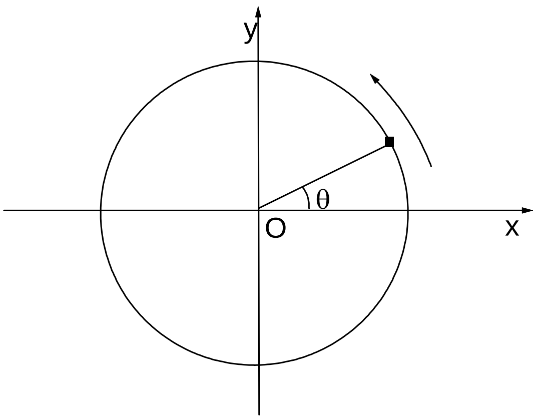
Cinematica del punto materiale: moto circolare

Problema n. 1:

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di moto uniformemente accelerato. Partendo da fermo all'istante t = 0 esso impiega Δt_1 = 4.60 s a percorrere un giro completo. Determinare:

(a) l'accelerazione angolare del moto circolare;
(b) il tempo Δt_2 impiegato a percorrere il secondo giro;
(c) il modulo della velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo.

Soluzione:



Dati:
$\Delta t_1 = 4.60$ s
α = costante (il moto è uniformemente accelerato, quindi l'<u>accelerazione angolare</u> α è costante)
$\omega_0 = 0$ (il punto materiale parte da fermo, quindi la <u>velocità angolare iniziale</u> è nulla)
$t_0 = 0$ (l'istante iniziale è nullo)

(a) Calcolare l'accelerazione angolare α

Stiamo trattando un moto circolare uniformemente accelerato: scegliamo un sistema di riferimento come quello mostrato in figura, con il centro degli assi cartesiani coincidente con il centro della traiettoria circolare. L'angolo θ definito come in figura descrive ad ogni istante la posizione *angolare* del punto materiale lungo la traiettoria.

Il moto è uniformemente accelerato, quindi scriviamo le equazioni del moto (o leggi orarie) corrispondenti a questo tipo di moto:

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2 + \omega_0(t-t_0) + \theta_0} \qquad (1)$$

$$\boxed{\omega = \alpha(t - t_0) + \omega_0}$$

Nel nostro caso i dati del problema ci dicono che il punto parte da fermo e all'istante t=0, quindi possiamo sostituire nella prima equazione del moto:

$$\omega_0 = 0$$
$$t_0 = 0$$

ottenendo: $\theta = \frac{1}{2}\alpha(t)^2 + \theta_0$ ovvero $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha(t)^2$

Sappiamo che nel tempo Δt_1 la particella percorre un giro completo ovvero, riscrivendo questa informazione in termini di angoli avremo che: $\theta - \theta_0 = 2\pi$

Sostituendo, quindi, nell'equazione del moto troviamo un'equazione di I grado nell'incognita α che, risolta, ci fornisce il valore dell'accelerazione angolare:

$$2\pi = \frac{1}{2}\alpha\Delta t_1{}^2$$

sostituendo i valori numerici: $2\pi rad = \frac{1}{2}\alpha(4.60s)^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.59\frac{rad}{s^2}$

(**nota**: si noti che le dimensioni dell'accelerazione angolare tornano correttamente)

(b) Calcolare il tempo Δt_2 impiegato a percorrere il secondo giro

Ci troviamo di fronte ancora ad un moto circolare uniformemente accelerato, con accelerazione α nota, per cui possiamo applicare ancora le equazioni (1), ma rispetto al punto precedente sono ora cambiate le condizioni iniziali del problema: infatti, nell'istante in cui la particella incomincia il secondo giro essa non ha più velocità angolare iniziale nulla, quindi sarà $\omega_0 \neq 0$

Per calcolare Δt_2 abbiamo, quindi, bisogno di conoscere il valore di ω_0 che possiamo però ricavare dai dati del punto precedente, utilizzando ancora le equazione del moto: $\omega_0 = \alpha\Delta t_1$

ovvero alla fine del primo giro (e quindi all'inizio del secondo) la particella possiederà questa velocità angolare che possiamo calcolare, in quanto conosciamo sia i valori di α che di Δt_1.

