

Cinematica del punto materiale: moto circolare

Problema n. 1:

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di moto uniformemente accelerato. Partendo da fermo all'istante $t = 0$ esso impiega $\Delta t_1 = 4.60$ s a percorrere un giro completo. Determinare:

- (a) l'accelerazione angolare del moto circolare;
- (b) il tempo Δt_2 impiegato a percorrere il secondo giro;
- (c) il modulo della velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo.

Problema n. 2:

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio $R = 1$ m con accelerazione angolare $\alpha = -2 \text{ rad/s}^2$. Se la velocità scalare iniziale del punto è $v_0 = 10$ m/s, trovare dopo quanto tempo t_f e dopo quanti giri n_f la velocità angolare $\omega(t_f)$ vale 0.

Problema n. 3:

La terra ruota con moto uniforme attorno al proprio asse di rotazione compiendo una rotazione completa in 24 ore. Assumendo che la terra sia una sfera di raggio $R = 6370$ km, calcolare la velocità v e l'accelerazione a lineari di un punto sulla superficie terrestre in funzione della sua latitudine (λ).

Discutere i risultati ottenuti, determinando i valori massimi possibili di v e di a , rispettivamente.

Problema n. 4:

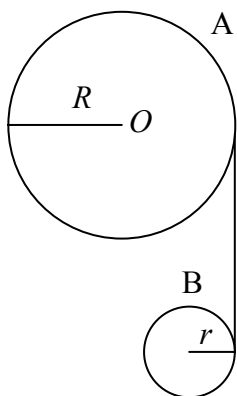
Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio $R = 1$ m con moto uniformemente accelerato. Negli intervalli di tempo ($t_0 = 0, t_1 = 1$ s) e ($t_0 = 0, t_2 = 2$ s) il punto percorre gli spazi $\Delta s_1 = 0.15$ m e $\Delta s_2 = 0.4$ m, rispettivamente. Calcolare:

- (a) l'accelerazione lineare a e la velocità scalare v_0 all'istante $t_0 = 0$; [$a = 0.1 \text{ ms}^{-2}$; $v_0 = 0.1 \text{ ms}^{-1}$]
- (b) il valore medio $\langle v \rangle$ del modulo della velocità e quello $\langle a \rangle$ del modulo dell'accelerazione lineare nell'intervallo di tempo ($t_0 = 0$ e $t_2 = 2$ s); [$\langle v \rangle = 0.2 \text{ ms}^{-1}$; $\langle a \rangle = 0.1 \text{ ms}^{-2}$]
- (c) la velocità angolare ω e il modulo dell'accelerazione a all'istante $t_2 = 2$ s. [$\omega(t_2) = 0.3 \text{ rads}^{-1}$; $a(t_2) = 0.13 \text{ ms}^{-2}$]

Problema n. 5:

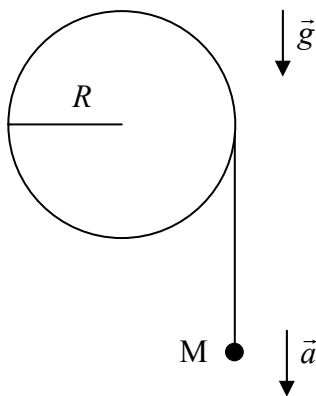
Una ruota A, di raggio $R = 30$ cm, può ruotare nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della ruota e passante per il suo centro O. La ruota è collegata tramite una cinghia ad una seconda ruota B, di raggio $r = 12$ cm, posta nello stesso piano verticale e in grado di ruotare attorno ad un secondo asse orizzontale passante per il suo centro. Le ruote sono inizialmente ferme. All'istante $t = 0$ la ruota A entra in rotazione e aumenta progressivamente la sua velocità al ritmo costante di $0.4 \pi \text{ rad s}^{-2}$ trascinando in rotazione, mediante la cinghia di trasmissione, la ruota B. Calcolare:

- (a) il valore numerico del rapporto $\rho = \omega_B / \omega_A$ fra le velocità angolari di rotazione delle due ruote;
- (b) dopo quanto tempo la ruota B ha velocità angolare $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$.



Problema n. 6:

Un disco avente raggio $R = 0.1$ m ruota nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro e perpendicolare al piano del disco. Lungo la circonferenza esterna del disco è avvolta una corda; un corpo puntiforme M, attaccato all'estremità libera della corda, cade per azione della gravità. Il moto di M è uniformemente accelerato, ma la sua accelerazione \vec{a} è minore di quella \vec{g} dovuta alla forza peso. All'istante $t = 0$ la velocità del corpo M è $v_0 = 0.04 \text{ m/s}$, e 2 s più tardi M è caduto di 0.2 m. Calcolare, durante il moto di caduta del corpo M, le componenti $a_T(t)$ e $a_N(t)$ (tangenziale e normale) dell'accelerazione di un punto del bordo del disco in funzione del tempo.



