

## DOMANDE ORALE PROBABILITÀ

- Che cos'è una probabilità.
  - Misura.
  - Dominio e codominio.
  - algebra/sigma algebra contenuta in parti dello spazio campionario.
  - Proprietà:
    - $P(\Omega) = 1$
    - Monotonia.
    - Complementarietà
    - Eventi disgiunti.
- Definizione:
  - Variabile aleatoria.
  - Variabile aleatoria continua.
  - Variabile aleatoria assolutamente continua.
- P è unica? No, ci sono infinite funzioni che soddisfano le props. Ad esempio la probabilità condizionata.
- Probabilità condizionata:
  - Definizione.
  - Perché  $P_A(B) \in [0,1]$ ?
  - Interpretazione grafica della probabilità condizionata.
- Indipendenza variabili aleatorie.
- Se  $X, Y$  sono indipendenti allora mostrare a quanto equivale
$$P(X + Y \leq 1)$$
- Definizione e proprietà media.
- Momenti:
  - Media per una variabile aleatoria discreta.
  - Media per una variabile aleatoria continua.
  - Varianza per una variabile aleatoria discreta.
  - Varianza per una variabile aleatoria continua.
  - Covarianza.
  - Media di  $E(X)$  e  $E(g(X))$  con  $X$  discreta.
  - Come si calcolano i momenti k-esimi di una variabile aleatoria?
  - $X^k = m$ , per  $k$  pari ci possano essere "sovrapposizioni",  $E(X^k)$ =sommatoria.
  - Distinguere la parte positiva da quella negativa, evidenziare come almeno una delle due debba essere finita, in particolare distinguere  $k$  pari e dispari.
- Successione di variabili aleatorie  $X_i$ ;  $S_n/n$  a cosa converge? (chiedere  $X_i$  iid e poi LGN)
- Media della variabile somma ( $X, Y$  indep e non. se non si usa la forma integrale)
- media e varianza di  $S_n = \sum(X_i)$  con  $X_i$  i. i. d. e di  $\frac{S_n}{n}$ .
- Dimostrare LGN dal punto precedente e  $E(X_i)$  tende a  $\mu$ , analogamente le varianze i-esime tendono a sigma (usare Chebychev e poi risolvere il limite (le  $\sigma_i$  tendono a  $\sigma$ , quindi la sommatoria delle  $\sigma_i^2$  è approssimabile a somma dei sigma quadro, quindi cresce come  $n \cdot \sigma$  e dato che al denominatore ho  $n^2$  il limite tende a 0)
- Leggi gaussiane  $N(\mu, \sigma^2)$ :
  - Distribuzione gaussiana
  - Mostrare che  $\mu$  è la media.
  - Mostrare che  $\sigma^2$  è la varianza.
  - Cosa succede se prendo una gaussiana  $X$  e faccio  $aX + b$ ? È ancora una gaussiana: come si dimostra?
  - Matrice di covarianza di un vettore aleatorio: come è definita e proprietà (simmetrica e definita positiva)

- Poisson:
  - Cos'è una distribuzione di Poisson?
$$P(X = k) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}$$
  - Perché la somma dei  $P(X=k)$  vale 1?
  - Media della variabile di Poisson
  - In una Poisson, probabilità che  $X = 2$  dato che  $X \leq 2$  ?
  - Approssimazione di una binomiale ad una Poisson.
- probabilità che lanciando 300 volte un d6 equilibrato ottenga meno di 1000 (approssimo  $S_n^*$  con una gaussiana)
- Funzione generatrice dei momenti
  - Definizione
  - Proprietà.
  - Quanto vale la funzione generatrice dei momenti di  $N(0, 1)$ ? E in generale di una qualsiasi gaussiana.
- Funzione di ripartizione
  - Definizione.
  - Proprietà.
- Teorema:
  - centrale del limite.
  - Grandi numeri
  - Bayes
- formula delle probabilità totali
- Entropia:
  - Definizione.
- posso prendere una distrib uniforme sui naturali? (no, se ogni elemento ha  $p=0$  allora la somma delle prob è 0. se  $p=\epsilon > 0$  allora la somma delle prob è infinito)

