Ciao,

Questo file contiene tutte le definizioni di Geometria A date da Luis E. Sola Conde e Marco Andreatta nell'anno accademico 2022/2023.

Dovrebbero rimanere più o meno le stesse anche negli anni successivi, finché gli stessi professori terranno il corso. Consiglio comunque di controllare le loro dispense/lezioni in caso le diano in modo lievemente diverso e/o cambino leggermente il programma.

Le definizioni sono condizione necessaria (e quasi sufficiente) per superare l'esame scritto e orale, quindi, a prescindere dalla fonte da cui le studiate, fatelo bene e imparatele tutte ("come se fossero l'Ave Maria", direbbe Luis). Saperle rende quasi immediata la dimostrazione di maggior parte di lemmi e teoremi, quindi avete anche un motivo in più per farlo.

In caso di dubbi / domande mi potete scrivere a matilde.calabri@studenti.unitn.it

Se doveste trovare leggere differenze in quanto fatto dai professori o scritto sulle loro dispense, ovviamente fate riferimento a quelle. In caso ci siano errori più o meno grossi se avete voglia potete segnalarmeli, in modo da rendere questi appunti il più precisi possibile per i prossimi studenti.

Un saluto e buono studio,

Matilde Calabri

DEFINIZIONI

- **SPAZIO VETTORIALE**: Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo. Si chiama $\mathbb{K}$-spazio vettoriale un insieme V munito di due operazioni:
  - un'operazione di composizione interna $+ : V \times V \to V$ tale che $(V, +)$ è un gruppo abeliano
    [C], [A], [N], [I]

  - un'operazione di composizione esterna (:= prodotto per scalari) $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ tale che si soddisfano le seguenti proprietà:

D1) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$ $\quad \forall k \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$
D2) $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$ $\quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, v \in V$
P) $k_1(k_2 v) = (k_1 k_2)v$ $\quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, v \in V$
U) $1v = v$ $\quad \forall 1 \in \mathbb{K}, v \in V$

- **SOTTOSPAZIO VETTORIALE**: Sia $\mathbb{K}$ un campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un sottoinsieme $W \subset V$ non vuoto si dice sottospazio vettoriale di V se:
  - $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$
  - $v \in W, k \in \mathbb{K} \Rightarrow kv \in W$

$(v_1, v_2 \in W, k_1, k_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow k_1 v_1 + k_2 v_2 \in W)$

- **COMBINAZIONE LINEARE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.vett. e I un insieme di indici. Sia $S = \{v_i, i \in I\} \subset V$ un insieme di vettori di V indicizzati da I. Una combinazione lineare di S è un vettore nella forma
  $v = \sum_{i \in I} k_i v_i \quad k_i \in \mathbb{K} \ \forall i \in I$
  $k_i = 0 \quad \forall i \in I$

- **SOTTOSPAZIO GENERATO DA S**: Siano W un $\mathbb{K}$-sp.vett. e S un insieme di vettori. Il sottospazio $\langle S \rangle \subset V$ generato da S si definisce:

  - se $S \neq \emptyset$ $\quad \langle S \rangle := \{v \in V \mid v$ è una comb. lin. di elementi di $S\}$
  - se $S = \emptyset$ $\quad \langle S \rangle := \{0\}$

- **LINEARMENTE INDIPENDENTE**: Siano V un $\mathbb{K}$-sp.vett. e $S = \{v_i \mid i \in I\} \subseteq V$ un insieme di vettori. S si dice linearmente indipendente se:
  l'unico modo t.c. la comb. lin. sia nulla è che tutti i coefficienti siano nulli
  $(\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ con $a_i = 0 \ \forall i \in I) \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i \in I$ $\quad a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i$

- **BASI**: Siano V un $\mathbb{K}$-sp.vett. e $\beta = \{v_i, i \in I\} \subseteq V$ un insieme di vettori. Si dice che β è una base di V se
  - $\langle \beta \rangle = V$ (β genera V)
  - β è linearmente indipendente

- **COORDINATA I-ESIMA**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.vett. e sia $\beta = \{v_i, i \in I\}$ una base di V. Dato un $v \in V$ lo scriviamo in modo unico come comb. lin. di elementi di β
  $v = \sum a_i v_i \quad a_i = 0 \quad \forall i \in I$

  per ogni $i \in I$ lo scalare a_i si chiama COORDINATA I-ESIMA DI v RISPETTO a β.

- **DIMENSIONE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.vett.
  - Se V non ammette una base finita si dice che V ha dimensione ∞
  - se V ammette una base con $m \in \mathbb{N}$ elementi si dice che V ha dimensione m

- **SOMMA DI SPAZI VETTORIALI**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $W_1, W_2 \subset V$ sottosp.v.
  Si definisce somma di W_1 e W_2 l'insieme
  $W_1 + W_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}$

- **SOMMA DIRETTA**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V < \infty$ e $W_1, W_2 \subset V$ sottosp.v. t.c. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. La somma $W_1 + W_2$ si dice diretta e si indica con $W_1 \oplus W_2$

- **SOMMA DIRETTA ARBITRARIA**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $W_i \subset V$ sottosp. v. $(i=1,\dots,n)$
La somma $\sum_{i=1}^{n} W_i := \{w_1 + \dots + w_n \mid w_i \in W_i \ \forall i\} = \{\sum w_i \mid w_i \in W_i \ \forall i\}$ è diretta se ogni $w \in \sum W_i$ si può scrivere in modo unico come somma di elementi $w_i \in W_i$. (Notaz. $\sum W_i = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$)

- **COMPLEMENTO DIRETTO**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. e $W \subset V$ un sottosp. v.
Si chiama complemento diretto di W in V un sottosp.v. $W' \subset V$ t.c. $W \oplus W' = V$

- **SPAZIO QUOZIENTE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. e $W \subset V$ sottosp.v.
Definiamo una relazione di equivalenza in V:

$$v \sim_W v' \iff v - v' \in W$$

Si definisce spazio quoziente l'insieme di classi di equivalenza: $V/_{\sim_W} =: V/_W$

Le classi si indicano con $[v] = \{v' \in V \mid v' \sim_W v\} = \{v' \in V \mid v - v' \in W\} = \{v \in V \mid v' = v + w,\ w \in W\}$
$= \{v + w \mid w \in W\} =: v + W$

$V/_W$ eredita una struttura di $\mathbb{K}$-sp.v.

