ESERCIZI DI DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

1. Rispetto ad un sistema di riferimento inerziale Oxy, qual è l'accelerazione di un punto materiale di massa m=500gr su cui agiscono la forza $\vec{F}_1 = 2N\ \hat{x}$ e la forza $\vec{F}_2 = 1N\ \hat{x} + 1N\ \hat{y}$?

SOLUZIONE

$\vec{a} = 6\frac{m}{s^2}\ \hat{x} + 2\frac{m}{s^2}\ \hat{y}$

2. Un punto materiale di massa m compie un moto circolare uniforme di raggio R e con velocità angolare ω. Qual è istante per istante la risultante delle forze agenti sul punto materiale? (esprimerla in coordinate polari introducendo gli opportuni versori)

SOLUZIONE

$\vec{F} = -m\omega^2 R\ \hat{e}_r$

Dove abbiamo introdotto il versore radiale $\hat{e}_r$ (lungo il raggio e diretto verso l'esterno della circonferenza).

3. Un punto materiale di massa m compie un moto circolare di raggio R. Se in un certo istante la sua velocità angolare è pari ω e la sua accelerazione angolare è pari ad α., qual è la risultante delle forze agenti sul punto materiale? (esprimerla in coordinate polari introducendo gli opportuni versori)
E il suo modulo?

SOLUZIONE

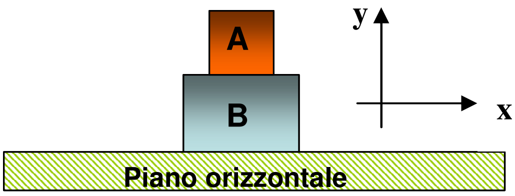
La risultante delle forze agenti espressa in coordinate polari è:

$\vec{F} = -m\omega^2 R\ \hat{e}_r + m\alpha R\ \hat{e}_\theta$

mentre il suo modulo è dato da:

$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{(m\omega^2 R)^2 + (m\alpha R)^2}$

4. Consideriamo i corpi A di massa m_A e B di massa m_B disposti come in figura.



Specificare modulo, direzione e verso di tutte le forze agenti su A, su B e sul piano orizzontale.

SOLUZIONE

Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x diretto orizzontalmente e l'asse y verticalmente verso l'alto

Su A:

- forza peso $-m_A g\ \hat{y}$
- reazione di B su A: pari a $m_A g\ \hat{y}$ in quanto le due forze devono essere uguali ed opposte perché il corpo A rimane fermo.

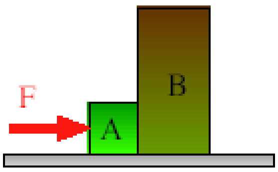
Su B:

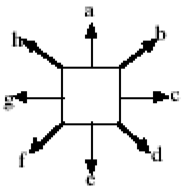
- forza peso $-m_B g\ \hat{y}$

- forza uguale ed opposta a quella applicata da B su A (principio di azione e reazione)
  $-m_A g\ \hat{y}$
  -reazione del piano su B che deve essere uguale ed opposta alla risultante delle altre due forze agenti su B in quanto B rimane fermo.
  $(m_A + m_B) g\ \hat{y}$

  -sul piano agisce la somma delle forze peso di A e di B.

5. A due blocchi A e B a contatto fra di loro viene applicata una forza F come in figura. I due blocchi strisciano con attrito su un piano orizzontale.





Indicare le forze che agiscono sul blocco A specificandone anche la direzione:

Forza agente	si	No	direzione
gravità			
Reaz vinc normale del piano			
Attrito statico			
Attrito dinamico			
Forza dovuta al blocco A			
Forza dovuta al blocco B			
Altre forze esterne			

Analogamente indicare le forze agenti sul blocco B:

Forza agente	si	No	direzione
gravità			
Reaz vinc normale del piano			
Attrito statico			
Attrito dinamico			
Forza dovuta al blocco A			
Forza dovuta al blocco B			
Altre forze esterne			

