

## Chapter 6

# Esercizi di Relatività

### 6.1 Lo spazio-tempo e la sua struttura

#### 6.1.1 Vita media dei muoni atmosferici

**Premessa** La dilatazione dei tempi è quotidianamente verificata nei laboratori in cui si accelerano particelle a velocità relativistiche. Tuttavia, esiste un'evidenza sperimentale che si osservò ben prima degli acceleratori e riguarda i muoni. Il muone è una particella elementare del tutto simili all'elettrone, ma con una massa circa 200 maggiore. Per questo il muone è instabile e decade in un elettrone (e in due neutrini). La sua vita media, misurata in laboratorio su muoni che viaggiano a velocità  $v_\mu \ll c$ , risulta essere di  $\tau_\mu \sim 2.2 \mu\text{s}$ . Quando i raggi cosmici (particelle ad altissima velocità ed energia che viaggiano nello spazio e possono colpire la terra) entrano in atmosfera collidono con le molecole dell'aria. Queste collisioni producono sciame di particelle secondarie tra cui moltissimi muoni che viaggiano poi verso il suolo. La gran parte di questi muoni sono prodotti negli strati più alti dell'atmosfera, a diversi chilometri di altezza ( $h_\mu = 5 - 20\text{km}$ ). Il flusso di muoni può essere misurato a diverse altitudini. Se le TG fossero corrette, essendo il tempo assoluto, un muone che viaggia a  $c$  percorrerebbe in un sistema di riferimento solidale con la terra, in media

$$h = c\tau_\mu = 660 \text{ m}.$$

Dal momento che i muoni sono prodotti a  $h_\mu \gg 660\text{m}$ , ci si aspetterebbe di non osservare muoni a livello del mare. Tuttavia un elevato flusso di muoni si osserva ancora al livello del mare.

#### Testo

- Come è possibile spiegare la rilevazioni di muoni sul livello del mare?
- Si stimi la velocità a cui viaggiano i muoni in atmosfera. Per fare questo si assuma che ogni muone viva esattamente  $\tau_\mu$ : questa è chiaramente un'approssimazione, perché il decadimento è un processo stocastico e quindi ci aspettiamo una distribuzione di tempi. Tuttavia, è un'approssimazione ragionevole perché  $\tau_\mu$  è il valor medio di quella distribuzione.

**Soluzione** Questa osservazione si spiega attraverso la dilatazione dei tempi. La vita media è misurata in un sistema  $\mathcal{O}$  che si muove insieme al muone (in altre parole, è il tempo proprio). Nel sistema  $\mathcal{O}'$  solidale con la terra l'intervallo di tempo corrispondente alla vita media del muone è invece pari a  $\tau'_\mu = \gamma_v \tau_\mu$ . Per  $v_\mu = (1 - \epsilon)c$ , assumendo  $\epsilon \ll 1$  si ha che

$$\gamma_v \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon^{-1/2} = 31.62 \left( \frac{\epsilon}{0.001} \right)^{-1/2} \Rightarrow h'_\mu \approx (1 - \epsilon) \tau'_\mu c \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon^{-1/2} \tau_\mu c \approx 14.76\text{km} \left( \frac{\epsilon}{0.001} \right)^{-1/2}$$

Per velocità che si discostano da  $c$  per una parte su 1000, la distanza media percorsa nel sistema di riferimento della terra copre l'intervallo in cui i muoni sono prodotti. Questo spiega come sia possibile che i muoni siano osservati anche al livello del mare. In particolare, assumendo un intervallo  $5\text{km} < h'_\mu < 15\text{km}$  otteniamo:

$$9.6 \times 10^{-4} \lesssim \epsilon \lesssim 8.7 \times 10^{-3}.$$

Se nel sistema di riferimento  $\mathcal{O}'$  solidale con la terra il muone ha percorso svariati chilometri, è interessante chiedersi quale sia la distanza percorsa nel sistema di riferimento del muone. Per prima

cosa, notiamo che nel suo sistema è la terra che si muove incontro al muone ad una velocità relativa  $v_\mu$ . Quindi, la distanza percorsa dalla terra nel sistema di riferimento del muone prima che esso decada è  $\tau_\mu v_\mu = (1 - \epsilon)\tau_\mu c \approx 660\text{m}$ . La distanza misurata nel sistema  $\mathcal{O}'$  è legata a quella misurata in  $\mathcal{O}$  dalla legge di contrazione delle lunghezze.

### 6.1.2 Paradosso dei gemelli

**Premessa** La RS ha dato origine a molti paradossi (apparenti). Il più famoso è forse il paradosso dei gemelli: il fratello di una coppia di gemelli parte per un viaggio spaziale. Al suo ritorno a casa, per la dilatazione dei tempi, sarà più giovane del fratello rimasto sulla terra. Il paradosso ci sarebbe perché la differenza tra i gemelli violerebbe il principio di relatività: se guardassimo le cose dal punto di vista del gemello astronauta, il gemello sulla terra dovrebbe più giovane al suo ritorno. Oppure no ...

**Testo** Si consideri il caso in cui il gemello astronauta incominci il suo viaggio al 21esimo compleanno, muovendosi in linea retta a  $v = 4c/5$  fino ad una stella X; arrivato in prossimità della stella X, la sua astronave faccia un'inversione istantanea e torni indietro sulla terra sempre a velocità  $v$ . Al suo ritorno il gemello astronauta ha 39 anni (misurati rispetto all'orologio dell'astronave).

1. Si calcoli l'età del fratello terrestre al ritorno dell'astronave. Si spieghi perché il paradosso non è tale.

Al fine di avere una spiegazione più dettagliata, si può risolvere una versione più articolata del problema. Definiamo il sistema solidale con la terra  $\mathcal{O}$ . Per studiare il moto dell'astronave abbiamo bisogno di 2 sistemi inerziali:  $\mathcal{O}'$  solidale con l'astronave durante l'andata e  $\mathcal{O}''$  durante il ritorno. Si assuma che alla partenza dell'astronave i loro orologi siano tutti sincronizzati a  $t = t' = t'' = 0$ , e le origini dei tre sistemi coincidano. Si calcoli:

2. quanto dista la stella X dalla terra;
3. si consideri l'evento  $p$  rappresentato dall'inversione della nave in prossimità della stella X. Si trovino le coordinate dell'evento in  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}'$  e  $\mathcal{O}''$ ;
4. si supponga che l'astronauta sposti il suo orologio al momento del cambio di rotta in modo che il suo orologio sia sincronizzato con quello in  $\mathcal{O}''$ . Quale sarebbe il tempo sul suo orologio al momento del ritorno sulla terra?
5. se si chiedesse all'astronauta "Qual è l'età di tuo fratello sulla terra proprio adesso, sulla base del tuo orologio?" cosa risponderebbe (i) prima di fare l'inversione; (ii) subito dopo aver fatto l'inversione e risincronizzato il suo orologio?
6. quanto dura il viaggi di ritorno nel sistema  $\mathcal{O}$  e quale sarebbe l'età che il gemello astronauta si aspetta per il gemello terrestre?

### Soluzione

1. L'orologio dell'astronave misura la durata totale del viaggio in 18 anni. Questo è il tempo proprio,  $\Delta\tau = 18\text{ yrs}$ . Il tempo coordinato misurato in  $\mathcal{O}$  sarà dato da

$$\Delta t = \Delta\tau\gamma_v = \frac{5}{3}\Delta\tau = 30\text{ yrs}$$

dove si è usato  $\gamma_v = 5/3$ . Il fratello terrestre avrà 51 anni al ritorno dell'astronave.

2. La velocità  $v$  dell'astronave è misurata nel sistema  $\mathcal{O}$ . Quindi, considerando andata e ritorno, la distanza della stella X dalla terra è di  $d = v\Delta t/2 = 12\text{ lys}$  (anni luce).
3. In base al punto precedente, le coordinate spazio-temporali di  $p$  in  $\mathcal{O}$  sono ( $t = 15\text{ yrs}$ ,  $x = 12\text{ lys}$ ). Per le coordinate in  $\mathcal{O}'$  consideriamo le TL per  $\beta = v/c = 4/5$ : il risultato é

$$(t' = 9\text{ yrs}, x' = 0\text{ lys}),$$

infatti:

$$t' = \gamma_v \left( t - \frac{\beta_v x}{c} \right) = \frac{5}{3} \left( 15 - \frac{4}{5} 12 \right) = 9$$

$$\frac{x'}{c} = \gamma_v \left( \frac{x}{c} - \beta_v t \right) = \frac{5}{3} \left( 12 - \frac{4}{5} 15 \right) = 0$$

Il risultato è totalmente sensato perché nella prima metà del viaggio  $O'$  è solidale con l'astronave. Per le coordinate in  $O''$  il procedimento è lo stesso, ma  $\beta = -4/5$ ; il risultato é:

$$(t'' = 41 \text{ yrs}, x'' = 40 \text{ lys}).$$

4. se l'astronauta volesse sincronizzare il suo orologio al momento dell'inversione dovrebbe fare

$$\tau_p = 9 \text{ yrs} \rightarrow \tau_p = 41 \text{ yrs}$$

Alla fine del viaggio sarebbero trascorsi (sull'astronave) altri 9 anni. Quindi il suo orologio direbbe  $\tau = 50 \text{ yrs}$ .

5. Per l'astronauta, poco prima dell'inversione il fratello sulla terra si è allontanato a velocità  $v$ . Il tempo proprio del gemello sulla terra corrispondente ai nove anni di  $\Delta t' = \Delta \tau/2$  sarà quindi:

$$\Delta \tau' = \frac{\Delta t'}{\gamma_v} = \frac{3}{5} 9 \text{ yrs} = \frac{27}{5} \text{ yrs}$$

Quindi, immediatamente prima dell'inversione, l'età del fratello sarà 26 anni e  $2/5$  di anno. Subito dopo l'inversione (e dopo aver aggiustato il suo orologio rispetto a quello di  $O''$ ),

$$\Delta \tau' = \frac{\Delta t''}{\gamma_v} = \frac{3}{5} 41 \text{ yrs} = \frac{123}{5} \text{ yrs}$$

Quindi, immediatamente dopo l'inversione, l'età del fratello sarà 45 anni e  $3/5$  di anno.

6. per l'astronauta il viaggio di ritorno misurato dalla terra (che per lui è un sistema in moto) impiega

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{2} \frac{1}{\gamma_v} = 9 \text{ yrs} \frac{3}{5} = \frac{27}{5} \text{ yrs}.$$

Complessivamente, l'astronauta si attende che sulla terra sia passato un tempo

$$\Delta t = \left( \frac{123}{5} + \frac{27}{5} \right) \text{ yrs} = 30 \text{ yrs}.$$

e che l'età del fratello al suo ritorno sia proprio di 51 anni.

Il punto cruciale qui, che evita il paradosso, è che l'astronave che va e torna non è un sistema inerziale: servono almeno due sistemi inerziali per descrivere il moto di andata e ritorno. Quindi, la reciprocità dei sistemi inerziali non si applica al viaggio di andata e ritorno. Aggiustare l'orologio nel passaggio tra i due sistemi è necessario per comprendere l'origine dell'asimmetria.