$$+ : V/_W \times V/_W \to V/_W$$
$$(v+W, v'+W) \mapsto (v+W) + (v'+W) = (v+v') + W$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V/_W \to V/_W$$
$$(k, v+W) \mapsto k(v+W) := (kv) + W$$

- **MAPPA LINEARE**: Siano V, V' $\mathbb{K}$-sp.v. Una mappa $f: V \to V'$ si dice lineare se
  - $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
  - $f(kv) = kf(v) \quad \forall v \in V, k \in \mathbb{K}$

  conserva somma e prodotto per scalari

  (equiv. $f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$)

- **IMMAGINE E NUCLEO**: Siano V, V' $\mathbb{K}$-sp.v., $f: V \to V'$ mappa lineare
  - $\mathrm{Im}(f) := \{f(v) \in V' \mid v \in V\}$
  - $N(f) := \mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

- **ISOMORFISMO**: Una mappa lineare si dice ISOMORFISMO di spazi vettoriali se è iniettiva e suriettiva $\quad f: V \to V' \quad (V \cong V')$

- **PROIEZIONE CANONICA**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $W \subset V$ sottosp.v.
La mappa $\pi: V \to V/_W$, $v \mapsto v + W$ è detta proiezione canonica

- **IMMERSIONE CANONICA**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. e $W \subset V$ sottosp.v.
La mappa $i: W \to V$, $v \mapsto v$ è detta immersione canonica

- **NULLITÀ E RANGO**: Siano V, V' $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V < \infty$, $f: V \to V'$ mappa lineare
  - si dice RANGO di $f := \dim \mathrm{Im}(f)$
  - si dice NULLITÀ di $f := \dim \mathrm{Ker}(f)$

- **SPAZIO DUALE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. Si definisce spazio duale di V

$$V^\vee := \{h: V \to \mathbb{K} \mid h \text{ lineare}\}$$

mappe a $\mathbb{K}$ =: forme
mappe lineari a $\mathbb{K}$ =: forme lineari

- **MATRICE**: Una matrice $m \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è una tabella ordinata di elementi di $\mathbb{K}$, con m righe ed n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il coefficiente nella posizione (i,j) (riga, colonna) di A si denota a_{ij}
$\rightarrow A = (a_{ij})$

L'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ si denota $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. In altre parole, possiamo definire $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ come l'insieme delle funzioni dall'insieme $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ a $\mathbb{K}$
$\mathcal{F}(\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, \mathbb{K})$

- **MATRICI CONFORMABILI**: due matrici $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n' \times k}(\mathbb{K})$ si dicono conformabili se $n = n'$ ($\rightarrow$ le righe di A e le colonne di B hanno lo stesso num. di el.)

- **PRODOTTO DI MATRICI**: Siano $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{n \times k}(\mathbb{K})$. Si definisce il prodotto $A \cdot B$ la matrice C t.c. $c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$ (= prodotto riga per colonna)

- **ENDOMORFISMO**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. Un endomorfismo di V è una mappa lineare $f: V \rightarrow V$ (da V in sé stesso)

Oss. l'insieme
$\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) = \{ f: V \rightarrow V \mid f \text{ endomorfismo} \}$

$(\mathrm{End}(V), +, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-sp.v.
$(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ è un anello unitario ($1 = id_V$)
$\Rightarrow (\mathrm{End}(V), +, \cdot, \circ)$ è un ALGEBRA

- **MATRICE INVERSA**: Sia A una matrice, si definisce inversa di A la matrice A^{-1} t.c.
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$$

- **MATRICI SIMILI / CONGRUENTI**: due matrici quadrate $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ si dicono simili / congruenti se esiste una matrice P invertibile tale che $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$

- **MAPPA E RANGO**: Sia $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matrice, essa definisce una mappa lineare
$$f_M: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$v \longmapsto f_M(v) = M \cdot v$$

Definisco $rk(M) := rk(f_M) = \dim(\mathrm{Im}(f_M))$

- **MAPPA DUALE**: Siano V, W $\mathbb{K}$-sp.v. e $f: V \rightarrow W$ una mappa lineare. Si chiama mappa duale di f la mappa lineare
$$f^\vee: W^\vee \longrightarrow V^\vee$$
$$h \longmapsto f^\vee(h) = h \circ f$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h \circ f"'] & W \arrow[d, "h"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

- **SPAZIO ANNULLATORE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $W \subseteq V$ sottosp.v. Si definisce spazio annullatore di W $W^\perp = \{ h \in V^\vee \mid h(w) = 0 \ \forall w \in W \}$
l'insieme $W^\perp$ delle mappe (lin.) che mandano in 0 tutti gli elementi di W

- **MAPPA SIMMETRICA**: Sia $\Phi: V \rightarrow V^\vee$ una mappa lineare
$$u \mapsto \Phi(u): V \rightarrow \mathbb{K} \text{ lineare}$$
$$v \mapsto \Phi(u)(v) \in \mathbb{K}$$

Si dice che Φ è simmetrica se $\Phi(u)(v) = \Phi(v)(u)$

- **MAPPA DEFINITA POSITIVA**: una mappa bilineare simmetrica si dice definita positiva se $\Phi(u)(u) \geq 0 \ \forall u \in V$ e $\Phi(u)(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

- **PRODOTTO SCALARE**: Sia V un $\mathbb{R}$-sp.v. Un prodotto scalare in V è una mappa bilineare simmetrica definita positiva (Notaz. $\langle , \rangle$)

- **N-FORMA**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Si dice n-forma una mappa
$\omega: V \times \overset{n}{\cdots} \times V \rightarrow \mathbb{K}$

- **N-FORMA MULTILINEARE**: una n-forma si dice multilineare se è lineare per ogni argomento:
$$\omega(v_1, \dots, kv_i + k'v_i', \dots, v_n) = k\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + k'\omega(v_1, \dots, v_i', \dots, v_n)$$

- **N-FORMA ALTERNANTE**: una n-forma si dice alternante se
$$v_i = v_j \Rightarrow \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$$
(perché sia $\neq 0$ tutti gli el. devono essere $\neq$)

- **PERMUTAZIONE**: una permutazione di n elementi è una mappa biettiva
$$\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

- **TRASPOSIZIONE**: una trasposizione è una permutazione del tipo
$$\begin{aligned} \tau: \{1, \dots, n\} &\to \{1, \dots, n\} \\ k &\mapsto k \quad (\text{se } k \neq i, j) \\ i &\mapsto j \\ j &\mapsto i \end{aligned}$$
(τ è una permutaz. che scambia 2 elem.)

