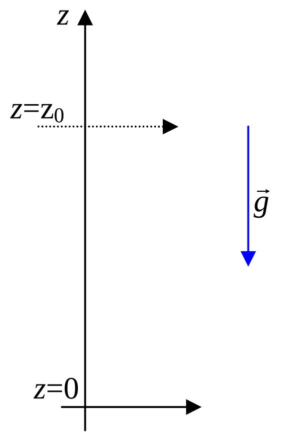
Cinematica del punto materiale: moto rettilineo

Esercizio 1

Si consideri un vaso di fiori che cade da un davanzale che si trova ad un'altezza di 6.2 m da terra. Determinare:

(a) quanto tempo impiega ad arrivare a terra;
(b) di quanto è caduto il vaso dopo 0.5 s;
(c) il modulo della velocità dopo 0.5 s;
(d) il modulo dell'accelerazione del vaso dopo 0.5 s.



Soluzione

Si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato; scegliamo un sistema di riferimento con direzione allineata con la gravità, verso opposto ad essa, ed origine "a terra".

Dati: Velocità iniziale $v_0 = 0$.

Posizione iniziale $z_0 = +6.2$ m

Accelerazione di gravità $g = 9.8$ ms^{-2}

Supponendo che il tempo sia misurato a partire da $t_0 = 0$, si ha evidentemente:

$a(t) = -g$ (i)

Integrando la (i) con le condizioni iniziali $t_0 = 0$, $v_0 = v(t = t_0) = 0$, $z_0 = z(t = t_0)$, si ottengono le leggi orarie per la velocità e la posizione:

$v(t) = -g \cdot t$ (ii)

$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (iii)

(a) Al tempo *t**, quando l'oggetto "arriva a terra" , la sua posizione è $z(t*) = 0$. Dunque l'equazione (iii) sarà

$$0 = z(t*) = z_0 - \frac{1}{2} g \cdot (t*)^2$$

da cui

$$(t*)^2 = \frac{2z_0}{g}$$

ovvero $t* = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.2\text{m}}{9.8\,\text{m/s}^2}} = 1.125\text{s} \approx 1.1\text{s}$.

(b) Per calcolare lo spazio percorso dopo $t_1 = 0.5\text{s}$, devo trovare la posizione dell'oggetto $z(t_1)$. Applichiamo la (iii) per avere

$$z(t_1) = z_0 - \frac{1}{2} g \cdot (t_1)^2$$

da cui lo spazio percorso sarà

$$z_0 - z(t_1) = \frac{1}{2} g \cdot (t_1)^2 = \frac{9.8\,\mathrm{m/s^2}}{2} \cdot (0.5\mathrm{s})^2 = 1.225\mathrm{m} \approx 1.2\mathrm{m}$$

(c) Il modulo della velocità dopo $t_1 = 0.5\mathrm{s}$ si ottiene applicando la (ii):

$$|v(t_1)| = |-g \cdot t_1| = 4.9\,\mathrm{m/s}$$

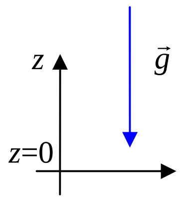
(d) Il modulo dell'accelerazione dopo $t_1 = 0.5\mathrm{s}$ si ottiene applicando la (i):

$$|a(t_1)| = |-g| = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

Esercizio 2

Un sasso viene lanciato verticalmente verso l'alto all'istante t=0, raggiunge un'altezza massima di 14.0 m al di sopra della quota di lancio. Determinare:
(a) il modulo della velocità iniziale;
(b) in quale istante ripassa dalla quota di lancio mentre ricade.

Soluzione



Si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato; scegliamo un sistema di riferimento con direzione allineata con la gravità, verso opposto ad essa, ed origine alla quota di lancio .

Dati: Quota massima raggiunta $z_{MAX} = +14.0\,\mathrm{m}$.
Posizione iniziale $z_0 = 0$.
Accelerazione di gravità $g = 9.8$ ms^{-2}.