### 6.1.3 Inseguimento relativistico (facoltativo)

**Testo** Dalla superficie di un pianeta si osserva un inseguimento tra astronavi. Una prima astronave viaggia (rispetto al pianeta) in linea retta a velocità  $v_1$ , inseguita da un'altra astronave che si muove, sempre in linea retta, a  $v_2 < v_1$ . Per effettuare un abbordaggio, la seconda astronave lancia un arpione che nel suo sistema di riferimento viaggia a  $v_3'$ . Trovare sotto quali condizioni la prima astronave riuscirà a scappare all'inseguimento.

**Soluzione** La condizione per cui l'astronave riuscirà a sfuggire può essere espressa in ciascuno dei 3 sistemi di riferimento:

1. in  $\mathcal{O}'$ :  $v_3' < v_1'$ ;
2. in  $\mathcal{O}''$ :  $v_3'' < v_1''$ ;
3. in  $\mathcal{O}$ :  $v_3 < v_1$ .

Usando la condizione 2, invece, la soluzione è immediata. Infatti, per la legge di addizione delle velocità applicata a  $\beta_1$  per passare dal sistema  $\mathcal{O}$  a  $\mathcal{O}''$  (che si muove con velocità  $\beta_2$ ):

$$\beta_3'' < \beta_1'' = \frac{\beta_1 - \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2}.$$

Similmente, usando la condizione 3 si può calcolare  $\beta_3$  a partire da  $\beta_3''$  applicando la trasformazione delle velocità per un boost di velocità relativa  $-\beta_2$ :

$$\beta_1 > \beta_3 = \frac{\beta_3'' + \beta_2}{1 + \beta_2 \beta_3''}.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene di nuovo:

$$\beta_3'' < \frac{\beta_1 - \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2}.$$

#### 6.1.4 Aberrazione relativistica della luce

**Testo** Si consideri una sorgente di radiazione che emette luce in maniera isotropa (cioè allo stesso modo in tutte le direzioni) nel suo sistema di riferimento di quiete. Per concretezza si considerino 12 raggi definiti in questo modo: i raggi sono emessi nel piano  $xy$  e formano con l'asse  $x$  12 angoli  $\theta_{i=1,12}$  tali che  $\theta_i = (i-1) \cdot \pi/6$ . Si calcolino come appaiono i raggi per un osservatore  $\mathcal{O}'$  in moto a velocità  $v$  lungo l'asse  $x$  verso la sorgente. Si valutino, in particolare, gli angoli osservati da  $\mathcal{O}'$  per  $|V| = 0.1, 0.5, 0.9, 0.99c$ .

**Soluzione** Consideriamo uno dei 12 raggi di luce nel piano  $xy$ . È sempre possibile scomporre la sua velocità in una componente parallela e in una trasversale ad  $x$ :

$$v_{\parallel} = v \cos \theta_i \quad v_{\perp} = v \sin \theta_i.$$

È chiaro che:

$$\tan \theta_i = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}.$$

Consideriamo adesso lo stesso vettore velocità visto da  $\mathcal{O}'$  che si muove di moto relativo lungo  $x$  con velocità  $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ . Per la legge relativistica di trasformazione delle velocità si ha che:

$$\begin{aligned} v_{\parallel}' &= \frac{v_{\parallel} - V}{1 - \frac{V v_{\parallel}}{c^2}} \\ v_{\perp}' &= \frac{v_{\perp}}{\gamma_V \left(1 - \frac{V v_{\parallel}}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

da cui la direzione osservata dall'osservatore in moto è:

$$\tan \theta_i' = \frac{v_{\perp}'}{v_{\parallel}'} = \frac{v \sin \theta_i}{\gamma_V (v \cos \theta_i - V)}.$$

Questa espressione è del tutto generale e ci dice come trasformano le direzioni di propagazione di una particella passando tra sistemi di riferimento diversi. Specializziamola al caso di radiazione luminosa,  $v = c$ , e al caso in cui  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{V} < 0$ :

$$\tan \theta_i' = \frac{\sin \theta_i}{(\cos \theta_i + \beta)} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

dove  $\beta = |V|/c$ . Una rappresentazione grafica dei 4 casi trattati si ha in Figura (6.1).

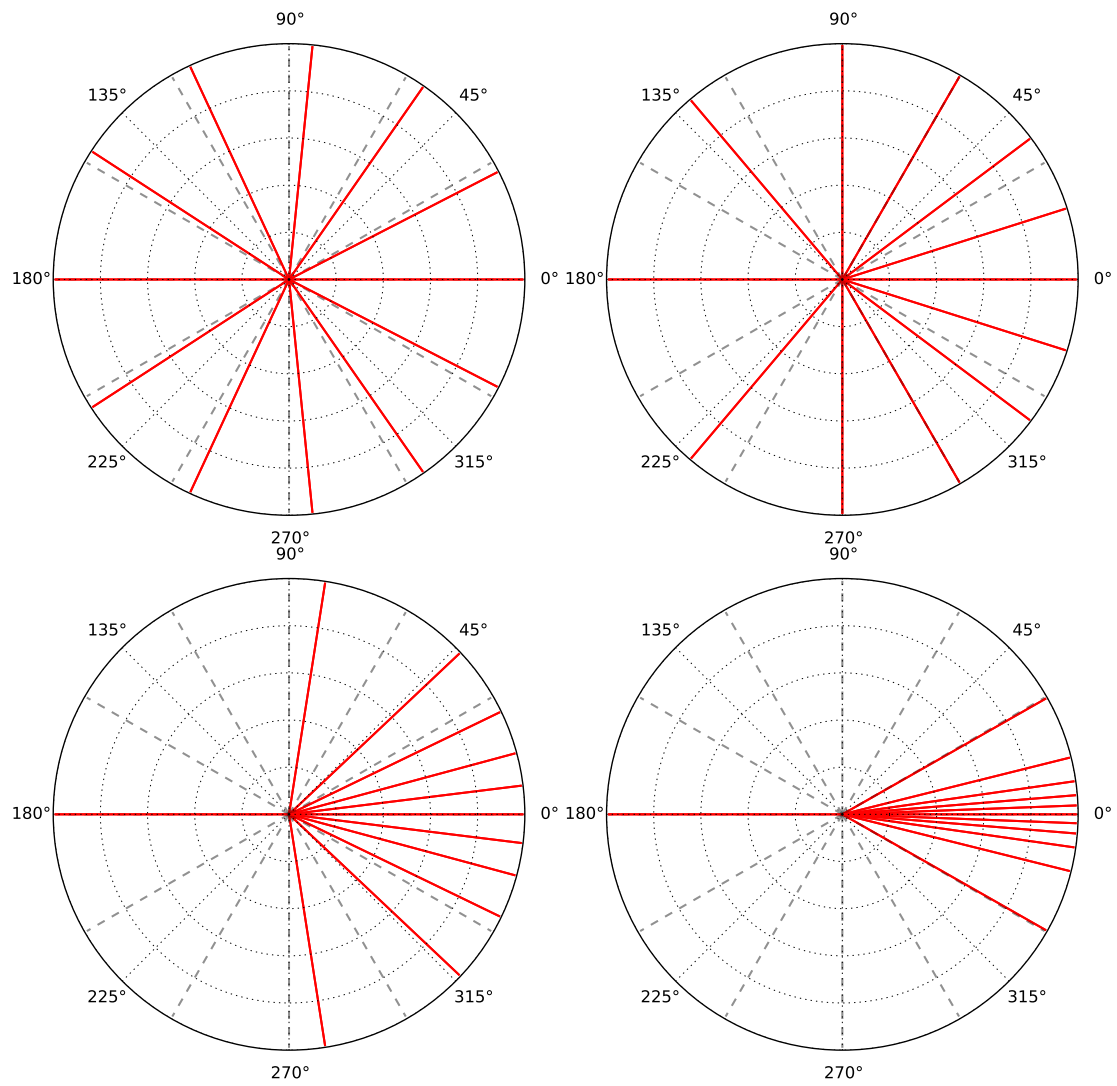


Figure 6.1: Direzione dei 12 raggi dell'esercizio sull'aberrazione relativistica. Le linee tratteggiate sono le direzioni nel sistema in quiete. I 4 plot rappresentano velocità del sistema  $\mathcal{O}'$  crescenti, da  $0.1c$  (alto sinistra), a  $0.5c$  (alto destra), a  $0.9c$  (basso sinistra), a  $0.99c$  (basso destra).

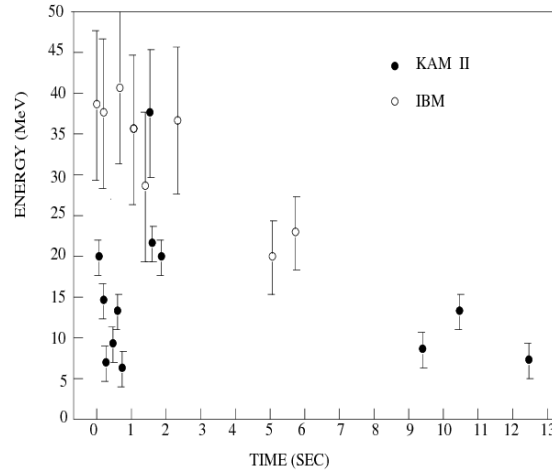


Figure 6.2: Graphs of the  $\sim 20$  neutrinos detected by Kamiokande and IBM from SN1987A.

### Commenti

- Questo effetto è molto importante e assume nomi diversi a seconda del contesto. Se si considera una sorgente in quiete e un osservatore in moto si chiama aberrazione relativistica; se invece l'osservatore è in quiete e la sorgente in movimento si definisce beaming relativistico. È chiaro però che è sempre lo stesso effetto.
- se si considera un raggio emesso lungo la direzione  $y$  nel sistema  $\mathcal{O}$ , il suo angolo nel sistema  $\mathcal{O}'$  diventa

$$\tan \theta' = \frac{1}{\gamma_V \beta}$$

e nel limite relativistico  $\beta \rightarrow 1$ ,

$$\theta' \approx \tan \theta' \approx \frac{1}{\gamma_V}$$

il che significa che metà dei raggi sono convogliati entro un cono di semi-ampiezza  $1/\gamma$ .

