Appunti per il corso di Fisica Generale 3: Esercizi di Elettrodinamica

July 3, 2021

Disclaimer

Queste note servono come base per le lezioni online del corso di Fisica Generale 3, per la parte di esercizi di elettrodinamica. Ci sono molteplici ottimi libri di testo che trattano di elettrodinamica a diversi livelli. Per queste lezioni mi sono basato su materiale attinto da:

- "Introduction to Electrodynamics", D.J. Griffiths
- "Classical Electrodynamics", J.D.Jackson

con una prevalenza del primo sul secondo (anche in termini di convenzioni). Quanto segue va inteso come una traccia per lo studio individuale. Gli studenti sono incoraggiati ad integrare questo materiale con la lettura dei testi originario e di altri testi che trattano lo stesso argomento. Questa è ancora una bozza in fase di stesura e di sviluppo durante il corso. Si prega di farne un utilizzo personale e di non diffonderla.

Albino Perego

Contents

Chapter 1

Esercizi di Elettrodinamica

1.1 Energia e momenti del campo elettromagnetico

1.1.1 Un modello classico per l'elettrone

Premessa Secondo la fisica delle particelle elementari, gli elettroni sono particelle puntiformi, dotate di massa m_e, carica elettrica e e componente z del momento angolare intrinseco $s_z = \hbar/2$ finiti ($h \approx 6.624 \times 10^{34}$J s^{-1} è la costante di Planck e $\hbar = h/(2\pi)$). Il loro comportamento e la loro descrizione richiedono l'utilizzo della meccanica quantistica e, ad alte velocità della relatività ristretta. Non sono mancati, tuttavia, modelli classici nei quali si sono cercate di applicare le leggi della meccanica e dell'elettrodinamica classiche anche alle particelle elementari. In genere, questi modelli falliscono in qualche aspetto. In questo esercizio indagheremo uno di questi modelli per l'elettrone semplicemente come scusa per calcolare l'energia e il momento angolare associabili ad un campo elettromagnetico.

Testo Si modelli un elettrone come un guscio sferico rotante uniformemente carico, di carica totale e, raggio R e velocità di rotazione ω (sia $\hat{\mathbf{z}}$ l'asse di rotazione).

- si ricordi l'espressione del campo elettrico dentro e fuori dal guscio. Dal momento che il guscio ruota, c'è anche un campo magnetico. La sua espressione è data da un calcolo non banale e ve la riporto per semplicità:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0 \sigma R \omega \hat{\mathbf{z}} & r \leq R \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \left(2\cos\theta \hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) & r > R \end{cases}$$

  dove $\sigma = e/(4\pi R^2)$ e $m = (4/3)\pi\sigma\omega R^4$, e dove $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ sono la terna destrorsa di vettori unitari associati a coordinate sferiche prese rispetto ad un sistema di riferimento centrato nel centro della sfera;

- si calcoli l'energia totale del campo elettromagnetico associato, U_{em};
- si calcoli il momento angolare contenuto nel campo, $\mathbf{L}_{\text{em}}$;
- si determinino R e ω assumendo che 1) la massa dell'elettrone sia totalmente dovuta all'energia del campo elettromagnetico generato dalla carica, cioé $U_{\text{em}} = m_e c^2$; 2) che lo spin dell'elettrone sia interamente dovuto al momento angolare del campo elettromagnetico, $s_z = L_{\text{em},z}$.
- Si calcoli la velocità di rotazione equatoriale e si commenti il risultato ottenuto.

Soluzione Assumiamo di considerare un sistema di riferimento centrato nel centro del guscio sferico. Per la legge di Gauss, il campo elettrico di un guscio sferico carico è nullo all'interno del guscio ed equivalente a quello di una carica puntiforme fuori, cioè è dato da:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{0} & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases} \tag{1.1}$$

Dal momento che il guscio ruota, ci sarà anche un campo magnetico e la sua espressione è data nel testo dell'esercizio:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0 \sigma R \omega \hat{\mathbf{z}} & r \le R \\ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) & r > R \end{cases}$$

dove $\sigma = e/(4\pi R^2)$ e $m = (4/3)\pi\sigma\omega R^4$. La densità di energia del campo elettromagnetico è data da:

$$u_{\rm em} = \frac{1}{2}\epsilon_0|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2$$

e l'energia del campo si ottiene integrando su tutto lo spazio:

$$U_{\rm em} = \int_{\mathbb{R}^3} u_{\rm em} \mathrm{d}^3 x\,.$$

Le espressioni dei campi suggeriscono di utilizzare coordinate sferiche. Distinguendo tra campo elettrico e magnetico, e tra dentro e fuori il guscio si trova

$$\begin{aligned} U_{\rm E,in} &= 0 \\ U_{\rm E,out} &= \int_R^\infty \int_\Omega \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{e^2}{r^4}\, r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\rm B,in} &= \int_0^R \int_\Omega \frac{1}{2\mu_0}\,\frac{4}{9}\,\mu_0^2\sigma^2R^2\omega^2\; r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R}{54\pi} \\ U_{\rm B,out} &= \int_R^\infty \int_\Omega \frac{1}{2\mu_0}\,\frac{\mu_0^2}{16\pi^2}\frac{m^2}{r^6}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\; r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = \\ & \frac{\mu_0}{32\pi^2}m^2\int_R^\infty \mathrm{d}r\frac{1}{r^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\;\left(3\cos^2\theta+1\right) = \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R}{108\pi} \end{aligned}$$

Quindi, si ottiene:

$$U_{\rm em} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{\mu_0 e^2\omega^2 R}{36\pi} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}\left(1 + \frac{2}{9}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\right)\,.$$

In maniera del tutto analoga, il momento angolare nel campo elettromagnetico è dato da

$$\mathbf{L}_{\rm em} = \int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^2 \int_\Omega \mathrm{d}\Omega\,(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\rm em})$$

dove la densità di momento lineare del campo è data da $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\rm em} = \epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$. Quindi, dentro al guscio $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\rm em,in} = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{L}_{\rm em,in} = \mathbf{0}$. Fuori dal guscio, tenendo conto che $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{r}} = 0$ mentre $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$, otteniamo

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\rm em,out} = \frac{\mu_0}{16\pi^2}\frac{m\;e\;\sin\theta}{r^5}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

da cui, tenendo ancora conto che $\mathbf{r}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = -r\hat{\boldsymbol{\theta}}$, si ottiene:

$$\mathbf{L}_{\rm em,out} = -\frac{\mu_0\;m\;e}{16\pi^2}\int_R^\infty\int_\Omega \frac{\sin\theta}{r^4}\hat{\boldsymbol{\theta}}\; r^2\;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\Omega = -\frac{\mu_0\;m\;e}{16\pi^2}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\;\mathrm{d}r\;\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\;\sin\theta\;\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Per r e ϕ fissati, il versore $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ è il versore tangente il meridiano che punta da nord a sud. Per simmetria, integrando su tutta la sfera sopravvive solo la componente lungo z: $-\sin\theta\;\hat{\mathbf{z}}$. Formalmente,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\hat{\mathbf{z}}$$

e l'integrale su θ dei primi due termini si annulla. Quindi,

$$\mathbf{L}_{\rm em,out} = \frac{\mu_0\;m\;e}{16\pi^2}\frac{1}{R}\;(2\pi)\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\;\sin^3\theta\;\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\mu_0\;m\;e}{8\pi\;R}\frac{4}{3}\;\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\mu_0\;m\;e}{6\pi\;R}\;\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\mu_0 e^2\omega R}{18\pi}\;\hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

Uguagliando il modulo dello spin lungo z al momento angolare del campo otteniamo:

$$\frac{\mu_0 e^2 \omega R}{18\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega R = \frac{9\pi\hbar}{\mu_0 e^2} \approx 9.23 \times 10^{10} \text{ m s}^{-1} \approx 300\ c$$

Per la massa dell'elettrone,

$$m_e c^2 = U_{\text{em}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\ m_e c^2}\left(1 + \frac{2}{9}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\right) \approx 2.95 \times 10^{-11}\text{m}$$

da cui si ricava infine

$$\omega = \frac{\omega R}{R} \approx 3.13 \times 10^{21}\text{rad s}^{-1}$$

Il prodotto ωR è la velocità lineare all'equatore. Dal momento che $\gg c$, è chiaro che il modello non è consistente con la relatività speciale.

1.2 Onde e radiazione Elettromagnetiche

1.2.1 Luce dall'interno di un acquario

Testo Un faretto di luce monocromatica (con frequenza angolare ω) e linearmente polarizzata è posto all'interno di un acquario e irradia verso l'esterno (cioè nell'aria) attraverso un sottile strato di vetro di spessore d. Si calcoli il coefficiente di trasmissione complessivo T tra l'acqua e l'aria nel caso di luce che incida perpendicolarmente sul vetro. Si assuma che i tre mezzi coinvolti (acqua, vetro ed aria) siano in buona approssimazione mezzi lineari e omogenei; per essi si assuma $\mu_{\text{acqua}} = \mu_{\text{vetro}} = \mu_{\text{aria}} \approx \mu_0$.

Si valuti il massimo e il minimo coefficiente di trasmissione assumendo che le velocità nei tre mezzi siano $v_{\text{acqua}} = c/n_{\text{acqua}}$ con $n_{\text{acqua}} = 4/3$, $v_{\text{vetro}} = c/n_{\text{vetro}}$ con $n_{\text{vetro}} = 3/2$ e $v_{\text{aria}} = c/n_{\text{aria}}$ con $n_{\text{aria}} \approx 1$. Si discuta il risultato in termini di d e ω. Sotto quali condizioni possiamo vedere i pesci nell'acqua? E loro noi?

