UNITN, Corso di laurea in Matematica, A.A. 2019/2020

Geometria A - 26 maggio 2020 - Prova Intermedia

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ la base canonica. Si definisca la forma bilineare simmetrica $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, al variare del parametro reale k in modo che:

- $b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) = 2$;
- $b_k(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) = b_k(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}) = k + k^2$;
- $\boldsymbol{e_1} \in \langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \rangle^{\perp}$;
- $b_k(\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}) = 2 + k + 9k^2$.

(i) Si scriva la matrice A_k associata alla forma bilineare b_k rispetto la base $\mathcal{E}$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, la forma bilineare b_k risulta degenere. Si stabilisca, inoltre, la segnatura di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Si trovino al variare di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ortogonale ed una matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ per cui ${}^tMA_kM = D$.

(iii) Sia $k = 2$. Dopo aver verificato che in questo caso b_2 rappresenta un prodotto scalare, trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a tale prodotto scalare.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il piano proiettivo complesso di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ il piano affine complesso di cordinate (x, y). Si considerino inoltre le rette proiettive $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 0\}$ e $U_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_1 = 0\}$ e le relative funzioni di proiettivizzazione

$$\begin{aligned} j_0 : \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{P}^2 \setminus U_0 \\ (x,y) &\mapsto [1, x, y] \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} j_1 : \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{P}^2 \setminus U_1 \\ (x,y) &\mapsto [x, 1, y]. \end{aligned}$$

Si definisca su $\mathbb{A}^2$ la curva $\mathcal{C}_{a,b}$ definita dal polinomio

$$f_{a,b}(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + ax^2 + by^2 = 0$$

al variare di a, $b \in \mathbb{C}$.

(i) Si trovino i punti singolari di $\mathcal{C}_{a,b}$. Si verifichi inoltre che se $a = 0$, se $b = 0$, oppure se $a = b$ la curva risulta riducibile, trovando le sue componenti irriducibili.

(ii) Si classifichino i punti singolari, calcolando la molteplicità di $\mathcal{C}_{a,b}$ in suddetti punti e si trovino le tangenti principali. Infine si calcoli la molteplicità di intersezione tra le tangenti principali e la curva $\mathcal{C}_{a,b}$ nel punto di tangenza.

Si fissino i valori $a = 2$ e $b = -2$.

(iii) Si verifichi che i punti impropri della curva $\overline{\mathcal{C}} = j_0(\mathcal{C}_{2,-2})$ sono singolari. Si trovino le tangenti principali nei punti impropri, studiando la curva $\mathcal{D} = j_1^{-1}(\overline{\mathcal{C}})$ e si ricavino le equazioni degli asintoti per $\mathcal{C}_{2,-2}$.