Integrando l'equazione per l'accelerazione $a(t) = -g$ (i)
con le condizioni iniziali $t_0 = 0$, $v(t = t_0) = v_0$, $z_0 = z(t = t_0) = 0$, si ottengono le leggi orarie per la velocità e la posizione:

$v(t) = v_0 - g \cdot t$ (ii)

$z(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (iii)

(a) L'altezza massima z_{MAX} si raggiunge quando il moto dell'oggetto si inverte, e questo avviene ad un tempo t^* in cui la velocità si annulla, cioè, usando la (ii)

$$0 = v(t^*) = v_0 - g \cdot t^* \text{ da cui ricaviamo } t^* = \frac{v_0}{g}.$$

L'altezza massima z_{MAX} sarà di conseguenza data dalla (iii):

$$z_{MAX} = z(t^*) = v_0 \cdot t^* - \frac{1}{2} g \cdot (t^*)^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

per cui la velocità iniziale sarà

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot z_{MAX}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 14.0\mathrm{m}} = 16.56 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 16.6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b) La quota di lancio e' l'origine $z_0 = 0$ delle coordinate per cui si avrà che nell'istante in cui essa viene attraversata la (iii) diventa

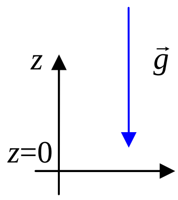
$$0 = z(t') = v_0 \cdot t' - \frac{1}{2} g \cdot (t')^2 = t' \left(v_0 - \frac{1}{2} g \cdot t' \right).$$

Questa equazione ha due soluzioni: $t' = 0$ è quella banale che descrive l'istante iniziale del moto, l'altra si ha per $t' = \frac{2 \cdot v_0}{g} = \frac{2 \cdot 16.6 \,\mathrm{m/s}}{9.8 \,\mathrm{m/s^2}} = 3.39\mathrm{s} \approx 3.4\mathrm{s}$.

Esercizio 3

Una palla calciata verticalmente verso l'alto colpisce un filo del telefono posto a 5.1 m sopra il punto di lancio con velocità di modulo pari a 0.7 m/s. Determinare la velocità iniziale della palla.

Soluzione



Si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato, in presenza di accelerazione di gravità $g = 9.8 \,\mathrm{m/s^2}$; scegliamo un sistema di riferimento con direzione allineata con la gravità, verso opposto ad essa, ed origine alla quota di lancio.

Dati: Quota raggiunta $z_{FILO} = +5.1\,\mathrm{m}$.

Velocità all'impatto $v_{FILO} = 0.7\,\mathrm{m/s}$.

L'equazione per l'accelerazione può così essere integrata, con condizioni al iniziali $t_0 = 0$, $v(t = t_0) = v_0$, $z(t = t_0) = z_0 = 0$, a dare le relazioni:

$a(t) = -g$ (i)

$v(t) = v_0 - g \cdot t$ (ii)

$z(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (iii)

Chiamando t_{FILO} l'istante dell'impatto con il filo, le relazioni (ii) e (iii) diventano rispettivamente

$$v(t_{FILO}) = v_{FILO} = v_0 - g \cdot t_{FILO} \qquad (1)$$

$$z(t_{FILO}) = z_{FILO} = v_0 \cdot t_{FILO} - \frac{1}{2} g \cdot t_{FILO}^2 \qquad (2).$$

Dall'equazione (1) isoliamo $t_{FILO} = \frac{v_0 - v_{FILO}}{g}$ e dunque l'equazione (2) diventa

$$z_{FILO} = v_0 \cdot \left(\frac{v_0 - v_{FILO}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 - v_{FILO}}{g} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot g} \left(v_0^2 - v_{FILO}^2 \right)$$ da cui infine

$$v_0 = \pm \sqrt{v_{FILO}^2 + 2 \cdot g \cdot z_{FILO}}$$

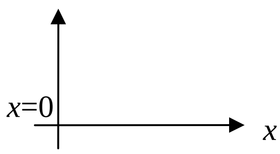
Delle due soluzioni, noi siamo naturalmente interessati a quella con $v_0 \geq 0$, che corrisponde al pallone che sta salendo. La soluzione con $v_0 \leq 0$ corrisponderebbe al passaggio del pallone alla quota di lancio durante la ridiscesa, ma non ci interessa in quanto il primo impatto del pallone con il filo interrompe il moto. Numericamente:

$$v_0 = \sqrt{\left(0.7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5.1\,\mathrm{m}} = 10.025 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Esercizio 4

