

## Problemi di dinamica del punto materiale in sistemi di riferimento inerziali

1. Rispetto ad un sistema di riferimento inerziale Oxy, qual è l'accelerazione di un punto materiale di massa  $m=500\text{gr}$  su cui agiscono la forza  $\vec{F}_1 = 2N \hat{x}$  e la forza  $\vec{F}_2 = 1N \hat{x} + 1N \hat{y}$  ?

### SOLUZIONE

Dal secondo principio della dinamica

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \vec{a}$$

$$\vec{a} = 6 \frac{m}{s^2} \hat{x} + 2 \frac{m}{s^2} \hat{y}$$

2. Un punto materiale di massa  $m$  compie un moto circolare uniforme di raggio  $R$  e con velocità angolare  $\omega$ . Qual è istante per istante la risultante delle forze agenti sul punto materiale? (esprimerla in coordinate polari introducendo gli opportuni versori)

### SOLUZIONE

In un moto circolare uniforme l'accelerazione ha solo la componente centripeta e quindi applicando il secondo principio della dinamica

$$\vec{F} = -m\omega^2 R \hat{e}_r$$

Dove abbiamo introdotto il versore radiale  $\hat{e}_r$  (lungo il raggio e diretto verso l'esterno della circonferenza).

3. Un punto materiale di massa  $m$  compie un moto circolare di raggio  $R$ . Se in un certo istante la sua velocità angolare è pari  $\omega$  e la sua accelerazione angolare è pari ad  $\alpha$ , qual è la risultante delle forze agenti sul punto materiale? (esprimerla in coordinate polari introducendo gli opportuni versori)  
E il suo modulo?

### SOLUZIONE

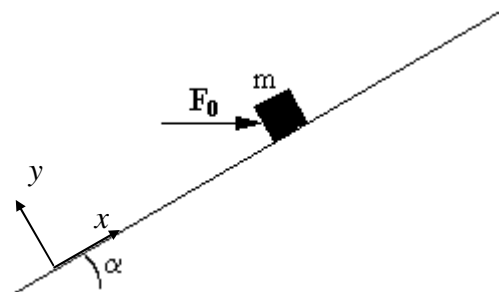
Dalla conoscenza dell'accelerazione totale per il moto descritto, applicando il secondo principio si ottiene la risultante delle forze agenti espressa in coordinate polari:

$$\vec{F} = -m\omega^2 R \hat{e}_r + m\alpha R \hat{e}_\theta$$

mentre il suo modulo è dato da:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(m\omega^2 R)^2 + (m\alpha R)^2}$$

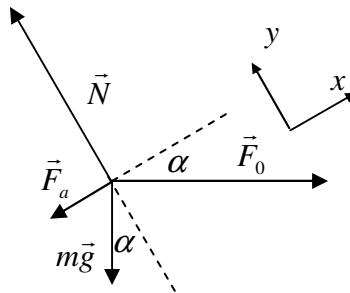
4. Un blocco di massa  $m = 5 \text{ kg}$  è tenuto fermo su un piano inclinato, di angolo  $\alpha = 30^\circ$ , per mezzo di una forza  $\vec{F}_0$  diretta orizzontalmente. Il coefficiente di attrito statico fra la massa e il piano inclinato vale  $\mu_s = 0.5$ . Determinare il valore massimo del modulo di  $\vec{F}_0$  oltre il quale in blocco comincia a muoversi in salita lungo il piano inclinato.