- **SEGNO DI UNA PERM.**: si def. il segno di una permutazione $\sigma \in S_n$ come
$$s(\sigma) = (-1)^r \quad \text{se } \sigma = \underbrace{\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_n}_{r \text{ volte}}$$

- **N-POTENZA ESTERNA DI $V^\vee$**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Si definisce n-potenza esterna di $V^\vee$ l'insieme $\Lambda^n V^\vee = \{\omega: V^n \to \mathbb{K} \mid \omega \text{ multilineare alternante}\}$
delle n-forme multilin. alternanti

- **DETERMINANTE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n < \infty$ e $f: V \to V$ un endom. in V. Allora f induce un endomorfismo $f^*: \Lambda^n V^\vee \to \Lambda^n V^\vee$

Siccome $\dim \Lambda^n V^\vee = 1$ allora $\exists\, d \in \mathbb{K} \mid f^*(\omega) = d \cdot \omega \quad \forall \omega \in \Lambda^n V^\vee$

$\Rightarrow$ d si dice determinante di f e si scrive $d = \det f$

Def. f^*:
$$\begin{aligned} f &: V \to V \\ f^* &: \Lambda^n V^\vee \to \Lambda^n V^\vee \\ \omega &\mapsto f^*(\omega) \end{aligned}$$
$f^*(\omega)(v_1, \dots, v_n) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_n))$
è multilineare alternante ed una mappa lineare

- **GRUPPO LINEARE GENERALE**: $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$
$= \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A \text{ invertibile}\}$
è l'insieme delle matrici invertibili

$(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un gruppo (in gen. non commutativo)

- **SOTTOMATRICE/MINORE**: Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Si scrive A^{ij} la matrice che si ottiene togliendo la riga i e la colonna j alla matrice A

- **MATRICE AGGIUNTA**: Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ t.c. $A = (a_{ij})$. Si dice matrice aggiunta di A la matrice ad $A = (a^{ij})$ t.c. $\forall\, i, j \quad a^{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{ij}$

- **DIAGONALIZZARE**: diagonalizzare una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ significa trovare $P \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile con $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ diagonale

def.
Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V < \infty$, $f \in End(V)$. Diagonalizzare f significa trovare una base β di V t.c. $M_\beta(f)$ è diagonale
$\leftrightarrow$ f è diagonalizzabile se esiste una base β di V formata da autovettori di f

- **AUTOVETTORI E AUTOVALORI**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V < \infty$, $f \in End(V)$. Un vettore $v \in V$ si dice autovettore di f se $v \neq 0$ e se $\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \mid f(v) = \lambda(v)$
λ si dice autovalore di f associato a v

- **SPETTRO**: V $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V < \infty$, $f \in End(V)$. Si chiama spettro l'insieme di autovalori di f $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{K}$

- **AUTOSPAZIO E MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V<\infty$, $f\in End(V)$. Se λ è un autovalore di f, si dice autospazio di f associato a λ l'insieme $Ker(f-\lambda Id)\subset V$. La sua dimensione si chiama molteplicità geometrica associata a λ $\dim(Ker(f-\lambda Id)) =: r_f(\lambda)$ (se $f(v)=\lambda v \Rightarrow Ker(f-\lambda Id)\neq\{0\}$ $(v\in Ker(f-\lambda Id))$)

  oss
  $Ker(f-\lambda Id)=\langle v_1,\dots,v_{r_f(\lambda)}\rangle$ è lo spazio di tutti gli autovettori di f associati a λ

- **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA**: si definisce molteplicità algebrica della radice λ_i del polinomio $p_f(x)$ il numero naturale $m_f(\lambda_i)$ t.c. $m_f(\lambda_i):=\max\{m \text{ t.c. } (x-\lambda_i)^m \mid p(x)\}$ (↳ divide)

- **SOTTOSPAZIO INVARIANTE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $f\in End(V)$, $W\subset V$ sottosp.v. W si dice invariante per f (f-invariante / p.to prefisso di f) se $f(W)\subset W$

  Se $W\subset V$ è invariante per f, possiamo restringere f a W, ottenendo un endomorfismo di W (Not. f_W)

- **PARTIZIONE**: Sia m un intero positivo. Si dice partizione di m una successione decrescente di interi positivi la cui somma è m

- **BLOCCO DI JORDAN ASSOCIATO AD UNA PARTIZIONE**: Sia $s=(s_1\geq s_2\geq\dots\geq s_r)$ una partizione di m e λ un autovalore di f. Si dice blocco di Jordan associato a s la matrice $J_s(\lambda)$

$$J_s(\lambda)=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{matrix}}_{s_1} & & & \\ & \underbrace{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \ddots & 1\\ & & \lambda\end{matrix}}_{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda\end{matrix}}_{s_m}\end{matrix}\right)$$

- **NILPOTENTE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V<\infty$, $f\in End(V)$. f si dice nilpotente se $\exists\, m\in\mathbb{N}_{>0}$ t.c. $f^m=f\circ\overset{m}{\dots}\circ f=0$

- **SPAZIO AFFINE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. ($\mathbb{K}$ campo). Uno spazio affine con giacitura V è un insieme $\mathbb{A}$ munito di una mappa $t:\mathbb{A}\times V\to\mathbb{A}$
  $(P,v)\mapsto t(P,v)=:P+v$ (traslato di P per v)

  con le seguenti proprietà:
  1) $t(P,0)=P$ $\quad\forall P\in\mathbb{A}$ $\quad(P+0=P)$ $\quad$ ID
  2) $t(t(P,u),v)=t(P,u+v)$ $\quad\forall P\in\mathbb{A}, v,u\in V$ $\quad[(P+u)+v=P+(u+v)]$ $\quad$ PA
  3) $\forall P,Q\in\mathbb{A}\ \exists!\, v \mid Q=t(P,v)$ (Not. v t.c. $Q=P+v$ si denota $\overrightarrow{PQ}$)

  La dimensione di $\mathbb{A}$ per definizione è la dimensione di V

- **SOTTOSPAZIO AFFINE**: Sia $\mathbb{A}$ sp. af. con giac. V, $P\in\mathbb{A}$ un punto e $W\subset V$ sottosp. v. Si dice sottospazio affine di $\mathbb{A}$ l'insieme $P+W=\{P+w \mid w\in W\}$
  (è l'insieme dei traslati di un certo punto di $\mathbb{A}$ per i vettori di un sottospazio vettoriale)

