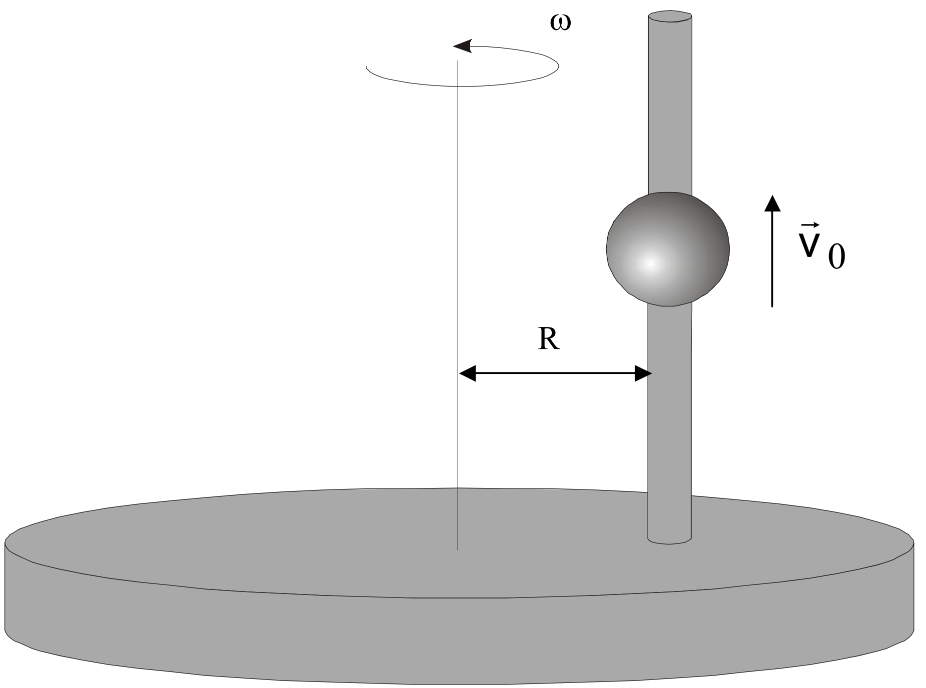
Soluzioni esercizi sui sistemi non inerziali

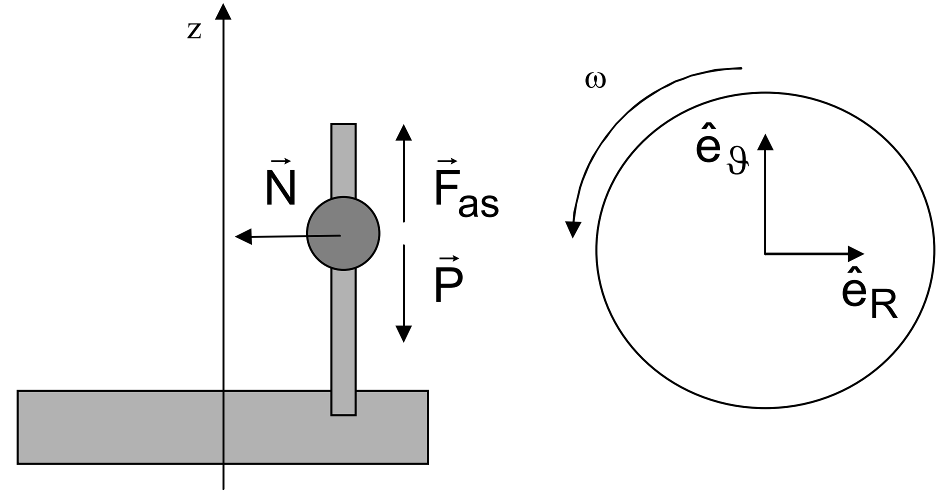
Una particella materiale di massa m=0.1kg è vincolata a scorrere su un'asta verticale. Fra la particella e l'asta vi è un attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ_s=0.5 e da un coefficiente di attrito cinematico radente μ_d=0.2. L'asta è solidale ad una piattaforma girevole ed è posta a R=50cm dall'asse di rotazione di questa. La piattaforma ruota con velocità angolare ω=costante mentre il laboratorio si considera, invece, inerziale.

