Geometria A - Secondo Modulo

Esercizi di preparazione per gli esami

Giordano Santilli
giordano.santilli@unitn.it

Trento, 20 Maggio 2020

"Noi tutti abbiamo perso qualcosa di prezioso: casa, sogni, amici... Ma ora Sin è morto finalmente! Spira è di nuovo nostra! Unendo le forze, avremo una nuova casa e nuovi sogni. Il viaggio sarà duro, ma abbiamo tempo: insieme ricostruiremo Spira! La strada ci aspetta. Iniziamo a percorrerla da oggi. Un' ultima cosa: i compagni persi, i sogni svaniti... Non dimentichiamoli mai!"

Final Fantasy X - 2001 (Giappone)

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo di coordinate (x, y). Siano definite le due curve

$$\mathcal{C}_h : hx^2 + 2hxy + 3y^2 - 4x - 2y = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{D}_k : kx^2 + 4ky^2 + 4kxy + x = 0$$

al variare di k, $h \in \mathbb{R}$.

(i) Si classifichi le due coniche al variare dei parametri reali h e k.

(ii) Si trovino i valori di h e k per cui $\mathcal{C}_h$ è affinemente equivalente a $\mathcal{D}_k$. In corrispondenza di ciascuno di tali valori di h, si trovi un'isometria che porta $\mathcal{C}_h$ in forma canonica.

(iii) Si trovino dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{D}_k$ è congruente a $\mathcal{C}_h$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si consideri la proiettività $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che:

$$\begin{aligned} f([1, 2, -1]) &= [2, -3, 2] \\ f([-1, 2, 3]) &= [2, 1, 4] \\ f([0, 1, -2]) &= [0, 1, 3] \\ f([1, -3, 4]) &= [1, -2, -3]. \end{aligned}$$

(i) Si trovi una matrice rappresentativa M associata alla proiettività f rispetto il riferimento proiettivo standard.

(ii) Si calcolino i punti fissi della proiettività. Si trovino delle rette proiettive che sono invarianti rispetto alla proiettività f.

(iii) Si classifichi la conica proiettiva $\mathcal{Q}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ di equazione

$$\mathcal{Q}_k : F_k(x_0, x_1, x_2) = kx_0^2 + x_1^2 + kx_0x_1 - x_1x_2 = 0.$$

Si scriva esplicitamente l'equazione della forma canonica in corrispondenza di questi valori. Sia r la retta passante per i due punti fissi di f. Si determini per quali $k \in \mathbb{R}$, la retta r è una tangente principale per $\mathcal{Q}_k$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo con riferimento ortonormale $O\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$. Siano $P = (0, 0, 1)$, $Q = (1, 1, 0)$ e $R = (1, 0, 2)$ punti dello spazio euclideo e siano inoltre:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad r' : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

(i) Si trovino le equazioni cartesiane delle rette s tali che

- $d(s, r) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- $s \cap r' = Q$;
- s forma un angolo di $45°$ con la retta r'.

(ii) Si trovino le equazioni cartesiane delle rette s' tali che

- $s' \perp r'$;
- $s' \cap r = R$;
- $d(s', P) = 1$;
- $s' \not\perp \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(iii) Si trovino le equazioni cartesiane delle rette s'' tali che

- $s'' \perp r$;
- $s'' \cap r \neq \emptyset$;
- s'' è perpendicolare ad almeno un piano che contiene la retta r'.