Un velocista corre i 100 m piani in 10.00 s. Si approssimi il suo moto ipotizzando che egli abbia un'accelerazione costante nei primi 16 m e poi un velocità costante nei rimanenti 84 m. Si determini:

(a) il tempo impiegato per percorrere i primi 16 m;
(b) il tempo impiegato per percorrere i rimanenti 84 m;
(c) il modulo dell'accelerazione nei primi 16 m;
(d) la sua velocità finale.



Soluzione

Si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato nella prima fase, e di moto rettilineo uniforme nella seconda fase; scegliamo come origine per le coordinate il punto di partenza.

Dati: Spazio totale percorso $x_2 = 100\,\mathrm{m}$ in $t_2 = 10.00$ s.
Accelerazione costante per t_1 secondi, spazio percorso $x_1 = 16\,\mathrm{m}$

a) Separiamo le due fasi del moto. Tra il tempo $t_0 = 0$ ed il tempo t_1 si ha moto uniformemente accelerato con accelerazione *a*; la velocità sarà dunque

$$v(t \leq t_1) = a \cdot t$$

Dunque la legge oraria per la prima fase del moto è $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, che calcolata al tempo $t = t_1$ fornisce

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 \qquad \text{(i)}$$

Tra il tempo t_1 ed il tempo t_2 si ha moto rettilineo uniforme con velocità

$$v_1 = v(t \geq t_1) = a \cdot t_1. \qquad \text{(ii)}$$

Per la seconda fase la legge oraria si ottiene integrando l'equazione (ii) con le condizioni iniziali t_1 e v_1:

$$x(t) - x_1 = v_1 \cdot (t - t_1) \qquad \text{(iii)}$$

La (iii) calcolata al tempo $t = t_2$ diventa in particolare

$$x_2 - x_1 = v_1 \cdot (t_2 - t_1) \qquad \text{(iv).}$$

A questo punto abbiamo un sistema di tre equazioni, la (i), la (ii) e la (iv), con tre incognite: *a*, *t₁*, *v₁*. Risolviamo il sistema usando prima la (ii) dentro la (iv):

$$x_2 - x_1 = a \cdot t_1 \cdot (t_2 - t_1).$$

Dalla (i) ricaviamo adesso $\frac{2 \cdot x_1}{t_1} = a \cdot t_1$ che sostituiamo nella relazione precedente a dare

$$t_1 (x_2 - x_1) = (t_2 - t_1) \cdot 2x_1$$

che facilmente porta a

$$t_1 = \frac{2 \cdot x_1 \cdot t_2}{x_2 + x_1} = \frac{2 \cdot 16\text{m} \cdot 10.00\text{s}}{(100 + 16)\text{m}} = 2.7586\text{s} \approx 2.8\text{s}$$

c) La (ii) ci dice ora che $a = \frac{2x_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 16\text{m}}{(2.7586)^2 \text{s}^2} \cdot = 4.205 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

d) La velocità finale è quella costante per la seconda fase data dalla (i):

$$v_1 = a \cdot t_1 \approx 11.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esercizio 5

L'automobile A viaggiando con velocità costante di 18 km/h su una strada rettilinea sorpassa l'automobile B, che è ferma ad un segnale di stop. Nell'istante in cui A e B sono affiancate, B accelera con un'intensità costante di 4.6 m/s^2. Determinare:

(a) il tempo necessario a B per raggiungere A;
(b) la distanza percorsa da B in tale intervallo di tempo;
(c) il modulo della velocità di B quando sorpassa A.