## Statistica

- Statistica in generale.
- Che cos'è uno stimatore (funzione del campione a cui attribuisco informazioni sul parametro).
- Stimatore di massima verosimiglianza.
- Definizione media e varianza campionaria
- Modo per ricondurre le variabili campionarie ad una  $\chi^2$ .
- Stimatore di massima verosimiglianza
- Rapporto del test di massima verosimiglianza.
- campionamento su una popolazione Poisson.
- MLE per:
  - Lambda
  - $f(x | \theta) = e^{-(x-\theta)} 1_{\{x \geq \theta\}}$  (in questo caso, si arriva alla fine e si nota come non ci sono punti di massimo. in particolare il prof fa osservare come  $L$  sia nulla per  $\theta$  più grande del minimo degli  $x_i$  e crescente prima. questo e considerando il disegno a spanne  $L$  fanno dedurre che il MLE sia  $x_i$ )
  - campione ottenuto da una popolazione con distribuzione esponenziale.
- Test di ipotesi per le gaussiane
- Errori di prima e seconda specie. quale errore è più gestibile per come abbiamo costruito i test.
- mostrare un intervallo di confidenza per lambda (NB qualsiasi)
- mostrare un intervallo di confidenza per lambda a significatività alpha
- Cosa vuol dire fare un test di ipotesi.
- Come decidiamo se accettiamo o no  $H_0$
- Distribuzione esponenziale (densità)? media?
- $f(x | \theta) = e^{-(x-\theta)} 1_{\{x \geq \theta\}}$  stimatore col metodo dei momenti  $(1 + \theta)$
- descrivere in due parole cosa vuol dire fare una regressione lineare.

- Come si stimano alpha e beta (metodo degli scarti quadratici).

### Dimostrazioni

- Dimostrare la formula per  $P(A \cup B)$  nel caso generico. e per  $P(A \cup B \cup C)$

### Esercizio

- Se  $A, B$  sono indipendenti quanto vale  $P_A(B)$ .
- Supponiamo di lanciare due monete, chiamo A l'evento "le due monete mostrano la stessa faccia" e B l'evento "la prima moneta esce testa". Se le due monete sono equilibrate, A e B sono indipendenti?
- $P(A) = \frac{7}{10}$ ;  $P(B) = \frac{4}{10}$  min e max di  $P(A \cap B)$  e argomentare le risposte.
- ho 4 chiavi. una di queste apre la porta.
  1. probabilità di aprirla al primo colpo.
  2. probabilità di aprirla al secondo tentativo noto di aver sbagliato al primo
- ho 3 urne:
  1. 1 bianca 3 nere
  2. 2 bianche 2 nere
  3. 2 bianche 0 nere
- prendo un'urna a caso e estraggo una pallina. quali sono  $P(N)$  e  $P(B)$
- 2 urne, A: 1 rossa, 9 nere; B: 10 rosse, 90 nere. mi vengono date 2 palline estratte dalla stessa urna, devo fare un guess a seconda delle 2 palline su da quale urna provengano.
- lancio un dado. probabilità che esca 6?  $p(6) = 2 * p(1)$  allora  $p(6)=???$  (risposta: si riferisce all'entropia massima)
- Urna, palline in numero A rosse e B nere. vinco €1 se esce R.
  1. è più probabile vincere alla prima o alla seconda estrazione, con e senza reimmissione (vincita media alla prima e alla seconda estrazione).
  2.  $X_1$  e  $X_2$  (prima e seconda estrazione) sono indipendenti (sempre nei casi con e senza reimmissione)?
- Federer vinceva con  $P = \frac{2}{3}$ . a Wimbledon si giocano 6 turni. Qual è la probabilità di vincere il torneo?
- il 20% dei partecipanti ad una battaglia ha perso un braccio, il 30% una gamba, il 40% un occhio e il 50% un orecchio. Quanti sono al massimo le persone rimaste sane? Quante sono, al massimo, le persone che hanno avuto almeno una ferita?
- 3 cassette con dentro una moneta ciascuno. il primo doppio testa, il secondo testa croce il terzo doppio croce. apro un cassetto a caso e vedo testa. probabilità di aver aperto il secondo cassetto (soluzione:  $\frac{1}{3}$ )
- stimare media e stimare il massimo valore possibile (con MLE)
  1. Che modello uso se  $f = g(x) * k(\theta) 1_{\{[0, \theta]\}}$ ?
  2. Perché c'è una parte che dipende solo da theta? (fattore di normalizzazione)
  3. quanto vale  $k(\theta)$ ? (ponendo integrale di  $f=1$ )

### Esempi

- v.a. con media +inf (esempio.  $X \text{ geom}(\frac{1}{2})$ ;  $Y=2^X$  ha media +inf)
- v.a. senza media (X come sopra,  $Y = 2^{-X}$ )