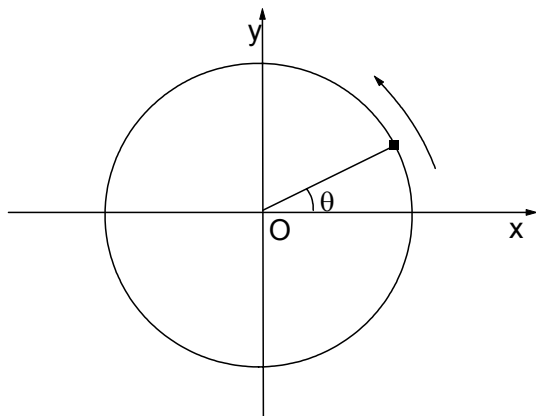
Cinematica del punto materiale: moto circolare

Problema n. 1:

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di moto uniformemente accelerato. Partendo da fermo all'istante $t = 0$ esso impiega $\Delta t_1 = 4.60$ s a percorrere un giro completo. Determinare:

- (a) l'accelerazione angolare del moto circolare;
- (b) il tempo Δt_2 impiegato a percorrere il secondo giro;
- (c) il modulo della velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo.

Soluzione:



Dati:

$$\Delta t_1 = 4.60 \text{ s}$$

$\alpha = \text{costante}$ (il moto è uniformemente accelerato, quindi l'accelerazione angolare α è costante)

$\omega_0 = 0$ (il punto materiale parte da fermo, quindi la velocità angolare iniziale è nulla)

$t_0 = 0$ (l'istante iniziale è nullo)

(a) Calcolare l'accelerazione angolare α

Stiamo trattando un moto circolare uniformemente accelerato: scegliamo un sistema di riferimento come quello mostrato in figura, con il centro degli assi cartesiani coincidente con il centro della traiettoria circolare. L'angolo θ definito come in figura descrive ad ogni istante la posizione *angolare* del punto materiale lungo la traiettoria.

Il moto è uniformemente accelerato, quindi scriviamo le equazioni del moto (o leggi orarie) corrispondenti a questo tipo di moto:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \theta_0$$

 (1)

$$\omega = \alpha(t - t_0) + \omega_0$$

Nel nostro caso i dati del problema ci dicono che il punto parte da fermo e all'istante $t=0$, quindi possiamo sostituire nella prima equazione del moto:

$$\omega_0 = 0$$

$$t_0 = 0$$

$$\text{ottenendo: } \theta = \frac{1}{2} \alpha(t)^2 + \theta_0 \quad \text{ovvero} \quad \theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \alpha(t)^2$$

Sappiamo che nel tempo Δt_1 la particella percorre un giro completo ovvero, riscrivendo questa informazione in termini di angoli avremo che: $\theta - \theta_0 = 2\pi$

Sostituendo, quindi, nell'equazione del moto troviamo un'equazione di I grado nell'incognita α che, risolta, ci fornisce il valore dell'accelerazione angolare:

$$2\pi = \frac{1}{2} \alpha \Delta t_1^2$$

$$\text{sostituendo i valori numerici:} \quad 2\pi \text{ rad} = \frac{1}{2} \alpha (4.60 \text{ s})^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.59 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

(**nota:** si noti che le dimensioni dell'accelerazione angolare tornano correttamente)

(b) Calcolare il tempo Δt_2 impiegato a percorrere il secondo giro

Ci troviamo di fronte ancora ad un moto circolare uniformemente accelerato, con accelerazione α nota, per cui possiamo applicare ancora le equazioni (1), ma rispetto al punto precedente sono ora cambiate le condizioni iniziali del problema: infatti, nell'istante in cui la particella incomincia il secondo giro essa non ha più velocità angolare iniziale nulla, quindi sarà $\omega_0 \neq 0$

Per calcolare Δt_2 abbiamo, quindi, bisogno di conoscere il valore di ω_0 che possiamo però ricavare dai dati del punto precedente, utilizzando ancora le equazione del moto: $\omega_0 = \alpha \Delta t_1$
ovvero alla fine del primo giro (e quindi all'inizio del secondo) la particella possiederà questa velocità angolare che possiamo calcolare, in quanto conosciamo sia i valori di α che di Δt_1 .

L'equazione del moto per il secondo giro della particella diventa quindi:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \alpha \Delta t_2^2 + \alpha \Delta t_1 \Delta t_2$$

e poiché la particella compie ancora un giro completo, sarà $\theta - \theta_0 = 2\pi$

Sostituendo, otteniamo, quindi, un'equazione di secondo grado in Δt_2 che, risolta, ci dà questo risultato:

$$\Delta t_2 = \frac{-\alpha \Delta t_1 \pm \sqrt{\alpha^2 \Delta t_1^2 + 4\pi\alpha}}{\alpha}$$

Sostituiamo ora i valori numerici nell'equazione trovata sopra, facendo attenzione a riportare anche le unità di misura: in questo modo avremo un'indicazione (necessaria, ma non sufficiente!!!) della correttezza del risultato ottenuto.

$$\begin{aligned}\Delta t_2 &= \frac{-0.59 \text{ rad/s}^2 \cdot 4.60 \text{ s} \pm \sqrt{(0.59)^2 \text{ rad}^2/\text{s}^4 (4.60)^2 \text{ s}^2 + 4\pi \text{ rad} \cdot 0.59 \text{ rad/s}^2}}{0.59 \text{ rad/s}^2} \\ &= \frac{-2.714 \text{ rad/s} \pm 3.844 \text{ rad/s}}{0.59 \text{ rad/s}^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t_{2,1} = +1.915 \text{ s} \approx 1.92 \text{ s}}$$