1. Quali sono le forze reali cui è soggetta la particella se essa è ferma rispetto all'asta?
2. E quando essa è invece in moto lungo l'asta?
3. Quali sono le forze che agiscono sulla particella nel sistema di riferimento in cui l'asta e la piattaforma appaiono in quiete?
4. Qual è il valore minimo di ω per il quale la particella, se posta in quiete rispetto all'asta, vi rimane indefinitamente?
5. Quando ω ha il valore di cui al punto 4., quali sono i valori numerici delle componenti della reazione vincolare?
6. Nel sistema di riferimento in cui l'asta e la piattaforma appaiono in quiete, si calcoli la legge oraria della particella (vale a dire le sue coordinate in funzione del tempo) se: ω = 8 rad/s; la particella al tempo t = 0 si trova a 2 m di altezza dal fondo dell'asta; essa possiede una velocità che, nel sistema di riferimento solidale all'asta, è diretta verso l'alto e vale 3 m/s.
7. Si esprima la soluzione della domanda 6. Nel sistema di riferimento del laboratorio.



NOTA: per ogni sistema di riferimento utilizzato, specificare chiaramente l'orientazione degli assi e l'origine. Nelle domande 1, 2 e 3 si elenchino le forze richieste specificandone le componenti di m, w, R, μ_s, μ_d e g.

Quando la particella è ferma rispetto all'asta le forze agenti sono:
- la forza peso: $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{z}$, diretta in senso contrario all'asse z.
- la reazione vincolare dell'asta. Se ci si pone in un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione ha solamente lla componente radiale (l'accelerazione centripeta, diretta sempre verso il centro della piattaforma), quindi la reazione vincolare sarà normale alla guida e varrà: $N_R = -m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \hat{e}_R$
- la forza di attrito statico: $F_{as} = -mg\,\hat{e}_z$
che bilancia la forza peso.



Nel caso in cui la particella si muove rispetto all'asta, la forza peso e la reazione normale dell'asta rimangono invariate, mentre la forza d'attrito che va ora considerata è quella dinamica, data da:

$$\vec{F}_{ad} = -\frac{v}{|v|} \cdot \mu_d \cdot |N| \cdot \hat{z} = -\frac{v}{|v|} \cdot \mu_d \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \hat{z}$$

Il sistema di riferimento in cui asta e piattaforma appaiono in quiete è un sistema che ruota con velocità pari a ω, ed in cui le forza agenti sono le forze reali più una serie di forze apparenti dovute alla non inerzialità del sistema di riferimento:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reali} - m \cdot \left(\vec{A} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}' \right) \right) - 2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Nell'equazione precedente i termini con l'apice sono relativi al sistema di riferimento in movimento, non inerziale (NI). $\vec{A}$ è l'accelerazione di O' rispetto al sistema inerziale, dω/dt è la variazione della velocità di rotazione del sistema di riferimento NI.

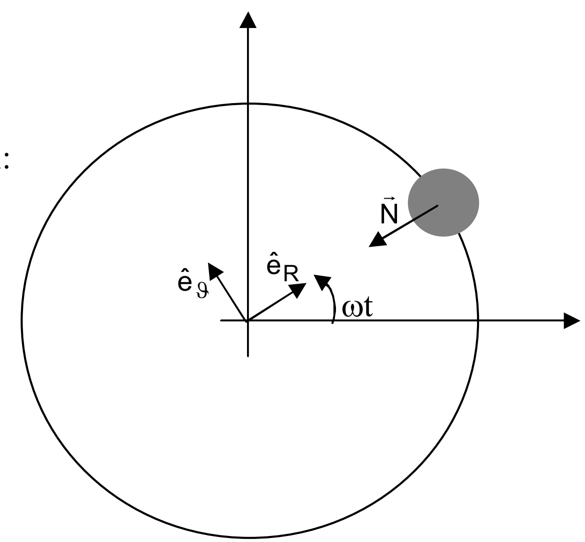
In questo caso poiché $O \equiv O'$, si ha:

$$\vec{A} = 0$$
$$\vec{r}' = \vec{r}$$

Anche la foza di Coriolis $\left(-2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}\right)$ è nulla poiché v' è diretta lungo z come ω (sono parallele).

