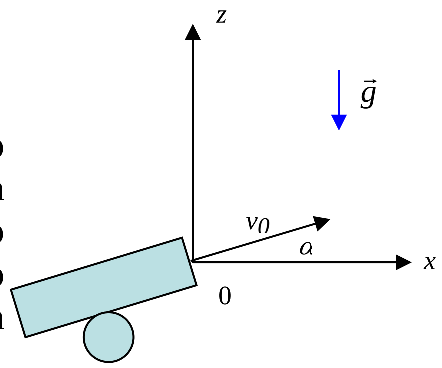
Cinematica del punto materiale: caduta di gravi

Problema 1

Un proiettile viene sparato da un cannone a un angolo di 35° rispetto al piano orizzontale. Esso colpisce il suolo a 4 km dal canone. Calcolare:

(a) la velocità di bocca del cannone;
(b) il tempo di volo;
(c) la massima altezza raggiunta dal proiettile durante il suo volo;
(d) la velocità del proiettile nel punto di massima quota.



Soluzione

Si tratta di moto in due dimensioni. Scegliamo il nostro sistema di riferimento con direzione verticale *z* allineata con la gravità, verso opposto ad essa, ed origine nel punto di lancio. Lungo la componente orizzontale *x* si ha moto rettilineo uniforme; lungo la direzione verticale *z* si ha moto uniformemente accelerato.

Dati: Angolo iniziale formato dalla velocità con il suolo (velocità di bocca del cannone) $\alpha = 35° = 6.1 \cdot 10^{-2}$ rad.

Posizione di impatto $z_{VOLO} = 0$, $x_{VOLO} = 4$km.

Accelerazione di gravità $g = 9.8$ ms^{-2}

Ricaviamo le leggi orarie per le due coordinate del proiettile dalle equazioni del moto. Chiamando v_0 il modulo della velocità iniziale del proiettile, per la componente orizzontale *x* il moto è rettilineo uniforme, per cui avremo evidentemente:

$$\ddot{x}(t) = 0$$

La legge oraria per la componente orizzontale della velocità si ricava a partire da questa relazione, con la condizione iniziale data dalla proiezione della velocità iniziale v_0 lungo la direzione orizzontale: $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = v_0 \cos(\alpha)$ da cui

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) \qquad \text{(i)}$$

Ed infine ricaviamo la legge oraria per la componente orizzontale dello spostamento *x*, applicando la condizione iniziale $x_0 = x(t=0) = 0$

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \qquad \text{(ii)}$$

Per la componente verticale *z* il moto è rettilineo uniformemente accelerato, per cui avremo evidentemente:

$$\ddot{z}(t) = -g$$

Abbiamo poi le condizioni iniziali $\dot{z}_0 = \dot{z}(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$ da cui

$$\dot{z}(t) = v_0 \sin(\alpha) - g \cdot t \qquad \text{(iii)}$$

ed infine, avendo assunto $z_0 = z(t=0) = 0$ la legge oraria per la componente verticale dello spostamento *z*:

$$z(t) = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad \text{(iv)}$$

All'istante dell'impatto del proiettile con il suolo, che chiamiamo tempo di volo t_{VOLO}, il proiettile si trova alla quota $z = 0$ ed alla distanza $x = x_{VOLO}$. Esplicitiamo tutto questo scrivendo le relazioni (ii) e (iv) che diventano dunque:

$$x_{VOLO} = x(t_{VOLO}) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t_{VOLO} \qquad (1)$$

$$0 = z(t_{VOLO}) = v_0 \sin(\alpha) \cdot t_{VOLO} - \frac{1}{2} g \cdot t_{VOLO}^2 \qquad (2)$$

Si tratta di un sistema a due equazioni, con le due incognite t_{VOLO} e v_0. La (2) ci dice che $t_{VOLO} = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$; sostituiamo questo risultato nella (1) ed abbiamo $x_{VOLO} = \frac{v_0^2}{g} \cos(\alpha) \cdot 2\sin(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ da cui $v_0 = \sqrt{\frac{x_{VOLO} \cdot g}{\sin(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^3 \,\mathrm{m} \cdot 9.8 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}{\sin(2 \cdot 6.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad})}} = 204.24 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 204 \mathrm{m}$ che risponde alla domanda (a). Sostituendo nella (2) si ottiene $t_{VOLO} = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{2 \cdot 204.24 \mathrm{ms}^{-1} \sin(6.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad})}{9.8 \mathrm{m\,s}^{-2}} = 23.91\mathrm{s} \approx 23.9\mathrm{s}$ che risponde alla domanda (b).

Per la domanda (c): il proiettile raggiunge la massima altezza all'istante t_{MAX} per cui la componente verticale della velocità si annulla; applicando la (iii):

$$\dot{z}(t_{MAX}) = 0 = v_0 \sin(\alpha) - g \cdot t_{MAX} \text{ da cui } t_{MAX} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}.$$

