

Cinematica del punto materiale: soluzioni degli esercizi sul moto relativo traslatorio

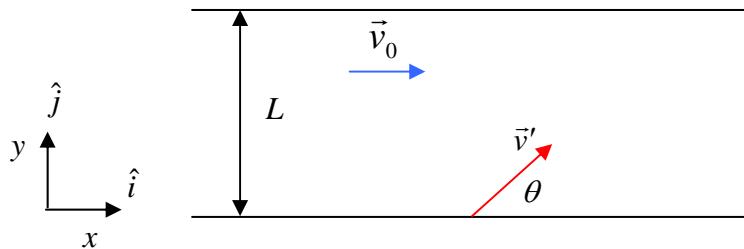
Problema 1

Un uomo vuole attraversare a nuoto un fiume largo $L = 100$ m. Egli può nuotare con velocità di modulo $v' = 1 \text{ ms}^{-1}$ e vuole raggiungere la sponda opposta nel punto corrispondente (= di fronte) al punto da cui inizia a nuotare. La velocità della corrente del fiume vale $v_0 = 0.5 \text{ ms}^{-1}$. Determinare:

- (a) la direzione verso la quale l'uomo deve nuotare se vuole raggiungere nel minor tempo possibile la sponda opposta;
- (b) il tempo impiegato per attraversare il fiume e a raggiungere tale punto;
- (c) la distanza effettiva percorsa dal nuotatore durante l'attraversata.

Soluzione

Si tratta di un problema di moto relativo in due dimensioni; sia il nuotatore che l'acqua del fiume si muovono di moto rettilineo uniforme. Scegliamo un sistema di riferimento solidale alle sponde del fiume, con origine nel punto di partenza del nuotatore, e chiamiamo x l'asse allineato con la direzione di moto dell'acqua del fiume (definita dal versore \hat{i}), e y l'asse che attraversa perpendicolarmente il fiume (definito dal versore \hat{j}).



Dati: Velocità del nuotatore rispetto all'acqua: $v' = 1 \text{ m s}^{-1}$;

Velocità dell'acqua del fiume: $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$.

Posizione iniziale del nuotatore: $(0,0)$; posizione finale del nuotatore: $(0,L)$.

Come mostrato in figura, chiamiamo θ l'angolo formato dalla velocità \vec{v}' del nuotatore con l'asse x . Applichiamo la composizione delle velocità per sommare vettorialmente la velocità dell'acqua del fiume $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$ con la velocità del nuotatore *rispetto all'acqua*:

$$\vec{v}' = v' \cos \theta \hat{i} + v' \sin \theta \hat{j} \quad (\text{i}),$$

ottenendo la velocità del nuotatore *rispetto alle rive del fiume*:

$$v_x = v_0 + v' \cos \theta \quad (\text{ii})$$

$$v_y = v' \sin \theta \quad (\text{iii})$$

Ora il fatto che il nuotatore raggiunga la sponda opposta di fronte al punto di partenza significa che rispetto alla sponda del fiume il suo moto parte dalla posizione $(0,0)$ per

arrivare nella posizione $(0, L)$. Essendo tutti i moti coinvolti rettilinei uniformi, perché questo sia vero deve essere $v_x = 0$ ossia, usando la (ii), $0 = v_0 + v' \cos \theta$ da cui

$$\cos \theta = -\frac{v_0}{v'} = -\frac{1}{2} \quad (\text{iv})$$

per cui $\theta = \frac{2\pi}{3}$ rad = 120° , in risposta alla domanda (a).

Integrando la (iii) si ottiene poi la legge oraria per il moto perpendicolarmente alla corrente, con la condizione iniziale $y(t=0)=0$:

$$y = t \cdot v_y = t \cdot v' \cdot \sin \theta \quad (\text{v})$$

Ora il tempo t^* per attraversare il fiume sarà evidentemente tale che $L = t^* \cdot v_y = t^* \cdot v' \cdot \sin \theta$ ossia, usando la (v) e la risposta (a),

$$t^* = \frac{L}{v' \sin \theta} = \frac{100 \text{ m}}{1 \text{ ms}^{-1} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2 \cdot 100}{\sqrt{3}} \text{ s} \approx 115 \text{ s}$$

