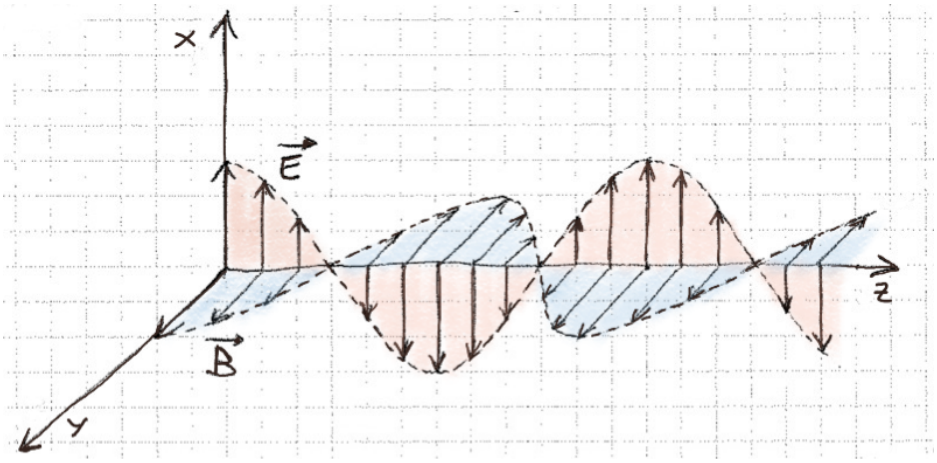
Franco Dalfovo

Dipartimento di Fisica, Università di Trento

Appunti delle lezioni di Fisica Generale III

Elettrodinamica



Disclaimer: queste note servono come base per le lezioni della prima parte del corso di Fisica Generale III. Il testo di riferimento è "Introduction to Electrodynamics" di David J. Griffiths. Quanto segue è una parziale riscrittura di quel testo per le sole parti trattate nelle mie lezioni e va inteso come una traccia per lo studio individuale. Gli studenti sono incoraggiati ad integrare questo materiale con la lettura del testo originario e di altri testi che trattano lo stesso argomento. Il corso prevede anche alcune esercitazioni sugli stessi argomenti, non incluse in queste note.

FD, Trento, 18 marzo 2021

Indice

1 Equazioni di Maxwell e onde **1**
1.1 Equazioni di Maxwell 1
1.2 Conservazione della carica 2
1.3 Energia e vettore di Poynting 3
1.4 Momento e tensore degli sforzi 6
1.5 Equazioni di Maxwell nel vuoto 11
1.6 Onde elettromagnetiche 14
1.7 Energia e momento di un'onda e.m. 18

2 Campi nei mezzi continui **21**
2.1 Equazioni di Maxwell nei mezzi lineari 21
2.2 Incidenza di un'onda su una superficie di separazione 23
2.3 Campi nei conduttori 33

3 Potenziali **39**
3.1 Potenziali e scelta di gauge 39
3.2 Forza di Lorentz e potenziali 45
3.3 Potenziali ritardati 46

4 Radiazione **55**
4.1 Radiazione di dipolo elettrico 55
4.2 Radiazione di dipolo magnetico 62
4.3 Radiazione da una sorgente qualsiasi 63
4.4 Radiazione di una carica in moto 70

Capitolo 1

Equazioni di Maxwell e onde

1.1 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell legano il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e il campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ alla distribuzione delle cariche elettriche nello spazio e nel tempo:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \,. \tag{1.4}$$

Le cariche, rappresentate dalla densità $\rho(\mathbf{r}, t)$ e dalla densità di corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, costituiscono le sorgenti dei campi. Le costanti ϵ_0 e μ_0 sono rispettivamente la permittività elettrica e la permeabilità magnetica del vuoto, il cui valore numerico dipende dal sistema di unità di misura scelto convenzionalmente. La prima equazione (legge di Gauss) viene dall'espressione della forza di Coulomb tra due cariche, con la sua dipendenza dall'inverso della distanza al quadrato, e dal principio di sovrapposizione per le forze e i campi, che permette generalizzare la forza di Coulomb a sistemi di più cariche fino al limite di una distribuzione continua. La seconda equazione sintetizza gli esiti delle osservazioni empiriche sui fenomeni di induzione elettromagnetica. La terza equazione traduce in forma matematica la non esistenza di monopoli magnetici. La quarta equazione riassume le osservazioni sui campi magnetici prodotti da correnti elettriche (legge di Biot-Savart, legge Ampère) e comprende il termine aggiuntivo che Maxwell introdusse come *corrente di spostamento*. Una volta determinati i campi risolvendo le equazioni di Maxwell per una distribuzione assegnata di cariche, è possibile determinare la forza (di Lorentz) sentita da una qualsiasi

carica q che si trovasse in $\mathbf{r}$ al tempo t:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]\,. \tag{1.5}$$

Tutto l'elettromagnetismo classico sta in queste cinque equazioni!

1.2 Conservazione della carica

La densità di carica ρ e la densità di corrente $\mathbf{j}$ non sono indipendenti. Per vederlo prendiamo la divergenza di entrambi i membri della quarta equazione di Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\,. \tag{1.6}$$

Il termine di sinistra è sempre nullo, perchè la divergenza di un rotore di un campo vettoriale è nulla indipendentemente da quale sia il campo (per dimostrarlo basta lavorare per componenti cartesiane a partire dalle definizioni). Nel secondo termine a destra possiamo scambiare l'ordine della derivazione spaziale e temporale. Dunque vale

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}\,. \tag{1.7}$$

Ora possiamo usare la legge di Gauss per la divergenza di $\mathbf{E}$ e scrivere

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}\,. \tag{1.8}$$

Questa è l'equazione di continuità della carica. Essa ci dice che, quando la densità di carica in un dato punto aumenta o diminuisce nel tempo, questa variazione è sempre associata ad una corrente con divergenza negativa o positiva. È formalmente identica all'equazione di continuità per la densità di un fluido in cui si conserva il numero di particelle, o la massa totale. Anche qui si tratta della conseguenza, in forma locale, di una legge di conservazione: la carica elettrica si conserva.

Per capirlo meglio si può passare alla versione integrale. Basta integrare l'equazione di continuità in un volume qualsiasi

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \; \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_{\mathcal{V}} d^3r \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}\,; \tag{1.9}$$

a sinistra invertiamo l'ordine dell'integrale e della derivata temporale, mentre a destra applichiamo il teorema della divergenza,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r \; \rho = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}\,, \tag{1.10}$$

dove l'integrale di destra è eseguito sulla superficie che racchiude il volume di integrazione dell'integrale di sinistra. L'integrale della densità fornisce la carica Q contenuta nel volume. Quindi

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}\,, \tag{1.11}$$

e la variazione della carica Q risulta uguale al flusso di carica entrante o uscente dallo stesso volume. Se non c'è corrente attraverso la superficie, la carica nel volume rimane costante.

Come abbiamo visto, la conservazione della carica è già contenuta nelle equazioni di Maxwell: l'elettromagnetismo classico descrive un universo in cui la carica si conserva localmente. A tal fine, l'aggiunta della corrente di spostamento nella legge di Ampère da parte di Maxwell è stata essenziale. Senza quel termine, la quarta legge di Maxwell sarebbe inconsistente, perché implicherebbe che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}$ sia sempre nulla, in contrasto con le osservazioni empiriche.

1.3 Energia e vettore di Poynting

Supponiamo che al tempo t la distribuzione delle cariche, descritta dalle funzioni $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, produca i campi $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Dopo un intervallo infinitesimo dt ciascuna carica q si sposta di un tratto $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{v}dt$, se $\mathbf{v}$ è la sua velocità. Il lavoro fatto dalle forze su ogni carica è

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{v}dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt\,, \tag{1.12}$$

dove notiamo che la forza associata al campo magnetico, essendo sempre perpendicolare alla velocità, non fa lavoro. Ora, passando al continuo, possiamo definire q come la carica contenuta in un volumetto infinitesimo d^3r e usare la definizione di densità di carica: $q = \rho d^3r$. Inoltre, per definizione di densità di corrente si ha $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Così il lavoro elementare diventa

$$\delta W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\; d^3r\; dt \tag{1.13}$$

e il lavoro fatto, nell'unità di tempo, su tutte le cariche contenute in un volume $\mathcal{V}$ diventa

$$\frac{\delta W}{dt} = \int_{\mathcal{V}} d^3r\; \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\,. \tag{1.14}$$

Ora vogliamo riscrivere l'integrando usando solo i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. A tale scopo usiamo la legge di Ampère-Maxwell per scrivere

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,, \tag{1.15}$$

da cui

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{1.16}$$

Per il primo termine a destra dell'uguale possiamo usare la relazione

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) \tag{1.17}$$

in combinazione con la legge di Maxwell-Faraday $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, in modo che

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,, \tag{1.18}$$

ovvero

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}\,. \tag{1.19}$$

Quindi il lavoro eseguito dai campi nell'unità di tempo è

$$\frac{\delta W}{dt} = -\int_{\mathcal{V}} d^3r\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} + \epsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}\right) - \frac{1}{\mu_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,. \tag{1.20}$$

Estraendo la derivata temporale dal primo integrale e usando il teorema della divergenza nel secondo, possiamo scrivere

$$\boxed{\frac{\delta W}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} d^3r\ \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) - \frac{1}{\mu_0}\int_{\mathcal{S}}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{a}}\,. \tag{1.21}$$

Questo risultato è noto come *teorema di Poynting*.

Per capire meglio il significato dell'ultimo risultato che abbiamo ottenuto possiamo dapprima notare che il primo integrale ha le stesse dimensioni del lavoro e, dunque, l'integrando ha le dimensioni di una densità di energia. Definiamo la quantità

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2(\mathbf{r},t) + \frac{B^2(\mathbf{r},t)}{\mu_0}\right) \tag{1.22}$$

e la interpretiamo come la densità di energia associata ai campi. Poi definiamo anche il *vettore di Poynting*

$$\boxed{\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}} \tag{1.23}$$

il cui flusso attraverso la superficie $\mathcal{S}$ ha le dimensioni di un'energia per unità di tempo (una potenza). Possiamo interpretare $\mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}$ come l'energia che fluisce attraverso l'elemento di superficie $d\mathbf{a}$ nell'unità di tempo. Con queste definizione il teorema di Poynting diventa

$$\frac{\delta W}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} d^3r\ u(\mathbf{r},t) - \int_{\mathcal{S}}\mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}\,. \tag{1.24}$$

È molto interessante vedere cosa succede nel caso particolare in cui nel volume $\mathcal{V}$ non ci sono cariche e, dunque, il lavoro fatto sulle cariche è nullo. Allora vale

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} d^3r\ u(\mathbf{r},t) + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = 0\,, \tag{1.25}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} d^3r\ u(\mathbf{r},t) + \int_{\mathcal{V}} d^3r\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S} = 0\,, \tag{1.26}$$

o anche

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r\ \left(\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{r},t) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S}\right) = 0\,. \tag{1.27}$$

Ma questa deve valere per qualsiasi volume $\mathcal{V}$ privo di cariche al suo interno. Ne segue che l'integrando deve annullarsi per qualsiasi $\mathbf{r}$ e qualsiasi t:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}\,. \tag{1.28}$$

Anche questa è un'equazione di continuità, ma stavolta rappresenta la conservazione locale dell'energia contenuta nei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in assenza di cariche. Laddove esistono campi elettrici e magnetici c'è dell'energia, la cui densità è $u(\mathbf{r},t)$. Una variazione di questa energia, in un dato volume, implica necessariamente un flusso di energia uscente o entrante dalla superficie che lo racchiude e tale flusso è determinato dal vettore di Poynting. Se nel volume ci sono anche cariche, allora una variazione dell'energia associata ai campi può essere attribuita sia al flusso del vettore $\mathbf{S}$ che al lavoro meccanico fatto dai campi sulle cariche; questo è il senso del teorema di Poynting.

Nel caso statico, in cui $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non dipendono dal tempo, l'energia associata ai campi si riconduce alle espressioni note per l'energia

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} d^3r\ E^2 \tag{1.29}$$

necessaria a produrre la distribuzione di cariche tale da generare il campo elettrico e per l'energia

$$\frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\ B^2\,. \tag{1.30}$$

necessaria per mantenere una corrente stazionaria tale da generare il campo magnetico. Queste relazioni, che si ricavano facilmente in elettrostatica e magnetostatica, non ci dicono nulla, in realtà, su dove sia questa energia. I due integrali possono essere intesi come uno strumento per calcolare due numeri; poco importa se poi immaginiamo queste energie come confinate nella cariche e nelle correnti oppure distribuite nello spazio circostante. Non ha importanza, dato che nulla cambia nelle predizioni della teoria in termini di osservabili fisiche. Almeno fintantoché ci limitiamo ai campi stazionari. Se invece passiamo

al caso dinamico le cose sono diverse. Infatti, come abbiamo visto, esiste una legge di continuità che governa i flussi di energia anche in assenza di cariche. Il vuoto, in presenza di campi, acquista energia e tale energia varia nello spazio e nel tempo in modo formalmente analogo a quanto fa la densità di un fluido. In altri termini, stiamo dando corpo al campo elettromagnetico, attribuendogli proprietà che eravamo soliti attribuire alle particelle materiali, come l'energia ad esempio, oppure la quantità di moto, come vedremo nella prossima sezione. A proposito di quest'ultima grandezza, nel seguito abbandoneremo la nomenclatura italiana e la chiameremo semplicemente *momento*, più in linea con i testi inglesi, e non solo.

1.4 Momento e tensore degli sforzi

Il momento di una particella $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è una delle grandezze fondamentali della meccanica newtoniana essendo quella che permette di esprimere in forma sintetica e generale la relazione tra le cause (forze) e gli effetti (variazione dello stato di moto) tramite il principio $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Inoltre, la conservazione del momento in un sistema isolato composto di due particelle è strettamente associata al principio di azione e reazione, offrendone una formulazione equivalente, ed è anche legata all'omogeneità dello spazio. Il principio di azione e reazione, tuttavia, pone seri problemi nel caso di particelle cariche. Pensiamo ad esempio a due cariche che si muovono con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in un dato sistema di riferimento. Ciascuna delle due risentirà della forza associata al campo elettrico coulombiano generato dall'altra; le due forze sono dirette lungo al congiungente e sono uguali in modulo e opposte, come vuole il principio di azione e reazione; ma le cariche si stanno pure muovendo e, quindi, sentono anche il campo magnetico che l'una genera per effetto del movimento (equivalente ad una corrente elettrica) e che viene sentita dall'altra per via della forza di Lorentz. Ma quest'ultima non è diretta lungo la congiungente e, a seconda della direzione di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, è possibile che la forza sentita dall'una non sia affatto uguale e opposta a quella sentita dall'altra. Dunque, sembra che dobbiamo rinunciare al principio di azione e reazione. Possiamo sostituirlo con la conservazione della quantità di moto?

Come nella sezione precedente, supponiamo che al tempo t la distribuzione delle cariche, descritta della funzioni $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, produca i campi $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Una carica $q = \rho d^3r$ contenuta in un volumetto infinitesimo d^3r posizionato nel punto generico $\mathbf{r}$ risentirà della forza infinitesima

$$d\mathbf{F} = \rho[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]\ d^3r = [\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}]\ d^3r\,. \tag{1.31}$$

Per il principio di sovrapposizione, la forza totale sentita da tutte le cariche in

un volume $\mathcal{V}$ vale

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \; [\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}] \tag{1.32}$$

e possiamo considerare la funzione

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{1.33}$$

come una densità di forza. Ora vogliamo riscrivere questa $\mathbf{f}$ unicamente in termini dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Usiamo la legge di Gauss per rimpiazzare ρ con $\epsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}$ e la legge di Ampère-Maxwell per rimpiazzare $\mathbf{j}$, come avevamo fatto prima. Otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} \\ &= \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \,. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Per la derivata temporale possiamo usare la relazione

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.35}$$

e dunque

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \,. \tag{1.36}$$

Poi usiamo la legge di Maxwell-Faraday per rimpiazzare la derivata di $\mathbf{B}$ con $-\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}$:

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \,. \tag{1.37}$$

Per rendere più simmetrica questa espressione tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ aggiungiamo a mano un termine $(1/\mu_0)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$ che non cambia il risultato fisico, dato che la divergenza di $\mathbf{B}$ è comunque sempre nulla. Dunque

$$\mathbf{f} = \epsilon_0[(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \,. \tag{1.38}$$

Poi usiamo le seguenti proprietà dei prodotti vettoriali,

$$\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} E^2 - (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} \tag{1.39}$$

$$\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} B^2 - (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} \tag{1.40}$$

che ci permettono di scrivere

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \epsilon_0[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}+(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}E^2] \\ &+ \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}B^2]-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,. \qquad (1.41)\end{aligned}$$

Questa sembra davvero complicata. L'utilità di scriverla in questa forma la vediamo introducendo un nuovo ente matematico a nove componenti, che chiamiamo *tensore degli sforzi di Maxwell*, fatto così

$$\boxed{T_{ij}=\epsilon_0\left(E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)} \qquad (1.42)$$

dove gli indici i e j corrono sulle tre componenti x, y e z e dove δ_{ij} è la solita delta di Kronecker. Un simbolo più compatto per il tensore degli sforzi è $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$. Dato un vettore qualsiasi $\mathbf{v}$ a tre componenti, il prodotto del tensore per il vettore è, per definizione, un vettore le cui componenti possono essere determinate in due modi:

$$(\mathbf{v}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j=\sum_i v_iT_{ij} \quad , \quad (\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{v})_j=\sum_i T_{ji}v_i\ . \qquad (1.43)$$

Se usiamo la prima versione del prodotto nel caso in cui $\mathbf{v}$ è l'operatore differenziale $\boldsymbol{\nabla}$, otteniamo

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j &= \sum_i\nabla_iT_{ij} \\ &= \sum_i\nabla_i\left[\epsilon_0\left(E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)\right] \\ &= \epsilon_0\left[(\sum_i\nabla_iE_i)E_j+\sum_iE_i\nabla_iE_j-\frac{1}{2}\sum_i\delta_{ij}\nabla_iE^2\right] \\ &+ \frac{1}{\mu_0}\left[(\sum_i\nabla_iB_i)B_j+\sum_iB_i\nabla_iB_j-\frac{1}{2}\sum_i\delta_{ij}\nabla_iB^2\right] \\ &= \epsilon_0\left[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})E_j+(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})E_j-\frac{1}{2}\nabla_jE^2\right] \\ &+ \frac{1}{\mu_0}\left[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})B_j+(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})B_j-\frac{1}{2}\nabla_jB^2\right]\ . \qquad (1.44)\end{aligned}$$

Ma confrontando questa espressione con la (1.41) vediamo che

$$\mathbf{f}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,. \qquad (1.45)$$

oppure, se usiamo la definizione del vettore di Poynting:

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} \,. \tag{1.46}$$

La forza totale agente sulle cariche nel volume $\mathcal{V}$ diventa

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{V}} d^3r \; \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} \,. \tag{1.47}$$

Per il primo integrale vale il teorema della divergenza (lo si può applicare anche nel caso del tensore); nel secondo estraiamo la derivata temporale. In questo modo il risultato diventa

$$\boxed{\mathbf{F} = \int_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r \; \mathbf{S}} \,. \tag{1.48}$$

Nel caso statico il secondo termine non c'è e la forza si riduce a

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \,. \tag{1.49}$$

Si vede così che il tensore degli sforzi assume il significato di forza di Lorentz per unità di area agente sulla superficie che racchiude il volume $\mathcal{V}$. Più precisamente, T_{ij} è la componente i della forza per unità di area agente su una superficie orientata con la normale nella direzione j. Ne segue che gli elementi diagonali, T_{xx}, T_{yy} e T_{zz}, si comportano come *pressioni*, mentre gli elementi non diagonali, tipo T_{xy}, T_{xz}, , ecc., si comportano come *sforzi di taglio*, nel linguaggio della dinamica dei fluidi.