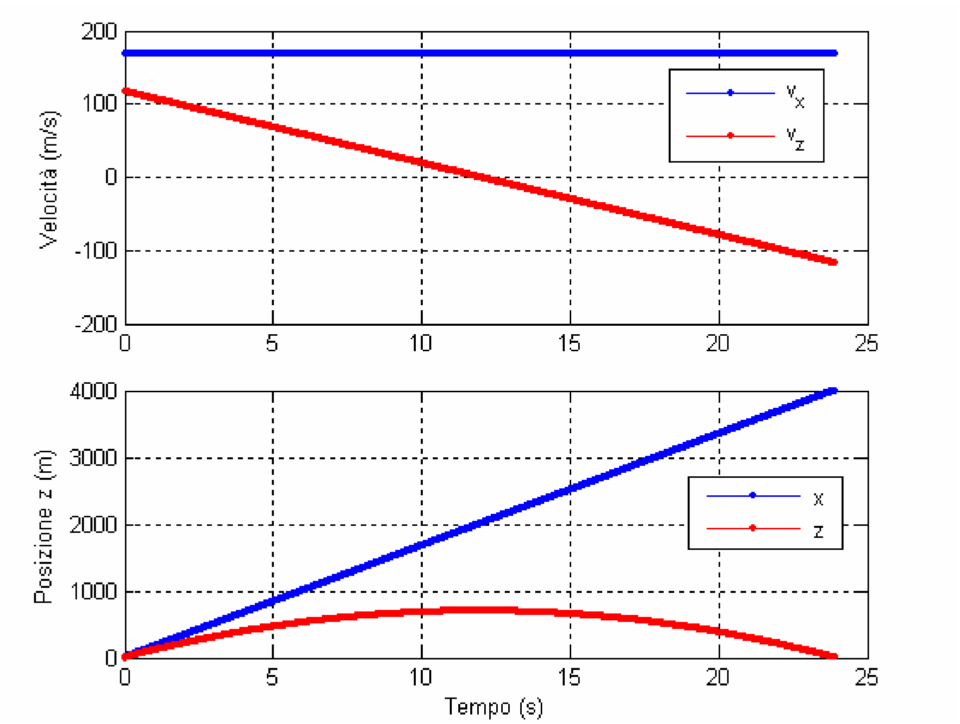
Sostituiamo nella (iv) ed abbiamo:

$$H_{MAX} = z(t_{MAX}) = v_0 \sin(\alpha) \cdot t_{MAX} - \frac{1}{2} g \cdot t_{MAX}^2 = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \approx 700\,\mathrm{m}$$

Per la domanda (d): nel punto di massima quota la velocità del proiettile ha componente zero lungo la direzione verticale, e dunque la velocità è

$$|\vec{v}(t_{MAX})| = |\dot{x}(t_{MAX})| = |v_0 \cos(\alpha)| = 204.24 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(6.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad}) = 167.31 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 167 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(abbiamo usato la relazione (ii) nell'ultimo passaggio).

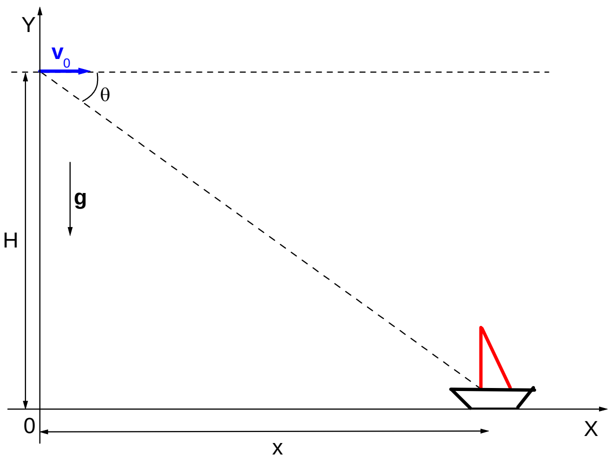


200
100
0
-100
-200
Velocità (m/s)
v_x
v_z
0
5
10
15
20
25
4000
3000
2000
1000
0
Posizione z (m)
x
z
Tempo (s)

Problema n. 2:

Un bombardiere vola a 430 km/h alla quota costante di 1200 m verso un punto posto sulla verticale di una nave ormeggiata in mare aperto. Sotto quale angolo visuale (rispetto alla direzione orizzontale) il pilota dovrebbe lanciare una bomba per essere certo di colpire la nave?

Soluzione:



Dati:

$H = 1200m$

$\left|\vec{v}_0\right| = 430 \, {Km}/{h}$

Determinare l'angolo visuale θ,sotto il quale il pilota dovrebbe sganciare la bomba per colpire la nave.

Scegliamo un sistema di riferimento XY come quello mostrato in figura e definiamo l'angolo visuale θ come l'angolo individuato dall'orizzonte (nel nostro caso una retta parallela all'asse X) con la retta congiungente istantaneamente il bombardiere alla nave. Chiamiamo $\vec{v}_0$ la velocità con cui il bombardiere viaggia alla quota costante di $H = 1200m$: dato che esso vola con velocità costante sempre alla stessa quota il vettore $\vec{v}_0$ sarà un vettore parallelo all'asse X e costante in modulo, direzione e verso (come mostrato in figura)

Nell'istante in cui la bomba viene sganciata dal bombardiere essa avrà una velocità iniziale coincidente in modulo, direzione e verso con quella posseduta dal bombardiere, quindi pari a $\vec{v}_0$.

Analizziamo ora il moto seguito da un'ipotetica bomba sganciata dal bombardiere: abbiamo un caso di moto balistico, con accelerazione costante pari a $\vec{g}$, accelerazione di gravità, che avviene nel piano XY. La bomba sganciata dall'aereo seguirà quindi nella sua caduta una traiettoria parabolica, fino a impattare con la superficie marina (nel nostro caso, data la scelta del sistema di riferimento, con l'asse X): il problema ci chiede di determinare l'angolo θ sotto il quale il pilota deve sganciare la bomba, affinché essa impatti con la nave cioè affinché la sua traiettoria intercetti la nave stessa. (Si noti che, implicitamente, ci viene chiesto di determinare, attraverso l'angolo θ la distanza x dal bombardiere a cui deve trovarsi la nave affinché la bomba la colpisca)

