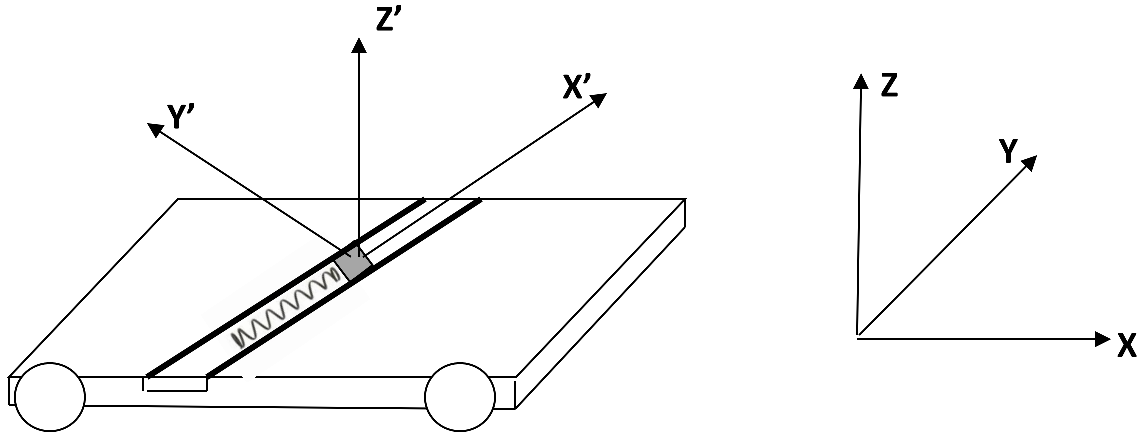
FISICA GENERALE I   per matematici
(a.a. 2013-2014)

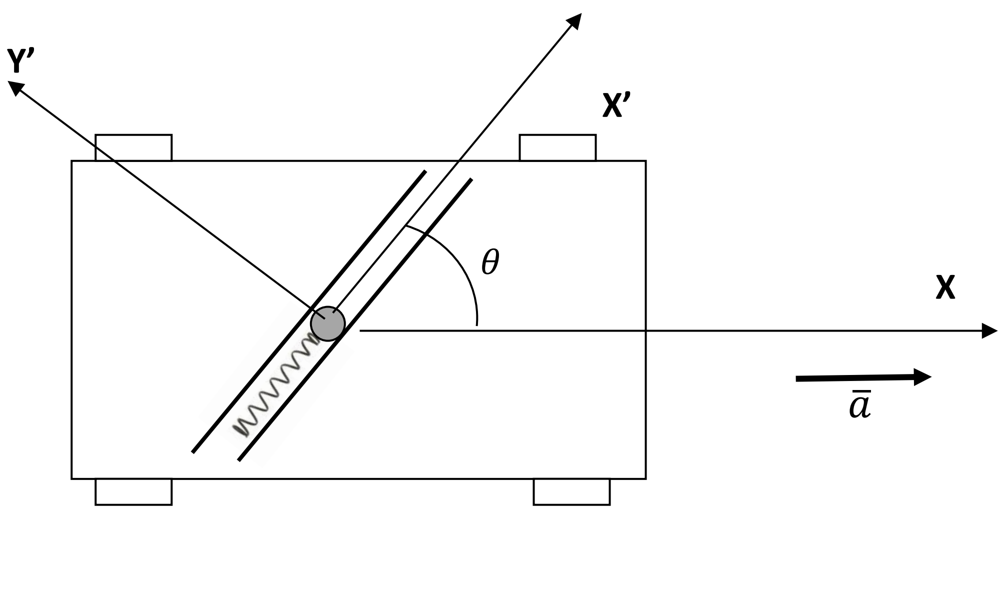
1° test di verifica delle competenze – 30.10.2013

ESERCIZIO I

Sul piano orizzontale di un carrello è posta una guida liscia nella quale è alloggiata una molla di costante elastica k=50.00 N/m collegata ad una massa m= 0.30 Kg. Il carrello può muoversi su di un piano orizzontale posto in un sistema di riferimento inerziale. La molla è da considerarsi senza peso.
L'asse della guida (X ')forma un angolo di θ=60° con l'asse (X) del sistema inerziale (si veda figura). All'istante t=0 il carrello e la massa m sono in quiete.
Ad un certo istante il carrello accelera con accelerazione costante $\bar{a} = 4.00\ \bar{u}_x$ rispetto il sistema inerziale.

a) Si scriva l'equazione del moto della massa m, rispetto il sistema solidale al carrello (sistema X', Y', Z' in figura)
b) Si risolva l'equazione del moto in funzione del tempo t.
c) Si calcoli la frequenza propria del sistema molla+massa.
d) Si faccia un grafico dello spostamento della massa m in funzione del tempo per t $\geq$ 0.
e) Si calcolino le reazioni vincolari, modulo e verso, dovute alla guida.
f) Si calcoli l'accelerazione e la velocità della massa dopo mezzo periodo di oscillazione.





