CALCOLO COMBINATORIO

Disposizioni con ripetizione

E insieme $|E| = n$, $k \in \mathbb{N}$

$DR_{n,k}$: numero di disposizioni con ripetizione di k elementi di E

$$DR_{n,k} = n^k$$

Disposizioni semplici

$|E| = n$ $k \leq n$

$D_{n,k}$: numero di disposizioni semplici di k elementi di E

$$D_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutazioni

$P_n = D_{n,n}$ numero delle permutazioni di n oggetti

$$P_n = n!$$

Combinazioni

$|E| = n$, $k \leq n$

$C_{n,k}$ = numero delle combinazioni di k elementi di E (famiglia di sottoinsiemi di E di cardinalità k) =

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Esercizio 1

Consideriamo un mazzo di 40 carte. Calcoliamo la probabilità dell'evento A definito in ognuno dei seguenti modi:

a) in 5 estrazioni senza reimmissione si ottengono 5 denari

Estrazione senza reimmissione
evento A = "si ottengono 5 denari"

NON CONTA L'ORDINE

ESTRAZIONE SIMULTANEA

Possiamo scegliere come spazio campione Ω l'insieme delle combinazioni di 5 elementi di un insieme di 40 oggetti

L'esito $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ corrisponde all'insieme delle carte estratte

$\#$ casi possibili $= C_{40,5}$

evento A : possibili scelte, non ordinate e non ripetute, di 5 denari, tra i 10 denari disponibili

$\#$ casi favorevoli $= C_{10,5}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_{10,5}}{C_{40,5}} = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{40}{5}} = \frac{10!}{(10-5)!\,5!} \cdot \frac{(40-5)!\,5!}{40!} \simeq 0.04\%$$

b) In 5 estrazioni senza reimmissione si ottengono nell'ordine i numeri da 1 a 5 di qualsiasi seme, anche diversi tra loro.

estrazione senza reimmissione

evento A = "si ottengono nell'ordine i numeri da 1 a 5 di qualsiasi seme, anche diversi tra loro"

→ DIPENDE DALL'ORDINE

Ω : insieme delle disposizioni semplici di 5 elementi di un insieme di 40 oggetti

$$\#\text{casi possibili} = D_{40,5} = \frac{40!}{(40-5)!}$$

contiamo gli elementi di A → scegliamo in modo ordinato la sequenza dei semi delle 5 carte estratte

un elemento di A → $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$

4 possibili assi, 4 possibili due . . .

$$\#\text{casi favorevoli} = 4^5 = DR_{4,5}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{DR_{4,5}}{D_{40,5}} \approx 10^{-3}\%$$

Esercizio 2

Consideriamo il gioco della tombola, quindi estrazioni senza reimmissione di 90 numeri.
Scegliamo cinque numeri.

a) Qual è la probabilità di una cinquina semplice (per cui non conta l'ordine di estrazione)?

NON CONTA L'ORDINE DI ESTRAZIONE → ESTRAZIONE SIMULTANEA

Ω: insieme delle combinazioni di 5 elementi di 90 oggetti

casi possibili: $C_{90,5}$

evento A: "fare una cinquina semplice"

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{C_{90,5}} \simeq 2.27 \cdot 10^{-8}$$

b) Qual è la probabilità di ottenere una cinquina semplice dopo p≥5 estrazioni?

consideriamo quindi i p nu. già estratti (senza considerare l'ordine di estrazione)

casi possibili: $C_{90,p}$

evento A: "fare una cinquina semplice dopo $p \geq 5$ estrazioni"

↓ famiglia degli insiemi di p numeri in cui 5 sono fissati e gli altri p−5 sono qualsiasi fra i rimanenti 85 numeri

caso favorevole: $\{\underbrace{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5}_{\text{5 num fissati (quelli che abbiamo scelto all'inizio)}}\} \cup \{\underbrace{m_1, \dots, m_{p-5}}_{\text{qualsiasi tra i rimanenti 85 numeri}}\}$

casi favorevoli $= C_{5,5} \cdot C_{85,p-5}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_{85,p-5}}{C_{90,p}}$$

ad esempio se $\mathbb{P}(A) \approx 6 \cdot 10^{-6}$ per $p = 10$ e $\mathbb{P}(A) \approx 75\%$ per $p = 85$.