- **SISTEMA DI RIFERIMENTO**: Sia $\mathbb{A}$ sp. af. con giac. V, $\dim\mathbb{A}=n<\infty$. Un sistema di riferimento in $\mathbb{A}$ è un insieme di $n+1$ punti $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$ tali che $\{\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_n}\}$ sia una base di V. P_0 si dice origine del sistema di riferimento

- **COORDINATE RISPETTO AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO**: Sia $\mathbb{A}$ sp. af. con giac. V, $\dim\mathbb{A}=n<\infty$, sia $B=\{P_0,\dots,P_n\}$ un sist. di rif in $\mathbb{A}$ e $P\in\mathbb{A}$ un punto. Si dicono coordinate di P rispetto a B $(P)_B=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ t.c. $\overrightarrow{P_0P}=a_1\overrightarrow{P_0P_1}+\dots+a_n\overrightarrow{P_0P_n}$
  $\Leftrightarrow P=P_0+a_1\overrightarrow{P_0P_1}+\dots+a_n\overrightarrow{P_0P_n}$

- **MAPPA AFFINE**: Siano $\mathbb{A},\mathbb{A}'$ sp. af. con giac. V,V'. Si dice mappa affine una mappa $F:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ t.c. esiste una mappa lineare $f:V\to V'$ t.c. $F(P+v)=F(P)+f(v)$ $\forall P\in\mathbb{A}, v\in V$
  := parte lineare di F

→ Definizioni Andreatta

- **FORMA BILINEARE:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. Si dice forma bilineare una mappa $b: V \times V \to \mathbb{K}$ t.c. (è lineare rispetto ad entrambi gli argomenti)

1) $b(v_1+v_2, w_1) = b(v_1, w_1) + b(v_2, w_1)$ 2) $b(kv_1, w_1) = k\,b(v_1, w_1)$
3) $b(v_1, w_1+w_2) = b(v_1, w_1) + b(v_1, w_2)$ 4) $b(v_1, kw_1) = k\,b(v_1, w_1)$
($\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, $\forall k \in \mathbb{K}$)

- b si dice SIMMETRICA se $b(v,w) = b(w,v)$
- b si dice ANTISIMMETRICA se $b(v,w) = -b(w,v)$

- **MATRICI CONGRUENTI:** due matrici $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono congruenti se $\exists M \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = {}^tMAM$

- **BASE ORTOGONALE:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v, $\dim V = n < \infty$, $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V. se $b(e_i, e_j) = 0$ $\forall i \neq j$ la base si dice ORTOGONALE o DIAGONALIZZANTE per b

- **FORMA QUADRATICA:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n < \infty$, $b: V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare simmetrica. La forma quadratica associata a b è la funzione $q: V \to \mathbb{K}$ con $q(v) = b(v,v)$

- **VETTORI ISOTROPI:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V < \infty$ e $b(v,w)$ una forma bilin. simm. Un vettore $v \in V$ si dice isotropo se $b(v,v) = q(v) = 0$

- **SPAZIO ORTOGONALE:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $S \subset V$, $\dim V < \infty$ e $b(v,w)$ una forma bilin. simm. Si definisce sottospazio ortogonale a S l'insieme $S^\perp := \{v \in V \mid b(v,w) = 0 \ \forall w \in S\}$

- **RANGO:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n < \infty$. Si definisce rango di una forma bilin. simm. il numero di vettori e_i di una base diagonalizzante t.c. $b(e_i, e_i) \neq 0$ $\to r := rk\, b(v,w) = rk\, A$
Se $rk\, b(v,w) = n$ la forma si dice NON DEGENERE

- **SEGNATURA:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $b(v,w)$ f. bilin. simm. e $\beta: \{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale. Si definisce INDICE DI POSITIVITÀ $\#\{e_i \in \beta \mid b(e_i, e_i) = 1\} = p$ e INDICE DI NEGATIVITÀ $\#\{e_i \in \beta \mid b(e_i, e_i) = -1\} = s$. La coppia $(p, s) = (p, r-p)$ è detta SEGNATURA di b

- **FORME POSIT./NEGAT.:** Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n < \infty$. Una forma quadratica q su V si dice
  - DEFINITA POSITIVA se $q(v) > 0$ $\forall v \in V \setminus \{0\}$
  - DEFINITA NEGATIVA se $q(v) < 0$ $\forall v \in V \setminus \{0\}$
  - SEMIDEFINITA POSITIVA se $q(v) \geq 0$ $\forall v \in V \setminus \{0\}$
  - SEMIDEFINITA NEGATIVA se $q(v) \leq 0$ $\forall v \in V \setminus \{0\}$

- **PRODOTTO SCALARE:** Sia V un $\mathbb{R}$-sp.v. Una forma $b(v,w)$ bilineare, simmetrica e definita positiva si dice prodotto scalare (Not. $\langle v, w\rangle$ o $v \cdot w$)

- **SPAZIO V. EUCLIDEO/PRE-HILBERTIANO:** Un $\mathbb{R}$-sp.v. V con un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si dice spazio vettoriale euclideo (o pre-hilbertiano) (Not. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$)

- **NORMA:** Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp. euc. Se $v \in V$ si definisce la norma di v come $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

- **INSIEMI ORTOGONALI E ORTONORMALI:** Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno sp. euc. Un insieme $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ si dice ortogonale se $v_i \neq 0$ $\forall i$ e $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$. Inoltre si dice ortonormale se $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ $\forall i$

- **PRODOTTO ESTERNO:** Sia V un $\mathbb{R}$-sp.v. di dim 3. Definiamo $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$ come $v \wedge w = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_1 y_3 - y_1 x_3, x_1 y_2 - y_1 x_2)$. È un vettore che soddisfa queste proprietà:

1) $v \wedge w \neq 0 \iff v \nparallel w$ 2) $\langle v \wedge w, v \rangle = \langle v \wedge w, w \rangle = 0$ 3) $v \wedge w = -w \wedge v$
4) $\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$

- **SPAZIO AFFINE**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. Uno spazio affine con giacitura V è un insieme $\mathbb{A}$ munito di una mappa $\overline{\cdot\cdot}: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ tale che $\begin{cases} \forall P \in \mathbb{A}, v \in V \ \exists! Q \in \mathbb{A} \mid \overline{PQ} = v \\ \forall P,Q,R \in \mathbb{A} \ \ \overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR} \end{cases}$
$(P, Q) \mapsto \overline{PQ}$
Gli elementi di $\mathbb{A}$ si dicono punti

- **SISTEMA DI RIFERIMENTO AFFINE**: Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con giacitura V, $\dim \mathbb{A} = n$. Un sistema di riferimento affine è dato da un punto O detto ORIGINE e da una base β di V.