Per risolvere il problema ricaviamo la legge oraria per il moto utilizzando le ben note relazioni: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, dove $\vec{a}$ e $\vec{v}$ sono i vettori accelerazione e velocità, mentre $\vec{r}$ è il vettore posizione che ad ogni istante mi individua la posizione della palla nello spazio. Dall'integrazione di tali relazioni con le condizioni iniziali $\vec{v}(t = t_0) = \vec{v}_0$ e $\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0$ e ricordando che l'accelerazione $\vec{a}$ è costante (in direzione, verso e modulo) e pari a $\vec{g}$, si ottengono le leggi orarie:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \qquad (1)$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0)}$$

Riscriviamo ora le leggi (1) in termini di componenti lungo X e Y, ricordando che l'accelerazione $\vec{a}$ ha una componente non nulla solo lungo l'asse Y e pari, in modulo, a $+g$:

$$\boxed{\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{cases}}$$

In particolare, consideriamo il secondo sistema di equazioni di (1) che descrive ad ogni istante la posizione (in termini di componenti lungo X e Y) della bomba durante il suo moto, dal momento in cui viene sganciata all'istante in cui colpisce la nave.
Nel nostro caso, con il sistema di riferimento scelto, avremo che $x_0 = 0$ e $y_0 = H$; inoltre, per comodità possiamo porre l'istante iniziale (cioè l'istante in cui la bomba viene sganciata e inizia il suo moto verso la nave) $t_0 = 0$. Sostituendo tali condizioni otteniamo la legge oraria per la bomba:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = H - \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}$$

Come abbiamo detto, la velocità iniziale con cui viene sganciata la bomba coincide con il vettore $\vec{v}_0$, quindi le componenti lungo le direzioni X e Y possono essere scritte come:

$v_{0x} = v_0$

$v_{0y} = 0$

Sostituendo nelle leggi del moto otteniamo finalmente:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il problema ci chiede di determinare il valore dell'angolo θ affinché la bomba colpisca la nave, ovvero ci viene chiesto di determinare θ tale che la traiettoria (parabolica) seguita dalla bomba intercetti la nave che si trova nel punto $(x, y = 0)$.

Il problema non ci fornisce la posizione lungo l'asse X della nave, cioè il valore della coordinata x, ma possiamo esprimerla in funzione della quota H a cui vola il bombardiere e dell'angolo θ, attraverso semplici considerazioni trigonometriche: avremo quindi che $x = H \frac{\cos\theta}{sen\theta}$

Utilizziamo quindi le equazioni precedenti e imponiamo la condizione che il punto $(x, y = 0)$ soddisfi alle leggi orarie, ovvero:

$$\begin{cases} H \frac{\cos\theta}{sen\theta} = v_0 t \\ 0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto (ad esempio per sostituzione) ci fornisce il valore dell'angolo θ cercato:

$$\begin{cases} t = H \frac{\cos\theta}{v_0 sen\theta} \\ 0 = H - \frac{1}{2} g \left(H \frac{\cos\theta}{v_0 sen\theta} \right)^2 \end{cases}$$

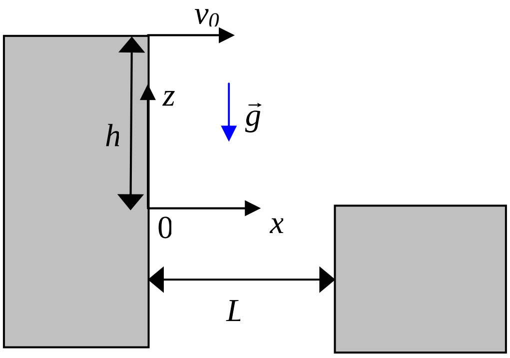
$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{gH^2}{v_0^{\;2}} \cdot \frac{\cos\theta^2}{sen\theta^2}$$

$$\Rightarrow \quad tg\theta = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{gH}{2}} = \frac{1}{430 \cdot 10^3 m \big/ 3.6 \cdot 10^3 s} \sqrt{\frac{9.8\, m/s^2 \cdot 1200 m}{2}} = 0.64$$

Da cui otteniamo infine la soluzione: $\boxed{\theta = acrtg(0.64) = 32.69 = 32°42'}$

Problema 3
Un acrobata cinematografico deve attraversare di corsa un terrazzo di un edificio e lanciarsi orizzontalmente nel vuoto per atterrare sul tetto di un edificio vicino, che si trova a una distanza di 5.2 m dal primo. Il dislivello fra le sommità dei due edifici è pari a 4.8 m. Quale dovrebbe essere la <u>velocità orizzontale minima</u> dell'acrobata per evitare di sfracellarsi al suolo?

Soluzione



Si tratta di moto in due dimensioni. Scegliamo il nostro sistema di riferimento con direzione verticale *z* allineata con la gravità, verso opposto ad essa; poniamo l'origine in un punto perpendicolare al punto di salto, all'altezza della quota di atterraggio (vedi disegno). Lungo la componente orizzontale *x* si ha moto rettilineo uniforme; lungo la direzione verticale *z* si ha moto uniformemente accelerato.

Dati: Distanza orizzontale degli edifici $L = 5.2$ m.
Distanza verticale degli edifici $h = 4.8$ m.
Accelerazione di gravità $g = 9.8$ ms^{-2}

Ricaviamo le leggi orarie per le due coordinate dell'acrobata. Chiamando v_0 il modulo della velocità di salto (che sappiamo essere orizzontale), per la componente orizzontale *x* il moto è rettilineo uniforme, per cui avremo evidentemente:

$$\ddot{x}(t) = 0$$

La legge oraria per la velocità orizzontale si ricava a partire da questa relazione, con la condizione iniziale data dalla proiezione della velocità iniziale v_0 lungo la direzione orizzontale: $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = v_0$ da cui

$$\dot{x}(t) = v_0 \qquad \text{(i)}$$

Ed infine ricaviamo la legge oraria per la componente orizzontale, applicando la condizione iniziale $x_0 = x(t=0) = 0$

$$x(t) = v_0 \cdot t \qquad \text{(ii)}$$

Per la componente verticale *z* il moto dell'acrobata è rettilineo uniformemente accelerato, per cui avremo evidentemente:

$$\ddot{z}(t) = -g$$

Abbiamo poi le condizioni iniziali $\dot{z}_0 = \dot{z}(t=0) = 0$ da cui

$$\dot{z}(t) = -g \cdot t \qquad \text{(iii)}$$

ed infine, avendo assunto $z_0 = z(t=0) = h$ la legge oraria per la componente verticale:

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad \text{(iv)}$$

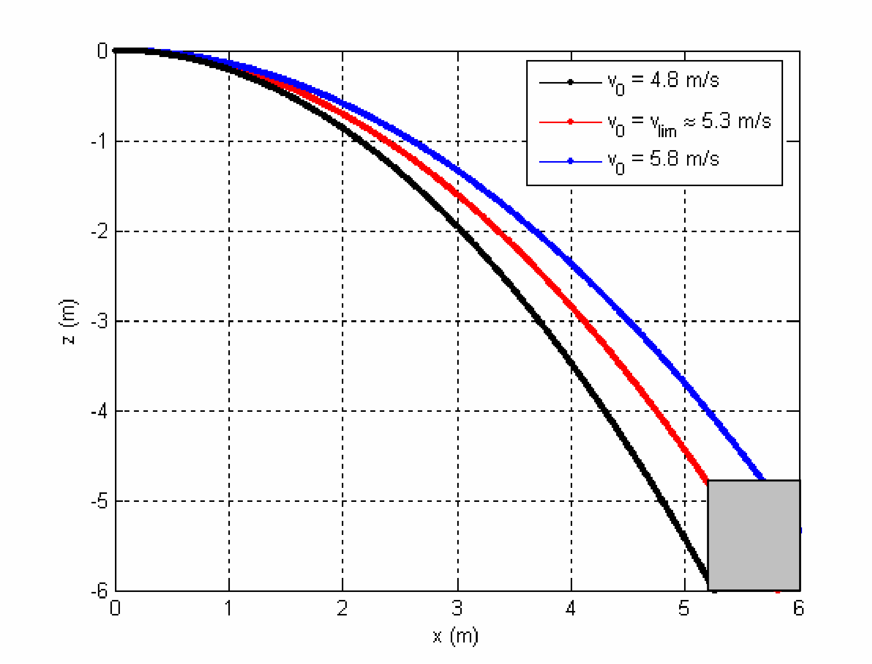
Per evitare il peggio, l'acrobata deve far sì che, durante l'intervallo di tempo t_{VOLO} necessario per cadere della distanza *h*, egli abbia percorso orizzontalmente *almeno* la distanza L che separa gli edifici. Esplicitiamo questo ragionamento ricorrendo alle relazioni (ii) e (iv), che diventano rispettivamente

$$x(t_{VOLO}) = v_0 \cdot t_{VOLO} \geq L \qquad (1) \text{ e}$$

$$z(t_{VOLO}) = 0 = h - \frac{1}{2} g \cdot t_{VOLO}^2 \quad (2).$$

Dalla relazione (2) otteniamo $t_{VOLO} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (ha evidentemente senso fisico solo un tempo di volo positivo) che sostituita nella (1) conduce a

$$v_0 \geq \frac{L}{t_{VOLO}} = L\sqrt{\frac{g}{2h}} = 5.2\text{m} \cdot \sqrt{\frac{9.8\text{ms}^{-2}}{2 \cdot 4.8\text{m}}} = 5.254\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5.3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Problema n. 4:

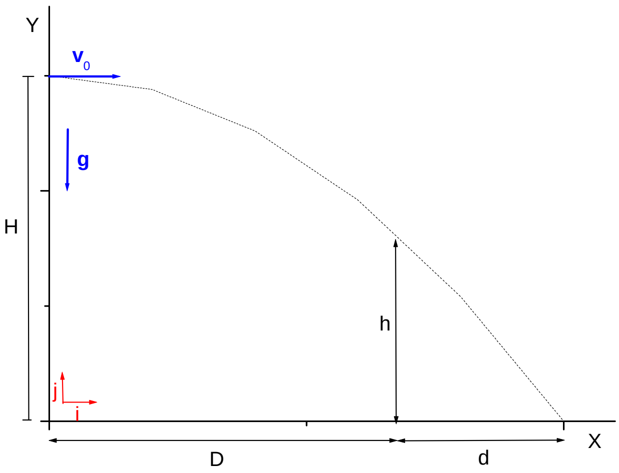
Durante il servizio, un tennista lancia la palla, assimilabile a un punto materiale, orizzontalmente, sì da imprimere ad essa una velocità iniziale parallela al suolo: Calcolare:

(a) la minima velocità iniziale che deve essere impressa alla palla perché essa possa superare la rete alta h = 0.9 m e posta a di distanza D = 15.0 m dal tennista, se la palla viene lanciata da un'altezza H = 2.5 m; [$\mathbf{v}_0 = 26.25\ ms^{-1}\ \mathbf{i}$]

(b) la distanza d dalla rete in corrispondenza della quale la palla toccherà il suolo, nell'ipotesi che la palla sfiori la rete; [d = 3.75 m]

(c) il tempo di volo della palla, nell'ipotesi di cui al punto precedente. [$t_V = 0.714$ s]

Soluzione:



Dati:

$H = 2.5m$

$h = 0.9m$

$D = 15.0m$

(a) Determinare la minima velocità iniziale che deve essere impressa alla palla perché essa possa superare la rete

Si tratta di un moto balistico, con accelerazione costante pari a $\vec{g}$, accelerazione di gravità. Scegliamo un sistema di riferimento XY come quello illustrato in figura, con la direzione Y uguale e contraria a quella dell'accelerazione $\vec{g}$: con tale scelta di sistema di riferimento, la velocità iniziale impressa alla palla $\vec{v}_0$ sarà un vettore parallelo all'asse X, come mostrato in figura.