Soluzione Assumiamo che la luce viaggi nel verso positivo dell' asse z. Assumiamo poi che l'estremità sinistra del vetro sia posta a $z = 0$ mentre quella destra a $z = d$. Indichiamo le tre regioni di spazio con 1 ($z < 0$), 2 ($0 < z < d$) e 3 ($z > d$). Nella regione di spazio $z < 0$ è presente un'onda incidente, che possiamo descrivere in termini del suo campo elettrico $\mathbf{E}_I$ che oscilla in direzione x, e un'onda riflessa che si forma all'interfaccia tra l'acqua e il vetro, $\mathbf{E}_R$. Complessivamente, nella zona 1 si ha: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R$. Nella regione $0 < z < d$, per effetto delle due superfici di separazione, ci sono due onde, una che viaggia verso destra ($\mathbf{E}_r$) e una che viaggia verso sinistra ($\mathbf{E}_l$) tali per cui $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_l$. Infine, nella regione $z > d$ c'è un'onda trasmessa $\mathbf{E}_T$, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_T$. L'intensità di radiazione per un'onda piana monocromatica il cui campo elettrico ha ampiezza E_0 è:

$$I = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2\,.$$

Il coefficiente di trasmissione globale del problema è dato da

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_3 v_3}{\epsilon_1 v_1}\left(\frac{E_T}{E_I}\right)^2$$

Rimane quindi da esprimere E_T in funzione di E_I e degli altri parametri del problema. Per far questo scriviamo le quattro onde in forma complessa. Per $z < 0$,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I = E_I e^{i(k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}_R = E_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{B}_I = \frac{1}{v_1} E_I e^{i(k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{B}_R = -\frac{1}{v_1} E_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}} \end{cases} \tag{1.2}$$

Per $0 < z < d$,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_r = E_r e^{i(k_2 z - \omega t)}\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}_l = E_l e^{i(-k_2 z - \omega t)}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{B}_r = \frac{1}{v_2} E_r e^{i(k_2 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{B}_l = -\frac{1}{v_2} E_l e^{i(-k_2 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}} \end{cases} \tag{1.3}$$

Infine per $z > d$,

$$\mathbf{E}_T = E_T e^{i(k_3 z - \omega t)}\hat{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{B}_T = \frac{1}{v_3} B_T e^{i(k_3 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}} \tag{1.4}$$

Ora dobbiamo imporre le condizioni al contorno sulle interfacce. In generale, le condizioni all'interfaccia per due mezzi omogenei e lineari 1 e 2 diventano

$$\begin{cases} \epsilon_1 E_{1,\perp} - \epsilon_2 E_{2,\perp} = 0 \\ B_{1,\perp} - B_{2,\perp} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{E}_{1,\parallel} - \mathbf{E}_{2,\parallel} = 0 \\ \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{1,\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_{2,\parallel} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Per un'onda incidente perpendicolarmente, le condizioni sulle parti perpendicolari sono banalmente verificate. Per le parti parallele, assumendo l'ipotesi sulle μ,

$$\begin{cases} E_{1,\parallel}(0,t) - E_{2,\parallel}(0,t) = 0 \\ B_{1,\parallel}(0,t) - B_{2,\parallel}(0,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{2,\parallel}(d,t) - E_{3,\parallel}(d,t) = 0 \\ B_{2,\parallel}(d,t) - B_{3,\parallel}(d,t) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

che nel nostro caso diventano ($z = 0$ sinistra, $z = d$ destra):

$$\begin{cases} E_I + E_R = E_r + E_l \\ \frac{1}{v_1}E_I - \frac{1}{v_1}E_R = \frac{1}{v_2}E_r - \frac{1}{v_2}E_l \end{cases} \qquad \begin{cases} E_r e^{ik_2 d} + E_l e^{-ik_2 d} = E_T e^{ik_3 d} \\ \frac{1}{v_2}E_r e^{ik_2 d} - \frac{1}{v_2}E_l e^{-ik_2 d} = \frac{1}{v_3}E_T e^{ik_3 d} \end{cases} \tag{1.7}$$

Sommando le prime due equazioni si trova:

$$2E_I = E_r\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) + E_l\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)$$

mentre dalla somma e dalle differenza delle ultime due si ha:

$$E_r = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_3}{n_2}\right)E_T e^{ik_3 d}e^{-ik_2 d} \qquad E_l = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_3}{n_2}\right)E_T e^{ik_3 d}e^{ik_2 d}$$

che sostituite nella prima danno:

$$2E_I = E_T e^{ik_3 d}\left(\cos(k_2 d)\left(1 + \frac{n_3}{n_2}\frac{n_2}{n_1}\right) - i\sin(k_2 d)\left(\frac{n_3}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right)\right)$$

A questo punto possiamo calcolare T. Per convenienza, calcoliamo $1/T$:

$$\frac{1}{T} = \frac{\epsilon_1 v_1}{\epsilon_3 v_3}\left(\frac{|E_I|^2}{|E_T|^2}\right) = \tag{1.8}$$

$$\frac{n_1}{4n_3}\left(\left(\frac{n_1 n_2 + n_2 n_3}{n_1 n_2}\right)^2 - \sin^2(k_2 d)\frac{(n_3^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_1^2 n_2^2}\right) = \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{4n_1 n_3}\left((n_1 + n_3)^2 - \sin^2\left(\frac{\omega n_2 d}{c}\right)\frac{(n_3^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_2^2}\right) \tag{1.10}$$

Valutando l'espressione per $n_1 = 4/3$, $n_2 = 3/2$ e $n_3 = 1$, si ha

$$T = \frac{48}{49 + \left(\frac{85}{36}\sin^2\left(\frac{3\omega d}{2c}\right)\right)}.$$

Osserviamo che tutta la dipendenza da d e ω è contenuta nel termine $\sin^2$. Tuttavia, $0 \le \sin^2\left(\frac{3\omega d}{2c}\right) \le 1$, per cui

$$T_{\min} \approx 0.9346 \qquad T_{\max} \approx 0.9795$$

Quindi, indipendentemente da d e ω la trasmissione è molto buona. Dal momento che l'espressione trovata è simmetrica nello scambio tra n_1 e n_3, se noi vediamo bene i pesci anche loro possono vedere bene noi.

1.2.2 Vele solari

Premessa Le onde elettromagnetiche trasportano energia e impulso. Una delle immediate conseguenze di questo semplice fatto è che la radiazione incidente su una superficie esercita una pressione sulla superficie stessa. Questo effetto può essere utilizzato come sistema di propulsione per satelliti nello spazio. Infatti, un oggetto sufficientemente poco massivo ed esteso (come una vela) può ricevere una spinta sufficiente a muovere il satellite nello spazio. Il satellite giapponese IKAROS ha raggiunto Venere grazie a questo sistema di propulsione e molti altri progetti sono pianificati per gli anni a venire.

Testo Un satellite a forma di vela (cioè formato da una lastra piana di densità superficiale di materia σ e di superficie Σ) è inviato nello spazio dalla Terra in direzione approssimativamente opposta a quella del sole. Per sfuggire alla gravità terrestre, il satellite è inizialmente spinto da razzi, che si spengono ad un certo punto. Si studi sotto quali condizioni il satellite potrà viaggiare verso i confini esterni del sistema solare e si stimi la distanza a cui i razzi possono essere spenti. Si consideri una vela ideale, sottilissima, ma rigida, rivolta verso il sole e perfettamente riflettente. Come cambia il problema per una vela ideale perfettamente assorbente (in quest'ultimo caso, si trascuri il problema della dissipazione dell'energia assorbita)? Per semplicità, si assuma che il satellite stia sempre, in buona approssimazione, sulla congiungente Terra-Sole e si verifichi a posteriori la bontà di questa approssimazione.

Domanda bonus: nella missione IKAROS, il satellite ha raggiunto Venere che è un pianata più interno rispetto alla Terra. Come è possibile raggiungere pianeti più interni solo sfruttando la pressione di radiazione?

Per il sole, si assuma una massa di 2×10^{30}kg e che la radiazione elettromagnetica totale emessa per unità di tempo (quindi, la sua luminosità) sia $L_\odot = 3.828 \times 10^{28}$Watts. Inoltre, la distanza Terra-sole sia 1.5×10^{11}m e la massa della Terra sia 6×10^{24}kg.

Soluzione Trascurando per semplicità la presenza degli altri pianeti, le forze agenti sulla vela saranno:

- l'attrazione gravitazionale terrestre;
- l'attrazione gravitazionale solare;
- la spinta derivante dalla radiazione solare.

