m}(u, u_h)\overline{(u, u_h)}) + \sum_{h=1}^{m}(u, u_h)\overline{(u, u_h)} = \|u\|^2 - \sum_{h=1}^{m}|(u, u_h)|^2$$

Dove ho usato che $\sum_{h=1}^m (u, u_h)\overline{(u, u_h)} = \sum_{h=1}^m |(u, u_h)|^2 \in \mathbb{R}$. Per la seconda disuaguaglianza

$$\|u\|^2 - \sum_{h=1}^{m}(u, u_h)|^2 = \|u\|^2 - \sum_{h=1}^{m}(u, u_h)|^2\|u_h\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{h=1}^{m}\|(u, u_h)|^2 u_h\|^2 = \|u\|^2 - \left\|\sum_{h=1}^{m}(u, u_h)u_h\right\|^2$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'ortonormalità degli u_h. Ora poichè M è sottospazio chiuso di H, grazie alla caratterizzazione della proiezione ortogonale su sottospazi chiusi, abbiamo che $\sum_{h=1}^m (u, u_h)u_h$ è la proiezione ortogonale di u su $M \iff (u - \sum_{h=1}^m (u, u_h)u_h, v) = 0\ \forall v \in M$. Essendo M un sottospazio di dimensione finita basta verificarlo sui vettori della base, dunque per $k = 1, \ldots, m$ fissato abbiamo che $(u - \sum_{h=1}^m (u, u_h)u_h, u_k) = (u, u_k) - \sum_{h=1}^m (u, u_h)(u_h, u_k) = (u, u_k) - (u, u_k) = 0$

Esercizio III.13. Base di Hilbert $\neq$ Base di Hamel

Testo. Sia $H = \ell^2$ e $\mathcal{B} := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Provare che:

1. $\mathcal{B}$ è una base di Hilbert per ℓ^2

2. $\mathcal{B}$ non può essere una base di Hamel per ℓ^2

Soluzione.

(i) Proviamo che $\mathcal{B}$ è un sistema ortonormale in $(\ell^2, (\cdot,\cdot)_{\ell^2})$:

- Ortogonalità: Siano $e_i, e_j \in \mathcal{B},\ e_i \neq e_j$ con $i \neq j$ allora

$$(e_i, e_j) = \sum_{n=1}^{\infty} e_i(n)e_j(n) = e_i(i)e_j(i) + e_i(j)e_j(j) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

- Normalità: Sia $e_i \in \mathcal{B}$ allora

$$\|e_i\|^2 = (e_i, e_i) = \sum_{n=1}^{\infty} e_i(n)^2 = e_i(i)^2 = 1$$

Ora proviamo che $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \mathcal{B}} = \ell^2$. Dall'esercizio I.2 sappiamo che $\mathcal{B}$ è una base (di Hamel) di $\mathbb{R}^\infty$ dunque $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \mathcal{B} = \mathbb{R}^\infty$. Ora per l'esercizio I.3 sappiamo che $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \ell^2$ e quindi la tesi.

(ii) Da un corollario del Teorema delle categorie di Baire sappiamo che uno spazio di Banach (e quindi in particolare uno spazio di Hilbert) non può avere una base di Hamel numerabile quindi $\mathcal{B}$ non può essere una base di Hamel di $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$

Esercizio III.14. Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Testo Sia $\{u_n : n = \ldots, N\}$ un insieme linearmente indipendente di $(H, (\cdot,\cdot))$ spazio pre-Hilbert. Definiamo induttivamente la sequenza $\{v_n : n = \ldots, N\}$ come segue:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ w_{n+1} &= u_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (u_{n+1}, v_j)v_j \\ v_{n+1} &= \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|} \quad \text{se} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Provare che $\{v_n : n = \ldots, N\}$ è u sistema ortonormale e

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{u_n : n = \ldots, N\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_n : n = \ldots, N\}$$