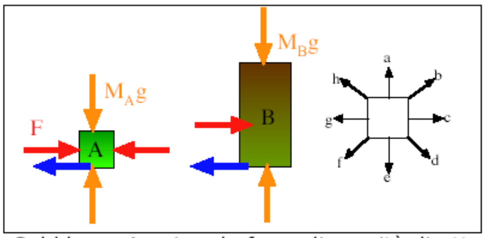
SOLUZIONE

le forze agenti sul blocco A:

Forza agente	si	No	direzione
gravità	X		(e)
Reaz vinc normale del piano	X		(a)
Attrito statico		X	
Attrito dinamico	X		(g)
Forza dovuta al blocco A		X	
Forza dovuta al blocco B	X		(g)
Altre forze esterne	X		(c)

le forze agenti sul blocco B:

Forza agente	si	No	direzione
gravità	X		(e)
Reaz vinc normale del piano	X		(a)
Attrito statico		X	
Attrito dinamico	X		(g)
Forza dovuta al blocco A	X		(c)
Forza dovuta al blocco B		X	
Altre forze esterne		X	



Sul blocco A agisce la forza di gravità diretta verso il basso. Dato che il blocco appoggia sul piano orizzontale, ne subisce la reazione vincolare in direzione normale al piano stesso. Inoltre, data la presenza di attrito e di moto relativo tra il blocco e il piano orizzontale è presente una forza di attrito ***dinamico*** che si oppone al moto. Il blocco A spinge il blocco B, esercitando su di esso una forza nella stessa direzione della forza esterna. Per il principio di azione-reazione, il blocco B esercita una forza uguale e contraria. Come il blocco A, il blocco B è soggetto alle forze di gravità, reazione vincolare del piano e attrito dinamico nella stessa direzione e verso.

6. Consideriamo due corpi A di massa m_A e B di massa m_B disposti su un piano orizzontale come nella figura del problema precedente. Qual è l'accelerazione con cui si muoverebbero i due corpi se su A agisse una forza orizzontale $\vec{F}_A$ e la forza di attrito fosse trascurabile? Quale sarebbe la forza applicata da B su A?
Cosa cambierebbe in presenza di un attrito dinamico di coefficiente μ_d non trascurabile?

SOLUZIONE

Indichiamo con x l'asse coordinato orizzontale.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_A}{m_B + m_A}$$

$$\vec{F}_{BsuA} = -\vec{F}_{AsuB} = -\frac{m_B}{m_B + m_A}\vec{F}_A$$

In presenza di un attrito dinamico non trascurabile e supponendo che le due masse si stiano muovendo rispetto al piano orizzontale:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_A - \mu_d (m_B + m_A) g \ \hat{x}}{m_B + m_A}$$

$$\vec{F}_{BsuA} = -\vec{F}_{AsuB} = -\frac{m_B}{m_B + m_A}\vec{F}_A$$

7. Una massa M di estensione trascurabile è ferma al centro di una buca rettangolare alle cui pareti è collegata da due molle di costante elastica k1 e k2 come in figura. La larghezza della buca è L e la lunghezza a riposo delle due molle è L/4. Sia μ il coefficiente di attrito statico fra la massa e il fondo della buca. Consideriamo un sistema di riferimento solidale alla buca con origine nella posizione iniziale della massa.

Indicare per ciascuna affermazione/relazione se è vera o falsa.

[A]- La forza sulla massa dovuta alla molla di costante elastica k_2 é $-k_1\frac{L}{4}\hat{x}$

[B]- La forza sulla massa dovuta alla molla di costante elastica k_1 é $-k_1\frac{L}{2}\hat{x}$

[C]- Sulla massa agiscono solo forze in direzione parallela e ortogonale al fondo della buca

[D]- Il verso della forza d'attrito dipende dai valori di k_1 e k_2

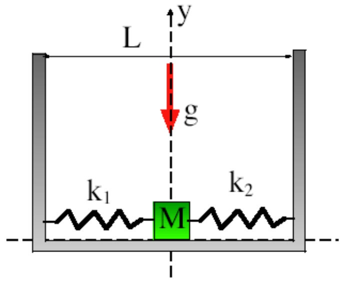
[E]- La massa non si muove dall'origine se $L\left|\frac{k_2-k_1}{4Mg\mu}\right|<1$

Supponiamo ora di lasciare la massa al tempo t=0, con velocità nulla, e che $\mu=0$

[F]- La nuova posizione di equilibrio della massa è data da $x=\frac{L}{4}\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}$

[G]- La velocità della massa nell'origine è sempre nulla

[H]- L'accelerazione della massa $a_0=a(t=0)$ è data da $\frac{L(k_2-k_1)}{4M}$



SOLUZIONE

Le risposte ai quesiti sono poste nella tabella qui a fianco, e le soluzioni sono date di seguito.