Soluzione

Dati: automobile A in moto rettilineo uniforme, velocità
$v_A = 18\,\text{km/h} = 5.0\,\text{m/s}$

automobile B in moto rettilineo uniformemente accelerato, $v_{B0} = 0$, $a_B = 4.6\,\mathrm{m/s^2}$

Scegliamo un sistema di riferimento allineato con il moto delle due auto, con l'origine nella posizione dell'auto B fintanto che è ferma. Le leggi orarie per le automobili A e B, scegliendo $t_0 = 0$, sono date da

$v_A(t) = v_A$ (i)

$x_A(t) = v_A \cdot t$ (ii)

$a_B(t) = a_B$ (iii)

$v_B(t) = a_B \cdot t$ (iv)

$x_B(t) = \frac{1}{2} a_B \cdot t^2$ (v)

(a) B raggiunge A quando le loro posizioni coincidono, e questo avviene ad in tempo *t** in cui $x_A(t^*) = x_B(t^*)$ ossia $v_A \cdot t^* = \frac{1}{2} a_B \cdot (t^*)^2$.

Questa equazione ha due soluzioni: una è quella banale per $t^* = 0$, l'altra si ha per

$$t^* = \frac{2v_A}{a_B} = 2.17\,\mathrm{s} \approx 2.2\,\mathrm{s}$$

(b) Noto *t** dal punto (a), la distanza percorsa dall'auto B si ottiene applicando la legge oraria, relazione (v):

$$x_B(t^*) = \frac{1}{2} a_B (t^*)^2 = \frac{1}{2} a_B \left(\frac{2v_A}{a_B}\right)^2 = \frac{2v_A^2}{a_B} = \frac{2 \cdot 25\,\mathrm{m^2/s^2}}{4.6\,\mathrm{m/s^2}} = 10.87\,\mathrm{m} \approx 11\mathrm{m}$$

(c) Noto *t** dal punto (a), la velocità dell'auto B al momento del sorpasso si ottiene applicando la legge oraria per la sua velocità, relazione (iv):

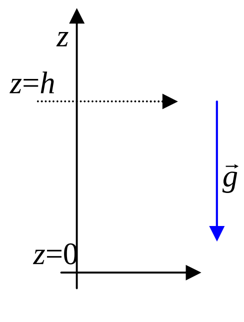
$$v_B(t^*) = a_B \cdot t^* = 2v_A = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Esercizio 6

Un uomo lascia cadere dalla sommità di una torre un sasso di massa $m = 0.5$ kg. Dopo 5.36 s l'uomo ode il tonfo dovuto all'impatto del sasso con il suolo. Assumendo che la velocità del suono nell'aria v_s sia di 340 m/s e l'accelerazione di gravità sia $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, si calcoli:

(a) l'altezza *h* della torre;

(b) la velocità d'impatto v_{IMP} del sasso con il suolo



Soluzione

Dati: Massa del sasso $m = 0.5\,\text{kg}$.

Tempo di caduta $t_{TOT} = 5.36\,\text{s}$.

Velocità del suono $v_s = 340$ m/s

Separiamo il problema in due parti. Per la prima parte, fino a quando il sasso tocca il suolo, si tratta di moto uniformemente accelerato, in presenza di accelerazione di gravità $g = 9.8\,\text{m/s}^2$; scegliamo un sistema di riferimento con direzione allineata con la gravità, verso opposto ad essa, ed origine al livello del suolo. L'equazione per l'accelerazione può così essere integrata, con condizioni iniziali $t_0 = 0$, $v(t = t_0) = 0$, $z(t = t_0) = h$, a dare le relazioni:

$a(t) = -g$ (i)

$v(t) = -g \cdot t$ (ii)

$z(t) = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (iii)

Chiamiamo t_{IMP} l'istante dell'impatto con il suolo, che avviene quando $z = z(t_{IMP}) = 0$. La legge oraria (iii) fornisce dunque

$$h = z(t_{IMP}) = \frac{1}{2} g \cdot t_{IMP}^2 \quad \text{(iv)}$$

D'altra parte il suono impiega $t_{TOT} - t_{IMP}$ per propagarsi con velocità costante v_s fino alla quota di lancio, ossia

$$h = v_s (t_{TOT} - t_{IMP}) \quad \text{(v)}$$

Eguagliando la (iv) e la (v) e riordinando si ottiene un'equazione per t_{IMP}:

$$\frac{1}{2} g \cdot t_{IMP}^2 + v_s \cdot t_{IMP} - v_s \cdot t_{TOT} = 0$$

che ha come soluzioni $t_{IMP}^* = \dfrac{-v_s \pm \sqrt{v_s^2 + 2 \cdot v_s \cdot g \cdot t_{TOT}}}{g} = \dfrac{v_s}{g}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{2 \cdot g \cdot t_{TOT}}{v_s}}\right)$.