Soluzione Intanto notiamo che la definizione è ben posta poichè per lineare indipendenza degli u_n gli w_n sono tutti non nulli. Inoltre la normalità degli v_n è ovvia per definizione, proviamo dunque l'ortogonalità: è sufficiente provare che ogni v_n con $n \in \{1, \ldots, N\}$ è ortogonale con tutti i precedenti v_k. Procediamo per induzione:

$$(w_2, v_1) = (u_2 - (u_2, v_1)v_1, v_1) = (u_2 - (u_2, \frac{u_1}{\|u_1\|})\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_1}{\|u_1\|}) = \frac{1}{\|u_1\|}(u_2, u_1) - \frac{1}{\|u_1\|}(u_2, u_1)\frac{\|u_1\|^2}{\|u_1\|^2} = 0$$

da cui ovviamente $(v_2, v_1) = 0$. Sia ora $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, allora per $t < n+1$ si ha:

$$(w_{n+1}, v_t) = (u_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (u_{n+1}, v_j)v_j, v_t) = (u_{n+1}, v_t) - \sum_{j=1}^{n} (u_{n+1}, v_j)(v_j, v_t) = (u_{n+1}, v_t) - (u_{n+1}, v_t) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue direttamente dall'ipotesi induttiva, ovveo che tutt i v_i per $i \leq n$ sono ortogonali ai precedenti. Dunque ancora segue che $(v_{n+1}, v_t) = 0$.
Infine $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{u_n : n = \ldots, N\} \supset \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_n : n = \ldots, N\}$ poichè i v_n sono combinazioni lineari degli u_n. Tuttavia i v_n sono ortogonali e dunque linearmente indipendenti, perciò $N = \dim(\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{u_n : n = \ldots, N\}) = \dim(\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_n : n = \ldots, N\})$. Allora poichè sono entrambi spazi vettoriali finiti dimensionali l'uno contenuto nell'altro allora devono necessariamente coincidere e quindi la tesi.

Esercizio III.15. Base di Hilbert numerabile $\Rightarrow$ separabilità

Testo Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{B}$ una base di Hilbert numerabile di H. Provare che $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ rispettivamente, è un insieme numerabile e denso in H. Cioè H è separabile.

Soluzione Assumiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
Sia $M := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ e sappiamo che $H = \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}}$. Ovviamente $M \subset H$ e quindi $\overline{M} \subset H$; ora sia $v \in H \setminus M$ (se $v \in M$ è banale) dunque per il Teorema di rappresentazione rispetto a una base di Hilbert numerabile possiamo scrivere

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_n \text{ con } (v, e_n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora dall'esercizio III.12 abiamo $\|v\| = \| \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_n \|$ e questa serie converge dunque $\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\| \sum_{n=\hat{n}}^{\infty} (v, e_n) e_n \| < \frac{\varepsilon}{2}$
Ora poichè $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ definiamo $q_i \in \mathbb{Q}$ tali che $|q_i - (v, e_i)| < \frac{\varepsilon}{2\hat{n}}$, a questo punto sia $m := \sum_{n=1}^{\hat{n}} q_i e_i \in M$, allora:

$$\begin{aligned}
\|v - m\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_i) e_i - \sum_{n=1}^{\hat{n}} q_i e_i \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\hat{n}} ((v, e_i) e_i - q_i e_i) + \sum_{n=\hat{n}+1}^{\infty} (v, e_i) e_i \right\| \leq \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{\hat{n}} ((v, e_i) e_i - q_i e_i) \right\| + \left\| \sum_{n=\hat{n}+1}^{\infty} (v, e_i) e_i \right\| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\hat{n}} \|((v, e_i) - q_i) e_i\| + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n=1}^{\hat{n}} |(v, e_i) - q_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\hat{n}} \hat{n} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Dunque $M = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ è denso in H. Il fatto che M sia numerabile segue da alcuni risultati di aritmetica cardinale osservando che $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{B}$ sono numerabili.
Ora assumiamo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:
Similmente a caso reale definiamo $M := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ e mostriamo che è denso in H. Scriviamo $Re(H) := \{Re(v) : v \in H\}$ e $Im(H) := \{Im(v) : v \in H\}$, cioè $H = Re(H) + iIm(H)$. A questo punto osserviamo che $Re(H)$ e $Im(H)$ sono spazi vettoriali reali e come nel caso reale si dimostra che $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ è denso in $Re(H)$ e $Im(H)$ e quindi $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ è denso in H. Per la numerabilità il ragionamento è identico al caso reale.