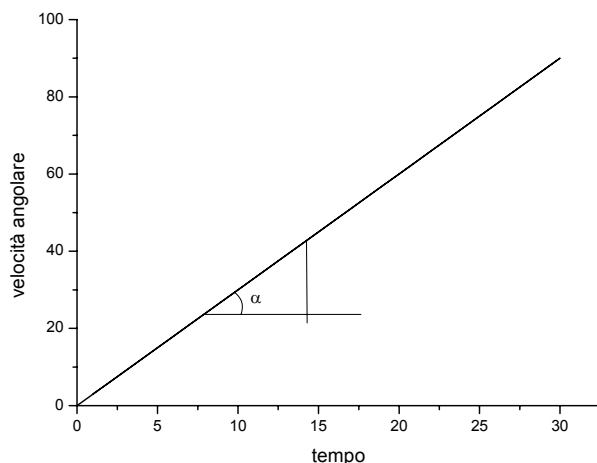
$$\Delta t_{2,2} = -11.115 \text{ s} \approx -11.12 \text{ s}$$

Essendo l'equazione per Δt_2 di secondo grado, otteniamo matematicamente due risultati, dei quali però uno solo ha significato fisico e cioè quello che ci fornisce un numero positivo, essendo il tempo una grandezza che ha significato solo se definito su scala positiva.

Il risultato corretto è quindi: $\Delta t_2 = 1.92 \text{ s}$

(c) Calcolare il modulo della velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo

Come detto il moto è uniformemente accelerato: ne consegue che, in ogni istante del moto, la velocità angolare ω varierà sempre linearmente con il tempo secondo la relazione: $\omega = \alpha t$

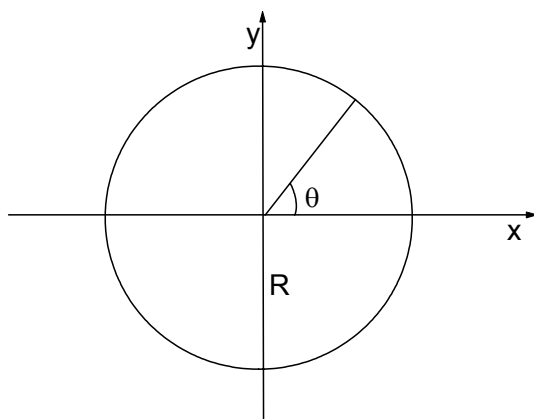


La costante di proporzionalità sarà pari all'accelerazione angolare del moto, già calcolata nel primo punto del problema, quindi la relazione diventa: $\omega = 0.59 \text{ rad/s}^2 t$

Problema n. 2:

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio $R = 1 \text{ m}$ con accelerazione angolare $\alpha = -2 \text{ rad/s}^2$. Se la velocità scalare iniziale del punto è $v_0 = 10 \text{ m/s}$, trovare dopo quanto tempo t_f e dopo quanti giri n_f la velocità angolare $\omega(t_f)$ vale 0.

Soluzione:



Dati:

$$R = 1 \text{ m}$$

$$\alpha = -2 \text{ rad/s}^2$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$

Calcolare: t_f e n_f tali che $\omega(t = t_f) = 0$ e $\omega(n = n_f) = 0$

Anche in questo caso, scegliamo arbitrariamente un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali la cui origine coincida con il centro della traiettoria circolare, come mostrato in figura. L'angolo θ , definito rispetto all'asse x descrive in ogni istante del moto la posizione della particella lungo la circonferenza.

Il problema ci dice che il moto è uniformemente accelerato, quindi scriviamo le equazioni del moto corrispondenti:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \theta_0 \quad (1)$$

$$\omega = \alpha (t - t_0) + \omega_0$$

Poiché il problema non ci dà nessuna indicazione, possiamo scegliere, per comodità, di porre $t_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$.

Sappiamo inoltre che nel moto circolare in generale (non solo in quello uniformemente accelerato!), la velocità scalare e quella angolare sono legate, in ogni istante del moto, dalla relazione:

$$\boxed{v = \omega R} \quad (2)$$

(a) Calcoliamo t_f

Il problema ci chiede di calcolare il tempo t_f al quale la velocità angolare si annulla, ovvero scrivendo in formule questa condizione dobbiamo cercare una soluzione all'equazione:

$$\omega(t = t_f) = 0$$

Dobbiamo esprimere quindi le velocità angolare ω in funzione dei dati a noi noti, utilizzando la seconda equazione di (1):

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \quad (\text{in cui come detto prima abbiamo assunto per comodità che } t_0 = 0)$$

I dati del problema non ci forniscono direttamente il valore della velocità angolare iniziale ω_0 , ma possiamo ricavarla usando la relazione (2): $v_0 = \omega_0 R \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R}$

Sostituendo quindi nella relazione precedente, otteniamo la seguente espressione per ω :

$$\omega = \alpha t + \frac{v_0}{R}$$

e risolvendo ora l'equazione: $0 = \omega(t = t_f) = \alpha t_f + \frac{v_0}{R}$ troviamo la soluzione algebrica per t_f :

$$\boxed{t_f = -\frac{v_0}{R\alpha}}$$

Nota: una buona verifica della correttezza della soluzione trovata (anche se non sufficiente!!!) consiste nel verificare le dimensioni: in questo caso possiamo riscrivere dimensionalmente l'espressione per t_f

$$[t_f] = -\frac{\left[\frac{m}{s}\right]}{\left[m\right]\left[\frac{rad}{s^2}\right]} = [s]$$