## 6.2 Meccanica Relativistica

### 6.2.1 Luce e neutrini dalla supernova SN1987A

**Premessa** Nel gennaio del 1987 nella Grande Nube di Magellano (LMC, distante  $d_{\text{LMC}}=160\,000$  anni luce (lyr) dalla terra) si è osservata l'esplosione di una supernova, denominata SN1987A. Si pensa che questi eventi siano legati all'esplosione di una stella massiva arrivata alla fine della sua vita. SN1987A è la supernova meglio studiata dell'era contemporanea. Oltre alla luce prodotta dall'esplosione, gli esperimenti IMB e Kamiokande hanno rilevato il passaggio di una ventina di neutrini: il range di energie rilevate fu  $7.5\text{MeV} \lesssim E_\nu \lesssim 40\text{MeV}$  e tutti i neutrini arrivarono in un intervallo di tempo  $\delta\tau_\nu$  di circa 10 secondi, si veda Figura 6.2. Secondo i risultati più recenti, i neutrini hanno una massa, anche se molto piccola, dell'ordine di 1 eV o anche meno. Nota: l'energia delle particelle elementari è spesso espressa in MeV (Mega elettronvolt). Un MeV sono  $10^6$  eV (elettronvolt). Un elettronvolt è l'energia che guadagna una particella di carica elementare  $e$  (la carica dell'elettrone) quando viene accelerata da una differenza di potenziale di un Volt. Il fattore di conversione tra un eV o un MeV e un Joule è quindi

$$1 \text{ MeV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ Joule} \quad 1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ Joule}$$

Per familiarizzare con queste unità, si calcoli l'energia di riposo,  $E_0 = mc^2$ , di un elettrone, di un protone, e di un uomo di 60kg sia in Joule sia in MeV.

**Testo** Si considerino neutrini di massa  $m_\nu$ <sup>1</sup> ed energia  $E_\nu$ , e fotoni (particelle di luce) emessi contemporaneamente dalla supernova.

<sup>1</sup>In realtà la situazione è più complessa perché esistono neutrini di tre tipi che oscillano tra autostati di sapore. Ma per semplicità consideriamo qui il caso in cui tutti i neutrini rilevati hanno una stessa massa.

- si derivi la differenza nel tempo di arrivo tra un fotone ed un neutrino emessi nello stesso istante tra la LMC e la terra (nel sistema di riferimento della terra);
- qual é il tempo di volo e la distanza percorsa nel sistema di riposo del neutrino? Possiamo porci la stessa domanda per il fotone?
- Assumendo che il primo neutrino arrivato sia il più energetico mentre l'ultimo il meno energetico, si derivi un possibile valore per la massa del neutrino.

### Soluzione

- Dall'espressione dell'energia relativistica possiamo ricavare una relazione tra energia, massa e velocità dei neutrini:

$$E_\nu = m_\nu \gamma_{\mathbf{v}} c^2 \rightarrow v_\nu = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2} \approx c \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2 \right)$$

dove nell'ultimo passaggio si è assunto che  $m_\nu c^2 \ll E_\nu$ . Possiamo quindi esprimere  $v$  in questo modo:

$$v_\nu = c(1 - \epsilon) \quad \text{dove} \quad \epsilon = 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2 \approx 5 \times 10^{-15} \left( \frac{m_\nu c^2}{1 \text{ eV}} \right)^2 \left( \frac{E_\nu}{10 \text{ MeV}} \right)^{-2}$$

La differenza nel tempo di volo tra neutrini e fotoni nel sistema di riferimento solidale con la terra sarà data da:

$$\begin{aligned} \delta t &= \frac{d_{\text{LMC}}}{v_\nu} - \frac{d_{\text{LMC}}}{c} = \frac{d_{\text{LMC}}}{c} \left( \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \right) \approx \frac{d_{\text{LMC}}}{c} \epsilon \approx 8 \times 10^{-10} \text{ yrs} \left( \frac{m_\nu c^2}{1 \text{ eV}} \right)^2 \left( \frac{E_\nu}{10 \text{ MeV}} \right)^{-2} \left( \frac{d_{\text{LMC}}}{1.6 \times 10^5 \text{ lys}} \right) \approx \\ &\approx 2.5 \times 10^{-2} \text{ sec} \left( \frac{m_\nu c^2}{1 \text{ eV}} \right)^2 \left( \frac{E_\nu}{10 \text{ MeV}} \right)^{-2} \left( \frac{d_{\text{LMC}}}{1.6 \times 10^5 \text{ lys}} \right). \end{aligned}$$

- il tempo di volo del neutrino nel sistema solidale con la terra sarà dato da  $\Delta t = d_{\text{LMC}}/v_\nu$ . Il tempo di volo in un sistema solidale con il neutrino è il tempo proprio  $\Delta\tau$ , legato a  $\Delta t$  da:

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \frac{\Delta t}{\gamma_{\mathbf{v}}} = \frac{d_{\text{LMC}}}{c(1 - \epsilon)} \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2} \approx \sqrt{2} \frac{d_{\text{LMC}}}{c} \epsilon^{1/2} = \frac{d_{\text{LMC}}}{c} \left( \frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right) \\ &\approx 1.6 \times 10^{-2} \text{ yrs} \left( \frac{m_\nu c^2}{1 \text{ eV}} \right) \left( \frac{E_\nu}{10 \text{ MeV}} \right)^{-1} \left( \frac{d_{\text{LMC}}}{1.6 \times 10^5 \text{ lys}} \right) = \\ &\approx 5.84 \text{ days} \left( \frac{m_\nu c^2}{1 \text{ eV}} \right) \left( \frac{E_\nu}{10 \text{ MeV}} \right)^{-1} \left( \frac{d_{\text{LMC}}}{1.6 \times 10^5 \text{ lys}} \right) \end{aligned}$$

Nel sistema di riferimento del neutrino, la terra si è mossa verso il neutrino di

$$\delta_{\text{LMC}} = \frac{d_{\text{LMC}}}{\gamma_{\mathbf{v}}} = v_\nu \Delta\tau \approx 1.6 \times 10^{-2} \text{ lys} \left( \frac{m_\nu c^2}{1 \text{ eV}} \right) \left( \frac{E_\nu}{10 \text{ MeV}} \right)^{-1} \left( \frac{d_{\text{LMC}}}{1.6 \times 10^5 \text{ lys}} \right)$$

Nel caso in cui  $m_\nu \rightarrow 0$  la differenza tra neutrini e fotoni sparisce. Tuttavia, non esiste un osservatore solidale con un fotone per il principio P2.

- Assumendo un certo valore di massa, neutrini più energetici arriveranno prima di quelli meno energetici. Quindi,

$$\delta\tau_\nu = \frac{d_{\text{LMC}}}{c(1 - \epsilon_{\min})} - \frac{d_{\text{LMC}}}{c(1 - \epsilon_{\max})} = \frac{d_{\text{LMC}}}{c} \left( \frac{\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}}{(1 - \epsilon_{\min})(1 - \epsilon_{\max})} \right) \approx \frac{d_{\text{LMC}}}{c} (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min})$$

Sostituendo l'espressione di  $\epsilon$  ricavata allo stesso ordine si ottiene:

$$\delta\tau_\nu \approx \frac{d_{\text{LMC}}}{c} \frac{(m_\nu c^2)^2}{2} \left( \frac{E_{\max}^2 - E_{\min}^2}{E_{\min}^2 E_{\max}^2} \right)$$

Risolvendo rispetto alla massa,

$$m_\nu c^2 \approx \sqrt{\frac{2c \delta\tau_\nu}{d_{\text{LMC}}} \left( \frac{E_{\min}^2 E_{\max}^2}{E_{\max}^2 - E_{\min}^2} \right)} \approx 15.23 \text{ eV}.$$

### 6.2.2 Urti relativistici completamente anelastici e decadimenti

**Testo** Si considerino due particelle di masse  $m_1$  ed  $m_2$  che si muovono lungo uno stesso asse con velocità  $v_1$  e  $v_2$ . In un urto completamente anelastico le particelle incidenti rimangono attaccate formando un unico corpo nello stato finale (questo processo descrive anche quando una delle due particelle assorbe l'altra).

- Si trovino la massa  $M$  e la velocità finale  $V$  della particella risultante dal loro urto completamente anelastico. Si discuta, in modo il più generale possibile, la relazione tra  $M$  e  $(m_1 + m_2)$ . Vale ancora la conservazione della massa?
- Ci si specializzi al caso in cui  $m_1 = m_2 = m$  e si studi  $V = V(v_1, v_2)$  e  $M/2m = M/2m(v_1, v_2)$ ;

Le leggi della cinematica relativistica sono invarianti per inversione temporale. Quindi, da un punto di vista cinematico, se un processo è permesso anche il suo inverso lo è. Se un urto totalmente anelastico ha importanti applicazioni nei fenomeni di assorbimento anche il suo inverso riveste una grande importanza in fisica. Infatti, esso corrisponde al decadimento di particelle (per esempio, di un nucleo o di una particella elementare instabile). Si consideri una particella instabile di massa  $M$ , in un sistema di riferimento in cui è in quiete relativa, che decade in due particelle di masse  $m_1$  ed  $m_2$ . Si trovino le energie e le velocità delle particelle finali. Si discutano i vincoli su  $m_1$  e  $m_2$  affinché il decadimento sia possibile (da un punto di vista cinematico). Usando questi risultati si trovino le energie e le velocità per i seguenti decadimenti di particelle elementari:

- un mesone  $\pi^-$  inizialmente fermo in un muone  $\mu^-$  e in un neutrino  $\nu$  (per precisione, in un antineutrino muonico); si assuma  $m_{\pi^-}c^2 = 140$  MeV,  $m_{\mu^-}c^2 = 106$  MeV e  $m_{\nu} = 0$ ;
- un mesone  $\pi^0$  inizialmente fermo in due fotoni; è possibile che nello stato finale ci sia un solo fotone? si assuma  $m_{\pi^0}c^2 = 135$  MeV;
- un mesone  $\pi^0$  inizialmente fermo in un elettrone  $e^-$  e in un positrone  $e^+$  (il positrone è l'antiparticella dell'elettrone: ha quindi la stessa massa, ma carica opposta e  $m_e c^2 = 0.51$  MeV).

**Suggerimento** È sempre utile in RS lavorare con le velocità normalizzate a  $c$ , cioè passare dalle  $v$  alle  $\beta$ . Per lo studio delle funzioni bidimensionali è utile fare grafici 2D con scale di colore.