Esercizio III.16. Spazi di Hilbert non separabili

Testo. Sia $H = \ell^2(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}, \#)$, dove $\#$ denota la misura del contegio su $\mathbb{R}$, equipaggiato col prodotto scalare

$$(f, g)_{\ell^2(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) d\#(t) \text{ se } f, g \in \ell^2(\mathbb{R})$$

Per un dato $s \in \mathbb{R}$, sia $e_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definito come

$$e_s(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t = s \\ 0 & \text{se } t \neq s \end{cases}$$

e denotiamo $\mathcal{B} := \{e_s : s \in \mathbb{R}\}$. Provare che:

(i) H è uno spazio di Hilbert non separabile;

(ii) $\mathcal{B}$ è una base di Hilbert non numerabile di H.

Soluzione.

(i) Che $(\ell^2(\mathbb{R}), (\cdot, \cdot)_{\ell^2(\mathbb{R})})$ sia uno spazio di Hilbert è ovvio dal Teorema di Fischer-Riesz. Mostriamo che è non seprabile esibendo una famiglia non numerabile di aperti disgiunti:
Sia $\{U_s : s \in \mathbb{R}\}$ dove $U_s := B(e_s, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Osserviamo che per ogni $u \neq v$, $\|e_u - e_v\| = \sqrt{2}$ infatti

$$\|e_u - e_v\|^2 = (e_u - e_v, e_u - e_v)_{\ell^2(\mathbb{R})} = (e_u, e_u)_{\ell^2(\mathbb{R})} - 2(e_u, e_v)_{\ell^2(\mathbb{R})} + (e_v, e_v)_{\ell^2(\mathbb{R})}$$

Ora osservando che

$$\begin{aligned}
(e_u, e_u)_{\ell^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} e_u(t)^2 d\#(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{\{u\}}(t)^2 d\#(t) \\
&= \int_{\{u\}} d\#(t) \\
&= \#\{u\} = 1 \\
(e_v, e_v)_{\ell^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} e_v(t)^2 d\#(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{\{v\}}(t)^2 d\#(t) \\
&= \int_{\{v\}} d\#(t) \\
&= \#\{v\} = 1 \\
(e_u, e_v)_{\ell^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} e_u(t) e_v(t) d\#(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{\{u\}} 1_{\{v\}}(t) d\#(t) \\
&= \int_{\{v\}} 0 \ d\#(t) = 0
\end{aligned}$$

Segue che $\|e_u - e_v\| = \sqrt{2}$.
Supponiamo ora per assurdo che $U_u \cap U_v \neq \emptyset$ per qualche $u, v \in \mathbb{R}$, $u \neq v$, allora esiste $f \in U_u \cap U_v$. Dunque avremmo

$$\sqrt{2} = \|e_u - e_v\| \leq \|e_u - f\| + \|f - e_v\| < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

assurdo.