## SOLUZIONE

Descriviamo le forze in gioco utilizzando un sistema di riferimento  $xy$  allineato con il piano inclinato, come descritto in figura. Chiamiamo  $\vec{N}$  la componente della reazione vincolare ortogonale al piano inclinato. Oltre ad  $\vec{N}$  ed  $\vec{F}_0$ , agiscono sul blocco la forza peso  $m\vec{g}$  e la forza di attrito  $\vec{F}_a$ , che in condizioni di equilibrio statico possiamo descrivere con

$$F_a = \mu_s N \quad (1).$$



La risultante  $\vec{R}$  di queste forze deve essere nulla in quanto il blocco si trova in equilibrio; dunque entrambe le componenti della  $\vec{R}$ , parallela e perpendicolare al piano, devono annullarsi. In particolare, aiutandoci con la figura, possiamo scrivere

$$0 = F_x = F_0 \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_a \quad (2)$$

$$0 = F_y = N - mg \cos \alpha + F_0 \sin \alpha \quad (3)$$

Ricaviamo  $N$ , la parte perpendicolare della reazione vincolare, dalla (3):

$$N = mg \cos \alpha + F_0 \sin \alpha \quad (4)$$

Sostituendo nella relazione (2) la relazione (1) scriviamo la forza di attrito

$$F_a = \mu_s N = \mu_s (mg \cos \alpha + F_0 \sin \alpha)$$

e facendo uso della relazione (4), otteniamo

$$0 = F_0 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

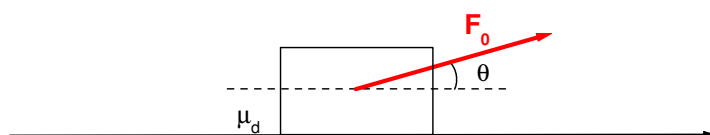
da cui la forza massima applicabile senza muovere il blocco risulta essere

$$F_{\max} = mg \frac{\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha} = 5 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ ms}^{-2} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2}} \approx 5.3 \text{ N}$$

5. Una slitta di massa  $m = 50 \text{ kg}$  viene trainata con velocità costante lungo un piano orizzontale da una forza di intensità  $F_0$  la cui direzione forma un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra la slitta e il piano orizzontale è  $\mu_d = 0.4$ , si calcoli:

- il valore dell'angolo  $\theta$  per cui l'intensità della forza risulta minima;
- l'intensità della reazione normale del piano, nelle condizioni di cui al punto a).

## SOLUZIONE



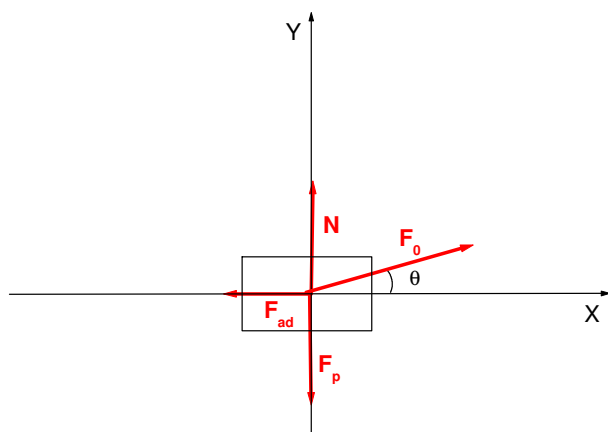
**Dati:**

$$m = 50 \text{ Kg}$$

$$v = \text{costante}$$

$$\mu_d = 0.4$$

Nella figura superiore abbiamo schematizzato la situazione descritta nel problema; in quella sottostante riportiamo invece il diagramma delle forze che intervengono nel sistema in esame e introduciamo un sistema di riferimento arbitrario XY come quello mostrato in figura:



Sulla slitta agiscono quindi oltre alla forza peso  $\vec{F}_p$ , diretta verticalmente verso il basso, anche la reazione vincolare  $\vec{N}$  esercitata dal piano orizzontale sulla slitta, normale al piano stesso, la forza di attrito dinamico  $\vec{F}_{ad}$  diretta lungo la direzione del piano orizzontale X ma in verso opposto a quello del moto e infine la forza  $\vec{F}_0$  che forma con l'orizzontale un angolo  $\theta$ .