Scegliamo evidentemente la soluzione positiva $t_{IMP}^* \geq 0$, e da questa otteniamo infine

$h = v_s (t_{TOT} - t_{IMP}^*) = v_s t_{TOT} + \dfrac{v_s^2}{g}\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{2 \cdot g \cdot t_{TOT}}{v_s}}\right) = 122.48\text{m} \approx 122\text{m}$ che risponde alla domanda (a). Analogamente sostituiamo t_{IMP}^* nella (ii) ed abbiamo

$$v_{IMP} = g \cdot t_{IMP}^* = v_s \left(-1 + \sqrt{\frac{2g \cdot t_{TOT}}{v_s}}\right) = 49\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esercizio 7

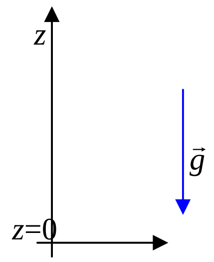
Un piccolo razzo viene lanciato in direzione verticale dalla superficie terrestre e si allontana da terra con un'accelerazione verticale costante pari a 24.5 ms^{-2} per 60 secondi. In tale intervallo di tempo il combustibile viene completamente consumato e il razzo continua poi il suo volo come una particella libera. Assumendo che l'attrito dell'aria sia trascurabile, calcolare:

(a) la velocità posseduta dal razzo nell'istante in cui in combustibile si esaurisce;

(b) la massima altezza raggiunta dal razzo rispetto al suolo;

(c) il tempo di volo del razzo.

Disegnare, infine, il diagramma orario completo della velocità e dello spostamento dal suolo.



Soluzione

Il problema si può dividere in due fasi, entrambe con moto rettilineo uniformemente accelerato; scegliamo un sistema di riferimento con direzione allineata con la gravità, verso opposto ad essa, ed origine alla quota di lancio (livello del suolo). Per la prima parte ($t \le t_1$), durante la spinta, l'accelerazione a_s è positiva; nella seconda parte ($t \ge t_1$), l'accelerazione è quella di gravità, con modulo g ed è negativa.

Dati: Durata della fase accelerata $t_1 = 60\,\mathrm{s}$
Accelerazione rispetto al suolo $a = 24.5\,\mathrm{m/s^2}$.
Accelerazione di gravità $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

Per la prima parte si ottine facilmente la legge oraria integrando l'equazione per l'accelerazione, con condizioni iniziali $t_0 = 0$, $v_0 = v(t = t_0) = 0$, $z_0 = z(t = t_0) = 0$, a dare le relazioni:

$$a(t \le t_1) = a_s \qquad \text{(i)}$$

$$v(t \le t_1) = a_s \cdot t \qquad \text{(ii)}$$

$$z(t \le t_1) = \frac{1}{2} a_s \cdot t^2 \qquad \text{(iii)}$$

In particolare al tempo t_1 si ha $v_1 = v(t_1) = a_s \cdot t_1 = 1470 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (il che risponde alla domanda (a)), $z_1 = z(t_1) = \frac{1}{2} a_s \cdot t_1^2 = 4.41 \cdot 10^4\,\mathrm{m}$. Questi dati si usano come condizioni iniziali per integrare l'equazione del moto per la seconda parte

$a(t \geq t_1) = -g$ ed ottenere:

$$v(t \geq t_1) = v_1 - g(t - t_1) \text{ (iv) e}$$

$$z(t \geq t_1) = z_1 + v_1(t - t_1) - \frac{1}{2} g(t - t_1)^2 \text{ (v).}$$

La quota massima si raggiunge all'inversione del segno della velocità, ossia per t^* tale che $v(t^*) = 0$. Dalla (iv) si ottiene $t^* = t_1 + \frac{v_1}{g}$ che sostituito nella (v) fornisce $z_{MAX} = z(t^*) = z_1 + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} = 1.54 \cdot 10^5 \,\mathrm{m}$.