Se consideriamo un sistema di riferimento centrato nel sole, il satellite di massa $m = \sigma\Sigma$ sarà soggetto ad un accelerazione $\mathbf{a}$ tale che:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{Terra}} + \mathbf{F}_{\text{sole}} + \mathbf{F}_{\text{radiazione}}$$

Dal momento che la vela è in buona approssimazione sulla congiungente tra la Terra e il sole, se d denota la distanza dalla Terra, nella configurazione data si ha che

$$\mathbf{F}_{\text{Terra}} = -G\frac{M_{\text{Terra}}m}{d^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{F}_{\text{sole}} = -G\frac{M_{\text{sole}}m}{(d+R)^2}\hat{\mathbf{r}}$$

mentre per la radiazione:

$$\mathbf{F}_{\text{radiazione}} \approx P_{\text{rad}}\Sigma\ \hat{\mathbf{r}} = P_{\text{rad}}\frac{m}{\sigma}\ \hat{\mathbf{r}}$$

A lezione si è visto che, per una superficie ideale riflettente, la pressione è data da

$$P_{\text{rad}} = \frac{2I_{\text{rad}}}{c}$$

dove I_{rad} è l'intensità della radiazione, cioè l'energia che fluisce per unità di tempo e di superficie attraverso una superficie ortogonale alla direzione di propagazione. Nel nostro caso, dal momento che la vela è in buona approssimazione sulla congiungente tra la Terra e il sole, e il sole emette in maniera isotropa:

$$I_{\text{rad}} \approx \frac{L_{\text{sole}}}{4\pi(R+d)^2}$$

In prossimità della Terra, la gravità è dominata dalla Terra, mentre da una certa distanza in poi dal sole. Determiniamo questa distanza di transizione d_{trans}: uguagliando le accelerazioni sulla congiungente Terra-sole per distanze radiali d, si ha

$$d_{\text{trans}} = R\left(\sqrt{\frac{M_{\text{sole}}}{M_{\text{Terra}}}} - 1\right)^{-1} \approx R\left(\sqrt{\frac{M_{\text{Terra}}}{M_{\text{sole}}}}\right) \approx 1.74 \times 10^{-3}R \approx 260.258 \times 10^3\text{km}$$

Mettiamoci nella condizione $d \gg d_{\text{trans}}$. Affinchè il satellite possa viaggiare verso le zone esterne del sistema solare deve avere un'accelerazione centrifuga netta:

$$G\frac{M_{\text{sole}}m}{(d+R)^2} < \frac{m}{\sigma}\frac{L_{\text{sole}}}{2\pi(R+d)^2c}$$

Dal momento che la radiazione e la gravità scalano allo stesso modo con la distanza, questa relazione diventa una condizione sulla densità superficiale del materiale:

$$\sigma < \sigma_{\text{lim}} = \frac{L_{\text{sole}}}{2\pi G M_{\text{Sole}} c} \approx 1.52 \times 10^{-1} \text{kg m}^{-2}$$

A questo punto, noto il valore limite di σ, possiamo calcolare, se esiste, la distanza d_{off} a cui i razzi possono essere spenti perché la radiazione dia un'accelerazione sufficiente per scappare alla gravità terrestre. Assumendo $\sigma < \sigma_{\text{lim}}$ in maniera significativa (cioè non che σ differisce da σ_{lim} per una parte su un millesimo o meno),

$$\frac{1}{d_{\text{lim}}} = \frac{1}{R}\left(\sqrt{\frac{M_{\text{Sole}}}{M_{\text{Terra}}}\left(\frac{\sigma_{\text{lim}}}{\sigma} - 1\right)} - 1\right) \approx \frac{1}{R}\left(\sqrt{\frac{M_{\text{Sole}}}{M_{\text{Terra}}}\frac{\sigma_{\text{lim}}}{\sigma}}\right) \approx \frac{1}{d_{\text{trans}}}\sqrt{\frac{\sigma_{\text{lim}}}{\sigma}}$$

da cui

$$d_{\text{off}} \approx d_{\text{trans}}\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_{\text{lim}}}} \approx 0.81\ d_{\text{trans}}\left(\frac{\sigma}{10^{-1}\ \text{kg m}^{-2}}\right)^{-1/2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è ancora assunto che σ sia significativamente più piccola di σ_{lim}.

Nel caso di uno specchio assorbente, $P_{\text{rad}} = I/c$ e σ_{lim} è un fattore 2 più piccola. Per i materiali più moderni utilizzati per le vele solari, $\sigma \sim 10^{-3}\text{kgm}^{-2}$.

Quando il satellite lascia la Terra possiede una componente della velocità tangenziale all'orbita terrestre. Andando verso l'esterno dell'orbita, questa velocità (su cui non agisce accelerazione) rimane costante, ma inferiore alla velocità necessaria per rimanere allineati con la congiungente tra la Terra e il Sole. Quindi, il satellite tende ad uscire dall'allineamento. Tuttavia, visto che $d_{\text{trans}} \ll R$, la deviazione è relativamente piccola nella prima parte del viaggio, dove la gravità terrestre è importante. Per distanze maggiori,la gravità terrestre diventa via via ininfluente.

1.2.3 Onde monocromatiche polarizzate circolarmente e onde monocrometiche sferiche

Premessa A lezione tutti i calcoli relativi alle onde elettromagnetiche sono stati svolti usando onde piane monocromatiche polarizzate linearmente. Per esempio, l'espressione per un onda piana monocromatica che si propaga in direzione $\hat{\mathbf{k}}$ con vettore d'onda $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ è in genere espressa come

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)\hat{\mathbf{n}}\,.$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore della direzione in cui oscilla il campo elettrico ed è tale che $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$. Il campo magnetico associato è:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\right)$$

Questo esercizio si prefigge di ampliare la casistica ad onde piane monocromatico polatizzate circolarmente e onde sferiche monocromatiche.

Testo **Parte 1**: Per fissare le idee, consideriamo un'onda piana monocromatica che si propaga nella direzione z, cioè $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$.

1. Si dimostri che un'onda piana che si propaga lungo z e con il campo $\mathbf{E}$ che oscilla in direzione generica $\hat{\mathbf{n}}$ può essere sempre vista come la combinazione lineare di due onde piane che si muovono lungo z, con campi che oscillano lungo x e y e con ampiezze in linea di principio diverse nelle due direzioni.

2. Si dimostri poi che l'espressione in notazione complessa delle onde piane:

   $$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}\hat{\mathbf{n}}$$

   con $\tilde{E}_0$ numero complesso soddisfa le equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di sorgenti. Si trovino poi le condizioni sotto le quali questa espressione complessa si riconduce alla notazione reale scritta nella premessa. In particolare, si definisca $\tilde{E}_0 = |\tilde{E}_0|e^{i\delta}$, dove δ è definita come la fase.

3. Si consideri adesso la combinazione di due onde piane polarizzate linearmente, una lungo x e l'altra lungo y, con due fasi δ_x e δ_y diverse tra loro. Si dimostri che si tratta ancora di una soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto.

Un'onda piana monocromatica polarizzata circolarmente si ottiene dalla combinazione di due onde piane monocromatiche polarizzate linearmente, una lungo l'asse x l'altra y, con la stessa ampiezza, ma tali che $\delta_x = \delta$ e $\delta_y = \delta + \pi/2$.

4. Si dimostri che nel caso di un'onda polarizzata circolarmente, preso un piano a z fissato, il vettore $\mathbf{E}$ si muove di moto circolare uniforme nel tempo. In quale verso avviene la rotazione? Come si può avere un'onda che ruota in direzione opposta? Cosa accade se anche le ampiezze massime lungo x e y sono diverse?

Parte 2: Per un'onda sferica monocromatica, il campo elettrico ha invece un'espressione del tipo:

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi,t) = A\frac{\sin\theta}{r}\left(\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\,.$$

5. Si dimostri che questa espressione di $\mathbf{E}$ soddisfa le equazioni di Maxwell nel vuoto e in assenza di sorgenti, e si trovi il campo magnetico associato;

6. si calcoli il vettore di Poynting e la sua media temporale su un periodo per ottenere il vettore intensità $\mathbf{I}$. Infine, si integri il prodotto scalare di questa espressione su una sfera di raggio r per trovare la potenza irradiata.

Soluzione **Parte 1**:

1. Se $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$, allora $\hat{\mathbf{n}}$ si può scomporre lungo le direzioni x e y secondo un angolo θ:

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\ \hat{\mathbf{y}}\,.$$

e si ha che

$$\mathbf{E} = E_0\cos\theta\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} - \omega t)\hat{\mathbf{x}} + E_0\sin\theta\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}-\omega t)\hat{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y\,.$$

da cui si vede esplicitamente che un'onda piana polarizzata linearmente può essere pensata come la combinazione di due onde piane polarizzate linearmente, di diverse ampiezza, i cui campi elettrici oscillano lungo x e y.

2. Passando all'espressione in notazione complessa è facile dimostrare che

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} = -|\mathbf{k}|^2\tilde{\mathbf{E}} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\mathbf{E}} = -\omega^2\tilde{\mathbf{E}}$$

Quindi, se $c^2|\mathbf{k}|^2 = \omega^2$ le equazioni di Maxwell nel vuoto sono verificate per $\tilde{\mathbf{E}}$.

