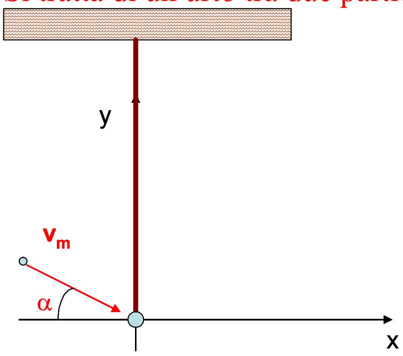
# Sistemi di particelle: urti, esplosioni e impulsi

1. **Problema**

Una particella di massa M è appesa al soffitto del laboratorio tramite un filo in estensibile di massa trascurabile e lunghezza L. Contro tale tale particella inizialmente in quiete nella sua posizione di equilibrio urta in modo completamente anelastico una seconda particella di massa m con una velocità di modulo Vm e che forma una angolo α con l'orizzontale (dall'alto).
-Quale sarà la velocità delle particelle subito dopo l'urto?
-Quale sarà l'energia del sistema formato dalle due particelle dissipata nell'urto?
-Trovare la relazione tra Vm e l'angolo max di oscillazione del pendolo dopo l'urto.

**SOLUZIONE**

Si tratta di un urto tra due particelle di cui una vincolata tramite un filo ad un punto fisso.




Se considero il sistema costituito dalle due particelle, rispettivamente di massa m e M, la forza applicata dal filo ideale alla particella M è una forza esterna (non è un sistema isolato!). Durante l'urto il filo potrebbe applicare una forza impulsiva non trascurabile che andrebbe a cambiare la quantità di moto totale del sistema.

$$\vec{Q}_{td} - \vec{Q}_{tp} = \vec{I}_{\tau}$$

(Variazione della quantità di moto totale del sistema = impulso forza esterna)
Possiamo poi usare le "condizioni geometriche" imposte dal vincolo al nostro sistema.
Essendo un filo ideale può esercitare forze solo tangenzialmente a sé stesso, quindi nel nostro caso non può che essere verticale e diretto verso l'alto. Separo l'equazione nelle due componenti lungo gli assi coordinati:

$$Q_{tdx} - Q_{tpx} = 0$$

$$Q_{dy} - Q_{py} = I_{\tau y}$$

Il fatto che subito dopo l'urto entrambe le particelle si trovino vincolate al filo impone loro di muoversi lungo un traiettoria circolare di raggio L, intorno al punto in cui è sospeso il filo. La loro velocità quindi dovrà sempre essere perpendicolare al filo. In particolare subito dopo l'urto dovrà essere quindi orizzontale (c'è solo la componente x!!), $\vec{v} = v_x \hat{x}$.
Posso quindi scrivere che:

$$\begin{cases} Q_{tpx} = mv_m \cos\alpha \\ Q_{tpy} = -mv_m \sin\alpha \\ Q_{dy} = 0 \\ Q_{dx} = (m+M)v_x \end{cases}$$

E utilizzando l'equazione precedentemente scritta si ricava:

$$I_{\tau y} = mv_m \sin\alpha$$

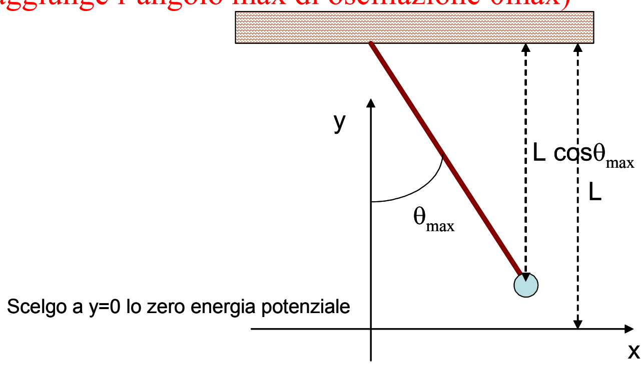
$$v_x = \frac{mv_m \cos\alpha}{m+M}$$

Nota che $\vec{I}_\tau = I_{\tau y}\hat{y}$ è l'impulso applicato dal filo alla particella M durante l'urto, $-I_{\tau y}\hat{y}$ sarà allora l'impulso applicato dal filo al perno fissato al soffitto e quindi $I_{\tau y}\hat{y}$ è l'impulso applicato dal perno al filo ( detta reazione vincolare impulsiva del perno sul filo).