	A	B	C	D	E	F	G	H
V/F	F	F	V	V	V	F	V	V

Le due molle del sistema hanno una lunghezza pari a *L/2*, e di conseguenza non sono a riposo, ma sono estese ciascuna di una quantità *L/4*. Quindi, ognuna di esse eserciterà una forza sulla massa *M*. In particolare:

Per la molla k_1 vale: $\Delta\vec{x}=\frac{L}{4}\hat{x}$

$\vec{F}_1=-k_1\cdot\Delta\vec{x}=-k_1\cdot\frac{L}{4}\hat{x}$ *forza esercitata dalla molla 1*

Per la molla k_2 vale: $\Delta\vec{x}=-\frac{L}{4}\hat{x}$ *estensione della molla*

$\vec{F}_2=-k_2\cdot\Delta\vec{x}=k_2\cdot\frac{L}{4}\hat{x}$ *forza esercitata dalla molla*

La forza risultante agente sulla massa e dovuta alle due molle è quindi: $\vec{F}_{molle}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=(k_2-k_1)\cdot\frac{L}{4}\hat{x}$ *(eq.3)*

Sulla massa agiscono anche le seguenti forze:

-Forza peso: $\vec{F}_g=-M\cdot g\hat{y}$

-Reazione vincolare del piano di appoggio (stessa direzione e verso opposto alla forza peso):

-Forza di attrito statico che contrasta la forza delle molle:

Tutte le forze agenti sulla massa M sono dirette lungo gli assi *x* e *y*, e quindi sono parallele od ortogonali al piano di appoggio. Dall'espressione di $\vec{F}_{molle}$ (*eq.3*) si può notare che il verso dipende da (k_1-k_2) (dal momento che l'estensione delle due molle rispetto al punto di equilibrio è la stessa, la molla più "rigida" tende a trascinare la massa verso il proprio punto di equilibrio). Di conseguenza la forza d'attrito, che vi si oppone, avrà pure verso dipendente dai valori di k_1 e k_2.

Per vincere l'attrito statico e spostare la massa M dall'origine, il modulo della forza delle molle deve essere maggiore della forza d'attrito statico: $|\vec{F}_a| = \mu|\vec{F}_g| = \mu Mg$

Quindi la massa non si muove se:

$$\frac{|\vec{F}_{molle}|}{|\vec{F}_a|} < 1 \rightarrow \frac{|(k_2 - k_1)|\frac{L}{4}}{\mu|\vec{F}_g|} = \left|\frac{k_2 - k_1}{\mu Mg}\right|\frac{L}{4} < 1$$

(Quale sarebbe il verso del moto per $\frac{|\vec{F}_{molle}|}{|\vec{F}_a|} > 1$ *?) Attenzione ai segni.....*

Nella seconda parte si suppone che la forza di attrito sia nulla. La massa M quindi NON è in generale in equilibrio nell'origine. Il punto di equilibrio può essere determinato imponendo che la risultante delle forze esterne sia uguale a 0. Dal momento che le forze agenti in direzione y (forza peso e reazione vincolare) si bilanciano sarà sufficiente trovare il punto x_0 in cui le forze dovute alle due molle avranno stesso modulo (dalla precedente discussione è facile capire che le due molle hanno verso opposto). Gli spostamenti dalle posizioni di equilibrio per la molla di costante elastica k_1 e quella di costante elastica k_2 nella posizione x_0 sono rispettivamente:

$\Delta\vec{x}_1 = \left(x_0 + \frac{L}{4}\right)\hat{x}, \quad \Delta\vec{x}_2 = \left(x_0 - \frac{L}{4}\right)\hat{x}$ (*fare attenzione ai segni!*) per cui la forza risultante sulla massa sarà:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1 \cdot \Delta\vec{x}_1 - k_2 \cdot \Delta\vec{x}_2 = -k_1 \cdot \left(x_0 + \frac{L}{4}\right)\hat{x} - k_2 \cdot \left(x_0 - \frac{L}{4}\right)\hat{x} = -(k_1 + k_2)x_0\hat{x} + (k_2 - k_1)\frac{L}{4}\hat{x}$$

per cui la condizione di equilibrio è data da: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow -(k_1 + k_2)x_0\hat{x} + (k_2 - k_1)\frac{L}{4}\hat{x} = 0 \rightarrow x_0 = \frac{(k_2 - k_1)}{(k_1 + k_2)}\frac{L}{4}$

(*cosa succede se $k_1 = k_2$? Questo è un buon criterio per verificare la risposta...Nota pure che i segni di forze e posizioni, se ben scelti all'inizio, risultano automaticamente corretti, e possono essere verificati sul grafico)*

Per rispondere alle ultime due questioni si deve notare che la forza agente sulla molla è ancora di tipo armonico (si può verificare che esiste un sistema di coordinate dato da $X = x + x_0$ in cui la forza risultante diventa $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -(k_1 + k_2)X\hat{x}$, ovvero tutto va come se la forza fosse dovuta ad una nuova molla di costante elastica (k_1+k_2)). L'origine O è il punto di massima estensione in questo moto armonico, e quindi la velocità è sempre nulla, mentre l'accelerazione nel punto O è data semplicemente da $\frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{M} = \frac{(k_2 - k_1)L}{4M}\hat{x}$ (la forza nell'origine dovuta alle molle è stata calcolata in più punti in precedenza).

8. Un oggetto di massa m viene lanciato su un piano orizzontale scabro. Tra l'oggetto ed il piano l'attrito è descritto dai coefficienti di attrito statico μ_s e dinamico μ_d. Dopo aver percorso un tratto L il corpo puntiforme incontra una molla ideale di massa trascurabile (il moto è unidimensionale e la molla è fissata all'altro estremo ad una parete verticale) e la comprime di una quantità x_0.

-Determinare la velocità iniziale dell'oggetto;

- Determinare la posizione di arresto dell'oggetto dopo che la molla lo ha respinto all'indietro

-Il tipo moto successivo all'istante in cui si raggiunge la massima compressione della molla dipende dai coefficienti di attrito?

SOLUZIONE

Per risolvere questo problema è necessario (<u>ed è richiesto</u>) sapere la soluzione del seguente tipo di equazione differenziale (vedi lezione di C.Giordani del 27/03/2015):

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=C$$

dove m, k e C sono delle costanti. Di questa forma è ad esempio l'equazione del moto di un corpo attaccato ad una molla e sottoposto ad una forza costante C, quando scegliamo l'origine della coordinata x coincidente con la posizione a riposo della molla (vedi figura 1 qui sotto).

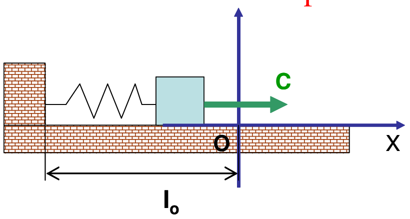


Figura 1

Oppure, sempre di questa forma è l'equazione del moto di un corpo attaccato da una molla, quando l'origine della coordinata x è stata scelta coincidente con il punto di aggancio della molla(vedi figura 2 sotto): $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-l_0)$ che puo' essere scritta anche $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=kl_0$

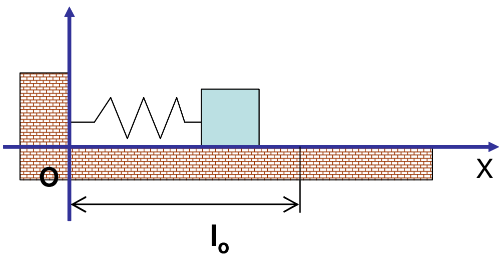


Figura 2

La funzione x(t) (legge oraria) che è soluzione dell'equazione differenziale $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=C$ è data dalla <u>somma di due funzioni</u>: $x_{gen\_0}(t)$, una soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea associata (cioè dell'equazione $m\frac{d^2x}{dt}+kx=0$, dove appunto C è stato sostituito da uno zero) e $x_{part}(t)$, una soluzione particolare (non occorre quella generale ma solo una qualsiasi) della non omogenea (cioè di $m\frac{d^2x}{dt}+kx=C$, questa volta con C diverso da zero):

