Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio di grado $n \geq 1$*

$$p[z] = a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_0 z^n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^i$$

a coefficienti complessi ($\forall_{i \in 0..n} a_i \in \mathbb{C}$) ammette n radici complesse, contate con le loro molteplicità.

Campi e spazi vettoriali L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$, così come l'insieme dei reali $\mathbb{R}$, su cui vengono definite le operazioni di somma e prodotto, costituiscono delle strutture algebriche che prendono il nome di *campi*.

Definizione 1 (campo (SERNESI, App.A))**.** Sia $\mathbb{K}$ un insieme non vuoto su cui vengono definite due operazioni binarie di somma e prodotto. Allora, la terna

$$(\mathbb{K}, +, \cdot)$$

è detta *campo* e verifica le seguenti proprietà:

K1 Commutatività della somma. $\forall_{a,b \in \mathbb{K}} a + b = b + a$

K2 Associatività della somma. $\forall_{a,b,c \in \mathbb{K}} (a + b) + c = a + (b + c)$

K3 Esistenza dello zero. $\exists_{0 \in \mathbb{K}} \forall_{a \in \mathbb{K}} a + 0 = a$

K4 Esistenza dell'opposto. $\forall_{a \in \mathbb{K}} \exists_{a' \in \mathbb{K}} a + a' = 0$

K5 Commutatività del prodotto. $\forall_{a,b \in \mathbb{K}} a \cdot b = b \cdot a$

K6 Associatività del prodotto. $\forall_{a,b,c \in \mathbb{K}} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

K7 Esistenza dell'unità. $\exists_{1 \in \mathbb{K}} \forall_{a \in \mathbb{K}} 1 \cdot a = a$

K8 Esistenza dell'inverso. $\forall_{a \in \mathbb{K}} \exists_{a* \in \mathbb{K}} a \cdot a* = 1$

K9 Distributività della somma rispetto al prodotto. $\forall_{a,b,c \in \mathbb{K}} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

K10 Legge dell'annullamento del prodotto. $a \cdot b = 0 \wedge b \neq 0 \implies a = 0$

Spazi definiti su un campo. In generale, fissato $n \in \mathbb{N}$, è possibile considerare l'insieme

$$\mathbb{K}^n = \{ (a_1, \ldots, a_n) \colon \forall_{i \in 1..n} a_i \in \mathbb{K} \}$$

i cui elementi sono n-uple di elementi del campo $\mathbb{K}$. Considerato $\mathbb{K}^n$, è possibile definire due operazioni, ovvero *somma* e il *prodotto per scalare*:

- La *somma* in $\mathbb{K}^n$ è definita nel seguente modo.

  $$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{K}^n \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \mapsto (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

- Il prodotto per scalare è definito come prodotto di un elemento di $\mathbb{K}^n$ e uno del campo $\mathbb{K}$, che ritorna un elemento di K^n.

  $$\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$$

Per generalizzare queste situazioni, viene introdotto il concetto di *spazio vettoriale.*

Definizione 2 (spazio vettoriale)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo di scalari. Si dice *spazio vettoriale* su $\mathbb{K}$ o $\mathbb{K}$-*spazio vettoriale* un insieme non vuoto $\mathcal{V}$ su cui sono definite:

- una *somma* che associa a ogni coppia $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathcal{V}$ un terzo elemento $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \in \mathcal{V}$
- un *prodotto per scalare* che associa a $\lambda \in \mathbb{K}$ e a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ l'elemento $\lambda\mathbf{v} \in \mathcal{V}$

in modo da soddisfare le seguenti proprietà:

S1 Proprietà commutativa della somma.

S2 Proprietà associativa della somma.

S3 Esistenza dello zero. $\forall_{\mathbf{a}\in\mathbb{K}^n}(a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_n)$
Osservazione. Lo zero è anche detto *elemento neutro rispetto alla somma*

S4 Esistenza dell'opposto. $\forall_{\mathbf{a}\in\mathbb{K}^n}(a_1, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n) = (0, \dots, 0)$

P1 Proprietà associativa del prodotto.

P2 Esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto.

$$\forall_{\mathbf{a}\in\mathbb{K}^n}\exists_{1\in\mathbb{K}}1 \cdot (a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n)$$

Osservazione. L'elemento neutro rispetto al prodotto è detto anche *unità.*

D1 Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

$$r \cdot ((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) = r \cdot (a_1, \dots, a_n) + r \cdot (b_1, \dots, b_n)$$

D2 Proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.

$$(r + s) \cdot (a_1, \dots, a_n) = r \cdot (a_1, \dots, a_n) + s \cdot (a_1, \dots, a_n)$$

Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ può essere indicato con la terna $(\mathcal{V}, +, \cdot)$.