Nel caso di un'onda piana polarizzata linearmente in forma complessa, il fatto che il campo elettrico sia una quantità reale deve essere imposto alla soluzione complessa prendendone la parte reale:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \Re\Big(\tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\hat{\mathbf{n}}\Big) = |\tilde{E}_0|\ \Re\Big(e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t+\delta)}\Big)\hat{\mathbf{n}} = |\tilde{E}_0|\cos(kz-\omega t+\delta)\hat{\mathbf{n}}$$

Questa espressione coincide con quella di partenza puramente reale se:

$$|\tilde{E}_0| = E_0 \qquad \text{e} \qquad \delta = 0$$

3. L'espressione precedente può anche essere riscritta come:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = E_0\cos\theta\cos(kz-\omega t+\delta)\hat{\mathbf{x}} + E_0\sin\theta\cos(kz-\omega t+\delta)\hat{\mathbf{y}}$$

Supponiamo di generalizzarla a due fasi diverse:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = E_0\cos\theta\cos(kz-\omega t+\delta_x)\hat{\mathbf{x}} + E_0\sin\theta\cos(kz-\omega t+\delta_y)\hat{\mathbf{y}}$$

che può essere pensata come

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \Re\Big(\tilde{E}_{0,x} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\mathbf{x}\Big) + \Re\Big(\tilde{E}_{0,y} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\mathbf{y}\Big)$$

dove:

$$\tilde{E}_{0,x} = E_0 \cos\theta e^{i\delta_x} \qquad \tilde{E}_{0,y} = E_0 \sin\theta e^{i\delta_y} \,.$$

Dal momento che ciascuno dei due termini soddisfa le equazioni di Maxwell e queste equazioni sono lineari nei campi, anche la loro somma soddisfa le equazioni di Maxwell nel vuoto.

4. Il passaggio alla polarizzazione circolare si trova assumendo $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (in modo da avere la stessa ampiezza) e assumendo $\delta = 0$ (sempre possibile assumendo di poter cambiare l'origine dei tempi):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(kz-\omega t)\hat{\mathbf{x}} + E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(kz-\omega t+\pi/2)\hat{\mathbf{y}}$$

che si semplifica in

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(kz-\omega t)\hat{\mathbf{x}} - E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(kz-\omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

Senza perdere in generalità studiamo cosa accade sul piano $z = 0$ (cioè per $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = 0$):

$$\mathbf{E}(z=0,t) = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(-\omega t)\hat{\mathbf{x}} - E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(-\omega t)\hat{\mathbf{y}} = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}} + E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

Se consideriamo le espressioni delle due componenti (E_x e E_y) in funzione del tempo in un piano (E_x, E_y), queste sono le espressioni di un moto circolare uniforme con pulsazione ω. Il vettore ruota in modo antiorario secondo la usuale convenzione degli angoli. Il termine polarizzazione circolare dipende dal fatto che ad ogni istante:

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

Per avere un'onda circolare con vettore $\mathbf{E}$ che ruoti in verso orario basta prendere $\delta_y = \delta_x - \pi/2$.

Se, invece, $\delta_y = \delta_x + \pi/2$, ma le intensità sui due assi sono diverse, allora esiste sempre un angolo θ tale che:

$$\theta = \arctan\frac{E_{0,y}}{E_{0,x}}\,,$$

per il quale:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = E_0\cos\theta\cos(kz-\omega t)\hat{\mathbf{x}} - E_0\sin\theta\sin(kz-\omega t)\hat{\mathbf{y}}\,.$$

Questa volta le componenti soddisfano la condizione

$$\frac{E_x^2}{E_0^2\cos^2\theta} + \frac{E_y^2}{E_0^2\sin^2\theta} = 1$$

cioè, E_x e E_y descrivono nel tempo un'ellisse su un qualsiasi piano a z costante. Questa polarizzazione è infatti detta ellittica.

Parte 2 Passandop alle onde sferiche, questo esercizio è utile per rivedere/introdurre gli operatori differenziali in coordinate sferiche. Se $\mathbf{A}(r,\theta,\phi) = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$, allora

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi$$

e

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\mathbf{r}} + &(1.11)\\ &\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} &(1.12)\end{aligned}$$

Notiamo subito che $\mathbf{E} = E_\phi(r,\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}$, per cui le espressioni precedenti si semplificano in

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}E_\phi = 0$$

(e la legge di Gauss è dunque verificata) e

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\phi)\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tag{1.13}$$

$$\frac{2A\cos\theta}{r^2}\left(\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right)\hat{\mathbf{r}} - \tag{1.14}$$

$$\frac{A\sin\theta}{r}\left(\left(\frac{1}{kr^2}-k\right)\sin(kr-\omega t) - \frac{1}{r}\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.15}$$

Per la legge di Faraday, si dovrebbe avere:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Dal momento che non possediamo l'espressione per $\mathbf{B}$, non possiamo verificare questa equazione, ma possiamo calcolare $\mathbf{B}$ tale che l'equazione sia verificata. Calcolando la primitiva rispetto al tempo si ha

$$\mathbf{B} = \frac{2A\cos\theta}{r^2\omega}\left(\sin(kr-\omega t) + \frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\mathbf{r}} + \tag{1.16}$$

$$\frac{A\sin\theta}{\omega r}\left(\left(\frac{1}{kr^2}-k\right)\cos(kr-\omega t) + \frac{1}{r}\sin(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.17}$$

Rimane da verificare che, dati questi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, le altre due equazioni di Maxwell sono verificate. Per la divergenza di $\mathbf{B} = B_r\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ si ha che:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\theta) = \tag{1.18}$$

$$\frac{2A\cos\theta}{\omega r^2}\left(\left(k - \frac{1}{kr^2}\right)\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{r}\sin(kr-\omega t)\right) + \tag{1.19}$$

$$\frac{2A\cos\theta}{r^2\omega}\left(\left(\frac{1}{kr^2}-k\right)\cos(kr-\omega t) + \frac{1}{r}\sin(kr-\omega t)\right) = 0 \tag{1.20}$$

Infine, per la legge di Ampere-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} = \tag{1.21}$$

$$\frac{A\sin\theta}{\omega r^2}\left(-\frac{2}{kr^2}\cos(kr-\omega t) - \frac{2}{r}\sin(kr-\omega t) + k^2 r\ \sin(kr-\omega t) + k\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$+\frac{A\sin\theta}{\omega r^2}\left(\frac{2}{r}\sin(kr-\omega t) + \frac{2}{kr^2}\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} =$$

$$\frac{k}{\omega}\frac{A\sin\theta}{r}\left(k\ \sin(kr-\omega t) + \frac{1}{r}\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} =$$

$$\frac{1}{c}\frac{A\sin\theta}{r}\left(k\ \sin(kr-\omega t) + \frac{1}{r}\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

mentre

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{A\sin\theta}{r}\left(\omega\sin(kr-\omega t) + \frac{\omega}{kr}\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\frac{1}{c}\frac{A\sin\theta}{r}\left(k\sin(kr-\omega t) + \frac{1}{r}\cos(kr-\omega t)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

da cui è immediato verificare che

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Per il vettore di Poynting,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}E_\phi B_r\ \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{\mu_0}E_\phi B_\theta\ \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{E_\phi B_r}{\mu_0}\ \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{E_\phi B_\theta}{\mu_0}\ \hat{\boldsymbol{r}}$$

Svolgendo il prodotto delle componenti si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} \;=\; & \frac{A^2 \sin\theta}{\mu_0 \omega r^2} \left\{ \frac{2\cos\theta}{r} \left[\left(1 - \frac{1}{k^2 r^2}\right) \cos(kr-\omega t)\sin(kr-\omega t) + \frac{1}{kr}\left(\cos^2(kr-\omega t) - \sin^2(kr-\omega t)\right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \right. \\ & \left. \sin\theta \left[\left(-\frac{2}{r} + \frac{1}{k^2 r^3}\right) \cos(kr-\omega t)\sin(kr-\omega t) + \left(k - \frac{1}{kr^2}\right)\cos^2(kr-\omega t) + \frac{1}{kr^2}\sin^2(kr-\omega t) \right] \hat{\boldsymbol{r}} \right\}\end{aligned}$$

A questo punto è possibile calcolare il vettore intensità, come vettore medio su un periodo:

$$\mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} \mathbf{S}\ \mathrm{d}t'$$

Ricordando che

$$\int_t^{t+2\pi/\omega} \cos(kr-\omega t')\sin(kr-\omega t')\ \mathrm{d}t' = 0$$

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+2\pi/\omega} \cos^2(kr-\omega t')\ \mathrm{d}t' = \frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+2\pi/\omega} \sin^2(kr-\omega t')\ \mathrm{d}t' = 1/2$$

si ha infine

$$\mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{A^2 \sin^2\theta}{2\mu_0 r^2} \frac{k}{\omega}\ \hat{\boldsymbol{r}} = \frac{A^2 \sin^2\theta}{2\mu_0\ c\ r^2}\ \hat{\boldsymbol{r}}$$

Si vede quindi che il vettore intensità di radiazione, pur avendo istantaneamente il vettore di Poynting una componente localmente direzionata lungo θ, è diretto radialmente. Se volessimo trovare l'energia irradiata per unità di tempo (detta anche luminosità) dobbiamo integrare l'intensità di radiazione su una superficie di raggio r, direzionata localmente verso l'esterno, cioè se $\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{d}\Sigma\ \hat{\mathbf{r}}$,

$$L = \int_{\Sigma_R} \mathbf{I} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

Chiaramente, $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$. Inoltre, esprimendo $d\Sigma$ in coordinate sferiche, $d\Sigma = r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$ si ha

$$L = \frac{2\pi A^2}{2\mu_0 c} \int_0^{\pi} \sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi A^2}{3\mu_0 c}$$