$x(t)= x_{gen\_0}(t)+ x_{part}(t)$

La soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea $m\frac{d^2x}{dt}+kx=0$ è data dalla funzione $x_{gen\_0}(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ dove A,ω e ϕ sono delle costanti (va bene anche la stessa espressione con il cos al posto del sin ed è in entrambi i casi l'espressione generale per la legge oraria di un moto armonico semplice unidimensionale).

Una soluzione particolare della non omogenea si trova invece facilmente ricavando il valore costante, che indicheremo con P, per cui $x_{part}(t)=P$ è soluzione di $m\frac{d^2x}{dt}+kx=C$. Andando a sostituire alla funzione incognita x la costante P in questa equazione, si ottiene che l'equazione è verificata se P=C/k. Quindi $x_{part}(t)=C/k$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e quindi la sua soluzione generale è la seguente

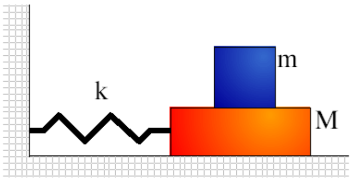
$$x(t)=x_{gen\_0}(t)+x_{part}(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+C/k$$

Nel caso della figura 2 questa diventa

$$x(t)=x_{gen\_0}(t)+x_{part}(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+l_0$$

che non descrive altro che il moto armonico semplice della mossa intorno alla posizione a riposo della molla. Le costanti A e ϕ si ricavano dalle condizioni iniziali, mentre ω è la pulsazione pari a $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

9. Un blocco di massa m = 1.22kg poggia su una piastra di massa M = 8.73kg a sua volta appoggiata su di un piano orizzontale liscio. Il coefficiente di attrito statico fra blocco e piastra vale μs=0.42. Alla piastra è attaccata una molla di costante elastica k=344N/m e massa trascurabile con l'estremità fissata ad una parete verticale fissa.



Determinare:
1. L'ampiezza di oscillazione massima del moto del sistema in assenza di moto relativo fra blocco e piastra.
2. La legge oraria del moto del sistema, nell'ipotesi che il sistema all'istante iniziale sia in moto con velocità v= 0.5 m/s [1]verso destra e la molla non sia deformata.

SOLUZIONE

Dati del problema:

$m = 1.22$ kg $M = 8.73$kg $\mu_s = 00.42$

$k = 344 \frac{N}{m}$

Risposta 1)

Se non c'é moto relativo tra le due masse, allora queste si muovono orizzontalmente come un corpo unico soggetto lungo x alla sola forza esterna della molla:

$$(m + M)\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x\right) + k\,x = 0 \qquad \textit{eq.1}$$

dove si é scelto x tale che x = 0 corrispondente con la posizione di riposo della molla.

Viene definita con *a* l'accelerazione comune ai due blocchi.

$$a = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x$$

Inoltre, si osserva che la forza di attrito statico F_A applicata dal blocco inferiore al blocco superiore produce l'accelerazione del blocco superiore e permette alle due masse di muoversi insieme. Quanto detto é vero finché vale la seguente relazione :

$F_A = m\,a$ *Forza d'attrito (applicata dalla massa inferiore a quella superiore) necessaria*

$F_A \le \mu_s\,m\,g$ ¿ *ad imprimere a m un'accelerazione a e che deve però essere inferiore alla forza di attrito statico massima.*

L'accelerazione massima che non produce moto relativo é data da :

$a\,m = \mu_s\,m\,g$ *da cui* $a = \mu_s\,g$ *Sostituendo i numeri:* $a = 4.1 \frac{m}{s^2}$

La soluzione dell'equazione 1 é un moto armonico di pulsazione ω.