L'energia dissipata nell'urto è data dalla variazione di energia del sistema (l'energia potenziale non cambia quindi basta calcolare la variazione di energia cinetica totale!)

$$E_{diss} = E_{cind} - E_{cinp} = \frac{1}{2}(m+M)v^2 - \frac{1}{2}mv_m{}^2 < 0$$

Durante il moto successivo sulle particelle unite agiscono solo la tensione del filo (che non fa lavoro visto che è sempre ortogonale allo spostamento), e la forza peso che è conservativa, quindi si conserva l'energia meccanica (energia meccanica un istante dopo l'urto= energia meccanica quando raggiunge l'angolo max di oscillazione θmax)



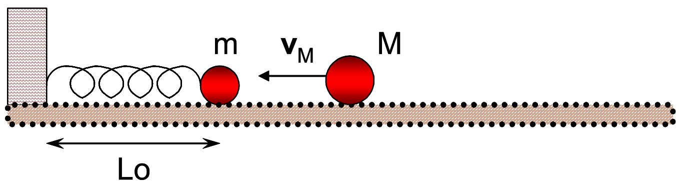

.

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)g(L - L\cos\theta_{max})$$

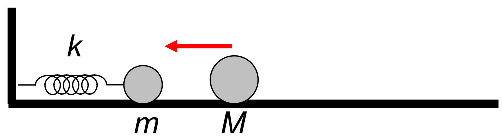
da cui si ricava facilmente la relazione tra θmax e Vm….

## 2. Problema

Una particella di massa m si trova su un piano orizzontale scabro (μd, μs) ed è vincolata all'estremità di una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo Lo. Una seconda particella di massa M si muove sullo stesso piano come mostrato nella figura e va ad urtarla con




velocità di modulo $V_M$ ($0^-$) (modulo della velocità di M un istante prima dell'urto che avviene a t=0). L'urto è perfettamente elastico. Trovare la massima compressione subita dalla molla e quanto spazio dovrà percorrere la massa M prima di fermarsi.




Prima dell'urto: $v_{mp} = 0$ $v_{Mp} = -V_M$

[NB: gli indici "P" e "D" segnificano subito "prima" e "dopo" l'urto, rispettivamente]

L'urto:

1. Le forze esterne al sistema delle due palline, ossia la forza elastica della molla e la forza d'attrito, non sono impulsivo. Quindi, la quantità di moto del sistema sarà conservata:

$$-MV_M = mv_{mD} + Mv_{MD}$$

2. L'urto è elastico e quindi verrà conservata l'energia cinetica durante l'urto:

$$\frac{1}{2}MV_M^2 = \frac{1}{2}mv_{mD}^2 + \frac{1}{2}Mv_{MD}^2$$

Questo sistema di 2 equazioni ha come soluzione per i due incogniti $v_{mD}$ e $v_{MD}$ :

A.
$$v_{mD} = -\frac{2M}{M+m}V_M$$
$$v_{MD} = \frac{m-M}{M+m}V_M$$

oppure

B.
$$v_{mD} = 0$$
$$v_{MD} = -V_M$$

Scartiamo la soluzione B perché, pur essendo consistente con le leggi di conservazione usate, corrisponde al caso in cui le due palline non interagiscano e la particella di massa *M* continui con la sua velocità iniziale.

[NB, se le due masse hanno la stessa massa, c'è un trasferimento perfetto dell'energia cinetica dalla prima alla seconda pallina.]