Ora è interessante applicare la seconda legge di Newton. Questa dice che il momento totale delle particelle cariche contenute nel volume $\mathcal{V}$, che qui indichiamo con $\mathbf{p}_{\text{mec}}$ per sottolineare che si tratta di un momento associato alla meccanica delle particelle, varia nel tempo secondo la legge

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mec}}}{dt} = \mathbf{F} \,. \tag{1.50}$$

Se usiamo l'espressione precedente per la forza otteniamo

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[\mathbf{p}_{\text{mec}} + \epsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{V}} d^3r \; \mathbf{S} \right] = \int_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a}} \,. \tag{1.51}$$

Questa è l'analoga del teorema di Poynting (1.21), ma per il momento invece che per l'energia. L'integrale di $\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$ può essere interpretato come il momento associato ai campi: se in una regione di spazio ci sono campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, tali che il

vettore di Poynting è non nullo, allora in quella regione c'è del momento, con densità

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} \ . \tag{1.52}$$

Inoltre, la variazione del momento in un volume $\mathcal{V}$, inteso come somma del momento meccanico delle particelle e del momento associato ai campi, è pari al flusso del tensore degli sforzi attraverso la superficie che lo contiene. In altri termini, in questa relazione il tensore degli sforzi assume il significato di momento che fluisce per unità di area e per unità di tempo attraverso la superficie. Più precisamente, la componente T_{ij} del tensore rappresenta la quantità di momento che fluisce nella direzione i attraverso una superficie orientata con la normale lungo la direzione j, per unità di area e unità di tempo. L'unico *caveat* di questa interpretazione sta nel segno: un flusso positivo del tensore degli sforzi nell'equazione (1.51) implica un aumento di momento nel volume $\mathcal{V}$, dunque il flusso va preso con la convenzione di segno opposta rispetto al caso di un fluido.

Se il flusso di $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ è nullo, il momento totale nel volume si conserva, ma quello meccanico può ancora essere scambiato con quello associato ai campi, a somma costante. Questo in particolare permette di conservare il momento totale anche nel caso di due particelle cariche che interagiscono tra loro tramite i campi da loro prodotti, malgrado il principio di azione e reazione non si applichi. Il trucco, ripetiamolo, sta nell'attribuire un momento anche ai campi, così come avevamo fatto per l'energia.

Se nel volume $\mathcal{V}$ non ci sono cariche, allora la legge di Newton diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r \ \mathbf{g} = \int_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \, . \tag{1.53}$$

Inseriamo la derivata temporale nel primo integrale e riconvertiamo il secondo in un integrale di volume usando di nuovo il teorema della divergenza:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \, . \tag{1.54}$$

Questa deve essere vera per qualsiasi volume privo di cariche. Ne segue che gli integrandi devono essere uguali:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = 0} \, . \tag{1.55}$$

Ed ecco di nuovo un'equazione di continuità, stavolta per il momento associato ai campi. Il segno meno che compare tra i due termini viene dal fatto che, come anticipato sopra, il flusso del momento (inteso come densità di corrente del momento) è $-\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$, a causa della convenzione usata nella sua definizione.

Un volumetto infinitesimo d^3r nella posizione $\mathbf{r}$, in cui vi siano del campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, possiede un momento $d\mathbf{p} = \mathbf{g}d^3r$. Nulla ci vieta di calcolare il momento angolare ad esso associato, usando la solita definizione $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}$. Dunque

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}\ d^3r = \epsilon_0\mu_0\ \mathbf{r} \times \mathbf{S}\ d^3r = \epsilon_0\ \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\ d^3r\ , \tag{1.56}$$

e possiamo definire la densità di momento angolare come

$$\mathbf{l} = \epsilon_0\ \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\ . \tag{1.57}$$

Dunque i campi posseggono energia, momento e momento angolare. Il modo con cui la densità di energia, di momento e di momento angolare variano nel tempo e nello spazio è fissato, ovviamente, dalle equazioni di Maxwell.

1.5 Equazioni di Maxwell nel vuoto

Il modo migliore per cominciare a capire come si comportano dinamicamente i campi è mettersi in una regione di spazio dove non ci siano cariche e risolvere le equazioni di Maxwell. Qui definiamo il vuoto come lo spazio in cui $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$. Le equazioni di Maxwell nel vuoto sono

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{1.58}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.59}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.60}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\ . \tag{1.61}$$

Possiamo prendere il rotore di entrambi i membri della seconda

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})\,. \tag{1.62}$$

A sinistra usiamo la la proprietà

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} \tag{1.63}$$

e teniamo conto che la divergenza di $\mathbf{E}$ è nulla, così che

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E}\ , \tag{1.64}$$

mentre per il campo $\mathbf{B}$ usiamo la quarta legge di Maxwell. Il risultato è

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0}\ . \tag{1.65}$$

In modo del tutto analogo, prendendo il rotore della quarta legge, troviamo

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = 0} \,. \tag{1.66}$$

Abbiamo due equazioni formalmente identiche, disaccoppiate, per il campo elettrico e il campo magnetico, corrispondenti a sei equazioni scalari per le singole componenti dei campi.

Un'equazione scalare della forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{1.67}$$

con

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \,, \tag{1.68}$$

si chiama *equazione delle onde*. A vista, si vede che essa ammette soluzioni del tipo

$$f(x,t) = f(x - ct, 0), \tag{1.69}$$

che rappresentano una traslazione spaziale rigida della funzione con velocità c. Se, ad esempio, la funzione al tempo 0 aveva un massimo in un punto x_0, allora al tempo $t > 0$ il massimo si sarà spostato in $x_0 + ct$. Tra queste soluzioni vi sono anche soluzioni armoniche fatte così:

$$f(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \delta) = A \cos[k(x - ct) + \delta)] \;, \quad \text{con } c = \frac{\omega}{k} \;, \tag{1.70}$$

dove A e δ sono costanti d'integrazione, k è il vettore d'onda e ω la pulsazione. Questa funzione rappresenta un'oscillazione sinusoidale sia nello spazio che nel tempo. Per un t fissato, la distanza tra due punti di fase uguale (due massimi, ad esempio) è la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$, mentre, per un x fissato, l'intervallo tra due istanti di fase uguale è il periodo $T = 2\pi/\omega$; l'inverso del periodo $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ è la frequenza (spesso si usa il termine frequenza anche per ω, ma poi bisogna stare attenti nei calcoli a mettere il fattore 2π al posto giusto).

Nulla ci impedisce di lavorare sul corpo dei numeri complessi. In tal caso, soluzioni armoniche dell'equazione delle onde possono essere scritte nella forma

$$f(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)} \;, \tag{1.71}$$

dove stavolta A è un numero complesso, che a sua volta può essere scritto come $A = |A| e^{i\delta}$. Ricordandosi le relazioni

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \;, \tag{1.72}$$

e anche

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta \ , \tag{1.73}$$

si vede che l'espressione (1.70) non è altro che la parte reale della (1.71). L'uso dei numeri complessi in questo contesto può essere utile nei calcoli in quanto, grazie alle proprietà degli esponenziali, semplifica operazioni che altrimenti implicherebbero l'uso di formule di addizione e moltiplicazione di funzioni goniometriche. Si tratta di un espediente formale. Alla fine, quando si vogliono esprimere i risultati in termini di grandezze fisiche misurabili, basterà prendere la parte reale dei numeri complessi ottenuti come risultato del calcolo.

Dato che le equazioni di Maxwell nel vuoto sono equazioni differenziali lineari e omogenee (contengono solo e soltanto termini lineari nei campi), le combinazioni lineari di soluzioni sono esse stesse soluzioni. Prendendo onde del tipo (1.71) con vettori d'onda k diversi e con ampiezze che diverse per ciascuna onda, possiamo quindi scrivere funzioni del tipo

$$f(x,t) = \sum_k A_k e^{i[k(x-ct)]} \ , \tag{1.74}$$

oppure anche

$$f(x,t) = \int dk \ A(k) e^{i[k(x-ct)]} \ , \tag{1.75}$$

dove la forma della funzione f dipende dalla scelta dei coefficienti A_k o della funzione $A(k)$. Nei corsi di analisi e di metodi matematici della fisica gli studenti avranno incontrato (o incontreranno) le trasformate di Fourier, che esprimono queste relazioni in un ambito formalmente più rigoroso. Al momento non ci interessano, ma verranno utili in seguito.

Per non perdere di vista la fisica, riassumiamo qui il punto cruciale: le equazioni di Maxwell nel vuoto ammettono soluzioni in forma di onde che si propagano *tutte* alla stessa velocità

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \ \mathrm{m/s} \, . \tag{1.76}$$

Il primo ad accorgersi che la velocità predetta dalle equazioni di Maxwell sulla base dei valori noti di ϵ_0 e μ_0 era uguale, entro le incertezze sperimentali dell'epoca, alla velocità della luce fu Maxwell stesso, che ne fu giustamente sorpreso. Fino ad allora non c'era alcun indizio che facesse supporre l'esistenza di un legame tra la luce e i fenomeni elettrici e magnetici. Si trattava di due mondi distinti. La coincidenza portò Maxwell a scrivere: "We can scarsely avoid the inference that light consists of the transverse ondulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena".

Il confronto tra gli esiti di misure elettriche e magnetiche, che portano a ϵ_0 e μ_0, e quelli sulla velocità della luce è una storia lunga. Mano a mano

che la precisione nella determinazione del valore di c è migliorata, si è reso più conveniente fissare la costante c ad un valore convenzionale per utilizzarlo nella definizione dei campioni di altre grandezze fisiche. Il valore riportato qui sopra è proprio il valore convenzionalmente accettato dal Sistema Internazionale di unità di misura.

È anche importante sottolineare che la velocità di propagazione delle onde è indipendente dal vettore d'onda (e quindi dalla lunghezza d'onda λ e dalla frequenza $\nu = \omega/2\pi$) e la luce visibile rappresenta solo un intervallo molto piccolo di tutto lo spettro dei possibili valori di λ e ν. Per farsene un'idea, il modo più semplice è aprire la pagina di Wikipedia dedicata a "Electromagnetic spectrum", dove l'intero spettro è raffigurato in vari modi, visivamente efficaci. Non conviene riportare qui le stesse immagini, ma invito caldamente gli studenti ad andare a vedersele. È estremamente utile farsi un'idea dello spettro complessivo, memorizzando anche la classificazione dei vari tipi di onde, dalle onde radio di grande lunghezza d'onda e bassa frequenza, via via fino ai raggi gamma di altissima frequenza. Si tratta di una terminologia che permea tutta la fisica moderna e gran parte della tecnologia d'uso quotidiano. Sapere qual è l'intervallo di frequenze e lunghezze d'onda in cui opera il forno a microonde di casa propria, oppure il telefono cellulare, può essere una pura curiosità per qualcuno, ma dovrebbe senz'altro far parte del bagaglio culturale di qualsiasi fisico. Sempre a proposito di bagaglio culturale, la figura che segue è tratta da *Topolino*, n.3357 del 25 marzo 2020, a cui si rimanda per approfondimenti.

1.6 Onde elettromagnetiche

Abbiamo detto che le equazioni di Maxwell nel vuoto portano a due equazioni delle onde, disaccoppiate, per i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, ma non abbiamo ancora mostrato come sono fatte davvero le soluzioni, tenendo conto che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non possono essere indipendenti. Infatti, le due equazioni delle onde (1.65) e (1.66) non contengono tutte le informazioni espresse dalle quattro equazioni di Maxwell,

ma solo una parte. Per vedere come usare anche le altre informazioni conviene scegliere un tipo particolare di soluzioni, quelle note come *onde piane monocromatiche*. Assumiamo dunque che i campi siano esprimibili nella forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \,, \tag{1.77}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(kz-\omega t)} \,, \tag{1.78}$$

con $\omega/k = c$ e dove $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ sono vettori complessi e costanti (il fatto che siano complessi implica che ognuna delle loro componenti ha una parte reale e una parte immaginaria). Questi campi sono tali che la loro dipendenza dalle coordinate spaziali entra solo nel fattore e^{ikz} e dunque sono costanti in tutti piani perpendicolari all'asse z. Per questo si chiamano *onde piane*. Questi campi sono soluzioni delle equazioni (1.65) e (1.66), come si vede facilmente per sostituzione. Sono soluzioni corrispondenti ad un unico valore di k o, equivalentemente, un unico valore di ω. Per questo sono dette *monocromatiche*, sottintendendo che frequenze diverse corrisponderebbero a "colori" diversi, nel senso più ampio del termine.

Fatta questa premessa, ora ricaviamo le relazioni tra $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ che emergono dalle equazioni di Maxwell. Cominciamo con la legge di Gauss $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$, ovvero

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \,. \tag{1.79}$$

Per le onde piane scritte qui sopra, le prime due derivate sono nulle per ipotesi. Ne segue che anche l'ultima derivata deve annullarsi e, dunque, E_z non dipende dalla coordinata z. La componente z del campo elettrico entra anche nell'equazione di Maxwell per il rotore del campo magnetico, secondo al quale deve valere

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \,, \tag{1.80}$$

ovvero

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \,. \tag{1.81}$$

Ma, di nuovo, le derivate rispetto a x e y sono nulle per ipotesi e tutto il termine di sinistra si annulla. Ne segue che E_z non dipende nemmeno dal tempo. D'altra parte, la componente z di $\mathbf{E}$ è $E_{0z}e^{i(kz-\omega t)}$ e, affinché questa non dipenda né da z né da t, è necessario che

$$E_{0z} = 0 \,. \tag{1.82}$$

Con la stessa identica procedura, sfruttando la legge $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ e la legge di Faraday per la componente z del rotore di $\mathbf{E}$, si ottiene

$$B_{0z} = 0 \,. \tag{1.83}$$

Riassumendo: i campi hanno una fase che si propaga lungo l'asse z e le componenti dei campi nella direzione di propagazione sono nulle. I vettori $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ devono stare nel piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Questo è un risultato importante, ma ancora non ci dice qual è il legame tra di loro. Per trovarlo, usiamo le altre due componenti della legge per il rotore di $\mathbf{E}$. Una è questa:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \,. \tag{1.84}$$

ovvero

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \,, \tag{1.85}$$

ma la prima derivata è nulla per ipotesi, e dunque

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \,. \tag{1.86}$$

La seconda è

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})_y = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \,. \tag{1.87}$$

ovvero

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \,, \tag{1.88}$$

ma la seconda derivata è nulla per ipotesi, e dunque

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \,. \tag{1.89}$$

Ora riscriviamo queste due relazioni tra le componenti di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{B}$ eseguendo esplicitamente le derivate delle espressioni (1.77) e (1.78). Otteniamo

$$\begin{cases} kE_{0y} = -\omega B_{0x} \\ kE_{0x} = \omega B_{0y} \,, \end{cases} \tag{1.90}$$

ovvero

$$\begin{cases} B_{0x} = -(1/c)E_{0y} \\ B_{0y} = (1/c)E_{0x} \end{cases} \tag{1.91}$$

e in forma più compatta

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0) \,. \tag{1.92}$$

Dunque, non solo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda (che qui abbiamo scelto essere nella direzione z), ma sono anche perpendicolari tra loro. Si tratta quindi di onde trasversali. Inoltre il modulo del campo magnetico è c volte più piccolo del modulo del campo elettrico:

$$|\mathbf{B}| = \frac{1}{c}|\mathbf{E}| \,. \tag{1.93}$$

Possiamo sempre scrivere $\mathbf{E}_0$ come il prodotto del versore che ne indica la direzione e uno scalare complesso E_0:

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{n}}\, E_0 \,. \tag{1.94}$$

Naturalmente il versore $\hat{\mathbf{n}}$ dev'essere ortogonale a $\hat{\mathbf{z}}$. Allora il vettore $\mathbf{B}_0$ è

$$\mathbf{B}_0 = \frac{E_0}{c}(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{n}}) \,, \tag{1.95}$$

e la soluzione completa è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\ \hat{\mathbf{n}} \ , \tag{1.96}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(kz-\omega t)}\ (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{n}}) \ . \tag{1.97}$$

Non essendoci nulla di speciale nella direzione z, potevamo indicare con un generico versore $\hat{\mathbf{k}}$ la direzione di propagazione, in modo da usare il vettore d'onda $\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{k}}$ e scrivere l'onda piana in questo modo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\ \hat{\mathbf{n}} \ , \tag{1.98}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\ (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) \ , \tag{1.99}$$

con la condizione di ortogonalità $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Qui E_0 è un numero complesso, che potremmo scrivere come $E_0 e^{i\delta}$, dove però E_0 è reale (potremmo usare un simbolo diverso per le grandezze complesse, come fa il Griffiths, ma non è necessario; con un po' di attenzione non ci si confonde). Guardando le ultime due espressioni per i campi, vediamo immediatamente che la fase di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{B}$ è uguale in ogni punto e in ogni istante. Possiamo scegliere arbitrariamente $\delta = 0$ e poi prendere la parte reale delle espressioni precedenti per arrivare alla forma finale dei campi, reali, misurabili:

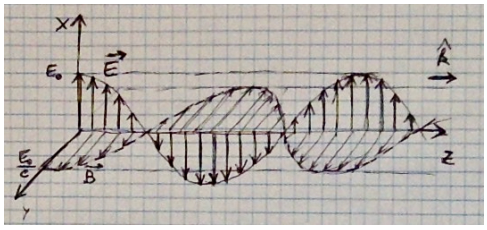
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\ \hat{\mathbf{n}} \ , \tag{1.100}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \ . \tag{1.101}$$

Una scelta diversa di δ corrisponderebbe ad una semplice traslazione rigida della funzione; sia E_0 che δ non sono altro che costanti d'integrazione. Il caso particolare della propagazione lungo z è quello in cui $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$, per il quale si ottiene

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\ \hat{\mathbf{n}} \ , \tag{1.102}$$

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)\ (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{n}}) \ . \tag{1.103}$$



Ad esempio, se il campo elettrico è diretto lungo x, allora si ha

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\ \hat{\mathbf{x}}\ , \tag{1.104}$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)\ \hat{\mathbf{y}}\ . \tag{1.105}$$

Fissare la direzione del campo $\mathbf{E}$ corrisponde a fissare la direzione di *polarizzazione* dell'onda. Quella che abbiamo appena scritto è un'onda piana monocromatica, con polarizzazione lineare lungo x (schematizzata in figura). Esistono poi soluzioni di tipo diverso, come onde piane polarizzate circolarmente (la direzione del campo elettrico ruota nel piano ortogonale alla direzione di propagazione e il campo magnetico la segue a 90°), oppure onde sferiche (in cui la propagazione è radiale rispetto alla sorgente che la produce), eccetera. Il caso dell'onda piana ci ha permesso di svolgere i calcoli in modo semplice e troverà applicazioni abbastanza ampie da meritare lo sforzo che abbiamo fatto.