1.2.4 La pulsar del granchio

Premessa Quando una stella massiccia esplode in una (core-collapse) supernova il nucleo della stella forma spesso una stella di neutroni. Una stella di neutroni è un oggetto che ha tipicamente una massa pari a 1.4 volte la massa del nostro sole e un raggio poco più grande di 10 km. Al momento si osservano più di 2000 stelle di neutroni nella nostra galassia (una piccola frazione di quelle che sappiamo esistere). Come è possibile osservare su scala galattica (la Galassia è grande $\sim 5 \times 10^{17}$km) un oggetto di 10 km di raggio? Gran parte delle stelle di neutroni osservate sono delle pulsar. La prima pulsar è stata osservata nel 1967 da Jocelyn Bell (una dottoranda inglese) come un impulso di radiazione radio di origine extraterrestre che si ripeteva ad intervalli estremamente regolari di pochi secondi. Secondo il modello più accreditato, una pulsar è una stella di neutroni magnetizzata ruotante che emette radiazione elettromagnetica in corrispondenza dei poli magnetici sulla sua superficie (chiamati hot spot). Questa radiazione è proprio dovuta all'interazione tra il campo magnetico e il moto rotatorio. Se il cono in cui la radiazione è convogliata punta verso la terra allora è osservabile come impulso radio (tipicamente, ma non esclusivamente). Dal momento che la stella ruota, il fascio di radiazione illumina la terra con un periodo regolare, pari al periodo di rotazione della stella (esattamente come accade per un faro che si affaccia sul mare). Questo esercizio si propone di sviluppare il modello più semplice alla base di questa emissione. Inoltre, si propone di applicare questo modello alla pulsar posta nella nebulosa del granchio, una pulsar nata nel 1054 dopo Cristo.

Testo Si assuma che la stella di neutroni ruoti attorno all'asse z con periodo T e che il campo magnetico al di fuori della stella sia in buona approssimazione quello corrispondente ad un dipolo magnetico $\mathbf{m} = m\mathbf{n}$ con $\mathbf{n}$ direzione del dipolo distinta da $\hat{\mathbf{z}}$ e $\cos\alpha = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}}$.

1. Si dimostri che la potenza emessa dalla pulsar è pari a:

$$P = \frac{\mu_0 \ (m \sin \alpha)^2 \omega^4}{6\pi c^3}$$

dove $\omega = 2\pi/T$ è la velocità angolare di rotazione della stella. Si sfrutti il seguente risultato presentato a lezione: se una spira di raggio b e di asse lungo z' è percorsa da una corrente alternata di pulsazione ω, $I(t) = I_0 \cos \omega t$, allora essa è sorgente di radiazione elettromagnetica a grande distanza con vettori dei campi pari a:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin\theta' \ \cos(\omega t_{\rm ret}) \hat{\boldsymbol{\phi}}'$$

e

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi r c^2} \sin\theta' \ \cos(\omega t_{\rm ret}) \hat{\boldsymbol{\theta}}',$$

dove $m_0 = I_0 \ \pi b^2$ è il massimo in modulo del momento di dipolo variabile nel tempo.

2. Si assuma poi che il campo magnetico di dipolo osservato all'esterno della stella sia quello generato da una sfera omogenea magnetizzata di raggio $R_{\rm ns}$. Si calcoli il campo magnetico all'interno della pulsar del Granchio sapendo che l'emissione osservata ha un periodo di $T = 0.033$s e che questo periodo sta aumentando nel tempo ad un ritmo di $\dot{T} = 3.98 \times 10^{-13}$s s^{-1}. Per quale motivo fisico la pulsar sta aumentando il sup periodo di rotazione? Come si ricollega questo all'emissione elettromagnetica? Si assuma per semplicità che la stella sia una sfera di massa omogenea. Si calcoli anche la potenza emessa dalla pulsar del granchio.

3. Infine, si stimi l'eta della pulsar del granchio e la si confronti con l'età attesa dalla supernova.

Soluzione

1. Consideriamo il momento di dipolo della stella e scomponiamolo nelle sue componenti Cartesiane:

$$\mathbf{m} = m \sin\alpha \ \cos(\omega t) \ \hat{\mathbf{x}} + m \sin\alpha \ \sin(\omega t) \ \hat{\mathbf{y}} + m \cos\alpha \ \hat{\mathbf{z}}$$

Nel caso della spira percorsa da corrente alternata, ciò che causa l'emissione della radiazione dal sistema è la variazione del momento di dipolo magnetico nel tempo. Ciascuna delle componenti x e y del momento di dipolo è del tutto analoga al caso della spira percorsa da corrente alternata. C'è solo da considerare uno sfasamento di $\pi/2$ per la componente y:

$$\mathbf{m} = m \sin\alpha \ \cos(\omega t) \ \hat{\mathbf{x}} + m \sin\alpha \ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \ \hat{\mathbf{y}} + m \cos\alpha \ \hat{\mathbf{z}}$$

Ciascuna di esse produrrà quindi un campo elettrico ed un campo magnetico che si sommeranno per il principio di sovrapposizione dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Invece, la componente z, parallela all'asse di rotazione della stella, non cambia nel tempo e quindi non darà origine ad alcuna emissione. Le espressioni trovate a lezione sono scritte nel sistema di coordinate sferiche (r', θ', ϕ'). È opportuno trovare un'espressione vettoriale che sia indipendente dalle coordinate scelte, in modo da poterle usare anche per momenti diretti lungo assi diversi. Partendo dal fatto che: $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}' = m(\cos\theta' \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta' \boldsymbol{\theta}') = (\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - m \sin\theta' \boldsymbol{\theta}'$ da cui

$$-m \sin\theta' \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}$$

Inoltre, $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta' \ \hat{\boldsymbol{\phi}}$, da cui:

$$m \sin\theta' \hat{\boldsymbol{\phi}}' = \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}$$

per cui le espressioni dei campi generati da una spira in cui scorre una corrente alternata diventano

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} \ \cos(\omega t_{\rm ret}) \ \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} \ \cos(\omega t_{\rm ret}) \ (\mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}})$$

Quindi, per il caso della stella

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi rc} m \ \sin\alpha \left(\cos\left(\omega t_{\rm ret}\right) \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{r}} + \sin\left(\omega t_{\rm ret}\right) \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{r}}\right) = A\left(\cos\beta \ \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{r}} + \sin\beta \ \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{r}}\right)$$

e

$$\mathbf{B} = \frac{A}{c}\left(\cos\beta \ \left(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}}\right) + \sin\beta \ \left(\hat{\mathbf{y}} - (\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}}\right)\right)$$

dove per semplicità di notazione abbiamo introdotto $A \equiv \mu_0\omega^2 m \sin\alpha/(4\pi rc)$ e $\beta = \omega t_{\rm ret}$. Il vettore di Poynting risultante ha un'espressione di questo tipo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{A^2}{c\mu_0}\Big(\cos^2\beta\,(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{x}} - \cos^2\beta\ (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}\\
&+ \cos\beta\sin\beta\,(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{y}} - \cos\beta\sin\beta\ (\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\ \ (\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}\\
&+ \cos\beta\sin\beta\,(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{x}} - \cos\beta\sin\beta\ (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\ \ (\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}\\
&+ \ \sin^2\beta\,(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{y}} - \sin^2\beta\ (\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}\Big)\ .
\end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà del prodotto vettoriale, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$,

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}\\
(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}} &= -\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}\\
(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{y}}\\
(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}} &= -\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}\\
(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{y}} &= -(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}\\
(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{x}} &= -(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{y}}\,.
\end{aligned}$$

Sostituendo e portando avanti i calcoli si ottiene:

$$\mathbf{S}(t,\mathbf{r}) = \frac{A^2}{\mu_0 c}\Big(1 - (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})^2\cos^2\beta - (\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})^2\sin^2\beta - 2\cos\beta\sin\beta\,(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\Big)\,\hat{\mathbf{r}}$$

Questo è il vettore di Poynting istantaneo. Il vettore medio su un periodo di oscillazione si ottiene calcolando

$$\langle\mathbf{S}\rangle(\mathbf{r}) = \frac{\int_0^{2\pi}\mathbf{S}\,\mathrm{d}\beta}{2\pi}$$

ed in particolare

$$\frac{\int_0^{2\pi}\cos^2\beta\,\mathrm{d}\beta}{2\pi} = \frac{\int_0^{2\pi}\sin^2\beta\,\mathrm{d}\beta}{2\pi} = \frac{1}{2} \qquad \int_0^{2\pi}\cos\beta\ \sin\beta\,\mathrm{d}\beta = 0\,.$$

Inoltre, conviene a questo punto valutare i prodotti scalari. Introducendo un sistema di coordinate sferiche con asse lungo z, il versore radiale è tale che:

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$$

da cui

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi \qquad \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\sin\phi$$

Nel complesso si ottiene:

$$\langle\mathbf{S}\rangle(\mathbf{r}) = \frac{A^2}{c\mu_0}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\hat{\mathbf{r}}$$

da cui si vede che il vettore di Poynting medio è radiale, ma non isotropo. La potenza trasmessa della radiazione è definita come il flusso del vettore di Poynting medio integrato su una superficie sferica orientata verso l'esterno Σ:

$$P = \int_\Sigma \langle\mathbf{S}\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

dove $\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = r^2\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\ \hat{\mathbf{r}}$. L'integrale si riduce a:

$$P = \int_\Omega \frac{A^2}{\mu_0 c}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) r^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{A^2 r^2}{\mu_0 c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\ \int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

Sfruttando il fatto che
$$\int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^\pi \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$$
si ha infine:
$$P = \frac{\mu_0}{6\pi}\frac{\omega^4 m^2 \sin^2\alpha}{c^3}$$