Sostituendo ora i valori numerici abbiamo che: $t_f = -\frac{10 \frac{m}{s}}{1m \left(-2 \frac{rad}{s^2} \right)} = 5s$

(b) *Calcoliamo n_f*

Per calcolare il numero di giri necessari affinché la velocità angolare si annulli, dobbiamo calcolare il valore dell'angolo θ a cui ω si annulla, ovvero il valore dell'angolo dopo un tempo pari a t_f ; per farlo usiamo l'espressione per θ fornitaci dalla prima delle equazioni (1).

$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t$ (in cui abbiamo assunto per comodità $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$) e calcoliamo il valore dell'angolo θ dopo il tempo t_f .

Sostituendo in questa espressione la relazione per ω_0 e per t_f ricavate nel punto precedente, otteniamo:

$$\theta(t = t_f) = \frac{1}{2} \alpha \left(-\frac{v_0}{R\alpha} \right)^2 + \frac{v_0}{R} \left(-\frac{v_0}{R\alpha} \right) = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{R^2 \alpha}$$

da cui, sostituendo i valori noti otteniamo: $\theta(t = t_f) = -\frac{1}{2} \frac{\left(10 \frac{m}{s} \right)^2}{(1m)^2 \left(-2 \frac{rad}{s^2} \right)} = 25rad$

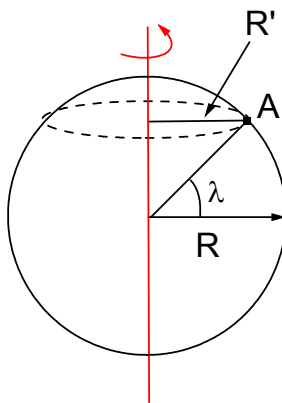
e da cui infine: $n_f = \frac{25rad}{2\pi} = 3.98 \approx 4$

Problema n. 3:

La terra ruota con moto uniforme attorno al proprio asse di rotazione compiendo una rotazione completa in 24 ore. Assumendo che la terra sia una sfera di raggio $R = 6370 \text{ km}$, calcolare la velocità v e l'accelerazione a lineari di un punto sulla superficie terrestre in funzione della sua latitudine (λ).

Discutere i risultati ottenuti, determinando i valori massimi possibili di v e di a , rispettivamente.

Soluzione:



Dati:

$$\omega = \text{costante}$$

$$T = 24h$$

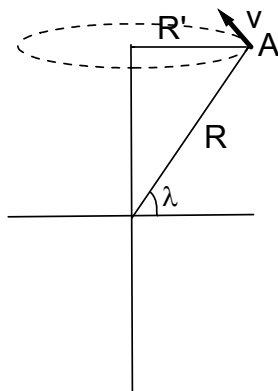
$$R = 6370 \text{ Km}$$

Determinare: $v(\lambda)$ e $a(\lambda)$ (velocità e accelerazione in funzione della latitudine λ)

Per prima cosa scegliamo un sistema di riferimento come quello mostrato in figura, dato che la latitudine λ viene definita dall'angolo individuato rispetto al piano dell'equatore terrestre e approssimiamo l'asse di rotazione terrestre ad una asse perpendicolare all'equatore stesso.

Consideriamo ora un generico punto A che si trova sulla superficie terrestre ad una generica latitudine λ : dato che la terra ruota attorno all'asse terrestre con velocità angolare costante ω , anche il generico punto A si muoverà di moto circolare uniforme (con la stessa velocità angolare), lungo una traiettoria circolare di raggio R' (diverso da R , raggio terrestre) e definito come in figura.

Possiamo quindi schematizzare più chiaramente la situazione come nella figura sottostante:



Da semplici considerazioni geometriche, possiamo esprimere il raggio R' della traiettoria lungo cui si muove A , in funzione del raggio noto terrestre e della latitudine λ : $R' = R \cos \lambda$

Calcoliamo ora la velocità angolare con cui ruota la terra (e il punto A): si tratta di un moto uniforme, quindi la legge oraria assume la forma:

$$\theta - \theta_0 = \omega t$$

Poiché la terra compie un giro completo (quindi un angolo $\theta - \theta_0 = 2\pi$) in un periodo di tempo

$T = 24h$, possiamo scrivere che $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(a) Calcoliamo la velocità lineare v del generico punto A , in funzione della sua latitudine λ

Nel moto circolare, la velocità lineare di una qualsiasi particella che si muove sulla traiettoria è legata alla velocità angolare dalla relazione:

$$v = \omega R$$

dove R coincide con il raggio della traiettoria circolare

Sostituendo quindi in questa equazione il valore del raggio R' determinato precedentemente, otteniamo la relazione cercata fra velocità e latitudine:

$$v = \frac{2\pi}{T} R \cos \lambda$$

(Nota: si noti che la relazione trovata è corretta da un punto di vista dimensionale, condizione necessaria ma non sufficiente alla correttezza del risultato stesso: $[v] = \frac{[rad]}{[s]} [m] = \left[\frac{m}{s} \right]$)