1.7 Energia e momento di un'onda e.m.

Prendiamo l'onda piana di prima e calcoliamoci la densità di energia

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2(\mathbf{r},t) + \frac{B^2(\mathbf{r},t)}{\mu_0}\right) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \tag{1.106}$$

Se siamo interessati a ciò che succede su scale spaziali e temporali più grandi rispettivamente della lunghezza d'onda e del periodo, allora può essere conveniente calcolare la media temporale e spaziale della densità di energia. La media del quadrato del coseno vale 1/2 e dunque

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2\ . \tag{1.107}$$

Poi possiamo calcolare il vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c}E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\,\hat{\mathbf{z}} = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\,\hat{\mathbf{z}}\ ; \tag{1.108}$$

dunque

$$\mathbf{S} = c\,u\,\hat{\mathbf{z}} \tag{1.109}$$

e la media è

$$\langle \mathbf{S} \rangle = c\,\langle u \rangle\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2\,\hat{\mathbf{z}}\ . \tag{1.110}$$

Il modulo del vettore di Poynting ci dice quanta energia passa nell'unità di tempo attraverso una superficie unitaria perpendicolare ad esso. Prendiamo l'onda piana che si propaga lungo $\hat{\mathbf{k}}$; consideriamo un intervallo di tempo Δt e misuriamo l'energia che attraversa una superficie di area A perpendicolare a $\hat{\mathbf{k}}$. Se Δt è abbastanza grande da ignorare le oscillazioni rapide che avvengono sulla scala del periodo dell'onda, possiamo usare le medie temporali e calcolare l'energia come $\langle S \rangle A \Delta t$. Ma questa energia è anche uguale a quella che si ottiene moltiplicando la densità di energia $\langle u \rangle$ per il volume del parallelepipedo di base A e altezza $c\Delta t$. Tutta l'energia associata ai campi in questo volume esce attraverso l'area A nella direzione di propagazione; altrettanta ne entra dal lato opposto. L'onda trasporta con sé l'energia a velocità c. La potenza (energia per unità di tempo) che attraversa l'unità di superficie è chiamata *intensità* dell'onda

$$I = \langle S \rangle = c\,\langle u \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \tag{1.111}$$

ed è proporzionale al quadrato del campo elettrico.

L'onda trasporta anche momento. Per vederlo, basta calcolare la densità di momento definita precedentemente

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} \tag{1.112}$$

e anche questa possiamo mediarla nel tempo e nello spazio

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \epsilon_0 \mu_0 \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{c}\,\langle u \rangle\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.113}$$

e il suo modulo è

$$\langle g \rangle = \frac{1}{c}\,\langle u \rangle\,. \tag{1.114}$$

Dunque, densità di momento e densità di energia differiscono solo per un fattore c.

Supponiamo che un'onda elettromagnetica piana incida perpendicolarmente sulla superficie di un corpo in grado di assorbire tutta la sua energia. Data la relazione stretta tra energia e momento, questo significa che il corpo assorbe anche il momento corrispondente. Nel tempo dt l'onda elettromagnetica perde un momento pari a quello contenuto in un volume $Acdt$, se A è l'area della superficie interessata dall'onda. Dunque il momento trasferito al corpo è $p_{\rm rad} = \langle g \rangle A\,c\,dt = \langle u \rangle A\,dt$. Questo implica una forza $dp_{\rm rad}/dt$ che agisce sul

corpo pari a $\langle u \rangle A$, ma la forza per unità di area corrisponde ad una pressione. Possiamo definire la *pressione di radiazione* come

$$P_{\text{rad}} = \langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c} \ . \tag{1.115}$$

Se il corpo fosse perfettamente riflettente, il momento dell'onda non sarebbe perso nel materiale, ma tornerebbe indietro nel vuoto e la pressione di radiazione sarebbe doppia.

Capitolo 2

Campi nei mezzi continui

2.1 Equazioni di Maxwell nei mezzi lineari

Nei mezzi continui le equazioni di Maxwell possono essere riscritte distinguendo le cariche *libere* e le cariche *legate*. Queste ultime determinano la polarizzazione elettrica, $\mathbf{P}$ e la magnetizzazione $\mathbf{M}$ del mezzo. Possono essere introdotti due nuovi campi $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ che includono gli effetti di polarizzazione e magnetizzazione in modo da tenere come *sorgenti* solo le cariche libere e riscrivere le equazioni di Maxwell in questo modo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{lib}} && (2.1)\\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (2.2)\\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0 && (2.3)\\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && (2.4)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} && (2.5)\\
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}\,. && (2.6)
\end{aligned}$$

Nei mezzi continui *lineari*, per definizione, vale

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}\\
\mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H}\,, && (2.7)
\end{aligned}$$

dove χ_e è la suscettività elettrica, e χ_m è la suscettività magnetica, entrambe proprietà specifiche di ciascun mezzo. Se il mezzo è anche *omogeneo* oltre che lineare, allora queste costanti non dipendono dalla posizione. Dunque nei

mezzi lineari e omogenei possiamo scrivere

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1+\chi_e)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0(1+\chi_m)}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}\,. \tag{2.9}$$

dove ϵ è la permittività elettrica del mezzo e μ è la sua permeabilità magnetica. Inserendo queste espressioni nelle equazioni di Maxwell si ottiene

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\rho_{\text{lib}} \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu\mathbf{j}_{\text{lib}} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.13}$$

che sono formalmente identiche a quelle originarie, salvo per la sostituzione di ϵ_0 e μ_0 con ϵ e μ e per il fatto che le sorgenti sono solo le cariche libere.

Se il mezzo in esame, oltre ad essere lineare, è anche isolante, allora la densità di cariche libere è nulla, così come la densità di corrente di cariche libere. Le equazioni di Maxwell diventano

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.17}$$

e sono identiche alle equazioni di Maxwell nel vuoto, salvo sostituire il prodotto $\mu_0\epsilon_0$ con $\mu\epsilon$. Il nuovo "vuoto" in realtà è costituito dal mezzo continuo, le cui cariche legate concorrono a determinare il valore di $\mu\epsilon$. Le soluzioni di queste equazioni già le conosciamo: sono le onde elettromagnetiche. Tali onde si propagano con velocità di fase

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}\,, \tag{2.18}$$

mentre nel vuoto vero (né cariche libere, né cariche legate) la velocità di propagazione era

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} \tag{2.19}$$

e il rapporto tra le due è

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{\mu\epsilon}}\,. \tag{2.20}$$

Ora, dato che nella maggior parte dei casi la differenza tra le due permeabilità magnetiche del mezzo e del vuoto è trascurabile rispetto alla differenza delle permittività elettriche, conviene scrivere

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}} \simeq \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}} = \frac{1}{n} \tag{2.21}$$

dove ϵ_r è detta costante dielettrica relativa (o semplicemente costante dielettrica) del mezzo, mentre n è detto indice di rifrazione, per ragioni che saranno evidenti in seguito.

Oltre a conoscere già le soluzioni delle equazioni di Maxwell, potremmo anche ripetere tutti i ragionamenti che ci avevano portato a definire il vettore di Poynting, la densità di energia nei campi, la densità di momento, l'intensità dell'onda elettromagnetica, il tensore degli sforzi, e tutto sarebbe identico, tranne la solita sostituzione di ϵ_0 e μ_0 con ϵ e μ.

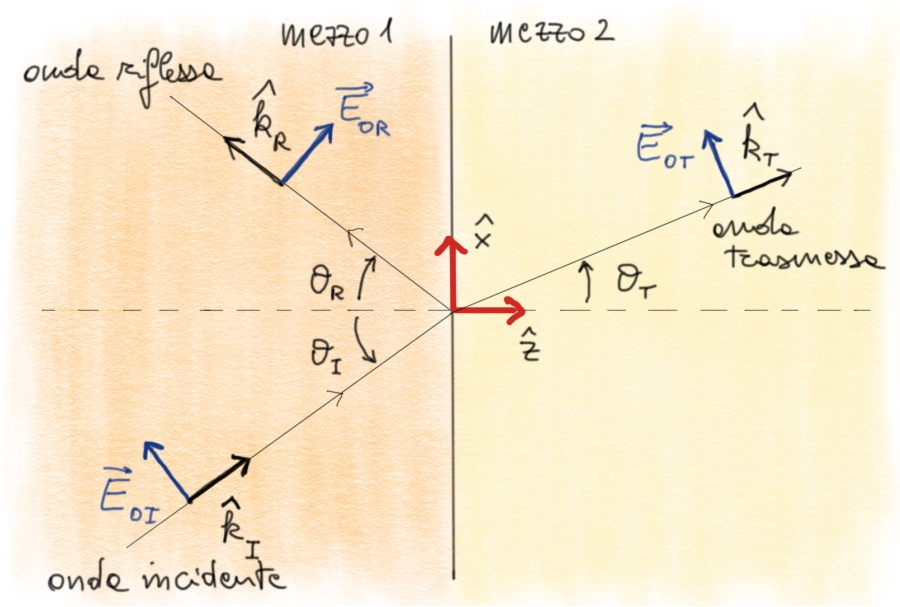
Nota di passaggio: uno può chiedersi come mai esistono isolanti trasparenti e isolanti opachi; non dovrebbero ammettere entrambi onde che si propagano al loro interno? La risposta è che le condizioni di linearità (2.7) possono valere in alcuni intervalli dello spettro elettromagnetico e in altri no. In altri termini, la risposta dei mezzi continui ai campi dipende in generale dalla scala temporale su cui i campi evolvono, che per un'onda implica una dipendenza dalla frequenza. La dipendenza potrebbe essere tale che, in certi intervalli di frequenze, la risposta ai campi non è lineare e le onde non si propagano. Inoltre, anche in regime lineare la costante dielettrica può dipendere dalla frequenza. Insomma, la realtà può essere complicata ma qui, e nel seguito, stiamo assumendo che il mezzo si comporti in modo lineare e omogeneo, con constante dielettrica indipendente dalla frequenza.

Altra nota: normalmente l'indice di rifrazione è un numero maggiore di 1, che implica una velocità v inferiore a c. Ma ci potrebbe venire un dubbio: dato che Einstein ci insegna che c è una velocità limite, questo dovrebbe implicare che n debba essere necessariamente maggiore di 1, non solo "normalmente". Il problema è un tantino più complicato... (ma forse è meglio studiare la relatività speciale prima di rispondere).

2.2 Incidenza di un'onda su una superficie di separazione

Supponiamo che un'onda elettromagnetica si propaghi in un mezzo e incida sulla superficie di separazione con un altro mezzo. Entrambi siano mezzi lineari senza cariche libere. Per non complicarci troppo la vita, consideriamo la superficie planare e infinita e la facciamo coincidere con il piano x-y in un sistema di assi cartesiani. Il versore $\hat{\mathbf{z}}$ rappresenta la direzione normale alla

superficie. Poi, sempre per semplicità, assumiamo che l'onda elettromagnetica sia un'onda linearmente polarizzata. Sia $\mathbf{k}_\mathrm{I}$ il suo vettore d'onda e ω_I la sua pulsazione, dove la I sta per "incidente". Le due quantità sono legate dalla relazione $v_1 = \omega_\mathrm{I}/k_\mathrm{I}$, essendo la velocità v_1 fissata dalle proprietà del mezzo 1. Il vettore $\mathbf{k}_\mathrm{I}$, assieme al versore $\hat{\mathbf{z}}$, definisce un piano che, senza perdere di generalità, identifichiamo con il piano x-z e lo chiamiamo piano d'incidenza. L'angolo compreso tra $\mathbf{k}_\mathrm{I}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ lo chiamiamo angolo d'incidenza θ_I.



L'onda incidente porta con sé energia e momento che devono andare da qualche parte. Non essendoci cariche libere, le uniche opzioni sono la trasmissione nel mezzo 2 e la riflessione nel mezzo 1, che possono anche avvenire contestualmente. Assumiamo dunque che nel mezzo 1 si propaghi un'onda riflessa e nel mezzo 2 un'onda trasmessa. Supponiamo che siano entrambe onde piane, ciascuna con il suo vettore d'onda e la sua frequenza. Chiamiamo θ_R e θ_T gli angoli di riflessione e trasmissione formati dai vettori $\mathbf{k}_\mathrm{R}$ e $\mathbf{k}_\mathrm{T}$ con il versore $\hat{\mathbf{z}}$.

Lavorando con numeri complessi, l'onda incidente avrà dunque la forma

$$\mathbf{E}_\mathrm{I}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0\mathrm{I}} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{I}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathrm{I} t)} \tag{2.22}$$

dove $\mathbf{E}_{0\mathrm{I}}$ è un vettore costante, diretto in una qualsiasi direzione perpendicolare a $\mathbf{k}_\mathrm{I}$. Nella figura l'abbiamo disegnato nel piano x-z per comodità, ma per ora non serve fissare la direzione di polarizzazione. Analogamente, l'onda riflessa sarà

$$\mathbf{E}_\mathrm{R}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0\mathrm{R}} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathrm{R} t)}\,, \tag{2.23}$$

con la stessa velocità di propagazione $v_1 = \omega_\mathrm{R}/k_\mathrm{R} = \omega_\mathrm{I}/k_\mathrm{I}$ di quella incidente (dato che si propagano entrambe nel mezzo 1). Mentre l'onda trasmessa sarà

$$\mathbf{E}_\mathrm{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0\mathrm{T}} e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathrm{T} t)}\,, \tag{2.24}$$

con $v_2 = \omega_\mathrm{T}/k_\mathrm{T} \neq v_1$. I campi magnetici corrispondenti sono univocamente fissati dalla condizione $\mathbf{B} = (1/v)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$, che si applica a ciascuna delle tre onde.

Questi campi, i due che si sovrappongono nel mezzo 1 e quello nel mezzo 2, devono obbedire alle condizioni di raccordo imposte dalle equazioni di Maxwell alla superficie tra due mezzi continui. Queste le diamo per note dal corso di elettromagnetismo. Basta ricordarsi che una variazione di polarizzazione ai lati della superficie è equivalente ad una distribuzione uniforme di cariche sulla superficie stessa, tale da provocare un salto finito nella componente perpendicolare del campo elettrico (dalla legge di Gauss), mentre una variazione di magnetizzazione è equivalente ad una corrente superficiale tale da indurre un salto finito nella componente parallela del campo magnetico. Per ogni istante t debbono valere le relazioni

$$\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp} \tag{2.25}$$

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel} \tag{2.26}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \tag{2.27}$$

$$(1/\mu_1)\mathbf{B}_{1\parallel} = (1/\mu_2)\mathbf{B}_{2\parallel} \tag{2.28}$$

dove il simbolo $\perp$ si riferisce alla componente z, mentre $\parallel$ si riferisce alle componenti x e y. Per i campi, l'indice 1 si riferisce alla somma dei due campi incidente e riflesso, mentre l'indice 2 è solo quello trasmesso. Ora, se scriviamo queste relazioni una per una usando le onde scritte in precedenza, ciascuna di esse avrà la forma

$$\big(\ldots\big)e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{I}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathrm{I} t)} + \big(\ldots\big)e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathrm{R} t)} = \big(\ldots\big)e^{i(\mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathrm{T} t)} \tag{2.29}$$

dove le parti nelle parentesi sono diverse per ciascuna equazione, ma in ogni caso non dipendono né da t né da $\mathbf{r}$. Queste condizioni di raccordo devono essere soddisfatte per ogni t e per ogni coppia di valori x e y. Affinché ciò sia possibile, devono verificarsi le seguenti due condizioni:

- $\omega_\mathrm{I} = \omega_\mathrm{R} = \omega_\mathrm{T} = \omega$
- $\mathbf{k}_\mathrm{I}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r}$, per $z = 0$

La prima segue dal fatto che il tempo nelle equazioni entra solo tramite fattori di fase $e^{-i\omega t}$. L'unico modo per garantire che l'equazione abbia soluzioni

ad ogni t consiste nell'assumere che tale fattore di fase sia lo stesso per tutti tre i termini dell'equazione, in modo da poterlo semplificare.

Per la seconda vale un ragionamento analogo. La posizione entra nell'equazione solamente tramite i fattori di fase del tipo $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ e l'equazione deve ammettere soluzione per qualsiasi x e qualsiasi y sulla superficie di separazione a $z = 0$. Dunque, di nuovo, il fattore di fase deve essere lo stesso su quel piano per i tre termini dell'equazione in modo da poterlo semplificare. Scrivendo i prodotti scalari per componenti cartesiane e imponendo $z = 0$, la stessa condizione può essere scritta nella forma

$$xk_{\mathrm{I}x} + yk_{\mathrm{I}y} = xk_{\mathrm{R}x} + yk_{\mathrm{R}y} = xk_{\mathrm{T}x} + yk_{\mathrm{T}y}\,, \tag{2.30}$$

che deve valere per ogni x e ogni y. Dunque vale anche per $x = 0$, che implica

$$k_{\mathrm{I}y} = k_{\mathrm{R}y} = k_{\mathrm{T}y}\,, \tag{2.31}$$

e per $y = 0$, che implica

$$k_{\mathrm{I}x} = k_{\mathrm{R}x} = k_{\mathrm{T}x}\,. \tag{2.32}$$

Da queste condizioni seguono direttamente tre proprietà importanti:

i) $\mathbf{k}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{k}_{\mathrm{R}}$ e $\mathbf{k}_{\mathrm{T}}$ stanno tutti nel piano d'incidenza, che comprende anche $\hat{\mathbf{z}}$;

ii) l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza;

iii) l'angolo di trasmissione è fissato dalla legge di Snell.

$$\boxed{\frac{\sin\theta_{\mathrm{T}}}{\sin\theta_{\mathrm{I}}} = \frac{n_1}{n_2}\,.} \tag{2.33}$$

Per convincersi che vale la prima basta ricordarci che avevamo scelto un'onda incidente che si propaga nel piano x-z e dunque la componente y del vettore d'onda $\mathbf{k}_{\mathrm{I}}$ è nulla per costruzione. Ma la condizione (2.31) impone che anche $\mathbf{k}_{\mathrm{R}}$ e $\mathbf{k}_{\mathrm{T}}$ abbiano componente y nulla. Questo basta per dire che stanno nello stesso piano d'incidenza. Dato che la scelta dell'orientazione degli assi rispetto al piano d'incidenza era arbitraria, la condizione ha validità del tutto generale.

La seconda proprietà segue invece dalla prima eguaglianza nella condizione (2.32), dato che possiamo esprimere quest'ultima usando gli angoli

$$k_{\mathrm{I}}\sin\theta_{\mathrm{I}} = k_{\mathrm{R}}\sin\theta_{\mathrm{R}} \tag{2.34}$$

e possiamo usare il fatto che la velocità di propagazione delle due onde è la stessa e anche la pulsazione ω è la stessa, così che $k_{\mathrm{I}} = k_{\mathrm{R}}$ e

$$\sin\theta_{\mathrm{I}} = \sin\theta_{\mathrm{R}} \tag{2.35}$$

da cui $\theta_{\rm I} = \theta_{\rm R}$.

La terza proprietà deriva anch'essa dalla condizione (2.32), che ci permette di scrivere

$$k_{\rm I} \sin\theta_{\rm I} = k_{\rm T} \sin\theta_{\rm T} \,. \tag{2.36}$$

Stavolta però le velocità di propagazione sono diverse. Abbiamo $v_1 = \omega/k_{\rm I}$ e $v_2 = \omega/k_{\rm T}$, da cui

$$\frac{k_{\rm T}}{k_{\rm I}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad . \tag{2.37}$$

Inserendola nella relazione precedente si ottiene la legge di Snell (2.33). Gli studenti dovrebbero ricordarsela dai tempi delle scuole superiori. La luce cambia direzione passando da un mezzo all'altro; questo fenomeno è noto come *rifrazione* e questo giustifica il nome dell'indice di rifrazione n.

Vale la pena sottolineare che queste tre proprietà non dipendono da quale delle condizioni (2.25)-(2.28) si sceglie di usare o, in altri termini, dal dettaglio dei termini nelle parentesi tonde in (2.29). Rappresentano piuttosto le condizioni "geometriche" per la sovrapposizione delle onde piane sul piano $z = 0$. Per questo possono essere ritrovate anche in problemi di meccanica ondulatoria diversi.