Infatti, riscrivendo l'equazione 1:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x + \frac{k\,x}{M + m} = 0$$

e sostituendo l'espressione della pulsazione:

$\omega^2 = \frac{k}{M + m}$ $\omega^2 = 34.6 \frac{rad^2}{s^2}$ *da cui:* $\omega = 5.9 \frac{rad}{s}$

si ottiene la seguente

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x + \omega^2 x = 0 \qquad \textit{eq.2}$$

che ha per soluzione:

$$x = X_0 \sin(\omega\,t + \phi) \qquad \textit{eq.3}$$

Derivando due volte la 3 si ricava l'accelerazione. Essa raggiunge il massimo, pari al prodotto dell'ampiezza di oscillazione per il quadrato della pulsazione, nei punti di inversione dell'oscillazione. L'ampiezza di oscillazione max ammessa sarà:

$X_0 = \frac{a}{\omega^2}$ *in numeri*: $X_0 = 0.12$m

Condizioni iniziali del moto:

$v(t = 0) = 0.5 \frac{m}{s}$

$x\,(t = 0) = 0$ *molla indeformata*

Derivando la eq.3 si ottiene l'espressione della velocità e imponendo le condizioni iniziali:

$x(t = 0) = 0 = X_0 \sin(\phi)$ da cui $\phi = 0$

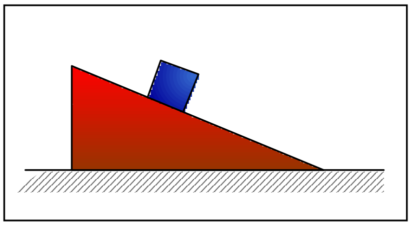
$v(t = 0) = 1 = X_0\,\omega \cos(\phi)$ da cui si ricava l'ampiezza: $X_0 = \frac{1}{\omega}$

in numeri: $X_0 = 8.5$ cm

Per cui in queste condizioni la legge oraria del moto é:

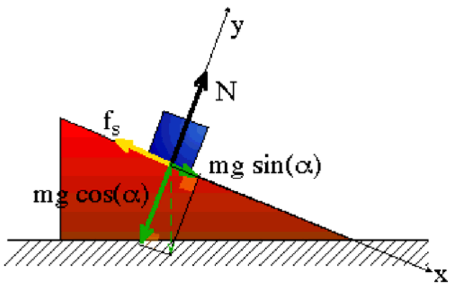
$x = 8.5 \sin(\omega\,t)$ cm

10. Un punto materiale è fermo su di un piano inclinato che forma un angolo α con l'orizzontale . Il coefficiente di attrito statico è $\mu s=0.35$ e il coefficiente di attrito dinamico è $\mu d=0.23$.



1) Qual'è il valore massimo di α per cui il punto rimane fermo rispetto al piano?
2) Se α=30°, quanto tempo impiega il punto materiale a percorrere la distanza di 1 m lungo il piano inclinato partendo da fermo?
3) Se α=30°, che accelerazione orizzontale (modulo e verso) bisogna imprimere al piano inclinato perché il punto rimanga in quiete?

SOLUZIONE



Dati del problema:
coefficienti di attrito statico e dinamico

$\mu_s = 0.35 \qquad \mu_d = 0.23$

inclinazione del piano: $\alpha = 30°$

$g = 9.81 \dfrac{m}{s^2}$

distanza che deve percorere la massa: L = 1m

L = 1

Risposta a)

Il valore di α massimo per cui il blocco rimane ancora fermo, si ottiene scrivendo le equazioni di equilibrio:
Le forze che agiscono sul blocco sono quelle indicate in figura:
-le componenti della forza di gravità (normale al piano, e parallela al piano)
-la forza di attrito statico(nelle condizioni di corpo fermo agisce l'attrito statico)
-la reazione normale al piano:

$-f_t + g\,m\sin(\alpha) = 0$ *lungo* x

$-m\,g\cos(\alpha) + N = 0$ *lungo* y

da cui si ricava:
dato che la forza di attrito statico deve essere: $f_t \le \mu_s g\,m\cos(\alpha)$,
per cui si ricava: $\tan(\alpha) \le \mu s$

