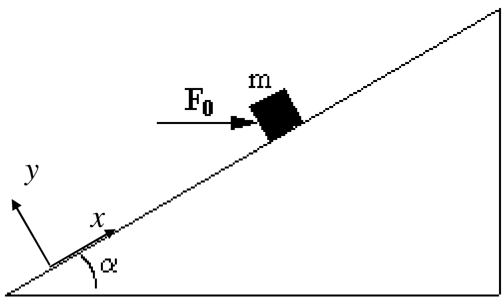
Problemi di dinamica del punto materiale in sistemi di riferimento inerziali

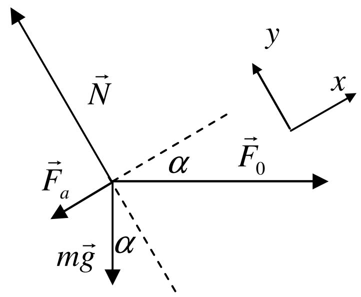
Problema 4

Un blocco di massa m = 5 kg è tenuto fermo su un piano inclinato, di angolo α = 30°, per mezzo di una forza $\vec{F}_0$ diretta orizzontalmente. Il coefficiente di attrito statico fra la massa e il piano inclinato vale μ_s = 0.5. Determinare il valore massimo del modulo di $\vec{F}_0$ oltre il quale in blocco comincia a muoversi in salita lungo il piano inclinato.



Soluzione.
Descriviamo le forze in gioco utilizzando un sistema di riferimento xy allineato con il piano inclinato, come descritto in figura. Chiamiamo $\vec{N}$ la componente della reazione vincolare ortogonale al piano inclinato. Oltre ad $\vec{N}$ ed $\vec{F}_0$, agiscono sul blocco la forza peso $m\vec{g}$ e la forza di attrito $\vec{F}_a$, che in condizioni di equilibrio statico possiamo descrivere con

$$F_a = \mu_s N \qquad (1).$$



La risultante $\vec{R}$ di queste forze deve essere nulla in quanto il blocco si trova in equilibrio; dunque entrambe le componenti della $\vec{R}$, parallela e perpendicolare al piano, devono annullarsi. In particolare, aiutandoci con la figura, possiamo scrivere

$$0 = F_x = F_0 \cos\alpha - mg \sin\alpha - F_a \qquad (2)$$

$$0 = F_y = N - mg\cos\alpha + F_0 \sin\alpha \qquad (3)$$

Ricaviamo N, la parte perpendicolare della reazione vincolare, dalla (3):

$$N = mg\cos\alpha + F_0 \sin\alpha \qquad (4)$$

Sostituendo nella relazione (2) la relazione (1) scriviamo la forza di attrito

$$F_a = \mu_s N = \mu_s (mg\cos\alpha + F_0 \sin\alpha)$$

e facendo uso della relazione (4), otteniamo

$$0 = F_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

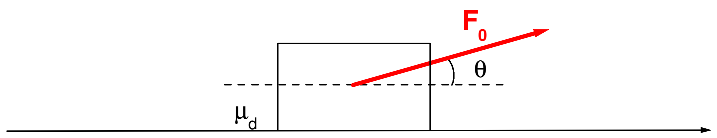
da cui la forza massima applicabile senza muovere il blocco risulta essere

$$F_{max} = mg\frac{\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha} = 5kg \cdot 9.8ms^{-2}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \approx 5.3N$$

Problema 6
Una slitta di massa m = 50 kg viene trainata con velocità costante lungo un piano orizzontale da una forza di intensità F_0 la cui direzione forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra la slitta e il piano orizzontale è $\mu_d = 0.4$, si calcoli:

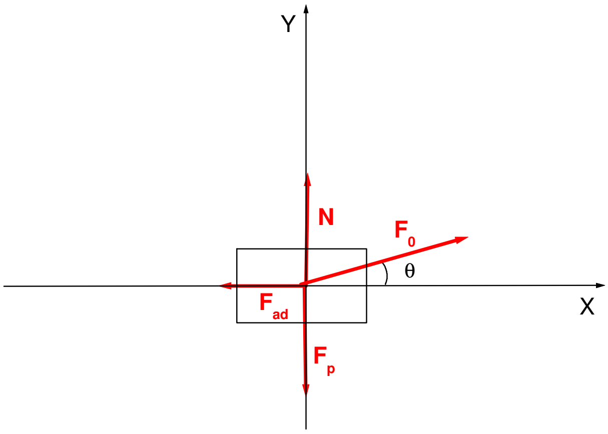
a) il valore dell'angolo θ per cui l'intensità della forza risulta minima;
b) l'intensità della reazione normale del piano, nelle condizioni di cui al punto a).