(ii) Che $\mathcal{B}$ sia un sistema ortonormale l'abbiamo dimostrato nel punto (i), mostriamo quindi che $\overline{span_{\mathbb{R}}\mathcal{B}} = H$. Per l'esercizio III.9 (ii) è sufficiente mostrare che $(span_{\mathbb{R}}\mathcal{B})^{\perp} = \{0\}$. Sia $x \in (span_{\mathbb{R}}\mathcal{B})^{\perp}$, mostriamo che se $(x, y)_{\ell^2(\mathbb{R})} = 0$ per ogni $y \in span_{\mathbb{R}}\mathcal{B}$ allora $x = 0$. In particolare quindi vale $(x, e_s)_{\ell^2(\mathbb{R})} = 0 \ \forall s \in \mathbb{R}$. Dunque

$$\begin{aligned}
0 = (x, e_s)_{\ell^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} x(t) e_s(t) d\#(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t) 1_{\{s\}}(t) d\#(t) \\
&= \int_{\{s\}} x(t) d\#(t) = x(s)
\end{aligned}$$

Poichè questo vale $\forall s \in \mathbb{R}$ allora $x = 0$ e dunque la tesi.

Esercizio III.17. Sistema ortogonale di $L^2(-\pi, \pi)$

Testo. Sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} : n = 1, 2, \dots \right\} \cup \left\{ \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} : n = 1, 2, \dots \right\}$$

mostrare che $\mathcal{B}$ è un sistema ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$.

Soluzione. Usando le formule di Werner valgono:

1. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = 1$;
2. $\left\langle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(nx)}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nx)+1}{2\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nx)}{2\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = 0 + 1 = 1$;
3. $\left\langle \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(2nx)+1}{2\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(2nx)}{2\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = 0 + 1 = 1$;

4. $\left\langle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(mx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)\,\text{sen}(mx)}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}((n+m)x)+\text{sen}((n-m)x)}{2\pi} dx = 0;$

5. $\left\langle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(mx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)\cos(mx)}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)}{2\pi} dx = 0;$

6. $\left\langle \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(mx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx)}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)}{2\pi} dx = 0;$

con $m, n \in \mathbb{N} : m \neq n$.

IV. Introduzione alle Topologie Deboli

Esercizio IV.1. Convergenza debole in l^2

Testo. Siano $(x_h)_h$ e x appartenenti a B_{ℓ^2}. Dimostrare che sono equivalenti:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{h\to\infty} x_h(n) = x(n)$ in $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{h\to\infty}\langle f, x_h\rangle_{\ell^2} = \langle f, x\rangle_{\ell^2} \quad \forall f \in \ell^2$.

Soluzione. Procediamo con ordine:
1. $\Rightarrow$ 2. Sia $f \in \mathbb{R}^\infty$, sia $n_f \in \mathbb{N}$ l'indice per cui $f(i) = f_i = 0$ $\forall i > n_f$. Allora $\lim_{h\to\infty}\langle f, x_h\rangle = \lim_{h\to\infty}\sum_{i=1}^{n_f} f(i)x_h(i) = \sum_{i=1}^{n_f} f(i)\lim_{h\to\infty} x_h(i) = \sum_{i=1}^{n_f} f(i)x(i) = \langle f, x\rangle$. Per esercizio 1.3 abbiamo che $\mathbb{R}^\infty$ è denso in l^2, quindi se $f \in l^2 \setminus \mathbb{R}^\infty$ allora $\exists (f_k)_k \subset \mathbb{R}^\infty$ tale che $f_k \to f$ in l^2. Allora

$$\begin{aligned}|(f, x_h) - (f, x)| &\le |(f, x_h) - (f_k, x_h)| + |(f_k, x_h) - (f_k, x)| + |(f_k, x) - (f, x)| \\ &\le \|f - f_k\| \cdot \|x_h\| + |(f_k, x_h) - (f_k, x)| + \|f_k - f\| \cdot \|x\| \\ &\le 2\|f - f_k\| + |(f_k, x_h) - (f_k, x)|\end{aligned}$$

Poichè per ipotesi abbiamo che $\|x_h\|, \|x\| \le 1$. Passando al limsup su $h \to \infty$ a sinistra e al limite a destra, otteniamo $\limsup_{h\to\infty}|(f, x_h) - (f, x)| \le \lim_{h\to\infty}(2\|f - f_k\| + |(f_k, x_h) - (f_k, x_h)|) = 2\|f - f_k\|$, passando al limite su $k \to \infty$, concludiamo.
2. $\Rightarrow$ 1. Fissato $n \in \mathbb{N}$, scegliamo $f = e_n$ (solito vettore nullo tranne nella posizione n dove vale 1) e otteniamo $x(n) = \langle e_n, x\rangle = \lim_{h\to\infty}\langle e_n, x_h\rangle = \lim_{h\to\infty} x_h(n)$.