Casi limite:

$$A \text{ si trova sull'equatore} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi 6370 \cdot 10^3 \text{ m}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 463 \text{ m/s}$$

$$A \text{ si trova al polo} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = 0$$

Quindi anche se ogni punto sulla superficie terrestre si muove con la stessa velocità angolare con cui ruota la terra, i punti che si trovano a latitudini equatoriali possiedono una velocità lineare massima, mentre quelli a latitudini polari velocità minima; tale risultato è abbastanza intuitivo, se pensiamo che durante la rotazione terrestre i punti all'equatore percorrono una distanza più lunga (traiettoria circolare con raggio pari a quello terrestre) di quella percorsa dai punti che si trovano ad altre latitudini ed in particolare rispetto a quelli che, trovandosi al polo, percorrono una traiettoria limite nulla.

(b) *Calcoliamo l'accelerazione lineare a del generico punto A , in funzione della sua latitudine λ*

Analogamente a quanto detto per la velocità, nel moto circolare, l'accelerazione lineare di una qualsiasi particella che si muove sulla traiettoria è legata alla sua accelerazione angolare dalla relazione:

$$\boxed{a = \alpha R}, \text{ dove } R \text{ coincide con il raggio della traiettoria circolare}$$

In questo caso però, abbiamo detto che la terra e quindi ogni punto sulla sua superficie si muove di moto circolare uniforme, ovvero con velocità angolare ω costante.

Per definizione, l'accelerazione angolare α è la derivata prima rispetto al tempo della velocità angolare, ovvero:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

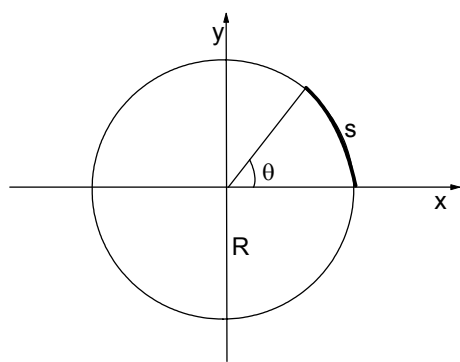
ma essendo ω una costante ne consegue che in questo caso: $\alpha = 0$ e quindi anche l'accelerazione lineare è nulla $a = 0$, per ogni punto della superficie terrestre, indipendentemente dalla sua latitudine.

Problema n. 4:

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio $R = 1\text{ m}$ con moto uniformemente accelerato. Negli intervalli di tempo ($t_0 = 0, t_1 = 1\text{ s}$) e ($t_0 = 0, t_2 = 2\text{ s}$) il punto percorre gli spazi $\Delta s_1 = 0.15\text{ m}$ e $\Delta s_2 = 0.4\text{ m}$, rispettivamente. Calcolare:

- (a) l'accelerazione lineare a e la velocità scalare v_0 all'istante $t_0 = 0$; [$a = 0.1\text{ ms}^{-2}$; $v_0 = 0.1\text{ ms}^{-1}$]
- (b) il valore medio $\langle v \rangle$ del modulo della velocità e quello $\langle a \rangle$ del modulo dell'accelerazione lineare nell'intervallo di tempo ($t_0 = 0$ e $t_2 = 2\text{ s}$); [$\langle v \rangle = 0.2\text{ ms}^{-1}$; $\langle a \rangle = 0.1\text{ ms}^{-2}$]
- (c) la velocità angolare ω e il modulo dell'accelerazione a all'istante $t_2 = 2\text{ s}$. [$\omega(t_2) = 0.3\text{ rads}^{-1}$; $a(t_2) = 0.13\text{ ms}^{-2}$]

Soluzione:



Dati:

$$R = 1\text{ m}$$

$$\alpha = \cos \tan te$$

$$t_0 = 0 \quad t_1 = 1\text{ s} \quad \rightarrow \quad \Delta s_1 = 0.15\text{ m}$$

$$t_0 = 0 \quad t_2 = 2\text{ s} \quad \rightarrow \quad \Delta s_2 = 0.4\text{ m}$$

Scegliamo un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali xy come quello mostrato in figura, in modo che l'origine degli assi coordinati coincida con il centro della traiettoria circolare; con tale scelta di sistema di riferimento, un punto materiale che si muova sulla circonferenza può essere individuato in ogni istante dall'angolo θ definito rispetto all'asse x come mostrato in figura.

Lo spazio s percorso lungo la traiettoria dal punto materiale, è legato all'angolo θ individuato dal punto stesso dalla relazione:

$$\boxed{s = R\theta} \tag{1}$$

(dove R è il raggio della circonferenza)

(a) Determinare l'accelerazione lineare a e la velocità scalare v_0 all'istante $t_0 = 0$

Per calcolare l'accelerazione lineare e la velocità scalare, abbiamo bisogno di conoscere l'accelerazione α e la velocità angolare ω del punto materiale che si muove lungo la traiettoria.