Dopo l'urto, le due masse non interagiscono più, e quindi l'energia cinetica di ciascuna cambierà indipendentemente e in corrispondenza al lavoro fatto su di essa. Questo potrà poi essere usato per ricavare, nel caso di massa M, lo spazio percorso prima di fermarsi ($\Delta x_M$), e, nel caso di massa m, lo spazio percorso prima che il moto si inverti ($\Delta x_m$). In entrambi casi, si tratta di un punto in cui la velocità (e quindi l'energia) e nulla.

massa M:

$$\Delta E_{cin,M} = -\frac{1}{2}Mv_{MD}^2 = -\left|F_{ATT,M}\right|\left|\Delta x_M\right|$$

$$\left|\Delta x_M\right| = \frac{v_{MD}^2}{2\mu_D g}$$

massa m:

$$\Delta E_{cin,M} = -\frac{1}{2}Mv_{MD}^2 = \int \vec{F}_{elast} \cdot d\vec{x} - \left| F_{ATT,m}\right|\left|\Delta x_m\right|$$

$$= -\frac{1}{2}k\Delta x_m^2 - \mu_D mg\left|\Delta x_m\right|$$

$$\left|\Delta x_m\right| = \frac{-\mu_D mg + \sqrt{(\mu_D mg)^2 + kmv_{mD}^2}}{k}$$

## 3. Problema

Una particella materiale di massa $m_1=10kg$, si muove di moto rettilineo uniforme su di un piano orizzontale liscio, lungo un asse che scegliamo come asse x, con velocità $v_x=2m/s$. Sullo stesso asse giace, in quiete una seconda particella di massa $m_2=3kg$ che è attaccata ad un'estremità di una molla di costante elastica $k=20N/m$, di lunghezza a riposo $L_0=40cm$ e di massa trascurabile, che giace anch'essa lungo l'asse x. Al tempo $t=0$ la particella n°1 tocca l'altra estremità della molla rimanendovi agganciata.

Supponendo che la particella n°2 si muova anch'essa senza attrito, si calcoli:

1. Legge oraria $x_{cm}(t)$ del centro di massa per $t>0$;
2. La distanza minima tra le due particelle;

## SOLUZIONE

Dati del problema:

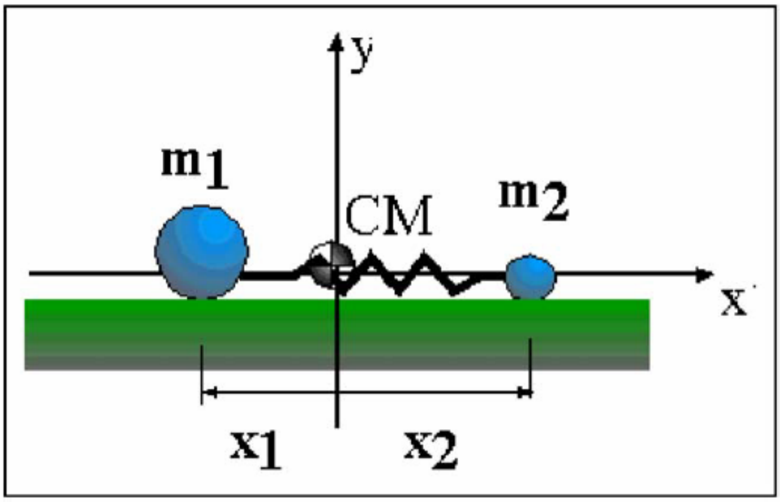
$m_1 = 1kg,\ m_2 = 3kg \quad K = 20\ \frac{N}{m} \quad v_{x1} = 2\ \frac{m}{s} \quad L_0 = 0.4m$