(a) Determinare il valore dell'angolo  $\theta$  per cui l'intensità della forza risulta minima

Applichiamo il secondo principio della dinamica, che ci dice che:  $\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}$

In questo caso, poiché la slitta si muove sul piano orizzontale con velocità costante, l'accelerazione della slitta sarà nulla, ovvero  $\vec{a} = 0$ , quindi l'equazione di Newton diventa:  $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Proiettando lungo le due direzioni X e Y l'equazione sopra otteniamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F_0 \cos \theta - F_{ad} = 0 \\ N + F_0 \sin \theta - F_p = 0 \end{cases}$$

Ora, sapendo che:  $F_p = mg$  e  $F_{ad} = \mu_d N$  e sostituendo nel sistema sopra, otteniamo il sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} F_0 \cos \theta - \mu_d N = 0 \\ N + F_0 \sin \theta - mg = 0 \end{cases} \quad (1)$$

da cui, risolvendolo possiamo ricavare l'espressione per il modulo della forza  $F_0$  in funzione dell'angolo  $\theta$ :

$$F_0 = \frac{\mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}$$

Vogliamo determinare il valore dell'angolo  $\theta$  per cui l'intensità della forza risulta minima: per farlo usiamo l'espressione ricavata per  $F_0(\theta)$  e deriviamola rispetto all'angolo  $\theta$  ponendo poi tale derivata uguale a zero:

$$\frac{d}{d\theta} F_0 = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} \right) = \frac{-\mu_d mg (-\sin \theta + \mu_d \cos \theta)}{(\cos \theta + \mu_d \sin \theta)^2} = 0$$

L'espressione ricavata sopra diventa nulla quando l'espressione al numeratore è uguale a zero:

$$(-\sin \theta + \mu_d \cos \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan \theta = \mu_d}$$

Quindi la condizione affinché la forza che traina la slitta  $\vec{F}_0$  sia minima è che la tangente dell'angolo  $\theta$  formato dalla forza stessa con la direzione orizzontale sia uguale al coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d$  fra l'attrito e il piano orizzontale: tale condizione impone in questo caso specifico che sia  $\theta = \arctg \mu_d = \arctg(0.4) \Rightarrow \theta = 22^\circ$ .

- (b) Determinare l'intensità della reazione normale del piano, nelle condizioni di cui al punto (a)

Dalla prima delle due equazioni del sistema (1) otteniamo che il modulo della reazione normale del piano  $\vec{N}$  è dato dall'espressione:

$$N = \frac{F_0 \cos \theta}{\mu_d} = \frac{\mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\mu_d} = \frac{mg \cos \theta}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}$$

Il problema ci chiede di determinare  $N$  nelle condizioni di cui al punto (a), ovvero quando  $\theta$  sia tale per cui  $\vec{F}_0$  è minima: in quel caso dunque  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \mu_d \Rightarrow \sin \theta = \mu_d \cos \theta$

Sostituendo nell'espressione trovata prima per  $N$  otteniamo quindi:

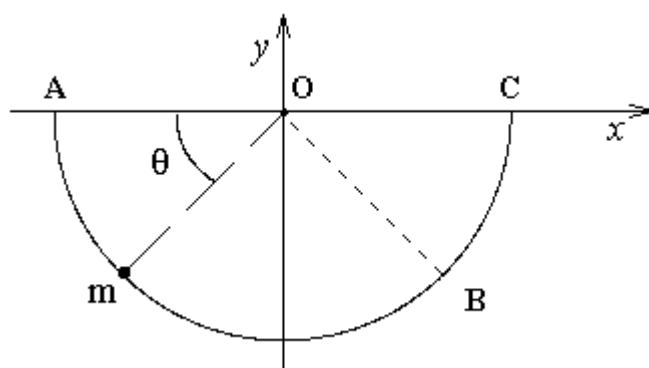
$$N = \frac{mg \cos \theta}{\cos \theta + \mu_d^2 \cos \theta} = \frac{mg}{1 + \mu_d^2} = 422 N$$

6. Un punto materiale di massa  $m = 100 \text{ g}$ , inizialmente in quiete, viene lasciato libero di muoversi lungo una guida semicircolare liscia di raggio  $r = 60 \text{ cm}$ , disposta verticalmente. Inizialmente il punto materiale si trova in quiete nel punto A. Determinare in funzione dell'angolo  $\theta$  formato dal raggio che individua la posizione istantanea del punto rispetto alla posizione iniziale:

(a) la velocità angolare  $\omega(\theta)$ ,

(b) la reazione del vincolo  $\mathbf{R}(\theta)$ .