Se si considera la particella ferma rispetto all'asta, le forze REALI che agiscono sono:
Lungo l'asse z:
- la forza di attrito statico: $\vec{F}_{as} = m \cdot g \cdot \hat{z}$
- la forza peso: $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{z}$

Lungo la direzione radiale della piattaforma:
- la reazione della guida: $N\hat{r} = -m\omega^2 R\hat{r}$, ricavata tenendo conto del fatto che $a'_r = 0$
Le forze APPARENTI agenti sono limitate alla forza centrifuga: $m\omega^2 R\ \hat{r}$



Se si considera la particella in moto la forze centrifuga rimane invariata, mentre per le forze reali:

Lungo l'asse z:
- forza di attrito dinamico: $\vec{F}_{ad} = -\frac{v}{|\vec{v}|}\mu_d \cdot |\vec{N}| \cdot \hat{z}$
- forza peso: $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{z}$

Lungo la direzione radiale:
- reazione della guida: $N\hat{r} = -m\omega^2 R\hat{r}$

Il valore di ω_{min} per cui la particella rimane indefinitamente in quiete rispetto all'asta si ricava imponendo nulla l'accelerazione lungo l'asse z. In altre parole la forza di attrito statico massa deve essere in grado di bilanciare esattamente la forza peso.

$$\vec{F}_{as} \geq \vec{P} \Leftrightarrow \left|\mu_s \cdot \vec{N}\right| \geq \left|m \cdot \vec{g}\right| \Leftrightarrow \mu_s m\omega^2 R \geq m \cdot g$$

Da cui si ricava:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.5 \cdot 0.5}} = 6.26\frac{rad}{s}$$

I valori numerici delle reazioni vincolari quando ω=6.26rad/s, valgono:
- reazione normale dell'asta: $N = m \cdot \omega^2 \cdot R = 0.1 \cdot (6.26)^2 \cdot 0.5 = 1.96N$
- Se la massa è ferma -> forza di attrito statico: $\vec{F}_{as} = \mu_s \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R = 0.5 \cdot 0.1 \cdot 6.26^2 \cdot 0.5 = 0.98N$
-Se la massa si muove -> forza di attrito dinamico: $\vec{F}_{ad} = \mu_d \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 6.26^2 \cdot 0.5 = 0.39N$

La legge oraria della particella nel sistema di riferimento rotante si calcola partendo dalle condizioni iniziali su posizione e velocità:

$$\dot{z}(0) = \dot{z}'(0) = 3\frac{m}{s}$$
$$z(0) = z'(0) = 2m$$

Nel sistema rotante, il moto della particella si svolge solamente lungo z e la relativa equazione del moto sarà:

$$m\ddot{z} = -m \cdot g - \frac{v}{|\vec{v}|}\mu_d \cdot |\vec{N}|$$

Da cui si ricava la decelerazione della particella durante la fase di salita:

$$\ddot{z} = -g - \mu_d \omega^2 R$$

Il moto lungo z è uniformemente accelerato, per cui la legge oraria si ricava come:

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(0) - \left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t$$

E quindi:

$$z'(t) = z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t^2$$

Imponendo nulla $\dot{z}(t)$, si ricava il tempo, t*, a cui la particella si ferma, ovvero quando ha raggiunto la posizione di massima altezza:

$$t^* = \frac{\dot{z}(0)}{\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)} = \frac{3}{(9.81 + 0.2 \cdot 8^2 \cdot 0.5)} = 0.19\,\mathrm{s}$$