Ora che abbiamo sistemato la geometria, vediamo come si distribuisce l'intensità dell'onda tra quella riflessa e quella trasmessa. Per risolvere il problema stavolta occorre entrare nel dettaglio delle componenti dei campi nelle varie direzioni e il risultato può dipendere dalla direzione di polarizzazione dell'onda incidente. Facciamo quindi il calcolo solo per una particolare polarizzazione, a titolo esemplificativo, scegliendo di mettere il campo elettrico nel piano d'incidenza x-z, come avevamo fatto nella figura precedente; di conseguenza il campo magnetico $\mathbf{B}$ ha componenti solo parallele alla superficie di separazione tra i due mezzi; il verso di $\mathbf{B}$ è lo stesso per l'onda incidente e trasmessa, ma è opposto per l'onda riflessa. Questa scelta di polarizzazione non incide sui risultati precedenti, che sono generali.

Prendiamo la condizione di raccordo (2.25) e la scriviamo utilizzando le componenti z dei campi elettrici, tenendo conto che il fattore esponenziale si semplifica, per quanto detto in precedenza. Dunque

$$\epsilon_1[-E_{0\rm I} \sin\theta_{\rm I} + E_{0\rm R} \sin\theta_{\rm R}] = -\epsilon_2 E_{0\rm T} \sin\theta_{\rm T} \,. \tag{2.38}$$

Ora ricordiamo che $\sin\theta_{\rm R} = \sin\theta_{\rm I}$ e che $\sin\theta_{\rm T}/\sin\theta_{\rm I} = n_1/n_2$, in modo che la stessa equazione diventa

$$\epsilon_1[E_{0\rm I} - E_{0\rm R}] = \epsilon_2 \frac{n_1}{n_2} E_{0\rm T} \,, \tag{2.39}$$

ovvero

$$E_{0\rm I} - E_{0\rm R} = \beta E_{0\rm T} \,, \tag{2.40}$$

dove abbiamo introdotto la costante

$$\beta = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2} \tag{2.41}$$

che dipende solo dalle proprietà dei due mezzi. Ricordando la definizione (2.21) dell'indice di rifrazione, sappiamo che $\epsilon_2/\epsilon_1 = (n_2/n_1)^2$ e quindi possiamo scrivere

$$\beta = \frac{n_2}{n_1} \,. \tag{2.42}$$

Poi prendiamo la condizione di raccordo (2.26), che riguarda la componente x dei campi (ed è qui che entra in gioco la nostra scelta di polarizzazione):

$$E_{0\mathrm{I}} \cos\theta_\mathrm{I} + E_{0\mathrm{R}} \cos\theta_\mathrm{R} = E_{0\mathrm{T}} \cos\theta_\mathrm{T} \,, \tag{2.43}$$

ovvero

$$E_{0\mathrm{I}} + E_{0\mathrm{R}} = \alpha E_{0\mathrm{T}} \,, \tag{2.44}$$

dove abbiamo introdotto un'altra costante

$$\alpha = \frac{\cos\theta_\mathrm{T}}{\cos\theta_\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta_\mathrm{T}}}{\cos\theta_\mathrm{I}} = \frac{1}{\cos\theta_\mathrm{I}} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_\mathrm{I}} \tag{2.45}$$

che dipende sia dalle proprietà dei due mezzi che dall'angolo d'incidenza.

Mettendo assieme le due equazioni

$$E_{0\mathrm{I}} + E_{0\mathrm{R}} = \alpha E_{0\mathrm{T}} \tag{2.46}$$

$$E_{0\mathrm{I}} - E_{0\mathrm{R}} = \beta E_{0\mathrm{T}} \tag{2.47}$$

e risolvendole, si trova

$$\boxed{E_{0\mathrm{R}} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} E_{0\mathrm{I}} \quad , \quad E_{0\mathrm{T}} = \frac{2}{\alpha+\beta} E_{0\mathrm{I}} \ .} \tag{2.48}$$

Queste sono note come le *equazioni di Fresnel* per onde con polarizzazione lineare nel piano d'incidenza. Le abbiamo ricavate ricorrendo alle condizioni di raccordo per i campi elettrici, ma nulla cambierebbe usando le due condizioni per i campi magnetici, dato che il vettore $\mathbf{B}_0$ è fissato univocamente da $\mathbf{E}_0$ in ciascuna delle tre onde.

Le leggi di Fresnel sono sufficienti per dirci quali sono i campi riflessi e trasmessi per un dato campo incidente. È interessante andare a vedere quali sono le implicazioni in termini di flussi di energia. Per prima cosa notiamo che, per definizione di vettore di Poynting, l'energia incidente sul piano $z = 0$ per unità di area e nell'unità di tempo è data dal prodotto scalare $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ ed è dunque uguale alla componente z del vettore di Poynting. Ricordiamo che

per l'onda elettromagnetica piana nel vuoto, la media temporale del vettore di Poynting era

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{k}} \tag{2.49}$$

e dunque per l'onda incidente nel mezzo 1 sarà

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} v_1 \epsilon_1 E_{0\mathrm{I}}^2 \hat{\mathbf{k}} \tag{2.50}$$

e la sua componente z è

$$I_\mathrm{I} = \langle S_z \rangle = \frac{1}{2} v_1 \epsilon_1 E_{0\mathrm{I}}^2 \cos\theta_\mathrm{I} \,. \tag{2.51}$$

Questa quantità può essere identificata con l'intensità dell'onda incidente, misurata sulla superficie di separazione dei due mezzi. Analogamente possiamo definire l'intensità dell'onda riflessa

$$I_\mathrm{R} = \frac{1}{2} v_1 \epsilon_1 E_{0\mathrm{R}}^2 \cos\theta_\mathrm{R} = \frac{1}{2} v_1 \epsilon_1 E_{0\mathrm{R}}^2 \cos\theta_\mathrm{I} \,, \tag{2.52}$$

e di quella trasmessa

$$I_\mathrm{T} = \frac{1}{2} v_2 \epsilon_2 E_{0\mathrm{T}}^2 \cos\theta_\mathrm{T} \,. \tag{2.53}$$

Assegnata l'intensità dell'onda incidente, l'informazione più utile da sapere è la frazione di energia che torna indietro e la frazione di quella che va in avanti. La prima è data dal rapporto

$$R = \frac{I_\mathrm{R}}{I_\mathrm{I}} = \frac{E_{0\mathrm{R}}^2}{E_{0\mathrm{I}}^2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \,, \tag{2.54}$$

dove l'ultima eguaglianza viene dalle leggi di Fresnel. La quantità R è chiamata *coefficiente di riflessione*. Analogamente possiamo calcolare il rapporto

$$T = \frac{I_\mathrm{T}}{I_\mathrm{I}} = \frac{v_2 \epsilon_2}{v_1 \epsilon_1} \frac{E_{0\mathrm{T}}^2}{E_{0\mathrm{I}}^2} \frac{\cos\theta_\mathrm{T}}{\cos\theta_\mathrm{I}} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \,, \tag{2.55}$$

dove l'ultima uguaglianza viene dalle definizioni delle constanti α e β e dalle leggi di Fresnel. La quantità T è chiamata *coefficiente di trasmissione*. È facile vedere che

$$\boxed{R + T = 1} \,, \tag{2.56}$$

che è la condizione per la conservazione dell'energia.

I risultati che abbiamo ottenuto valgono per qualunque angolo d'incidenza. Un caso interessante è l'incidenza normale, per $\theta_\mathrm{I} = 0$. La geometria (e la conservazione del momento) impone che anche $\theta_\mathrm{R} = \theta_\mathrm{T} = 0$ e se torniamo alla

definizione del parametro α vediamo che in questo caso $\alpha = 1$. Dunque, per incidenza normale si trova

$$R = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{2.57}$$

e

$$T = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}\,. \tag{2.58}$$

Quando $n_1 \sim n_2$, l'onda viene completamente trasmessa, mentre quando n_1 e n_2 sono molto diversi, la riflessione domina sulla trasmissione. Nel caso di luce che passa dall'aria, con $n_1 \simeq 1$, ad un vetro con $n_2 = 1.5$, il coefficiente di riflessione è 0.04: solo il 4% della luce torna indietro, in termini di energia, e il resto viene trasmesso. E questo è vero anche per incidenza in verso opposto, dato che né R né T dipendono da quale sia l'indice di rifrazione maggiore o minore.

Tornando all'incidenza obliqua, notiamo che, se $n_1 > n_2$ (ad esempio luce che che incide sulla separazione tra vetro e aria, o tra acqua e aria, ma provenendo dal vetro, o dall'acqua), l'angolo di trasmissione è maggiore dell'angolo di incidenza, per effetto della legge di Snell. Al crescere dell'angolo di incidenza, quindi, si troverà un angolo critico a cui la trasmissione avviene a $\theta_{\rm T} = \pi/2$: la luce non si trasmette. Inserendo l'angolo $\pi/2$ nella legge di Snell si ottiene

$$\theta_{\rm crit} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}\,. \tag{2.59}$$

Per angoli superiori a quello critico la luce viene completamente riflessa. Si parla di *riflessione totale interna*. È quello che succede se guardate in alto stando sommersi in piscina: per un certo intervallo di angoli, la superficie dell'acqua si comporta come uno specchio ideale. Un'applicazione importante di questo principio è la fibra ottica, un dispositivo in grado di "guidare" la luce lungo una fibra di un materiale trasparente, in grado di contenere la luce per riflessione totale interna anche quando la fibra è piegata.

Dato che l'equazione precedente ha soluzioni solo per $n_1 > n_2$, nel caso opposto $n_2 > n_1$ non esiste alcun angolo critico per la riflessione totale e parte della luce viene sempre trasmessa, per qualsiasi angolo d'incidenza. Esiste ancora, tuttavia, un angolo speciale. Si tratta dell'angolo per cui si realizza la condizione $R = 0$. Ricordando il risultato (2.54), si vede che questo avviene per $\alpha = \beta$, ovvero

$$\frac{1}{\cos\theta_{\rm I}}\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_{\rm I}} = \beta \tag{2.60}$$

da cui

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_{\rm I} = \beta^2\cos^2\theta_{\rm I} \tag{2.61}$$

o anche

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_{\rm I} = \beta^2(1 - \sin^2\theta_{\rm I})\,, \tag{2.62}$$

che risolto per $\sin^2\theta_{\rm I}$ dà

$$\sin^2\theta_{\rm I} = \frac{1-\beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}\,. \tag{2.63}$$

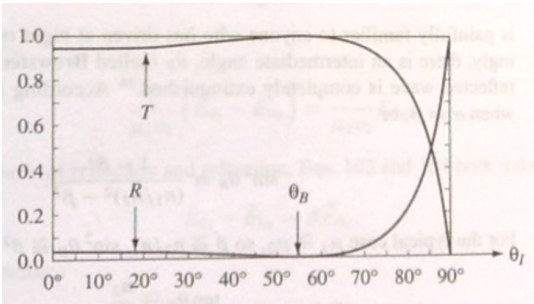
Ora ricordiamo che $\beta = n_2/n_1$ per scrivere

$$\sin^2\theta_{\rm I} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}\,. \tag{2.64}$$

che implica

$$\tan\theta_{\rm I} = \beta = n_2/n_1\,. \tag{2.65}$$

Questo particolare angolo d'incidenza è detto *angolo di Brewster*. Se la luce incide a quest'angolo, la trasmissione è totale e non si ha alcuna riflessione. Per luce che passa dall'aria, con $n_1 \simeq 1$, ad un vetro con $n_2 = 1.5$, l'angolo di Brewster è circa 56°. Per il passaggio da aria ad acqua, che nel visibile ha $n_2 \simeq 1.33$, l'angolo di Brewster è circa 53°. Nel Griffiths viene riportato un grafico di R e T in funzione di $\theta_{\rm I}$ per il caso aria-vetro. Copio qui la stessa figura per comodità.



Ricordiamoci, a questo punto, che le equazioni di Fresnel, i coefficienti di riflessione e trasmissione, l'angolo critico per la riflessione totale interna e l'angolo di Brewster li abbiamo ricavati qui solo nel caso di polarizzazione lineare nel piano d'incidenza. Nulla ci garantisce che le espressioni siano le stesse anche per direzioni di polarizzazione diverse; e infatti non lo sono. Ma almeno abbiamo dato un'idea di come si svolge il calcolo.

Ad esempio, se si facesse il calcolo di R per onde piane polarizzate in direzione y (con il campo elettrico parallelo alla superficie di separazione tra i due mezzi) si troverebbe che non esiste alcun angolo di Brewster perché il coefficiente di riflessione non si annulla mai. Un'implicazione interessante è

la seguente. Se vi trovate in riva ad un lago, con il sole tra i 30 e i 40 gradi dall'orizzonte, buona parte dei riflessi del sole che arrivano a voi sono il risultato di una riflessione con un angolo di incidenza prossimo all'angolo di Brewster. Questo implica che quasi tutta la luce polarizzata nel piano d'incidenza in realtà non vi arriva affatto, essendo per lo più trasmessa dentro al lago. Dunque i bagliori che arrivano ai vostri occhi sono prevalentemente dati da luce polarizzata parallelamente alla superficie. Questo è utile da sapere se siete fotografi e volete ridurre l'effetto indesiderato dei bagliori. Di solito i fotografi hanno in dotazione, per questi casi, i filtri polaroid che, opportunamente piazzati davanti all'obiettivo, riducono l'intensità della luce in modo selettivo, in base alla direzione di polarizzazione.

Il messaggio di portare a casa qui è il seguente. Il passaggio delle onde elettromagnetiche tra due mezzi continui lineari e isolanti avviene secondo il fenomeno della rifrazione. Dati gli indici di rifrazione dei due mezzi, i coefficienti di riflessione e trasmissione sono funzioni dell'angolo di incidenza, ma dipendono anche dalla polarizzazione dell'onda. Abbiamo fatto il calcolo esplicito per la polarizzazione nel piano d'incidenza, ma il calcolo sarà simile anche per polarizzazioni diverse. Abbiamo visto che esistono situazioni in cui la riflessione è totale, oppure la trasmissione è totale. Dobbiamo anche tener presente che esistono materiali particolari, che hanno una direzionalità intrinseca nella loro risposta alla radiazione; ad esempio, possono avere un coefficiente di trasmissione che si annulla per polarizzazione in una data direzione, anche quando l'incidenza è normale, mentre è prossima a 1 per polarizzazione ortogonale a quella. Questi sono i filtri polaroid a cui accennavo poco fa. Altri materiali (le lamine a quarto d'onda) prendono un'onda polarizzata linearmente e la convertono in un'onda polarizzata circolarmente; se il campo incidente era lungo x, il campo trasmesso dalla lamina ha componenti x e y sfasate di $\pm\pi/2$. La natura è ricca di situazioni interessanti.

Un'assunzione forte che abbiamo fatto all'inizio è l'indipendenza di χ_e e χ_m dalla frequenza delle onde che si propagano nel mezzo. In molto situazioni questa indipendenza non si realizza affatto, in altre si realizza entro un grado di approssimazione accettabile. Dunque, tutte le considerazioni fatte finora le dobbiamo intendere valide solo in intervalli limitati di frequenze, quelli in cui χ_e e χ_m sono costanti entro la precisione concessa dalle condizioni di osservazione. Al di fuori di quelli, la materia si comporta come un mezzo *nonlineare* o *dispersivo*; l'indice di rifrazione viene a dipendere da ω e la trasmissione avviene ad angoli diversi a seconda della frequenza dell'onda incidente. Questo è ben noto dai tempi di Newton. La luce bianca, sovrapposizione di onde di tutte le frequenze nello spettro della luce visibile, si decompone in colori diversi quando passa attraverso un prisma di vetro. Per lo stesso motivo, le gocce di pioggia illuminate dal sole rimandano al suolo la luce bianca decomposta nell'arcobaleno. Questi fenomeni si spiegano seguendo i nostri ragionamenti

precedenti sulla rifrazione, aggiungendo una piccola dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza della luce. In altri casi le cose possono essere più complicate, ma la trattazione generale dei mezzi dispersivi va oltre gli scopi di questo corso.

2.3 Campi nei conduttori

Finora abbiamo trattato le equazioni di Maxwell in mezzi lineari in assenza di cariche libere. Ora consideriamo il caso dei campi in un mezzo conduttore. Assumiamo che il conduttore si comporti come un mezzo lineare dal punto di vista della polarizzazione e la magnetizzazione, ma ammetta anche una densità di cariche libere ρ_{lib} e una densità di corrente $\mathbf{j}_{\text{lib}}$. Le equazioni di Maxwell per questa situazione le avevamo già scritte all'inizio del capitolo, ma le riscriviamo anche qui per comodità:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon} \tag{2.66}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.67}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.68}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}_{\text{lib}} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \,. \tag{2.69}$$

Poi assumiamo che la corrente segua la legge di Ohm

$$\mathbf{j}_{\text{lib}} = \sigma \mathbf{E} \,, \tag{2.70}$$

dove σ è la conducibilità. Allora possiamo riscrivere la legge di Ampère-Maxwell così

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu\sigma \mathbf{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \,; \tag{2.71}$$

se poi prendiamo la divergenza a destra e sinistra, troviamo

$$0 = \mu\sigma \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}}{\partial t} \,, \tag{2.72}$$

che con la legge di Gauss diventa

$$0 = \frac{\mu\sigma}{\epsilon} \rho_{\text{lib}} + \mu \frac{\partial \rho_{\text{lib}}}{\partial t} \,, \tag{2.73}$$

ovvero

$$\frac{\partial \rho_{\text{lib}}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_{\text{lib}} \,. \tag{2.74}$$

In un mezzo omogeneo, in cui σ e ϵ sono costanti, questa equazione ha come soluzione

$$\rho_{\text{lib}}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{lib}}(\mathbf{r}, 0) e^{-t/\tau} \tag{2.75}$$

con $\tau = \epsilon/\sigma$. Questa espressione ci dice che, se per qualche ragione le cariche libere sono presenti al tempo $t = 0$ in una certa regione del conduttore ($\rho_{\rm lib}(\mathbf{r}, 0) \neq 0$), dopo un tempo dell'ordine di qualche τ queste cariche spariscono da lì, andando altrove. Siccome questo è vero per qualsiasi punto all'interno del conduttore allora, per tempi molto più lunghi di τ, l'unico luogo dove possiamo provare cariche libere è la superficie del conduttore stesso, dove non vale l'assunzione di omogeneità del mezzo e dove, dunque, l'espressione precedente non si applica.

Il parametro $\tau = \epsilon/\sigma$ è importante per capire il comportamento dei campi in un conduttore ohmico. Sappiamo che σ può variare di vari ordini di grandezza a seconda del materiale e, di conseguenza, anche il tempo tipico τ varia altrettanto. Per dire se τ è un tempo lungo o breve, dobbiamo confrontarlo con la scala di tempi tipici su cui variano i campi elettrici e magnetici in un dato problema fisico. Se il nostro intento è lo studio della risposta del conduttore ad un onda elettromagnetica, il confronto va fatto con il periodo dell'onda, ovvero con una scala temporale dell'ordine di $1/\omega$. Se $\omega\tau \ll 1$, allora il regime *transiente*, in cui sono ammesse cariche libere all'interno del conduttore, è molto breve e possiamo concentrarci sul comportamento del sistema per $t \gg \tau$, quando le cariche libere possono essere trovate solo sulla superficie. Questa in effetti è la situazione in conduttori tipici (metalli, ma non solo) in cui τ assume valori molto piccoli, se espressi in secondi, tali da rendere valida la condizione $\omega\tau \ll 1$ in un intervallo di frequenze molto ampio. In questa situazione, all'interno del conduttore possiamo porre $\rho_{\rm lib} = 0$ e le equazioni di Maxwell diventano

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.76}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.77}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.78}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{2.79}$$

Notiamo per inciso che, mentre la densità di carica libera può essere eliminata dalla prima equazione dopo il transiente (se ϵ/σ è piccolo), il termine che viene dalla densità di corrente delle cariche libere nella quarta equazione deve invece rimanere, perché dà un contributo proporzionale a $\sigma\mathbf{E}$, non trascurabile.