2. L'esistenza di un campo di radiazione e di un vettore di Poynting presuppone un flusso netto di energia in uscita dalla sfera su cui tale flusso è misurato. Da dove si origina questa energia? Da un punto di vista fisico, l'origine della radiazione di dipolo magnetico è legata al fatto che si ha a che fare con un momento di dipolo magnetico variabile nel tempo. $\mathbf{m}$ cambia nel tempo per effetto della rotazione della stella. Quindi, l'emissione della radiazione avviene a spese dell'energia di rotazione. In altre parole, l'emissione di radiazione diminuisce la velocità angolare ω e aumenta il periodo P. Per una sfera rigida in rotazione, l'energia cinetica di rotazione è pari a
$$E_{\mathrm{ns}} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1.22}$$
dove I è il momento di inerzia della sfera. Per motivi dimensionali,
$$I = k_I M R_{\mathrm{ns}}^2$$
mentre $k = 2/5$ per una sfera omogenea. Se per effetto dell'emissione ω cambia nel tempo, anche E_{ns} è una funzione del tempo. L'equazione di bilancio dell'energia dice che:
$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ns}}}{\mathrm{d}t} = -P$$
dove P è la potenza emessa in forma di radiazione mentre dall'espressione 1.22:
$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ns}}}{\mathrm{d}t} = I\omega\dot{\omega}$$
Per una sfera magnetizzata in modo uniforme, la densità di magnetizzazione $\mathbf{M}$ è legata al momento di dipolo associato al campo esterno attraverso:
$$\mathbf{m} = \frac{4\pi R_{\mathrm{ns}}^3}{3}\mathbf{M}$$
mentre il campo magnetico uniforme all'interno della stella è dato da:
$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$$
da cui si ricava
$$\mathbf{m} = \frac{2\pi R_{\mathrm{ns}}^3}{\mu_0}\mathbf{B} \quad \rightarrow \quad m = \frac{2\pi R_{\mathrm{ns}}^3}{\mu_0}B$$
Sostituendo tutte le espressioni trovate è possibile giungere all'equazione di evoluzione per la velocità angolare della stella:
$$\dot{\omega} = -\frac{2\pi}{3c^3\mu_0}\frac{\omega^3 R_{\mathrm{ns}}^4 B^2 \sin^2\alpha}{k_I M_{\mathrm{ns}}}$$
Dal momento che $\omega = 2\pi/T$ e quindi $\dot{\omega} = -2\pi\dot{T}/T^2$ possiamo ottenere un'equazione analoga per il periodo:
$$\dot{T} = \frac{8\pi^3}{3c^3\mu_0}\frac{1}{T}\frac{R_{\mathrm{ns}}^4 B^2 \sin^2\alpha}{k_I M_{\mathrm{ns}}} \tag{1.23}$$
Questa relazione si può invertire per trovare un l'intensità del campo magnetico:
$$B = \sqrt{T\dot{T}}\sqrt{\frac{3c^3\mu_0 k_I M_{\mathrm{ns}}}{8\pi^3 R_{\mathrm{ns}}^4}}\frac{1}{\sin\alpha}$$
Dal momento che $\sin^2\alpha \leq 1$, $B \geq B_{\mathrm{min}}$ dove
$$B_{\mathrm{min}} = \sqrt{T\dot{T}}\sqrt{\frac{3c^3\mu_0 k_I M_{\mathrm{ns}}}{8\pi^3 R_{\mathrm{ns}}^4}}$$

Nel caso specifico della pulsar del granchio,

$$B \geq 5.37 \times 10^{12}\text{Gauss} \left(\frac{T\dot{T}}{1.31 \times 10^{-14}\text{s}} \right)^{1/2} \left(\frac{k_I}{2/5} \right)^{1/2} \left(\frac{M_{\rm ns}}{1.4 M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{R_{\rm ns}}{12\text{km}} \right)^{-2}$$

dove 1 Tesla = 10^4 Gauss. Per la potenza emessa dalla pulsar del granchio, basta prendere l'equazione di bilancio energetico:

$$P = -I\omega\dot{\omega} = 4\pi^2 \frac{I\dot{T}}{T^3} = 4\pi^2 \frac{k_I M R^2 \dot{T}}{T^3}$$

e numericamente

$$\begin{aligned} P_{\rm crab} &= 6.98 \times 10^{31}\text{Watt} \left(\frac{\dot{T}}{3.98 \times 10^{-13}} \right) \left(\frac{T}{0.033\text{s}} \right)^{-3} \left(\frac{R}{12\text{km}} \right)^{2} \left(\frac{M}{1.4 M_\odot} \right) \left(\frac{k_I}{2/5} \right) \\ &\approx 1.82 \times 10^5 L_\odot \left(\frac{\dot{T}}{3.98 \times 10^{-13}} \right) \left(\frac{T}{0.033\text{s}} \right)^{-3} \left(\frac{R}{12\text{km}} \right)^{2} \left(\frac{M}{1.4 M_\odot} \right) \left(\frac{k_I}{2/5} \right) \end{aligned}$$

3. Si consideri l'equazione 1.23 e la si riscriva in questo modo:

$$T\dot{T} = \frac{8\pi^3}{3c^3\mu_0} \frac{R_{\rm ns}^4 B^2 \sin^2\alpha}{k_I M_{\rm ns}} .$$

Se il campo magnetico e l'angolo α non cambiano nel tempo, il membro di destra è una costante e quindi anche il prodotto $T\dot{T}$ lo è. Riscriviamo:

$$T\dot{T} = \left(T\dot{T} \right)$$

Il membro di sinistra si può esprimere come:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T^2}{\mathrm{d}t} = \left(T\dot{T} \right) ,$$

che si integra facilmente per separazione delle variabili:

$$\int_{T_0}^{T} \mathrm{d}T'^2 = 2\int_{t_0}^{t} \left(T\dot{T} \right) \mathrm{d}t'.$$

dove T_0 è il periodo al tempo t_0 e T quello al tempo t. Integrando si ha

$$T^2 - T_0^2 = 2\left(T\dot{T} \right)(t - t_0) .$$

Assumendo che $T_0 \ll T$, l'età della pulsar si trova come:

$$(t - t_0) \approx \frac{T}{2\dot{T}}$$

Inserendo i valori numerici della pulsar del granchio si trova che:

$$(t - t_0) \approx \frac{0.033\text{ s}}{3.98 \times 10^{-13}} = 4.1 \times 10^{10}\text{s} \approx 1293\text{ yr}$$

Questa stima si avvicina entro $\lesssim 30\%$ all'età attesa di ~ 970 yr. Chiaramente, le approssimazioni usate (sfera omogenea, campo magnetico interno uniforme e costante, campo megnetico di dipolo esterno costante) e il fatto di trascurare T_0 sono compatibili con un'incertezza di questo tipo. Il metodo è tuttavia molto utilizzato per stimare l'età delle stelle di neutroni.

1.3 Potenziali elettromagnetici

1.3.1 Campi generati da un filo percorso da corrente

Un filo elettricamente neutro e indefinitamente lungo è percorso da una corrente elettrica:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 , \\ I_0 & \text{for } t > 0 . \end{cases} \tag{1.24}$$

Si trovino i potenziali elettromagnetici e si verifichi in quale gauge si trovano. Si trovino poi le espressioni del campo elettrico e magnetico risultanti e si studi il limite per $t \to +\infty$.

Soluzione Utilizziamo l'espressione dei potenziali ritardati per trovare i potenziali elettromagnetici $(V, \mathbf{A})$ a partire dalla distribuzione di carica $\rho(t, \mathbf{x})$ e di corrente $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$:

$$V(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}')}{d} \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \qquad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}')}{d} \mathrm{d}^3\mathbf{x}'$$

dove

$$t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv (t - d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/c) = \qquad d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$$

Modellizziamo il filo come un cilindro indefinito di raggio $\tilde{R}$. Consideriamo un sistema di riferimento tale che l'asse del filo coincida con l'asse z. Data la simmetria assiale del problema, adottiamo un sistema di coordinate cilindriche (R, ϕ, z). Ad un dato istante di tempo t, ad un qualsiasi punto P dello spazio esterno al filo sono quindi associate le coordinate $(R, \phi, z)_P$. Chiaramente ci aspettiamo che tanto i potenziali quanto i campi risultanti rispettino la simmetria del problema (invarianza per traslazioni lungo z e per rotazioni di ϕ), quindi per una quantita' scalare:

$$f(t, \mathbf{x}) = f(t, R)$$

mentre per un campo vettoriale:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, R) = f_R(t, R)\hat{R} + f_\phi(t, R)\hat{\boldsymbol{\phi}} + f_z(t, R)\hat{z}\,.$$

Dal momento che il filo è localmente neutro, non c'è densità netta di carica in tutto lo spazio fuori dal filo:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(t, \mathbf{x}) = 0\,.$$

Per il potenziale vettore, consideriamo il punto P:

$$\mathbf{A}(t, R_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}')}{d} \mathrm{d}^3\mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_0^{+\infty} \mathrm{d}R' R' \frac{\mathbf{J}(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}')}{d}\,.$$

In pratica, per fissato t, l'integrazione è condotta su tutti i punti P' dello spazio. Dividiamo lo spazio sulla base del raggio:

$$\mathbf{A}(t, R_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\tilde{R}} \mathrm{d}R' R' \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{\mathbf{J}(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}')}{d} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tilde{R}}^{+\infty} \mathrm{d}R' R' \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{\mathbf{J}(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}')}{d}\,.$$