Esercizio IV.2. Convergenza debole per successioni con i funzionali

Testo. Dato $(f_h)_h \subset E'$, $f \in E$, $(x_h)_h \subset E$ e $x \in E$, dimostrare che, se $f_h \to f$ e $x_h \rightharpoonup x$, allora

$$\langle f_h, x_h\rangle_{E'\times E} \to \langle f, x\rangle_{E'\times E}.$$

Soluzione. Basta osservare che:

$$\begin{aligned}&|\langle f_h, x_h\rangle_{E'\times E} - \langle f, x\rangle_{E'\times E}| \le |\langle f_h, x_h\rangle_{E'\times E} - \langle f, x_h\rangle_{E'\times E}| + |\langle f, x_h\rangle_{E'\times E} - \langle f, x\rangle_{E'\times E}| \\ &= |\langle f_h - f, x_h\rangle_{E'\times E}| + |\langle f, x - x_h\rangle_{E'\times E}| \\ &\le \|f_h - f\|_{E'}\|x_h\|_E + |\langle f, x - x_h\rangle_{E'\times E}| \quad (\star)\end{aligned}$$

Osserviamo ora che grazie all'ipotesi $x_h \rightharpoonup x$, la successione $(\|x_h\|_E)_h$ è limitata, diciamo $\|x_h\| \le M$ $\forall h$ per qualche $M \in \mathbb{R}$, grazie a Teorema 4.9.
Otteniamo quindi la nuova maggiorazione: $(\star) \le \|f_h - f\|_{E'}M + |\langle f, x - x_h\rangle_{E'\times E}|$.
Infine osserviamo che entrambi i termini tendono separatamente a 0, il primo per l'ipotesi $f_h \to f$, mentre il secondo per la continuità del modulo e per l'ipotesi $x_h \rightharpoonup x$. La tesi segue.

Esercizio IV.3. Convergenza debole in spazi di Hilbert

Testo. Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert e siano $(x_h)_h \subset H$, $x \in H$. Dimostrare che:

1. $x_h \rightharpoonup x \iff (x_h, y) \to (x, y)$ per ogni $y \in H$;
2. $x_h \to x \iff x_h \rightharpoonup x$ e $\|x_h\| \to \|x\|$.

Soluzione.

1. Per definizione di convergenza debole, vale che $\forall f \in H',\ f(x_h) \to f(x)$. Grazie al Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet abbiamo una bigezione naturale $T : H \to H'$. Sia $y_f \in H$ tale che $y_f = T^{-1}(f)$, dunque vale $f(x_h) = T(y_f)(x_h) = (x_h, y_f)\ \forall h \in \mathbb{N}$, abbiamo allora che $f(x_h) \to f(x) = T^{-1}(y_f, x) = (x, y_f)$. Osserviamo infine che tale ragionamento vale per ogni $y \in H$, poichè T è una bigezione.
   Viceversa, se vale $(x_h, y) \to (x, y)$ per ogni $y \in H$ è sufficiente porre $f_y = T(y)$ e concludere analogamente a sopra, poichè T è una bigezione.