- **SOTTOSPAZIO AFFINE**: Sia $\mathbb{A}$ sp. af. con giac. V, $P \in \mathbb{A}$ un punto e $W \subset V$ sottosp. v. Si dice sottospazio affine di $\mathbb{A}$ l'insieme $S = \{Q \in \mathbb{A} \mid \overline{PQ} \in W\}$
sottosp. af. passante per P con giacitura W

- **SOTTOSPAZI PARALLELI**: Sia $\mathbb{A}$ sp. af. su V, S e T sottosp. af. con giac. U e W. S e T si dicono paralleli se $U \subset W$ o $W \subset U$

- **RETTE COMPLANARI E SGHEMBE**: Siano r e s due rette in $\mathbb{A}^3$. Esse si dicono
  - COMPLANARI se $r \cap s \neq \emptyset$ o se $r // s$
  - SGHEMBE se non sono complanari (ovvero se non si intersecano e non sono parallele)

- **SPAZIO EUCLIDEO**: Uno sp. af. $\mathbb{A}^n$ con giac. V con un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si dice spazio euclideo (Not. $\mathbb{E}^n$)

- **DISTANZA**: In uno spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ definiamo la distanza come $d(P,Q) = \|\overline{PQ}\| = \sqrt{\langle \overline{PQ}, \overline{PQ} \rangle}$ $\forall P, Q \in \mathbb{E}^n$

- **DIST. PUNTO IPERPIANO**: si definisce la distanza tra un punto P e un iperpiano H
$d(P, H) := \inf_{Q \in H} d(P,Q)$ (l'inf delle distanze tra P e un punto Q dell'iperpiano)

- **MAPPE SIMMETRICHE E UNITARIE**: Sia V un $\mathbb{R}$-sp.v. euclideo e $T \in End(V)$. La mappa T si dice
  - SIMMETRICA se $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$
  - UNITARIA se $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$
  $\hookrightarrow T: V \to V$

- **AFFINITÀ**: Sia $\mathbb{A}^n$ sp. af. con giac. V. Una mappa $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ si dice affinità con isomorfismo associato $\varphi: V \to V$ se
1) f è biettiva 2) $\forall P, Q \in \mathbb{A}^n \ \overline{f(P) f(Q)} = \varphi(\overline{PQ})$
Es: traslazione di vettore, riflessione rispetto ad un punto, riflessione rispetto ad un iperpiano

- **ISOMETRIA**: Sia $\mathbb{E}^n$ sp. euc. Si definisce isometria un'affinità con isomorfismo associato unitario ($\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$)
$\hookrightarrow f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$

- **ISOMETRIA DIRETTA (INDIRETTA)**: $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ isometria si dice diretta (/indiretta) se il determinante della trasformazione lineare associata è $= 1$ ($/ = -1$)
$f = (x+y, x-y) \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \det f = \det A = -2 \Rightarrow f$ non è diretta né indiretta (è isom? boh)

- **SPAZIO PROIETTIVO**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n+1$. Definiamo una relazione di equivalenza su V: $\forall v, w \in V \ \ v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid v = \lambda w$. Lo spazio proiettivo associato a V è l'insieme $\mathbb{P}(V) = \{[v] \mid v \in V, v \neq 0\}$, $\dim \mathbb{P}(V) := n = \dim V - 1$ ($[v] = \{w \in V \mid w \sim v\}$)

- **SISTEMA DI RIFERIMENTO PROIETTIVO**: un sistema di riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ è una base di V

- **SOTTOSPAZIO PROIETTIVO**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $W \subset V$ sottosp.v. Dato uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ si dice sottospazio proiettivo l'insieme $\mathbb{P}(W) = \{[w] \mid w \in W, w \neq 0\}$. $\dim \mathbb{P}(W) := \dim W - 1$

- **SPAZIO PROIETTIVO GENERATO DA UN INSIEME**: dato $S \subset \mathbb{P}(V)$, definiamo $L(S)$ come il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene S (ovvero lo spazio generato da S)
$$L(S) = \bigcap \{\mathbb{P}(W) \mid S \subset \mathbb{P}(W) \wedge W \subset V\} := \mathbb{P}(Z) \qquad (Z \subset V)$$
$= \bigcap \{$tutti i sottospazi proiettivi che contengono $S\}$

- **SOTTOSPAZI SGHEMBI**: Sia V $\mathbb{K}$-sp.v., $U, W \triangleleft V$. Se $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset$ allora $\mathbb{P}(W)$ e $\mathbb{P}(U)$ si dicono sghembi (ovvero se $W \cap U = \{0\}$)

- **PUNTI LIN. INDIP**: $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ si dicono linearmente indipendenti se $\dim L(P_1, \dots, P_r) = r-1$
- **POSIZIONE GENERALE**: $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ si dicono in posizione generale se
  - $r \leq n+1$ e $\{P_1, \dots, P_r\}$ sono lin. indipendenti
  - $r > n+1$ e ogni sottoinsieme di $(n+1)$ di loro è linearmente indipendente

- **PROIEZIONE**: siano $H, K \subset \mathbb{P}(V)$ due sottospazi proiettivi in posizione generale con $\dim H + \dim K = \dim V - 1$. La proiezione di H su K è la mappa $\pi_{H,K}: \mathbb{P}(V) \setminus H \to K$
$$Q \mapsto \underbrace{L(H,Q)}_{\hookrightarrow L(H \cup Q) \to \text{punto}} \cap K$$

- **OMOGENEIZZAZIONE**: sia $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ un'equazione lineare in $x_1, \dots, x_n$. L'equazione $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + bx_0 = 0$ si dice equazione omogenea associata

- **TRACCIA AFFINE**: Sia $\overline{S} = \begin{cases} a_0^1 x_0 + \dots + a_n^1 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_0^{n-r} x_0 + \dots + a_n^{n-r} x_n = 0 \end{cases} \subset \mathbb{P}^n$ un sottosp. proiettivo di dim. 1
La sua traccia affine è data dal sottospazio affine $S = \begin{cases} a_0^1 + \dots + a_n^1 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_0^{n-r} + \dots + a_n^{n-r} x_n = 0 \end{cases}$, $\dim S = r$

- **PROIETTIVITÀ**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. Una mappa $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ si dice proiettività se
  1) f è biettiva 2) esiste un isomorfismo $\varphi: V \to V$ t.c. $f([v]) = [\varphi(v)]$