Fuori dal filo la corrente è nulla:

$$\mathbf{J}(t_{\text{ret}}, R > \tilde{R}, \phi', z') = 0\,,$$

e quindi il secondo termine è nullo. All'interno del filo, la corrente I che fluisce può essere legata alla densità di corrente tramite l'espressione:

$$\mathbf{J}(t_{\text{ret}}, R, \phi, z) = \mathbf{J}(t_{\text{ret}}) = \frac{I(t_{\text{ret}})}{\pi \tilde{R}^2} \hat{\mathbf{z}}\,,$$

dove stiamo assumendo che la corrente fluisca nel verso positivo delle z e che sia uniforme in una sezione del cilindro. Inoltre, la distanza tra i due punti P e P' è data da

$$d = \sqrt{R_P^2 + R'^2 - 2R_P R' \cos(\phi_P - \phi') + (z_P - z')^2}\,.$$

Ipotizzando che $R' < \tilde{R} \ll R_P$, la distanza diventa:

$$d \approx \sqrt{R_P^2 + (z_P - z')^2}\,.$$

Dal momento che l'integrale lungo z è infinito, è sempre possibile effettuare un cambio di coordinate (equivalente a traslare il sistema di riferimento in modo che $z_P = 0$) e l'espressione del potenziale vettore diventa:

$$\mathbf{A}(t, R_P) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z' \frac{I(t - \sqrt{R_P^2 + z'^2}/c)}{\sqrt{R_P^2 + z'^2}} \hat{\mathbf{z}}\,.$$

La corrente è non nulla per argomento positivo, $I(x) \neq 0$ se $x > 0$. Da cui:

$$t - \frac{\sqrt{R_P^2 + z'^2}}{c} > 0\,,$$

che riscriviamo come:

$$ct > \sqrt{R_P^2 + z'^2} \geq R_P\,.$$

La condizione che se ne ricava, $t \geq R_P/c$, ci dice che, fissato un certo R_P, il potenziale vettore può essere non nullo solo se l'informazione del passaggio di corrente ha avuto tempo di arrivare a P. Quindi:

$$\mathbf{A}(t < R_P/c, R_P) = \mathbf{0}\,.$$

Ipotizzando invece $t \geq R_P/c$, risolvendo rispetto a z' si ottiene:

$$-\sqrt{(ct)^2 - R_P^2} < z' < \sqrt{(ct)^2 - R_P^2}\,.$$

Prima di sostituire queste espressioni nell'integrando notiamo che la condizioni causale discussa sopra assicura l'esistenza del radicale. Nel complesso si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(t \geq R_P/c, R_P) &\approx \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-\sqrt{(ct)^2-R_P^2}}^{+\sqrt{(ct)^2-R_P^2}} \frac{1}{\sqrt{R_P^2 + z'^2}}\,\mathrm{d}z'\,\hat{\mathbf{z}} &(1.25)\\
&= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_{0}^{\sqrt{(ct)^2-R_P^2}} \frac{1}{\sqrt{R_P^2 + z'^2}}\,\mathrm{d}z'\,\hat{\mathbf{z}} &(1.26)\\
&= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\sqrt{R_P^2 + z'^2} + z'\right)\Big|_0^{\sqrt{(ct)^2-R_P^2}}\,\hat{\mathbf{z}} &(1.27)\\
&= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - R_P^2}}{R_P}\right)\hat{\mathbf{z}}\,. &(1.28)
\end{aligned}$$

Il campo elettrico e magnetico si ottengono dalle espressioni che legano i campi ai potenziali:

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = -\nabla V(t,\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{A}(t,\mathbf{x})}{\partial t} \qquad \mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(t,\mathbf{x})\,.$$

Inserendo l'espressione di $\mathbf{A}$ in quella di $\mathbf{E}$ si ha:

$$\mathbf{E}(t, R_P) = \begin{cases} \mathbf{0} & t < R_P/c \\ -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\sqrt{(ct)^2 - R_P^2}}\,\hat{\mathbf{z}} & t \geq R_P/c \end{cases}.$$

Per calcolare il campo magnetico è necessario ricordare l'espressione del rotore in coordinate cilindriche:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{R}} + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial R A_\phi}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right)\hat{\mathbf{z}}\,.$$

Dal momento che nel nostro caso $\mathbf{A} = A_z(t,R)\hat{\mathbf{z}}$ si ha

$$\mathbf{B}(t,R) = -\frac{\partial A_z}{\partial R}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{cases} \mathbf{0} & t < R_P/c \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R}\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - R^2}}\hat{\boldsymbol{\phi}} & t \geq R_P/c \end{cases}.$$

Nel limite per $t \to +\infty$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

consistente con il caso stazionario. Per verificare il gauge, ricordiamo che la divergenza in coordinate cilindriche è data da:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\,A_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

da cui si ha la condizione del gauge di Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0\,.$$

Inoltre, visto che $V = 0 \to \partial V/\partial t = 0$, siamo anche nel gauge di Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0\,.$$

1.4 Cariche in moto

1.4.1 Instabilità dell'atomo in fisica classica

Premessa Una carica q in moto accelerato (di accelerazione $\mathbf{a}$) emette radiazione elettromagnetica nel tempo e a questa radiazione è associata un'energia. Dunque, un carica in moto accelerato irradia con una certa potenza P. Nel limite non relativistico, la potenza emessa è data dalla formula di Larmor,

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \,.$$

Testo Si studi la stabilità dell'atomo di idrogeno classico assumendo vere le leggi della meccanica e dell'elettrodinamica classiche. Questo calcolo è quello che ha convinto N. Bohr dell'inadeguatezza della meccanica classica nella descrizione dei fenomeni microscopici. Come traccia si può seguire questa:

- si consideri l'atomo di idrogeno come uno stato legato classico formato da un protone ($m_p = 1.6726219 \times 10^{-27}$Kg, $q_p = e = 1.60217662 \times 10^{-19}$C) e da un elettrone ($m_e = 9.10938356 \times 10^{-31}$Kg, $q_e = e = 1.60217662 \times 10^{-19}$C) legati dall'interazione Coulombiana. Come possiamo descrivere il moto dell'elettrone? Assumendo che al tempo t_0 l'elettrone si trovi ad una distanza $r_0 = 53 \times 10^{-12}$m dal protone, è legittimo usare la formula non-relativistica?
- Si consideri la formula di Larmor non-relativistica e si discuta qualitativamente l'evoluzione del sistema. Da dove si origina l'energia emessa sotto forma di radiazione elettromagnetica?
- Si studi l'evoluzione temporale della distanza tra l'elettrone e il protone.
- Su quale tempo scala l'elettrone cambia la sua distanza dal protone di un fattore 10^4 (arrivando ad una scala comparabile al raggio del nucleo)? Si discuta l'implicazione di questo risultato.

Soluzione Supponiamo di poter trascurare l'emissione di radiazione elettromagnetica da una carica in moto accelerato. Classicamente e sotto questa ipotesi, se l'elettrone e il protone formano uno stato legato per effetto dell'interazione Coulombiana ($F \propto r^{-2}$), le equazioni che regolano il moto del sistema sono formalmente identiche a quelle del sistema Terra-Sole (in gravità Newtoniana). Dal momento che $m_p \gg m_e$ la massa ridotta del sistema μ è quasi identica a m_e ($\mu \sim m_e$ nel resto dell'esercizio) e lo studio del moto della coordinata relativa $\mathbf{r}$ è in buonissima approssimazione identico al moto dell'elettrone attorno al protone (considerato come fermo). L'elettrone si muove quindi su un'orbita ellittica attorno al protone. Per semplicità supponiamo che il momento angolare del sistema sia minimo e che quindi il moto avvenga su traiettoria circolare, inizialmente di raggio r_0. Il moto circolare uniforme che ne consegue è un moto accelerato con accelerazione centripeta di modulo pari a:

$$a = \frac{v^2}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0^2 m_e}$$

da cui si ricava che

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 m_e c^2}} \approx 7.3 \times 10^{-3} \,.$$

È chiaro che il moto dell'elettrone è in ottima approssimazione non relativistico. Inoltre il periodo orbitale iniziale è

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} \approx 1.52 \times 10^{-16}\text{sec} \,.$$

L'energia totale meccanica del sistema (intesa come somma di energia cinetica ed energia potenziale di interazione Coulombiana) è, per il teorema del viriale, pari a

$$E_{\text{tot}} = -E_k = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \,.$$

Notiamo come:

- $E_{\text{tot}} < 0$, come ci si attende da uno stato legato;
- $E_{\text{tot}} = E_{\text{tot}}(r)$ soltanto.

Tuttavia, dal momento che l'elettrone si muove di moto accelerato, esso irradia perdendo energia, ad un tasso P dato dalla formula di Larmor non-relativistica. Per la conservazione dell'energia, l'emissione di energia sotto forma di radiazione elettromagnetica avviene a spese dell'energia meccanica totale del sistema:

$$P = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t}$$

Quindi, per effetto dell'emissione di energia nel tempo, l'unica cosa che può cambiare è il raggio dell'orbita dell'elettrone.