La distanza effettiva percorsa dal nuotatore è quella percorsa rispetto ad un sistema di riferimento solidale con l'acqua del fiume. Essa si può calcolare ad esempio integrando le due componenti dell'equazione vettoriale (i) per ottenere le leggi orarie del nuotatore, misurate rispetto all'acqua del fiume:

$$\begin{aligned} x'(t) &= v' \cdot t \cdot \cos \theta \\ y'(t) &= v' \cdot t \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

Da qui otteniamo la distanza effettiva percorsa dal nuotatore:

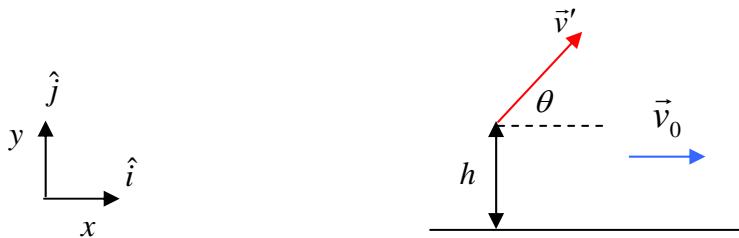
$$R' = \sqrt{x'^2(t^*) + y'^2(t^*)} = \sqrt{(v' \cdot t^* \cdot \sin \theta)^2 + (v' \cdot t^* \cdot \cos \theta)^2} = v' \cdot t^* \sqrt{(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} = v' \cdot t^*$$

che è quello che in effetti ci attendiamo: rispetto all'acqua il nuotatore si muove per un tempo t^* con velocità v' . Numericamente $R' = v' \cdot t^* = \frac{L}{\sin \theta} = \frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{\sqrt{3}} \approx 115 \text{ m}$

Problema 2

Un oggetto di massa $m = 1 \text{ kg}$ viene lanciato da un'auto che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità di modulo $v_0 = 24 \text{ ms}^{-1}$ su un piano orizzontale. L'oggetto è lanciato da un'altezza $h = 1.2 \text{ m}$, rispetto al suolo e con un'inclinazione di $\theta = 45^\circ$, misurato nel piano verticale rispetto alla direzione del moto dell'auto. Se la velocità iniziale dell'oggetto, rispetto a un osservatore solidale con l'auto, ha modulo $v' = 9 \text{ ms}^{-1}$, calcolare:

- (a) il tempo che la massa impiega a toccare il suolo;
- (b) a quale distanza dall'auto tocca il suolo;
- (c) la distanza percorsa dall'oggetto, durante il tempo di volo, misurata rispetto alla direzione orizzontale.



Soluzione

Si tratta di un problema di moto relativo in due dimensioni; per l'oggetto m si tratta di moto balistico, mentre l'automobile si muove di moto rettilineo uniforme. Scegliamo un sistema di riferimento solidale al terreno, con asse orizzontale x indicata dal versore \hat{i} ed asse verticale y con direzione parallela alla gravità e verso opposto ad essa, indicata da un versore \hat{j} . Poniamo l'origine di questo sistema di riferimento alla quota del terreno, e nella posizione occupata dall'automobile all'istante in cui la massa viene lanciata. Con queste scelte la legge oraria dell'automobile sarà ovviamente:

$$\begin{cases} x_A(t) = v_0 \cdot t \\ y_A(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{i})$$

Per la massa avremo invece:

$$\begin{cases} \ddot{x}_m(t) = 0 \\ \ddot{y}_m(t) = -g \end{cases} \quad (\text{ii})$$

che dobbiamo integrare due volte per ottenere la legge oraria. A questo scopo ci servono le condizioni iniziali, in particolare per la velocità iniziale, le cui componenti si possono ricavare a partire da una semplice addizione vettoriale delle velocità. Scegliamo un sistema di riferimento solidale all'automobile, con asse orizzontale x' indicata dal versore \hat{i} ed asse verticale y' con direzione parallela alla gravità e verso opposto ad essa, indicata dal versore \hat{j} . All'istante $t = 0$ i due sistemi di riferimento si trovano a coincidere. In questo modo la velocità impressa alla massa, misurata rispetto all'automobile, è

$$\vec{v}' = v' \cos \theta \hat{i} + v' \sin \theta \hat{j}.$$

Ne deriva che, rispetto al sistema di riferimento solidale con il suolo, la velocità iniziale della massa vale

