Ciao,

Questo file contiene gli appunti delle lezioni di Geometria A (mod 2) tenute da Marco Andreatta nell'anno accademico 2022/2023.

Sono state scritte anche grazie a quelle di Davide Borra, che trovate qui su Drive. Le abbiamo caricate insieme in modo che possiate studiare da quelle che trovate più comode visivamente: a livello di contenuti le variazioni sono minime e praticamente ininfluenti.

Le lezioni dovrebbero rimanere più o meno le stesse anche negli anni successivi, finché sarà Andreatta a tenere il corso. Consiglio comunque di andare a lezione in caso ci siano cose leggermente diverse.

In caso di dubbi / domande mi potete scrivere a matilde.calabri@studenti.unitn.it

In caso ci siano errori più o meno grossi se avete voglia potete segnalarmeli, in modo da rendere questi appunti il più precisi possibile per i prossimi studenti.

Un saluto e buono studio,

Matilde Calabri

FORME BILINEARI

V sp. vett. su K campo

FORMA BILINEARE è una forma $b: V \times V \to K$ t.c. $\forall\, w_1, w_2, v_1, v_2 \in V,\ k \in K$

1. $b(v_1+v_2, w_1) = b(v_1, w_1) + b(v_2, w_1)$
2. $b(kv_1, w_1) = k\, b(v_1, w_1)$
3. $b(v_1, w_1+w_2) = b(v_1, w_1) + b(v_1, w_2)$
4. $b(v_1, kw_1) = k\, b(v_1, w_1)$

] genericamente $b(k v_1, w_1) = b(v_1, k w_1) = k\, b(v_1, w_1)$

- b si dice **SIMMETRICA** se $b(v,w) = b(w,v)$
- b si dice **ANTISIMMETRICA** se $b(v,w) = -b(w,v)$

ES: $b_A(x,y) = {}^t x A y$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$ ${}^t(5\ 7\ 9)$

$(1\ 2\ 3) + (4\ 5\ 6) = (5\ 7\ 9)$

- b_A è una forma bilineare su K^n

$x_1 = (x_1 \dots x_n)$
$x_2 = (m_1 \dots m_n)$

1. $b_A(x_1+x_2, y_1) \overset{?}{=} b_A(x_1, y_1) + b_A(x_2, y_1)$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ {}^t(x_1+x_2) A y_1 & & {}^t x_1 A y_1 + {}^t x_2 A y_1 \\ \| & & \\ {}^t x_1 A y_1 + {}^t x_2 A y_1 & & \end{array}$$

2. $b_A(x_1, y_1+y_2) \overset{?}{=} b_A(x_1, y_1) + b_A(x_1, y_2)$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ {}^t x_1 A (y_1+y_2) & & {}^t x_1 A y_1 + {}^t x_1 A y_2 \\ \| & & \\ {}^t x_1 A y_1 + {}^t x_1 A y_2 & & \end{array}$$

3. $b_A(k x_1, y_1) \overset{?}{=} b_A(x_1, k y_1) \overset{?}{=} k\, b_A(x_1, y_1)$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ {}^t(k x_1) A y_1 & {}^t x_1 A (k y_1) & k\, {}^t x_1 A y_1 \\ \| & \| & \\ k\, {}^t x_1 A y_1 & k\, {}^t x_1 A y_1 & \end{array}$$

- b_A è simmetrica $\iff$ A è simmetrica SIMM. $({}^t A = A)$

$b(y,x) = {}^t y A x = {}^t x\, {}^t A y$

quindi $b(y,x) = b(x,y) \iff {}^t A = A$ $(x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = (y_1 \dots y_n)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$

Analog. $b(x,y) = -b(y,x) \iff {}^t A = -A$ $A x y =$

${}^t x\, {}^t y\, {}^t A = {}^t y\, {}^t x\, A x$

${}^t A x y$ $A y x$

TEOREMA

matrice associata a b in β

$\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V, $A = (a_{ij}) = (b(e_i, e_j))$