Per ricavare le leggi orarie per questo sistema, utilizziamo ora le ben note relazioni:

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ e $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, dove $\vec{a}$ e $\vec{v}$ sono i vettori accelerazione e velocità, mentre $\vec{r}$ è il vettore posizione che ad ogni istante mi individua la posizione della palla nello spazio. Tali relazioni andranno integrate, con le condizioni iniziali $\vec{v}(t=t_0)=\vec{v}_0$ e $\vec{r}(t=t_0)=\vec{r}_0$ e ricordando che l'accelerazione $\vec{a}$ è costante (in direzione, verso e modulo) e pari a $\vec{g}$, ottenendo così le leggi orarie:

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}(t-t_0)}$$
$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2+\vec{v}_0(t-t_0)} \tag{1}$$

(Nota: osservando le equazioni sopra, si deduce facilmente che il vettore velocità $\vec{v}$ si trova sempre nel piano individuato dai vettori $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$, così come $\vec{r}$: da questa osservazione possiamo concludere che il moto della palla si svolge sempre nel piano individuato da $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$, che è quello coincidente con il piano XY scelto come sistema di riferimento)

Riscriviamo ora le leggi (1) in termini di componenti lungo X e Y, ricordando che l'accelerazione $\vec{a}$ ha una componente non nulla solo lungo l'asse Y e pari a $-g$:

$$\boxed{\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g(t-t_0) \end{cases}}$$
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t-t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_{0y}(t-t_0) \end{cases}} \tag{2}$$

Come abbiamo detto il moto è balistico, ovvero la traiettoria seguita dalla palla sarà una parabola, come illustrato in figura (e come è facile verificare eliminando il tempo dalle espressioni per x e y e ottenendo così un'equazione per la coordinata y in funzione di x).
Per determinare la minima velocità iniziale da imporre alla palla affinché essa superi la rete, dobbiamo utilizzare le leggi orarie imponendo che la traiettoria (parabolica) della palla passi al di sopra dell'altezza h a distanza D dal tennista, ovvero dobbiamo imporre che il punto $(x=D, y=h)$ soddisfi al sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t-t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_{0y}(t-t_0) \end{cases}$$

quindi scriveremo: $\begin{cases} D = x_0 + v_{0x}(t-t_0) \\ h = y_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_{0y}(t-t_0) \end{cases}$

Per come abbiamo scelto il sistema di riferimento XY, avremo che $x_0 = 0$ e $y_0 = H$ (come si deduce facilmente osservando la figura), mentre scegliamo arbitrariamente $t_0 = 0$ (possiamo farlo, dato che il problema non ci da indicazioni in questo senso). Inoltre la velocità iniziale $\vec{v}_0$ è un vettore parallelo all'asse X (come ci viene esplicitamente detto nei dati del problema), quindi varrà che: $\begin{matrix} v_{ox} = v_0 \\ v_{oy} = 0 \end{matrix}$

Sostituendo tutte queste informazioni nelle leggi orarie otteniamo il sistema di due equazioni in due incognite t e v_0: $\begin{cases} D = v_0 t \\ h = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

che risolto (semplicemente per sostituzione, ad esempio), ci fornisce l'espressione per la velocità iniziale:

$$v_0^{\ 2} = \frac{D^2 g}{2(H-h)} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{D^2 g}{2(H-h)}} = \sqrt{\frac{(15.0m)^2 \cdot 9.8 \, m/s^2}{2(2.5m - 0.9m)}} = 26.25 \, m/s$$

Come già osservato prima, la velocità iniziale trovata è un vettore parallelo all'asse x, quindi scriveremo, in termini vettoriali: $\boxed{\vec{v}_0 = 26.25 \, m/s \, \hat{i}}$

(b) *Determinare la distanza d dalla rete in corrispondenza della quale la palla toccherà il suolo.*

Mettiamoci quindi nella situazione in cui la palla, a cui è stata impressa una velocità iniziale $\vec{v}_0 = 26.25 \, m/s \, \hat{i}$ sfiora la rete e poi cade a terra; abbiamo detto che la traiettoria seguita dalla palla è parabolica e, in questo secondo punto del problema, essa è già determinata, avendo fissato tutte le condizioni iniziali, in particolare la velocità iniziale.

Si tratta quindi di capire a quale distanza X dall'origine del sistema di riferimento che abbiamo scelto la parabola seguita dalla palla intercetterà il suolo (che nel sistema di riferimento scelto da noi ha ordinata nulla), ovvero dobbiamo determinare per quale valore di x la traiettoria parabolica della palla passa per il punto $(x, y = 0)$.

Come nel punto precedente, utilizziamo ancora le leggi orarie: $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

dove abbiamo semplicemente sostituito nelle leggi orarie (2) le condizioni note:

$x_0 = 0$

$y_0 = H$

$v_{ox} = v_0$ e posto per comodità $t_0 = 0$

$v_{oy} = 0$

Dobbiamo determinare x affinché il punto $(x, y = 0)$ soddisfi al sistema di equazioni sopra, per cui scriveremo: $\begin{cases} x = v_0 t \\ 0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Abbiamo così ottenuto un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto per sostituzione ci da semplicemente: $\begin{cases} t = x/v_0 \\ 0 = H - \frac{1}{2} g \left(x/v_0 \right)^2 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2H \cdot v_0^2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.5m \cdot (26.25 \, m/s)^2}{9.8 \, m/s^2}} = 18.75m$