$N = g\,m\cos(\alpha)$

in numeri:
da cui l'angolo di inclinazione massimo: $\alpha = 0.34$ rad circa 19°

Risposta b)

Nel caso in cui $\alpha = 30°$ il blocco si muove, quindi al posto dell'attrito statico interverrà l'attrito dinamico:

$$m\,g\sin(\alpha) - \mu_d N = m\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x\right) \qquad \textit{(eq.1)}$$

$$-m\,g\cos(\alpha)+N=0 \qquad \textit{da cui si ricava:} \qquad N=g\,m\cos(\alpha)$$

Dall'equazione 1 si ricava l'accelerazione:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x=\left(\sin[\alpha]-\cos[\alpha]\mu_d\right)g$$

da cui: $\frac{\partial}{\partial(t)}\frac{\partial}{\partial(t)}x=2.9\frac{m}{s^2}$

e integrando e imponendo velocità iniziale nulla , si ottiene il tempo che impiega la massa per percorrere un metro lungo il piano inclinato:

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x\right)t^2$$

il tempo impiegato corrisponde a : $t=0.83s$

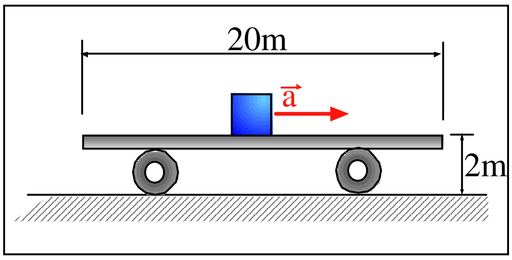
RISPOSTA C)

Se l'inclinazione del piano é 30° é chiaro che il blocco tende a scivolare verso il basso. Tuttavia é possibile mantenerlo fermo se si imprime al piano inclinato un'accelerazione in direzione orizzontale verso destra di modulo almeno pari a:

$$a=\frac{\left(-\mu_s\cos[\alpha]+\sin[\alpha]\right)g}{\cos(\alpha)+\mu_s\sin(\alpha)} \qquad \text{da cui: } a=1.9\frac{m}{s^2}$$

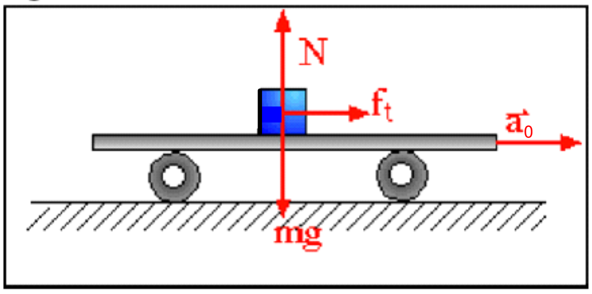
Per dimostrarlo si scriva l' equazione del moto della massa quando questa si muove insieme al piano (e quindi rimane ferma rispetto ad esso) ed è soggetta al valore massimo di attrito statico.

11. Un blocco di metallo è posto su di un vagone ferroviario lungo *20m* in posizione centrale. Entrambi inizialmente sono in quiete rispetto al terreno. Il coefficiente di attrito statico tra il blocco e il vagone è $\mu s=0.3$ e il coefficiente di attrito dinamico è $\mu d=0.15$. A t = 0 il vagone, che si muove su di un binario rettilineo, si mettete in moto con accelerazione costante a_0.



a) Qual è il valore massimo di a_0 per cui il blocco resta fermo rispetto al vagone?
b) Se a_0 = 5m/s^2, quanto tempo il blocco impiega prima di cadere dal vagone?
c) Se a_0 = 5m/s^2, e il piano del vagone è alto h = 2m dal suolo, a che distanza dalla posizione occupata a t = 0 il blocco tocca il suolo?