Definizione 3 (sottospazio vettoriale)**.** Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dice *sottospazio vettoriale* di $\mathcal{V}$ il sottoinsieme $W \subset \mathcal{V}$ tale che:

1. W contenga l'elemento neutro di $\mathcal{V}$, ovvero $0_\mathcal{V} \in W$
2. W sia chiuso rispetto alla somma, ovvero $\forall_{w_1,w_2\in W} w_1 + w_2 \in W$
3. W sia chiuso rispetto al prodotto per scalare, ovvero $\forall_{\lambda\in\mathbb{K}}\forall_{w\in W}\lambda w \in W$

Osservazione. Sia $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale. Se $W \subset \mathcal{V}$, allora $(W, +, \cdot)$ è a sua volta uno spazio vettoriale.

Esempio 1.

Lemma (Steinitz, SERNESI 4.12). *Sia* $\{ \mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n} \}$ *un sistema di vettori generatori dello spazio vettoriale* $\mathcal{V}$ *definito su* $\mathbb{K}$ *e siano* $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_m} \in \mathcal{V}$ *linearmente indipendenti. Allora, vale la relazione*

$$m \leq n \tag{1}$$

Promemoria. La dimostrazione è articolata in due fasi: nella prima parte, verrà dimostrato per induzione che, dati n vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\mathcal{V}$, essi sono generatori di $\mathcal{V}$; successivamente, verrà dimostrato per assurdo che il numero di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale non può essere maggiore del numero di vettori generatori. Se la comprensione dovesse risultare difficoltosa, può ritornare utile la consultazione di [SERNESI 4.12], che affronta il problema con un approccio differente. La dimostrazione riportata di seguito concilia quanto detto in classe con quanto riportato sul libro di testo, nel tentativo di facilitare la comprensione di questo utile lemma.

Dimostrazione. Essendo per ipotesi $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ generatori di $\mathcal{V}$, ogni elemento di $\mathcal{V}$ è esprimibile come loro combinazione lineare. È possibile affermare che esistono scalari $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{w_1} = a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} \tag{2}$$

e sfruttando l'indipendenza lineare di $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_m}$, si può inoltre aggiungere che $\mathbf{w_1} \neq \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$. Ne segue che

$$\exists_{i \in 0..n}\, a_i \neq 0 \tag{3}$$

A meno di riordinare $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ si suppone $a_1 \neq 0$. Di conseguenza, è possibile riformulare (2) nel seguente modo:

$$a_1\mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} - \cdots - a_n\mathbf{v_n} \tag{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{w_1}}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\mathbf{v_2} - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\mathbf{v_n} \tag{5}$$

$\mathbf{v_1}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{w_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ e quindi $\mathbf{v_1} \in \mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n})$. D'altra parte, applicando lo stesso ragionamento ai vettori $\mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$, si ha che $\mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \in \mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n})$, da cui segue che

$$\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}) \tag{6}$$

essendo $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}) = \mathcal{V}$, ne consegue che $\mathbf{w_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ sono a loro volta generatori di $\mathcal{V}$.

Passaggio induttivo Procedendo per induzione, si dimostra ora che ciò vale per tutti i vettori $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n}$. Si supponga che per $1 \leq s \leq n-1$ valga la proposizione

$$\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{v_{s+1}}, \dots, \mathbf{v_n} \text{ generano } \mathcal{V}. \tag{7}$$

Pertanto, esistono gli scalari $b_1, \dots, b_s, c_{s+1}, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{w_{s+1}} = b_1\mathbf{w_1} + \ldots + b_s\mathbf{w_s} + c_{s+1}\mathbf{v_{s+1}} + \ldots + c_n\mathbf{v_n} \tag{8}$$

sfruttando l'indipendenza lineare di $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{w_{s+1}}, \dots, \mathbf{w_m}$ si può affermare che $\mathbf{w_{s+1}} \neq \mathbf{0}_\mathcal{V}$ e anche che

$$\exists_{i \in (s+1)..n}\, c_i \neq 0 \tag{9}$$

A meno di riordinare $\mathbf{v_{s+1}}, \dots, \mathbf{v_n}$ è possibile supporre $c_{s+1} \neq 0$. Procedendo similmente a quanto fatto per (2), si ottiene

$$c_{s+1}\mathbf{v_{s+1}} = \mathbf{w_{s+1}} - b_1\mathbf{w_1} - \dots - b_s\mathbf{w_s} - c_{s+2}\mathbf{v_{s+2}} - \dots - c_n\mathbf{v_n} \tag{10}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{v_{s+1}} = \frac{\mathbf{w_{s+1}}}{c_{s+1}} - \frac{b_1}{c_{s+1}}\mathbf{w_1} - \dots - \frac{b_s}{c_{s+1}}\mathbf{w_s} - \frac{c_{s+2}}{c_{s+1}}\mathbf{v_{s+2}} - \dots - \frac{c_n}{c_{s+1}}\mathbf{v_n} \tag{11}$$