Come possiamo unire la trattazione precedente ($P = 0$) con quella in cui la carica irradia? Assumiamo che il raggio cambi su un tempo scala molto più lungo di quello orbitale. Sotto questa ipotesi (che verificheremo alla fine), possiamo assumere che l'elettrone percorra moltissime volte una certa orbita prima di cambiarla in maniera significativa, cioè che evolva il suo raggio orbitale passando attraverso orbite che cambiano in modo infinitesimo. In questa approssimazione, possiamo valutare la potenza di Larmor usando l'accelerazione centripeta che abbiamo trovato sopra nell'ipotesi di un'orbita stazionaria.

Quindi,

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2 m_e}\right)^2 &= -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\left(\frac{1}{r^2}\right) &= -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -\left(\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\right)^{-1} r^2$$

che si integra tra t_0 e t:

$$t(r) - t_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\right)^{-1}(-r^3 + r_0^3)$$

$r(t)$ si trova invertendo la funzione $t(r)$:

$$r(t) = \left(r_0^3 - 3\left(\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\right)(t - t_0)\right)^{1/3}$$

Per effetto dell'emissione di radiazione, il raggio diminuisce. Se definiamo Δt_4 il tempo necessario per passare da r_0 a $r_0/10^4$ otteniamo:

$$\Delta t_4 = \frac{1}{3}\left(r_0^3 - \frac{r_0^3}{10^{12}}\right)\left(\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\right)^{-1} \approx \frac{r_0^3}{3}\left(\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\right)^{-1} \approx 1.5 \times 10^{-11}\mathrm{s}\,.$$

Saremmo arrivati ad una conclusione molto simile partendo da

$$\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

valutata sullo stato iniziale come:

$$\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}\left(\frac{1}{r_0^2}\right) \sim \frac{\Delta r}{\Delta t} \sim \frac{r_0}{\Delta t}$$

da cui

$$\Delta t \sim \frac{12\pi^2\epsilon_0 m_e^2 c}{\mu_0 e^4} r_0^3\,.$$

1.4.2 Guide d'onda (facoltativo)

Premessa Una guida d'onda è una struttura (generalmente più sviluppata in una direzione piuttosto che nelle altre due, quindi lineare) che confina e convoglia le onde elettromagnetiche entro un percorso guidato che collega due estremità. Esistono guide d'onda di materiale dielettrico o conduttore. È quindi il dispositivo che sta alla base di moltissimi sistemi di comunicazione, incluse le fibre ottiche e le antenne a tromba. In questo esercizio ci proponiamo di studiare la propagazione di un'onda elettromagnetica in una guida d'onda rettangolare di materiale conduttore.

Testo Si studi la propagazione di un'onda elettromagnetica all'interno di una guida d'onda rettangolare. In particolare, si consideri un conduttore perfetto cavo di sezione rettangolare di dimensioni a e b. La cavità si sviluppi lungo l'asse z, in modo che i piani a $z = \text{const}$ siano rettangoli paralleli al piano xy. In particolare, la coordinata x all'interno della cavità varia tra 0 e a mentre lungo y tra 0 e $b \leq a$.

- Quanto valgolo i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ all'interno del conduttore? E alla superficie interna di separazione con la cavità vuota?

- si consideri un'onda monocromatica di frequenza angolare ω che si propaga nella cavità in direzione z del tipo
$$\begin{cases} \mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}(x,y,z,t) = \mathbf{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \end{cases}$$
dove
$$\mathbf{E}_0 = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}$$
e similmente per $\mathbf{B}_0$. Si noti quindi che non stiamo assumendo campi trasversali. Infatti, per rispettare le condizioni al contorno trovate nel punto precedente, all'interno del conduttore si sviluppano correnti e cariche libere. Si scrivano le equazioni di Maxwell per le onde confinate all'interno della cavità e si dimostri che non possono essere trasversali (cioè non è possibile che E_z e $B_z = 0$ siano entrambi nulli.

- Si consideri il caso in cui $E_z = 0$ (guide d'onda TE) e si risolva il problema per B_z. Si usi il metodo di separazione delle variabili.

Soluzione Trattandosi di un conduttore perfetto, $\mathbf{E} = 0$ al suo interno. Inoltre, per la legge di Faraday, $\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$. Quindi, se il materiale non è magnetizzato resterà sempre tale: $\mathbf{B} = 0$. Alla superficie interna che separa il conduttore dal vuoto si applicano le usuali condizioni al contorno per la superficie di un corpo conduttore:

$$\begin{cases} \epsilon_1 E_{1,\perp} - \epsilon_2 E_{2,\perp} = \sigma_{\text{libera}} \\ B_{1,\perp} - B_{2,\perp} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{E}_{1,\parallel} - \mathbf{E}_{2,\parallel} = 0 \\ \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{1,\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_{2,\parallel} = \mathbf{K}_{\text{libera}} \times \hat{\mathbf{n}} \end{cases} \tag{1.29}$$

dove σ_{libera} e $\mathbf{K}_{\text{libera}}$ sono la densità superficiale di carica e di corrente libere, mentre $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie. Nel nostro caso, all'interno della cavità

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\parallel = \mathbf{0} \\ B_\perp = 0 \end{cases}$$

Scriviamo le equazioni di Maxwell all'interno della cavità cominciando dai rotori di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\omega B_x \\ ikE_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \end{cases}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_z \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_x \\ ikB_x - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_y \end{cases}$$

Vogliamo a questo punto esprimere le componenti $E_{x,y}$ e $B_{x,y}$ rispetto alle Sole componenti E_z e B_z. Se, per esempio, si risolvono la terza e la seconda equazione dei due sistemi rispetto a E_x e B_y, e si sostituisce la seconda nella prima si ottiene

$$E_x = \frac{i}{\omega^2/c^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)$$

In maniera analoga, sempre e solo utilizzando le ultime due equazioni di ciascun sistema si ottiene:

$$\begin{aligned}
E_y &= \frac{i}{\omega^2/c^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \\
B_x &= \frac{i}{\omega^2/c^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \\
B_y &= \frac{i}{\omega^2/c^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Quindi, la conoscenza delle componenti longitudinali E_z e B_z determina la forma dei campi. Sostituendo le espressioni trovate nelle prime due equazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)B_z\right) &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_z\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Dal momento che le onde elettromagnetiche nel vuoto (non confinato) sono trasverse ci potremmo chiedere se possano essere trasferve anche qui, cioè se sia possibile che $E_z = B_z = 0$. Tuttavia è facile convincersi dalle espressioni trovate che in quel caso $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Quindi, assumiamo che almeno una delle due componenti sia non nulla. Per esempio, consideriamo il caso $E_z = 0$ (queste onde sono dette a campo elettrico trasversale, onde TE). Data simmetria dell'equazione differenziale, proviamo a risolvere l'equazione per B_z con il metodo di separazione delle variabili. Assumiamo quindi di esprimere B_z come prodotto di due funzioni:

$$B_z(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$$

e l'equazione differenziale diventa:

$$\left(\frac{\partial^2\alpha(x)}{\partial x^2}\beta(y) + \frac{\partial^2\beta(y)}{\partial y^2}\alpha(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\alpha(x)\beta(y)\right) = 0$$

se dividiamo per $\alpha\beta$,

$$\left(\frac{1}{\alpha(x)}\frac{\partial^2\alpha(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta(y)}\frac{\partial^2\beta(y)}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right) = 0$$

Dal momento che i due termini differenziali sono totalmente indipendenti,l'unica possibilità è che:

$$\frac{1}{\alpha(x)}\frac{\partial^2\alpha(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 \qquad \frac{1}{\beta(y)}\frac{\partial^2\beta(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 \qquad -k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

Le due equazioni trovate sono identiche alle equazioni differenziali dell'oscillatore armonico e la più generale delle soluzioni è:

$$\alpha(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x) \qquad \beta(y) = C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)$$

da cui

$$B_z(x,y) = \alpha(x)\beta(y) = (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y))$$

Sulle pareti della cavità il campo magnetico perpendicolare deve essere nullo, quindi $B_x(x=0) = B_x(x=a) = 0$ e similmente $B_y(y=0) = B_y(y=a) = 0$. Dall'equazione per B_x troviamo che

$$\frac{\partial B_z}{\partial x}(x = 0, a) \quad = \quad 0 \tag{1.30}$$

$$A\cos(0) - B\sin(0) = 0 \qquad A\cos(k_x a) - B\sin(k_x a) = 0 \tag{1.31}$$

da cui si ricava $A = 0$ e $k_x = m\pi/a$ con $m = 0, 1, 2, ...$ Similmente, partendo dall'equazione per B_y si ricava $C = 0$ e $k_y = n\pi/b$ con $n = 0, 1, 2, ...$ Complessivamente,

$$B_z(x, y) = B_{z,0} \cos\left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}\right) \qquad m, n = 0, 1, 2, ...$$

Ogni coppia (m, n) descrive un particolare modo di propagazione all'interno della cavità. Per evitare il caso banale di un campo costante, almeno uno dei due interi deve essere non nullo. Rimane da considerare la conzione che lega ω a m ed n. Partendo da

$$-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

si ha

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$$

Affinchè k sia reale è necessario che

$$\omega > \omega_{m,n} \equiv \pi c \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$$

Infatti, se $\omega < \omega_{m,n}$ l'esponenziale diventa reale decrescente e l'onda si attenua immediatamente. Ricordando che $a > b$, il più piccolo valore di ω è dato da $m = 1, n = 0$ e $\omega_{1,0}$ e questa frequenza è detta frequenza di cutoff per la guida d'onda.