Dinamica del punto materiale: lavoro e energia.

Problema n. 1: Un'automobile, assimilabile a un corpo puntiforme, si muove lungo un piano orizzontale sotto l'azione: i) della forza $\mathbf{F}_0$ di un motore con modulo pari a 200 N; ii) dell'attrito dinamico con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.1$; iii) della forza peso e della corrispondente reazione vincolare normale del piano orizzontale.

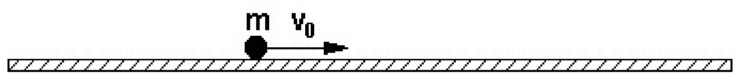
In queste condizioni il corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante di modulo $V_0 = 50$ m/s. Determinare:

(a) la massa del corpo; [$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_0+\mathbf{F}_A = 0$, l'accelerazione è zero e quindi la forza di attrito dinamico bilancia la forza del motore; $F_0 - \mu_d\, mg = 0$; $m = F_0/(\mu_d g) = 204$ kg]

Assumendo che al tempo t=0 il motore venga spento, si calcoli:

(b) la lunghezza d del tratto rettilineo che il punto percorre prima di fermarsi; [dal teorema energia cinetica: il lavoro W fatto dalla forza di attrito è uguale alla variazione di energia cinetica $W = E_{k,f} - E_{k,0} \rightarrow -\mu_d\, mgd = -E_{k,0} \rightarrow d = E_{k,0}/(\mu_d\, mg) = 1276$ m, dove $E_{k,0} = mV_0^2/2$]

(c) il tempo t_f impiegato dal corpo puntiforme a fermarsi. [la velocità $V(t_f) = V_0 - \mu_d\, g\, t_f = 0$ quando $t_f = V_0/(\mu d\ g) = 51$ s]

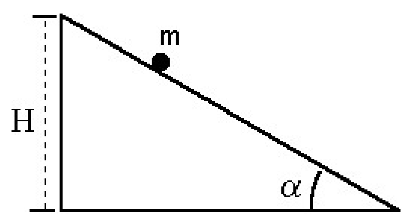


Problema n. 2: Un corpo puntiforme di massa m = 5 kg viene lasciato scivolare con velocità iniziale nulla lungo un piano inclinato di $\alpha = 30°$ sul piano orizzontale da un'altezza H=2 m rispetto a questo piano. Il corpo striscia lungo il piano inclinato con coefficiente d'attrito dinamico μ_d=0.2, fino a raggiungere la base del piano stesso. Calcolare:

(a) il lavoro della risultante delle forze agenti sul corpo dopo che il corpo ha raggiunto la base del piano inclinato; [$W_T = mgH - \mu_d\, mg\cos\alpha\, H/\sin\alpha = 64.$ J]

(b) la velocità v_B con cui il corpo arriva alla base del piano inclinato; [dal teorema dell'energia cinetica e utilizzando il lavoro fatto dalla risultante delle forze agenti , $v_B = \mathrm{sqrt}(2\, W_T/m) = 5.0$m/s]

(c) il tempo t impiegato dal corpo per raggiungerla. [il corpo parte da fermo e scivola lungo il piano con accelerazione costante $a = g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$ e quindi $t = \mathrm{sqrt}(2\, L/a) = \mathrm{sqrt}(4H/g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)) = 1.6$ s, sqrt(...) significa la radice quadrata della quantità tra parentesi]

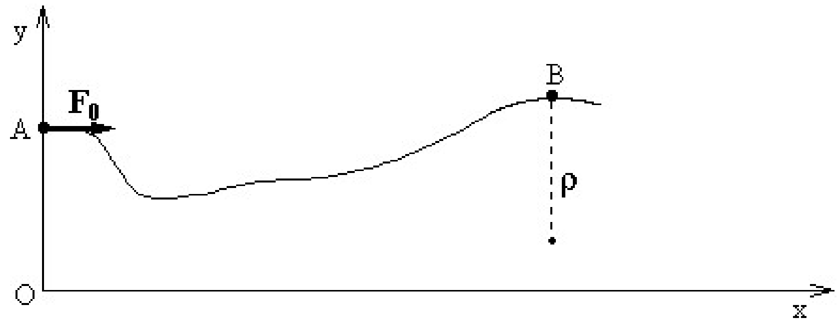


Problema n. 3: Un corpo puntiforme di massa m = 5 kg si muove nel piano verticale Oxy lungo la guida curvilinea perfettamente liscia (vincolo bilaterale) rappresentata in figura. Il corpo è soggetto anche all'azione una forza costante, di intensità $F_0 = 15$ N e diretta orizzontalmente. All'istante t = 0 il corpo si trova nella posizione A, di ascissa $x_A = 0$ e l'altezza rispetto al suolo $y_A = 1.6$ m. Dopo un certo tempo il corpo raggiunge la posizione B di ascissa $x_B = 3.2$ m e altezza dal suolo $y_B = 2.0$ m. Determinare:

(a) il lavoro della risultante delle forze agenti nello spostamento da A a B; [il lavoro totale W_{AB}^T è fatto dal lavoro della forza peso e il lavoro della forza $\mathbf{F}_0$, che è una forza costante agente lungo x, quindi $W_{AB}^T = F_0(x_B - x_A) - mg(y_B - y_A) = 28.4$ J]

(b) il modulo della velocità nel punto B, nell'ipotesi che la velocità all'istante t = 0 sia $\mathbf{v}_0 = 0.63$ m/s $\mathbf{i}$; [dal teorema dell'energia cinetica e il lavoro totale W_{AB}^T calcolato nel punto precedente $v_B = \mathrm{sqrt}(v_A^2 + 2W_{AB}^T/m) = 3.43$ m/s]

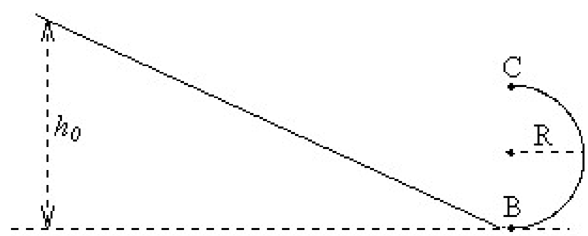
(c) la reazione verticale **R** della guida nel punto B, nell'ipotesi che il raggio di curvatura della guida nel punto B sia $\rho = 1.6$ m. [dalla componente radiale dell'equazione del moto scritta nei versori intrinseci della coordinata curvilinea, $\mathbf{R}_B = m(g - v_B^2/\rho)\,\mathbf{j} = 12.2\text{ N }\mathbf{j}$]



Problema n. 4: Un corpo puntiforme di massa m = 2.5 kg può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato che si raccorda tangenzialmente con un profilo circolare di raggio R = 1 m, sì da costituire un unico vincolo liscio unilaterale. Si determini:

(a) la minima altezza h_0 (rispetto al punto più basso della guida) da cui il corpo deve partire (con velocità nulla) per raggiungere la sommità (punto C) del profilo circolare, senza mai staccarsi da esso; [affinchè in C non si stacchi dalla guida deve essere che la reazione $\mathbf{R}_C$ della guida sia tale che $R_C + mg = mV_c^2/R$ $R_C \geq 0$, e visto che per la conservazione dell'energia $mgh = mg2R + mV_c^2/2$, si trova che $h_0 \geq 5R/2$]

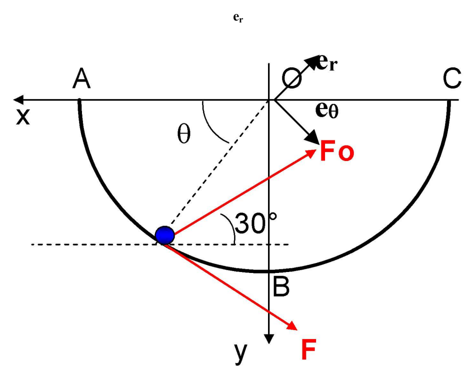
(b) la reazione $\mathbf{R}_C$ della guida quando il corpo si trova nel punto più alto di essa, assumendo che il corpo parta dalla stessa altezza h_0 di cui al punto (a) ma con velocità iniziale $v_0 = 1.2$ m/s.[$R_C + mg = mV_c^2/R$ che con la conservazione dell'energia $mg5R/2 + mV_0^2/2 = mg2R + mV_c^2/2$, ci permette di trovare che $\mathbf{R}_C = -m\,v_0^2/R\,\mathbf{j}$, dove **j** è il versore verticale che punta verso l'alto]



Problema n. 5

Un carrello di massa m=5.00 kg, assimilabile ad un corpo puntiforme, si muove lungo una rotaia semicircolare liscia di raggio R=4.00 m che giace su un piano orizzontale Oxy. Il corpo si muove inoltre sotto l'azione simultanea di due forze **F** e **Fo** di modulo rispettivamente di 40 N e 150 N .La forza **F** è sempre tangente alla rotaia, mentre **Fo** forma costantemente un angolo α=30° con l'asse x (vedi figura). Calcolare:

- le componenti cartesiane della risultante **R** delle due forze **F** e **Fo**, in funzione della coordinata θ indicata in figura;
- il lavoro totale fatto dal sistema di forza agenti sul corpo per spostarlo da A a B;
- il lavoro totale fatto dal sistema di forze agenti sul corpo per spostarlo da A a C;
- la velocità del corpo nella posizione B, assumendo che la sua velocità iniziale nel punto A sia nulla;
- la reazione vincolare nel punto B.