Calcolare, inoltre, la velocità angolare e l'intensità della reazione vincolare quando la pallina si trova in B dopo aver percorso un arco di circonferenza  $s = (\frac{3}{4})\pi r$  rispetto alla posizione iniziale.

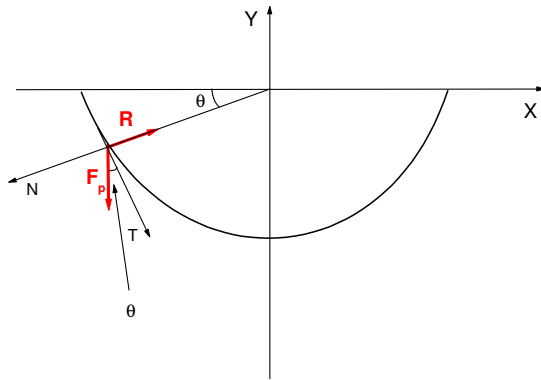


## SOLUZIONE

**Dati:**

$$m = 100 \text{ g}$$

$$r = 60 \text{ cm}$$



Nella figura abbiamo schematizzato le forze che agiscono sul punto materiale: avremo la forza peso  $\vec{F}_p$  diretta verso il basso lungo Y e la reazione vincolare esercitata dalla guida sulla massa  $\vec{R}$ , diretta in ogni istante perpendicolarmente alla traiettoria, ovvero in direzione radiale.

(a) Determinare la velocità angolare  $\omega(\theta)$

Applichiamo il secondo principio della dinamica al punto materiale: scriveremo dunque che

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{R} + \vec{F}_p = m \vec{a}$$

Introduciamo ora un sistema di coordinate ortogonali NT i cui assi sono orientati come in figura, tangenzialmente e ortogonalmente alla traiettoria e proiettiamo l'equazione di cui sopra lungo questi assi:

$$\begin{cases} mg \cdot \sin\theta - R = ma_N \\ mg \cdot \cos\theta = ma_T \end{cases}$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo indicato con  $a_T$  e  $a_N$  rispettivamente le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione che sappiamo essere pari a :

$$\begin{cases} a_N = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \\ a_T = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

Sostituendo quindi nel sistema precedente otteniamo:

$$\begin{cases} mg \cdot \sin \theta - R = m\omega^2 r \\ mg \cdot \cos \theta = mr \frac{d\omega}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

Considerando la seconda delle due equazioni del sistema sopra e moltiplicando entrambi i membri per il termine  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  otteniamo:

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot d\omega = \frac{g \cos \theta}{r} \cdot dt \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega \cdot d\omega = \frac{g \cos \theta}{r} \cdot d\theta$$

Se integriamo ora entrambi i membri delle due equazioni otteniamo la relazione cercata fra la velocità angolare  $\omega$  e l'angolo  $\theta$ :

$$\int_0^\omega \omega \cdot d\omega = \int_0^\theta \frac{g \cos \theta}{r} \cdot d\theta \Rightarrow \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{r} \sin \theta \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{r} \sin \theta}}$$

(b) Determinare la reazione del vincolo  $R(\vec{\theta})$

Dalla prima equazione del sistema (1), sostituendo l'espressione per la velocità angolare  $\omega$  determinata al punto precedente otteniamo la reazione vincolare esercitata dalla guida sul punto materiale (che, come detto, sarà un vettore diretto in ogni istante ortogonalmente alla traiettoria):

$$mg \cdot \sin \theta - R = m\omega^2 r \Rightarrow mg \cdot \sin \theta - R = m2g \cdot \sin \theta \Rightarrow \boxed{R = -mg \cdot \sin \theta}$$