2. Supponiamo che $x_h \to x$. Sia $y \in H$, allora $\|(x_h, y) - (x, y)\| = \|(x_h - x, y)\| \leq \|x_h - x\| \cdot \|y\| \to 0$ per l'ipotesi di convergenza forte, dunque $(x_h, y) \to (x, y)\ \forall y \in H$ e dunque per quanto provato in 1., vale anche la convergenza debole. Inoltre vale: $|\|x_h\| - \|x\|| \leq |\|x_h - x\|| \to 0$, e dunque vale anche la convergenza in norma.
   Viceversa supponiamo valgano la convergenza debole e la convergenza in norma. Troviamo allora che:

$$
\begin{aligned}
\|x_h - x\|^2 = (x_h - x, x_h - x) &= \|x_h\|^2 - 2Re((x_h, x)) + \|x\|^2 \\
&\to \|x\|^2 - 2Re((x, x)) + \|x\|^2 = 2\|x\|^2 - 2Re(\|x\|^2) = 0
\end{aligned}
$$

   Questo conclude la dimostrazione.

Esercizio IV.4. Convergenza debole in $(-\pi, \pi)$ con il lemma di Riemann-Lebesgue

Testo. Sia $H = L^2((-\pi, \pi))$, $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2}$ e sia $f_h(x) := \operatorname{sen}(hx)$ per $x \in (-\pi, \pi)$. Dimostrare che:

1. $f_h \rightharpoonup 0$;
2. $(f_h)_h$ non converge (fortemente) a 0 in $L^2((-\pi, \pi))$.

Soluzione.

1. Sia $g \in L^2(-\pi, \pi)$, si ha che la misura di $[-\pi, \pi]$ è finita, dunque $g \in L^2(-\pi, \pi) \subset L^1(-\pi, \pi)$, vale dunque il lemma di Riemann-Lebesgue per cui:

$$
\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \lim_{n \to \infty} (g, f_h)_{L^2} = 0
$$

   Ho scelto $g \in L^2(-\pi, \pi)$ perchè per il Teorema di rappresentazione di Riesz per spazi L^p, si ha che $(L^2)' = L^2$ e il prodotto scalare è equivalente alla dualità. Ho dunque provato che $(g, f_h) \to (g, 0) = 0\ \forall g \in L^2(-\pi, \pi)$, cioè la convergenza debole.

2. Per assurdo, otteniamo che:

$$
\begin{aligned}
\|f_h - 0\|_{L^2}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f_h(x) - 0)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(hx) dx \\
&= -\frac{1}{h} \operatorname{sen}(hx) \cos(hx)|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(hx) dx = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(hx) dx \\
&= 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(hx) dx
\end{aligned}
$$

   Dunque abbiamo così provato che: $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(hx) dx = \pi$, cioè $\|f_h - 0\|_{L^2} = \sqrt{\pi} \nrightarrow 0$, assurdo per quanto provato in 4.3,(ii).

Esercizio IV.5. Convergenza debole su $C^0([0, 1])$

Testo. Sia $E = C^0([0, 1])$, $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_\infty$, $(f_h)_h \subset E$, $f \in E$. Dimostrare che:

1. Se $f_h \rightharpoonup f$ in E, allora:
   (a) Esiste $M > 0$ tale che $|f_h(x)| \leq M$ per ogni $x \in [0, 1]$, $h \in \mathbb{N}$;
   (b) $f_h(x) \to f(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$.
2. Sia $f_h(x) := x^h$, $x \in [0, 1]$. Allora $(f_h)_h$ non converge debolmente in E.
3. $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ non è riflessivo.

Soluzione.

1. Per Teorema 4.9 (ii), poichè $f_h \rightharpoonup f$ si ha che la successione $(\|f_h\|)_h$ è limitata, quindi $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $\sup_E |f_h(x)| = \|f_h\| \leq M \ \forall h \in \mathbb{N}$. Poichè $\forall x \in [0,1],\ h \in \mathbb{N},\ |f_h(x)| \leq \sup_E |f_h(x)| \leq M$, abbiamo così provato (a).
Sia $x \in [0,1]$. Definiamo il funzionale $V_x : E \to \mathbb{R} : V_x(f) = f(x)$ per ogni $f \in E$ (funzionale di valutazione in x). É facile verificare che $V_x \in E'$ (cioè lineare e continua), allora per definizione di convergenza debole abbiamo che $V_x(f_h) \to V_x(f)$, ovvero $f_h(x) \to f(x)$. Abbiamo così provato (b).

