Probabilità condizionata/condizionale

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Siano $A, B \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$, cioè B è un evento non trascurabile. Allora la probabilità di A condizionata a B è

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Osservazione: Se $B \in \mathcal{F}$ e $\mathbb{P}(B) > 0$, allora $\mathbb{P}(\cdot|B)$ è una funzione di probabilità (detta p. condizionale rispetto a B)

→ DIMOSTRARE PER ESERCIZIO

Formula delle probabilità totali

Sia $(B_i)_{i \in I}$ una partizione finita o numerabile di Ω. Se $\mathbb{P}(B_i) > 0 \ \forall i \in I$, vale

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\, \mathbb{P}(B_i), \qquad A \in \mathcal{F}$$

Formula di Bayes

Siano A, B eventi non trascurabili. Vale

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\, \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Indipendenza

In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ diciamo che due eventi A, B sono indipendenti in $\mathbb{P}$ (o semplicemente indipendenti) se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B) \qquad (*)$$

In questo caso scriveremo $A \perp\!\!\!\perp B$.

Se $\mathbb{P}(B) > 0$ $(*)$ è equivalente a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Esercizio 1

In un'azienda di circuiti integrati le macchine A,B,C producono rispettivamente il 25%, il 30%, e il 45% di circuiti totali. Risulta però che il 2%, il 4% e il 5% dei pezzi prodotti rispettivamente da A, B e C sono difettosi.

a) Qual è la probabilità che un circuito prodotto scelto a caso sia difettoso?

Consideriamo i seguenti eventi:

A = "CIRCUITO PRODOTTO da A"
B = "CIRCUITO PRODOTTO DA B"
C = "CIRCUITO PRODOTTO DA C"
D = "CIRCUITO PRODOTTO DIFETTOSO"

$\mathbb{P}(A) = 0.25$ $\quad$ $\mathbb{P}(D|A) = 0.02$

$\mathbb{P}(B) = 0.30$ $\quad$ $\mathbb{P}(D|B) = 0.04$

$\mathbb{P}(C) = 0.45$ $\quad$ $\mathbb{P}(D|C) = 0.05$

$D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}((D\cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)) \overset{\text{additività}}{=} \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap B) + \mathbb{P}(D \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\,\mathbb{P}(C) =$$

$$= 0.02 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.30 + 0.05 \cdot 0.45 = 3.95\%$$

b) Sapendo che un circuito prodotto, scelto a caso, sia difettoso, qual è la probabilità che sia stato prodotto dalla macchina C?

Sapendo D, usando la formula di BAYES

$$\mathbb{P}(C|D) = \frac{\mathbb{P}(D|C)\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{225}{395} \approx 56.96\%$$

Esercizio 2

Si calcola che il 25% dei gatti di una regione sia portatore di un virus pericoloso per l'uomo. I gatti vengono sottoposti a un test che presenta un certo margine di insicurezza, nel senso che esso risulta positivo sia nell' 87% dei gatti portatori sia nel 6% dei gatti sani (non portatori). Un gatto viene sottoposto al test.

a) Determinare la probabilità di un risultato negativo del test.

consideriamo i seguenti eventi:

N: "test negativo"

G^P: "gatto portatore"

G^{NP}: "gatto non portatore"

$\mathbb{P}(G^P) = 0.25$

$\mathbb{P}(N^c \mid G^P) = 0.87$

$\mathbb{P}(N^c \mid G^{NP}) = 0.06$

per la formula delle probabilità totali:

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N \mid G^P)\,\mathbb{P}(G^P) + \mathbb{P}(N \mid G^{NP})\,\mathbb{P}(G^{NP}) =$$

$$= (1 - \mathbb{P}(N^c \mid G^P))\,\mathbb{P}(G^P) + (1 - \mathbb{P}(N^c \mid G^{NP}))\,\mathbb{P}(G^{NP}) =$$

$$= 0.13 \cdot 0.25 + 0.94 \cdot 0.75 = 73.75\%$$

b) Sapendo che il risultato è stata negativo, determinare la probabilità che esso sia, in realtà, portatore.

Per la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(G^P \mid N) = \frac{\mathbb{P}(N \mid G^P)\,\mathbb{P}(G^P)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{0.13 \cdot 0.25}{0.7375} \approx 4.4\%$$

Esercizio 3

Alice e Bob seguono il corso di Probabilità. Alice frequenta le lezioni con una probabilità dell'80%, mentre Bob si presenta con una probabilità del 60%. Le loro assenze sono indipendenti.

a) Determinare la probabilità che in un dato giorno solo uno dei due sia presente a lezione.

Consideriamo i seguenti eventi:

$A =$ "Alice è a lezione"
$A^c =$ "Alice non è a lezione"
$B =$ "Bob è a lezione"
$B^c =$ "Bob non è a lezione"

$\mathbb{P}(A) = 0.8 \qquad \mathbb{P}(B) = 0.6$

E: "solo uno dei due è presente a lezione"

$E = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \overset{\text{additività}}{=} \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) =$$

$$\overset{\text{INDIP}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.48$$

NOTA: $A \perp\!\!\!\perp B \overset{?}{\Rightarrow} A \perp\!\!\!\perp B^c$

$A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

Allora $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \overset{\text{INDIP } A \text{ e } B}{=}$

$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B^c)$

Infatti $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

b) Determinare la probabilità che per 5 lezioni consecutive almeno uno dei due sia presente.

Consideriamo l'evento

E: "almeno uno dei due è presente a lezione"

$E = A \cup B$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.8 \cdot 0.6 = 0.92$

5 volte lo stesso
esperimento

$\mathbb{P}(A \cup B)^5 = 0.6591$

c) Oggi almeno uno dei due è a lezione. Qual è la probabilità che sia Bob?

$$\mathbb{P}(B \mid A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A \cup B \mid B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} \overset{B \subseteq A \cup B}{=} \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = 0.6522$$

NOTA: se $B \subseteq A$ allora $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$