Energia e lavoro

1. Problema

Una molla ideale di costante elastica k=100 N/m è sospesa verticalmente. Una particella di massa m=200 gr viene attaccata alla molla non deformata e lasciata andare dalla condizione di quiete.
Si calcoli quanto di quanto cade la massa prima di cominciare a muoversi all'insù e di quanto è variata corrispondentemente la sua energia potenziale.

Le forze che agiscono sulla massa, forza peso e forza elastica, sono conservative e quindi l'energia meccanica totale si conserva. Pongo lo zero dell'energia potenziale relativa alla forza elastica in corrispondenza della posizione della massa quando la molla è a riposo e assumo qui anche lo zero dell'energia potenziale gravitazionale. Assumo inoltre che l'asse y abbia origine nello stesso punto e che sia diretto verticalmente verso il basso. Allora l'energia meccanica totale sarà data da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mg(-y)$$

dove ho tenuto conto anche del termine di energia cinetica. L'energia totale si conserva:

$$E_{ini} = E_{fin}$$

$$0 = \frac{1}{2}ky_{fin}^{\ 2} + mg(-y_{fin})$$

da cui si ricava

$$y_{fin} = \frac{2mg}{k} \approx 3.9\ cm$$

La variazione dell'energia potenziale U è data da:

$$U_{fin} - U_{ini} = \frac{1}{2}ky_{fin}^{\ 2} + mg(-y_{fin}) = 0\ J$$

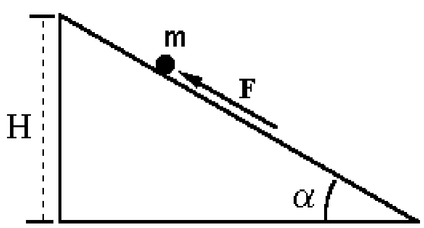
2. Problema

Un blocco di massa m = 80 kg, sta scivolando lungo un piano inclinato formante un angolo α = 30 ° con il piano orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e il piano è μ_d = 0.2. Una forza **F** parallela alla superficie del piano inclinato spinge il blocco in modo da farlo scendere lungo il piano stesso con velocità costante di modulo pari a v =1.25 ms^{-1}. Determinare:

(a) l'intensità e il verso della forza F; [**F** = – 256 N **i**]
(b) la potenza dissipata dalla forza di attrito; [P = $\mathbf{F}_A \bullet \mathbf{v}$ = – μ_d mg cosα v = – 170 W]
(c) la potenza sviluppata dalla forza peso. [P = m$\mathbf{g} \bullet \mathbf{v}$ = mg sinα v = 491 W]

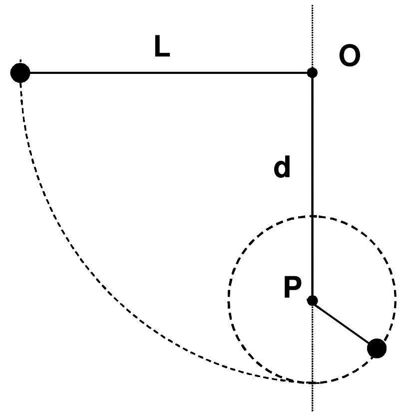
Assumendo che all'istante t=0 il blocco si trovi ad un'altezza H = 10 m dal suolo, calcolare, con riferimento all'istante in cui il blocco raggiunge la base del piano inclinato:

(d) il lavoro fatto dalla forza F; [W_F = – F L = – 5129 J]
(e) il lavoro fatto dalla forza di gravità; [W_{mg} = mg H = + 7848 J]
(f) il lavoro fatto dalla reazione vincolare della superficie del piano inclinato; W' = – μ_d mg cosα (H/sinα) = + 2718.6 J]



3. **Problema**

Un corpo puntiforme di massa m=2.50 kg è attaccato all'estremità libera di un filo ideale di lunghezza L =1.00 m, che ha l'altra estremità fissata ad un punto fisso O del piano verticale. Esso si trova inizialmente in quiete con il filo teso orizzontalmente. All'istante t=0 il corpo viene lasciato libero sotto l'azione della forza peso e percorre una traiettoria circolare centrata in O e di raggio L. Quando il corpo raggiunge la posizione più bassa il filo rimane impigliato in un piolo P fisso nel piano verticale ad una distanza d da O costringendo il corpo ad una traiettoria circolare intorno a P.



Calcolare:

-la velocità del corpo e la tensione del filo un istante prima che il filo tocchi il piolo P

La velocità si trova con la conservazione dell'energia (la forza peso è conservativa mentre la tensione del filo che agisce sulla particella non fa lavoro in quanto è sempre ortogonale allo spostamento).($v = \sqrt{2gL} = 4.43\frac{m}{s}$)

Nota la velocità un istante prima che la fune tocchi il piolo P, la tensione del filo si trova scrivendo la componente radiale dell'equazione del moto della massa m.($T = 3mg = 73.5N$)

-la distanza minima d_{min} del piolo dal punto O, oltre la quale il corpo compie un giro completo attorno a P.

Affinché il corpo puntiforme riesca a fare una rotazione completa intorno a P deve riuscire a raggiungere e superare il punto più alto della traiettoria circolare intorno a P. Occorre ricordare che un filo può solo "tirare" ma non "spingere" (vincolo unilatero) e che per effettuare un moto circolare con un certo raggio r =L-d e una certa velocità deve essere soddisfatta in ogni istante la condizione che il prodotto della massa per l'accelerazione centripeta sia pari alla risultante delle forze (che non è altro ancora una volta che la componente radiale dell'equazione del moto).

Scrivendola nel punto più alto abbiamo che:

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = mg + T \\ T \geq 0 \end{cases}$$

Da cui si ricava che nel punto più alto deve essere che $m\frac{v^2}{r} \geq mg$, ossia che la forza centrifuga deve almeno bilanciare la forza peso, perché il filo non può farlo (può solo "tirare"). Per ricavare r_{max}, ossia d_{min} si richiede poi la conservazione dell'energia (lascio a voi) e si ottiene

$$d_{\min} = \frac{3}{5}L$$

Assumendo che il piolo si trovi ad una distanza 1.2 d_{min}, calcolare l'energia cinetica della massa m e la tensione della fune quando si trova nel punto più alto della sua rotazione intorno a P;

A quest'ultima domanda si risponde considerando che si conserva l'energia totale, si ricava la velocità nel punto più alto e poi la relativa energia cinetica (10.8 J). La tensione della fune si trova scrivendo la componente radiale dell'equazione del moto nel punto più alto della rotazione intorno a P(vedi sopra espressione analoga).