A questo punto possiamo sviluppare il calcolo come avevamo fatto per risolvere le equazioni di Maxwell nel vuoto. Applichiamo il rotore alla seconda equazione:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}\,. \tag{2.80}$$

A sinistra sappiamo che

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}\,, \tag{2.81}$$

mentre a destra possiamo usare la (2.79) e scrivere

$$-\nabla^2\mathbf{E} = -\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\,, \tag{2.82}$$

oppure

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0\,. \tag{2.83}$$

Allo stesso modo, prendendo il rotore della (2.79), otteniamo

$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0\,. \tag{2.84}$$

Dunque, dalle equazioni di Maxwell nel conduttore si ottengono due equazioni disaccoppiate per i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, simili ad equazioni delle onde; rispetto alle solite equazioni delle onde qui c'è un termine in più, contenente la derivata prima rispetto al tempo. Prendiamo la prima equazione e cerchiamo soluzioni del tipo

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \tag{2.85}$$

dove la direzione z è del tutto arbitraria e $\tilde{k}$ è un numero complesso. Inserendo questa espressione nell'equazione (2.83), troviamo

$$-\tilde{k}^2 + \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega = 0\,. \tag{2.86}$$

Se l'ultimo termine non ci fosse (come negli isolanti), il vettore d'onda sarebbe puramente reale e varrebbe la solita relazione $v = \omega/\tilde{k} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. L'ultimo termine invece fa in modo che il vettore d'onda debba essere necessariamente complesso. Lo possiamo scrivere separando la sua parte reale dalla parte immaginaria in questo modo:

$$\tilde{k} = k + ik'\,, \tag{2.87}$$

con k e k' reali. Così si ha $\tilde{k}^2 = k^2 - k'^2 + 2ikk'$ e l'equazione precedente diventa

$$-k^2 + k'^2 - 2ikk' + \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega = 0\,. \tag{2.88}$$

Affinché questa sia un'identità devono annullarsi separatamente sia la parte reale che la parte immaginaria dell'equazione e dunque

$$k^2 - k'^2 = \mu\epsilon\omega^2 \quad , \quad kk' = \frac{1}{2}\mu\sigma\omega\,. \tag{2.89}$$

Da queste si possono estrarre k e k', ad esempio ricavando k' dalla seconda e inserendolo nella prima; si ottiene un'espressione quadratica in k^2 che risolta,

dopo semplici passaggi, dà

$$k = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{1}{(\omega\tau)^2}}+1\right]^{1/2} \tag{2.90}$$

$$k' = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{1}{(\omega\tau)^2}}-1\right]^{1/2}, \tag{2.91}$$

dove, al solito, $\tau = \epsilon/\sigma$.

Il fatto che il vettore d'onda ha una parte immaginaria implica che il campo $\mathbf{E}$ assume la forma di un'onda attenuata. Infatti possiamo scrivere

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{-k'z} e^{i(kz-\omega t)}, \tag{2.92}$$

dove il primo esponenziale, reale e decrescente, produce una diminuzione dell'ampiezza in funzione della distanza a partire da un punto. Lo stesso vale per il campo magnetico $\mathbf{B}$ per il quale, seguendo gli stessi passi, avremmo trovato

$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0 e^{-k'z} e^{i(kz-\omega t)}. \tag{2.93}$$

Dunque, un'onda prodotta in un punto del conduttore si spegne allontanandosi da quel punto su una scala di lunghezze fissata da $1/k'$. In pratica, l'unica regione dove i campi possono essere diversi da zero è uno strato vicino alla superficie del conduttore, di spessore dell'ordine di $d = 1/k'$. La lunghezza d è chiamata *lunghezza di penetrazione* e dipende dalla natura del materiale. In un buon conduttore, in cui $\omega\tau \ll 1$, i valori di k e k' sono dello stesso ordine e, quindi, la lunghezza d'onda $2\pi/k$ è confrontabile con la lunghezza di propagazione. Nel caso di un metallo come l'argento, la lunghezza di penetrazione nelle frequenze ottiche (quelle della luce visibile) è di appena 10 nm. In mezzi meno conduttori (ma pur sempre ohmici), la lunghezza di penetrazione è più grande e l'onda può penetrare per più lunghezze d'onda prima di attenuarsi.

In sintesi, sfruttando le equazioni di Maxwell per un conduttore ohmico, abbiamo trovato due equazioni differenziali disaccoppiate per il campo elettrico e il campo magnetico, le cui soluzioni sono scritte qui sopra. Naturalmente, i campi $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ non possono essere scelti a piacere, dato che sono legati da tutte quattro le equazioni di Maxwell. Fissato $\mathbf{E}_0$, il vettore $\mathbf{B}_0$ può essere trovato sfruttando le altre informazioni contenute nelle quattro equazioni di partenza. L'avevamo già fatto per le onde elettromagnetiche nel vuoto e lo possiamo fare allo stesso modo anche qui. Intanto ci dobbiamo ricordare che nelle espressioni precedenti i campi sono complessi. Scegliere $\mathbf{E}_0$ significa dunque fissarne sia la parte reale che la parte immaginaria o, in alternativa, il modulo e la fase. Possiamo ad esempio scegliere la fase nulla, che equivale a considerare $\mathbf{E}_0$ solo reale. Come accadeva nel caso delle onde nel vuoto, anche

qui le condizioni sulla divergenza del campo elettrico e del campo magnetico impongono (ma non facciamo il calcolo esplicito) che $\mathbf{E}_0$ debba essere perpendicolare alla direzione di propagazione (che qui abbiamo scelto essere z) e che $\mathbf{B}_0$ sia perpendicolare sia a $\mathbf{E}_0$ che a $\hat{\mathbf{z}}$, come nelle usuali onde piane trasverse. Inoltre, se scriviamo $\tilde{k}$ in termini di modulo e fase,

$$\tilde{k} = |\tilde{k}|e^{i\phi}\,, \tag{2.94}$$

con $\phi = \tan^{-1}(k'/k)$, allora le stesse equazioni danno

$$B_0 = \frac{|\tilde{k}|}{\omega} e^{i\phi} E_0\,, \tag{2.95}$$

dove il modulo di $\tilde{k}$ può essere calcolato usando le espressioni (2.90)-(2.91):

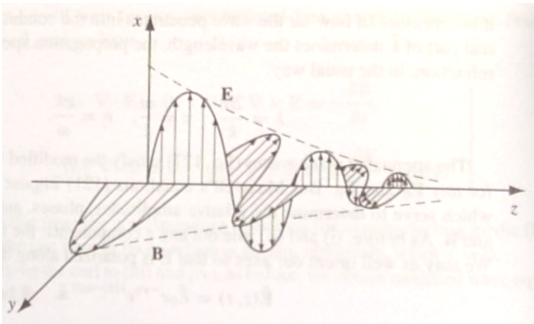
$$|\tilde{k}| = \sqrt{k^2 + k'^2} = \omega\sqrt{\mu\epsilon\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}}\,. \tag{2.96}$$

Dunque l'ampiezza del campo magnetico, $|B_0|$ è uguale all'ampiezza del campo elettrico $|E_0|$ divisa per il fattore $\omega/|\tilde{k}|$, che ne caso delle onde nel vuoto era semplicemente la costante c, ma qui è un fattore che dipende da ω. Inoltre, le oscillazioni del campo elettrico e del campo magnetico sono sfasate di un fase ϕ, che pure dipende da ω, mentre nel vuoto erano sempre in fase. Con la geometria che abbiamo scelto i campi, scritti come funzioni reali, hanno la forma

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 e^{-k'z}\cos(kz - \omega t)\hat{\mathbf{x}} \tag{2.97}$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \frac{|\tilde{k}|}{\omega} E_0 e^{-k'z}\cos(kz - \omega t + \phi)\hat{\mathbf{y}}\,. \tag{2.98}$$

Riporto qui sotto, per comodità, la figura che si trova nel Griffiths.



Supponiamo che un'onda elettromagnetica piana che si propaga nel vuoto incida sulla superficie di un conduttore. Assumendo valide le approssimazioni

fatte in precedente per descrivere il conduttore, quello che si dovrà fare per determinare le proprietà di riflessione e trasmissione è imporre le condizioni di raccordo per i campi elettrici e magnetici sulla superficie, cose avevamo fatto per la separazione tra due mezzi isolanti. Stavolta però le condizioni di raccordo contengono anche la densità di carica libera superficiale. Il calcolo risultato un po' più complicato, ma non troppo. Chi volesse vedere i dettagli, li trova nel Griffiths. Qui ci limitiamo a dire che si arriva a relazioni formalmente identiche alle equazioni di Fresnel, ma con coefficienti complessi.

La cosa più utile da ricordare è che nel limite di conduttori perfetti ($\sigma \to \infty$) l'onda che incide sul conduttore viene interamente riflessa, con uno sfasamento di π (come la deformazione di una corda quando incontra un punto fisso). Questo è il principio su cui si basano i comuni specchi, che sfruttano la riflessione da una superficie metallica (tipicamente argento). Dato che la lunghezza di penetrazione è piccola, non servono grandi quantità di metallo, ma basta uno strato molto sottile; il vetro serve solo come supporto e protezione.

Capitolo 3

Potenziali

3.1 Potenziali e scelta di gauge

Invece di usare il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il campo magnetico $\mathbf{B}$, possiamo formulare le leggi dell'elettromagnetismo in termini del potenziale elettrico V e del potenziale vettore $\mathbf{A}$. Per definirli basta partire dalla legge

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.1}$$

e notare che se introduciamo un nuovo campo vettoriale $\mathbf{A}$ tale che

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{3.2}$$

l'equazione precedente è soddisfatta per qualsiasi scelta di $\mathbf{A}$. Naturalmente $\mathbf{B}$ deve soddisfare anche la legge di Faraday

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.3}$$

e dunque

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.4}$$

da cui segue

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \,. \tag{3.5}$$

L'espressione in parentesi tonda è un campo irrotazionale e, come tale, è esprimibile tramite il gradiente di un campo scalare:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\boldsymbol{\nabla} V \,, \tag{3.6}$$

dove il segno meno è puramente convenzionale. In sintesi, definiamo il potenziale elettrico V e il potenziale vettore $\mathbf{A}$ a partire dai campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ tramite le espressioni

$$\boxed{\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \tag{3.7}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}}\,. \tag{3.8}$$

Notiamo che in elettrostatica il potenziale vettoriale non c'è e si lavora solo con il potenziale elettrostatico V definito tramite la relazione $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$. In magnetostatica $\mathbf{A}$ c'è, definito allo stesso modo, ma in quel caso non dipende dal tempo e non interferisce con la definizione di V. In elettrodinamica invece le due definizioni sono legate tra loro dalla dipendenza temporale.

Dati i potenziali V e $\mathbf{A}$, i campi elettrici e magnetici che si ricavano invertendo le definizioni precedenti obbediscono automaticamente alle due leggi di Maxwell, quella per la divergenza di $\mathbf{B}$ e quella per il rotore di $\mathbf{E}$. Ovviamente non basta. Gli stessi campi debbono obbedire anche alle altre due equazioni di Maxwell. In particolare, la legge di Gauss

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.9}$$

diventa

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.10}$$

ovvero

$$\boxed{\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{3.11}$$

e notiamo che questa, correttamente, si riduce $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$, che è l'equazione di Poisson valida nel caso elettrostatico. Mentre la legge di Ampère-Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.12}$$

diventa

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{\nabla} V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \tag{3.13}$$

ovvero

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \tag{3.14}$$

che, portanto potenziali a sinistra e lasciando le sorgenti (correnti) a destra, può essere scritta nella forma

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}}\,. \tag{3.15}$$

In conclusione, date le sorgenti (densità di carica e densità di corrente) possiamo risolvere le due equazioni differenziali (3.11) e (3.15) per trovare i potenziali V e $\mathbf{A}$. Se poi usiamo questi potenziali per calcolare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ secondo le definizioni (3.7) e (3.8), sappiamo che quei campi soddisfano automaticamente tutte quattro le equazioni di Maxwell. Si tratta di uno strumento formale alternativo per risolvere lo stesso problema. Tuttavia, questo cambio di strategia è utile solo se risolvere le equazioni (3.11) e (3.15) è più semplice che risolvere direttamente le equazioni di Maxwell. A vederle non si direbbe. In realtà una semplificazione appare a vista: le soluzioni delle equazioni (3.11) e (3.15) sono quattro funzioni scalari (V più le tre componenti di $\mathbf{A}$), mentre le soluzioni delle equazioni di Maxwell sono sei funzioni scalari (le tre componenti dei due vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$). Ma questa semplificazione da sé non è gran cosa. Molto di più si può ottenere dalla scelta di *gauge*. Ora vediamo in cosa consiste.

Il punto chiave della faccenda sta nel fatto che potenziali V e $\mathbf{A}$ diversi possono essere associati agli stessi campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Per dimostrarlo, introduciamo due nuovi potenziali V' e $\mathbf{A}'$ che differiscono dai precedenti per un termine additivo, in questo modo

$$V' = V + \beta \quad , \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \tag{3.16}$$

e cerchiamo le condizioni che devono valere per $\boldsymbol{\alpha}$ e β affinché i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, ottenuti tramite le relazioni (3.7) e (3.8), siano gli stessi. Se vogliamo che $\mathbf{B}$ sia lo stesso deve valere

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{3.17}$$

ovvero

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\alpha} = 0\,. \tag{3.18}$$

Se poi vogliamo che anche $\mathbf{E}$ sia lo stesso deve valere

$$\boldsymbol{\nabla}(V + \beta) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\nabla} V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.19}$$

ovvero

$$\boldsymbol{\nabla}\beta + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\alpha} = 0\,. \tag{3.20}$$

Ora, dato che $\boldsymbol{\alpha}$ è irrotazionale, può essere scritto come il gradiente di una funzione scalare

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nabla}\gamma\,, \tag{3.21}$$

in modo che la (3.18) è automaticamente soddisfatta, mentre la (3.20) diventa

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\beta + \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{3.22}$$

Quest'ultima implica che la funzione $\beta + \partial\gamma/\partial t$ è costante nello spazio e può quindi dipendere solo da t. La chiamiamo $f(t)$ e scriviamo

$$\beta = -\frac{\partial\gamma}{\partial t} + f(t)\,. \tag{3.23}$$

Possiamo inglobare la $f(t)$ nella definizione di una nuova funzione λ in questo modo

$$\lambda = \gamma - \int_0^t dt' f(t')\,. \tag{3.24}$$

così che

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} - f(t) \tag{3.25}$$

e dunque

$$\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t}\,. \tag{3.26}$$

Inoltre, dato che γ e λ differiscono per una funzione che dipende solo da t, vale $\boldsymbol{\nabla}\gamma = \boldsymbol{\nabla}\lambda$, da cui segue che

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nabla}\lambda\,. \tag{3.27}$$

Possiamo quindi concludere che, se V' e $\mathbf{A}'$ differiscono da V e $\mathbf{A}$ in questo modo

$$V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\lambda\,, \tag{3.28}$$

allora i campi elettrici e magnetici sono gli stessi e la fisica non cambia. La scelta della funzione $\lambda(\mathbf{r}, t)$ è del tutto arbitraria e non incide sulle grandezze osservabili in qualsiasi fenomeno elettromagnetico. Passare da una funzione λ ad un'altra si chiama *trasformazione di gauge* e il fatto che i risultati fisici non cambiano in questa trasformazione riflette una *invarianza di gauge* dell'elettromagnetismo.

Per comodità riscriviamo qui le due equazioni (3.11) e (3.15)

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.29}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{j}\,. \tag{3.30}$$

che determinano i potenziali, assegnate le sorgenti, e vediamo come possiamo utilizzare l'invarianza di gauge per semplificarle a piacere.

Supponiamo di metterci nel caso più semplice dell'elettrostatica e la magnetostatica, in cui nulla dipende dal tempo. Tutte le derivate temporale spariscono. La prima equazione si riduce all'equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.31}$$

che sappiamo risolvere: data una distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r})$ e assegnato il valore $V = 0$ a distanza infinita dalla regione dove $\rho \neq 0$, la soluzione è

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, . \tag{3.32}$$

Nella seconda equazione rimane l'unica complicazione della divergenza di $\mathbf{A}$. Poco male: possiamo sempre fare una scelta di gauge tale che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Questa si chiama *gauge di Coulomb*. In questo modo, anche questa equazione assume la forma dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{3.33}$$

le cui soluzioni saranno quindi della stessa forma di quelle per V, assumendo che $\mathbf{A}$ si annulli a distanze infinite dalle correnti:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, . \tag{3.34}$$

Notiamo che non c'è alcun bisogno di specificare quale sia la funzione λ da usare nelle trasformazioni di gauge per garantire la condizione $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ della gauge di Coulomb. Quella servirebbe se partiste da un $\mathbf{A}$ diverso, in una gauge diversa, e voleste ottenere da quello un nuovo $\mathbf{A}'$ nella gauge di Coulomb. In quel caso, basterebbe scegliere λ come la soluzione dell'equazione $\nabla^2\lambda = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$, così che $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\lambda$ avrebbe automaticamente divergenza nulla (ricordiamo che il laplaciano è la divergenza del gradiente). Fatto questo inciso, dobbiamo ammettere che le due equazioni di Poisson per V e $\mathbf{A}$ sono eleganti e hanno soluzioni semplici. Peccato però che valgano solo se le distribuzioni di carica e di corrente sono stazionarie.

In elettrodinamica la gauge di Coulomb non è molto utile. È vero che l'equazione per V sarebbe ancora l'equazione di Poisson, ma quella per $\mathbf{A}$ rimarrebbe assai complicata, anche togliendo il termine con la divergenza. Risolvere quella non sarebbe tanto più facile che risolvere direttamente le equazioni di Maxwell. Be', possiamo sempre scegliere una gauge diversa, tanto la fisica non cambia. Dunque ne scegliamo una in cui tutto il termine in parentesi tonda nella (3.30) sparisca. Dunque imponiamo che

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \, . \tag{3.35}$$

Questa si chiama *gauge di Lorenz*. Con questa scelta, le due equazioni per V e $\mathbf{A}$ diventano

$$\nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.36}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \, , \tag{3.37}$$

che hanno la medesima forma. Possiamo anche ricordarci che $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ e scrivere

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.38}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}\,; \tag{3.39}$$

inoltre possiamo introdurre un nuovo operatore differenziale, detto operatore di d'Alembert (o semplicemente *d'Alembertiano*)

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,; \tag{3.40}$$

in modo che le due equazioni sopra assumono una forma particolarmente compatta:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} && (3.41)\\ \Box^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j}\,. && (3.42) \end{aligned}}$$

Le ho incorniciate perché sono eleganti (attenzione: l'eleganza in sé non ha necessariamente a che vedere con la validità, ma ai fisici e ai matematici piace ugualmente l'idea che la descrizione del mondo possa essere elegante; non fatevi però fuorviare troppo da questo criterio estetico). L'aspetto che vale la pena sottolineare è il fatto che a sinistra dell'uguale compare la somma di quattro derivate seconde, tre per le coordinate spaziali e una per il tempo; in pratica, il d'Alembertiano descrive una derivazione nello spazio-tempo, dove coordinate spaziali e temporale entrano allo stesso modo, salvo che il tempo entra con un segno meno e con un fattore c davanti. La cosa non vi dovrebbe sorprendere se avete qualche nozione, anche elementare, di relatività ristretta. Qui, come in altri punti della teoria (ad esempio nella predizione di campi che trasportano energia e momento nel vuoto, con velocità di propagazione indipendente dal sistema di riferimento dell'osservatore), vedete come le equazioni di Maxwell sembrino suggerire, in modo naturale, una riformulazione dei concetti di base della fisica. In questo corso avrete modo di approfondirne le conseguenze.