- **POLINOMIO OMOGENEO**: Sia $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = d$. f si dice omogeneo se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:
  1) f è somma di monomi di grado d
  2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n)$
  3) $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d \cdot f(x_1, \dots, x_n)$ (formula di Eulero)

- **OMOGENEIZZATO**: Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = d$. L'omogeneizzato di f è il polinomio $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ definito come $F[x_0, \dots, x_n] = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$
  esso è a sua volta un polinomio di grado d

- **DISOMOGENEIZZATO**: Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo, $\deg F = d$. Il suo disomogeneizzato è un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ definito come $f(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$

- **POLINOMI EQUIVALENTI**: Diremo che $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ sono equivalenti ($f \sim g$) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ t.c. $f = \lambda g$
  (ovvero sse f e g sono associati)

- **CURVA ALGEBRICA PIANA**: Una curva algebrica piana $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è una classe di equivalenza $[f]$, con $f \in \mathbb{K}[x,y]$. Definiamo inoltre
  - SUPPORTO di $\mathcal{C}$ $= \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x,y) = 0\}$
  - GRADO di $\mathcal{C}$: $\deg \mathcal{C} = \deg f$

- **CURVA A.P. PROIETTIVA**: Una curva algebrica piana proiettiva in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è una classe di equivalenza $[F]$, con $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo. Definiamo inoltre
  - SUPPORTO di $\mathcal{C}$ $= \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$
  - GRADO di $\mathcal{C}$: $\deg \mathcal{C} = \deg F$

- **CHIUSURA PROIETTIVA E TRACCIA AFFINE**: Sia $\mathcal{C} = [f(x,y)]$ una curva piana affine in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Definiamo la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ come la curva $\overline{\mathcal{C}} = [F(x_0, x_1, x_2)]$, con $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ l'omogeneizzato di f. Viceversa si dice traccia affine di $\overline{\mathcal{C}}$ la curva $\mathcal{C}$

- **C. AFFINEMENTE EQUIVALENTI**: Due curve $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{D} = [g]$ si dicono affinemente equivalenti se esiste un affinità $T: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ t.c. $g(x,y) = f(x,y) \circ T(x,y)$. Scriveremo $T(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$

- **C. PROIET. EQUIVALENTI**: due curve $\overline{\mathcal{C}} = [F]$ e $\overline{\mathcal{D}} = [G]$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ si dicono proiettivamente equivalenti se esiste una proiettività $P: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ t.c. $G(x_0, x_1, x_2) = F(x_0, x_1, x_2) \circ P(x_0, x_1, x_2)$. Scriveremo $P(\overline{\mathcal{D}}) = \overline{\mathcal{C}}$

- **IPERSUPERFICIE**: Una ipersuperficie $\mathcal{J}$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è data da $\mathcal{J} = [F]$ con $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo. Si definisce inoltre $\deg \mathcal{J} = \deg F$ e Supp. $\mathcal{J} = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$

- **PUNTI LIN. INDIP.**: $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ si dicono linearmente indipendenti se $\dim L(P_1, \dots, P_r) = r-1$
- **POSIZIONE GENERALE**: $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ si dicono in posizione generale se
  - $r \leq n+1$ e $\{P_1, \dots, P_r\}$ sono lin. indipendenti
  - $r > n+1$ e ogni sottoinsieme di $(n+1)$ di loro è linearmente indipendente

- **PROIEZIONE**: siano $H, K \subset \mathbb{P}(V)$ due sottospazi proiettivi in posizione generale con $\dim H + \dim K = \dim V - 1$. La proiezione di H su K è la mappa $\pi_{H,K}: \mathbb{P}(V) \setminus H \to K$
$$Q \mapsto \underbrace{L(H,Q)}_{L(H \cup Q) \to \text{punto}} \cap K$$

- **OMOGENEIZZAZIONE**: Sia $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ un'equazione lineare in $x_1, \dots, x_n$. L'equazione $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + bx_0 = 0$ si dice equazione omogenea associata

- **TRACCIA AFFINE**: Sia $\overline{S} = \begin{cases} a_0^0 x_0 + \dots + a_n^0 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_0^{n-r} x_0 + \dots + a_n^{n-r} x_n = 0 \end{cases} \subset \mathbb{P}^n$ un sottosp. proiettivo di dim. 1

La sua traccia affine è data dal sottospazio affine $S = \begin{cases} a_0^0 + \dots + a_n^0 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_0^{n-r} + \dots + a_n^{n-r} x_n = 0 \end{cases}$, $\dim S = r$

- **PROIETTIVITÀ**: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v. Una mappa $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ si dice proiettività se
  1) f è biettiva 2) esiste un isomorfismo $\varphi: V \to V$ t.c. $f([v]) = [\varphi(v)]$

- **POLINOMIO OMOGENEO**: Sia $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = d$. f si dice omogeneo se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:
  1) f è somma di monomi di grado d
  2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n)$
  3) $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d \cdot f(x_1, \dots, x_n)$ (formula di Eulero)

- **OMOGENEIZZATO**: Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = d$. L'omogeneizzato di f è il polinomio $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ definito come $F[x_0, \dots, x_n] = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$
  esso è a sua volta un polinomio di grado d

- **DISOMOGENEIZZATO**: Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo, $\deg F = d$. Il suo disomogeneizzato è un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ definito come $f(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$

- **POLINOMI EQUIVALENTI**: Diremo che $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ sono equivalenti ($f \sim g$) $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ t.c. $f = \lambda g$ (ovvero sse f e g sono associati)

- **CURVA ALGEBRICA PIANA**: Una curva algebrica piana $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è una classe di equivalenza $[f]$, con $f \in \mathbb{K}[x,y]$. Definiamo inoltre
  - SUPPORTO di $\mathcal{C}$ $= \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x,y) = 0\}$
  - GRADO di $\mathcal{C}$: $\deg \mathcal{C} = \deg f$

- **CURVA A.P. PROIETTIVA**: Una curva algebrica piana proiettiva in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è una classe di equivalenza $[F]$, con $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo. Definiamo inoltre
  - SUPPORTO di $\mathcal{C}$ $= \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$
  - GRADO di $\mathcal{C}$: $\deg \mathcal{C} = \deg F$

- **CHIUSURA PROIETTIVA E TRACCIA AFFINE**: Sia $\mathcal{C} = [f(x,y)]$ una curva piana affine in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Definiamo la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ come la curva $\overline{\mathcal{C}} = [F(x_0, x_1, x_2)]$, con $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ l'omogeneizzato di f. Viceversa si dice traccia affine di $\overline{\mathcal{C}}$ la curva $\mathcal{C}$

