1 Applicazioni lineari

Siano $\mathbb{K}$ un campo fissato, $\mathcal{V}$ e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e $f\colon \mathcal{V} \to W$ una funzione (che rispetti le proprietà degli spazi vettoriali); ricordiamo che $\mathcal{V}$ e W sono definiti con una somma ed un prodotto, rispettivamente $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ e $(W, \oplus, \odot)$. f si dice *lineare* se:

L1 $\forall_{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\in\mathcal{V}}\, f(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = f(\mathbf{v_1}) \oplus f(\mathbf{v_2})$

L2 $\forall_{\lambda\in\mathbb{K}}\forall_{\mathbf{v}\in\mathcal{V}} f(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \odot f(\mathbf{v})$

ovvero, f è lineare se rispetta la definizione di somma e prodotto degli spazi vettoriali, cioè conduca somme in somme e prodotti in prodotti.

Esempio 1. La seguente funzione è lineare?

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \tag{1}$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, z) \tag{2}$$

Soluzione. Si considerino i vettori $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{3}$$
$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) &= (x_1 - y_1, z_1) + (x_2 - y_2, z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

La somma è rispettata.

2.

$$f(\lambda(x_1, y_1, z_1)) = f(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = (\lambda x_1 - \lambda y_1, \lambda z_1) \in \mathbb{R}^2 \tag{5}$$
$$\lambda f(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_1 - y_1, z_1) = (\lambda x_1 - \lambda y_1, \lambda z_1) \in \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

Il prodotto è rispettato.

L'applicazione f è lineare, in quanto vengono rispettate le proprietà di somma e prodotto. □

Esempio 2. La seguente funzione è lineare?

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \tag{7}$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, z + 1) \tag{8}$$

Soluzione. Si considerino i vettori $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.

$$g(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (z_1 + z_2) + 1) \tag{9}$$
$$\begin{aligned} g(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) &= (x_1 - y_1, z_1 + 1) + (x_2 - y_2, z_2 + 1) \\ &= ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (z_1 + z_2) + 2) \end{aligned} \tag{10}$$

La somma *NON* è rispettata, essendo $g(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \neq g(\mathbf{v_1}) + g(\mathbf{v_2})$.

L'applicazione g non è lineare, in quanto non viene rispettata la somma. $\square$

Osservazione. Nel primo esempio, f manda il vettore nullo $(0,0,0)$ in $(0,0)$; nel secondo esempio, l'applicazione non lineare g manda il vettore nullo $(0,0,0)$ in $(0,1) \neq (0,0)$.

Proposizione 1. *Sia $f\colon \mathcal{V} \to W$ una funzione lineare. Allora, $f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$.*

Dimostrazione. Si consideri la seguente equazione:

$$f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) \overset{eq}{=} f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}} + \mathbf{0}_{\mathcal{V}}) \tag{11}$$

sfruttando la linearità di f si ottiene

$$f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) = f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) + f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) \tag{12}$$

da cui

$$f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) = 0 \tag{13}$$

$\square$

Promemoria. Dati due insiemi A e B e la funzione $f\colon A \to B$, si dice che:

1. f è *iniettiva* se

   $$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \tag{14}$$

   o equivalentemente

   $$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \tag{15}$$

   per ogni $a_1, a_2 \in A$.

   Osservazione. Se esiste $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tale che $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ e $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ allora f non è iniettiva.

2. f è *suriettiva* se

   $$\forall_{b \in B} \exists_{a \in A} b = f(a). \tag{16}$$

Esempio 3.

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \tag{17}$$
$$n \mapsto n^2 \tag{18}$$

è iniettiva, ma non suriettiva. Un controesempio è che non esiste un numero naturale tale che $n^2 = 3$.

$$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \tag{19}$$
$$k \mapsto k^2 \tag{20}$$

non è né iniettiva, né suriettiva. Un controesempio è che $g(2) = g(-2) = 4$, e non esiste un numero naturale per cui $k^2 < 0$.

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \tag{21}$$
$$x \mapsto x^2 \tag{22}$$

non è iniettiva, ma è suriettiva. Un controesempio è lo stesso della funzione precedente.

Definizione 1 (Nucleo di un'applicazione)**.** Sia $f\colon \mathcal{V} \to W$ una funzione lineare. Si dice *nucleo* di f (o *kernel*) l'insieme

$$\ker f = \{\ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0_W}\ \} \tag{23}$$

Osservazione. Cosa garantisce l'esistenza del nucleo? La funzione è influenzata dalla composizione del nucleo?

1. Essendo $f(\mathbf{0}_\mathcal{V}) = \mathbf{0_W}$ precedentemente dimostrato, si ha

$$\mathbf{0}_\mathcal{V} \in \ker f \implies \ker f \neq \emptyset \tag{24}$$

   Il nucleo di f esiste sempre.

2. Se $\mathbf{v} \in \ker f$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_\mathcal{V}$ allora la funzione non è iniettiva.

Teorema 1. *Sia $f\colon \mathcal{V} \to W$ una funzione lineare. Allora,*

$$f \textit{ è iniettiva} \iff \ker f = \{\ \mathbf{0}_\mathcal{V}\ \} \tag{25}$$

Dimostrazione. Verifichiamo la doppia implicazione nei due versi distinti.

($\Longrightarrow$) È verificata per l'osservazione (2) del punto precedente.

($\Longleftarrow$) Si supponga che $\ker f = \{\ \mathbf{0}_\mathcal{V}\ \}$ e $f(\mathbf{v_1}) = f(\mathbf{v_2})$; per la definizione di funzione iniettiva, deve essere verificata l'uguaglianza $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2}$.

$$f(\mathbf{v_1}) = f(\mathbf{v_2}) \implies f(\mathbf{v_1}) - f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \tag{26}$$

$$f(\mathbf{v_1}) - f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \overset{L2}{=} f(\mathbf{v_1}) + f(-\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \tag{27}$$

$$f(\mathbf{v_1}) + f(-\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \overset{L1}{=} f(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \tag{28}$$

Quindi, $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} \in \ker f = \{\ \mathbf{0}_\mathcal{V}\ \}$, da cui

$$\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \mathbf{0}_\mathcal{V} \implies \mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} \tag{29}$$

□

Definizione 2 (Immagine)**.** Data la funzione $f\colon A \to B$, si dice *immagine* di f l'insieme

$$Imf = \{\ b \in B : b = f(a), a \in A\ \} \tag{30}$$

Osservazione. f è suriettiva se e solo se $Imf = B$.