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t=0) = v' \cos \theta + v_0 \\ \dot{y}_m(t=0) = v' \sin \theta \end{cases}$$

e usiamo questi come condizioni iniziali per integrare la (ii) a dare

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = v' \cos \theta + v_0 \\ \dot{y}_m(t) = v' \sin \theta - g \cdot t \end{cases} \quad (\text{iii})$$

ed infine integriamo per ottenere

$$\begin{cases} x_m(t) = (v' \cos \theta + v_0) \cdot t \\ y_m(t) = h + v' \cdot t \cdot \sin \theta - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases} \quad (\text{iv})$$

Per ricavare la componente y abbiamo imposto che la posizione iniziale della massa sia $y_m(t=0) = h$. La legge oraria (iv) ci permette ora di risolvere il punto (a): il tempo di volo t_v è quello tale per cui

$$y_m(t = t_v) = 0,$$

e con i soliti calcoli si trova essere

$$t_v = \frac{v' \sin \theta + \sqrt{v'^2 \sin^2 \theta + 2 \cdot g \cdot h}}{g} = \frac{9 \text{ ms}^{-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{81 \cdot \frac{1}{2} \text{ m}^2 \text{s}^{-2} + 2 \cdot 9.8 \text{ ms}^{-2} \cdot 1.2 \text{ m}}}{9.8 \text{ ms}^{-2}} = 1.466 \text{ s} \approx 1.5 \text{ s}$$

Come al solito scegliamo per il tempo di volo la soluzione $t_v > 0$; la distanza percorsa dall'oggetto, durante il tempo di volo, misurata rispetto alla direzione orizzontale è

$$x_m(t = t_v) = (v' \cos \theta + v_0) \cdot t_v = (9 \text{ ms}^{-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 24 \text{ ms}^{-1}) \cdot 1.466 \text{ s} = 44.51 \text{ m} \approx 44 \text{ m}.$$

Infine calcoliamo la distanza percorsa dall'automobile durante il volo della massa, usando la legge oraria dell'automobile (i):

$$x_A(t = t_v) = v_0 \cdot t_v = 24 \text{ ms}^{-1} \cdot 1.466 \text{ s} = 35.18 \text{ m}.$$

La massa tocca il suolo ad una distanza dall'automobile data da:

$$\Delta L = x_m(t_v) - x_A(t_v) = 44.51 \text{ m} - 35.18 \text{ m} = 9.33 \text{ m} \approx 9.3 \text{ m}$$

Notiamo infine che a questo quesito si poteva rispondere più facilmente semplicemente considerando che il moto dell'automobile e della massa lungo x è rettilineo uniforme, con velocità relativa $v'_x = v' \cos \theta$. Dunque la distanza relativa

$$\text{percorsa sarà } \Delta L = v'_x \cdot t_v = v' \cos \theta \cdot t_v = 9 \text{ ms}^{-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1.466 \text{ s} \approx 9.3 \text{ m}.$$

Problema 3

All'interno di un vagone ferroviario molto lungo in moto rettilineo sul piano orizzontale con accelerazione $a_T = 2.45 \text{ ms}^{-2}$, una pallina di dimensioni trascurabili viene lanciata dal livello del pavimento con velocità $v' = 4.9 \text{ ms}^{-1}$ relativa al vagone. Assumendo che v' sia verticale e trascurando qualsiasi attrito con l'aria, si calcoli:

- (a) l'accelerazione \vec{a}' della pallina rispetto al sistema di riferimento solidale con il vagone in moto;
- (b) la velocità (relativa al vagone) con cui la pallina cade sul pavimento del vagone;
- (c) a quale distanza dal punto di lancio la pallina toccherà il pavimento del vagone.

Soluzione

Sceglieremo un sistema di riferimento solidale al vagone, con asse orizzontale x indicata dal versore \hat{i} ed asse verticale y con direzione parallela alla gravità e verso opposto ad essa, indicata da un versore \hat{j} . Poniamo l'origine di questo sistema di riferimento alla quota del pavimento, e nella posizione occupata dalla pallina all'istante in cui essa viene lanciata. Tale sistema di riferimento si muove rispetto al terreno di moto traslatorio (rettilineo) accelerato con accelerazione $\vec{a}_T = a_T \hat{i}$.