**Soluzione** Passiamo, con ovvie convenzioni, dalle  $v$  alle  $\beta$  ed esprimiamo i tetramomenti del problema. Per le condizioni iniziali,

$$cp_1 = (m_1\gamma_1c^2, 0, 0, m_1c^2\gamma_1\beta_1) \quad cp_2 = (m_2\gamma_2c^2, 0, 0, m_2c^2\gamma_2\beta_2) \quad \Rightarrow \quad cp_{\text{iniziale}} = cp_1 + cp_2,$$

dove, senza perdere in generalità, abbiamo assunto che il moto delle particelle incidenti avvenga lungo l'asse  $z$ . Per lo stato finale

$$cp_{\text{finale}} = (M\gamma c^2, c\mathbf{p}_{\text{finale}}).$$

Dalla conservazione del tetraimpulso si ha subito che:

$$p_{\text{finale},x} = p_{\text{finale},y} = 0 \quad \rightarrow \quad cp_{\text{finale}} = (M\gamma c^2, 0, 0, Mc^2\gamma\beta).$$

Quindi, rimangono due equazioni:

$$\begin{aligned} M\gamma &= m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 \\ M\gamma\beta &= m_1\gamma_1\beta_1 + m_2\gamma_2\beta_2 \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a  $M$  e  $\beta$  si ottiene:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2)} \\ \beta &= \frac{m_1\gamma_1\beta_1 + m_2\gamma_2\beta_2}{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2} \end{aligned}$$

L'espressione per la massa può essere riscritta come

$$M^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2m_1m_2(\gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2) - 1)$$



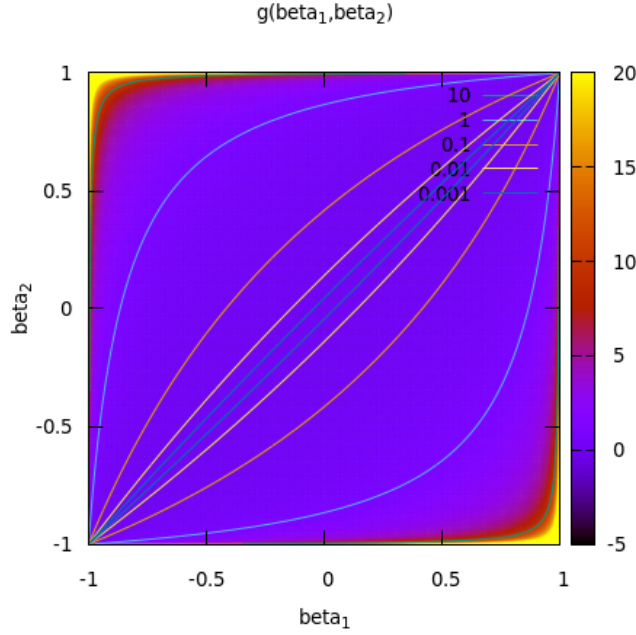


Figure 6.3: Grafico della funzione  $g(\beta_1, \beta_2)$  che descrive il guadagno di energia di riposo rispetto alle velocità nel caso di un urto totalmente anelastico. La scala di colore è limitata, altrimenti divergerebbe agli angoli sulla diagonale secondaria.

Se valesse la conservazione della massa, il secondo termine non dovrebbe esserci. In particolare, se riscriviamo

$$2m_1m_2 \times (\gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2) - 1) = f(m_1, m_2) \times g(\beta_1, \beta_2)$$

allora  $f(m_1, m_2) \geq 0$ . Per quanto riguarda  $g(\beta_1, \beta_2)$ , si ha che  $g(\beta_1, \beta_2) = 0$  solo se  $\beta_1 = \beta_2$ , altrimenti  $g(\beta_1, \beta_2) > 0$ . Il comportamento di  $g(\beta_1, \beta_2)$  è ben visibile in Figura (6.3), dove abbiamo proprio rappresentato  $g(\beta_1, \beta_2)$ .

Quindi:

- $M > (m_1 + m_2)$  (tranne per il caso limite  $\beta_1 = \beta_2$ ): una parte dell'energia cinetica iniziale è convertita in energia di riposo nello stato finale.
- La conversione diventa via via più efficiente per particelle più massive ( $f(m_1, m_2)$ ) e per velocità alte e opposte in verso.
- Per particelle relativistiche,  $\beta_{1,2} \sim \pm 1$ , e discordi in verso ( $\beta_1\beta_2 < 0$ ),  $g(\beta_1, \beta_2)$  cresce fino a divergere.
- Tuttavia, anche per velocità concordi (purchè non identiche,  $g(\beta_1, \beta_1) = 0$ ), una parte dell'energia cinetica è convertita in massa dopo l'urto.

Se ci specializziamo al caso  $m_1 = m_2 = m$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = h(\beta_1, \beta_2) \\ M &= 2m\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \gamma_1\gamma_2(1 - \beta_1\beta_2))} = 2m\sqrt{\left(1 + \frac{g(\beta_1, \beta_2)}{2}\right)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Quindi, per  $M$  si ricade nella discussione precedente per la funzione  $g(\beta_1, \beta_2)$ , mentre per  $\beta$  l'andamento è dato da Figura (6.4). La curva  $\beta_1 = -\beta_2$  dà  $\beta = 0$ , mentre la condizione (limite)  $\beta_1 \approx \beta_2$  dà  $\beta \approx \beta_1$ . Infatti, questa condizione è anche quella con la minor conversione di energia cinetica in energia di massa.

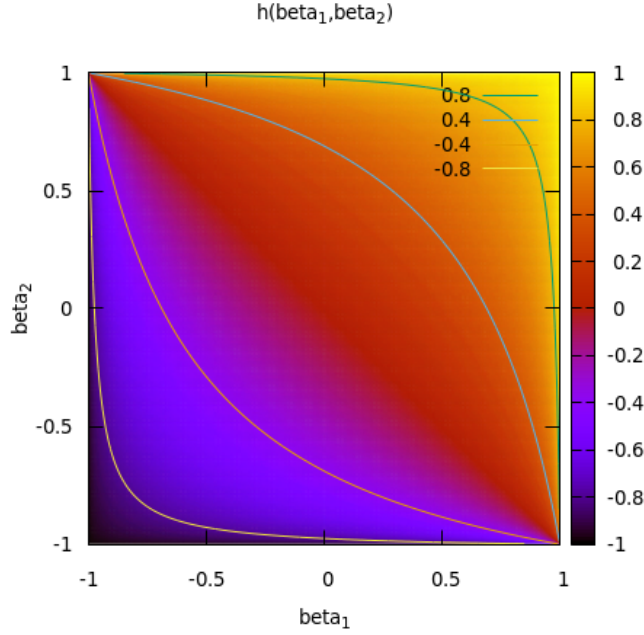


Figure 6.4: Grafico della funzione  $h(\beta_1, \beta_1)$  che descrive la velocità finale di un corpo ottenuto dalla collisione di due particelle identiche di velocità  $\beta_1, 2$ , nel caso di un urto totalmente anelastico.

Consideriamo il caso del decadimento di una particella di massa  $M$  in due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$ . I tre tetramomento associati sono

$$p_{\text{initial}}^\mu = (Mc, \mathbf{0}) \quad p_1^\mu = \left( \frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) \quad p_2^\mu = \left( \frac{E_2}{c}, \mathbf{p}_2 \right)$$

Nello stato iniziale,  $\mathbf{p}_{\text{initial}} = \mathbf{0}$  da cui, per la conservazione della parte spaziale del tetraimpulso

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \rightarrow |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|.$$

La conservazione dell'energia dà:

$$Mc^2 = E_1 + E_2$$

Concentriamoci su  $E_1$  e sfruttiamo le relazioni trovate sopra:

$$Mc^2 = E_1 + \sqrt{m_2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}_2|^2} = E_1 + \sqrt{m_2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}_1|^2} = E_1 + \sqrt{m_2 c^4 + E_1^2 - m_1^2 c^4}$$

Risolvendo rispetto ad  $E_1$  si trova:

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M} c^2.$$

Considerando poi che  $E_1 = m_1 \gamma_{\beta_1} c^2$  è possibile trovare la velocità della particella di massa  $m_1$  (assumendo  $\beta_1 \geq 0$ ):

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \left( \frac{2Mm_1}{M^2 - m_2^2 + m_1^2} \right)^2}$$

Le espressioni per la particella due sono ovviamente simmetriche, basta sostituire 1 con 2 e 2 con 1. Le condizioni su  $m_1$  e  $m_2$  affinché il problema sia risolubile si trovano chiedendo che:

$$0 \leq 1 - \left( \frac{2Mm_1}{M^2 - m_2^2 + m_1^2} \right)^2 \leq 1. \quad (6.2)$$

Definendo  $x = m_1/M > 0$  e  $y = m_2/M > 0$ , la disequazione (non banale) diventa:

$$\left( \frac{2x}{1 - y^2 + x^2} \right)^2 - 1 \leq 0, \quad (6.3)$$

e la discussione del segno porta a  $x + y \leq 1$ .

Esiste un modo più intuitivo per risolvere questa disequazione. La conservazione dell'energia può anche essere espressa come:

$$Mc^2 = m_1 c^2 \gamma_{\beta_1} + m_2 c^2 \gamma_{\beta_2}.$$

Dal momento che  $\gamma \geq 1$  e  $\gamma = 1$  se e solo se  $\beta = 0$ ,

$$M \geq m_1 + m_2,$$

ed effettivamente sostituendo  $m_2 = M - m_1$  nell'espressione per  $\beta_1$  si trova  $\beta_1 = 0$ . Quindi, il caso limite si ottiene quando le due particelle nello stato finale sono ferme: in questo caso, tutta l'energia di riposo della particella iniziale è utilizzata nell'energia di riposo delle particelle finali, e non rimane energia cinetica a disposizione. Dal momento che l'impulso iniziale è nullo, questa configurazione conserva anche l'impulso spaziale ed è dunque compatibile con la conservazione del tetraimpulso. Dunque, le condizioni (6.2) sono verificate se

$$\begin{cases} m_1 \geq 0 \\ m_2 \geq 0 \\ M \geq m_1 + m_2. \end{cases} \quad (6.4)$$

Attenzione: il verificarsi delle condizioni cinematiche è condizione necessaria, ma non sufficiente affinché una reazione di decadimento avvenga. Ci sono altre condizioni di tipo dinamico e legate alle leggi di conservazione delle cariche e dei numeri quantici.

Passiamo ora ai tre casi pratici:

- decadimento

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu$$

In questo caso, sfruttando le relazioni generali ottenute sopra si ottiene

$$E_\mu \approx 110.1 \text{ MeV} \quad \beta_\mu \approx 0.271 \quad E_\nu \approx 29.9 \text{ MeV} \quad \beta_\nu = 1$$

- decadimento

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

In questo caso, i due fotoni devono avere le stesse proprietà

$$E_\gamma = \frac{m_{\pi^0} c^2}{2} \approx 67.5 \text{ MeV} \quad \beta_\gamma = 1$$

- decadimento

$$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$$

In questo caso, avendo la stessa massa, le particelle finali hanno le stesse proprietà cinematiche:

$$E_e = \frac{m_{\pi^0} c^2}{2} \approx 67.5 \text{ MeV} \quad \beta_e = \sqrt{1 - \left( \frac{2m_e}{m_{\pi^0}} \right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2m_e}{m_{\pi^0}} \right)^2 \approx 1 - 2.9 \times 10^{-5}$$

### 6.2.3 Collisori di particelle

**Premessa** La fisica delle particelle elementari contemporanea si basa molto sull'uso di collisori: macchine in grado di accelerare le particelle elementari fino a velocità prossime a  $c$  e di farle scontrare, al fine di rilevare e analizzare i prodotti di queste collisioni. Un elemento fondamentale per l'avanzamento della fisica delle particelle elementari è stato il raggiungimento di scale energetiche dell'urto via via più elevate. In particolare, al raggiungimento di certi valori dell'energia corrisponde l'osservazione di reazioni che non sono visibili ad energie più basse, per effetto della conversione di energia cinetica in energia di massa (e viceversa). Esistono due tipologie di esperimento: il caso in cui una fascio di particelle è inviato contro un bersaglio fisso e il caso in cui due fasci di particelle sono fatti scontrare head-on, cioè collinearmente e con direzione opposta. Secondo la RS, la seconda tecnica è molto più efficace nel raggiungere alte energie e questo esercizio vuole dimostrarlo

**Testo** Si supponga di disporre di un apparato sperimentale che sia in grado di accelerare particelle di massa  $m$  ad una certa velocità  $v$  (e quindi ad una certa energia  $\epsilon$ ). Si definisca poi la scala energetica di un urto  $\mathcal{T}$  come l'energia cinetica della particella incidente misurata nel sistema in cui la particella bersaglio è in quiete.