Allora se $v = \sum a_i e_i$ $w = \sum b_j e_j$, $b(v,w) = (a_1 \dots a_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$

DIM. $b(v,w) = b(\sum a_i e_i, \sum b_j e_j) = \sum a_i\, b(e_i, \sum b_j e_j) = \sum a_i (\sum b_j\, b(e_i, e_j)) = {}^t x A y$

$b(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = b(x_1 e_1, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) + \dots + b(x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) =$
$= x_1 b(e_1, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) + \dots + x_n b(e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = x_1 [b(e_1, y_1 e_1) + \dots + b(e_1, y_n e_n)] + \dots + x_n [b(e_n, y_1 e_1) + \dots + b(e_n, y_n e_n)]$
$= x_1 [y_1 b(e_1, e_1) + \dots + y_n b(e_1, e_n)] + \dots + x_n [y_1 b(e_n, e_1) + \dots + y_n b(e_n, e_n)] = \sum x_i y_j\, b(e_i, e_j) = {}^t x A y$

OSSERVAZIONE

Fissata una base $\beta=\{e_1,\dots,e_n\}$ di V abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{forme bilineari}\} \longleftrightarrow M_{n\times n}(K) \qquad \{\text{forme simmetriche}\} \longleftrightarrow \overset{\text{matrici simmetriche}}{S_{n\times n}(K)}$$

Sia $\beta=\{e_1,\dots,e_n\}$ base di V, $\beta'=\{f_1,\dots,f_n\}$ base di V, $A=(a_{ij})=b(e_i,e_j)$, $B=(b_{ij})=b(f_i,f_j)$

Se $v=\sum_i x_i e_i=\sum_i x'_i f_i$, $w=\sum y_j e_j=\sum_j y'_j f_j$ si ha $b(v,w)={}^t x A y={}^t x' B y'$

Posto $x=Mx'=M_{\beta\beta'}(I)x'$, $y=My'=M_{\beta\beta'}(I)y'$ si ha $b(v,w)={}^t x A y={}^t(Mx')A(My')$

$={}^t x'({}^tMAM)y'={}^t x' B y' \Rightarrow B={}^tMAM$

DEFINIZIONE: $A,B\in M_{n\times n}(K)$ si dicono CONGRUENTI se $\exists M\in GL_n(K)$ t.c. $B={}^tMAM$

Proposizione: Data $A\in M_{n\times n}(K)$ $\exists B$ diagonale $[b_{ij}=0 \text{ se } i\neq j]$ congruente ad A

Prop. equiv: Data una forma bilineare $V\times V\to K$ $\exists \beta=\{f_1,\dots,f_n\}$ t.c. $b(f_i,f_j)=0$ se $i\neq j$

DEFINIZIONE: $\beta=\{e_1,\dots,e_n\}$ base di V, $\dim V=n<\infty$
se $b(e_i,e_j)=0$ $\forall i\neq j$ la base si dice ortogonale o diagonalizzante

oss. Se la base è ortogonale allora A è diagonale. In generale se $\beta=\{e_1,\dots,e_n\}$ è una base, $A:=b(e_i,e_j)$ è la matrice associata a B nella base β

DEFINIZIONE: Sia $b: V\times V\to K$ forma bilineare simmetrica. La FORMA QUADRATICA associata a b è la funzione $q: V\to K$ definita da $q(v)=b(v,v)$

PROPRIETÀ di q: $\forall \lambda\in K$, $v,w\in V$ ① $q(\lambda v)=\lambda^2 q(v)$ ② $2b(v,w)=q(v+w)-q(v)-q(w)$

DIM.\ ① $q(\lambda v)=b(\lambda v,\lambda v)=\lambda b(v,\lambda v)=\lambda^2 b(v,v)=\lambda^2 q(v)$