La relazione tra l'accelerazione $\vec{a} = -g \hat{j}$ della pallina misurata nel sistema di riferimento del terreno e la sua accelerazione \vec{a}' rispetto al vagone è data da $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}'$, da cui:

$$\vec{a}' = -\hat{i}a_T - \hat{j}g \quad (\text{i}),$$

il che risponde alla domanda (a).

Integrando per componenti la (i) con le condizioni iniziali $v'_x(t=0)=0$ e $v'_y(t=0)=v'$ si ottiene:

$$\begin{aligned} v'_x(t) &= -a_T \cdot t \\ v'_y(t) &= v' - g \cdot t \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

Ancora un'integrazione, con le condizioni iniziali $x'(t=0)=0$ e $y'(t=0)=0$, per ottenere

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{2}a_T \cdot t^2 \\ y'(t) &= v' \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 \end{aligned} \quad (\text{iii})$$

Con le leggi orarie (iii) possiamo risolvere il problema di moto balistico. La pallina tocca il pavimento del vagone al tempo t_v , tale che

$$0 = y'(t = t_v) = v' \cdot t_v - \frac{1}{2}g \cdot t_v^2$$

da cui $t_v = \frac{2 \cdot v'}{g} = 1 \text{ s}$ (la soluzione $t_v = 0$ è quella che descrive il primo istante del moto).

Noto il tempo di volo t_v , la velocità relativa al vagone con cui la pallina tocca il pavimento si ottiene dalla (ii) ed ha componenti:

$$v'_x(t_v) = -a_T \cdot t_v = -\frac{2 \cdot a_T \cdot v'}{g} = -\frac{2 \cdot 2.45 \text{ ms}^{-2} \cdot 4.9 \text{ ms}^{-1}}{9.8 \text{ ms}^{-2}} = 2.45 \text{ ms}^{-1}$$

$$v'_y(t) = v' - g \cdot t_v = v' - g \cdot \frac{2v'}{g} = -v' = -4.9 \text{ ms}^{-1}$$

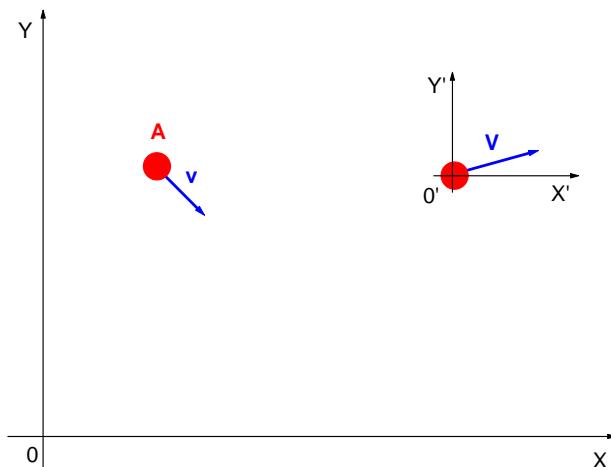
Analogamente, la distanza dal punto di lancio a cui la pallina atterra vale

$$|\Delta L| = |x'(t = t_v)| = \left| -\frac{1}{2} a_T \cdot t_v^2 \right| = \frac{1}{2} a_T \cdot \left(\frac{2v'}{g} \right)^2 = \frac{2.45 \text{ ms}^{-2}}{2} \cdot (4.9 \text{ ms}^{-1})^2 = 1.225 \text{ m} \approx 1.2 \text{ m}$$

Problema 4

Un'auto da corsa A viaggia su un piano orizzontale con velocità costante $\mathbf{v} = 69 \text{ km/h} \mathbf{i} - 121 \text{ km/h} \mathbf{j}$ rispetto ad un osservatore solidale al suolo Oxy. Qual è la velocità dell'auto A misurata da un osservatore solidale ad un treno O'x'y' che viaggia con velocità costante $\mathbf{V} = 108 \text{ km/h} \mathbf{i} + 70 \text{ km/h} \mathbf{j}$ rispetto a Oxy? Calcolare i moduli della velocità di A nei due sistemi di riferimento Oxy e O'x'y' e commentare il risultato.

Soluzione



Dati:

$$\vec{v} = 69 \text{ Km/h} \hat{\mathbf{i}} - 121 \text{ Km/h} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{V} = 108 \text{ Km/h} \hat{\mathbf{i}} + 70 \text{ Km/h} \hat{\mathbf{j}}$$

In figura abbiamo schematizzato la situazione descritta nel problema: l'auto A si muove lungo una generica traiettoria con velocità \vec{v} , rispetto al sistema di riferimento fisso OXY, mentre il treno

viaggia con velocità \vec{V} , calcolata sempre rispetto al sistema di riferimento OXY. Definiamo anche un sistema di riferimento *mobile*, che chiamiamo O'X'Y', solidale con il treno.