**1)**

Sul sistema la risultante delle forze esterne è nulla, per cui la velocità del CM rimane costante (prima, durante e dopo l'urto). C'e solo la componente lungo x, $v_{xcm}$:
prima dell'urto la velocità del CM del sistema è: $$v_{x\,CM} = \frac{m_1 v_{x1}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{xCM} = 0.5\ \frac{m}{s}$$

e per quanto sopra scritto rimane costante anche dopo l'urto (e $v_{ycm} = 0$).
All'istante t = 0 la massa 1 urta la molla e vi rimane attaccata. Si sceglie il sistema di riferimento solidale al piano orizzontale mostrato in figura, con origine la posizione del CM del sistema all'istante t =0.
(CM x y)




Per individuare completamente la posizione del nostro sistema di riferimento rispetto alle particelle, ricaviamo le coordinate lungo x delle masse m1 e m2 all' istante t =0:

$$0 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

e la molla è a riposo (non ha avuto ancora il tempo di contrarsi!):

$$-x_1 + x_2 = L_0$$

da cui si ricava: $$x_2 = \frac{L_0 m_1}{m_2 + m_1} \qquad x_1 = -\frac{L_0 m_2}{m_2 + m_1}$$

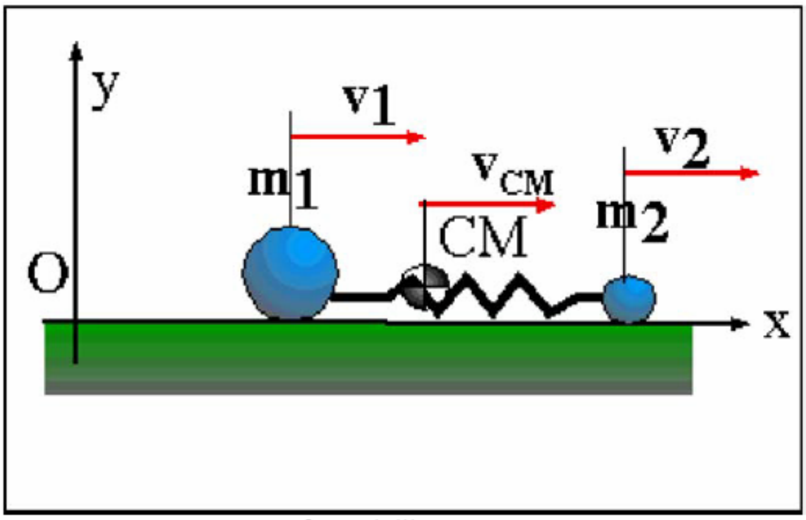
Quindi la legge oraria del CM in questo sistema di riferimento sarà descritta dalle seguenti componenti:

$$x_{CM} = v_{x\,CM}\, t$$
$$y_{CM} = 0$$
$$z_{CM} = 0$$

**2)**

La distanza minima tra le masse si trova sfruttando il principio di conservazione dell' energia (infatti si hanno solo forze conservative):
Si possono scegliere due "strade" per la risoluzione del problema:

**a)** Ci si mette nel sistema di riferimento solidale al piano orizzontale definito prima (Oxy):




*energia meccanica **prima** dell'urto*

$$EM_{prima} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{x1}^{\ 2}$$

*Energia meccanica quando la molla raggiunge la massima compressione(distanza minima tra le particelle m1e m2)*

$$EM_{finale} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{xf_1}^{\ 2} + \tfrac{1}{2} m_2 v_{xf_2}^{\ 2} + \tfrac{1}{2} K (L - L_0)^2$$

dove L è la distanza minima.

$v_{xf_1}$, $v_{xf_2}$ sono le velocità delle masse quando la molla raggiunge la minima compressione.