② $q(v+w)-q(v)-q(w)=b(v+w,v+w)-b(v,v)-b(w,w)=$
$=b(v,v+w)+b(w,v+w)-b(v,v)-b(w,w)=\cancel{b(v,v)}+b(v,w)+b(w,v)+\cancel{b(w,w)}-\cancel{b(v,v)}-\cancel{b(w,w)}$
$=b(v,w)+b(w,v)=b(v,w)+b(v,w)=2b(v,w)$

OSSERVAZIONE

$\beta=\{e_1,\dots,e_n\}$ $\quad v=\sum x_i e_i \longleftrightarrow \underline{x}$ $\quad b(v,w)={}^t x A y=\sum x_i y_j a_{ij}$

$w=\sum y_i e_i \longleftrightarrow \underline{y}$ $\quad A=(a_{ij})=b(e_i,e_j)$ è simmetrico $=(a_{ji})$

$q(v)=\sum a_{ij}x_i y_j$ in coordinate una forma quadratica è un polinomio omogeneo di secondo grado

DEFINIZIONE: sia $b(v,w)$ f.b.s. . $v\in V$ si dice ISOTROPO se $b(v,v)=(q(v))=0$

DEFINIZIONE: $S\subset V$ sottoinsieme. $S^\perp=\{v\in V \mid b(v,w)=0 \ \forall w\in S\}$ si dice SOTTOSPAZIO ORTOGONALE a S

TEOREMA: V s.v. su K, $b(v,w)$ f.b.s.. Allora esiste una base ortogonale (diagonalizzante)

DIM.\ Se $b(v,w)\equiv 0$ il teorema vale. $\Rightarrow$ Possiamo supporre che $\exists v,w\in V \mid b(v,w)\neq 0$

$\Rightarrow$ o v, o w, o $v+w$ non sono isotropi $\Rightarrow \exists e_1\in V \mid b(e_1,e_1)\neq 0 \overset{\text{LEMMA}}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} V=\langle e_1\rangle\oplus e_1^\perp$, $\dim(e_1^\perp)=n-1$

Per ipotesi induttiva $\exists$ base $\{e_2,\dots,e_n\}$ base ortogonale di $e_1^\perp$. Allora $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ è una base di V.
$(e_2,\dots,e_n)$ lin. indip, $e_1\notin\langle e_2,\dots,e_n\rangle$
Inoltre $b(e_1,e_j)=0$ $\forall j=2,\dots,n$ perché $e_j\in e_1^\perp$. Infine $b(e_i,e_j)=b'(e_i,e_j)=0$ $\forall i\neq j$, $2\le i,j\le n$ perché $\{e_2,\dots,e_n\}$ è una base di $e_1^\perp$ diagonalizzante per b'. Quindi e è una base diagonalizzante per b

LEMMA: V s.v. su K, $b(v,w)$ f.b.s., $v\in V$ non isotropo $\Rightarrow V=\langle v\rangle\oplus v^\perp$

DIM.\ Sia $w\in V$, considero $w-\underbrace{\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v}_{\text{proiezione ortogonale di } w \text{ su } v}\in v^\perp$. Infatti $b\left(w-\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v, v\right)=b(w,v)-b(w,v)=0$

$\Rightarrow w=\underbrace{\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v}_{\in\langle v\rangle}+\underbrace{\left(w-\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v\right)}_{\in v^\perp} \Rightarrow V=\langle v\rangle+v^\perp$ ma $\langle v\rangle\cap v^\perp=\{0\}$ ✓

TEOREMA: Sia K un campo algebricamente chiuso e V s.v. su K, $b(v,w)$ forma b.s. su V
$\Rightarrow \exists$ base $\beta = \{f_1, \dots, f_n\}$ t.c.

$$\begin{cases} b(f_i, f_j) = 0 & i \neq j \\ b(f_i, f_i) = 1 & i = 1, 2, \dots, r \\ b(f_i, f_j) = 0 & i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

[equiv. la forma quadratica in questa base è data da $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ $0 \leq r \leq n$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