Ricapitolando, durante la FASE DI SALITA ($0 \le t \le 0.19$s):

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t^2 \\ x'(t) = R & \text{Lungo il versore radiale} \\ y'(t) = 0 & \text{Lungo il versore tangenziale alla traiettoria circolare} \end{cases}$$

Per t > t*, la particella tenderebbe a scendere ma poiché la guida non è liscia è necessario tener conto dell'attrito. In questo caso è già stato calcolato come per velocità di rotazione minori di quella imposta, l'attrito statico sia sufficiente a fermare la particella. Quindi:

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t^2 = 2 + 3 \cdot 0.19 - \frac{1}{2} \cdot (9.81 + 0.2 \cdot 8^2 \cdot 0.5) \cdot (0.19)^2 = 2.28\,\mathrm{m} \\ x'(t) = R = 0.5\,\mathrm{m} \\ y'(t) = 0\,\mathrm{m} \end{cases}$$

Nel sistema di riferimento (inerziale) del laboratorio, le leggi del moto si descrivono con:

$$\begin{cases} z(t) = z'(t) \\ x(t) = R \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) = R \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

Problema 3

Una particella di massa m=0.1kg è attaccata all'estremità di una molla di costante elastica k=10N/m. Massa e molla sono montate in modo da potersi muovere orizzontalmente sul piano liscio di un carrello che si può muovere anch'esso solo orizzontalmente. Al tempo t<0 la particella è in quiete rispetto al carrello, che è fermo nel laboratorio, nella posizione x,y=0 in cui la molla, che giace lungo l'asse x, non è deformata e dunque non esercita nessuna forza. Nella posizione $x=x_0=-5$cm si trova una parete verticale fissata al carrello. Al tempo t=0 il carrello viene messo in movimento, con accelerazione costante $\vec{a}=a_0\hat{i}$, con l'asse x come in figura e $a_0=8\text{m/s}^2$. Si calcoli:

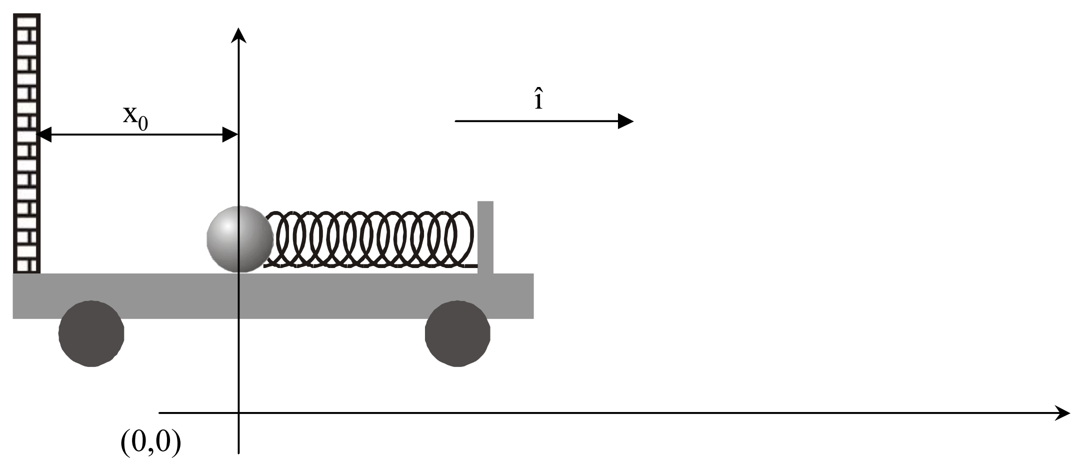
a) Se la particella arriva a toccare la parete verticale.

b_+) Se la risposta alla domanda a) è positiva si calcoli a che tempo la particella tocca la parete.

c_+) Sempre nel caso in cui la risposta alla domanda a) sia positiva, si calcoli la componente v_x della velocità lungo l'asse x al momento dell'impatto con la parete sia nel sistema di solidale al carrello che in quello di laboratorio.

b_-) Se la risposta alla domanda a) è invece negativa, si calcoli la distanza massima dalla posizione di equilibrio iniziale che la particella raggiunge e il tempo a cui questa viene raggiunta.

c_-) Sempre nel caso in cui la risposta alla domanda a) sia negativa, si calcoli la componente v_x della velocità lungo l'asse x al momento in cui la distanza massima di cui alla domanda b_-) viene raggiunta la prima volta. Si effettui il calcolo della velocità sia nel sitema solidale al carrello, che in quello di laboratorio.