In un primo esperimento, E1, si consideri una particella di massa  $m$  ed energia  $\epsilon$  inviata contro una particella di identica massa, ma in quiete. In un secondo esperimento E2, la prima particella è sempre accelerata ad energia  $\epsilon$ , ma adesso anche la seconda particella è accelerata dal medesimo apparato sperimentale e fatta collidere contro la prima.

È chiaro che E2 sia più energetico di E1, ma in questo esercizio vogliamo quantificare il guadagno in termini di scala energetica dell'urto. Per far questo, si calcoli la scala d'energia dell'urto:

- assumendo le leggi della meccanica pre-relativistica;
- assumendo le leggi della meccanica relativistica.

Ci si specializzi al caso di un urto protone-protone (come a LHC o a Tevatron) usando la fisica relativistica. Si calcoli:

- l'energia di riposo del protone;
- la velocità del protone in funzione dell'energia. Qual è l'energia minima considerabile? Come energia massima si prenda  $1 \text{ PeV} = 10^{15} \text{ eV}$ ;
- energia totale e cinetica di soglia per la produzione nello stato finale di una coppia protone-antiprotone, cioè l'energia minima necessaria affinché avvenga la reazione:

$$p + p \rightarrow p + p + \bar{p} + p,$$

sia nel caso di una collisione su target fermo sia nel caso di due fasci simmetrici. Un antiprotone è l'antiparticella del protone. In pratica è una particella che ha la stessa massa del protone, ma carica opposta.

**Soluzione** Per semplicità assumiamo che l'asse su cui avviene il moto dei fasci sia l'asse  $z$ . Cominciamo con il notare che la denominazione di esperimento a target fermo o esperimento di collisione tra fasci dipende dal sistema di riferimento. Infatti, per E1 è possibile individuare un sistema di riferimento (legato a quello di E1 da un boost di Lorentz lungo  $z$ ) in cui l'esperimento è una collisione tra fasci di uguale energia (esperimento E1'). Similmente per E2 è possibile individuare un sistema di riferimento (legato a quello di E2 da un boost di Lorentz lungo  $z$ ) in cui la seconda particella è a target fermo (esperimento E2'). Chiaramente, l'energia in E1' non è la stessa di quella in E2, quindi si tratta di due esperimenti distinti.

**Caso pre-relativistico** Se le leggi della meccanica fosse quelle pre-relativistiche, l'energia  $\epsilon$  sarebbe da intendersi come:

$$\epsilon = T_{\text{NR}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Per il caso E1, la scala di energia dell'urto è proprio l'energia cinetica della particella che collide sul bersaglio fermo,

$$\mathcal{T}_{\text{E1,NR}} = \epsilon.$$

Consideriamo il caso E2 e sia  $\mathcal{O}$  il sistema di riferimento del laboratorio (che in questo caso coincide con il sistema del centro di massa) e  $\tilde{\mathcal{O}}$  quello in quiete relativa rispetto alla seconda particella (che dunque osserva E2'). In  $\mathcal{O}$ , per due particelle con la stessa massa e la stessa energia, la velocità non può che essere la stessa in modulo (e opposta in verso):  $v_2 = -v_1 = -v = -\sqrt{2\epsilon/m}$ . Nel sistema  $\tilde{\mathcal{O}}$ , si avrebbe invece  $\tilde{v}_1 = 2v$  e quindi

$$\mathcal{T}_{\text{E2,NR}} = \frac{1}{2}m(\tilde{v}_1)^2 = 4\epsilon.$$

Quindi passando da E1 ad E2 si avrebbe un guadagno di un fattore 4 nella scala di energia.

**Caso relativistico** Consideriamo ora il problema secondo la meccanica relativistica. Per quanto riguarda E1, la scala di energia dell'urto è data da

$$\mathcal{T}_{E1,RS} = T = \epsilon - mc^2.$$

Per E2 ( $\mathcal{O}$ ) e E2' ( $\mathcal{O}'$ ), consideriamo il tetramomento totale. Quando si ha a che fare con sistemi di riferimento diversi, una strategia furba è quella di calcolare una grandezza invariante, in modo da poter confrontare la sua espressione nei due sistemi di riferimento. In  $\mathcal{O}$ ,

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = \left(\frac{\epsilon}{c}, 0, 0, |\mathbf{p}|\right) + \left(\frac{\epsilon}{c}, 0, 0, -|\mathbf{p}|\right) = \left(\frac{2\epsilon}{c}, 0, 0, 0\right).$$

Nel sistema  $\tilde{\mathcal{O}}$ , se  $\tilde{E}$  è l'energia relativistica (trasformata di  $\epsilon$  sotto il boost corrispondente):

$$\tilde{p}^\mu = \tilde{p}_1^\mu + \tilde{p}_2^\mu = \left(\frac{\tilde{E}}{c}, 0, 0, \sqrt{\frac{\tilde{E}^2}{c^2} - m^2 c^2}\right) + (mc, 0, 0, 0) = \left(\frac{\tilde{E}}{c} + mc, 0, 0, \sqrt{\frac{\tilde{E}^2}{c^2} - m^2 c^2}\right).$$

Trattandosi di un tetramomento, il suo quadrato è lo stesso nei due sistemi di riferimento:

$$\begin{aligned} p^2 &= p'^2 \\ \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= \eta_{\mu\nu} p'^\mu p'^\nu \\ -\frac{4\epsilon^2}{c^2} &= -2\tilde{E}m - 2m^2 c^2. \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a  $\tilde{E}$  si ottiene:

$$\tilde{E} = \frac{2\epsilon^2}{mc^2} - mc^2. \quad (6.5)$$

È possibile esprimere il risultato in termini dell'energia cinetica. Infatti, se  $\mathcal{T}_{E2,RS} = \tilde{T} = \tilde{E} - mc^2$  e  $\mathcal{T}_{E1,RS} = T = \epsilon - mc^2$ , sostituendo si ottiene:

$$\mathcal{T}_{E2,RS} = 4\mathcal{T}_{E1,RS} \left(1 + \frac{\mathcal{T}_{E1,RS}}{2mc^2}\right). \quad (6.6)$$

È chiaro che la dipendenza quadratica da  $\epsilon$  o da  $T$  ottenuta applicando correttamente la fisica relativistica rende il guadagno energetico di una collisione fascio-fascio (rispetto ad una a bersaglio fermo) potenzialmente molto più significativo che nel caso pre-relativistico.

**Il caso di un collisore protone-protone** Nel caso di un collisore  $pp$ ,

- l'energia di riposo del protone è  $m_p c^2 \approx 938,272$  MeV;
- dall'espressione dell'energia relativistica,  $E = m\gamma c^2$ , otteniamo

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$$

Questa espressione ammette un'energia minima ( $mc^2$ ) a cui corrisponde  $\beta = 0$ . In Figura (6.5) si ha un grafico dell'andamento (in realtà di  $\delta = 1 - \beta$ ).

- per trovare l'energia di soglia conviene cominciare con il caso dei due fasci simmetrici. In esso, per la simmetria dell'urto, l'impulso totale deve essere nullo. Nello stato finale, l'energia di soglia corrisponde al caso in cui tutte le quattro particelle sono ferme (quindi, tutta l'energia cinetica disponibile nello stato iniziale è stata usata per produrre massa nello stato finale). Questo stato è compatibile con la conservazione dell'impulso spaziale. Per la conservazione dell'energia tra lo stato iniziale e quello finale,

$$\epsilon_{\text{soglia}} + \epsilon_{\text{soglia}} = 4mc^2.$$

Quindi, l'energia totale di soglia in questo caso è

$$\epsilon_{\text{soglia}} = 2mc^2.$$

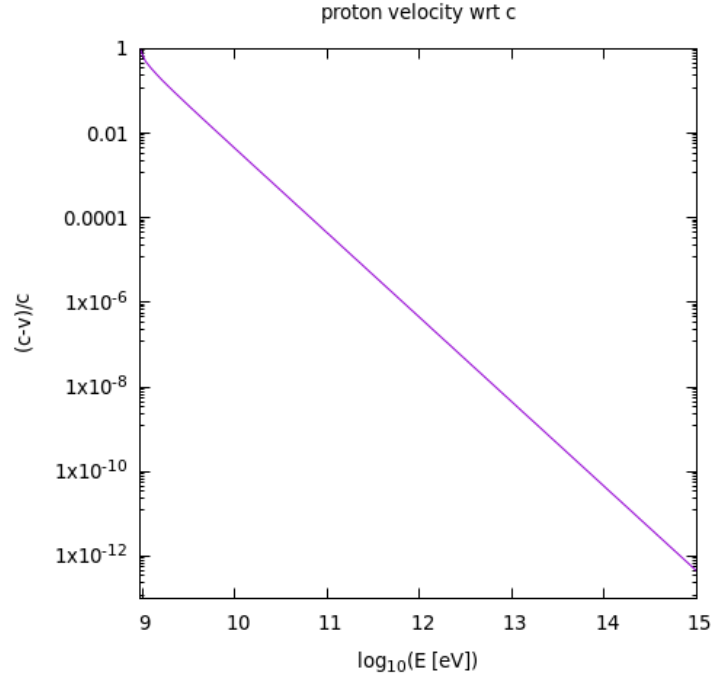


Figure 6.5: Velocità di un protone di energia relativistica  $E$ . La velocità è espressa attraverso la sua distanza relativa da  $c$ , cioè come  $\delta = (v - c)/c$

L'energia cinetica di soglia si ottiene semplicemente rimuovendo l'energia di riposo del protone:

$$T_{\text{soglia}} = \epsilon_{\text{soglia}} - mc^2 = mc^2.$$

L'avverarsi della reazione non dipende dal sistema di riferimento. Quindi, il caso con target fermo si ottiene semplicemente passando dal sistema del centro di massa a quello del laboratorio. Sfruttando la relazioni (6.5) possiamo trovare direttamente l'energia di soglia nel caso di un urto su target fermo:

$$\tilde{E}_{\text{soglia}} = \tilde{E}(\epsilon = \epsilon_{\text{soglia}}) = 7mc^2 \quad \tilde{T}_{\text{soglia}} = \tilde{E}_{\text{soglia}} - mc^2 = 6mc^2$$

Nel caso di un urto con target fermo la particella incidente deve avere molta più energia per attivare la reazione, in accordo con (6.6). Il motivo è che, per conservare l'impulso, non tutta l'energia cinetica a disposizione può essere convertita in energia di massa: una parte deve essere presente come energia cinetica nello stato finale.