(c) Calcolare la velocità angolare e l'intensità della reazione vincolare quando la pallina si trova in B dopo aver percorso un arco di circonferenza  $s = (\frac{3}{4})\pi r$  rispetto alla posizione iniziale

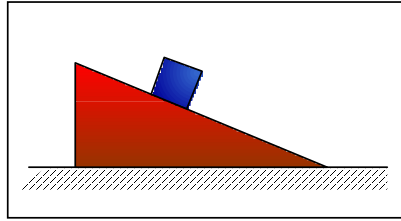
Poiché l'arco di circonferenza  $s$  e l'angolo  $\theta$  individuato in ogni istante dal raggio sono legati dalla relazione  $s = r\theta$ , è facile determinare il valore di  $\theta$  corrispondente all'arco di circonferenza richiesto:  $\theta = \frac{3}{4}\pi$

Sostituendo nelle espressioni determinate ai punti precedenti per  $\omega$  e  $R(\vec{\theta})$  otteniamo:

$$\omega = 1.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$R = 0.04N$$

7. Un punto materiale è fermo su di un piano inclinato che forma un angolo  $\alpha$  con l'orizzontale. Il coefficiente di attrito statico è  $\mu_s=0.35$  e il coefficiente di attrito dinamico è  $\mu_d=0.23$ .



- 1) Qual'è il valore massimo di  $\alpha$  per cui il punto rimane fermo rispetto al piano?
- 2) Se  $\alpha=30^\circ$ , quanto tempo impiega il punto materiale a percorrere la distanza di 1 m lungo il piano inclinato partendo da fermo?
- 3) Se  $\alpha=30^\circ$ , che accelerazione orizzontale (modulo e verso) bisogna imprimere al piano inclinato perché il punto rimanga in quiete?

## SOLUZIONE

Dati del problema:

coefficienti di attrito statico e dinamico

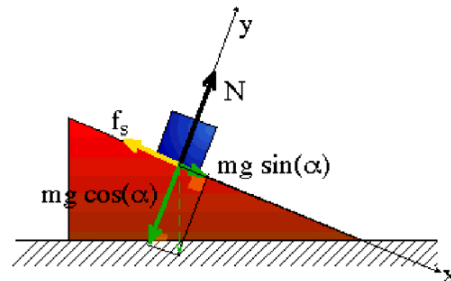
$$\mu_s = 0.35 \quad \mu_d = 0.23$$

inclinazione del piano:  $\alpha = 30^\circ$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

distanza che deve percorrere la massa:  $L = 1\text{m}$

$$L = 1$$



### Risposta a)

Il valore di  $\alpha$  massimo per cui il blocco rimane ancora fermo, si ottiene scrivendo le equazioni di equilibrio:

Le forze che agiscono sul blocco sono quelle indicate in figura:

- le componenti della forza di gravità (normale al piano, e parallela al piano)
- la forza di attrito statico (nelle condizioni di corpo fermo agisce l'attrito statico)
- la reazione normale al piano:

$$-f_t + g m \sin(\alpha) = 0 \quad \text{lungo } x$$

$$-m g \cos(\alpha) + N = 0 \quad \text{lungo } y$$

da cui si ricava:

$$\text{dato che la forza di attrito statico deve essere: } f_t \leq \mu_s g m \cos(\alpha),$$

$$\text{per cui si ricava: } \tan(\alpha) \leq \mu_s$$

$$N = g m \cos(\alpha)$$

in numeri:

$$\text{da cui l'angolo di inclinazione massimo: } \alpha = 0.34 \text{ rad circa } 19^\circ$$

### Risposta b)

Nel caso in cui  $\alpha = 30^\circ$  il blocco si muove, quindi al posto dell'attrito statico interverrà l'attrito dinamico:

$$m g \sin(\alpha) - \mu_d N = m \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} x \right) \quad (\text{eq.1})$$



$$-m g \cos(\alpha) + N = 0 \quad \text{da cui si ricava:} \quad N = m g \cos(\alpha)$$