2. Per assurdo $(f_h)_h$ converge debolmente in $[0,1]$ a una qualche funzione $f \in E$. Per quanto provato in 1.(b), tale funzione f deve essere anche funzione limite puntuale. Poichè il limite puntuale ovviamente non è una funzione continua, otteniamo l'assurdo e concludiamo.

3. Per assurdo supponiamo che sia riflessivo. Osserviamo che se chiamiamo nuovamente $(f_h)_h$ la successione definita in 2., allora $\forall h \in \mathbb{N},\ \|f_h\| = \sup_E x^h = 1$ e quindi $(f_h)_h \subset B_E$. Per il Teorema 4.11 allora, si avrebbe che $(B_E, \sigma(E, E'))$ è sequenzialmente compatto, dunque $(f_h)_h$ ammette una sottosuccessione che converge debolmente. Come prima, tale limite deve coincidere con il limite puntuale della funzione, ma abbiamo già provato che $f \notin E$.

Esercizio IV.6. Convergenza debole su $C^1([0,1])$

Testo. Sia $E = C^1([0,1]),\ \|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{C^1},\ (f_h)_h \subset E,\ f \in E$. Dimostrare che:

1. Se $f_h \rightharpoonup f$ in E, allora $f_h(x) \to f(x)$ e $f_h'(x) \to f'(x)$ per ogni $x \in [0,1]$;
2. La successione $f_h(x) := \frac{x^h}{h}$, $x \in [0,1]$, non converge debolmente in E;
3. $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1})$ non è riflessivo.

Soluzione. Esercizio praticamente identico al precedente.

1. Esattamente come nel precedente, defindendo gli operatori lineari e continui: $V_x : E \to \mathbb{R} :\ V_x(f) = f(x)$ e $D_x : E \to \mathbb{R} :\ D_x(f) = f'(x)$. Sono ovviamente lineari e continui per la compattezza dell'intervallo $[0,1]$, concludiamo come nell'esercizio precedente.

2. Se per assurdo fosse vero, allora $f_h(x) \to f(x) \equiv 0\ \forall x \in [0,1]$ ma $f_h'(x) = x^{h-1} \to 0$ *se* $x \in [0,1),\ 1$ *se* $x = 1$, dunque abbiamo l'assurdo perchè i limiti delle derivate non coincidono, assurdo per quanto provato nel primo punto.

3. Come prima, per assurdo. Osserviamo però che $\|f_h\|_E = \sup_E |f_h| + \sup_E |f_h'| = \frac{1}{h} + 1 \leq 2\ \forall h \in \mathbb{N}$. Basta allora definire la nuova successione $(g_h)_h$ come $\forall h \in \mathbb{N}, g_h = \frac{f_h}{2}$ così da avere $(g_h)_h \subset B_E$ e concludere come nell'esercizio precedente.

Esercizio IV.7. Non esistenza di una sottosuccessione convergente debolmente

Testo. Sia $f_h : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ definita da:

$$f_h(x) = h \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{h}, \quad f_h(x) = 0 \text{ altrimenti.}$$