- **C. AFFINEMENTE EQUIVALENTI**: Due curve $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{D} = [g]$ si dicono affinemente equivalenti se esiste un affinità $T: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ t.c. $g(x,y) = f(x,y) \circ T(x,y)$. Scriveremo $T(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$

- **C. PROIETT. EQUIVALENTI**: due curve $\overline{\mathcal{C}} = [F]$ e $\overline{\mathcal{D}} = [G]$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ si dicono proiettivamente equivalenti se esiste una proiettività $P: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ t.c. $G(x_0, x_1, x_2) = F(x_0, x_1, x_2) \circ P(x_0, x_1, x_2)$. Scriveremo $P(\overline{\mathcal{D}}) = \overline{\mathcal{C}}$

- **IPERSUPERFICIE**: Una ipersuperficie $\mathcal{J}$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è data da $\mathcal{J} = [F]$ con $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo. Si definisce inoltre $\deg \mathcal{J} = \deg F$ e Supp. $\mathcal{J} = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$

- **CONICHE AFFINI**: Una quadrica $\mathcal{C} = [f] = [{}^t x A x]$ di $\mathbb{A}^2$ si dice
  - non degenere se $rk\, A = 3$
  - semplicemente degenere se $rk\, A = 2$
  - doppiamente degenere se $rk\, A = 1$

  Inoltre si dice:
  - a centro se $\det A_0 \neq 0$
  - parabola se $\det A_0 = 0$

  In conclusione, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ anche il segno di $\det A_0$ è un invariante affine, per cui si dice
  - iperbole se $\det A_0 < 0$
  - ellisse se $\det A_0 > 0$ $\begin{cases} \text{a punti non reali se } \det A_0\, tr A_0 > 0 \\ \text{a punti reali se } \det A_0\, tr A_0 < 0 \end{cases}$

- **IPERS. DEGENERE**: un'ipersuperficie quadrica di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si dice degenere se il determinante della sua matrice associata è 0 $(\det A = 0)$

- **CURVE IRRIDUCIBILI**: Sia $\mathcal{C} = [f(x,y)]$ una c.a.p. affine. Se f è irriducibile allora $\mathcal{C}$ è irriducibile. Se invece f ammette fattorizzazione, le curve associate ai fattori irriducibili del polinomio si dicono componenti irriducibili di $\mathcal{C}$

  Se $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ è una decomp. in irr. allora $\mathcal{C}_i = [f_i]$ e scriveremo $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \ldots + \mathcal{C}_r$ (Se $\mathcal{C} = [f]$, $\mathcal{D} = [g] \Rightarrow \mathcal{C} + \mathcal{D} = [fg]$)

- **MOLTEPLICITÀ DI INTERSEZIONE**: Sia $\mathcal{C} = [F(x_0, x_1, x_2)]$ una c.a.p. proiettiva in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Sia r una retta in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ passante per P_0, Q_0. I punti della retta r sono dati da $\lambda P_0 + \mu Q_0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Calcoliamo F lungo r: $F(\lambda P_0 + \mu Q_0) = \bar{F}(\lambda, \mu)$; è un polinomio di grado $\deg F =: n$. Definiamo $I(\mathcal{C}, r; P)$ la molteplicità di intersezione tra $\mathcal{C}$ e r in un punto $P \in r$ come il valore della molteplicità di $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ come radice di $\bar{F}$, con $\hat{\lambda}$ e $\hat{\mu}$ t.c. $P = \hat{\lambda} P_0 + \hat{\mu} Q_0$

  $\Rightarrow I(\mathcal{C}, r; P) :=$ molt. di $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ come radici di $\bar{F}$. Conven. $\begin{cases} I(\mathcal{C}, r; P) = 0 & \text{se } P \notin \mathcal{C} \\ I(\mathcal{C}, r; P) = \infty & \text{se } r \subset \mathcal{C} \end{cases}$

  OSS. Per th. Bezout $r \not\subset \mathcal{C} \Rightarrow 0 \leq I(\mathcal{C}, r; P) \leq n$

- **MOLT. CURVA IN UN PUNTO**: Sia $\mathcal{C} = [f]$ una c.a.p. e P un punto nel piano. Si definisce la molteplicità della curva $\mathcal{C}$ in P il valore $m_P(\mathcal{C}) := \min_{P \in r} I(\mathcal{C}, r; P)$

- **PUNTI SEMPLICI / SINGOLARI**: se $m_P(\mathcal{C}) = 1$ il punto si dice semplice (/non sing. /liscio)
  se $m := m_P(\mathcal{C}) > 1$ il punto si dice singolare (/di molteplicità m)

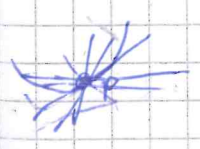
- **TANGENTI PRINCIPALI**: Sia $\mathcal{C} = [f(x,y)]$ e $P = (a,b) \in \mathcal{C}$ di molteplicità z. Definisco tangenti principali di $\mathcal{C}$ in P le rette passanti per P con direzione (ℓ, m) soluzioni di
  $$\sum_{k=0}^{z} \binom{z}{k} f_{x^{z-k} y^k}(a,b)\, \ell^{z-k} m^k = 0$$

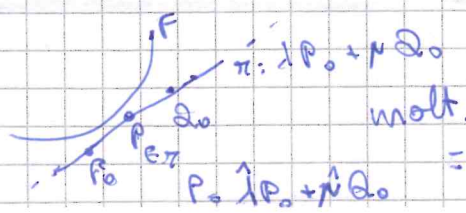
- **ASINTOTO**: Sia $\mathcal{C} = [f]$ una c.a.p. Si dice asintoto per $\mathcal{C}$ una retta tangente a $\mathcal{C}$ in un punto all'infinito (che sia diversa dalla retta all'infinito)
  [F]

- **PUNTI DI FLESSO**: Sia $\mathcal{C} = [f]$ una c.a.p. e $P \in \mathcal{C}$. P si dice punto di flesso di ordine K se P è liscio e $I(\mathcal{C}, J; P) = 2 + K$ (con $K \geq 1$), dove J è la tangente a $\mathcal{C}$ in P

- **HESSIANA**: l'hessiana di $\mathcal{C}$ è la curva $\mathcal{H} = [H(x_0, x_1, x_2)]$ con
  $$H(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} F_{00}(\underline{x}) & F_{01}(\underline{x}) & F_{02}(\underline{x}) \\ F_{10}(\underline{x}) & F_{11}(\underline{x}) & F_{12}(\underline{x}) \\ F_{20}(\underline{x}) & F_{21}(\underline{x}) & F_{22}(\underline{x}) \end{vmatrix}.$$
  È un polinomio omogeneo di grado $3(n-2)$.