L'equazione del moto per il secondo giro della particella diventa quindi:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha\Delta t_2{}^2 + \alpha\Delta t_1\Delta t_2$$

e poiché la particella compie ancora un giro completo, sarà $\theta - \theta_0 = 2\pi$

Sostituendo, otteniamo, quindi, un'equazione di secondo grado in Δt_2 che, risolta, ci dà questo risultato:

$$\Delta t_2 = \frac{-\alpha\Delta t_1 \pm \sqrt{\alpha^2 \Delta t_1{}^2 + 4\pi\alpha}}{\alpha}$$

Sostituiamo ora i valori numerici nell'equazione trovata sopra, facendo attenzione a riportare anche le unità di misura: in questo modo avremo un'indicazione (necessaria, ma non sufficiente!!!) della correttezza del risultato ottenuto.

$$\Delta t_2 = \frac{-0.59\, rad/s^2\; 4.60 s \pm \sqrt{(0.59)^2\; rad^2/s^4\; (4.60)^2 s^2 + 4\pi rad\, 0.59\, rad/s^2}}{0.59\, rad/s^2}$$

$$= \frac{-2.714\, rad/s \pm 3.844\, rad/s}{0.59\, rad/s^2}$$

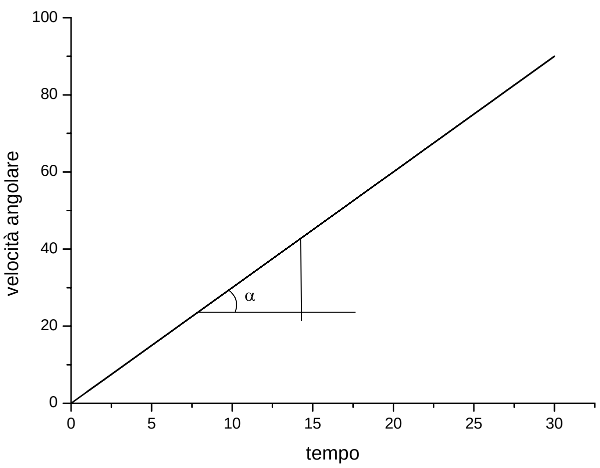
$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_{2,1} = +1.915 s \approx 1.92 s}$$

$$\Delta t_{2,2} = -11.115 s \approx -11.12 s$$

Essendo l'equazione per Δt_2 di secondo grado, otteniamo matematicamente due risultati, dei quali però uno solo ha significato fisico e cioè quello che ci fornisce un numero positivo, essendo il tempo una grandezza che ha significato solo se definito su scala positiva.
Il risultato corretto è quindi: $\Delta t_2 = 1.92 s$

(c) Calcolare il modulo della velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo

Come detto il moto è uniformemente accelerato: ne consegue che, in ogni istante del moto, la velocità angolare ω varierà sempre linearmente con il tempo secondo la relazione: $\omega = \alpha t$

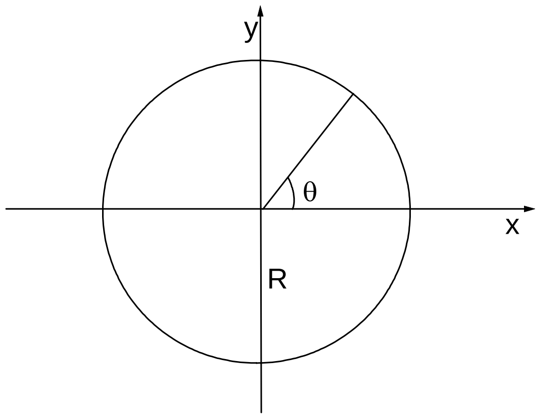


La costante di proporzionalità sarà pari all'accelerazione angolare del moto, già calcolata nel primo punto del problema, quindi la relazione diventa: $\omega = 0.59\, {rad}/{s^2}\; t$

Problema n. 2:

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio R = 1 m con accelerazione angolare α = – 2rad/s^2. Se la velocità scalare iniziale del punto è v_0 = 10 m/s, trovare dopo quanto tempo t_f e dopo quanti giri n_f la velocità angolare $\omega(t_f)$ vale 0.

Soluzione:



Dati:
R=1m

$\alpha = -2\, {rad}/{s^2}$

$v_0 = 10\, {m}/{s}$

<u>Calcolare</u>: t_f e n_f tali che $\omega(t = t_f) = 0$ e $\omega(n = n_f) = 0$

Anche in questo caso, scegliamo arbitrariamente un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali la cui origine coincida con il centro della traiettoria circolare, come mostrato in figura. L'angolo θ, definito rispetto all'asse x descrive in ogni istante del moto la posizione della particella lungo la circonferenza.