Una nota minore, di tipo formale, riguarda la notazione: qui abbiamo usato la stessa definizione di d'Alembertiano che si trova nel Griffiths, per coerenza con il resto di questi appunti. Esistono altre convenzioni, come ad esempio l'uso di $\Box$ al posto di $\Box^2$, oppure con il segno opposto per le derivate. Meglio saperlo. Quando leggete un testo di elettrodinamica, date un'occhio alla definizione che è stata scelta dall'autore, in modo da evitare malintesi.

3.2 Forza di Lorentz e potenziali

Prima di risolvere le equazioni (3.41) e (3.42), chiudiamo il ragionamento sull'equivalenza delle due formulazioni dell'elettromagnetismo, quella in termini di V e $\mathbf{A}$ e quella in termini dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Le leggi che abbiamo discusso fin qui permettono di calcolare i potenziali date le cariche. Quello che ci manca è esprimere in termini dei potenziali la forza esercitata dai campi sulle cariche. Dunque partiamo da

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \,, \tag{3.43}$$

che è la forza di Lorentz (notate che questo è Hendrik A. Lorentz, mentre quello della scelta di gauge è Ludvig V. Lorenz). Inoltre, visto che siamo nel contesto della fisica classica newtoniana, vale

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \,, \tag{3.44}$$

dove $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è il momento associato alla carica q. Bene, ora possiamo sostituire i campi con i potenziali usando le definizioni (3.7) e (3.8):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left[-\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})\right] . \tag{3.45}$$

Per il doppio prodotto vettoriale possiamo usare le proprietà note degli operatori differenziali:

$$\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} \,, \tag{3.46}$$

in modo da riscrivere l'equazione precedente nella forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\right] . \tag{3.47}$$

Per capire il significato dei primi due termini in parentesi possiamo ragionare in questo modo. Il potenziale vettore $\mathbf{A}$ sentito da una carica q dipende dal tempo in due modi: da una parte, può variare perché la distribuzione di cariche che genera $\mathbf{A}$ nel punto $\mathbf{r}$ dove si trova la carica può cambiare nel tempo; d'altra parte, la carica stessa cambia posizione nel tempo e questo comporta una variazione del potenziale che essa sente, anche tenendo ferma la distribuzione di cariche che lo produce. Supponiamo che una carica q si trovi in $\mathbf{r}$ al tempo t, dove risente di un potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, e che essa si sposti di $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ nel tempo dt. Il potenziale vettore che la carica sente nella nuova posizione e nel nuovo istante sarà $\mathbf{A}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt)$. La variazione di $\mathbf{A}$ dovuta sia allo spostamento spaziale che all'intervallo temporale sarà

$$d\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \tag{3.48}$$

e sviluppando al primo ordine otteniamo

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dz + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}dt \\ &= v_x\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dt + v_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dt + v_z\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dt + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}dt \\ &= \left[v_x\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]dt \\ &= \left[(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]dt \end{aligned} \tag{3.49}$$

e quindi, per definizione di differenziale di una funzione, il termine in parentesi non è altro che la derivata totale di $\mathbf{A}$ rispetto al tempo (quella che il Griffiths chiama *convective derivative*). Possiamo dunque scrivere

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.50}$$

e inserirla nell'equazione di Newton precedente, così da ottenere

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}(V - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})\right] \tag{3.51}$$

ovvero

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = -q\boldsymbol{\nabla}(V - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}. \tag{3.52}$$

Questa relazione è interessante. Intanto si vede che, in assenza di campi magnetici, la forza che agisce per unità di carica è $-\boldsymbol{\nabla}V$, come si sapeva in elettrostatica. Qui vediamo che l'espressione della forza cambia e diventa dipendente dalla velocità, ma soprattutto vediamo che a sinistra si ottiene la derivata di un nuovo momento, che include il potenziale vettore. La quantità

$$\mathbf{p}_{\mathrm{c}} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \tag{3.53}$$

è detta *momento canonico*. Tenetelo presente; verrà utile in futuro.

3.3 Potenziali ritardati

Torniamo ora al problema di determinare le soluzioni delle due equazioni (3.41) e (3.42). Sappiamo che nel caso statico si riducono a due equazioni di Poisson le cui soluzioni sono gli integrali (3.32) e (3.34). Nel caso di distribuzioni di cariche e correnti che variano nel tempo dobbiamo tenere conto che i potenziali in un punto $\mathbf{r}$ al tempo t saranno determinati dalle distribuzioni di cariche negli

altri punti dello spazio non per come sono al tempo t, ma per com'erano in un istante precedente a causa del ritardo dovuto alla propagazione del segnale. Almeno questo è ciò che ragionevolmente ci aspettiamo. Facciamo quindi la congettura che i potenziali siano dati dalle espressioni

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.54}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, \tag{3.55}$$

dove

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \tag{3.56}$$

è il *tempo ritardato*. In questo modo ogni carica e corrente in $\mathbf{r}'$ contribuisce ai potenziali in $\mathbf{r}$ solo dopo un ritardo dovuto al tempo impiegato dalle onde elettromagnetiche a raggiungere $\mathbf{r}$ partendo da $\mathbf{r}'$. Verifichiamo che questa congettura è corretta e che i due integrali qui sopra sono effettivamente le soluzioni delle equazioni (3.41) e (3.42). Lo dimostriamo esplicitamente solo per V, ma la dimostrazione sarebbe più o meno la stessa anche per $\mathbf{A}$.

Dunque vogliamo dimostrare che la (3.54) è soluzione di $\Box^2 V = -\rho/\epsilon_0$. La dimostrazione è un po' complicata ed è meglio aprire una parentesi matematica sulla manipolazione delle derivate del vettore $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Teniamo infatti presente che la dipendenza da $\mathbf{r}$ in (3.54) entra sia nel tempo ritardato a numeratore che nella distanza a denominatore.

Tanto per cominciare, per comodità, chiamiamo $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Poi dimostriamo le seguenti relazioni:

i) $\boldsymbol{\nabla}\ell = \hat{\boldsymbol{\ell}}$

Questo è il gradiente della distanza

$$\ell = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \tag{3.57}$$

e quindi

$$\boldsymbol{\nabla}\ell = \frac{(x-x')\hat{\mathbf{x}}+(y-y')\hat{\mathbf{y}}+(z-z')\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell} = \hat{\boldsymbol{\ell}}\,. \tag{3.58}$$

ii) $\boldsymbol{\nabla}(1/\ell) = -\hat{\boldsymbol{\ell}}/\ell^2$

Analogamente a prima

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(1/\ell) &= \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\ &= -\frac{(x-x')\hat{\mathbf{x}}+(y-y')\hat{\mathbf{y}}+(z-z')\hat{\mathbf{z}}}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = -\frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell^3} = -\frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2}\,.\end{aligned} \tag{3.59}$$

iii) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{\ell}}/\ell) = 1/\ell^2$

Questa è una divergenza che si calcola così:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell^2} \\
&= \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{(x-x')\hat{\mathbf{x}} + (y-y')\hat{\mathbf{y}} + (z-z')\hat{\mathbf{z}}}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{(x-x')}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \frac{(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \frac{(z-z')}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\
&= \frac{3}{\ell^2} - \frac{2[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^2} \\
&= \frac{3}{\ell^2} - \frac{2}{\ell^2} = \frac{1}{\ell^2} \ . \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

iv) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{\ell}}/\ell^2) = 4\pi\delta(\boldsymbol{\ell})$

Questo è il più tosto. Potreste illudervi che sia semplice, facendo questo calcoletto basato sui risultati precedenti:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{1}{\ell}\frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} + \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} \cdot \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell^3} - \frac{1}{\ell^3} = 0 \qquad (3.61)$$

Dunque vale 0. Attenti però, perché così avete dimostrato che è 0 ovunque, ma non in $\boldsymbol{\ell} = 0$ dove la grandezza da derivare non è definita. Possiamo ignorare questo punto? No, se poi dobbiamo integrare su tutto lo spazio, come nell'integrale che dà il potenziale V. In questo caso, tra l'altro, sappiamo già che l'integrale di $\hat{\boldsymbol{\ell}}/\ell^2$ è non nullo; ce lo dice il teorema di Gauss. Infatti, il campo $\hat{\boldsymbol{\ell}}/\ell^2$ è un campo centrale, di modulo costante su qualsiasi superficie sferica di raggio ℓ. Dato che l'area della superficie sferica è $4\pi\ell^2$ e il modulo del campo va come $1/\ell^2$, ne segue che il flusso vale semplicemente 4π sempre. Ma il flusso deve essere uguale all'integrale della divergenza nella sfera ed ecco perché non possiamo ignorare il comportamento di $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{\ell}}/\ell^2)$ in $\boldsymbol{\ell} = 0$. Dunque $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{\ell}}/\ell^2)$ è uno strano oggetto che è nullo ovunque tranne in $\boldsymbol{\ell} = 0$ ma il cui integrale su tutto lo spazio è un numero finito. Non può essere una funzione di $\boldsymbol{\ell}$, nel significato usuale di funzione dato in analisi matematica; nessuna funzione ha queste proprietà. Esiste però una una "funzione generalizzata" o "distribuzione", che si chiama *delta di Dirac* e si indica con $\delta(\mathbf{r})$, che gode

della proprietà. La si può definire come il limite di una successione di funzioni che hanno un picco in $\mathbf{r} = 0$ e tendano ad annullarsi altrove, con un integrale fissato ad un valore costante. La delta di Dirac è il limite in cui il picco ha un'altezza che tende a infinito e una larghezza che tende a zero, mantenendo costante l'integrale al valore convenzionale 1. Dunque, nel nostro caso deve essere

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} = 4\pi\delta(\boldsymbol{\ell}) \tag{3.62}$$

Possiamo interpretare il risultato anche da un punto di vista fisico. In fondo, il teorema della divergenza si applica anche al campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme. Supponiamo che la carica si trovi in $\mathbf{r} = 0$ e che il suo valore numerico sia $q = 4\pi\epsilon_0$, nelle appropriate unità. La legge di Coulomb ci dice che il campo elettrico generato dalla carica è $\hat{\mathbf{r}}/r^2$ e dunque il flusso del campo attraverso una qualsiasi superficie che contiene la carica vale 4π, che è uguale a q/ϵ_0. La legge di Gauss dice che la divergenza del campo dev'essere uguale a ρ/ϵ_0, ma la densità di carica di una carica puntiforme come la possiamo definire? Immaginiamo, ad esempio, che sia non nulla solo entro una sferetta il cui raggio tende a zero; per tenere fisso il valore della carica in questo limite, dobbiamo far tendere ρ all'infinito nella sferetta, ma fissando l'integrale al valore q. Dunque la ρ si comporta come $q\delta(\mathbf{r})$ e se $q = 4\pi\epsilon_0$, la legge di Gauss coincide con l'espressione (3.62), a meno del simbolo usato per la posizione.

Una proprietà fondamentale della delta di Dirac è che, data una qualsiasi funzione $f(\mathbf{r})$ e un qualsiasi vettore $\mathbf{a}$, vale

$$\int d^3r \; \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{a}) \; , \tag{3.63}$$

che include il caso particolare della funzione costante $f(\mathbf{r}) = 1$ e di $\mathbf{a} = 0$, per cui

$$\int d^3r \; \delta(\mathbf{r}) = 1 \; . \tag{3.64}$$

Queste relazioni rientrano nella definizione stessa della delta di Dirac.

E con questo possiamo chiudere la parentesi matematica. Ora possiamo tornare al calcolo del potenziale elettrico V soluzione dell'equazione $\Box^2 V = -\rho/\epsilon_0$. Vogliamo dimostrare che la soluzione è (3.54). Per farlo ne calcoliamo prima il gradiente e poi, a questo, applichiamo la divergenza. Partiamo quindi con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}, t) &= \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \; . \end{aligned} \tag{3.65}$$

Il gradiente nell'integrale deriva rispetto alle coordinate x, y, z, mentre le coordinate x', y', z' vanno considerate costanti nella derivazione e vengono poi usate come variabili d'integrazione. Il gradiente agisce sia su ρ, a causa della sua dipendenza da $\mathbf{r}$ implicita nel tempo ritardato t_r, sia sul denominatore. Riscriviamo il tutto usando la posizione relativa $\boldsymbol{\ell}$:

$$\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \; \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\ell} \right) , \tag{3.66}$$

con $t_r = t - \ell/c$. Dunque l'integrando è

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{\rho}{\ell} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial t_r} \boldsymbol{\nabla} t_r + \rho \boldsymbol{\nabla} \frac{1}{\ell} . \tag{3.67}$$

Nel primo addendo possiamo usare il fatto che la derivata rispetto a t_r è uguale alla derivata rispetto a t, dato che t e t_r differiscono per un termine indipendente dal tempo,

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{\rho}{\ell} = -\frac{1}{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{1}{c} \boldsymbol{\nabla} \ell + \rho \boldsymbol{\nabla} \frac{1}{\ell} . \tag{3.68}$$

e poi possiamo usare i risultati (i) e (ii) della parentesi matematica precedente. Dunque

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{\rho}{\ell} = -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} - \rho \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} , \tag{3.69}$$

dove, al solito, $\dot{\rho}$ è la derivata temporale di ρ.

Ora che abbiamo il gradiente dell'integrando, ne calcoliamo la divergenza in modo da ottenere poi il laplaciano di V. Dunque

$$\nabla^2 \frac{\rho}{\ell} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \frac{\rho}{\ell} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} + \rho \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} \right) . \tag{3.70}$$

Possiamo svolgere i calcoli in modo analogo a prima, usando tutte le relazioni (i)-(iv) precedenti. Otteniamo

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \frac{\rho}{\ell} &= \frac{1}{c} \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} \cdot \boldsymbol{\nabla} \dot{\rho} + \frac{\dot{\rho}}{c} \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} + \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c^2} \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ell + \frac{\dot{\rho}}{c\ell^2} - \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ell + 4\pi \delta(\boldsymbol{\ell}) \rho \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c^2 \ell} + \frac{\dot{\rho}}{c\ell^2} - \frac{\dot{\rho}}{c\ell^2} + 4\pi \delta(\boldsymbol{\ell}) \rho . \end{aligned} \tag{3.71}$$

Quindi abbiamo

$$\nabla^2 \frac{\rho}{\ell} = \frac{\ddot{\rho}}{c^2 \ell} - 4\pi \delta(\boldsymbol{\ell}) \rho , \tag{3.72}$$

da cui

$$\nabla^2 V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \left(\frac{\ddot{\rho}}{c^2\ell} - 4\pi\delta(\boldsymbol{\ell})\rho\right) . \tag{3.73}$$

Per il primo integrale vale

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\ddot{\rho}}{c^2\ell} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\rho}{c^2\ell} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho}{c^2\ell}\right] \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(\mathbf{r},t)\,, \end{aligned} \tag{3.74}$$

mentre il secondo integrale contiene la delta di Dirac, e dunque

$$\int d^3r' \ \delta(\boldsymbol{\ell})\rho(\mathbf{r}',t_r) = \int d^3r' \ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}',t_r) = \rho(\mathbf{r},t)\,. \tag{3.75}$$

Mettendo assieme queste informazioni otteniamo

$$\nabla^2 V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(\mathbf{r},t) - \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0}\,, \tag{3.76}$$

ovvero

$$\Box^2 V(\mathbf{r},t) = -\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0}\,, \tag{3.77}$$

che è proprio l'equazione che volevamo risolvere. Concludiamo che il potenziale elettrico "ritardato"

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \ \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.78}$$

è la soluzione dell'equazione $\Box^2 V = -\rho/\epsilon_0$ che cercavamo, con la condizione al contorno che V si annulli a distanza infinita dalle sorgenti dei campi (date le condizioni al contorno, la soluzione è unica). In modo del tutto analogo si può lavorare con il potenziale vettore per dimostrare che

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.79}$$

è soluzione di $\Box^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$.

Notiamo che potremmo cambiare il segno del tempo nelle equazioni e le soluzioni sarebbero altrettanto buone. L'operatore di d'Alembert non cambia per inversione del tempo, dato che il tempo vi compare al quadrato. Invece cambierebbe il tempo t_r, che andrebbe rimpiazzato da $t_a = t+\ell/c$, dove l'indice a sta per "anticipato". I potenziali che si ottengono in questo modo sono detti

potenziali anticipati. Sono matematicamente corretti (e possono perfino essere utili in certe occasioni), ma non portano a risultati fisici accettabili in quanto violano la causalità: implicherebbero che il potenziale qui e ora è determinato dalla distribuzione di cariche che sta altrove nel futuro. La preveggenza la lasciamo ai maghi; qui ci teniamo solo i potenziali ritardati.

Le espressioni dei potenziali ritardati permettono di calcolare, analiticamente o numericamente, il potenziale elettrico e il potenziale vettore in ogni circostanza. Una volta calcolati, da essi si possono determinare il campo elettrico e il campo magnetico usando le solite relazioni (3.7)-(3.8). Volendo, si possono pure ricavare le espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ come integrali delle densità di carica e di corrente. Lo facciamo esplicitamente per $\mathbf{E}$, che è più semplice. La relazione da usare è

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,. \tag{3.80}$$

Il primo termine l'abbiamo già calcolato tra la (3.65) e la (3.69). Per il secondo termine invece abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{\partial t}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Mettendo assieme le due informazioni possiamo scrivere

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\left[\frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\ell^2}\hat{\boldsymbol{\ell}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}',t_r)}{c\ell}\hat{\boldsymbol{\ell}} - \frac{\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',t_r)}{c^2\ell}\right]\,. \tag{3.82}$$

Facendo un conto analogo per $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ si ottiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{\ell^2} + \frac{\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',t_r)}{c\ell}\right]\times\hat{\boldsymbol{\ell}}\,. \tag{3.83}$$

Queste due espressioni si chiamano *equazioni di Jefimenko.* A vista sono più complicate delle corrispondenti espressioni per i potenziali ritardati. In quel caso, rispetto al caso statico, bastava inserire un ritardo nel tempo nell'integrando. Qui invece non basta; ci sono anche pezzi aggiuntivi. Questo rende più facile calcolare prima V e $\mathbf{A}$ e poi, da questi, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ per semplice derivazione, piuttosto che calcolare direttamente $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ dalle equazioni di Jefimenko. Naturalmente i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ calcolati a partire dai potenziali sono indipendenti dalla scelta di gauge. La scelta della gauge di Lorenz è efficace perché porta ad espressioni di V e $\mathbf{A}$ particolarmente compatte e simili a quelle del

caso statico. Non bisogna però sottovalutare la differenza tra il caso statico e il caso dinamico. La sostituzione di t con t_r non è indolore: dato che t_r varia con $\mathbf{r}'$, essa implica che, per un dato $\mathbf{r}$, gli integrali vanno calcolati sommando i contributi che vengono dalle cariche e le correnti in tempi diversi a seconda della posizione relativa $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Un caso interessante, ma anche delicato dal punto di vista del calcolo, è quello di una particella puntiforme di carica q che si muove nello spazio, con posizione $\mathbf{r}_p(t)$ e velocità $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}_p(t)$. La densità di carica $\rho(\mathbf{r}, t)$ è non nulla solo nella posizione $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p(t)$ in cui la carica si trova al tempo t e la densità di corrente può essere scritta come $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Dato che negli integrali che danno i potenziali le densità di carica e di corrente da inserire nell'integrando sono quelle calcolate in $\mathbf{r}'$, bisogna stare attenti che la posizione della carica da inserire è quella al tempo ritardato. In altri termini, assegnati il tempo t e la posizione $\mathbf{r}$ in cui si vuole calcolare V e $\mathbf{A}$, quello che conta è sapere, per ogni valore della variabile d'integrazione $\mathbf{r}'$, dov'era e che velocità aveva la carica al tempo t_r, dove t_r dipende da $\mathbf{r}'$. Come dicevo, il calcolo è delicato perché implica un sottile effetto geometrico nell'integrazione. Chi fosse interessato può leggere la spiegazione sul Griffiths; se avremo tempo ci torneremo. Per il momento diamo il risultato:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\ell c - \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{v})} \tag{3.84}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t) \ , \tag{3.85}$$

dove $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t_r)$ e la velocità è $\mathbf{v}(t_r)$; il tempo ritardato t_r è soluzione dell'equazione

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t_r)| = c(t - t_r) \ . \tag{3.86}$$

Queste due espressioni per V e $\mathbf{A}$ sono chiamate *potenziali di Liénard-Wiechert.* Da queste si possono ricavare i campi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ell}{(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right] \tag{3.87}$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{\ell}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{3.88}$$

dove $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}$. Come si vede, anche in questo caso il campo magnetico è perpendicolare al campo elettrico; inoltre, è perpendicolare al vettore che collega il punto dove si misura il campo al punto dove si trovava la carica al tempo ritardato.