Il sistema di riferimento solidale al carrello non è inerziale e per scrivere l'equazione del moto della particella è necessario tener conto di tutte le forze (fittizie e reali) agenti su di essa, per cui:

$$m\ddot{x}\hat{i} = -kx\hat{i} - ma_0\hat{i}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -a_0$$

La soluzione dell'equazione differenziale che descrive il moto di questo oscillatore, si ottiene sommando alla soluzione generale dell'omogenea associata una soluzione particolare della non omogenea:

$$x(t) = A \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi) - \frac{a_0 m}{k}$$

La condizione iniziale prevede la molla a riposo, per cui x(t=0)=0, che sostituita permette di ricavare la costante A:

$$0 = A \cdot \sin\varphi - \frac{a_0 m}{k} \Rightarrow A = \frac{a_0 m}{k\sin\varphi}$$

La fase si ottiene in maniera analoga imponendo nulla la velocità al tempo t=0:

$$\dot{x}(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi)\Big|_{t=0} \Rightarrow 0 = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

A questo punto si può riscrivere la legge oraria sostituendo i valori trovati di A e φ e ricordando che $\sin(\alpha+\pi/2)=\cos(\alpha)$:

$$x(t) = \frac{a_0 m}{k}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - \frac{a_0 m}{k}$$

Ovvero: particella oscilla con ampiezza pari a:

$$A = \frac{a_0 m}{k} = \frac{8 \cdot 0.1}{10} = 0.08\text{m}$$

Tra i punti $x_1=0$ e $x_2 = -2 \cdot \frac{a_0 m}{k} = -2 \cdot \left(\frac{8 \cdot 0.1}{10}\right) = -0.16m$

La risposta al problema è quindi che la particella tocca la parete. Il tempo (t*) a cui ciò si verifica si ricava imponendo $x(t)=x_0=-0.05$m:

$$x_0 = \frac{a_0 m}{k}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t^*) - \frac{a_0 m}{k}$$

Invertendo per ricavare t*:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t^*\right)=\frac{\frac{a_0 m}{k}+x_0}{\frac{a_0 m}{k}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}t^*=\arccos\left(\frac{\frac{a_0 m}{k}+x_0}{\frac{a_0 m}{k}}\right) \Rightarrow t^*=\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\left(\frac{\frac{a_0 m}{k}+x_0}{\frac{a_0 m}{k}}\right)$$

Che, con i dati del problema:

$$t^*=0.1\cdot\arccos\left(\frac{0.08-0.05}{0.08}\right)=0.119\mathrm{s}$$

Per ricavare la velocità a cui avviene l'impatto con la parete, nel sistema di riferimento del carrello, è sufficiente derivare la legge oraria sostituire t*:

$$v(t^*)=-a_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t^*\right)=-8\cdot\sqrt{\frac{0.1}{10}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{10}{0.1}}\cdot 0.119\right)=-0.743\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Se ci si pone nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio e si indica con v_L la velocità rispetto ad esso, con v_C(=v(t*)) quella rispetto al carrello e con v_{TR} la velocità del carrello rispetto al laboratorio, si ha:

$$\vec{v}_L=\vec{v}_C+\vec{v}_{TR}=\vec{v}_C+a_0\cdot t^*=-0.742+8\cdot 0.119=0.21\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Problema 4

Le risposte e le soluzioni ai quesiti sono posti nella tabella sottostante, e nei commenti raggruppati in **[1]** e **[2]**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
V/F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F

[1] **caso a cui si riferiscono i quesiti A, B, C, D, E** *(F_B=0)*

Nel tempo $t = 0$ i due corpi si stanno muovendo con la stessa velocità. (Sono fermi l'uno rispetto all'altro).