FINE





$F(\lambda P_0 + \mu Q_0) = \bar{F}(\lambda, \mu)$

molt. di int. tra $\mathcal{C}$ e r in $P = I(\mathcal{C}, r; P)$
= valore della molt. di $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ come radice di $\bar{F}$

DISTANZE

• DISTANZA PUNTO-RETTA

Per determinare la distanza tra un punto P e una retta r bisogna determinare l'equazione del piano $H \perp r$ e passante per P. Poi si determinano le coordinate di $Q: H \cap r$ e otteniamo che la distanza tra P e r è la distanza tra P e Q.

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

• DISTANZA RETTA-PIANO

La distanza tra una retta e un piano è nulla se essi si intersecano, altrimenti è uguale alla distanza tra un qualsiasi punto della retta e il piano se sono paralleli.

$$d(r, p) = d(P, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• DISTANZA TRA DUE PIANI

La distanza tra due piani è nulla se essi si intersecano, altrimenti i due piani sono paralleli per cui la loro distanza è quella tra una e un qualsiasi punto dell'altro.

• DISTANZA TRA DUE RETTE

Se le due rette si intersecano la distanza è nulla. Se sono parallele è uguale alla distanza tra una e un punto qualsiasi dell'altra. Se sono sghembe $\exists!$ retta $\perp$ ad entrambe; la si trova intersecando il piano contenente r_2 e $\perp$ a r_1 con il piano contenente r_1 e $\perp$ a r_2

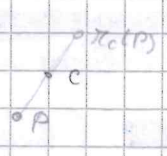
$$d(r_1, r_2) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

AFFINITÀ

• TRASLAZIONE DI VETTORE v

È una mappa $t_v: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, $P \mapsto t_v(P)$ tale che $\overrightarrow{P t_v(P)} = v$

• RIFLESSIONE RISPETTO AD UN PUNTO C



È una mappa $r_c: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, $P \mapsto r_c(P)$ tale che $\overrightarrow{C r_c(P)} = -\overrightarrow{CP}$

• RIFLESSIONE RISPETTO AD UN IPERPIANO H

È una mappa $r_H(P): \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $P \mapsto r_H(P)$ tale che $\overrightarrow{N r_H(P)} = \overrightarrow{NP}$, dove N è l'intersezione tra H e la retta passante per P $\perp$ ad H

QUADRICHE

- IPERBOLOIDE IPERBOLICO

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{z^2}=1 \iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{c^2}{z^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \iff \left(\frac{x}{a}+\frac{c}{z}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{c}{z}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Le rette $\begin{cases}\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\frac{1}{t}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}$ al variare di t coprono l'iperboloide iperbolico

(e anche $\begin{cases}\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\frac{1}{t}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}$) $\Rightarrow$ l'iperboloide iperbolico è una superficie doppiamente rigata

- PARABOLOIDE IPERBOLICO:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0 \iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \iff \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z$$

$\rightsquigarrow$ Le rette $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=t\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{t}\end{cases}$ al variare di t coprono il paraboloide iperbolico

$\Rightarrow$ il paraboloide iperbolico è una superficie rigata

GRUPPO ABELIANO

Vogliamo definire "geometricamente" un'operazione su $\mathcal{C}$ che lo renda un gruppo abeliano

$$+ : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C} \qquad A,B\in\mathcal{C}$$
$$(A,B)\longmapsto A+B := R(R(A,B),O)$$

$R(A,B) :=$ la terza intersezione della retta $L(A,B)$ con $\mathcal{C}$

1. l'operazione è commutativa
2. $A+O = R(R(A,O),O)$
3. $R(A,O) = -A$
4. $A+(B+C) = (A+B)+C$

ovvero $R(R(A,B+C),O) = R(R(A+B,C),O)$
ovvero $R(A,B+C) = R(A+B,C)$
ovvero A, $B+C$, $R(A+B,C)$ sono allineati

Proprietà

1. Una cubica piana liscia irriducibile è un gruppo
2. una cubica piana liscia irriducibile è una curva ellittica
3. si può dimostrare che $y^2=x(x-1)(x-c)$ non ha una parametrizzazione razionale (cioè fatta con polinomi o quozienti di polinomi)

CAMBIAMENTI DI COORDINATE

DEFINIZIONE: Siano V, V' $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n < \infty$, $\dim V' = m < \infty$, $f: V \to V'$ mappa lin. Siano β e β' basi di V e V', $F_\beta: V \to \mathbb{K}^n$ e $F_{\beta'}: V \to \mathbb{K}^m$ mappe di coordinate.

Si definisce la MATRICE DI f RISPETTO A β E β' la matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ t.c.

$$F_{\beta'} \circ f \circ F_{\beta^{-1}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \text{ è data da } F_{\beta'} \circ f \circ F_\beta^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si denota $A =: M_{\beta'\beta}(f)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_\beta"'] & V' \arrow[d, "F_{\beta'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "F_{\beta'} \circ f \circ F_\beta^{-1}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

DEFINIZIONE: Sia V un $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n < \infty$, β e γ due basi di V. Si definisce la MATRICE DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE DA β A γ la matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tale che $f_A = F_\gamma \circ F_{\beta^{-1}}$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "F_\beta"'] \arrow[dr, "F_\gamma"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[rr, "F_\gamma \circ F_\beta^{-1}"'] & & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

SISTEMA OMOGENEO: se il termine noto del sistema S è uguale a zero, S si dice omogeneo. Dato un sistema S con matrice di coefficienti A, il sistema lineare S_0 dato da

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

si chiama sistema lineare omogeneo associato ad S

SOLUZIONE: una soluzione di S è un vettore $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ le cui coordinate soddisfano tutte le equazioni di S. Un sistema di equazioni si dice INCOMPATIBILE se non ammette soluzioni, COMPATIBILE DETERMINATO se ammette un' unica soluzione e COMPATIBILE INDETERMINATO se ammette più di una soluzione

POLINOMIO CARATTERISTICO: Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Si chiama POLINOMIO CARATTERISTICO di A il polinomio caratteristico dell'endomorfismo f_A, cioè il polinomio

$$p_A(x) = \det(A - xI_d)$$

Le radici di $p_A(x)$ sono gli autovalori di f_A