Il problema ci dice che il moto è uniformemente accelerato, quindi scriviamo le equazioni del moto corrispondenti:

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \theta_0} \qquad (1)$$

$$\boxed{\omega = \alpha(t - t_0) + \omega_0}$$

Poiché il problema non ci dà nessuna indicazione, possiamo scegliere, per comodità, di porre $t_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$.
Sappiamo inoltre che nel moto circolare in generale (non solo in quello uniformemente accelerato!), la velocità scalare e quella angolare sono legate, in ogni istante del moto, dalla relazione:

$$\boxed{v = \omega R} \qquad (2)$$

(a) *Calcoliamo* t_f

Il problema ci chiede di calcolare il tempo t_f al quale la velocità angolare si annulla, ovvero scrivendo in formule questa condizione dobbiamo cercare una soluzione all'equazione:

$$\omega(t = t_f) = 0$$

Dobbiamo esprimere quindi le velocità angolare ω in funzione dei dati a noi noti, utilizzando la seconda equazione di (1):

$\omega = \alpha t + \omega_0$ (in cui come detto prima abbiamo assunto per comodità che $t_0 = 0$)

I dati del problema non ci forniscono direttamente il valore della velocità angolare iniziale ω_0, ma possiamo ricavarla usando la relazione (2): $v_0 = \omega_0 R \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \dfrac{v_0}{R}$

Sostituendo quindi nella relazione precedente, otteniamo la seguente espressione per ω:

$$\omega = \alpha t + \frac{v_0}{R}$$

e risolvendo ora l'equazione: $0 = \omega(t = t_f) = \alpha t_f + \dfrac{v_0}{R}$ troviamo la soluzione algebrica per t_f:

$$\boxed{t_f = -\frac{v_0}{R\alpha}}$$

<u>Nota</u>: una buona verifica della correttezza della soluzione trovata (anche se non sufficiente!!!) consiste nel verificare le dimensioni: in questo caso possiamo riscrivere dimensionalmente l'espressione per t_f

$$[t_f] = -\frac{\left[\frac{m}{s}\right]}{[m]\left[\frac{rad}{s^2}\right]} = [s]$$

Sostituendo ora i valori numerici abbiamo che: $t_f = -\dfrac{10 \, {}^{m}\!/_{s}}{1m\left(-2 \, {}^{rad}\!/_{s^2}\right)} = 5s$

(b) *Calcoliamo* n_f

Per calcolare il numero di giri necessari affinché la velocità angolare si annulli, dobbiamo calcolare il valore dell'angolo θ a cui ω si annulla, ovvero il valore dell'angolo dopo un tempo pari a t_f; per farlo usiamo l'espressione per θ fornitaci dalla prima delle equazioni (1).

$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$ (in cui abbiamo assunto per comodità $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$) e calcoliamo il valore dell'angolo θ dopo il tempo t_f.

Sostituendo in questa espressione la relazione per ω_0 e per t_f ricavate nel punto precedente, otteniamo:

$$\theta(t = t_f) = \frac{1}{2}\alpha\left(-\frac{v_0}{R\alpha}\right)^2 + \frac{v_0}{R}\left(-\frac{v_o}{R\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^{\;2}}{R^2\alpha}$$

da cui, sostituendo i valori noti otteniamo: $\theta(t = t_f) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(10 \, {}^{m}\!/_{s}\right)^2}{(1m)^2\left(-2 \, {}^{rad}\!/_{s^2}\right)} = 25rad$

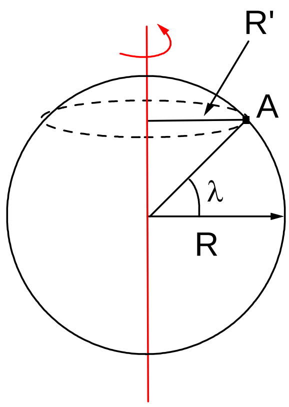
e da cui infine: $n_f = \dfrac{25rad}{2\pi} = 3.98 \approx 4$

Problema n. 3:

La terra ruota con moto uniforme attorno al proprio asse di rotazione compiendo una rotazione completa in 24 ore. Assumendo che la terra sia una sfera di raggio R = 6370 km, calcolare la velocità v e l'accelerazione a lineari di un punto sulla superficie terrestre in funzione della sua latitudine (λ).

Discutere i risultati ottenuti, determinando i valori massimi possibili di v e di a, rispettivamente.