In quell'istante la velocità relativa delle due masse è nulla e quindi la loro velocità coincide con quella del CM:

$v_{xf_1} = v_{xf_2}$ $\qquad v_{xf_2} = v_{x\,CM}$ $\qquad v_{xf_1} = v_{x\,CM}$

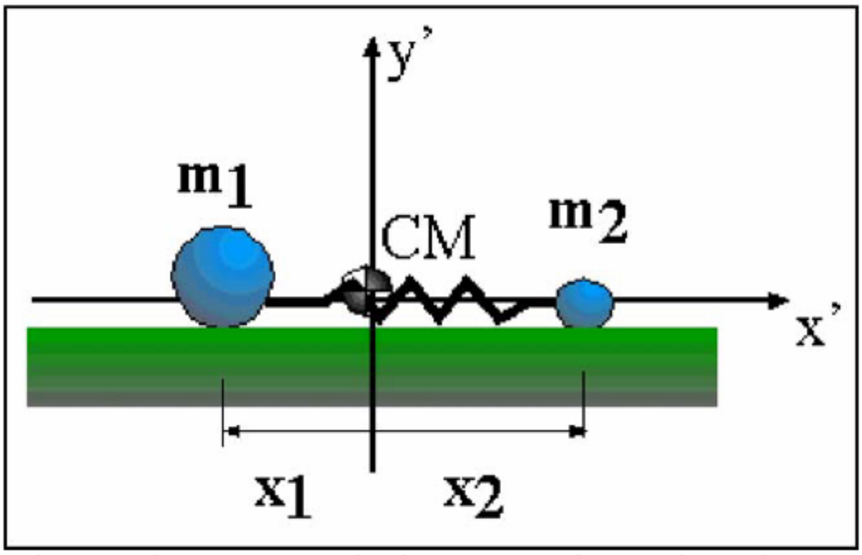
$$EM_{prima} = EM_{finale}$$

$$(L - L_0)^2 = \frac{m_2 m_1 v_{x1}^{\ 2}}{(m_2 + m_1) K}$$

per cui la distanza minima tra le masse è:

**?** L = 1.3cm

**b)** Ci si mette nel sistema di riferimento solidale al CM (CMx'y'):




Il CM vede avvicinarsi le due masse, fino a che nel momento di massima compressione queste si fermano.

In questo sistema di riferimento si ha in generale che:

$v_{cm\,1} = v_{x\,1} - v_{x\,CM}$ *velocità della massa 1 nel sistema del CM*

$v_{cm\,2} = v_{x\,2} - v_{x\,CM}$ *velocità della massa 2 nel sistema del CM*

P*er* $t \leq 0$ *la massa 2 è ferma per cui si ottiene:* $v_{cm\,2} = -v_{x\,CM}$

*L'energia meccanica per* $t \leq 0$ sarà data allora:

$$Em_{prima} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{cm\,1}^{\;2} + \tfrac{1}{2} m_2 v_{cm\,2}^{\;2}$$

*L'energia meccanica nell'istante di massima compressione*

$$Em_{finale} = \tfrac{1}{2} K \left(L - L_0\right)^2$$

dove L è la distanza minima.

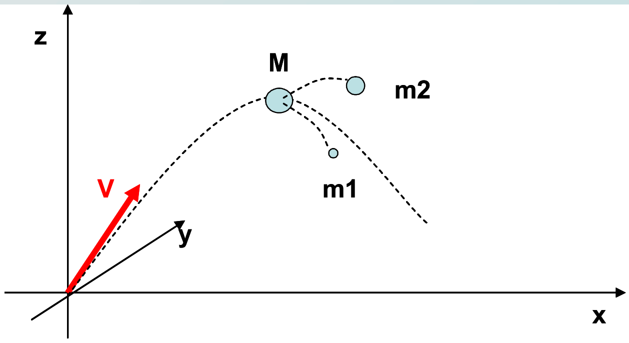
$$Em_{prima} = Em_{finale}$$

$$\left(L - L_0\right)^2 = \frac{m_2 m_1 v_{x\,1}^{\;2}}{\left(m_2 + m_1\right)K}$$ che è lo stesso risultato ottenuto nel punto a)