Il punto materiale si muove sulla circonferenza di moto uniformemente accelerato, quindi scriviamo le equazioni del moto corrispondenti:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \theta_0 \quad (2)$$

$$\omega = \alpha (t - t_0) + \omega_0$$

Dalla prima delle equazioni (2), segue che:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) \quad \text{ovvero} \quad \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0)$$

Dalla relazione fra lo spostamento lungo la traiettoria s e l'angolo θ espressa in (1), possiamo invece scrivere che: $\Delta s = R \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$

Sostituendo quindi nell'equazione del moto otteniamo che:

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) \quad (3)$$

A questo punto, abbiamo un'equazione in due incognite α e ω ma possiamo sfruttare per risolverla i dati forniti dal problema, scrivendo:

$$\begin{cases} \frac{\Delta s_1}{R} = \frac{1}{2} \alpha (t_1 - t_0)^2 + \omega_0 (t_1 - t_0) \\ \frac{\Delta s_2}{R} = \frac{1}{2} \alpha (t_2 - t_0)^2 + \omega_0 (t_2 - t_0) \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di 2 equazioni a due incognite che possiamo risolvere facilmente procedendo per sostituzione oppure più semplicemente moltiplicando la prima delle due equazioni sopra per $(-t_2)$, la seconda per (t_1) e poi sommare le espressioni così ottenute:

$$\begin{cases} \left[\frac{\Delta s_1}{R} = \frac{1}{2} \alpha (t_1 - t_0)^2 + \omega_0 (t_1 - t_0) \right] \cdot (-t_2) + \\ \left[\frac{\Delta s_2}{R} = \frac{1}{2} \alpha (t_2 - t_0)^2 + \omega_0 (t_2 - t_0) \right] \cdot (t_1) = \end{cases}$$

$$\frac{1}{R}(\Delta s_2 t_1 - \Delta s_1 t_2) = \frac{1}{2} \alpha t_1 t_2 (t_2 - t_1)$$

Da cui possiamo ricavare l'espressione per l'accelerazione angolare: $\alpha = \frac{2}{R} \frac{(\Delta s_2 t_1 - \Delta s_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}$

(Nota: proviamo a controllare che l'espressione trovata sia corretta dimensionalmente:

$$[\alpha] = \left[\frac{1}{m} \right] \frac{([ms] - [ms])}{[s^2][s]} = \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

Sostituendo inoltre i valori numerici nell'espressione sopra troveremo che: $\alpha = 0.1 \text{ rad/s}^2$

Noto il valore di α possiamo calcolare facilmente l'accelerazione lineare, usando l'espressione per l'accelerazione

$$a = \alpha R$$

$$\text{Quindi: } a = 2 \frac{(\Delta s_2 t_1 - \Delta s_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} = 2 \frac{(0.4 \text{ m} \cdot 1 \text{ s} - 0.15 \text{ m} \cdot 2 \text{ s})}{1 \text{ s} \cdot 2 \text{ s} (2 - 1) \text{ s}} = 2 \frac{0.1 \text{ m} \cdot \text{s}}{2 \text{ s}^3} = 0.1 \text{ m/s}^2$$

(Si noti che essendo il moto uniformemente accelerato e quindi con accelerazione angolare α costante, ed essendo per definizione l'accelerazione lineare a proporzionale in ogni istante ad α ($a = \alpha R$), anch'essa rimane costante e pari a 0.1 m/s^2 durante tutto il moto, diversamente da quanto accade per la velocità angolare e scalare).

Analogamente a quanto fatto per l'accelerazione lineare, calcoliamo ora la velocità scalare v_0 all'istante $t_0 = 0$ trovando prima la velocità angolare ω ; sappiamo infatti che, nel moto circolare, velocità angolare e velocità scalare sono legati dalla relazione

$$v = \omega R$$

Dato che il problema ci chiede di calcolare la velocità all'istante iniziale $t_0 = 0$, è necessario determinare ω_0 , sfruttando ancora l'equazione (3), calcolata ad esempio all'istante t_1 :

$$\frac{\Delta s_1}{R} = \frac{1}{2} \alpha (t_1 - t_0)^2 + \omega_0 (t_1 - t_0) \Rightarrow \omega_0 = \frac{\frac{\Delta s_1}{R} - \frac{1}{2} \alpha (t_1 - t_0)^2}{(t_1 - t_0)}$$

Da cui otteniamo facilmente la velocità scalare: $v_0 = \frac{\Delta s_1}{(t_1 - t_0)} - \frac{1}{2} \alpha R (t_1 - t_0)$

(Nota: verifichiamo ancora che l'espressione trovata per la velocità è corretta dimensionalmente:

$$[v_0] = \frac{[m]}{[s]} - \left[\frac{rad}{s^2} \right] [m] [s] = \left[\frac{m}{s} \right]$$

Sostituendo infine i valori numerici otteniamo: $v_0 = \frac{0.15m}{1s} - \frac{1}{2} 0.1 \frac{rad}{s^2} 1m 1s = 0.1 m/s$

(b) Il valore medio $\langle v \rangle$ del modulo della velocità e quello $\langle a \rangle$ del modulo dell'accelerazione lineare nell'intervallo di tempo ($t_0 = 0$ e $t_2 = 2s$)

I valori medi dei moduli della velocità scalare e dell'accelerazione lineare durante un generico intervallo di tempo Δt sono definiti come:

