Spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- Ω spazio campionario (i possibili esiti)
- $\mathcal{F}$ σ-algebra

una σ-algebra $\mathcal{F}$ su Ω è una famiglia di sottoinsiemi di Ω che soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

- $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$

cioè

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tale che

1) $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (non negatività)
2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione)
3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j \Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-additività})$$

Assiomi di Kolmogorov

Def: Data una famiglia $\mathcal{H}$ di sottoinsiemi di Ω,

$$\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ è una } \sigma\text{-algebra e } \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}\}$$

Essa è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{H}$ ed è pertanto chiamata

σ-algebra generata da $\mathcal{H}$.

Esercizio 1

$\mathcal{F}$ σ-algebra su $\Omega = [0,1]$ tale che $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{F}$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$

a) Mostrare che $\left\{\frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{F}$

Si ha che $\left\{\frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] \in \mathcal{F}$ perché intersezione di due elementi di $\mathcal{F}$

b) Mostrare che $\left(\frac{1}{n}, 1\right] \in \mathcal{F}$

Si ha che $\left[\frac{1}{n}, 1\right] = \bigcup_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \in \mathcal{F}$ perché unione di elementi di $\mathcal{F}$. Quindi, si ha

$$\left(\frac{1}{n}, 1\right] = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]^c \in \mathcal{F}$$

chiusura di $\mathcal{F}$ rispetto a intersezione e passaggio al complementare

c) Mostrare che $\{0\} \in \mathcal{F}$

Notiamo che $\{0\} = (0,1]^c \stackrel{*}{=} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right]\right)^c \in \mathcal{F}$

Esercizio 2

Consideriamo due urne U_1 e U_2.

U_1 contiene 2 biglie nere e una biglia rossa

U_2 contiene 1 biglia bianca e due biglie rosse

Esperimento: estraggo una biglia da ogni urna

- Descrivere uno spazio campionario per questo esperimento
- Definire un'algebra adatta a studiare gli eventi descritti nei punti successivi
- $\mathbb{P}(\{\text{"la prima biglia è nera"}\})$
- $\mathbb{P}(\{\text{"le biglie sono dello stesso colore"}\})$
- $\mathbb{P}(\{\text{"le biglie sono di colore diverso"}\})$

SOLUZIONE:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{N, R\} \times \{B, R\} = $$
$$= \{(N,B), (N,R), (R,B), (R,R)\}$$

$$\mathcal{F} = \sigma\big(\{(N,R), (N,B)\}, \{(R,R)\}, \{(N,B), (N,R), (R,B)\}\big)$$
$$= \{\emptyset, \Omega, \{(R,R)\}, \{(N,B), (N,R), (R,B)\}, \{(N,R), (N,B)\}, \{(R,R), (R,B)\}, \{(R,B)\}, \{(R,R), (N,R), (N,B)\}\}$$

(In alternativa $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$)

$$\mathbb{P}(\{(R,R)\}) = \mathbb{P}_1(\{R\}) \cdot \mathbb{P}_2(\{R\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}(\{(R,B)\}) = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(\{(N,R)\}) = \frac{4}{9}$$

$$\mathbb{P}(\{(N,B)\}) = \frac{2}{9}$$

Posso calcolarmi quanto richiesto (fare!)