ESERCITAZIONE 18 Marzo 2020 - Parte I

Esercizio I

Sia $\Omega = \mathbb{N}$ e sia $\mathcal{F}$ la famiglia di sottoinsiemi $A \subset \Omega$ per cui A oppure A^c è finito.
Definiamo inoltre $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ se A è finito e $\mathbb{P}(A) = 1$ se A^c è finito.

a) Si dimostri che $\mathcal{F}$ è un'algebra.

$\mathcal{F}$ è un'algebra:

- $\Omega \in \mathcal{F}$, infatti $\Omega^c = \emptyset$ che è finito

- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} \underset{\underset{(A^c)^c}{\parallel}}{A} \text{ è finito}, \ A^c \text{ è infinito} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ A^c \text{ è finito} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \end{cases}$$

- $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

i) Se A_1, A_2 sono finiti $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ finito, quindi $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$.

ii) Se A_1 è finito e A_2 è infinito, allora cardinalità di A_2^c è finita (perché $A_2 \in \mathcal{F}$) e $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$

La cardinalità finita perché maggiorata da quella di A_2^c ($A_1^c \cap A_2^c \subset A_2^c$), quindi $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

b) $\mathcal{F}$ è una σ-algebra?

NO: se prendo $A_n = \{2n\} \in \mathcal{F}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_n A_n$ è l'insieme dei numeri pari che non è finito, $(\bigcup_n A_n)^c$ è l'insieme dei dispari che non è finito

c) Si dimostri che $\mathbb{P}$ è una misura finitamente additiva su $\mathcal{F}$.

$\mathbb{P}(A)=0$ se A è finito, $\mathbb{P}(A)=1$ se A^c è finito

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ perché $\emptyset$ è finito

MISURA FINITAMENTE ADDITIVA su un'algebra $\mathcal{A}$
$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$
$\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

- FINITA ADDITIVITÀ:

se $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ hanno entrambi cardinalità infinita non può mai verificarsi $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Infatti se fosse vero $A_1 \subset A_2^c$ dovrebbe avere cardinalità finita che ho escluso per ipotesi.

Posso supporre A_1 finito e quindi $\mathbb{P}(A_1) = 0$:

i) A_2 finito. Allora $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 0 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(A_1)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(A_2)}}$

ii) A_2 infinito. Allora $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 1 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(A_1)}} + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(A_2)}}$

d) $\mathbb{P}$ è σ-additiva?

σ-ADDITIVITÀ

Per ogni successione $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$ tale che l'unione degli A_n appartiene ad $\mathcal{A}$, vale

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Facciamo vedere che esiste una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$, tale che $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$ per cui $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Prendiamo ad es. $A_n = \{n\} \in \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{\mathbb{P}(\mathbb{N})=1} \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)}_{\mathbb{P}(\{n\})=0}$$

Esercizio 2

Tre amici a turno, tirano una palla verso il canestro. Il primo ha una probabilità $p_1 = 20\%$ di fare canestro, il secondo $p_2 = 25\%$ e il terzo $p_3 > p_2$. Continuano a tirare secondo lo stesso ordine finché uno di loro non segna un canestro. Determinare la probabilità che il primo canestro sia fatto dal primo/secondo/terzo giocatore. Determinare quanto deve valere p_3 affinché il gioco sia equo, ossia tutti e tre i giocatori abbiano la stessa probabilità di vittoria.

Consideriamo i seguenti eventi:

C_i^k: "al (proprio) tiro k, il giocatore i fa canestro"

M_i^k: "al (proprio) tiro k, il giocatore i sbaglia"

E_1: "primo canestro fatto dal primo giocatore"

E_2: "primo canestro fatto dal secondo giocatore"

E_3: = primo canestro fatto dal terzo giocatore"

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(C_1^1) + \mathbb{P}(M_1^1, M_2^1, M_3^1, C_1^2) + \dots =$$
$$= \mathbb{P}(C_1^1) + \mathbb{P}(M_1^1)\mathbb{P}(M_2^1)\mathbb{P}(M_3^1)\mathbb{P}(C_1^2) + \dots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_1 [(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)]^n = p_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{p_1}{1-x}$$

dove $x = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(M_1^1 C_2^1) + \mathbb{P}(M_1^1, M_2^1, M_3^1, M_1^2, C_2^2) + \dots =$$
$$= \mathbb{P}(M_1^1)\mathbb{P}(C_2^1) + \mathbb{P}(M_1^1)\mathbb{P}(M_1^2)\mathbb{P}(M_2^1)\mathbb{P}(M_3^1)\mathbb{P}(C_2^2) + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_2(1-p_1)^{n+1} [(1-p_2)(1-p_3)]^n =$$
$$= p_2(1-p_1) \sum_{n=0}^{\infty} [(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)]^n = \frac{(1-p_1)p_2}{1-x}$$

Analogamente:

$$\mathbb{P}(E_3) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)}{1-x}$$

Affinché il gioco sia equo $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_3)$

da cui $p_1 = (1-p_1)p_2 = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{1}{3}$$

Esercizio 3

Un' urna A contiene 3 palline nere e 3 palline rosse. Se ne estraggono due (senza guardare) e si mettono in una seconda urna B inizialmente vuota.

a) Qual è la probabilità che le due palline in B abbiano lo stesso colore?

Consideriamo gli eventi

N_i : " esce una pallina nera all'i-esima estrazione"

R_i : " esce una pallina rossa all'i-esima estrazione"

$$\mathbb{P}((N_1 \cap N_2) \cup (R_1 \cap R_2)) =$$

$$\mathbb{P}(N_2) \cdot \mathbb{P}(N_2 | N_1) + \mathbb{P}(R_1) \cdot \mathbb{P}(R_2 | R_1) =$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

b) Se estraggo altre due palline dall'urna A qual è la probabilità che abbiano lo stesso colore ?

Osserviamo che:

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4) = 0$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap N_2 \cap R_3 \cap R_4) =$$

REGOLA DELLA CATENA

$$= \mathbb{P}(R_1)\, \mathbb{P}(N_2 | R_1)\, \mathbb{P}(R_3 | R_1 \cap N_2)\, \mathbb{P}(R_4 | R_3 \cap N_2 \cap R_1) =$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{20}$$

Per comodità indichiamo $R_1 \cap N_2 \cap R_3 \cap R_4$ con $RNRR$, e in modo analogo per le altre possibili sequenze di estrazioni osserviamo che:

$$\mathbb{P}(RNRR) = \mathbb{P}(RNNN) = \mathbb{P}(NRNN) = \mathbb{P}(NRRR)$$

$$\mathbb{P}(RRNN) = \mathbb{P}(NNRR) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{10}$$

Allora la probabilità di estrarre altre due palline da A dello stesso colore è data da

$$\mathbb{P}(RNRR) \cdot 4 + \mathbb{P}(RRNN) \cdot 2 = \frac{2}{5}$$