- (1) Calcolare la velocità di A rispetto ad un osservatore solidale con il sistema di riferimento O'X'Y'

Vogliamo calcolare la velocità dell'auto A rispetto ad un osservatore solidale con il sistema di riferimento mobile O'X'Y'; applichiamo quindi il teorema delle velocità relative che ci dice che la velocità *assoluta* di un oggetto (ovvero la velocità misurata rispetto ad un sistema di riferimento fisso) è uguale alla somma vettoriale della velocità *relativa* (la velocità misurata da un osservatore solidale con il sistema di riferimento mobile) e della velocità di *trascinamento* del sistema di riferimento mobile.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t} \quad (1)$$

Dove: \vec{v} è la velocità assoluta

\vec{v}' è la velocità relativa

\vec{v}_t è la velocità di trascinamento

La velocità di trascinamento del sistema di riferimento mobile, è in generale la somma di un termine di moto traslatorio e di uno rotatorio, ma nel nostro caso il sistema mobile O'X'Y' trasla solo (con velocità pari a \vec{V}) rispetto al sistema fisso OXY e non ruota, quindi scriveremo che:

$$\vec{v}_t = \vec{V}$$

Dalla (1), otteniamo quindi che la velocità relativa \vec{v}' dell'auto, misurata rispetto al sistema di riferimento mobile O'X'Y', è data dalla relazione: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$

La relazione appena scritta è una relazione *vettoriale*, quindi riscriviamola in termini di componenti lungo le direzioni XY :

$$v'_x = v_x - V_x = 69 \text{ Km/h} - 108 \text{ Km/h} = -39 \text{ Km/h}$$

$$v'_y = v_y - V_y = -121 \text{ Km/h} - 70 \text{ Km/h} = -191 \text{ Km/h}$$

Otteniamo quindi che la velocità relativa dell'auto, ovvero la sua velocità misurata rispetto ad un osservatore solidale con il treno O'X'Y', è pari a:

$$\vec{v}' = -39 \text{ Km/h} \hat{i} - 191 \text{ Km/h} \hat{j}$$

- (2) Calcolare i moduli della velocità di A nei due sistemi di riferimento Oxy e O'x'y' e commentare il risultato

Per calcolare i moduli della velocità dell'auto A, misurata rispetto ai due sistemi di riferimento (quello fisso OXY e quello mobile O'X'Y') basta utilizzare le componenti delle due velocità \vec{v} (fornite da problema) e \vec{v}' (calcolate nel punto precedente):

$$\text{Sistema di riferimento OXY: } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(69 \text{ Km/h})^2 + (-121 \text{ Km/h})^2} \cong 139 \text{ Km/h}$$

$$\text{Sistema di riferimento O'X'Y': } v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{(-39 \text{ Km/h})^2 + (-191 \text{ Km/h})^2} \cong 195 \text{ Km/h}$$

I moduli calcolati delle due velocità, quella relativa e quella assoluta, ci indicano che due osservatori, uno fisso (cioè in quiete rispetto al riferimento OXY) e l'altro solidale con il sistema di riferimento O'X'Y' vedono entrambi l'auto muoversi di *moto rettilineo uniforme*, ma con velocità differenti sia in modulo (in particolare, rispetto all'osservatore solidale con O'X'Y', la velocità dell'auto risulta maggiore rispetto a quella misurata dall'osservatore solidale con OXY) che in direzione (come si deduce facilmente osservando le componenti della due velocità).

In particolare, rispetto al sistema di riferimento OXY, l'auto si muoverà su una traiettoria rettilinea formante un angolo di inclinazione θ di circa 60° rispetto all'asse X (è facile calcolarlo, utilizzando le componenti della velocità, dato che $\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$), mentre rispetto al sistema O'X'Y' l'auto percorrerà, con velocità superiore rispetto a quanto misurato dall'osservatore fisso, una traiettoria rettilinea come quella mostrata in figura (con angolo di inclinazione rispetto a X' $\theta' = 78^\circ$)

