

PRIMA PROVA IN ITINERE

Prova a risolvere i seguenti problemi, giustificando il ragionamento seguito.

La motivazione del processo è molto più importante della risposta numerica.

Puoi usare una calcolatrice o un regolo per i conti, così come R sul calcolatore dell'aula. PUOI CONTROLLARE I TUOI APPUNTI, LE NOTE DEL CORSO O UN LIBRO DI TESTO TRA QUELLI CONSIGLIATI. Lavora per tuo conto, senza aiuto esterno, ma discuti pure i problemi e le tue soluzioni **finita la prova**. I problemi **non** sono in ordine di difficoltà. Indica nome e cognome (e numero di matricola) sui fogli, così come il numero del problema o della domanda. **Lascia un po' di spazio per i commenti**. Le parti in R possono essere copiate sul foglio, oppure salvate come file (`.R`, `.txt`, `.Rhistory`) indicando con un commento (introdotto dal carattere `#`) a quale esercizio e domanda il codice si riferisce. Se parte di un problema è svolta in R, indicalo sul foglio in corrispondenza del punto dell'esercizio corrispondente. Non dimenticare di caricare il file nella risorsa *esamionline* al termine dell'esame.

Buon lavoro!

Problema 1. Ogni persona ha, per quanto riguarda il colore degli occhi, un aspetto genetico (genotipo) e un aspetto fenomenologico (fenotipo). I due sono legati tra loro.

I genotipi associati al colore degli occhi sono $\{MM, AA, MA, AM\}$. Si sviluppa il fenotipo A (i.e. si hanno gli occhi azzurri) se e solo se si ha il genotipo AA . Si sviluppa il fenotipo M (occhi marroni) se e solo se si ha uno tra i genotipi $\{MA, AM, MM\}$.

Secondo le leggi di Mendel, il genotipo della prole (biologica) di due individui è equamente distribuito tra le possibili quattro combinazioni $(X_i Y_j)$, dove X_i e Y_i rappresentano, rispettivamente, il primo e il secondo elemento del genotipo del genitore G_i ($i \in \{1, 2\}$). A titolo di esempio, si considerino le seguenti tabelle.

	M	M		M	A
A	AM	AM	A	AM	AA
M	MM	MM	M	MM	MA

Tabella 1. Sinistra: possibili esiti per genitori con genotipi AM e MM . Il figlio avrà genotipo AM con probabilità $\frac{2}{4}$, mentre avrà genotipo MM con probabilità $\frac{2}{4}$. Destra: possibili esiti per genitori con genotipi AM e MA . Il figlio avrà genotipo AM, AA, MM, MA con probabilità $\frac{1}{4}$.

Supponiamo di vivere in una popolazione omogenea, ovvero che $P(AA) = P(AM) = P(MA) = P(MM) = 1/4$, per ogni individuo della popolazione.

Denotiamo G_1 e G_2 i genitori.

1. Se un individuo ha gli occhi azzurri e G_1 ha gli occhi azzurri, qual è la probabilità che anche G_2 abbia gli occhi azzurri?
2. Se un individuo ha gli occhi marroni e G_1 ha gli occhi azzurri, qual è la probabilità che G_2 abbia gli occhi marroni?
3. Se un individuo ha gli occhi azzurri, qual è la probabilità che almeno uno dei due genitori abbia gli occhi marroni?

Problema 2. Sia $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f_X(x) := \begin{cases} c(x^2 + \alpha x) & \text{se } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove $c \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Per quali valori dei parametri α, c risulta che f_X è una densità di probabilità?
2. Sia X la variabile aleatoria con densità f_X . Determina, se esistono, i valori dei parametri α e c per cui la media di X vale 0.7.
3. Utilizzando i valori ottenuti al punto 2., definiamo $Y := X^2$. Determina la funzione densità f_Y e la funzione di ripartizione F_Y di Y .
4. Quanto valgono $P(Y \geq \frac{\pi}{3})$ e $P(Y \in [0, \frac{1}{2}])$?

Problema 3. In una fabbrica di graffette vengono usati due macchinari diversi. Il primo produce 1000 graffette all'ora, mentre il secondo le produce a un ritmo variabile. Entrambi i macchinari producono in media ogni ora 50 graffette difettose. Chiamiamo X e Y le variabili aleatorie che descrivono il numero di graffette difettose prodotte dal primo e dal secondo macchinario, rispettivamente, nell'arco di una certa ora.

1. Che distribuzione possiamo ipotizzare per X e Y ? Come mai?
2. Sia Z il numero totale di graffette difettose prodotte in un'ora. Calcolane il momento primo e momento centrato secondo.
3. Ogni giorno un'ora è dedicata al controllo qualità: tutte le graffette prodotte da entrambi i macchinari vengono controllate. Il conteggio determina che ci sono 160 graffette difettose. Quanto è sorprendente questo numero?