4. **Problema**

Un proiettile di massa $M=50\ kg$ viene lanciato dal punto di coordinate $x=y=z=0$, posto al livello del suolo, con velocità iniziale $\mathbf{v}=(200\ m/s)\mathbf{i}+(300\ m/s)\mathbf{k}$. Il proiettile è naturalmente sottoposto alla forza di gravità $\mathbf{f_g}=-M(9.8\ m/s^2)\mathbf{k}$. Quando il proiettile si trova al punto morto superiore, a causa di una carica posta al suo interno, si spezza in due frammenti. Uno dei due frammenti che ha massa $m_1=10kg$, tocca il suolo nel punto di coordinate $x=1.3\ 10^4\ m$, $y=-10^3 m$ Sapendo che i due frammenti toccano il suolo contemporaneamente e assumendo trascurabile l'attrito dell'aria si calcoli:

1. Il punto in cui il secondo frammento tocca il suolo;
2. L'energia cinetica totale impartita ai due frammenti dalla carica esplosiva;




**SOLUZIONE**

Dati del problema:

$v_{x0} = 200$ m/ s, $v_{z0} = 300$ m/s, $M = 50$kg, $g = 9.8\frac{m}{s^2}$, $m_1 = 10$kg, $m_2 = 40$kg

Per la risoluzione del problema si usano le proprietà del centro di massa.
$v_{x0}$ rappresenta la componente della velocità iniziale lungo x
$v_{y\,0}$ rappresenta la componente della velocità iniziale lungo y (che è nulla)
$v_{z0}$ rappresenta la componente della velocità iniziale lungo z
CM rappresenta il centro di massa del sistema

## Prima dell'esplosione:

Il sistema è un corpo unico e quindi coincide con CM.
Poichè è soggetto alla sola accelerazione di gravità (in questa fase), le componenti della velocità del CM lungo x e y e z, valgono:

$v_{CMx} = v_{xo}$ *non ci sono forze in questa direzione*

$v_{CMy} = 0$ non ci sono forze e la velocità iniziale é nulla lungo y

$v_{CMz} = v_{zo} - g\,t$ *(eq.1)* *per la presenza della forza di gravità*

La quantità di moto del sistema vale:
in forma vettoriale

$\overline{Q}_{CM} = M\,\overline{v}_{CM}$

## Durante l'esplosione:

Durante questa fase si conserva la quantità di moto totale e la velocità del CM del sistema è rimasta uguale.
Quando avviene l'esplosione il sistema si trova nel punto massimo della parabola, per cui la velocità del proiettile ha componente diversa da zero solo lungo x.

Si ricava la posizione a cui avviene l'esplosione:
Dall'(eq.1), si ricava l'istante (te) in cui si ha l'esplosione:

$t = te \qquad v_{CMz} = 0 \qquad te = \frac{v_{zo}}{g}$

$y_{CMe} = 0$

$x_{CMe} = v_{xo}\,te \qquad x_{CMe} = \frac{v_{xo}\,v_{zo}}{g}$

$z_{CMe} = v_{zo}\,t - \frac{g}{2}t^2 \qquad z_{CMe} = \frac{1}{2}\frac{v_{zo}^{\;2}}{g}$

## Dopo l'esplosione:

Lungo x e lungo y: non ci sono forze esterne, per cui le componenti della quantità di moto totale lungo queste direzioni ($Q_{CMx}$,$Q_{CMy}$) rimangono costanti:

la posizione del CM lungo x: $x_{CMf} - x_{CMe} = v_{xo}\left(t - te\right)$ *(eq.2)*

la posizione del CM lungo y: $y_{CMf} = 0$ *(eq.3)*

Lungo z: cade con accelerazione g, per cui la velocità del CM lungo questa direzione cambia con la legge seguente:

$v_{CMzf} = -g\left(t - te\right)$ *(eq.4)* da cui la posizione del CM lungo z: $z_{CMf} - z_{CMe} = -\frac{g(t-te)^2}{2}$ *(eq.5)*