Soluzione:



Dati:

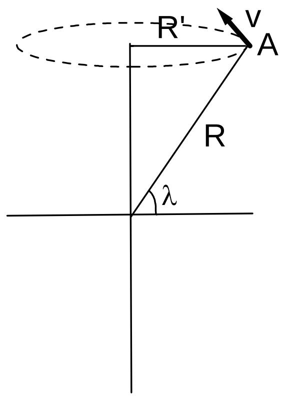
$\omega = \cos\tan te$

$T = 24h$

$R = 6370Km$

Determinare: $v(\lambda)$ e $a(\lambda)$ (velocità e accelerazione in funzione della latitudine λ)

Per prima cosa scegliamo un sistema di riferimento come quello mostrato in figura, dato che la latitudine λ viene definita dall'angolo individuato rispetto al piano dell'equatore terrestre e approssimiamo l'asse di rotazione terrestre ad una asse perpendicolare all'equatore stesso.
Consideriamo ora un generico punto A che si trova sulla superficie terrestre ad una generica latitudine λ: dato che la terra ruota attorno all'asse terrestre con velocità angolare costante ω, anche il generico punto A si muoverà di moto circolare uniforme (con la stessa velocità angolare), lungo una traiettoria circolare di raggio R' (diverso da R, raggio terrestre) e definito come in figura.
Possiamo quindi schematizzare più chiaramente la situazione come nella figura sottostante:



Da semplici considerazioni geometriche, possiamo esprimere il raggio R' della traiettoria lungo cui si muove A, in funzione del raggio noto terrestre e della latitudine λ: $R' = R\cos\lambda$

Calcoliamo ora la velocità angolare con cui ruota la terra (e il punto A): si tratta di un moto uniforme, quindi la legge oraria assume la forma:

$$\boxed{\theta - \theta_0 = \omega t}$$

Poiché la terra compie un giro completo (quindi un angolo $\theta - \theta_0 = 2\pi$) in un periodo di tempo $T = 24h$, possiamo scrivere che $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$.

(a) *Calcoliamo la velocità lineare* v *del generico punto* A*, in funzione della sua latitudine* λ

Nel moto circolare, la <u>velocità lineare</u> di una qualsiasi particella che si muove sulla traiettoria è legata alla <u>velocità angolare</u> dalla relazione:

$\boxed{v = \omega R}$, dove R coincide con il raggio della traiettoria circolare

Sostituendo quindi in questa equazione il valore del raggio R' determinato precedentemente, otteniamo la relazione cercata fra velocità e latitudine:

$$\boxed{v = \frac{2\pi}{T} R\cos\lambda}$$

(Nota: si noti che la relazione trovata è corretta da un punto di vista dimensionale, condizione <u>necessaria ma non sufficiente</u> alla correttezza del risultato stesso: $[v] = \frac{[rad]}{[s]}[m] = \left[\frac{m}{s}\right]$)

Casi limite:

A si trova sull'equatore $\Rightarrow\ \lambda = 0\ \Rightarrow\ v = \dfrac{2\pi R}{T} = \dfrac{2\pi 6370 \cdot 10^3 m}{24 \cdot 60 \cdot 60 s} = 463 \, {}^{m}\!/\!_{s}$

A si trova al polo $\Rightarrow\ \lambda = \dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ v = 0$

Quindi anche se ogni punto sulla superficie terrestre si muove con la stessa velocità angolare con cui ruota la terra, i punti che si trovano a latitudini equatoriali possiedono una velocità lineare massima, mentre quelli a latitudini polari velocità minima; tale risultato è abbastanza intuitivo, se pensiamo che durante la rotazione terrestre i punti all'equatore percorrono una distanza più lunga (traiettoria circolare con raggio pari a quello terrestre) di quella percorsa dai punti che si trovano ad altre latitudini ed in particolare rispetto a quelli che, trovandosi al polo, percorrono una traiettoria limite nulla.

(b) *Calcoliamo l'accelerazione lineare a del generico punto A, in funzione della sua latitudine λ*

Analogamente a quanto detto per la velocità, nel moto circolare, l'accelerazione lineare di una qualsiasi particella che si muove sulla traiettoria è legata alla sua accelerazione angolare dalla relazione:

$\boxed{a = \alpha R}$, dove R coincide con il raggio della traiettoria circolare

In questo caso però, abbiamo detto che la terra e quindi ogni punto sulla sua superficie si muove di moto circolare uniforme, ovvero con velocità angolare ω costante.

Per definizione, l'accelerazione angolare α è la derivata prima rispetto al tempo della velocità angolare, ovvero:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

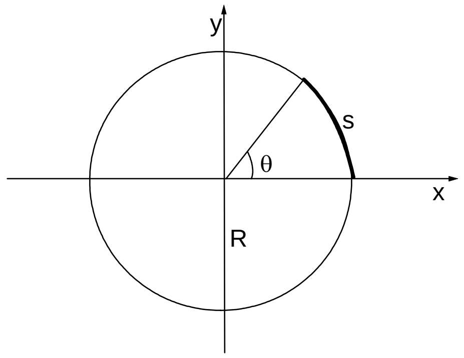
ma essendo ω una costante ne consegue che in questo caso: $\alpha = 0$ e quindi anche l'accelerazione lineare è nulla $a = 0$, per ogni punto della superficie terrestre, indipendentemente dalla sua latitudine.