## 6.3 Elettrodinamica Relativistica

### 6.3.1 Campo elettromagnetico generato da una carica in moto rettilineo uniforme

**Testo** Si calcoli il campo elettromagnetico generato da una carica puntiforme  $q$  che si muove di moto rettilineo uniforme a velocità  $v$  nella direzione positiva dell'asse  $x$ . Si dimostri in particolare che il campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1 - v^2/c^2)}{(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6.7)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che istantaneamente connette la posizione della carica e il punto  $\mathbf{x}$  dove il campo è valutato, mentre  $\theta$  è l'angolo polare di  $\mathbf{r}$  di un sistema sferico centrato nella carica e avente l'asse di riferimento coincidente con l'asse  $x$  (cioè l'angolo che  $\mathbf{r}$  forma con il versore dell'asse  $x$ ). Si commenti brevemente la distribuzione delle linee di campo in funzione di  $v$  e  $\theta$  e si trovi l'espressione per  $\mathbf{B}$ .

**Soluzione** Definiamo  $\mathcal{O}$  il sistema di riferimento in cui la carica è in moto. Sia  $\mathcal{O}'$  il sistema solidale con la carica, cioè il sistema in cui la carica è in quiete relativa e posta nell'origine. In  $\mathcal{O}'$  la carica genera un campo puramente elettrostatico:

$$\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \mathbf{r}'$$

dove  $\mathbf{r}'$  è il vettore posizione in  $\mathcal{O}'$  (in cui  $\mathbf{r}' = \mathbf{x}'$ ). Espresso in componenti:

$$\begin{cases} E'_x(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_y(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E'_z(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (6.8)$$

Per trovare il campo elettromagnetico in  $\mathcal{O}$  applichiamo le leggi di trasformazione del campo elettrico (5.20):

$$\begin{cases} E_x(t, x, y, z) = E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E_y(t, x, y, z) = \gamma_v E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_v qy'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E_z(t, x, y, z) = \gamma_v E'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_v qz'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (6.9)$$

In questa espressione i campi sono ancora espressi rispetto alle coordinate del sistema  $\mathcal{O}'$ , cioè  $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ . La conversione è data dalle TL, (2.18):

$$\begin{cases} E_x(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v(x-vt)}{(\gamma_v^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ E_y(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v y}{(\gamma_v^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ E_z(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v z}{(\gamma_v^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (6.10)$$

In  $\mathcal{O}$ , ad ogni istante di tempo è possibile definire il vettore  $\mathbf{r}$  che definisce la posizione di un qualsiasi punto dello spazio rispetto alla posizione della carica in moto,  $\mathbf{r}_q$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{r}_q$$

che diventa

$$\begin{cases} r_x = x - vt \\ r_y = y \\ r_z = z \end{cases} \quad (6.11)$$

e quindi

$$\begin{cases} E_x(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_x}{(\gamma_v^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2}} \\ E_y(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_y}{(\gamma_v^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2}} \\ E_z(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_z}{(\gamma_v^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (6.12)$$

Per riscrivere in maniera furba il denominatore notiamo che, oltre che in coordinate Cartesiane, il vettore  $\mathbf{r}$  può essere espresso anche in coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\begin{cases} r_x = r \cos \theta \\ r_y = r \sin \theta \cos \phi \\ r_z = r \sin \theta \sin \phi \end{cases} \quad (6.13)$$

tali che:

$$\begin{cases} E_x(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_x}{(\gamma_v^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ E_y(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_y}{(\gamma_v^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ E_z(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v r_z}{(\gamma_v^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \end{cases} \quad (6.14)$$

e questo ci permette di trovare l'espressione vettoriale finale per  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_v \mathbf{r}}{(\gamma_v^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (6.15)$$

Con semplici passaggi algebrici si può riscrivere come:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1 - v^2/c^2)}{(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6.16)$$

Mentre in  $\mathcal{O}'$  il campo è puramente elettrostatico ( $\mathbf{B}' = 0$  ovunque e sempre), in  $\mathcal{O}$  ci sarà anche un campo magnetico. Dal momento che  $\mathbf{B}' = 0$ , possiamo usare la relazione che lega i campi in un qualsiasi sistema boostato, nell'ipotesi che esista un riferimento dove il campo magnetico è nullo:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (6.17)$$

Sfuttando il fatto che  $1/c^2 = \epsilon_0\mu_0$  e che nel nostro caso  $\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_x$ , si ha immediatamente:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv(1 - v^2/c^2)}{(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.18)$$

Scrivendo le componenti cartesiane di  $\mathbf{r}$  nelle coordinate sferiche date:

$$\mathbf{r} = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_y + \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_z$$

si ha

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{r} = r \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + r \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z \quad (6.19)$$

$$= r \sin\theta (\cos\phi \mathbf{e}_z - \sin\phi \mathbf{e}_y) \quad (6.20)$$

ma nel sistema di coordinate scelto:

$$\hat{\phi} = (-\sin\theta \mathbf{e}_y + \cos\phi \mathbf{e}_z)$$

e dunque si ha infine:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv(1 - v^2/c^2) \sin\theta}{(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\hat{\phi}}{r^2} \quad (6.21)$$

Per quanto riguarda il campo  $\mathbf{E}$ , si ha il risultato notevole che, anche nel caso di una carica in moto rettilineo uniforme, il campo elettrico punta sempre in direzione radiale. Tuttavia, mentre nel caso di carica in quiete (e anche per  $v \ll c$ ) il campo è isotropo e le linee di campo sono distribuite uniformemente nello spazio, all'aumentare di  $v$ , cioè per  $v \lesssim c$ , l'intensità del campo decresce notevolmente nella direzione  $x$ , mentre ha il suo massimo nel piano trasversale alla direzione del moto. In termini di linee di campo, le linee, pur rimanendo radiali, si addensano sopra e sotto la carica.

### 6.3.2 L'effetto Doppler Relativistico

**Premessa** L'effetto Doppler è la modifica della frequenza di un'onda per effetto del moto relativo tra la sorgente e l'osservatore. È un fenomeno ben noto: se una sirena è in avvicinamento, la sua frequenza è più acuta, mentre diventa più grave quando la sorgente è in allontanamento. La luce è pure affetta dall'effetto Doppler. Nel limite di piccole velocità, la formula dell'effetto Doppler per la radiazione luminosa è

$$\nu_{\text{oss}} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{(1 - v \cos\theta/c)}$$

dove  $\nu_{\text{oss}}$  è la frequenza osservata,  $\nu_{\text{sor}}$  la frequenza emessa (cioè misurata da un osservatore in quiete rispetto alla sorgente),  $\mathbf{v}$  la velocità della sorgente,  $\theta$  l'angolo tra  $\mathbf{v}$  e il vettore unitario che unisce la sorgente all'osservatore (in pratica, è il vettore unitario del vettore d'onda della radiazione elettromagnetica che giunge all'osservatore). Se il moto avviene lungo l'asse che unisce osservatore e sorgente, in caso di avvicinamento:

$$\nu_{\text{oss}} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{(1 - v/c)} > \nu_{\text{sor}}$$

mentre per allontanamento

$$\nu_{\text{oss}} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{(1 + v/c)} < \nu_{\text{sor}}$$



**Testo** Sia  $\mathcal{O}$  un osservatore inerziale e sia  $S$  una sorgente di radiazione luminosa in moto rispetto a  $\mathcal{O}$  con velocità  $\mathbf{v} = v\mathbf{n}_s$ . Sia  $\nu_{\text{sor}}$  la frequenza con cui è emessa la radiazione elettromagnetica in un sistema di riferimento solidale a  $S$  e sia  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}_\gamma$  il vettore d'onda della radiazione rilevata da  $\mathcal{O}$ , cioè  $\mathbf{n}_\gamma$  è la direzione in cui si muove la radiazione elettromagnetica. Si calcoli la formula per l'effetto Doppler relativistico. In particolare, si dimostri che

$$\nu_{\text{oss}} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{\gamma(1 - \beta\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_\gamma)}$$

dove  $\beta = v/c$  e  $\nu_{\text{oss}}$  è la frequenza osservata da  $\mathcal{O}$ . Suggerimento: si risolva il problema prima per moto lungo l'asse congiungente,  $\mathbf{n}_s = \pm\mathbf{n}_\gamma$ . La generalizzazione dovrebbe poi essere immediata. Si discutano poi le differenze rispetto al limite non-relativistico. Si consideri, in particolare, cosa accade per  $\mathbf{n}_s$  e  $\mathbf{n}_\gamma$  ortogonali.

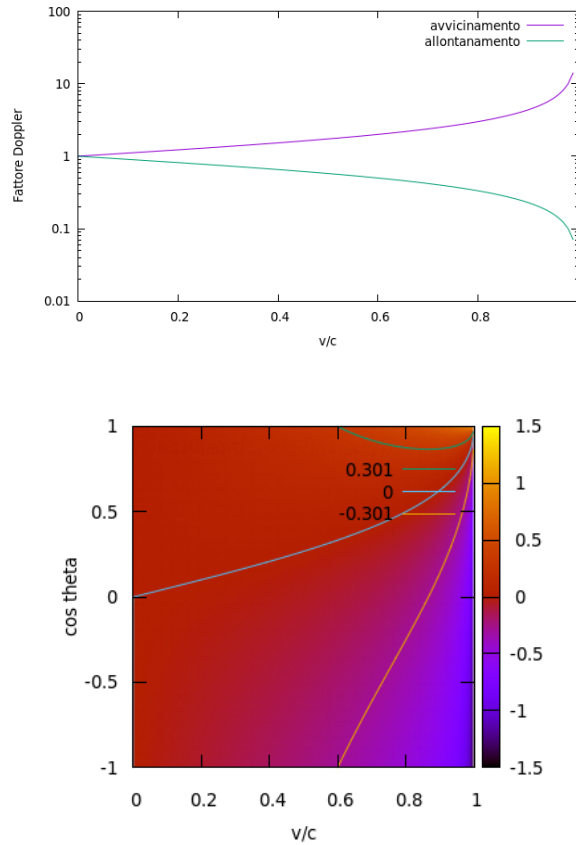


Figure 6.6: Pannello superiore: Fattore Doppler in scala logaritmica per un moto di avvicinamento o di allontanamento. Pannello inferiore: Logaritmo del fattore Doppler in funzione del modulo della velocità e di  $\cos\theta$ . La linea di contorno 0 corrisponde a frequenza invariata, mentre le altre due a fattori 2 e 1/2 (in scala lineare).