Se toccano terra insieme, subito dopo l'esplosione le le loro velocità erano orizzontali.
Sono allo stesso istante sempre alla stessa altezza, di conseguenza lo è anche il CM:

$z_{CMf} = 0$ *nell'istante i cui tocca terra*

quindi dall'(eq.5):

$\frac{1}{2}(-2v_{zo} + g\,t)t = 0$

$t = 2\frac{v_{zo}}{g}$ istante i cui tocca terra il centro di massa (e quindi anche i frammenti)

Dall'equazione (eq.2) ricavo

$x_{CMf} = 2\frac{v_{xo}v_{zo}}{g}$ *posizione lungo x quando CM tocca terra*

Usando la definizione di CM e note la posizione finale della massa $m_1$, si ottiene la posizione finale della massa $m_2$, $xf_2$, $yf_2$:

$x_{CMf}(m_1 + m_2) = xf_1 m_1 + xf_2 m_2$ $\qquad xf_2 = \frac{2\frac{(m_2+m_1)v_{xo}v_{zo}}{g} - m_1 xf_1}{m_2}$

$y_{CMf}(m_1 + m_2) = yf_1 m_1 + yf_2 m_2$ $\qquad yf_2 = -\frac{m_1 yf_1}{m_2}$

In cifre: $xf_2 = 1.2\text{x}10^4 m$ $\quad yf_2 = 250m$

## 5. Problema

Due corpi puntiformi sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile completamente distesa (la distanza tra le particelle è pari alla lunghezza della fune L= 4.00m) e giacciono su un piano orizzontale privo di attrito. Le masse delle particelle sono rispettivamente $m_1$ =1.00 kg e $m_2$ =3.00 kg. Un impulso istantaneo $\vec{I}$, normale alla congiungente delle particelle e parallelo al piano, viene applicato alla particella 2.

Trovare la distanza dalla particella 1 del CM del sistema formato dalle due particelle un istante prima dell'applicazione dell'impulso.

$$d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}L = 3m$$

$$d_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}L = 1m$$

Sono rispettivamente le distanze del CM da $m_1$ e da $m_2$.

Trovare la velocità del CM del sistema dopo l'applicazione dell'impulso.

L'applicazione dell'impulso corrisponde all'applicazione per un breve istante di tempo di una forza esterna molto intensa che, come si deduce dall'equazione del moto del CM, cambia la quantità di moto del CM e si ottiene la seguente (non ci sono altre forze esterne impulsive, anche se c'è il piano orizzontale la sua reazione impulsiva non viene sollecitata perché l'impulso applicato e parallelo ad esso):

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{I}}{m_1 + m_2}$$

Trovare la legge oraria del CM dopo l'applicazione dell'impulso.

Dopo l'applicazione dell'impulso il sistema non è sottosposto ad forze esterne non bilanciate (la forza peso è bilanciata dal piano e il piano è liscio) e quindi si muoverà di moto rettilineo uniforme.

Per rispondere a questa domanda occorre definire un sistema di riferimento e poi scrivere la legge oraria rispetto ad esso (ve lo lascio da fare)

Trovare le velocità delle due particelle un istante dopo l'applicazione dell'impulso.

L'impulso è stato applicato ortogonalmente al filo la cui reazione quindi non è stata sollecitata (il filo può solo rispondere ad una forza che tende a metterlo in tensione, può solo "tirare"). La particella $m_2$ subisce in quell'istante solo l'impulso $\vec{I}$. Quindi la sua velocità (rispetto al piano ) nell'istante immediatamente successivo sarà:

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{I}}{m_2}$$

La particella $m_1$ invece non subisce alcun impulso (il filo non è stato sollecitato) e quindi la sua velocità rispetto al piano nell'istante immediatamente successivo è pari a zero. Verifica che la velocità del CM è allora quella trovata nel secondo punto.