Problema n. 4:

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio R = 1 m con moto uniformemente accelerato. Negli intervalli di tempo (t_0 = 0, t_1 = 1 s) e (t_0 = 0, t_2 = 2 s) il punto percorre gli spazi Δs_1 = 0.15 m e Δs_2 = 0.4 m, rispettivamente. Calcolare:

(a) l'accelerazione lineare a e la velocità scalare v_0 all'istante t_0 = 0; [a=0.1 ms^{-2}; v_0=0.1 ms^{-1}]
(b) il valore medio <v> del modulo della velocità e quello <a> del modulo dell'accelerazione lineare nell'intervallo di tempo (t_0 = 0 e t_2 = 2 s); [<v> = 0.2 ms^{-1}; <a> = 0.1 ms^{-2}]
(c) la velocità angolare ω e il modulo dell'accelerazione a all'istante t_2 = 2 s. [$\omega(t_2)$ = 0.3 $rads^{-1}$; $a(t_2)$ = 0.13 ms^{-2}]

Soluzione:



Dati:

$R = 1m$

$\alpha = \cos\tan te$

$t_0 = 0 \quad t_1 = 1s \quad \rightarrow \quad \Delta s_1 = 0.15m$

$t_0 = 0 \quad t2 = 2s \quad \rightarrow \quad \Delta s_2 = 0.4m$

Scegliamo un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali xy come quello mostrato in figura, in modo che l'origine degli assi coordinati coincida con il centro della traiettoria circolare; con tale scelta di sistema di riferimento, un punto materiale che si muova sulla circonferenza può essere individuato in ogni istante dall'angolo θ definito rispetto all'asse x come mostrato in figura.

Lo spazio s percorso lungo la traiettoria dal punto materiale, è legato all'angolo θ individuato dal punto stesso dalla relazione:

$$\boxed{s = R\theta} \qquad (1)$$

(dove R è il raggio della circonferenza)

(a) Determinare l'accelerazione lineare a e la velocità scalare v_0 all'istante $t_0 = 0$

Per calcolare l'accelerazione lineare e la velocità scalare, abbiamo bisogno di conoscere l'accelerazione α e la velocità angolare ω del punto materiale che si muove lungo la traiettoria.
Il punto materiale si muove sulla circonferenza di moto <u>uniformemente accelerato</u>, quindi scriviamo le equazioni del moto corrispondenti:

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2 + \omega_0(t-t_0) + \theta_0} \qquad (2)$$

$$\boxed{\omega = \alpha(t-t_0) + \omega_0}$$

Dalla prima delle equazioni (2), segue che:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2 + \omega_0(t-t_0) \quad \text{ovvero} \quad \Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2 + \omega_0(t-t_0)$$

Dalla relazione fra lo spostamento lungo la traiettoria s e l'angolo θ espressa in (1), possiamo invece scrivere che: $\Delta s = R\Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$

Sostituendo quindi nell'equazione del moto otteniamo che:

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2 + \omega_0(t-t_0) \qquad (3)$$

A questo punto, abbiamo un'equazione in due incognite α e ω ma possiamo sfruttare per risolverla i dati forniti dal problema, scrivendo:

$$\begin{cases} \frac{\Delta s_1}{R} = \frac{1}{2}\alpha(t_1-t_0)^2 + \omega_0(t_1-t_0) \\ \frac{\Delta s_2}{R} = \frac{1}{2}\alpha(t_2-t_0)^2 + \omega_0(t_2-t_0) \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di 2 equazioni a due incognite che possiamo risolvere facilmente procedendo per sostituzione oppure più semplicemente moltiplicando la prima delle due equazioni sopra per $(-t_2)$, la seconda per (t_1) e poi sommare le espressioni così ottenute:

$$\begin{cases} [\frac{\Delta s_1}{R} = \frac{1}{2}\alpha(t_1-t_0)^2 + \omega_0(t_1-t_0)] \cdot (-t_2) + \\ [\frac{\Delta s_2}{R} = \frac{1}{2}\alpha(t_2-t_0)^2 + \omega_0(t_2-t_0)] \cdot (t_1) = \end{cases}$$

$$\frac{1}{R}\left(\Delta s_2 t_1 - \Delta s_1 t_2\right) = \frac{1}{2}\alpha t_1 t_2 \left(t_2 - t_1\right)$$

