Esercitazione 18 Marzo 2020-Parte 2

Variabile aleatoria

Dato uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ una variabile aleatoria (v.a.) su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in E è una funzione $X: \Omega \to E$ $\mathcal{F}$-misurabile, tale cioè che $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ $\forall A \in \mathcal{E}$.

X è una variabile aleatoria reale se $E = \mathbb{R}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (σ-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}$) e in questo caso la misurabilità equivale ad avere

$$(X \leq t) = X^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

OSSERVAZIONE:
Se $X: \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione qualsiasi, $H \subseteq \mathbb{R}$ e $(H_i)_{i \in I}$ è una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora si ha

$$X^{-1}(H^c) = (X^{-1}(H))^c, \quad X^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} H_i\Big) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(H_i)$$

come conseguenza, si ha che

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{X^{-1}(H) \mid H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

è una σ-algebra chiamata σ-algebra generata da X.

NOTA: X è $\mathcal{F}$-misurabile se e solo se $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$.

Legge, funzione di ripartizione e densità di una v.a.

Data una v.a. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la legge (o distribuzione) di X è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definita da

↳ dim per esercizio

$$\mu_X(H) = \mathbb{P}(X \in H), \quad H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

dove $(X \in H) = X^{-1}(H) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in H\}$.

Per indicare che X ha distribuzione μ_X si scrive $X \sim \mu_X$.

La funzione definita da:

$$F_X(t) = \mu_X((-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t), \quad t \in \mathbb{R}$$

è detta funzione di ripartizione di X.

μ_X è una distribuzione assolutamente continua (AC) rispetto alla misura di Lebesgue $\iff F_X$ è una funzione reale assolutamente continua.

Allora F_X soddisfa il teorema fondamentale del calcolo: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$. In tal caso μ_X ha densità f_X e vale

$$\mathbb{P}(X \in H) = \int_H f_X(x)\,dx, \quad H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Se $\mu_X \in AC$ con densità f_X diremo che X è una v.a. (assol.) continua con densità f_X.

Fare per esercizio

Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sia $A \in \mathcal{A}$.
Definiamo $X = \mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$. ($\mathbb{1}_A$ funzione indicatrice)
Mostrare che X è una variabile aleatoria.

Esercizio 1

Sia $\Omega = [0,1)$ munito della σ-algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ dei Boreliani di $[0\,1)$ e della misura $\mathbb{P} = \lambda$ di Lebesgue.
Gli eventi $A = [0, \frac{2}{3}]$ e $B = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ sono indipendenti?

Soluzione:

$$\mathbb{P}(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(x)\,\lambda(dx) = \int_0^{\frac{2}{3}} \lambda(dx) = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(B) = \int_\Omega \mathbb{1}_B(x)\,\lambda(dx) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \lambda(dx) = \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$: i due eventi sono indipendenti

Esercizio 2

Un amico lancia (una moneta di parità p) per due volte. Qual è la probabilità che al primo lancio fosse uscita Testa sapendo che Testa è uscita almeno una volta?

SOLUZIONE

parità p: probabilità che esca testa

X: variabile aleatoria che conta il numero delle teste nei due lanci

T_1: evento che sia uscita testa al 1° lancio

Allora

$$\mathbb{P}(T_1 \mid X \geq 1) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{\mathbb{P}(X \geq 1 \mid T_1)\,\mathbb{P}(T_1)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = \frac{p}{p^2 + 2p(1-p)} = \frac{1}{2-p}$$

$(X \geq 1)$ esprime l'evento $\{(T,T), (T,C), (C,T)\}$

Esercizio 3

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci di una moneta di parità p necessari per ottenere per la prima volta Testa (compreso il lancio in cui è uscita la prima volta). Qual è la probabilità che X sia pari?

SOLUZIONE

$$\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} p \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$X \sim \mathrm{geom}(p)$$

La probabilità di terminare in un lancio pari è quindi

$$\mathbb{P}(X \text{ pari}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{2n-1} =$$

$$= p(1-p) \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{2n-2} = p(1-p) \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)^2]^{n-1} =$$

$$= p(1-p) \sum_{n=0}^{\infty} [(1-p)^2]^n = p(1-p) \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

Esercizio 4

Sia $\Omega = [0,1)$ munito della σ-algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ dei boreliani di $[0,1)$ e della misura $\mathbb{P} = \lambda$ di Lebesgue.

Si consideri la variabile aleatoria $X(\omega) = \omega$.

Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = -\log(1-x)$.

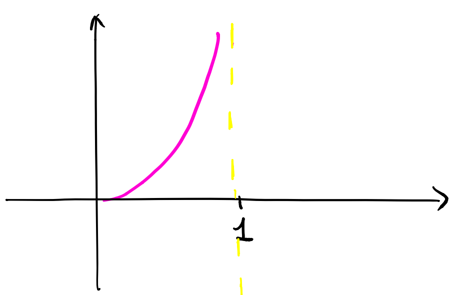
Si definisce la v.a. $Y = g(X)$. Determinare la funzione di ripartizione di Y e mostrare che Y è una v.a continua; determinare infine la funzione di densità di Y.

SOLUZIONE

Riconosciamo che $X(\omega) = \omega$ è una v.a continua uniforme a valori in $[0,1)$.

$Y = g(X)$

$g(x) = -\log(1-x)$



Teorema:
Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. e sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Allora $Y = g(X): \Omega \to \mathbb{R}$ è una v.a.

Funzione di ripartizione di Y:

Sia $t \geq 0$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \lambda(\{\omega : 0 \leq Y(\omega) \leq t\}) = \lambda(\{\omega : 0 \leq -\log(1-\omega) \leq t\}) =$$

$$= \lambda(\{\omega : 1 \geq 1-\omega \geq e^{-t}\}) = \lambda(\{\omega : 0 \leq \omega \leq 1-e^{-t}\}) = 1 - e^{-t}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1-e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \rightarrow$$ funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale $\mathcal{E}(1)$
(Y v.a. continua)

Funzione di densità:

$$F'_Y(t) = f_Y(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$