Il tempo di volo del razzo t_v è quello per cui $z(t_v) = 0$, per cui la (v) diventa $0 = z(t_v) = z_1 + v_1(t_v - t_1) - \frac{1}{2} g(t_v - t_1)^2$. Scritta in questa forma, ed essendo t_1 dato, risulta evidentemente più agevole risolvere per $(t_v - t_1)$, ricavando

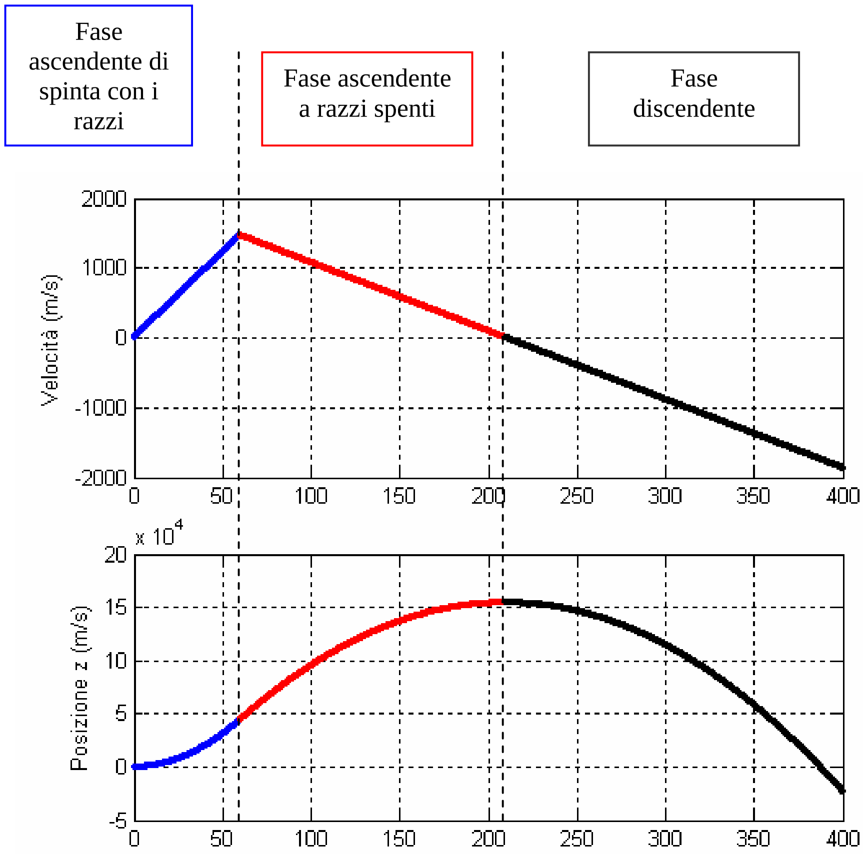
$$t_v - t_1 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2 \cdot g \cdot z_1}}{g}.$$

Dobbiamo scegliere la soluzione con $t_v \geq t_1$ per cui

$t_v = t_1 + \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2 \cdot g \cdot z_1}}{g} = 387.48\,\mathrm{s} \approx 387\,\mathrm{s}$.

Questo tra l'altro ci permette di osservare come le equazioni che descrivono il moto possono essere scritte nella forma (v) che le rende indipendenti dalla scelta delle condizioni iniziali (t_1, z_1).

Il diagramma orario per la velocità e la posizione del razzo è riportato di seguito:


Fase ascendente di spinta con i razzi
Fase ascendente a razzi spenti
Fase discendente
Velocità (m/s)
2000
1000
0
-1000
-2000
0
50
100
150
200
250
300
350
400
x 10^4
20
15
10
5
0
-5
Posizione z (m/s)
0
50
100
150
200
250
300
350
400