Nel sistema di riferimento ***Oxy***, considerando le **forze che agiscono su B** (attriti esclusi):

-Forze reali (esclusi gli attriti): forza peso di B, reazione vincolare $\vec{N}_{AsuB}$ di A su B uguale alla forza peso di A, reazione vincolare $\vec{N}_B$del piano su cui B scivola uguale ed opposta alla forza peso di B più quella di A;
-Forze fittizie: non ce ne sono perché *Oxy* è inerziale;

Nel sistema di riferimento ***Oxy***, considerando le **forze che agiscono su A** (attriti esclusi):

-Forze reali: (esclusi gli attriti): forza peso di A, reazione vincolare $\vec{N}_{BsuA}$ di B su A, uguale ed opposta alla forza peso di quest'ultima;
-Forze fittizie: non ce ne sono perché *Oxy* è inerziale;

Consideriamo ora le **forze di attrito**. Le forze di attrito statico tra A e B non intervengono in quanto, le risultanti delle forze agenti sui due corpi non hanno componenti parallele alla loro superficie di contatto. Le forze di attrito dinamico tra A e B intervengono solo se i due corpi si muovono relativamente, ma a t = 0, i due corpi hanno la stessa velocità e a t > 0 continueranno a muoversi con la stessa velocità (rimangono fermi l'uno rispetto all'altro) dato che la risultante delle forze su ciascuno di loro è nulla (A vera, B falsa, C falsa). Visto che per t > 0 A e B si muovono di moto rettilineo uniforme con la stessa velocità, per t > 0 non intervengono ovviamente né forze fittizie né forze di attrito (D vera).

Tutto ciò indipendentemente dal valore iniziale della loro velocità (E falsa).

<u>Osservazione:</u> il sistema di riferimento Ox'y' solidale a B, muovendosi con velocità costante rispetto al sistema di riferimento inerziale Oxy, è anch'esso inerziale. Anche in questo sistema di riferimento non compaiono forze fittizie, non compaiono forze d'attrito e i due corpi rimangono in quiete.

[2] <u>Caso in cui viene applicata a B una forza</u> $\vec{F}_B = F_B \hat{x} \quad (F_B > 0)$ **Fig.1**

Nel sistema di riferimento ***Oxy***, considerando le **forze che agiscono su B** (attriti esclusi):

-<u>Forze reali</u> (esclusi gli attriti): forza peso di B, reazione vincolare $\vec{N}_{AsuB}$ di A su B uguale alla forza peso di A, reazione vincolare del piano su cui B scivola uguale ed opposta alla sua forza peso più quella di A; $\vec{F}_B = F_B \hat{x}$

-<u>Forze fittizie</u>: non ce ne sono perché *Oxy* è inerziale;

Nel sistema di riferimento ***Oxy***, considerando le **forze che agiscono su A** (attriti esclusi):

-<u>Forze reali</u>: (esclusi gli attriti): forza peso di A, reazione vincolare $\vec{N}_{BsuA}$ di B su A, uguale ed opposta alla forza peso di quest'ultima;

-<u>Forze fittizie</u>: non ce ne sono perché *Oxy* è inerziale;

Consideriamo ora le **forze di attrito**.

Per coloro che non avessero ancora familiarità con il principio di azione-reazione le giustificazioni per le risposte ai quesiti (escluso G) possono essere le seguenti:

Applicata la forza $\vec{F}_B$, B inizia ad accelerare. Visto che tra A e B i coefficienti di attrito statico e dinamico non sono trascurabili, per A ci sono due possibilità:

- A rimane in quiete rispetto a B a causa dell'attrito statico;
- A inizia a muoversi rispetto a B e interviene l'attrito dinamico.