Dall'equazione 1 si ricava l'accelerazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} x = (\sin[\alpha] - \cos[\alpha] \mu_d) g$$

$$\text{da cui: } \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} x = 2.9 \frac{m}{s^2}$$

e integrando e imponendo velocità iniziale nulla, si ottiene il tempo che impiega la massa per percorrere un metro lungo il piano inclinato:

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} x \right) t^2$$

il tempo impiegato corrisponde a :  $t = 0.83s$

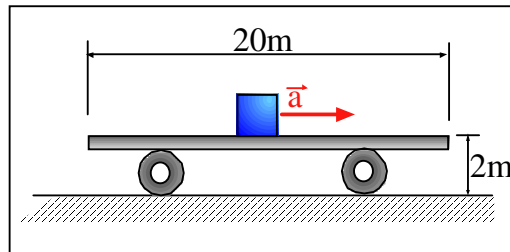
### **RISPOSTA C)**

Se l'inclinazione del piano è  $30^\circ$  è chiaro che il blocco tende a scivolare verso il basso. Tuttavia è possibile mantenerlo fermo se si imprime al piano inclinato un'accelerazione in direzione orizzontale verso destra di modulo almeno pari a:

$$a = \frac{(-\mu_s \cos[\alpha] + \sin[\alpha])g}{\cos(\alpha) + \mu_s \sin(\alpha)} \quad \text{da cui: } a = 1.9 \frac{m}{s^2}$$

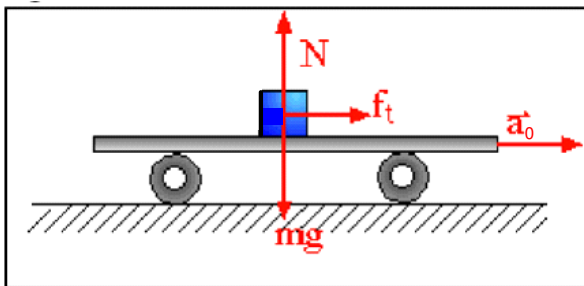
Per dimostrarlo si scriva l'equazione del moto della massa quando questa si muove insieme al piano (e quindi rimane ferma rispetto ad esso) ed è soggetta al valore massimo di attrito statico.

8. Un blocco di metallo è posto su di un vagone ferroviario lungo  $20m$  in posizione centrale. Entrambi inizialmente sono in quiete rispetto al terreno. Il coefficiente di attrito statico tra il blocco e il vagone è  $\mu_s=0.3$  e il coefficiente di attrito dinamico è  $\mu_d=0.15$ . A  $t = 0$  il vagone, che si muove su di un binario rettilineo, si mette in moto con accelerazione costante  $a_0$ .



- Qual è il valore massimo di  $a_0$  per cui il blocco resta fermo rispetto al vagone?
- Se  $a_0 = 5m/s^2$ , quanto tempo il blocco impiega prima di cadere dal vagone?
- Se  $a_0 = 5m/s^2$ , e il piano del vagone è alto  $h = 2m$  dal suolo, a che distanza dalla posizione occupata a  $t = 0$  il blocco tocca il suolo?

### SOLUZIONE



Nel sistema di riferimento inerziale (rispetto al terreno), le forze agenti sul blocco sono (si consideri che il blocco si muove solidale al carrello):

$f_t$  forza d'attrito

$N$  reazione normale del vagone sul blocco

$-mg$  forza peso

La componente orizzontale della risultante delle forze dovrà essere uguale a:

$ma_0$  dove  $a_0$  è l'accelerazione assoluta del blocco (uguale a quella del vagone)

mentre la componente verticale dovrà essere nulla (l'accelerazione verticale è nulla!)

$f_t = ma_0$  in altre parole è la forza di attrito statico ad accelerare il blocco!