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \quad \text{e} \quad \boxed{\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Nel nostro caso si chiede di applicare queste definizioni all'intervallo di tempo $\Delta t_2 = t_2 - t_0 = 2s$

Per calcolare il valore medio della velocità dobbiamo conoscere lo spostamento lungo la traiettoria nell'intervallo di tempo Δt_2 che corrisponde a Δs_2 che ci è fornito dal problema, quindi:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{0.4m}{2s} = 0.2 m/s$$

Per determinare il valor medio dell'accelerazione è necessario invece calcolare la variazione del modulo della velocità durante l'intervallo di tempo Δt_2 , ovvero Δv_2 :

- a $t = 0$ la velocità scalare è v_0 che abbiamo calcolato già al punto (a) del problema

- a $t = t_2$ la velocità sarà ancora data dall'espressione $v = \omega R$ con la velocità angolare che possiamo calcolare applicando semplicemente la seconda equazione della legge del moto:

$$\omega = \alpha(t_2 - t_0) + \omega_0$$

Quindi: $v(t = t_2) = [\alpha(t_2 - t_0) + \omega_0]R = [0.1 \frac{rad}{s^2} 2s + 0.1 \frac{rad}{s}] 1m = 0.3 m/s$

Infine il valor medio dell'accelerazione è: $\langle a \rangle = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{0.3 m/s - 0.1 m/s}{2s} = 0.1 m/s^2$

(c) La velocità angolare ω e il modulo dell'accelerazione a all'istante $t_2 = 2s$

Per calcolare la velocità angolare ω all'istante $t_2 = 2s$ non dobbiamo fare altro che applicare semplicemente le legge oraria del moto uniformemente accelerato che ci fornisce l'espressione per la velocità angolare:

$$\omega(t = t_2) = \alpha(t_2 - t_0) + \omega_0$$

(Notiamo che il valore della velocità angolare iniziale ω_0 è noto già dai punti precedenti del problema)

Sostituendo i valori numerici avremo: $\omega(t = t_2) = 0.1 \frac{rad}{s^2} 2s + 0.1 \frac{rad}{s} = 0.3 \frac{rad}{s}$

Per calcolare infine il modulo dell'accelerazione all'istante t_2 è necessario conoscere entrambe le componenti dell'accelerazione: al punto (a) del problema abbiamo già calcolato la componente lineare dell'accelerazione all'istante iniziale $t_0 = 0$ che sappiamo rimane costante durante tutto il moto.

L'accelerazione totale possiede però anche un componente normale (detta normale proprio perchè perpendicolare in ogni punto alla traiettoria e alla componente lineare dell'accelerazione che invece a sua volta è tangente in ogni punto alla traiettoria) che è legata alla velocità angolare del sistema dalla relazione:

$$a_N = \omega^2 R$$

dove in questo caso la velocità angolare ω si intende calcolata all'istante $t_2 = 2s$.

Sostituendo quindi i valori numerici nell'espressione precedente otteniamo:

$$a_N = (0.3 \frac{rad}{s})^2 1m = 0.09 \frac{m}{s^2}$$

Il modulo dell'accelerazione è quindi dato dalla somma vettoriale delle sue componenti:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{(0.1 \frac{m}{s^2})^2 + (0.09 \frac{m}{s^2})^2} = 0.13 \frac{m}{s^2}$$

Problema n. 5:

Una ruota A, di raggio $R = 30 \text{ cm}$, può ruotare nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della ruota e passante per il suo centro O. La ruota è collegata tramite una cinghia ad una seconda ruota B, di raggio $r = 12 \text{ cm}$, posta nello stesso piano verticale e in grado di ruotare attorno ad un secondo asse orizzontale passante per il suo centro. Le ruote sono inizialmente ferme. All'istante $t = 0$ la ruota A entra in rotazione e aumenta progressivamente la sua velocità al ritmo costante di $0.4 \pi \text{ rad s}^{-2}$ trascinando in rotazione, mediante la cinghia di trasmissione, la ruota B. Calcolare:

- (a) il valore numerico del rapporto $\rho = \omega_B / \omega_A$ fra le velocità angolari di rotazione delle due ruote;
- (b) dopo quanto tempo la ruota B ha velocità angolare $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$.

Soluzione

Per la ruota A si tratta di moto circolare, con accelerazione angolare uniforme.

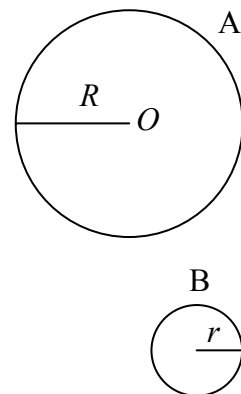
Dati: Raggio delle due ruote $R = 30 \text{ cm}$, $r = 12 \text{ cm}$;

Velocità angolare iniziale della ruota A: $\omega_{A0} = 0$ e

della ruota B $\omega_{B0} = 0$;

Accelerazione angolare della ruota A $\alpha_A = 0.4\pi \text{ rad s}^{-2}$.

Velocità angolare finale della ruota B $\omega_{BF} = 10 \text{ rad s}^{-1}$.