Proiettiamo l'accelerazione $\bar{a}$ sugli assi X' ed Y':

$$\bar{a}_{X'} = \mathrm{a}\cos\theta\ \bar{u}_{X'} = 2.00\ \bar{u}_{X'}\ \ m/s^2$$
$$\bar{a}_{Y'} = -\,\mathrm{a}\sin\theta\ \bar{u}_{Y'} = -\ 3.46\ \ \bar{u}_{Y'}\ \ m/s^2$$

Nel sistema di riferimento del carrello otteniamo:

$$ma'_{X'} = \ -kx - macos\theta$$
$$ma'_{Y'} = \ 0 = N + masin\theta$$
$$ma'_{Z'} = \ 0 = R - mg$$

Da cui

$$N = \ -masin\theta = -1.04\ [N]$$
$$R = mg = 2.94\ [N]$$

e l'equazione del moto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \ -acos\theta$$

La cui soluzione e':

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{m}{k}acos\theta$$
$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\ A\ {\omega_0}^2\ \cos\ (\omega_0 t + \varphi)$$

Con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = 12.90

Con le condizioni x(t=0)=0 e v(t=0)=0

Troviamo

$$x = \left(\frac{m}{k}acos\theta\right)\cos(\omega_0 t) - \frac{m}{k}acos\theta$$

E dopo mezzo periodo $\frac{T}{2} = \ \frac{\pi}{\omega_0}$

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{m}{k}acos\theta\right)\omega_0\sin(\pi) = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -{\omega_0}^2\frac{m}{k}acos\theta cos\pi = 2.00\ m/s^2$$

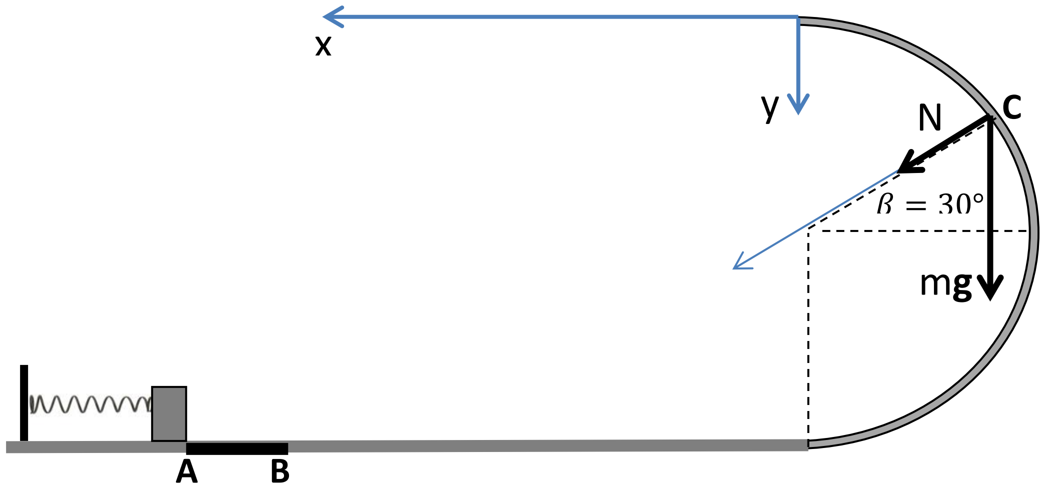
ESERCIZIO II

Ad un piccolo blocco di massa m = 100 g, viene impressa una velocità tramite una molla di costante elastica k= 820 N/m. La molla con il blocco, entrambi in posizione orizzontale, è compressa di un tratto Δx = 6 cm (posizione A in figura). Il blocco si stacca dalla molla nella posizione B corrispondente al punto in cui la molla è scarica. Il tratto AB è scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d = 0.5.

Successivamente il blocco scivola su di una guida liscia composta da un tratto orizzontale ed un tratto circolare di raggio R = 0.50 m.

Calcolare:

a) La velocità del blocco quando lascia la molla.
b) La reazione vincolare della guida quando il blocco si trova nella posizione C in figura.
c) Il punto in cui arriva il blocco proseguendo il suo moto.



La velocità nel punto B si trova con la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 - mg\mu_d\Delta x = \frac{1}{2}m{v_B}^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{\Delta x^2 k}{m} - g\mu_d\Delta x} = 5.40\ m/s$$

Sempre con la conservazione dell'energia troviamo la velocità del corpo in funzione dell'angolo β:

$$\frac{1}{2}mv(\beta)^2 = \frac{1}{2}m\,v_B^2 - Rmg(1 + sin\beta)$$

$$v(\beta) = \sqrt{v_0^2 - 2Rg(1 + sin\beta)}$$

In C, per l'angolo di 30 °

$$v_C(30°) = 3.80\ m/s$$

In C l'equazione della dinamica proiettata lungo un asse perpendicolare alla guida e che punta al centro della circonferenza , fornisce:

$$m\frac{v^2}{R} = N + mgsin\beta$$

Dove *N* è la reazione vincolare normale alla guida.
Da cui

$$N = 2.40\ [N]$$

Per l'angolo di 90° $v = 3.09\ m/s$
Tale velocità è $v > \sqrt{gR} = 2.21$ (condizione N=0 per β=90°), quindi il corpo raggiunge il punto estremo della semicirconferenza e prosegue il suo moto.
Prendendo un sistema di assi di riferimento centrato nel punto estremo della semicirconferenza, con x verso sinistra e , y verso il basso, per il moto del blocco troviamo:

$$x = vt$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Da cui ponendo y=2R troviamo:

$$x = v\sqrt{\frac{4R}{g}} = 1.40\ m$$