Foglio 9

Calcolo delle Probabilità e Statistica

6 maggio 2020

Esercizio 1 Il daltonismo è presente nel 1% della popolazione. Quanto numeroso deve essere il campione perché, con probabilità almeno pari al 95%, contenga almeno un daltonico? Supponete la popolazione infinita, in modo che le estrazioni possano essere considerate indipendenti.

Esercizio 2 Dato un campione $X_1, \dots, X_n$, considerate la varianza campionaria S^2. Dimostrate che

$$S^2 = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} (X_i - X_j)^2$$

Supponiamo che le X abbiano momenti finiti fino all'ordine 4, e denotiamoli con $m_i = \mathbb{E}[X^i]$, per $i = 1, \dots, 4$. Mostrare che

$$\mathrm{Var}(S^2) = \frac{1}{n}\left(m_4 - \frac{n-3}{n-1} m_2^2\right).$$

Esercizio 3 Siano $X_i \sim \mathcal{N}(i, i^2)$, per $i = 1, 2, 3$ v.a. indipendenti. Sia $T = f(X_1, X_2, X_3)$. Determinare la funzione f affinché la statistica T abbia legge $\chi^2(3)$.

Esercizio 4 Siano X e Y v.a. i.i.d. con legge normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$. Sia $Z = \min(X, Y)$. Mostrare che $Z^2 \sim \chi^2(1)$.

Esercizio 5 Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione preso da una popolazione di riferimento che segue una legge $f(x \mid \theta) = \theta x^{-2} \mathbf{1}_{\{x \geq \theta\}}$, dove $\theta > 0$.

1. Qual è una statistica sufficiente per θ?
2. Trovare la stima di massima verosimiglianza per θ.
3. Trovare la stima di θ con il metodo dei momenti.

Esercizio 6 Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione preso da una popolazione di riferimento che segue una legge $f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{\{0<x<1\}}$, dove $\theta > 0$.
Trovare una stima di θ tramite il metodo dei momenti e il metodo di massima verosimiglianza.

Soluzione Esercizio 1
Dato che le estrazioni sono indipendenti, il numero di daltonici in un campione di ampiezza n segue una legge binomiale di parametri n e $p = 1/100$, per cui

$$\mathbb{P}(S_n \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(S_n = 0) \geq 0.95$$

diventa

$$q^n \leq 0.05$$

e passando ai logaritmi

$$n \geq \frac{\log(20)}{\log(1/q)} \approx 298.1$$

da cui prendiamo $n = 299$.

Soluzione Esercizio 3
Dato che $\frac{X_i - i}{\sqrt{i}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, si ottiene

$$T = (X_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(X_2 - 2)^2 + \frac{1}{3}(X_3 - 3)^2 = X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 + \frac{1}{3}X_3^2 - 2(X_1 + X_2 + X_3) + 6$$

segue una legge $\chi^2(3)$.

Soluzione Esercizio 5

Sia $T = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Allora

$$\mathbb{P}^\theta(T > t) = [\mathbb{P}^\theta(X > t)]^n = [\tfrac{\theta}{t}]^n$$

da cui T ha densità

$$g(t \mid \theta) = n\theta^n t^{1-n} \mathbf{1}_{\{t > \theta\}}.$$

Possiamo allora calcolare il rapporto

$$\frac{f_n(\underline{x} \mid \theta)}{g(t \mid \theta)} = \frac{\theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-2} \mathbf{1}_{\{x_i > \theta\}}}{n\theta^n t^{1-n} \mathbf{1}_{\{t > \theta\}}}$$

dove $t = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{-2}}{nt^{1-n}}$$

che non dipende da θ, quindi T è una statistica sufficiente.
Consideriamo la funzione di verosimiglianza

$$L(\theta \mid \underline{x}) = \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-2} \mathbf{1}_{\{\theta \leq x_i\}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta > \min\{x_i\} \\ c\theta^n & \text{se } \theta \leq \min\{x_i\} \end{cases}$$

da cui si ottiene $MLE(\theta) = \min\{x_i\}$.
Infine, dato che X non ammette media finita, non possiamo determinare lo stimatore con il metodo dei momenti.