La ruota A si muove di moto circolare uniformemente accelerato, con accelerazione angolare α_A ; sappiamo inoltre che vale la condizione iniziale $\omega_{A0} = \omega_A(t = t_0) = 0$; l'equazione per la velocità angolare della ruota A sarà dunque:

$$\omega_A(t) = \alpha_A \cdot t \quad (\text{i})$$

Per un punto sul bordo della ruota A, la velocità tangenziale $v_A(t)$ sarà:

$$v_A(t) = R \cdot \omega_A(t) = R \cdot \alpha_A \cdot t \quad (\text{ii})$$

Ora, grazie al ruolo della cinghia, per un punto sul bordo della ruota B la velocità tangenziale $v_B(t)$ deve essere la stessa; avremo dunque

$$v_B(t) = r \cdot \omega_B(t) = v_A(t) = R \cdot \omega_A(t) = R \cdot \alpha_A \cdot t \quad (\text{iii})$$

Dalla (iii) ricaviamo in particolare $r \cdot \omega_B(t) = R \cdot \omega_A(t)$ da cui si ottiene subito il rapporto tra le due velocità angolari:

$$\rho = \frac{\omega_B(t)}{\omega_A(t)} = \frac{R}{r} = \frac{30 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 2.5,$$

che risponde alla domanda (a).

Ancora dalla (iii) ricaviamo $\omega_B(t) = \frac{R \cdot \alpha_A \cdot t}{r}$. Imponendo che $\omega_B(t_F) = \frac{R \cdot \alpha_A \cdot t_F}{r} = \omega_{BF}$, si ottiene facilmente $t_F = \frac{r \cdot \omega_{BF}}{R \cdot \alpha_A} = \frac{12cm \cdot 10 \cdot \pi \cdot rad \cdot s^{-1}}{30cm \cdot 0.4 \cdot \pi \cdot rad \cdot s^{-2}} = 10s$, in risposta alla domanda (b).

Problema n. 6:

Un disco avente raggio $R = 0.1 \text{ m}$ ruota nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro e perpendicolare al piano del disco. Lungo la circonferenza esterna del disco è avvolta una corda; un corpo puntiforme M, attaccato all'estremità libera della corda, cade per azione della gravità. Il moto di M è uniformemente accelerato, ma la sua accelerazione \vec{a} è minore di quella \vec{g} dovuta alla forza peso. All'istante $t = 0$ la velocità del corpo M è $v_0 = 0.04 \text{ m/s}$, e 2 s più tardi M è caduto di 0.2 m. Calcolare, durante il moto di caduta del corpo M, le componenti $a_T(t)$ e $a_N(t)$ (tangenziale e normale) dell'accelerazione di un punto del bordo del disco in funzione del tempo.

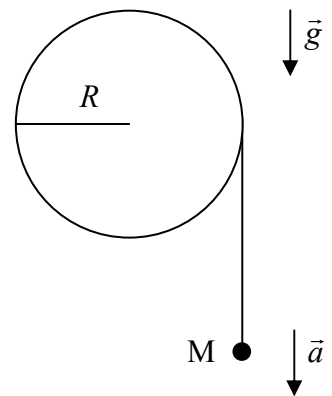
Soluzione

Per il corpo M si tratta di moto rettilineo con accelerazione uniforme.

Dati: Raggio della ruota $R = 0.1 \text{ m}$

Velocità a $t = 0$ del punto M: $v_0 = v(t = 0) = 0.04 \text{ m/s}$;

Posizione del punto M al tempo $t^* = 2 \text{ s}$: $h = z(t^*) = 0.2 \text{ m}$



Per descrivere il moto del punto M, scegliamo un sistema di riferimento con un asse che chiamiamo z , allineato con la gravità e con verso concorde ad essa. Poniamo l'origine di questo asse nella posizione occupata dal punto M al tempo $t = 0$, in modo tale che $z_0 = z(t = 0) = 0$. Chiamando a il modulo dell'accelerazione di M, ed avendo inoltre $v(t = 0) = v_0$, possiamo scrivere:

$$a(t) = a \quad (\text{i}),$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \quad (\text{ii}),$$

$$z(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (\text{iii})$$

L'equazione (iii), calcolata all'istante $t^* = 2 \text{ s}$, durante il quale il corpo ha percorso $h = 0.2 \text{ m}$, diventa

$$z(t^*) = v_0 \cdot t^* + \frac{1}{2} a \cdot (t^*)^2 = h \quad (\text{iv})$$

Dalla relazione (iv) ricaviamo $a = 2 \frac{(h - v_0 t^*)}{(t^*)^2} = \frac{(0.4 \text{ m} - 0.08 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ s})}{(2 \text{ s})^2} = 0.06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Essendo la corda inestensibile, l'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo del disco sarà descritto anch'esso dalla (i). Avremo dunque

$$a_T(t) = a = 0.06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Analogamente, la velocità tangenziale di un punto sul bordo del disco sarà data da $v_T(t) = v(t) = v_0 + a \cdot t = (0.04 + 0.06 \cdot t) \text{ m/s}$. L'accelerazione normale $a_N(t)$ sarà dunque

$$a_N(t) = \frac{(v_T(t))^2}{R} = \frac{(v_0 + a \cdot t)^2}{R} = \left(0.0016 + 0.0048 \cdot t + 0.0036 t^2\right) \frac{m}{s^2}$$