conseguentemente, si ha che $\mathbf{v_{s+1}} \in \mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{w_{s+1}}, \mathbf{v_{s+2}}, \dots, \mathbf{v_n})$. Sapendo che

$$\mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{v_{s+1}}, \dots, \mathbf{v_n}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{w_{s+1}}, \mathbf{v_{s+2}}, \dots, \mathbf{v_n}) \tag{12}$$

e che per ipotesi induttiva $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{v_{s+1}}, \dots, \mathbf{v_n}$ generano $\mathcal{V}$, allora i vettori $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{w_{s+1}}, \mathbf{v_{s+2}}, \dots, \mathbf{v_n}$ sono a loro volta generatori di $\mathcal{V}$. Essendo verificato che per $s = 1$ la proposizione è vera, è dimostrato per induzione su s che $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n}$ sono generatori di $\mathcal{V}$.

Dimostrazione per assurdo Si supponga ora, per assurdo, che date le ipotesi, valga invece la relazione $m > n$. Ne segue che $\mathbf{w_m} \in \mathcal{V}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n}$:

$$\mathbf{w_m} = a_1\mathbf{w_1} + \dots + a_n\mathbf{w_n} \tag{13}$$

da cui

$$a_1\mathbf{w_1} + \dots + a_n\mathbf{w_n} - \mathbf{w_m} = 0_\mathcal{V} \tag{14}$$

essendo $-\mathbf{w_m} = (-1)\mathbf{w_m} \implies a_m = -1$, risulta che $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n}, \mathbf{w_{n+1}}, \dots, \mathbf{w_m}$ sono linearmente dipendenti. *ASSURDO!* Per ipotesi $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_m}$ sono linearmente indipendenti. Pertanto, è dimostrato che vale (1). $\square$

Conseguenze Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con $n := \dim \mathcal{V}$ e siano $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_m} \in \mathcal{V}$.

1. Se $m \leq n$ allora $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_m}$ non sono generatori.

2. Se $m \geq n$ allora $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_m}$ non sono linearmente indipendenti.

Esempio 2. $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{R}^3$ non sono generatori di $\mathbb{R}^3$, mentre $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3} \in \mathbb{R}^2$ non sono linearmente indipendenti.

Infatti, sia $\mathcal{B} = (\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$ una base di $\mathcal{V}$.

1. $\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}$ sono linearmente indipendenti (essendo essi vettori costituenti una base). Supponiamo che $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_m}$ siano generatori. Per il lemma di Steinitz, si ha che deve valere $m \geq n$, ma ciò contraddice l'ipotesi $m \leq n$.

2. $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}$ sono generatori (essendo essi vettori costituenti una base). Supponiamo che $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ siano linearmente indipendenti. Per il lemma di Steinitz, si ha che deve valere $m \leq n$, ma ciò contraddice l'ipotesi $m \geq n$.

Proposizione 1 (SERNESI, 4.16.1)**.** *Sia $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Allora, se i vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in \mathcal{V}$ sono linearmente indipendenti, essi costituiscono una base di $\mathcal{V}$.*

Dimostrazione. Si verifichi che $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ sono vettori generatori. Considerata una base $\mathcal{B} = (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})$ e i vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}, \mathbf{v_{n+1}}$, è possibile affermare — come conseguenza del Lemma di Steinitz — che $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}, \mathbf{v_{n+1}}$ sono linearmente dipendenti. Essendo per ipotesi $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ linearmente indipendenti, la seguente combinazione lineare

$$a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} + a\mathbf{v_{n+1}} = 0 \tag{15}$$

è verificata anche nel caso in cui $a \neq 0$; pertanto è possibile riscrivere la combinazione come

$$\mathbf{v_{n+1}} = -\tfrac{a_1}{a}\mathbf{v_1} - \cdots - \tfrac{a_n}{a}\mathbf{v_n} \tag{16}$$

Ne segue che $\mathbf{v_{n+1}}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$, e quindi questi vettori costituiscono una base di $\mathcal{V}$. $\square$

Teorema 2 (Formula di Grassmann)**.** *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathcal{V}$ a dimensione finita. Allora, anche i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$ hanno dimensione finita e vale*

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U + W \tag{17}$$

Dimostrazione. L'intersezione $U \cap W$ è stato dimostrato essere sempre un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$. Ne segue che tale sottospazio esiste ed è a sua volta sottospazio vettoriale di U, che ha dimensione finita. Quindi, $q := \dim U \cap W \leq t$ è un numero finito, e si definiscono $t + q := \dim U$ e $s + q := \dim W$. Si consideri ora una generica base di $U \cap W$ costituita da $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}$. Essendo i suoi elementi appartenenti sia a U che a W, è possibile completare $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}$ alle basi $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}$ di U e $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}$ di W.