**Soluzione** Cominciamo a considerare il caso di una sorgente in allontanamento lungo l'asse che unisce  $\mathcal{O}$  a  $S$ . Trattandosi di un fenomeno periodico, la frequenza è definita come il numero di cicli  $N$  diviso il tempo impiegato per completarli. Nel sistema di quiete relativa rispetto ad  $S$ ,

$$\nu_{\text{sor}} = \frac{N}{\Delta t_{\text{sor}}} = \frac{N}{\Delta\tau}$$

dove  $\Delta t_{\text{sor}} = \Delta\tau$  è l'intervallo di tempo (proprio) necessario per compiere gli  $N$  cicli in  $S$ . Il numero di cicli è una proprietà intrinseca e non dipende dall'osservatore. Quindi, ci possiamo chiedere qual è l'intervallo di tempo  $\Delta t_{\text{obs}}$  che l'osservatore  $\mathcal{O}$  associa agli  $N$  cicli. Gli effetti da considerare sono due:

1. la dilatazione dei tempi, per cui  $\Delta t = \gamma\Delta\tau$  (quindi,  $\Delta t$  è semplicemente definito come il tempo coordinato corrispondente a  $\Delta\tau$ , da non confondersi con  $\Delta t_{\text{obs}}$ );

2. quando il primo ciclo è emesso, la sorgente si trova ad una certa distanza  $x_a$  da  $\mathcal{O}$ ; quando l'emissione degli  $N$  cicli è stata completata, la sorgente si è mossa fino a  $x_b = x_a + v\Delta t$ . Quindi, la parte finale della radiazione impiega più tempo a giungere ad  $\mathcal{O}$  perchè deve percorrere un tratto aggiuntivo  $x_b - x_a = v\Delta t$ , a cui corrisponde un ritardo  $(x_b - x_a)/c = (v/c)\Delta t$

Nel complesso, il tempo  $\Delta t_{\text{obs}}$  che  $\mathcal{O}$  associa agli  $N$  cicli è

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t + \frac{v}{c}\Delta t = \Delta t \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

da cui

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{N}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{\gamma (1 + v/c)} = \nu_{\text{sor}} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Quindi, per una sorgente in allontanamento la frequenza diventa più piccola per effetto del moto di allontanamento. Allo stesso modo, la dilatazione dei tempi riduce sempre la frequenza osservata e l'effetto diventa via via più sensibile all'aumentare della velocità. In maniera del tutto analoga, se la sorgente è in avvicinamento si ottiene:

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{N}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{\gamma (1 - v/c)} = \nu_{\text{sor}} \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Qui, i due effetti vanno in direzione opposta: la dilatazione dei tempi tende a diminuire la frequenza, mentre il moto relativo ad aumentarla.

Se teniamo conto che il moto può anche avvenire in direzione arbitraria, la distanza aggiuntiva che l'ultimo ciclo deve percorrere è affetta solo dalla componente della velocità parallela alla direzione di propagazione della radiazione. È facile convincersi che la generalizzazione delle due formule particolari è quindi data da

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{N}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{\gamma (1 - v/c \mathbf{n}_\gamma \cdot \mathbf{n}_s)} = \frac{\nu_{\text{sor}}}{\gamma (1 - v/c \cos \theta)}$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{n}_\gamma$  e  $\mathbf{n}_s$ . In Figura(6.6) si sono rappresentati sia il fattore Doppler  $\nu_{\text{obs}}/\nu_{\text{sor}}$  per moto di avvicinamento o allontanamento (parte superiore) o per un moto generico (parte inferiore). Anche per una sorgente che si muove trasversalmente rispetto alla radiazione emessa si verifica un'effetto Doppler dovuto alla dilatazione dei tempi.

### 6.3.3 Formula di Larmor relativistica

**Premessa** La formula di Larmor derivata a lezione è valida nel limite non-relativistico. In questo esercizio deriveremo in maniera euristica la sua generalizzazione relativistica.

**Testo** Si trovi la generalizzazione della formula di Larmor al caso di particelle in moto a velocità relativistiche riscrivendo la formula di Larmor come:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c m^2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.22)$$

e cercando una generalizzazione covariante tale che

- la potenza si trasformi come uno scalare (perchè deve essere uno scalare?);
- espressa nel formalismo tridimensionale dipenda solo da  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$ ;
- dia il limite corretto per  $v \ll c$ .

**Soluzione** La potenza è il rapporto tra l'energia e il tempo, entrambi componenti 0 di vettori contravarianti. Quindi, è intuitivo che trasformi come uno scalare. Dobbiamo quindi cercare una generalizzazione della formula (6.22) che sia uno scalare. La più semplice delle generalizzazioni è:

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c m^2} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (6.23)$$

Verifichiamo, per prima cosa, che questa formula si riduce all'espressione (6.22) nel limite di basse velocità:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{dE}{d\tau} \frac{dE}{d\tau} + \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \quad (6.24)$$

Nelle lezioni di RS avevamo dimostrato che

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

da cui:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma^2 \left( - \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

il cui termine dominante per  $v/c \rightarrow 0$  è proprio:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} \approx \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Se alla formula (6.24) sostituiamo due delle espressioni trovate a lezione nella parte di dinamica relativistica,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma (\mathbf{a} + \gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}) \boldsymbol{\beta})$$

Sostituendo ed eseguendo i quadrati si ottiene

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^2}{6\pi c m^2} m^2 \gamma^2 \left( a^2 + 2\gamma^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \gamma^4 \beta^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 (1 + \gamma^2 \beta^2)^2 \right).$$

Per semplificare sfruttiamo prima di tutto  $(1 + \gamma^2 \beta^2) = \gamma^2$ :

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^2}{6\pi c m^2} m^2 \gamma^2 \left( a^2 + 2\gamma^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \gamma^4 \beta^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \gamma^4 \right).$$

mettendo poi in evidenza  $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2$  e sfruttando  $1 - \beta^2 = \gamma^{-2}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu_0 q^2 \gamma^2}{6\pi c} \gamma^2 \left( a^2 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 (2\gamma^2 + \gamma^4 \beta^2 - \gamma^4) \right) \\ &= \frac{\mu_0 q^2 \gamma^2}{6\pi c} \gamma^2 \left( a^2 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 (2\gamma^2 - \gamma^4 (1 - \beta^2)) \right) \\ &= \frac{\mu_0 q^2 \gamma^2}{6\pi c} \gamma^2 \left( a^2 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 (2\gamma^2 - \gamma^2) \right) \end{aligned}$$

da cui

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^4}{6\pi c} (a^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a})^2)$$

Usando la relazione notevole:

$$(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a})^2 = a^2 \beta^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2$$

si ottiene infine

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} (a^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2)$$

che è la generalizzazione di Lienard alla formula di Larmor per velocità relativistiche. Nel caso di una particella che si muove di moto circolare uniforme,  $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$  e la potenza irradiata in regime relativistico è amplificata dal fattore  $\gamma^4$  rispetto al caso non-relativistico. Nel caso in cui la particella accelera o decelera di moto lineare ( $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\beta} = 0$ ), la potenza irradiata è addirittura  $\gamma^6$  maggiore che nel caso non-relativistico.

### 6.3.4 L'effetto Compton e l'effetto Compton inverso (facoltativo)

**Premessa** Nel 1922 Arthur Compton eseguì il seguente esperimento: inviò un fascio di raggi X (quindi, radiazione elettromagnetica di alta frequenza  $\nu$  /piccola lunghezza d'onda  $\lambda$ ) contro un bersaglio di grafite. La radiazione, inizialmente molto collimata, veniva diffusa su tutto l'angolo solido e aveva una lunghezza d'onda più grande (e una frequenza più piccola). In particolare, misurando la lunghezza d'onda della

radiazione diffusa  $\lambda'$  in funzione dell'angolo di diffusione  $\theta$  (definito come l'angolo tra la direzione della radiazione prima e dopo l'urto con la grafite), Compton trovò la seguente dipendenza:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) .$$

La spiegazione dell'effetto Compton si ottiene considerando la natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica. Infatti, questo effetto si spiega come l'urto relativistico tra un fotone (un quanto di luce) di energia  $E_\gamma$  e un elettrone della grafite (praticamente fermo nel sistema del laboratorio) assumendo la seguente relazione (proposta prima da Planck e poi da Einstein) che lega la frequenza o la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica all'energia del fotone:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (6.25)$$

Nell'urto il fotone perde una parte della sua energia che viene trasmessa all'elettrone. Una trattazione dettagliata dell'effetto Compton si ottiene dunque considerando l'urto

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

nel sistema di riferimento in cui l'elettrone iniziale è in quiete. Essa è stata, per esempio, sviluppata nella parte di introduzione alla meccanica quantistica di questo corso. Qui la riproponiamo come esercizio sul formalismo covariante. Inoltre, si propone una sua variante nota come effetto Compton inverso, molto importante in ambito astrofisico e cosmologico, Nell'effetto Compton inverso una particella ad alta energia (in genere, un elettrone o un protone) urta contro un fotone di bassa energia, cedendogli una parte della sua energia. Il fotone diventa quindi più energetico. Questo effetto è molto importante, per esempio, per spiegare la radiazione emessa dai nuclei galattici attivi o le anisotropie secondarie nella radiazione cosmica di fondo (*effetto Sunyaev-Zel'dovich*). La radiazione cosmica di fondo è una delle prove più importanti della teoria del Big Bang. Si tratta di un gas di fotoni che permea tutto l'universo. La temperatura di questo gas è di 2.725 Kelvin a cui corrisponde un'energia media del fotone di  $2 \times 10^{-4}$  eV.

### Testo

- Si consideri un fotone di energia  $E_\gamma$  che collide contro un elettrone fermo di massa  $m$ . Si trovi l'energia con cui è diffuso il fotone in funzione dell'angolo di diffusione  $\theta$ . Sostituendo l'equazione (6.25), si trovi anche la variazione della lunghezza d'onda in funzione dell'angolo di diffusione.
- Si consideri poi l'effetto inverso, in cui un raggio cosmico ad alta energia (cioè una particella elementare accelerata ad energie  $E \gg mc^2$ ) si scontra con un fotone della radiazione cosmica di fondo (di energia  $E_\gamma \approx 2 \times 10^{-4}$  eV). Si dimostri che la massima energia che può assumere il fotone nello stato finale è data da

$$E'_\gamma(E, E_\gamma) \approx \frac{E \left(1 - \frac{m^2 c^4}{4E^2}\right)}{1 + \left(\frac{m^2 c^4}{4E_\gamma E}\right)}$$

Si valuti (per esempio, attraverso un grafico) questa espressione sia per protoni che per elettroni con energie che variano tra 1 GeV e  $10^{20}$  eV.

**Suggerimento** La soluzione più completa del problema dell'effetto Compton si trova esprimendo i tetraimpulsi delle 4 particelle nel sistema del laboratorio e risolvendo le 4 equazioni che discendono dalla conservazione del tetraimpulso. Questa soluzione permette di caratterizzare sia il fotone che l'elettrone nello stato finale. Il risultato è che il fotone perde parte della sua energia cinetica che viene trasmessa all'elettrone. Tuttavia, dal momento che il testo dell'esercizio ci chiede di focalizzarci solo sul fotone, esiste una soluzione più rapida che sfrutta il formalismo covariante. Per chi avesse già visto la soluzione dettagliata, si consiglia di provare questa nuova soluzione. In particolare,

- si lavori in un generico sistema di riferimento e si esprima la conservazione del tetraimpulso. La si esprima isolando a membro di sinistra il tetraimpulso dell'elettrone nello stato finale (che è la particella di cui non siamo interessati);
- si sfrutti la relazione  $c^2 p^2 = -m^2 c^4$ ;

- solo a questo punto ci si specializzi nel sistema del laboratorio in cui l'elettrone iniziale è fermo e in cui si definisce l'angolo di scattering  $\theta$ .