Da cui possiamo ricavare l'espressione per l'accelerazione angolare: $\boxed{\alpha = \frac{2}{R}\frac{\left(\Delta s_2 t_1 - \Delta s_1 t_2\right)}{t_1 t_2 \left(t_2 - t_1\right)}}$

(Nota: proviamo a controllare che l'espressione trovata sia corretta dimensionalmente:

$[\alpha] = [\frac{1}{m}]\frac{([ms]-[ms])}{[s^2][s]} = [\frac{1}{s^2}]$)

Sostituendo inoltre i valori numerici nell'espressione sopra troveremo che: $\alpha = 0.1 \,{}^{rad}\!/\!_{s^2}$

Noto il valore di α possiamo calcolare facilmente l'accelerazione lineare, usando l'espressione per l'accelerazione

$$\boxed{a = \alpha R}$$

Quindi: $a = 2\frac{\left(\Delta s_2 t_1 - \Delta s_1 t_2\right)}{t_1 t_2 \left(t_2 - t_1\right)} = 2\frac{\left(0.4m1s - 0.15m2s\right)}{1s2s\left(2-1\right)s} = 2\frac{0.1ms}{2s^3} = 0.1 \,{}^{m}\!/\!_{s^2}$

(Si noti che essendo il moto uniformemente accelerato e quindi con accelerazione angolare α costante, ed essendo per definizione l'accelerazione lineare a proporzionale in ogni istante ad α ($a = \alpha R$), anch'essa rimane costante e pari a $0.1 \,{}^{m}\!/\!_{s}$ durante tutto il moto, diversamente da quanto accade per la velocità angolare e scalare).

Analogamente a quanto fatto per l'accelerazione lineare, calcoliamo ora la velocità scalare v_0 all'istante $t_0 = 0$ trovando prima la velocità angolare ω ; sappiamo infatti che, nel moto circolare, velocità angolare e velocità scalare sono legati dalla relazione

$$\boxed{v = \omega R}$$

Dato che il problema ci chiede di calcolare la velocità all'istante iniziale $t_0 = 0$, è necessario determinare ω_0 , sfruttando ancora l'equazione (3), calcolata ad esempio all'istante t_1:

$$\frac{\Delta s_1}{R} = \frac{1}{2}\alpha\left(t_1 - t_0\right)^2 + \omega_0\left(t_1 - t_0\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{\frac{\Delta s_1}{R} - \frac{1}{2}\alpha\left(t_1 - t_0\right)^2}{\left(t_1 - t_0\right)}$$

Da cui otteniamo facilmente la velocità scalare: $v_0 = \frac{\Delta s_1}{\left(t_1 - t_0\right)} - \frac{1}{2}\alpha R\left(t_1 - t_0\right)$

(Nota: verifichiamo ancora che l'espressione trovata per la velocità è corretta dimensionalmente:

$[v_0] = \frac{[m]}{[s]} - [\frac{rad}{s^2}][m][s] = [\frac{m}{s}]$)

Sostituendo infine i valori numerici otteniamo: $v_0 = \frac{0.15m}{1s} - \frac{1}{2}0.1\frac{rad}{s^2}1m1s = 0.1 m/s$

(b) Il valore medio $\langle v \rangle$ del modulo della velocità e quello $\langle a \rangle$ del modulo dell'accelerazione lineare nell'intervallo di tempo (t_0 = 0 e t_2 = 2 s)

I valori medi dei moduli della velocità scalare e dell'accelerazione lineare durante un generico intervallo di tempo Δt sono definiti come:

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \quad \text{e} \quad \boxed{\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Nel nostro caso si chiede di applicare queste definizioni all'intervallo di tempo $\Delta t_2 = t_2 - t_0 = 2s$

Per calcolare il valore medio della velocità dobbiamo conoscere lo spostamento lungo la traiettoria nell'intervallo di tempo Δt_2 che corrisponde a Δs_2 che ci è fornito dal problema, quindi:

$\langle v \rangle = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{0.4m}{2s} = 0.2 m/s$

Per determinare il valor medio dell'accelerazione è necessario invece calcolare la variazione del modulo della velocità durante l'intervallo di tempo Δt_2, ovvero Δv_2:

- a $t = 0$ la velocità scalare è v_0 che abbiamo calcolato già al punto (a) del problema

- a $t = t_2$ la velocità sarà ancora data dall'espressione $v = \omega R$ con la velocità angolare che possiamo calcolare applicando semplicemente la seconda equazione della legge del moto:

$\omega = \alpha(t_2 - t_0) + \omega_0$

Quindi: $v(t = t_2) = [\alpha(t_2 - t_0) + \omega_0]R = [0.1 rad/s^2\ 2s + 0.1 rad/s\ ]1m = 0.3 m/s$