Soluzione:



Dati:
$m = 50Kg$
$\vec{v} = \cos\tan te$
$\mu_d = 0.4$

Nella figura superiore abbiamo schematizzato la situazione descritta nel problema; in quella sottostante riportiamo invece il diagramma delle forze che intervengono nel sistema in esame e introduciamo un sistema di riferimento arbitrario XY come quello mostrato in figura:



Sulla slitta agiscono quindi oltre alla forza peso $\vec{F}_p$, diretta verticalmente verso il basso, anche la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dal piano orizzontale sulla slitta, normale al piano stesso, la forza di attrito dinamico $\vec{F}_{ad}$ diretta lungo la direzione del piano orizzontale X ma in verso opposto a quello del moto e infine la forza $\vec{F}_0$ che forma con l'orizzontale un angolo θ .

(a) Determinare il valore dell'angolo θ per cui l'intensità della forza risulta minima

Applichiamo il secondo principio della dinamica, che ci dice che: $\boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}}$

In questo caso, poiché la slitta si muove sul piano orizzontale con velocità costante, l'accelerazione della slitta sarà nulla, ovvero $\vec{a} = 0$, quindi l'equazione di Newton diventa: $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Proiettando lungo le due direzioni X e Y l'equazione sopra otteniamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F_0 \cos\theta - F_{ad} = 0 \\ N + F_0 sen\theta - F_p = 0 \end{cases}$$

Ora, sapendo che: $F_p = mg$ e $F_{ad} = \mu_d N$ e sostituendo nel sistema sopra, otteniamo il sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} F_0 \cos\theta - \mu_d N = 0 \\ N + F_0 sen\theta - mg = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

da cui, risolvendolo possiamo ricavare l'espressione per il modulo della forza F_0 in funzione dell'angolo θ: $\boxed{F_0 = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d sen\theta}}$

Vogliamo determinare il valore dell'angolo θ per cui l'intensità della forza risulta minima: per farlo usiamo l'espressione ricavata per $F_0(\theta)$ e deriviamola rispetto all'angolo θ ponendo poi tale derivata uguale a zero:

$$\frac{d}{d\theta}F_0 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d sen\theta}\right) = \frac{-\mu_d mg(-sen\theta + \mu_d \cos\theta)}{(\cos\theta + \mu_d sen\theta)^2} = 0$$

L'espressione ricavata sopra diventa nulla quando l'espressione al numeratore è uguale a zero:

$$(-sen\theta + \mu_d \cos\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\theta = \mu_d}$$

Quindi la condizione affinché la forza che traina la slitta $\vec{F_0}$ sia minima è che la tangente dell'angolo θ formato dalla forza stessa con la direzione orizzontale sia uguale al coefficiente di attrito dinamico μ_d fra l'attrito e il piano orizzontale: tale condizione impone in questo caso specifico che sia $\theta = arctg\mu_d = arctg(0.4) \quad \Rightarrow \quad \theta = 22°$.

(b) Determinare l'intensità della reazione normale del piano, nelle condizioni di cui al punto (a)

Dalla prima delle due equazioni del sistema (1) otteniamo che il modulo della reazione normale del piano $\vec{N}$ è dato dall'espressione:

$$N = \frac{F_0 \cos\theta}{\mu_d} = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d sen\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\mu_d} = \frac{mg\cos\theta}{\cos\theta + \mu_d sen\theta}$$

Il problema ci chiede di determinare N nelle condizioni di cui al punto (a), ovvero quando θ sia tale per cui $\vec{F_0}$ è minima: in quel caso dunque $tg\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \mu_d \quad \Rightarrow \quad sen\theta = \mu_d \cos\theta$

Sostituendo nell'espressione trovata prima per N otteniamo quindi:

$$N = \frac{mg\cos\theta}{\cos\theta + \mu_d^2 \cos\theta} = \frac{mg}{1 + \mu_d^2} = 422N$$

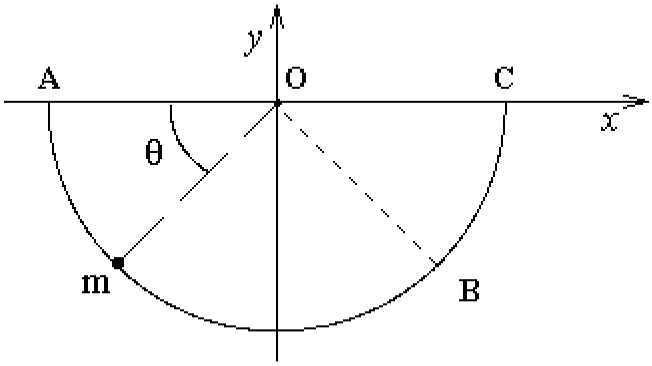
Problema 7

Un punto materiale di massa m =100 g, inizialmente in quiete, viene lasciato libero di muoversi lungo una guida semicircolare liscia di raggio r = 60 cm, disposta verticalmente. Inizialmente il punto materiale di trova in quiete nel punto A. Determinare in funzione dell'angolo θ formato dal raggio che individua la posizione istantanea del punto rispetto alla posizione iniziale:

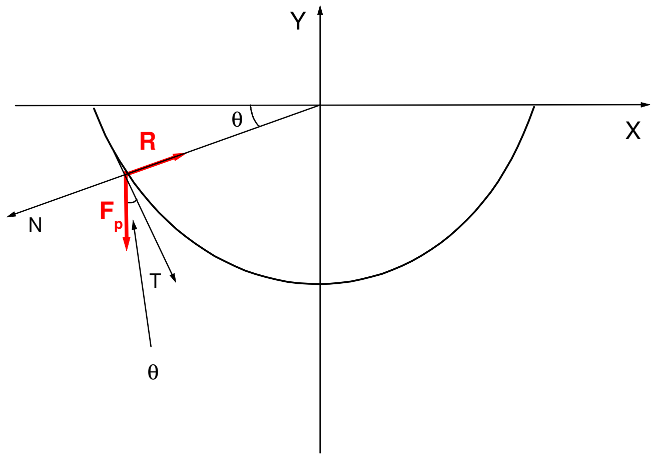
(a) la velocità angolare ω(θ),

(b) la reazione del vincolo **R**(θ).

Calcolare, inoltre, la velocità angolare e l'intensità della reazione vincolare quando la pallina si trova in B dopo aver percorso un arco di circonferenza s = (¾)πr rispetto alla posizione iniziale.



Soluzione:



Dati:

$m = 100g$

$r = 60cm$

Nella figura abbiamo schematizzato le forze che agiscono sul punto materiale: avremo la forza peso $\vec{F}_p$ diretta verso il basso lungo Y e la reazione vincolare esercitata dalla guida sulla massa $\vec{R}$, diretta in ogni istante perpendicolarmente alla traiettoria, ovvero in direzione radiale.

(a) Determinare la velocità angolare $\omega(\theta)$

Applichiamo il secondo principio della dinamica al punto materiale: scriveremo dunque che

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{R} + \vec{F}_p = m\vec{a}$$

Introduciamo ora un sistema di coordinate ortogonali NT i cui assi sono orientati come in figura, tangenzialmente e ortogonalmente alla traiettoria e proiettiamo l'equazione di cui sopra lungo questi assi:

$$\begin{cases} mg \cdot sen\theta - R = ma_N \\ mg \cdot \cos\theta = ma_T \end{cases}$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo indicato con a_T e a_N rispettivamente le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione che sappiamo essere pari a :

$$\begin{cases} a_N = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r \\ a_T = \dfrac{dv}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

Sostituendo quindi nel sistema precedente otteniamo:

$$\begin{cases} mg \cdot sen\theta - R = m\omega^2 r \\ mg \cdot \cos\theta = mr\dfrac{d\omega}{dt} \end{cases} \tag{1}$$

Considerando la seconda delle due equazioni del sistema sopra e moltiplicando entrambi i membri per il termine $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ otteniamo:

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot d\omega = \frac{g\cos\theta}{r} \cdot dt \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega \cdot d\omega = \frac{g\cos\theta}{r} \cdot d\theta$$

Se integriamo ora entrambi i membri delle due equazioni otteniamo la relazione cercata fra la velocità angolare ω e l'angolo θ:

$$\int_0^\omega \omega \cdot d\omega = \int_0^\theta \frac{g\cos\theta}{r} \cdot d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{r} sen\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{r} sen\theta}}$$

(b) Determinare la reazione del vincolo $\vec{R}(\theta)$

Dalla prima equazione del sistema (1), sostituendo l'espressione per la velocità angolare ω determinata al punto precedente otteniamo la reazione vincolare esercitata dalla guida sul punto materiale (che, come detto,sarà un vettore diretto in ogni istante ortogonalmente alla traiettoria):

$$mg \cdot sen\theta - R = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad mg \cdot sen\theta - R = m2g \cdot sen\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = -mg \cdot sen\theta}$$

(c) Calcolare la velocità angolare e l'intensità della reazione vincolare quando la pallina si trova in B dopo aver percorso un arco di circonferenza s = (¾)πr rispetto alla posizione iniziale

Poiché l'arco di circonferenza s e l'angolo θ individuato in ogni istante dal raggio sono legati dalla relazione $s = r\theta$, è facile determinare il valore di θ corrispondente all'arco di circonferenza richiesto: $\theta = \frac{3}{4}\pi$

Sostituendo nelle espressioni determinate ai punti precedenti per ω e $\vec{R}(\theta)$ otteniamo:

$$\omega = 1.2\frac{rad}{s}$$

$$R = 0.04N$$