Capitolo 4

Radiazione

4.1 Radiazione di dipolo elettrico

Per comodità, riscriviamo qui le equazioni di Jefimenko

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \left[\frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\ell^2}\hat{\boldsymbol{\ell}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}',t_r)}{c\ell}\hat{\boldsymbol{\ell}} - \frac{\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',t_r)}{c^2\ell}\right] \tag{4.1}$$

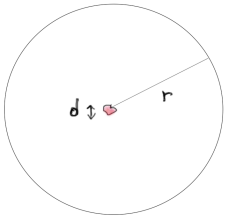
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{\ell^2} + \frac{\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',t_r)}{c\ell}\right] \times \hat{\boldsymbol{\ell}}\,, \tag{4.2}$$

che abbiamo ricavato nella sezione precedente. Queste permettono di determinare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ generati da qualsiasi configurazione di cariche ferme o in moto. La scelta della gauge di Lorenz, che avevamo fatto per il calcolo dei potenziali ritardati, non influenza il risultato per i campi, data l'invarianza di gauge della teoria, ma permette di riformulare il problema in termini del calcolo dei seguenti integrali:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,. \tag{4.4}$$

Ora immaginiamo di avere delle cariche in una regione limitata di spazio e andiamo a vedere se i campi elettromagnetici prodotti da esse trasportano energia a grandi distanze. Per fare questo dobbiamo ricorrere al vettore di Poynting $(1/\mu_0)\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ che ci dà l'energia che passa nell'unità di tempo e per unità di area attraverso una superficie posta perpendicolarmente alla direzione di propagazione dei campi. Prendiamo una sfera di raggio r, molto grande, con le sorgenti dei campi in prossimità del suo centro. Il valore dei campi



sulla superficie della sfera lo possiamo prendere dalle equazioni di Jefimenko. Se r è molto più grande della regione occupata dalle cariche (cioè la regione su cui si estendono gli integrali in r'), allora $\boldsymbol{\ell}$ è circa uguale a $\mathbf{r}$. Questo significa che il primo termine in ciascuno dei due integrali dà un contributo in $1/r^2$ sulla superficie della sfera e un contributo in $1/r^4$ al vettore di Poynting. D'altra parte l'area della sfera cresce come r^2 e, dunque, quei due termini danno un flusso di energia che si annulla a grandi distanze. Notiamo che gli stessi due termini sono gli unici che sopravvivono nel caso statico (ρ e $\mathbf{j}$ costanti nel tempo) dove rappresentano le leggi di Coulomb e Biot-Savart; questo significa che configurazioni stazionarie di cariche non irradiano energia all'infinito. Sottolineiamo il fatto che qui per radiazione si intende il trasporto di energia a grandi distanze e non il fatto che i campi si estendono a grandi distanze; cariche e correnti stazionarie producono campi che possono estendersi all'infinito, ma che non sono associati ad alcuna radiazione. I soli termini che possono produrre radiazione sono quelli in $1/r$, che contengono derivate temporali della densità e della corrente.

Un esempio particolarmente significativo è quello del dipolo elettrico oscillante. Prendiamo due piccole sferette poste agli estremi di un'asta sottile di lunghezza d. Disponiamo l'asta lungo l'asse z, in modo che le sferette abbiamo i centri in $z = \pm d/2$. Poi supponiamo che la sferetta in alto abbia una carica elettrica che varia nel tempo secondo la legge

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) \tag{4.5}$$

e quella in basso abbia carica $-q(t)$, in modo che il sistema rimane globalmente neutro. Sia il raggio delle sferette che il diametro dell'asta siano trascurabili rispetto alla distanza d. Questo ci permetterà di sviluppare il calcolo analitico senza troppe complicazioni. La variazione nel tempo della carica sulle sferette implica una corrente alternata lungo l'asta. Si tratta quindi di un problema in cui sia la densità di carica che la densità di corrente dipendono dal tempo. Ci chiediamo se questo comporti radiazione a grandi distante e, se sì, in quale forma.

Per prima cosa ricordiamo la nozione di dipolo elettrico sicuramente già vista in elettrostatica. Nel caso del nostro esempio, possiamo definire il dipolo

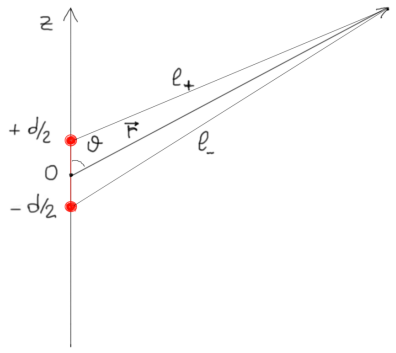
elettrico

$$\mathbf{p}(t) = q(t)d\hat{\mathbf{z}} = q_0 d\cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}} = p_0\cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}} \tag{4.6}$$

essendo $p_0 = q_0 d$. In questo senso, il sistema che stiamo studiando può essere chiamato *dipolo oscillante*. Ora, invece di usare le equazioni di Jefimenko, che sono un po' complicate, usiamo l'espressione per i potenziali ritardati e ci calcoliamo il potenziale elettrico $V(\mathbf{r}, t)$. Si tratta di calcolare

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{4.7}$$

dove la però la densità di carica è non nulla solo sulle due sferette, di dimensioni trascurabili e poste in $z = \pm d/2$.



Possiamo scrivere $\rho(\mathbf{r}') = q(t)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_+)$ per la sferetta in alto, dove $\mathbf{r}'_+$ è la sua posizione, e analogamente $\rho(\mathbf{r}') = -q(t)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_-)$, per quella in basso. Così l'integrale diventa

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q\left(t - \frac{\ell_+}{c}\right)}{\ell_+} - \frac{q\left(t - \frac{\ell_-}{c}\right)}{\ell_-}\right] \tag{4.8}$$

dove

$$\ell_\pm = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 \mp rd\cos\theta} \tag{4.9}$$

se θ è l'angolo compreso tra il vettore $\mathbf{r}$ e l'asse z. Possiamo anche esplicitare la dipendenza temporale:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\cos[\omega(t - \ell_+/c)]}{\ell_+} - \frac{\cos[\omega(t - \ell_-/c)]}{\ell_-}\right]. \tag{4.10}$$

Poi ci mettiamo a grandi distanze dal dipolo, in modo che $\boxed{d \ll r}$. In tal caso possiamo sviluppare le due distanze $\ell_\pm$ così:

$$\ell_\pm \simeq r\sqrt{1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta} \;\simeq\; r\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \tag{4.11}$$

o anche

$$\frac{1}{\ell_\pm} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right) . \tag{4.12}$$

Similmente possiamo sviluppare il tempo ritardato nell'argomento del coseno:

$$\begin{aligned}
\cos[\omega(t-\ell_\pm/c)] &\simeq \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\pm\frac{d}{2c}\cos\theta\right)\right] \\
&= \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right) \\
&\mp \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\sin\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right) .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Qui facciamo un'altra approssimazione: assumiamo che la distanza d tra le sferette sia molto piccola anche rispetto alla distanza percorsa dalla luce in un periodo di oscillazione della carica, $2\pi c/\omega$. Questa distanza è anche la lunghezza d'onda di un'onda elettromagnetica che abbia la stessa frequenza del dipolo, essendo $\lambda = 2\pi/k$ con $c = \omega/k$. Dunque vogliamo che sia $\boxed{d \ll \lambda}$. In tal caso, $(\omega d/2c)\cos\theta$ è molto minore di 1 indipendentemente da θ. Nell'espressione precedente questa quantità compare come argomento di un coseno e di un seno; prendiamone lo sviluppo al primo ordine:

$$\cos[\omega(t-\ell_\pm/c)] \simeq \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \mp \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] . \tag{4.14}$$

Con queste approssimazioni, il primo termine nella parentesi quadra in (4.10) diventa

$$\frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{2r}\cos\theta\right)\left\{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\} \tag{4.15}$$

e il secondo

$$\frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{2r}\cos\theta\right)\left\{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] + \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\} . \tag{4.16}$$

Per calcolare V dobbiamo farne la differenza. Il risultato è

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r},t) &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{d}{r^2}\cos\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega d}{cr}\cos\theta\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r^2}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{cr}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\} .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Ora notiamo che il primo termine decresce più rapidamente del secondo se $r \gg c/\omega$. Inoltre, nel caso in cui non ci sia dipendenza temporale e le cariche siano $\pm q$ sulle due sferette, quel termine si riduce al potenziale elettrostatico

generato da un dipolo, che dà luogo ad un campo elettrico proporzionale a $1/r^3$. Un campo del genere non produce radiazione all'infinito e lo possiamo ignorare. Se ricordiamo la definizione della lunghezza d'onda λ già introdotta qualche riga più sopra, la condizione per trascurare il primo termine rispetto al secondo diventa $\boxed{\lambda \ll r}$. In tal caso

$$V(\mathbf{r}, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos\theta}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad , \text{ per } d \ll \lambda \ll r \,, \tag{4.18}$$

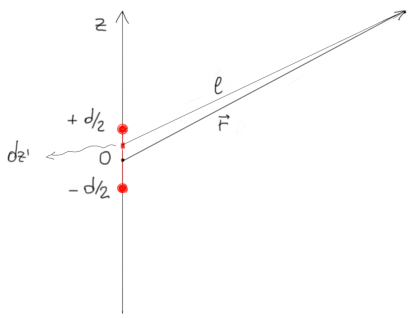
dove abbiamo anche raggruppato le tre condizioni che abbiamo utilizzato (e che avevamo incorniciato) per arrivare a questo risultato; notiamo che le ultime due implicano la prima.

Non ci basta. Il nostro scopo è determinare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e per farlo ci serve anche il potenziale vettore. Dobbiamo usare l'espressione del potenziale ritardato

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \,. \tag{4.19}$$

La corrente elettrica nel nostro caso è quella che scorre tra una sferetta e l'altra. La possiamo scrivere partendo dalla corrente

$$\mathbf{I}(t) = \frac{dq}{dt}\hat{\mathbf{z}} = -q_0\omega \sin(\omega t)\hat{\mathbf{z}} \,. \tag{4.20}$$



Per definizione questa corrente è anche l'integrale della densità di corrente nelle coordinate x' e y' ortogonali all'asta. Inoltre, se l'asta è sottile, la distanza $\ell = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ è solo funzione di z' e possiamo scrivere

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \, \frac{q_0\omega}{\ell} \sin\left[\omega\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{z}} \,. \tag{4.21}$$

Notiamo che, essendo d molto minore di r, la differenza tra la distanza ℓ (tra il punto dove vogliamo calcolare il potenziale e il tratto infinitesimo di asta in

z') e la distanza r (tra il punto dove vogliamo calcolare il potenziale e il punto medio dell'asta) è piccola, dell'ordine di d/r. In altri termini ℓ è uguale a r più termini in d/r. Se sostituiamo ℓ con r, limitandoci all'ordine dominante, otteniamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0\omega}{r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{z}}\int_{-d/2}^{d/2} dz'\,. \tag{4.22}$$

ovvero

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{z}} \tag{4.23}$$

e questo è già dell'ordine di d/r come il potenziale elettrico (4.18). Non serve andare all'ordine successivo.

Bene; ora abbiamo V e $\mathbf{A}$, entrambi ottenuti con l'assunzione $d \ll \lambda \ll r$. Da questi possiamo calcolarci i campi. Per $\mathbf{E}$ ci serve dapprima il gradiente di V; a tale scopo conviene usare le coordinate polari:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} V &= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= -\frac{p_0\omega\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left\{-\frac{1}{r^2}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{rc}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\hat{\mathbf{r}} \\
&+ \frac{p_0\omega\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{1}{r^2}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}\,.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ora notiamo che per $r \to \infty$, il primo e il terzo termine, proporzionali a $1/r^2$ sono trascurabili rispetto al secondo. Teniamo solo quest'ultimo, che è il termine dominante:

$$\boldsymbol{\nabla} V = \frac{p_0\omega^2\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{4.25}$$

Poi dobbiamo calcolare anche la derivata di $\mathbf{A}$ rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{z}} \\
&= -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right](\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})\,.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Con questi possiamo calcolare il campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\sin\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.27}$$

e il campo magnetico

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4.28}$$

dove $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ è il versore ortogonale $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nella terna di coordinate polari (siccome $\mathbf{A}$ ha solo componenti r e θ, il suo rotore è per forza nella direzione ϕ). Riscriviamo $\mathbf{A}$ con i nuovi versori

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] (\cos\theta\ \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{4.29}$$

e poi calcoliamo le derivate

$$B_\phi = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\omega}{c} \sin\theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] + \frac{\sin\theta}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} . \tag{4.30}$$

Anche qui abbiamo un termine trascurabile, il secondo, che va come $1/r^2$. Teniamo dolo il termine dominante, che è il primo. Dunque

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin\theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\boldsymbol{\phi}} . \tag{4.31}$$

Abbiamo trovato che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali tra loro e sono anche ortogonali rispetto al vettore $\mathbf{r}$. Inoltre

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} , \tag{4.32}$$

come per un'onda elettromagnetica piana che si propaga nella direzione $\hat{\mathbf{r}}$.

L'energia irradiata dal dipolo oscillante è determinata dal vettore di Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2\theta \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{r}} , \tag{4.33}$$

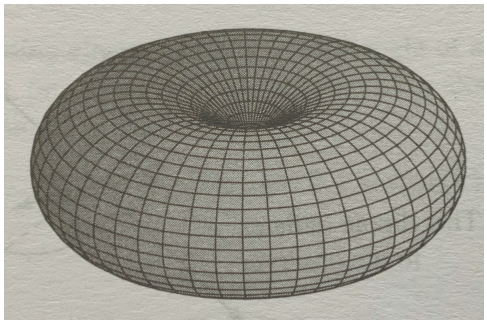
la cui media temporale è

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2\theta\ \hat{\mathbf{r}} . \tag{4.34}$$

La radiazione è radiale, ma non isotropa. Lungo l'asse z (dove $\theta = 0$) il dipolo non irradia, mentre la radiazione è massima nel piano x-y (dove $\theta = \pi/2$). La figura qui sotto (riprodotta dal Griffiths) riporta, in scala arbitraria, il valore di $\langle S \rangle$ in funzione della direzione. La ciambella ha l'asse lungo z.

La potenza irradiata attraverso una sfera di raggio r, sempre nell'ipotesi $r \gg \lambda \gg d$, è l'integrale di $\langle \mathbf{S} \rangle$ sulla superficie della sfera:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = 2\pi \int_0^\pi d\theta\ r^2 \sin\theta\ \langle S \rangle \\ &= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi c} \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta . \end{aligned} \tag{4.35}$$



L'integrale vale 4/3 e dunque

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}}. \tag{4.36}$$

In conclusione, il flusso di energia uscente dalla sfera nell'unità di tempo non dipende dal raggio r della sfera ed è determinato dalle due caratteristiche principali del dipolo elettrico: p_0 e ω. La forte dipendenza da ω nella potenza irradiata spiega qualitativamente la colorazione del cielo (si veda la spiegazione nel Griffiths).

4.2 Radiazione di dipolo magnetico

Supponiamo che in una piccola spira circolare di raggio b scorra una corrente alternata $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Collochiamo la spira in prossimità dell'origine di un sistema di assi cartesiani, con l'asse orientato lungo z. La corrente determina un momento magnetico $\mathbf{m}(t) = m_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$, con $m_0 = \pi b^2 I_0$. Anche in questo caso possiamo chiederci quali sono i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ generati dal dipolo a grandi distanze. Il calcolo, che qui non svolgiamo e lasciamo piuttosto come esercizio (ma si trova anche nel Griffiths), procede allo stesso modo che nel caso del dipolo elettrico oscillante, con le stesse approssimazioni. Una semplificazione viene dal fatto che la spira rimane localmente neutra in ogni istante e dunque ρ è sempre nulla. Ne segue che il potenziale elettrico è nullo e ci basta calcolare il potenziale vettore. Il risultato, per $b \ll \lambda \ll r$ è il seguente

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin\theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4.37}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi r c^2} \sin\theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\boldsymbol{\theta}}\,. \tag{4.38}$$

I campi sono gli stessi che per il dipolo elettrico eccetto per uno scambio dei versori, la sostituzione di p_0 con m_0 e la moltiplicazione per un fattore $1/c$. Ne

segue che il vettore di Poynting sarà quello di prima, ma con m_0 al posto di p_0 e con un fattore $1/c^2$ davanti. La potenza media irradiata diventa

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}}\,, \tag{4.39}$$

e i profili d'intensità dei campi avranno la stessa struttura spaziale del dipolo elettrico.

È interessante confrontare un dipolo elettrico e un dipolo magnetico con caratteristiche simili. Prendiamo il rapporto tra le potenze irradiate dal dipolo magnetico e dal dipolo elettrico

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{mag}}}{\langle P \rangle_{\text{el}}} = \left(\frac{m_0}{p_0 c}\right)^2 = \left(\frac{\pi b^2 I_0}{q_0 d c}\right)^2 . \tag{4.40}$$

Se la corrente la scriviamo in termini di una carica q_0 che ruota sulla circonferenza di raggio b con velocità angolare ω, allora $I_0 = q_0\omega$. Inoltre, se prendiamo b e d dello stesso ordine, allora

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{mag}}}{\langle P \rangle_{\text{el}}} \sim \left(\frac{d\omega}{c}\right)^2 \sim \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \ll 1\,. \tag{4.41}$$

L'ultima diseguaglianza era una delle condizioni che avevamo usato per calcolare la potenza irradiata. Dunque, per distribuzioni di cariche che ammettono sia un dipolo elettrico che un dipolo magnetico, la radiazione di dipolo magnetico è trascurabile. Diventa significativa solo se la sorgente dei campi ha dipolo magnetico, ma non dipolo elettrico.

4.3 Radiazione da una sorgente qualsiasi

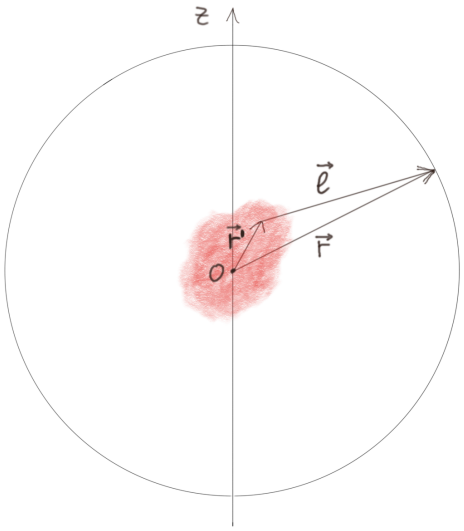
Ora che abbiamo capito come si calcola la radiazione generata da un dipolo oscillante, possiamo affrontare il caso più generale di una sorgente fatta di cariche e correnti qualsiasi, con l'unica assunzione che siano confinate entro una regione di spazio finita. Ci mettiamo a grandi distanze da quella regione e calcoliamo la parte radiativa dei campi e l'energia irradiata.