Osservazione. Affermo che $(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s})$, l'unione delle basi di U e W, è base di $U + W$, essendo esso il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $U \cup W$. Se questo è vero, allora l'insieme $U + W$ ha dimensione finita $q + t + s$ (essendo unione di spazi di dimensioni $t + q$ e $s + q$) e la formula di Grassmann risulta verificata, infatti:

$$(t + q) + (s + q) = (q + t + s) + q \implies \text{l'identità è confermata.} \tag{18}$$

Dimostriamo dunque che $(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s})$ è una base di $U + W = \{\, \mathbf{u} + \mathbf{w} \colon \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W \,\}$.

1. Si considerino i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$. Essi possono essere espressi rispettivamente come combinazioni lineari delle basi di U e di W:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{z_1} + \dots + a_q\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} \tag{19}$$

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{z_1} + \dots + c_q\mathbf{z_q} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} \tag{20}$$

   da cui si ricava che

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{w} &= a_1\mathbf{z_1} + \dots + a_q\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} + \\ &\quad + c_1\mathbf{z_1} + \dots + c_q\mathbf{z_q} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} &(21)\\ &= (a_1 + c_1)\mathbf{z_1} + \dots + (a_q + c_q)\mathbf{z_q} + \\ &\quad + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} &(22)\\ &= \sum_{i=1}^{q}(a_i + c_i)\mathbf{z_i} + \sum_{i=1}^{t} b_i\mathbf{u_i} + \sum_{i=1}^{s} d_i\mathbf{w_i} &(23) \end{aligned}$$

   è combinazione lineare di $(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s})$. Quindi, è possibile affermare che tali vettori sono generatori.

2. Si consideri la seguente combinazione lineare:

$$a_1\mathbf{z_1} + \dots + a_q\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} = 0 \tag{24}$$

   sistemando i termini, si definisca il vettore $\mathbf{v}$ nel seguente modo:

$$\mathbf{v} := \underbrace{d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s}}_{\mathbf{v} \in W} = \underbrace{-a_1\mathbf{z_1} - \dots - a_q\mathbf{z_q} - b_1\mathbf{u_1} - \dots - b_t\mathbf{u_t}}_{\mathbf{v} \in U} \tag{25}$$

È possibile affermare che $\mathbf{v}$ appartiene a $U \cap W$, e quindi vale la relazione

$$\underbrace{-a_1\mathbf{z_1} - \cdots - a_q\mathbf{z_q} - b_1\mathbf{u_1} - \cdots - b_t\mathbf{u_t}}_{\mathbf{v}\in\mathcal{L}(\mathbf{z_1},\ldots,\mathbf{z_q},\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_t})} = \underbrace{k_1\mathbf{z_1} + \cdots + k_q\mathbf{z_q}}_{\mathbf{v}\in\mathcal{L}(\mathbf{z_1},\ldots,\mathbf{z_q})} \tag{26}$$

da cui si ottiene

$$(a_1 + k_1)\mathbf{z_1} + \cdots + (a_q + k_q)\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \cdots + b_t\mathbf{u_t} = 0 \tag{27}$$

$$\Downarrow \tag{28}$$

$$(a_1 + k_1) = \cdots = (a_q + k_q) = b_1 = \cdots = b_t = 0 \tag{29}$$

essendo $\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_t}$ vettori appartenenti alla base di U e quindi linearmente indipendenti. Considerando la combinazione lineare in $U+W$ iniziale, sapendo ora che $b_1 = \cdots = b_t = 0$, si ha

$$a_1\mathbf{z_1} + \cdots + a_q\mathbf{z_q} + d_1\mathbf{w_1} + \cdots + d_s\mathbf{w_s} = 0 \tag{30}$$

Essendo essa combinazione lineare dei vettori della base di W — ed essendo essi linearmente indipendenti — ne segue che

$$a_1 = \cdots = a_q = d_1 = \cdots = d_s = 0 \tag{31}$$

Pertanto, $\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ sono vettori linearmente indipendenti.

Essendo i vettori $(\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s})$ generatori e linearmente indipendenti, essi costituiscono una base di $U + W$ e l'affermazione compiuta precedentemente è verificata, quindi la formula è verificata. $\square$

Esempio 3.