0.1 Sistemi lineari omogenei

Definizione 1 (sistema lineare omogeneo)**.** Dato il sistema lineare $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, esso si dice *sistema lineare omogeneo* se e solo se la matrice dei termini noti è composta da soli termini nulli, ovvero, data $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, si ha

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ n elementi } \implies A\mathbf{X} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^\mathbf{n}}$$

Osservazione. Ogni sistema lineare omogeneo ammette una soluzione banale, costituita dall'n-upla $(0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Proposizione 1. *L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ di dimensione $n - k$, con $k := \varrho(A)$ e n il numero di incognite libere.*

Dimostrazione. Verifichiamo che l'insieme delle soluzioni soddisfi le proprietà caratteristiche dei sottospazi vettoriali.

1. Per l'osservazione precedente, $0_{\mathbb{K}^n}$ è sempre soluzione di un sistema, per cui $0_{\mathbb{K}^n}$ appartiene sempre all'insieme delle soluzioni.

2. Si considerino $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ appartenenti all'insieme delle soluzioni. Applicando la distributività del prodotto tra matrici, si ha

$$A(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

   Quindi $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ appartiene all'insieme delle soluzioni, verificando la chiusura rispetto alla somma.

3. Si considerino $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{z}$ appartenente all'insieme delle soluzioni. Per la proprietà associativa, si ha

$$A(\lambda\mathbf{z}) = \lambda(A\mathbf{z}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

   Quindi, $\lambda\mathbf{z}$ appartiene all'insieme delle soluzioni, verificando la chiusura rispetto al prodotto. È quindi verificato che l'insieme delle soluzione è un sottospazio vettoriale. □

Lemma (Rango per riga e rango per colonna, SERNESI 5.1)**.** *Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, siano $\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m}$ le righe di A e $\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}$ le colonne di A. Allora, vale la relazione*

$$\varrho(A) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}). \tag{1}$$

Promemoria. Essendo per definizione $\varrho(A) := \dim \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m})$, sarà sufficiente dimostrare che le dimensioni dello spazio delle righe e dello spazio delle colonne coincidono. Ricordiamo che con a_{ij} viene indicato l'elemento della matrice A sull'i-esima riga e la j-esima colonna; $\mathbf{r_{i_1}}, \dots, \mathbf{r_{i_k}}$, invece, denota un certo insieme di elementi dello spazio delle righe di A considerate a meno del loro effettivo ordine.

Dimostrazione. La dimensione di $\mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n})$ è dipendente dalle relazioni di dipendenza lineare fra le colonne della matrice A. Tali relazioni sono determinate dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{X} = \mathbf{0} \implies & \begin{cases} a_{11}\mathbf{x_1} + \dots + a_{1n}\mathbf{x_n} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{x_1} + \dots + a_{mn}\mathbf{x_n} = 0 \end{cases} \\
\implies & \mathbf{x_1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mathbf{x_n} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sapendo che $k := \varrho(A)$, si può affermare che esistono k righe di A, denotate con $\mathbf{r_{i_1}}, \dots, \mathbf{r_{i_k}}$ linearmente indipendenti; le rimanenti $m - k$ righe di A possono essere espresse come loro combinazione lineare. Si consideri quindi la matrice

$$
A' = \begin{pmatrix} \mathbf{r_{i_1}} \\ \vdots \\ \mathbf{r_{i_k}} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k,n}
$$

Osservazione. Le soluzioni di $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e $A'\mathbf{X} = \mathbf{0}$ sono coincidenti. Infatti, presa un'n-upla che soddisfa $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$, essa risulta essere soddisfacente $A'\mathbf{X} = \mathbf{0}$, essendo A composta dalle righe di A' e da altre righe esprimibili come combinazione lineare di $\mathbf{r_{i_1}}, \dots, \mathbf{r_{i_k}}$.

Pertanto, la dimensione dello spazio delle colonne di A coincide con quella dello spazio delle colonne di A', che è debolmente minore di k in quanto le colonne di A' sono vettori di $\mathbb{K}^k$; vale quindi la relazione $\dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}) \leq k$.

Si consideri la matrice ${}^tA$, trasposta di A. Applicando il ragionamento precedente su A^t, si evince che:

- La dimensione dello spazio delle colonne di A^t è debolmente minore di $\varrho(A^t)$, che per definizione coincide con la dimensione del suo spazio delle righe.
- Essendo A^t trasposta di A, la dimensione dello spazio delle righe di A^t coincide con la dimensione dello spazio delle colonne di A (rispettivamente, la dimensione dello spazio delle colonne di A^t coincide con la dimensione dello spazio delle righe di A).

Per cui, essendo $\dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}) \leq k$ e $(k = \dim \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m}) \leq \dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n})$, vale $\varrho(A) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m}) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n})$ □

Definizione 2 (matrice invertibile)**.** Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice quadrata. Essa si dice *invertibile* se e solo se

$$
\exists_{A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}} \quad {}_{A \cdot A^{-1} = I_n}.
$$

Calcolo dell'inversa di una matrice Data una matrice invertibile, come è possibile calcolare la sua inversa?

Osservazione. Dalla definizione di prodotto tra matrici, si ha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

che implica

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + \dots + a_[1nx_{n1} = 1 \\ a_{11}x_{21} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Essendo le matrici di dimensioni $n \times n$, si ottiene un sistema lineare di n^2 equazioni in n^2 incognite. È un metodo efficiente? No. Esiste una soluzione più efficace? SÌ.

Consideriamo le righe della matrice inversa come incognite del sistema lineare. A^{-1} viene espressa come

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \dots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{x_i} \in \mathbb{K}^n$ denotante una riga della matrice inversa. Si ottiene il sistema

$$A \cdot A^{-1} = I_n \implies A \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \dots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

detto *sistema lineare a incognite vettoriali.* Applicando ad A il metodo di riduzione per righe, si ottiene che il sistema è risolvibile — e quindi A è invertibile — se e solo se $\varrho(A|I_n) = \varrho(A)$ (per Rouché-Capelli). Essendo I_n ridotta di rango n, ne segue che il sistema è risolvibile se e solo se

$$\varrho(A|I_n) = \varrho(A) = n$$

Teorema 1. *Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice quadrata. Allora, la matrice A è invertibile se e solo se ha rango massimo, ovvero*

$$\varrho(A) = \varrho(A|I_n) = n \iff \exists_{A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}} \quad A \cdot A^{-1} = I_n$$

Esempio 1. Si calcoli, se esiste, la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Per il teorema precedente, A è invertibile se e solo se il suo rango è massimo. Essendo A ridotta per righe di rango 3, questa condizione è verificata. Impostando il sistema risolvente, si ha che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \end{pmatrix} \text{ con } \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3} \in \mathbb{K}^3 \text{ tale che } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□