SOLUZIONE

La risultante delle forze in funzione dell'angolo θ si ricava dalla seguente espressione:

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_0 = \left(\left|F\right|\cos\theta - \left|F_0\right|\sin\alpha\right)\hat{y} - \left(\left|F\right|\sin\theta + \left|F_0\right|\cos\alpha\right)\hat{x}$$

La forza $\vec{F}_0$, essendo una forza costante (come vettore e non solo il suo modulo!!!) è una forza conservativa e quindi il lavoro che fa quando il punto di applicazione si sposta da A a B è indipendente dal percorso (da A a B) lungo il quale viene calcolato. Possiamo calcolarlo lungo la traiettoria effettivamente descritta, oppure sceglierne un'altra lungo la quale il calcolo è più facile, oppure potremmo ricordarci di aver dimostrato insieme che se una forza è costante allora il lavoro da essa effettuato per uno spostamento dalla posizione $\vec{r}_A$ alla posizione $\vec{r}_B$ è dato semplicemente da $\vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -\left(\left|\vec{F}_0\right|\sin\alpha\ \hat{y} + \left|\vec{F}_0\right|\cos\alpha\ \hat{x}\right)\cdot\left(R\,\hat{y} - R\,\hat{x}\right) = \left|\vec{F}_0\right|R\left(-\sin\alpha + \cos\alpha\right)$. In alternativa, un percorso facile lungo cui calcolarlo è quello che da A va parallelamente all'asse x ad O e poi parallelamente all'asse y a B, è facile vedere che il risultato è lo stesso. Oppure si può calcolare pedissequamente lungo la traiettoria effettiva, che essendo una arco di circonferenza permette di scrivere lo spostamento infinitesimo come:

$$d\vec{s} = R\,d\theta\,\hat{e}_\theta$$

E quindi il lavoro fatto da $\vec{F}_0$ per andare da A a B si trova integrando il lavoro infinitesimo $\vec{F}_0 \cdot d\vec{s}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\left|\vec{F}_0\right|\sin\alpha\,R\cos\theta + \left|\vec{F}_0\right|\cos\alpha\,R\sin\theta)d\theta$$

e si vede che il risultato è di nuovo lo stesso.

Per quanto riguarda l'altra forza $\vec{F}$, si può notare intanto che non è conservativa (il lavoro fatto lungo una circonferenza chiusa non sarebbe zero!!), quindi non possiamo evitare di fare il conto del lavoro fatto lungo la traiettoria effettivamente descritta. Però in questo caso la forza è sempre parallela allo spostamento, il modulo è costante e quindi il lavoro non è altro che il posotto tra il modulo della forza e la lunghezza della traiettoria percorsa e quindi $\left|\vec{F}\right|R\dfrac{\pi}{2}$. Ovviamente si poteva procedere anche calcolando per esteso l'integrale del lavoro infinitesimo $\vec{F} \cdot d\vec{s}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\vec{F}\right|R\,d\theta$$

che da ovviamente lo stesso risultato.

Il vincolo è liscio, quindi la reazione vincolare è sempre ortogonale alla traiettoria e quindi non fa lavoro.

Il lavoro totale fatto per andare a d A a B è quindi dato da:

$$W_{AB} = \left|\vec{F}\right| \frac{\pi}{2} R + \left|\vec{F}_0\right| R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 471\,J$$

Per calcolare il lavoro totale fatto per andare da A a C si possono applicare gli stessi ragionamenti e si trova che

$$W_{AC} = \left|\vec{F}\right| \pi R + \left|\vec{F}_0 \sqrt{3}\right| R = 1542\,J$$

Per calcolare la velocità nel punto B si può applicare il teorema dell'energia cinetica (i lavori fatti gli ho già calcolati e quindi è facile).

$$v_B = \sqrt{\frac{|F| R\pi + |F_0| R(\sqrt{3} - 1)}{m}}$$

La reazione vincolare di modulo N nel punto B si trova impostando la componente ortogonale alla traiettoria dell'equazione del moto del carrello:

$$-m\frac{v_B^{\,2}}{R} = -N - \left|\vec{F}_0\right| \sin\alpha$$

Il calcolo dei valori numerici la lascio a voi…