La stessa strategia può essere usata anche per l'effetto Compton inverso. In questo caso, si dimostri come passo intermedio che l'energia massima si ottiene nel caso in cui la collisione è collineare e il fotone nello stato finale emerge nella stessa direzione del raggio cosmico incidente. Il suo valore è pari a:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E + c|\mathbf{p}|)}{2E_\gamma + E - c|\mathbf{p}|},$$

dove  $|\mathbf{p}|$  è il modulo dell'impulso spaziale del raggio cosmico. Solo a questo punto si espanda  $c|\mathbf{p}|$  nel limite relativistico per ottenere l'espressione richiesta dell'energia.

**Soluzione** Consideriamo un generico urto tra un fotone ed un elettrone. Se definiamo con  $k_\gamma$  e  $k_e$  i tetraimpulsi nello stato iniziale, e con  $p_\gamma$  e  $p_e$  quello dello stato finale, in un generico sistema di riferimento si ha

$$k_\gamma + k_e = p_\gamma + p_e.$$

Risolviamo rispetto a  $p_e$  e calcoliamo il quadrato (usando il prodotto nello spazio di Minkowski):

$$\begin{aligned} p_e^2 &= (k_\gamma + k_e - p_\gamma)^2 \\ -m^2c^2 &= -m^2c^2 + 2k_\gamma \cdot k_e - 2k_\gamma \cdot p_\gamma - 2k_e \cdot p_\gamma \\ 0 &= k_\gamma \cdot k_e - k_\gamma \cdot p_\gamma - k_e \cdot p_\gamma. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sottolineiamo che questa relazione è valida in ogni sistema di riferimento e quindi è valida sia per l'effetto Compton che per il suo inverso.

A questo punto, consideriamo l'effetto Compton (cioè l'elettrone fermo nello stato iniziale) ed esprimiamo i tetramomenti necessari nel sistema di riferimento del laboratorio:

$$k_e = (mc, 0, 0, 0) \quad k_\gamma = \left( \frac{E_\gamma}{c}, 0, 0, \frac{E_\gamma}{c} \right) \quad p_\gamma = \left( \frac{E'_\gamma}{c}, \frac{E'_\gamma}{c} \sin \theta, 0, \frac{E'_\gamma}{c} \cos \theta \right).$$

Calcolando i prodotti scalare di (6.26) nelli spazio di Minkowski e risolvendo rispetto a  $E'_\gamma$  si ottiene:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2} (1 - \cos \theta)}.$$

Sostituendo l'espressione (6.25), si ottiene

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Il risultato notevole è che tale variazione dipende solo dalle proprietà della particella su cui il fotone fa scattering attraverso una grandezza nota con il nome di lunghezza d'onda Compton dell'elettrone ( $\lambda_c = h/(mc) \approx 2.4 \times 10^{-10}$  cm). Da questa espressione è chiaro che l'effetto di variazione della  $\lambda$  è rilevante se  $\lambda \lesssim \lambda_c$ . Dall'analisi dello spettro elettromagnetico l'effetto è rilevante per raggi X e gamma ( $\lambda \lesssim 0.05$  nm), mentre diventa via via meno rilevante per radiazione meno energetica.

Passiamo adesso all'effetto Compton inverso per un fotone della radiazione cosmica di fondo (effetto Sunyaev-Zel'dovich), ripartendo da (6.26). In questo caso, nel sistema in cui si misura la radiazione cosmica di fondo e il raggio cosmico ultra-energetico, si ha:

$$k_e = \left( \frac{E}{c}, |\mathbf{p}| \mathbf{n}_e \right) \quad k_\gamma = \left( \frac{E_\gamma}{c}, \frac{E_\gamma}{c} \mathbf{n}_\gamma \right) \quad p_\gamma = \left( \frac{E'_\gamma}{c}, \frac{E'_\gamma}{c} \mathbf{n}'_\gamma \right),$$

dove  $\mathbf{n}$  sono i vettori unitari che definiscono la direzione di propagazione. Sostituendo in (6.26) e risolvendo rispetto a  $E'_\gamma$  si trova:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E - c|\mathbf{p}|(\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\gamma))}{E_\gamma(1 - \mathbf{n}_\gamma \cdot \mathbf{n}'_\gamma) + E - c|\mathbf{p}| \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}'_\gamma}.$$

Dobbiamo ora massimizzare questa espressione ricordando che  $E \gtrsim pc \gg E_\gamma$ . Il numeratore diventa massimo se si ha che  $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_\gamma = -1$ , cioè se la collisione è head-on:  $\mathbf{n}_\gamma = -\mathbf{n}_e$ . Sostituendo si ottiene:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E + c|\mathbf{p}|)}{E_\gamma + E + (E_\gamma - c|\mathbf{p}|) \cos \theta},$$

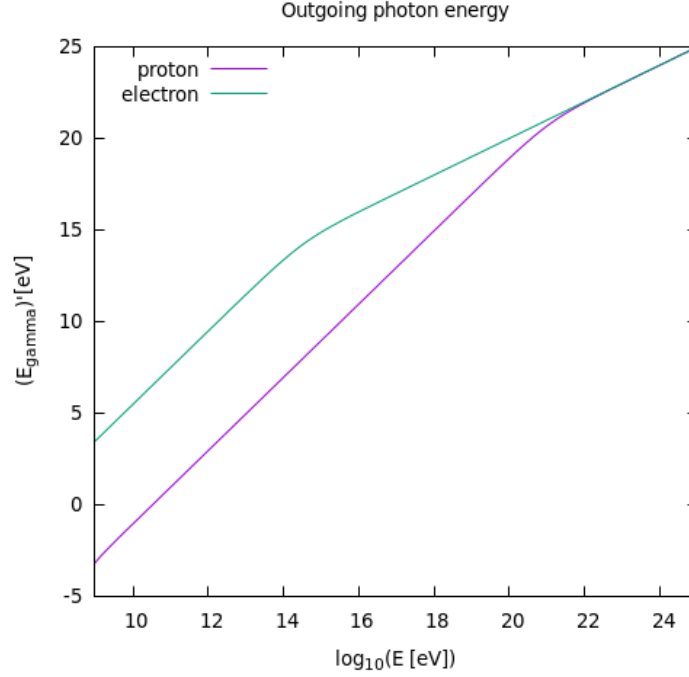


Figure 6.7: Energia finale del fotone della CMB in una collisione con un protone ed un elettrone ultrarelativistici. Il fotone della CMB è energizzato per effetto Compton inverso (effetto SZ).

dove  $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}'_\gamma = \cos \theta$ . Dal momento che  $E \gtrsim pc \gg E_\gamma$ , il denominatore si minimizza se  $\cos \theta = 1$  (cioé, il fotone nello stato finale è emesso nella direzione della particella ad alta energia). Quindi, nel complesso, il fotone nello stato finale ha energia massima:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E + c|\mathbf{p}|)}{2E_\gamma + E - c|\mathbf{p}|},$$

quando la collisione è head-on e il fotone nello stato finale viaggia parallelamente alla particella ad alta energia.

Nel limite di particelle incidenti relativistiche è possibile sviluppare  $c|\mathbf{p}|$  in  $E$ :

$$c|\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m^2c^4} \approx E - \frac{m^2c^4}{2E^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{mc^2}{E}\right)^4\right),$$

e sostituendo si ottiene

$$E'_\gamma(E, E_\gamma) \approx \frac{E\left(1 - \frac{m^2c^4}{4E^2}\right)}{1 + \left(\frac{m^2c^4}{4E_\gamma E}\right)}.$$

In Figura (6.7) sono rappresentate le curve relative al caso di un protone ed un elettrone ultrarelativistici che interagiscono con un fotone della radiazione cosmica di fondo. Notiamo il cambio di pendenza che si verifica per

$$\frac{m^2c^4}{4E_\gamma E} \sim 1.$$

Chiaramente questo tipo di processo è molto efficace nel trasferire energia ed impulso a fotoni della radiazione cosmica di fondo a spese dall'energia dei raggi cosmici.

### 6.3.5 Calcolo degli invarianti del campo elettromagnetico (facoltativo)

**Testo** Si calcolino esplicitamente gli invarianti

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} \quad F^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

**Soluzione** Cominciamo con  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . In pratica, dobbiamo moltiplicare termine a termine  $F^{\mu\nu}$  e  $F_{\mu\nu}$ , e sommare tutti i termini che ne derivano. Per l'antisimmetria di entrambi i tensori,

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2 \sum_{\mu=0,3; \nu>\mu} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2 (F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} + F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} + F_{23}F^{23})$$

Innalzare un indice temporale comporta un segno meno, mentre un indice spaziale un segno positivo. Quindi,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2 (-F^{01}F^{01} - F^{02}F^{02} - F^{03}F^{03} + F^{12}F^{12} + F^{13}F^{13} + F^{23}F^{23}) = \\ &= 2 \left( -\frac{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}{c^2} + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \right) = -2 \left( \frac{|\mathbf{E}|^2}{c^2} - |\mathbf{B}|^2 \right) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda  $\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , si può procedere come sopra. Oppure,

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}$$

Ma vale la relazione notevole:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2 \left( \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\rho \delta_\alpha^\sigma \right)$$

da cui

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left( \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\rho \delta_\alpha^\sigma \right) F^{\alpha\beta}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\rho\sigma}F_{\sigma\rho})$$

Se scambiamo i segni di  $F_{\sigma\rho}$  al secondo termine,

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) = -F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

Infine, per  $F^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , si può ancora procedere esplicitamente come nel primo caso:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} &= 2 \sum_{\mu=0,3; \nu>\mu} F^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2 (F^{01}\mathcal{F}_{01} + F^{02}\mathcal{F}_{02} + F^{03}\mathcal{F}_{03} + F^{12}\mathcal{F}_{12} + F^{13}\mathcal{F}_{13} + F^{23}\mathcal{F}_{23}) = \\ &= 2 (-F^{01}\mathcal{F}^{01} - F^{02}\mathcal{F}^{02} - F^{03}\mathcal{F}^{03} + F^{12}\mathcal{F}^{12} + F^{13}\mathcal{F}^{13} + F^{23}\mathcal{F}^{23}) \\ &= 2 \left( -\frac{E_x B_x}{c} - \frac{E_y B_y}{c} - \frac{E_z B_z}{c} - \frac{E_z B_z}{c} - \frac{E_y B_y}{c} - \frac{E_x B_x}{c} \right) = -4 \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{c} \end{aligned}$$