Indipendentemente dal valore di $\vec{F}_B$, su A agisce una forza dovuta a B, parallela alla superficie di contatto orizzontale (F falsa, G falsa per il principio di azione-reazione). Vediamo ora quali sono le condizioni affinché A non si muova rispetto a B.

Con le condizioni iniziali $v_A(0)=v_B(0)=v$, il fatto che A rimanga fermo rispetto a B richiede ovviamente che $a_A=a_B$: i due blocchi si muovono come un corpo unico di massa M_A+M_B a cui è applicata una forza $\vec{F}_B$ con accelerazione pari a:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A = \frac{\vec{F}_B}{M_A + M_B}$$

Se A possiede questa accelerazione significa che la forza che agisce su di lui è pari a :

$$M_A \vec{a}_A = M_A \frac{\vec{F}_B}{M_A + M_B}$$

L'attrito statico è in grado di fornire una forza di questa intensità? (con $\vec{F}_{sA}$ indichiamo la forza di attrito statico esercitata da B su A). Il valore massimo che la forza esercitata da B su A può raggiungere è dato da $\mu_s N_{BsuA} = \mu_s M_A g$.

Quindi dovrà essere soddisfatta la seguente disuguaglianza: $\frac{M_A F_B}{M_A + M_B} \le \mu_s M_A g$

$$\boxed{F_B \le \mu_s (M_A + M_B) g \quad Eq.(*)}$$

Per cui **[L]** è vera e **[H]** è falsa.

Osservazione

Si giunge alla stessa conclusione ragionando nel sistema di riferimento O'x'y' (solidale a B).O'x'y' non è inerziale perché è uniformemente accelerato: indichiamo con a_t>0 l'accelerazione di trascinamento che è l'accelerazione comune di A e B rispetto a Oxy ricavata in precedenza.

Fig.1: *Forze nel sistema di riferimento inerziale* ***Oxy****. Le forze orizzontali sono forze di attrito statico o dinamico. Quelle verticali si equilibrano.*

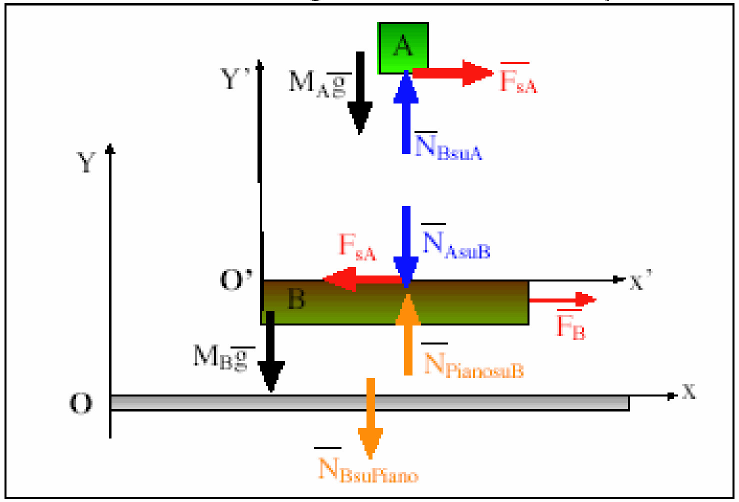
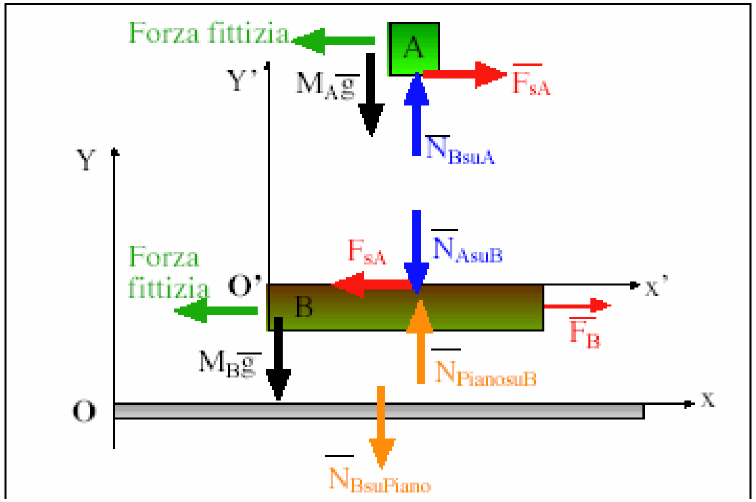