Il valore di x che abbiamo trovato corrisponde alla distanza <u>rispetto all'origine del sistema di riferimento </u>a cui la palla tocca il suolo: per determinare quanto richiesto dal problema, ovvero la distanza d dalla rete a cui la palla cede al suolo basta procedere per semplice sottrazione:

$d = x - D = 18.75m - 15m = 3.75m$

(c) *Determinare il tempo di volo della palla, nell'ipotesi di cui al punto precedente*

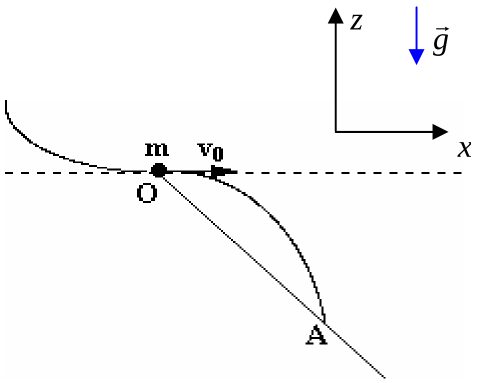
Siamo sempre nell'ipotesi che la palla compia un moto parabolico, con velocità iniziale $\vec{v}_0 = 26.25 \, m/s \, \hat{i}$, toccando il suolo in un punto che dista 3.75m dalla rete (o 18.75m dall'origine del sistema di riferimento scelto): per determinare il <u>tempo di volo</u> (cioè il tempo impiegato dalla palla a compiere questo moto parabolico e a toccare terra), possiamo usare indifferentemente una delle due leggi orarie utilizzate per risolvere il punto (b).

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ 0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Per semplicità, utilizziamo la prima delle due equazioni sopra, sostituendo a x il valore trovato nel punto precedente ($x = 18.75m$) e ottenendo così:

$t = x/v_0 = \frac{18.75m}{26.25 \, m/s} = 0.714s$, che corrisponde al tempo di volo cercato.

Problema 5
In un salto con gli sci dal trampolino uno sciatore stacca nel punto O con una velocità v_0 = 16 m/s in direzione orizzontale. Assumendo che il pendio di arrivo sia inclinato di 45° rispetto al piano orizzontale, si calcoli:
(a) la lunghezza OA del salto, misurata lungo il pendio;
(b) il tempo di volo;
(c) la velocità di impatto con cui lo sciatore cade sul pendio;
(d) la direzione del moto quando cade sul pendio.



Soluzione
Si tratta di moto in due dimensioni. Scegliamo il nostro sistema di riferimento con direzione *z* allineata con la gravità, verso concorde ad essa; poniamo l'origine nel punto di salto O. Lungo la componente orizzontale, che chiamiamo *x*, si ha moto rettilineo uniforme; lungo la direzione verticale *z* si ha moto uniformemente accelerato.
Dati: Velocità iniziale $v_0 = 16$ ms^{-1}
Accelerazione di gravità $g = 9.8$ ms^{-2}
Ricaviamo le leggi orarie per le due coordinate dello sciatore. Chiamando v_0 il modulo della velocità (che sappiamo essere orizzontale), per la componente orizzontale *x* il moto è rettilineo uniforme, per cui avremo evidentemente:

$$\ddot{x}(t) = 0$$

La legge oraria per la velocità orizzontale si ricava a partire da questa relazione, con la condizione iniziale data dalla proiezione della velocità iniziale v_0 lungo la direzione orizzontale: $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = v_0$ da cui

$$\dot{x}(t) = v_0 \qquad \text{(i)}$$

Ed infine ricaviamo la legge oraria per la componente orizzontale, applicando la condizione iniziale $x_0 = x(t=0) = 0$

$$x(t) = v_0 \cdot t \qquad \text{(ii)}$$

Per la componente verticale *z* il moto dello sciatore è rettilineo uniformemente accelerato, per cui avremo evidentemente:

$$\ddot{z}(t) = g$$

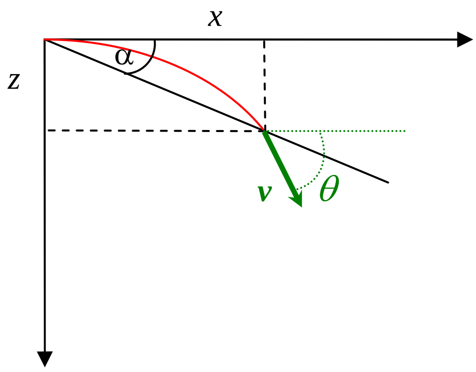
Abbiamo poi le condizioni iniziali $\dot{z}_0 = \dot{z}(t=0) = 0$ da cui

$$\dot{z}(t) = g \cdot t \qquad \text{(iii)}$$

ed infine, avendo assunto $z_0 = z(t=0) = 0$ la legge oraria per la componente verticale:

$$z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{(iv)}$$

In generale: l'atterraggio sul piano, inclinato di un angolo α, avviene all'istante t_V per cui le due componenti, orizzontale e verticale, soddisfano la relazione $|x(t_V)\cos(\alpha)| = |z(t_V)\sin(\alpha)|$. Nel nostro caso $\cos(\alpha) = \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ per cui, tenendo conto della scelta del sistema di riferimento che abbiamo fatto (vedi figura), questa relazione diventa



$$x(t_V) = z(t_V) \qquad \text{(v).}$$

Usando le relazioni (ii) e (iv) la (v) diventa $v_0 \cdot t_V = \frac{1}{2} g \cdot t_V^2$ da cui $t_V = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 16\,\text{m s}^{-1}}{9.8\,\text{m s}^{-2}} = 3.265\,\text{s} \approx 3.3\,\text{s}$ che risponde alla domanda (b).