$N - mg = 0 \quad N = mg$

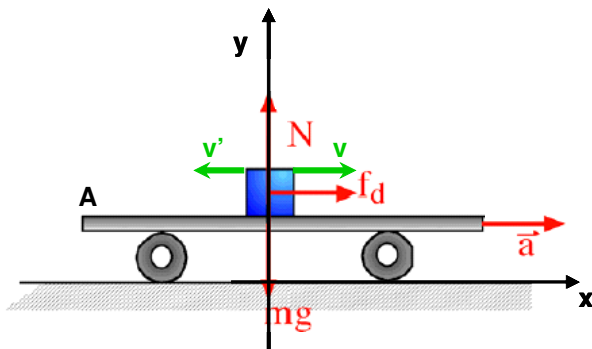
e chiedendo che  $f_t \leq \mu_s N$  si ottiene :

$$a_0 = \mu_s g \quad \text{da cui : } a_0 = 2.9 \frac{m}{(s)^2}$$

Nel caso in cui  $a_0 = 5m/s^2$ , c'è moto relativo tra massa e carrello (vedi risposta precedente).

Nella figura seguente sono indicate le forze sul blocco viste nel sistema di riferimento inerziale solidale al suolo.  $v'$  è la velocità del blocco rispetto al carrello,  $v$  è la velocità rispetto al suolo.

La forza di attrito dinamico  $f_d$  è opposta alla velocità  $v'$  della massa rispetto al carrello.



Le equazioni del moto e della massa nel sistema di riferimento inerziale solidale al terreno

$$\mu_{\text{din}} N = m \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} x \right)$$

$$N = m g$$

Integrando due volte, e imponendo le condizioni iniziali:

$$x(t=0) = 0, \frac{\partial}{\partial t} x(t=0) = 0, \text{ si ottiene}$$

$$x = \frac{1}{2} \mu_{\text{din}} g t^2 \quad (\text{eq.1}) \text{ legge del araria del blocco}$$

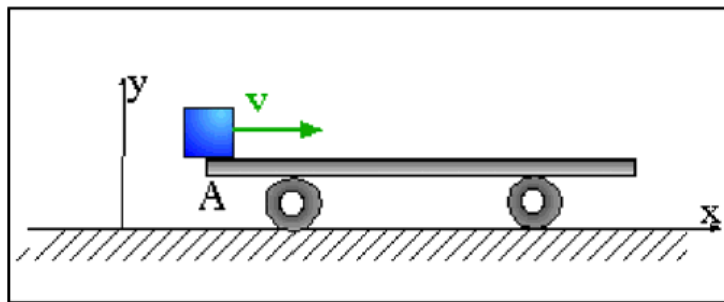
Per la coordinata del punto A del carrello si ottiene invece:

$$x_A = \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{L}{2}$$

Quando  $x = x_A$  il blocco cade:

$$T_f = \left( [-1] \frac{L}{-a_0 + \mu_{\text{din}} g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{da cui in numeri } T_f = 2.4s$$

Infine, per calcolare a quale distanza cade il blocco rispetto alla posizione che assume per  $t = 0$ , nel sistema inerziale si calcolano le condizioni iniziali in cui comincia a cadere dal carrello:



$$x_{\text{cade}} = \frac{1}{2} \mu_{\text{din}} T_f^2 g \quad \text{spazio percorso fino all'istante in cui comincia a cadere}$$

$$T_f = 2.4s$$

$$\text{da cui: } x_{\text{cade}} = 4.2m$$

$$v_{\text{cade}} = \mu_{\text{din}} T_f g \quad \text{velocità all'istante in cui comincia a cadere}$$

$$\text{da cui: } v_{\text{cade}} = 3.5 \frac{m}{s}$$

Date le condizioni iniziali sopra calcolate il corpo segue un moto parabolico :

$$x_{\text{tot}} = x_{\text{cade}} + s$$

e prima di toccare il terreno percorrerà lungo x un tratto s pari a:

$$s = v_{\text{cade}} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Infine si ricava:  $x_{\text{tot}} = 6.4m$