SOLUZIONE

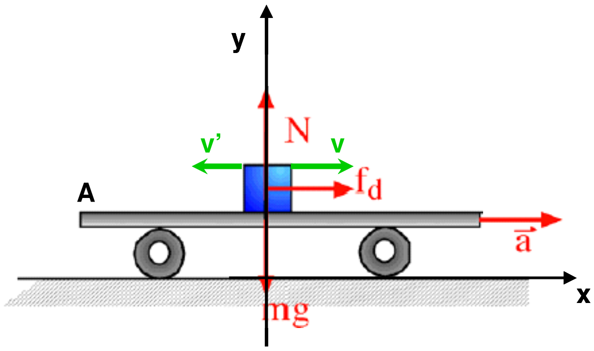


Nel sistema di riferimento inerziale (rispetto al terreno), le forze agenti sul blocco sono (si consideri che il blocco si muove solidale al carrello):

f_t *forza d'attrito*
N *reazione normale del vagone sul blocco*
$-m\,g$ *forza peso*

La componenete orizzontale della risultante delle forze dovrà essere uguale a:
$m\,a_0$ *dove a_0 é 'accelerazione assoluta del blocco (uguale a quella del vagone)*
mentre la componente verticale dovrà essere nulla (l'accelerazione verticale è nulla!
$f_t = m\,a_0$ *in altre parole è la forza di attrito statico ad accelerare il blocco!*
$N - m\,g = 0 \quad N = g\,m$
e chiedendo che $f_t \le \mu_s N$ si ottiene :
$a_0 = \mu_s g$ *da cui :* $a_0 = 2.9\dfrac{m}{(s)^2}$

Nel caso in cui a_0 = 5m/s^2, c'é moto relativo tra massa e carrello (vedi risposta precedente). Nella figura seguente sono indicate le forze sul blocco viste nel sistema di riferimento inerziale solidale al suolo .v' é la velocità del blocco rispetto al carrello, v é la velocità rispetto al suolo. La forza di attrito dinamico f_d è opposta alla velocità v' della massa rispetto al carrello.



Le equazioni del moto e della massa nel sistema di riferimento inerziale solidale al terreno

$$\mu_{din} N = m\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}x\right)$$

$$N = m\,g$$

Integrando due volte, e imponendo le condizioni iniziali:

$x(t = 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}x(t = 0) = 0$, si ottiene

$$x = \frac{1}{2}\mu_{din}\,g\,t^2$$ *(eq.1) legge del oraria del blocco*

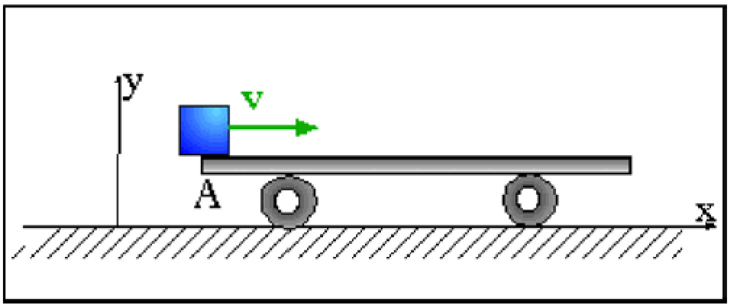
Per la coordinata del punto A del carrello si ottiene invece:

$$x_A = \frac{1}{2}a_0 t^2 - \frac{L}{2}$$

Quando $x = x_A$ il blocco cade:

$$T_f = \left([-1]\frac{L}{-a_0 + \mu_{din}\,g}\right)^{\frac{1}{2}}$$ da cui in numeri $T_f = 2.4s$

Infine, per calcolare a quale distanza cade il blocco rispetto alla posizione che assume per t = 0, nel sistema inerziale si calcolano le condizioni iniziali in cui comincia a cadere dal carrello:



$$x_{cade} = \frac{1}{2}\mu_{din}\,T_f^{\,2}\,g$$ *spazio percorso fino all'istante in cui comincia a cadere*
$T_f = 2.4s$

da cui: $x_{cade} = 4.2m$

$$v_{cade} = \mu_{din}\,T_f\,g$$ *velocità all'istante in cui comincia a cadere*

da cui: $v_{cade} = 3.5\frac{m}{s}$

Date le condizioni iniziali sopra calcolate il corpo segue un moto parabolico :

$$x_{tot} = x_{cade} + s$$

e prima di toccare il terreno percorrerà lungo x un tratto s pari a:

$$s = v_{cade}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Infine si ricava: $x_{tot} = 6.4m$