La lunghezza OA del salto, misurata lungo il pendio, si può calcolare a partire dalla legge oraria per la posizione x (ii), calcolata al tempo $t = t_V$, e ricorrendo alla (v) otteniamo, in risposta alla domanda (a):

$$OA = \sqrt{x^2(t_V) + z^2(t_V)} = \sqrt{2} \cdot |x(t_V)| = \sqrt{2} \cdot |v_0 \cdot t_V| = 2\sqrt{2}\frac{v_0^2}{g} = 2\sqrt{2}\frac{16^2\,\text{m}^2\text{s}^{-2}}{9.8\text{ms}^{-2}} = 73.885\text{m} \approx 74\text{m}$$

Analogamente, calcoliamo la velocità di impatto a partire dalle leggi orarie per le componenti delle velocità (i) e (iii), calcolate al tempo $t = t_V = \frac{2v_0}{g}$. Si ha in particolare $\dot{x}(t_V) = v_0$ e $\dot{z}(t_V) = g \cdot t_V = 2v_0$ ossia $\vec{v} = v_0(\hat{i} + 2\hat{j})$ da cui

$$v = \sqrt{\dot{x}^2(t_V) + \dot{z}^2(t_V)} = \sqrt{v_0^2 + |\dot{z}(t_V)|^2} = \sqrt{v_0^2 + 4v_0^2} = \sqrt{5}v_0 = \sqrt{5} \cdot 16\text{ms}^{-1} = 35.771\text{ms}^{-1} \approx 36\text{ms}^{-1}$$

Infine, la direzione della velocità è definita dall'angolo θ rispetto l'orizzontale (come nel disegno qui sopra), dove

$$\tan(\theta) = \frac{\dot{z}(t_V)}{\dot{x}(t_V)} = \frac{2v_0}{v_0} = 2$$

$$\theta \approx 1.1\,\text{rad} \approx 63°$$

Problema n. 6:

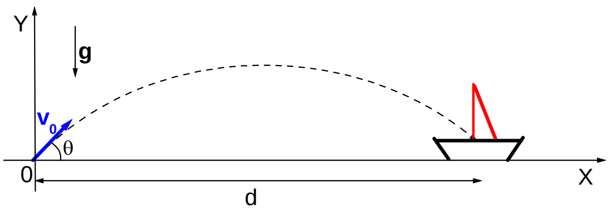
Una nave pirata è ormeggiata a 500 metri dalla base di un forte che difende l'entrata del porto di un'isola. Il cannone che la protegge, piazzato a livello del mare, ha una velocità di bocca di 82 m/s. Calcolare:

(a) a quale <u>alzo</u> (angolo di elevazione) si deve puntare il cannone per colpire la nave pirata; [θ = 23°23’]

(b) il <u>tempo di volo</u> per l'alzo maggiore; [t_V = 15.4 s]

(c) a quale distanza L dal porto deve portarsi la nave per essere fuori dalla portata di tiro del cannone. [L > 686.1 m]

Soluzione:



Dati:

$$\left|\vec{v}_0\right| = 82\, m/s$$

$$d = 500m$$

(a) Determinare a quale <u>alzo</u> (angolo di elevazione) si deve puntare il cannone per colpire la nave pirata

Il moto della bomba sparata dal cannone verso la nave, è un caso di moto balistico, con accelerazione costante pari a $\vec{g}$, accelerazione di gravità, mentre la velocità iniziale della bomba sparata dal cannone sarà un generico vettore $\vec{v}_0$.

Scegliamo dunque un sistema di riferimento XY come quello illustrato in figura, con la direzione Y uguale e contraria a quella dell’accelerazione : il moto che stiamo studiando avverrà nel piano individuato dagli assi X e Y.

Per ricavare le leggi orarie per questo sistema, utilizziamo ora le ben note relazioni: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, dove $\vec{a}$ e $\vec{v}$ sono i vettori accelerazione e velocità, mentre $\vec{r}$ è il vettore posizione che ad ogni istante mi individua la posizione della palla nello spazio. Tali relazioni andranno integrate, con le condizioni iniziali $\vec{v}(t = t_0) = \vec{v}_0$ e $\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0$ e ricordando che l’accelerazione $\vec{a}$ è costante (in direzione, verso e modulo) e pari a $\vec{g}$, ottenendo così le leggi orarie:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \tag{1}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0 (t - t_0)}$$

Riscriviamo ora le leggi (1) in termini di componenti lungo X e Y, ricordando che l'accelerazione $\vec{a}$ ha una componente non nulla solo lungo l'asse Y e pari a $-g$, ottenendo:

$$\boxed{\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{cases}}$$

Nel nostro caso, la scelta del sistema di riferimento, ci porta ad avere $x_0 = y_0 = 0$ (è facile da dedurre se consideriamo che l'origine degli assi cartesiani è stata presa coincidente con il punto in cui si trova il cannone); per comodità poniamo anche $t_0 = 0$.

Inoltre, possiamo scomporre lungo gli assi X e Y anche la velocità iniziale del proiettile sparato dal cannone $\vec{v}_0$, che come illustrato in figura è un vettore avente origine nell'origine degli assi che forma con l'asse orizzontale X un angolo generico θ; tale angolo θ costituisce l'incognita del nostro problema, ovvero l'angolo di elevazione a cui deve essere puntato il cannone per fare in modo che esso colpisca la nave.

Scriviamo dunque le componenti lungo gli assi cartesiani di $\vec{v}_0$:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 sen\theta$$

Sostituendo quindi le relazioni sopra nelle leggi orarie ricavate precedentemente, otteniamo:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 sen\theta t \end{cases}$$

che mi danno in ogni istante la posizione (in termini di coordinate x e y) del proiettile sparato da cannone.