Fig.2: *Forze nel sistema di riferimento accelerato* ***O'x'y'****. Le forze orizzontali sono forze di attrito statico o dinamico e forze fittizie. Quelle verticali si equilibrano.*



In O'x'y' agiranno su A e B le forze fittizie rispettivamente pari a -$M_A a_t$ e -$M_b a_t$ (fig.2) di cui occorre tenere conto se si vogliono scrivere le equazioni del moto rispetto al sistema di riferimento non inerziale e in particolare per A: F_{sA}- $M_a a_t$= $M_a a'_A$.

A non si muove rispetto a B il che significa che a'_A=0, quindi che: $F_{sA} = M_A a_t = M_A \frac{F_B}{M_A + M_B}$

E richiedendo che questo valore sia inferiore a: $\mu_s N_{BsuA} = \mu_s M_A g$

Si trova la stessa condizione di prima su F_B.

Fine Osservazione

Se *l'Eq.(*)* (evidenziata in precedenza) non è soddisfatta, A inizia a muoversi rispetto a Be compare la forza di attrito dinamico che in modulo sarà pari a $\mu_d N_{AsuB} = \mu_d N_{BsuA} = \mu_d M_a g$ e che si oppone al loro moto relativo:

su B: la forza di attrito dinamico ha verso opposto a quello della velocità con cui B si muove rispetto ad A;

su A: la forza di attrito dinamico ha verso opposto a quello della velocità con cui A si muove rispetto ad B;

Le equazioni del moto rispetto a Oxy diventano allora:

Per B: $F_B - \mu_d M_A g \frac{v_B - v_A}{|v_B - v_A|} = M_B a_B$

Per A: $-\mu_d M_A g \frac{v_B - v_A}{|v_B - v_A|} = M_A a_A$

Si intuisce che il moto risultante sarà tale per cui $v_B(t)>v_A(t)$ (controlleremo una volta trovate le leggi orarie) e quindi:

Per B: $F_B - \mu_d M_A g = M_B a_B$

Per A: $\mu_d M_A g = M_A a_A$

A e B si muovono di moto uniformemente accelerato con accelerazioni ricavabili da queste due equazioni. Controlliamo che le due soluzioni trovate soddisfino $v_B(t)>v_A(t)$:

Per B: $v_B(t) = v(0) + \frac{1}{2} a_B t^2$

Per A: $v_A(t) = v(0) + \frac{1}{2} a_A t^2$

L'ipotesi che $v_B(t)>v_A(t)$ equivale a $a_B(t)>a_A(t)$ e quest'ultima si può verificare ricavando a_B e $a_A(t)$ dalle equazioni del moto e tenendo presente che : $F_B > \mu_s(M_A + M_B)g$ e che $\mu_s > \mu_d$
La **[M]** risulta vera.
Per rispondere alla **[N]** scriviamo l'equazione del moto di A in O'x'y' (sistema che è solidale con B e l'accelerazione di trascinamento sarà quindi, in questo caso: $a_t(t)=a_B(t)$)
Per A: $\mu_d M_A g - M_A a_t = M_A a'_A$ e che $\mu_s > \mu_d$
Sostituendo ad $a_T(t)$ l'espressione di $a_B(t)$ ottenibile dalle equazioni precedenti, si trova che $a'_A(t) <0$ e quindi che $v'_A(t) <0$ tenendo presente che: $F_B > \mu_s(M_A + M_B)g$ e che $\mu_s > \mu_d$
[N] è falsa.