Dimostrare che non esiste una sottosuccessione $(f_{h_k})_k$ e una funzione $f \in L^1((0,1))$ tali che $f_{h_k} \rightharpoonup f$ in $L^1((0,1))$.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che esista $f \in L^1((0,1))$ e una sottosuccessione tale che $f_{h_k} \rightharpoonup f$. Questo è equivalente, in virtù del Teorema di rappresentazione di Riesz per spazi L^p, che per ogni $g \in L^\infty((0,1))$ valga $\int_0^1 f_{h_k}(x)g(x)dx \to \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Definiamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ la successione di funzioni $(g_i)_i \subset L^\infty((0,1))$ come $g_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{i} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$. É immediato verificare che la successione sia contenuta in $L^\infty((0,1))$. Vale dunque per ogni $i \in \mathbb{N}$ che $\int_0^1 f_{h_k}(x)g_i(x)dx = \int_0^{1/h_k} h_k g_i(x)dx$. Quando però $h_k \to +\infty$ per $k \to \infty$ allora definitivamente vale: $\frac{1}{h_k} \leq \frac{1}{i}$ (ricordiamo che l'indice i è fissato) e quindi in tal caso troviamo che: $\int_0^{1/h_k} h_k g_i(x)dx = h_k \int_0^{1/h_k} 1dx = 1$, abbiamo cioè provato che $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_{h_k}(x)g_i(x)dx = 1,\ \forall i \in \mathbb{N}$.

Ora però calcoliamo il secondo termine. Abbiamo che, per ogni $f \in L^1((0,1))$ fissata, $\int_0^1 f(x)g_i(x)dx = \int_0^{1/i} f(x)dx \to 0$. Otteniamo quindi una contraddizione, poiché:

$$1 = \lim_{i\to\infty}(1) = \lim_{i\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_{h_k}(x)g_i(x)dx\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)g_i(x)\right) = 0$$

Esercizio IV.8. Convergenza debole su $[0, 2\pi]$

ß

Testo. Siano $f_h, f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ($h = 1, 2, \ldots$) le funzioni definite da $f_h(x) = 1 + \operatorname{sen}(hx)$ e $f(x) = 1$. Dimostrare che:

1. $\|f_h\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$ e $f_h \rightharpoonup f$ in $[0, 2\pi]$;
2. $(f_h)_h$ non converge (fortemente) a f in $L^1((0, 2\pi))$.

Soluzione.

1. Dalle definizioni troviamo subito che $\|f_h\| = \int_0^{2\pi} |1 + \operatorname{sen}(hx)|dx = 2\pi + \frac{\operatorname{sen}^2(\pi h)}{h} \to 2\pi$ e, d'altra parte, $\|f\| = \int_0^{2\pi} |1|dx = 2\pi$ dunque abbiamo la convergenza in norma.
   Sia ora $g \in L^\infty(0, 2\pi)$ una funzione, troviamo che:
   $$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f_h(x)g(x)dx = \int_0^{2\pi}(1 + \operatorname{sen}(hx))g(x)dx = \int_0^{2\pi} 1\cdot g(x)dx + \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(hx)g(x)dx\\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(hx)g(x)dx\end{aligned}$$
   Dunque abbiamo che $(f_h)_h$ converge debolmente se e solo se $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(hx)g(x)dx \to 0$, che è il coefficiente b_h-esimo della serie di Fourier di $\sqrt{\pi}g$. Poichè $[0, 1]$ ha misura finita, segue che $g \in L^\infty(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi) \Rightarrow \sqrt{\pi}g \in L^1(0, 2\pi)$, si conclude per il lemma di Riemann-Lebesgue.
2. Per assurdo, troviamo:
   $$\begin{aligned}\|f_h - f\| &= \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(hx)|dx = \int_0^{2h\pi}\frac{|\operatorname{sen}(y)|}{h}dy = h\int_0^{2\pi}\frac{|\operatorname{sen}(y)|}{h}dy\\ &= \int_0^{2\pi}|\operatorname{sen}(y)|dy = \int_0^{\pi}\operatorname{sen}(y)dy - \int_\pi^{2\pi}\operatorname{sen}(y)dy = 4\end{aligned}$$
   dove la terza uguaglianza vale perchè $h \in \mathbb{N}$ e l'integranda è periodica modulo 2π. Poichè allora $\lim_{h\to\infty}\|f_h - f\| = 4 \neq 0$, non può valere la convergenza forte.