Il problema ci chiede di determinare il valore di θ, affinché il proiettile colpisca la nave che si trova nel punto di coordinate (rispetto al sistema di riferimento scelto) $(x = d, y = 0)$; non ci resta quindi che imporre la condizione che, il punto di coordinate $(d,0)$ soddisfi alle leggi orarie scritte sopra, ovvero che il sistema: $\begin{cases} d = v_0 \cos\theta t \\ 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sen\theta t \end{cases}$ abbia soluzioni.

A questo punto abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite (t e θ) che possiamo facilmente risolvere, ad esempio per sostituzione, ottenendo la seguente espressione per l'angolo θ:

$$\boxed{sen2\theta = \frac{gd}{{v_0}^2}}$$

(Nota: nel riarrangiare l'espressione per l'angolo θ, può essere utile, servirsi della nota relazione trigonometrica $2sen\theta\cos\theta = sen2\theta$)

Dall'espressione sopra otteniamo due soluzioni possibili, comprese fra o e 90°, per l'angolo di elevazione:

$$2\theta = arcsen\left(\frac{gd}{{v_0}^2}\right) = arcsen\left(\frac{9.8 \, {}^{m}\!/_{s^2} \, 500m}{(82\, m/s)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 23°23'}$$

$$\pi - 2\theta = arcsen\left(\frac{gd}{{v_0}^2}\right) = arcsen\left(\frac{9.8 \, {}^{m}\!/_{s^2} \, 500m}{(82\, m/s)^2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 66°36'}$$

Nota bene: si noti che, entrambe le soluzioni per θ sono valide: esse corrispondono a due diverse traiettorie paraboliche compiute dal proiettile, entrambe però tali da soddisfare la condizione per cui la traiettoria intercetti l'asse X alla distanza d dall'origine degli assi (nel punto appunto in cui si trova la barca).

(b) Determinare il tempo di volo per l'alzo maggiore

Come abbiamo visto nel punto precedente, abbiamo due possibili valori dell'angolo di alzo θ che soddisfano la condizione per cui il cannone riesca a colpire la nave. Il problema ci dice di considerare il valore maggiore fra i due ottenuti, ovvero: $\theta = 66°36'$

Il tempo di volo che ci viene richiesto di calcolare è il tempo necessario perché il proiettile sparato dal cannone compia il suo moto parabolico e arrivi a terra, in questo caso in particolare colpendo la nave.
Possiamo dunque utilizzare ancora le leggi orarie, di cui ci siamo serviti nel punto precedente:

$$\begin{cases} d = v_0 \cos\theta t \\ 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sen\theta t \end{cases}$$

solo che in questo caso il valore dell'angolo θ è fissato e pari a $\theta = 66°36'$ e la nostra incognita è costituita invece dal tempo.

Per semplicità utilizziamo ad esempio la prima delle due equazioni del sistema di cui sopra: $d = v_0 \cos\theta t$, da cui ricaviamo facilmente l'espressione per il tempo di volo:

$$t_v = \frac{d}{v_0 \cos\theta} = \frac{500m}{82 \, m/s \cdot \cos(66°36')} = 15.4s$$

(c) *Determinare a quale distanza L dal porto deve portarsi la nave per essere fuori dalla portata di tiro del cannone*

Per rispondere a questo ultimo quesito è necessario determinare la <u>gittata massima</u> del cannone, ovvero qual è la massima distanza a cui il cannone riesce a sparare.

Determiniamo prima l'espressione per la gittata in generale utilizzando ancora una volta le leggi orarie: $\begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sen\theta t \end{cases}$

La gittata corrisponde al valore x_G a cui un ipotetico proiettile sparato dal cannone tocca il suolo (nel nostro caso l'asse X), ovvero tale per cui sia $y = 0$.

Imponiamo quindi questa condizione nel sistema di equazioni di cui sopra e risolviamo il sistema (ad esempio per semplice sostituzione), ricavando x_G in funzione degli altri parametri noti:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sen\theta t \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{sen\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x}{v_0^2 \cos\theta^2}\right) = 0$$

Da cui otteniamo due soluzioni possibili per la gittata:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{G,1} &= 0 \\ x_{G,2} &= \frac{2sen\theta\cos\theta \cdot v_0^2}{g} \end{aligned}}$$

La prima soluzione è ovviamente banale, e corrisponde al caso limite in cui il proiettile viene sparato in verticale lungo l'asse Y e ricade poi nel medesimo punto, mentre la seconda soluzione è l'espressione corretta per la gittata, che come si nota dipende oltre che dal modulo della velocità iniziale del proiettile, anche da un'espressione in θ.

<u>Nota</u>: può essere interessante andare a considerare i casi limite dell'espressione che ci fornisce la gittata:

per $\theta = 0 \Rightarrow x_G = 0$

per $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_G = 0$ (ricadiamo nel caso banale che ci dava la prima soluzione)

Tornando alla domanda del problema, ci viene chiesto di calcolare la gittata massima del cannone: massimizzando quindi l'espressione trovata per x_G possiamo facilmente ricavare che l'angolo θ a cui la gittata è massima corrisponde a un valore di $\theta = 45°$. Infatti, se calcoliamo la derivata prima dell'espressione di x_G e la uguagliamo a zero otteniamo:

$$\frac{dx_G}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}\left[sen\theta \cdot \left(-sen\theta\right) + \cos\theta \cdot \cos\theta\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad (sen\theta)^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°$$

Nel caso quindi del nostro cannone la gittata massima (che corrisponde alla distanza minima dal cannone di cui deve allontanarsi la nave per essere fuori dalla portata del cannone) sarà pari alla gittata che si ottiene con un angolo di elevazione di $\theta = 45°$ e modulo della velocità iniziale pari a $82\, m/s$:

$$x_{G,Max} = \frac{2sen(45°)\cos(45°) \cdot (82\, m/s)^2}{9.8\, m/s^2} = 686.1m$$