Infine il valor medio dell'accelerazione è: $\langle a \rangle = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{0.3 m/s - 0.1 m/s}{2s} = 0.1 m/s^2$

(c) La velocità angolare ω e il modulo dell'accelerazione a all'istante t_2 = 2 s

Per calcolare la velocità angolare ω all'istante $t_2 = 2s$ non dobbiamo fare altro che applicare semplicemente le legge oraria del moto uniformemente accelerato che ci fornisce l'espressione per la velocità angolare:

$$\omega(t = t_2) = \alpha(t_2 - t_0) + \omega_0$$

(Notiamo che il valore della velocità angolare iniziale ω_0 è noto già dai punti precedenti del problema)

Sostituendo i valori numerici avremo: $\omega(t = t_2) = 0.1\frac{rad}{s^2}2s + 0.1\frac{rad}{s} = 0.3\,{rad}/{s}$

Per calcolare infine il modulo dell'accelerazione all'istante t_2 è necessario conoscere entrambe le componenti dell'accelerazione: al punto (a) del problema abbiamo già calcolato la componente lineare dell'accelerazione all'istante iniziale $t_0 = 0$ che sappiamo rimane costante durante tutto il moto.

L'accelerazione totale possiede però anche un componente normale (detta normale proprio perchè perpendicolare in ogni punto alla traiettoria e alla componente lineare dell'accelerazione che invece a sua volta è tangente in ogni punto alla traiettoria) che è legata alla velocità angolare del sistema dalla relazione:

$$a_N = \omega^2 R$$

dove in questo caso la velocità angolare ω si intende calcolata all'istante $t_2 = 2s$.

Sostituendo quindi i valori numerici nell'espressione precedente otteniamo: $a_N = (0.3\,{rad}/{s})^2 1m = 0.09\,{m}/{s^2}$

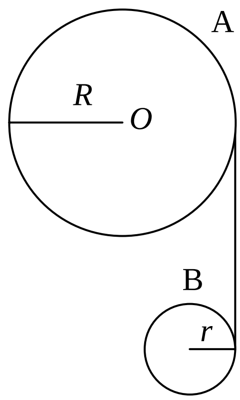
Il modulo dell'accelerazione è quindi dato dalla somma vettoriale delle sue componenti:
$a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2} = \sqrt{(0.1\,{m}/{s^2})^2 + (0.09\,{m}/{s^2})^2} = 0.13\,{m}/{s^2}$

Problema n. 5:

Una ruota A, di raggio R = 30 cm, può ruotare nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della ruota e passante per il suo centro O. La ruota è collegata tramite una cinghia ad una seconda ruota B, di raggio r = 12 cm, posta nello stesso piano verticale e in grado di ruotare attorno ad un secondo asse orizzontale passante per il suo centro. Le ruote sono inizialmente ferme. All'istante t = 0 la ruota A entra in rotazione e aumenta progressivamente la sua velocità al ritmo costante di 0.4 π rad s^{-2} trascinando in rotazione, mediante la cinghia di trasmissione, la ruota B. Calcolare:

(a) il valore numerico del rapporto $\rho = \omega_B/\omega_A$ fra le velocità angolari di rotazione delle due ruote;

(b) dopo quanto tempo la ruota B ha velocità angolare ω = 10 rad s^{-1}.



Soluzione

Per la ruota A si tratta di moto circolare, con accelerazione angolare uniforme.

Dati: Raggio delle due ruote R = 30 cm, r = 12 cm;

Velocità angolare iniziale della ruota A: $\omega_{A0} = 0$ e della ruota B $\omega_{B0} = 0$;

Accelerazione angolare della ruota A $\alpha_A = 0.4\pi$ rad s^{-2}.

Velocità angolare finale della ruota B ω_{BF} = 10 rad s^{-1}.

La ruota A si muove di moto circolare uniformemente accelerato, con accelerazione angolare α_A; sappiamo inoltre che vale la condizione iniziale $\omega_{A0} = \omega_A(t = t_0) = 0$; l'equazione per la velocità angolare della ruota A sarà dunque:

$$\omega_A(t) = \alpha_A \cdot t \qquad \text{(i)}$$

Per un punto sul bordo della ruota A, la velocità tangenziale $v_A(t)$ sarà:

$$v_A(t) = R \cdot \omega_A(t) = R \cdot \alpha_A \cdot t \qquad \text{(ii)}$$

Ora, grazie al ruolo della cinghia, per un punto sul bordo della ruota B la velocità tangenziale $v_B(t)$ deve essere la stessa; avremo dunque

$$v_B(t) = r \cdot \omega_B(t) = v_A(t) = R \cdot \omega_A(t) = R \cdot \alpha_A \cdot t \qquad \text{(iii)}$$