Come abbiamo fatto prima, partiamo dai potenziali ritardati e cominciamo calcolando il potenziale elettrico

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,. \tag{4.42}$$

La variabile d'integrazione è il vettore $\mathbf{r}'$ e l'integrando è non nullo solo nella regione dove si trova la sorgente. Analogamente a quanto fatto per il dipolo, usiamo il teorema di Carnot per scrivere la distanza $\ell = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ nella forma

$$\ell = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}\,, \tag{4.43}$$



che si riduce a quello del dipolo se $\mathbf{r}' = \pm(d/2)\hat{\mathbf{z}}$. Possiamo riscrivere ℓ in questo modo

$$\ell = r\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}} \tag{4.44}$$

e notare che, se la dimensione spaziale della sorgente è dell'ordine di una distanza d, allora l'ultimo termine nel radicando è dell'ordine di d/r. La nostra ipotesi di metterci a distanze grandi dalla sorgente implica che $d \ll r$ e, dunque, il termine in $(d/r)^2$ è trascurabile rispetto agli altri due. Possiamo scrivere

$$\ell \simeq r\sqrt{1 - 2\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}} \simeq r\left(1 - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right) \tag{4.45}$$

e anche

$$\frac{1}{\ell} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right) . \tag{4.46}$$

La distanza ℓ entra anche nel tempo ritardato

$$t_r = t - \frac{\ell}{c} \simeq t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \tag{4.47}$$

e la densità di carica che entra nell'integrando del potenziale ritardato diventa

$$\rho(\mathbf{r}', t_r) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{\ell}{c}\right) \simeq \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) . \tag{4.48}$$

Chiamiamo

$$t_0 = t - \frac{r}{c} \tag{4.49}$$

e espandiamo in serie la densità nella quantità piccola $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$, tenendo solo il primo ordine:

$$\rho(\mathbf{r}', t_r) \simeq \rho(\mathbf{r}', t_0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', t_0) \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \,. \tag{4.50}$$

I termini successivi, che trascuriamo, conterrebbero derivate temporali di ordine superiore. Notiamo che, nel caso di sorgenti con cariche che oscillano a frequenza ω, la derivata di ρ rispetto al tempo genera un fattore moltiplicativo ω e il secondo termine dell'espressione precedente diventa dell'ordine di $\omega d/c$. Questa espansione in serie, quindi, assume lo stesso significato che aveva la condizione $d \ll \lambda$ che avevamo imposto dopo la (4.13) nella derivazione del potenziale ritardato del dipolo oscillante.

Mettendo tutto assieme troviamo

$$V(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right) \left(\rho(\mathbf{r}', t_0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', t_0) \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) , \tag{4.51}$$

ovvero, limitandoci sempre al primo ordine:

$$V(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3r' \, \left(\rho(\mathbf{r}', t_0) + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \rho(\mathbf{r}', t_0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', t_0) \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) . \tag{4.52}$$

Il primo integrale dà la carica netta totale nella sorgente Q al tempo t_0. Dato che la carica si conserva (assumiamo che quella che c'era nella regione di spazio che chiamiamo sorgente, rimanga sempre là), allora l'integrale è costante,

$$Q = \int d^3r' \, \rho(\mathbf{r}', t_0) \,, \tag{4.53}$$

e il potenziale diventa

$$V(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int d^3r' \, \mathbf{r}' \, \rho(\mathbf{r}', t_0) + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{rc} \cdot \frac{d}{dt} \int d^3r' \, \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) \right) . \tag{4.54}$$

Ora ricordiamo che il momento di dipolo elettrico di una distribuzione di cariche è definito come

$$\mathbf{p} = \int d^3r' \, \mathbf{r}' \, \rho(\mathbf{r}') \,. \tag{4.55}$$

Ne segue che i due integrali rimasti nell'espressione di V possono essere scritti in termini del momenti di dipolo calcolato al tempo $t_0 = t - r/c$, e dunque

$$V(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{rc} \right) . \tag{4.56}$$

Nel caso statico, i primi due termini corrispondono ai contributi di monopolo e dipolo della distribuzione di cariche al potenziale elettrico in un punto $\mathbf{r}$.

Ora che abbiamo V, calcoliamoci anche $\mathbf{A}$. Al solito si parte da

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{1}{\ell}\,\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{\ell}{c}\right) . \tag{4.57}$$

Potremmo usare gli stessi sviluppi in serie di prima per piccole dimensioni della sorgente (la regione dove la corrente $\mathbf{j}$ è non nulla). L'ordine dominante è quello in cui $\ell = r$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-\ell/c) = \mathbf{j}(\mathbf{r}',t-r/c) = \mathbf{j}(\mathbf{r}',t_0)$. Se usiamo questa approssimazione, otteniamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}',t_0) . \tag{4.58}$$

Questo risultato può essere riscritto in termini del momento di dipolo. Si può infatti dimostrare che

$$\int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}',t_0) = \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_0) . \tag{4.59}$$

Che la densità di corrente sia legata alla densità di carica non è una sorpresa; deve infatti valere sempre l'equazione di continuità

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 . \tag{4.60}$$

Per semplicità di notazione scriviamo la variabile d'integrazione come $\mathbf{r}$ invece di $\mathbf{r}'$, tanto non cambia nulla e ci risparmiamo gli apici. Inoltre, ci conviene calcolare la quantità $\boldsymbol{\nabla}\cdot(x\mathbf{j})$ (che è quanto suggerisce il Griffiths nel Problema 7 del capitolo sulla magnetostatica):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(x\mathbf{j}) = (\boldsymbol{\nabla}x)\cdot\mathbf{j} + x\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} . \tag{4.61}$$

L'unica componente non nulla del gradiente di x è quella lungo x che vale 1; dunque quel gradiente fornisce semplicemente il versore $\hat{\mathbf{x}}$ e il prodotto scalare dà j_x. Poi possiamo usare l'equazione di continuità per esprimere il secondo addendo. Otteniamo

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(x\mathbf{j}) = j_x - x\frac{\partial\rho}{\partial t} . \tag{4.62}$$

Integriamo questa relazione su tutto lo spazio:

$$\int d^3r \; \boldsymbol{\nabla}\cdot(x\mathbf{j}) = \int d^3r \; j_x - \int d^3r \; x\frac{\partial\rho}{\partial t} . \tag{4.63}$$

A sinistra possiamo applicare il teorema della divergenza, mentre a destra possiamo spostare la derivata temporale fuori dall'integrale (solo ρ dipende dal tempo; la x è la variabile d'integrazione):

$$\int x\mathbf{j}\cdot d\mathbf{a} = \int d^3r \; j_x - \frac{d}{dt}\int d^3r \; x\rho . \tag{4.64}$$

Il flusso del campo $x\mathbf{j}$ attraverso la superficie all'infinito è nullo perché $\mathbf{j}$ è nullo al di fuori della regione della sorgente. Dunque

$$0 = \int d^3r \; j_x - \frac{d}{dt} \int d^3r \; x\rho \,. \tag{4.65}$$

Questa relazione vale anche per le componenti y e z. Se la scriviamo in forma vettoriale diventa

$$\int d^3r \; \mathbf{j} = \frac{d}{dt} \int d^3r \; \mathbf{r}\rho \,, \tag{4.66}$$

ma l'integrale a sinistra è proprio il momento di dipolo $\mathbf{p}$. Abbiamo quindi concluso la dimostrazione della relazione (4.59). Ora possiamo usarla per riscrivere il potenziale vettore in questo modo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t_0) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}(t_0) \,. \tag{4.67}$$

A questo punto notiamo che il momento di dipolo è una quantità che, in modulo, è dell'ordine di d, dove d al solito la la dimensione tipica della sorgente. Quindi il potenziale vettore che abbiamo trovato è dell'ordine di d/r, come il terzo addendo nell'espressione del potenziale elettrico (4.56), l'unico associato a campi radiativi. Eventuali correzioni che vengono dai termini successivi nell'espansione in serie della distanza ℓ intorno a r, darebbero termini di ordine superiore, che possiamo trascurare.

Bene, ora abbiamo V e $\mathbf{A}$ e possiamo calcolare $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Notiamo che V contiene due termini statici. Questi non contribuiscono alla radiazione. L'avevamo già detto all'inizio del capitolo. Guardando le equazioni di Jefimenko avevamo concluso che qualsiasi distribuzione stazionaria dà un contributo al vettore di Poynting che va a zero come $1/r^4$ o più rapidamente ancora. Dunque possiamo limitarci a considerare solo il terzo termine della (4.56) e ne prendiamo il gradiente

$$\boldsymbol{\nabla} V = \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{rc} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\dot{p}_r(t_0)}{r} \right) \,, \tag{4.68}$$

dove p_r è la componente radiale del dipolo elettrico. Il gradiente di $1/r$ darebbe un contributo in $1/r^2$ al campo elettrico e perciò possiamo trascurarlo. Dunque

$$\boldsymbol{\nabla} V \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 cr} \boldsymbol{\nabla} \dot{p}_r(t_0) \,. \tag{4.69}$$

Il momento di dipolo dipende da r tramite la dipendenza da $t_0 = t - r/c$. Quindi il gradiente ha solo componente radiale e si può calcolare la derivata con la solita regola della derivata di funzione di funzione, derivando prima

rispetto al tempo (che equivale a derivare rispetto a t_0) e poi derivando t_0 rispetto a r:

$$\boldsymbol{\nabla} V \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r}\ddot{p}_r(t_0)\boldsymbol{\nabla} t_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\ddot{p}_r(t_0)\ \hat{\mathbf{r}} \tag{4.70}$$

ovvero

$$\boldsymbol{\nabla} V \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t_0))\ \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_0}{4\pi r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t_0))\ \hat{\mathbf{r}}\,. \tag{4.71}$$

Poi ci serve

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{p}}(t_0) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\ddot{\mathbf{p}}(t_0) \tag{4.72}$$

e anche

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\mathbf{p}}(t_0) = \frac{\mu_0}{4\pi r}[(\boldsymbol{\nabla} t_0)\times\ddot{\mathbf{p}}(t_0)] = -\frac{\mu_0}{4\pi c r}[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]\,. \tag{4.73}$$

Usiamo le tre ultime espressioni per calcolare i campi e rimpiazziamo il simbolo $\simeq$ con $=$, sottintendendo che le seguenti relazioni valgono a distanze infinite dalla sorgente:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r}[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t_0))\hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}(t_0)]\,. \tag{4.74}$$

Questo conviene rimaneggiarlo sfruttando il fatto che $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 1$,

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r}[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t_0))\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]\,, \tag{4.75}$$

in modo da poter sfruttare la solita regola del triplo prodotto vettoriale per scrivere

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}[\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}(t_0))]}\,. \tag{4.76}$$

Infine possiamo calcolare $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r}[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]}\,. \tag{4.77}$$

Dunque, i campi che irradiano sono quelli associati alla derivata seconda temporale del dipolo elettrico. Se questa fosse nulla, dovremmo considerare termini di ordine superiore nello sviluppo, come ad esempio quelli che vengono dal dipolo magnetico, o dal quadrupolo elettrico, e così via. Notiamo che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali tra loro e ortogonali a $\mathbf{r}$, come nel caso del dipolo oscillante.

Supponiamo che $\ddot{\mathbf{p}}$ al tempo t_0 sia non nullo. Possiamo scegliere arbitrariamente l'asse z in quella stessa direzione, in modo da scrivere $\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{p}\hat{\mathbf{z}}$. Poi possiamo usare le coordinate polari per esprimere i campi. Per fare questo usiamo le relazioni tra i versori:

$$\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{z}} = -\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4.78}$$

e

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}) = -\sin\theta\ \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \sin\theta\ \hat{\boldsymbol{\theta}}\,. \tag{4.79}$$

Dunque

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r}\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.80}$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi c} \frac{\sin\theta}{r}\ \hat{\boldsymbol{\phi}}\,. \tag{4.81}$$

I due campi decrescono come $1/r$ e il modulo di $\mathbf{B}$ differisce da quello di $\mathbf{E}$ per il solito fattore c.

Ora possiamo calcolare anche il vettore di Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 [\ddot{p}(t_0)]^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}} \tag{4.82}$$

e la potenza che attraversa una superficie sferica di raggio r è

$$P(r, t) = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 [\ddot{p}(t_0)]^2}{16\pi^2 c} 2\pi \int d\theta \sin^3\theta = \frac{\mu_0 [\ddot{p}(t_0)]^2}{6\pi c}\,, \tag{4.83}$$

dove ricordiamo che l'integrale del seno al cubo dà 4/3. Questa è la potenza misurata sulla superficie di raggio r al tempo t, dove la dipendenza da t entra in t_0. La conservazione dell'energia impone che l'energia misurata al tempo t sulla superficie sferica debba coincidere con quella emessa dalla sorgente al tempo $t_0 = t - r/c$. Possiamo quindi chiamare $P(t_0)$ la potenza emessa al tempo t_0 e scrivere

$$\boxed{P(t_0) = \frac{\mu_0 [\ddot{p}(t_0)]^2}{6\pi c}}\,, \tag{4.84}$$

che vale per qualsiasi istante t_0. Questo è quanto basta per sapere come irradia una distribuzione di cariche qualsiasi, purché limitata spazialmente (il che è ovvio, altrimenti il concetto stesso di radiazione perderebbe di significato) e quando le cariche si muovono in modo da avere momento di dipolo elettrica con derivata seconda diversa da zero. Se quest'ultima ipotesi non si realizza, occorre andare a fare il calcolo a ordini superiori per includere il momento di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico e così via.

È facile vedere che il risultato include il dipolo elettrico oscillante che avevamo già trattato in precedenza. Infatti, le due sferette con la carica $\pm q_0 \cos(\omega t)$, poste a distanza d, corrispondono ad un momento di dipolo $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$, con $p_0 = q_0 d$. La derivata seconda è $\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t)$ e la potenza irradiata, mediata su un periodo di oscillazione, diventa

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}\,, \tag{4.85}$$

che coincide con quanto già trovato.

4.4 Radiazione di una carica in moto

Un altro caso molto interessante è quello di una singola carica q, puntiforme, che si muove nello spazio. Supponiamo che la sua posizione rispetto all'origine del sistema di riferimento sia $\mathbf{d}(t)$ e poi guardiamo se la particella irradia a distanze r molto più grandi di d. Tutto ciò che dobbiamo fare è calcolare il momento di dipolo e usare l'espressione precedente per la potenza irradiata. Il momento di dipolo per definizione è $\mathbf{p}(t) = q\mathbf{d}(t)$ e dunque $\ddot{\mathbf{p}}(t) = q\ddot{\mathbf{d}}(t) = q\mathbf{a}$, dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione della carica. Quindi la potenza irradiata è

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}}\,. \tag{4.86}$$

Questa è nota come *formula di Larmor*. La morale della storia è che una qualsiasi carica che accelera irradia e l'energia irradiata al tempo t è proporzionale al quadrato della sua accelerazione in quell'istante.

Possiamo usare la $\ddot{\mathbf{p}}(t) = q\mathbf{a}$ anche nell'espressione dei campi (4.76)-(4.77):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r}[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0))]\,. \tag{4.87}$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi c r}[\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0)] = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}\,. \tag{4.88}$$

Se calcoliamo il vettore di Poynting e la potenza irradiata usando queste espressioni ritroviamo, ovviamente, la formula di Larmor, per consistenza interna del calcolo. Ma qui vogliamo invece sottolineare il fatto che i campi generati da una carica puntiforme in moto li avevamo già scritti nel capitolo precedente, dopo aver derivato i potenziali di Liénard-Wiechert. Erano questi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\ell}{(\ell \cdot \mathbf{u})^3}\left[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})\right] \tag{4.89}$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\ell}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{4.90}$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità della particella al tempo ritardato $t_r = t - \ell/c$ e $\mathbf{u} = c\hat{\boldsymbol{\ell}} - \mathbf{v}$. Quale relazione c'è tra queste espressioni? Una prima differenza importante è che le prime due valgono solo per i campi che irradiano a grandi r, mentre le seconde due includono anche i termini non radiativi. Nel campo $\mathbf{E}$ la cosa è resa evidente dal diverso comportamento dei due termini nella parentesi quadra in (4.89). Il primo contiene la velocità della carica, il secondo l'accelerazione. Il fatto che una carica si muova non basta per irradiare. La velocità di una carica è associata ad una corrente, ma una corrente stazionaria, così come una carica stazionaria, non produce flusso di energia all'infinito. A rinforzare il

ragionamento ci aiuta il fatto che, a grandi distanze dalla carica, quando $\ell \simeq r$, il primo termine va come $1/r^2$, il corrispondente vettore di Poynting va come $1/r^4$ e il flusso di energia attraverso la superficie sferica di raggio r si annulla all'infinito. Quindi l'unico termine radiativo è quello con l'accelerazione:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\ell}{(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{u})^3}\,\boldsymbol{\ell}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{a}) = \frac{\mu_0 q c^2}{4\pi}\frac{\ell^2}{(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{u})^3}\,\hat{\boldsymbol{\ell}}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{a})\,. \tag{4.91}$$

Dato che, per quanto detto prima sulle correnti stazionarie, il valore della velocità $\mathbf{v}$ non modifica la radiazione prodotta dalla carica all'infinito, possiamo sempre scegliere di metterci in un sistema di riferimento in cui la carica è ferma al tempo ritardato t_r. Dunque $\mathbf{u} = c\hat{\boldsymbol{\ell}}$. Inoltre, per $r \to \infty$ possiamo approssimare $\boldsymbol{\ell} \simeq \mathbf{r}$ e $t_r \simeq t - r/c = t_0$. Il risultato finale è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \simeq \frac{\mu_0 q}{4\pi r}\,\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{a}(t_0)) \tag{4.92}$$

che coincide con la (4.87). Anche la parte radiativa di $\mathbf{B}$ è la stessa e, di conseguenza, lo sono anche il vettore di Poynting e la formula di Larmor.

Per ragioni che saranno evidenti quando studierete la relatività speciale, queste espressioni per la radiazione prodotta da una carica in moto valgono solo nel limite di velocità v basse rispetto alla velocità della luce c, quindi per particelle che si muovono secondo le leggi di Newton. A velocità grandi, il campo la radiazione modifica la sua distribuzione angolare, concentrandosi nella direzione della velocità della particella, e la potenza irradiata cresce molto rapidamente quando v si avvicina a c.

Notiamo che la formula di Larmor non distingue tra accelerazione positiva e negativa. Ad esempio, se un fascio di elettroni, prodotto e collimato nel vuoto (raggi catodici), viene fatto incidere su una superficie metallica, gli elettroni vengono rapidamente frenati dal mezzo materiale e, di conseguenza, emettono radiazione. Questa è nota come *bremsstrahlung*, o radiazione di frenamento ed è il meccanismo base dei *tubi a raggi X* dove, appunto, radiazione elettromagnetica nello spettro dei raggi X viene ottenuta per frenamento di raggi catodici su opportuni bersagli metallici.

La meccanica newtoniana ci dice anche dell'altro. Supponiamo che una particella acceleri nel vuoto per effetto di una forza. Se la particella è neutra, tutto il lavoro fatto dalla forza si traduce in energia cinetica. Se la particella è carica, parte del lavoro fatto dalla forza va in energia cinetica e parte viene trasformato in energia irradiata all'infinito secondo la formula di Larmor. Dunque la particella carica accelera meno di quella neutra a parità di forza applicata. È come se esistesse una forza frenante; se sviluppiamo i calcoli in ambito newtoniano otteniamo una forza proporzionale alla derivata temporale dell'accelerazione; tale forza è detta *reazione di radiazione* e la sua espressione prende il nome di *formula di Abraham-Lorentz*. L'approfondimento di questi aspetti va oltre lo scopo di queste lezioni e per il momento ci fermiamo qui.