Dalla (iii) ricaviamo in particolare $r \cdot \omega_B(t) = R \cdot \omega_A(t)$ da cui si ottiene subito il rapporto tra le due velocità angolari:

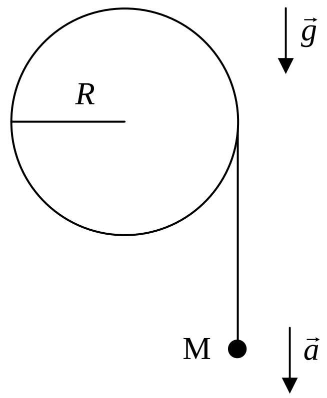
$$\rho = \frac{\omega_B(t)}{\omega_A(t)} = \frac{R}{r} = \frac{30cm}{12cm} = 2.5,$$

che risponde alla domanda (a).

Ancora dalla (iii) ricaviamo $\omega_B(t) = \frac{R \cdot \alpha_A \cdot t}{r}$. Imponendo che $\omega_B(t_F) = \frac{R \cdot \alpha_A \cdot t_F}{r} = \omega_{BF}$, si ottiene facilmente $t_F = \frac{r \cdot \omega_{BF}}{R \cdot \alpha_A} = \frac{12cm \cdot 10 \cdot \pi \cdot rad \cdot s^{-1}}{30cm \cdot 0.4 \cdot \pi \cdot rad \cdot s^{-2}} = 10s$, in risposta alla domanda (b).

Problema n. 6:

Un disco avente raggio R = 0.1 m ruota nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro e perpendicolare al piano del disco. Lungo la circonferenza esterna del disco è avvolta una corda; un corpo puntiforme M, attaccato all'estremità libera della corda, cade per azione della gravità. Il moto di M è uniformemente accelerato, ma la sua accelerazione $\vec{a}$ è minore di quella $\vec{g}$ dovuta alla forza peso. All'istante t = 0 la velocità del corpo M è v_0 = 0.04 m/s, e 2 s più tardi M è caduto di 0.2 m. Calcolare, durante il moto di caduta del corpo M, le componenti $a_T(t)$ e $a_N(t)$ (tangenziale e normale) dell'accelerazione di un punto del bordo del disco in funzione del tempo.



Soluzione

Per il corpo M si tratta di moto rettilineo con accelerazione uniforme.

Dati: Raggio della ruota R = 0.1 m

Velocità a t = 0 del punto M: $v_0 = v(t=0) = 0.04$ m/s;

Posizione del punto M al tempo t^* = 2 s: $h = z(t^*) = 0.2\,\text{m}$

Per descrivere il moto del punto M, scegliamo un sistema di riferimento con un asse che chiamiamo z, allineato con la gravità e con verso concorde ad essa. Poniamo l'origine di questo asse nella posizione occupata dal punto M al tempo t = 0, in modo tale che $z_0 = z(t=0) = 0$. Chiamando a il modulo dell'accelerazione di M, ed avendo inoltre $v(t=0) = v_0$, possiamo scrivere:

$$a(t) = a \qquad \text{(i)},$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad \text{(ii)},$$

$$z(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad \text{(iii)}$$

L'equazione (iii), calcolata all'istante t^* = 2 s, durante il quale il corpo ha percorso diventa h = 0.2 m, diventa

$$z(t^*) = v_0 \cdot t^* + \frac{1}{2} a \cdot (t^*)^2 = h \qquad \text{(iv)}$$

Dalla relazione (iv) ricaviamo $a = 2\frac{(h - v_0 t^*)}{(t^*)^2} = \frac{(0.1m - 0.04m \cdot 2s)}{(2s)^2} = 0.06\frac{m}{s^2}$.

Essendo la corda inestensibile, l'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo del disco sarà descritto anch'esso dalla (i). Avremo dunque

$$a_T(t) = a = 0.06\frac{m}{s^2}$$

Analogamente, la velocità tangenziale di un punto sul bordo del disco sarà data da $v_T(t) = v(t) = v_0 + a \cdot t = (0.04 + 0.06 \cdot t)m/s$. L'accelerazione normale $a_N(t)$ sarà dunque

$$a_N(t) = \frac{(v_T(t))^2}{R} = \frac{(v_0 + a \cdot t)^2}{R} = \left(0.016 + 0.048 \cdot t + 0.036 t^2\right)\frac{m}{s^2}$$