DIM.\ Per il teorema precedente $\exists$ base ortogonale $\beta = \{e_1, \dots, e_n\} \mid b(e_i, e_j) = 0$ $i \neq j$

Possiamo supporre che $b(e_i, e_j) \neq 0$ $i = 1, \dots, r$
$b(e_i, e_i) = 0$ $i > r$

Sia $f_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{b(e_i, e_i)}}$ per $i = 1, \dots, r$, $f_i = e_i$ per $i > r$ $\Rightarrow \{f_1, \dots, f_n\}$ è la base cercata

PAG. 226

TEOREMA 2 (SYLVESTER): Sia $K = \mathbb{R}$, V s.v. su K, $b(v,w)$ forma b.s. su V
$\Rightarrow \exists$ base $\beta = \{f_1, \dots, f_n\}$ t.c.

$$\begin{cases} b(f_i, f_j) = 0 & i \neq j \\ b(f_i, f_i) = 1 & i = 1, \dots, t \\ b(f_i, f_i) = -1 & i = t+1, \dots, s \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

DIM.\ Analoga. Sia $f_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{|b(e_i, e_i)|}}$ per $i = 1, \dots, s$, $f_i = e_i$ per $i > r$.
$\{f_1, \dots, f_n\}$ è la base cercata

TEOREMA: Data una forma bilineare s. $b(v,w)$ su V e sia $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base diagonalizzante. Il numero di vettori $e_i \mid b(e_i, e_i) = 0$ non dipende dalla base diagonalizzante.
Se questo numero è r allora $(n-r)$ si chiama il RANGO di b ed è uguale al rango di una qualunque matrice associata

DIM.\ Siano β, β' due basi, $M = M_{\beta\beta'}(I)$, A matrice associata a b in β, B mat. ass. a b in β'

$B = {}^tMAM \Rightarrow rk\, A = rk\, B$

(Nota: $A \in M_{n \times m}(K)$
rango di $A = rk\, A =$ numero di colonne lin. indip. $=$ numero di righe lin. indip. $=$ massimo ordine di un minore non nullo)

PROPOSIZIONE: Sia $A \in M_{n \times m}(K)$, $M \in GL(n,K)$, $N \in GL(n,K)$, $\det M \neq 0$
$\Rightarrow rk\, A = rk(M \cdot A) = rk(A \cdot N)$

?

TEOREMA SYLVESTER: Sia V s.v. su $\mathbb{R}$, $b(v,w)$ f. bilin. simm. di rango r,
$\exists$ base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ t.c.

$b(e_i, e_j) = 0$ $i \neq j$ $\qquad$ $b(e_i, e_i) = 1$ $i = 1, \dots, t$
$b(e_i, e_i) \neq 0$ $i = 1, \dots, r$ $\qquad$ $b(e_i, e_i) = -1$ $i = t+1, \dots, r$
$b(e_i, e_i) = 0$ $i > r$

Sia $\beta' = \{f_1, \dots, f_n\}$ un'altra base diagonalizzante
supponiamo $b(f_i, f_i) = 1$ $i = 1, \dots, s$
$= -1$ $i = s+1, \dots, r$
$= 0$ $i > r$

il rango non dipende dalla scelta della base diagonalizzante

Supponiamo per assurdo che $t \neq s$ ad es. $t > s$
Prendiamo $U = \langle e_1, \dots, e_t \rangle$, $W = \langle f_{s+1}, \dots, f_n \rangle \Rightarrow \dim U = t$, $\dim W = n - s$
$\dim U + \dim W = n - s + t > n \Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$
$\dim(U+W)$ G.

$v \in W \cap U$, $v \neq 0$, $\quad v = \sum_{i=1}^{t} a_i e_i = \sum_{j=s+1}^{n} b_j f_j$

$b(v,v) = \sum_{i=1}^{t} a_i^2 > 0$
$- \sum_{i}^{n} - b_i^2 < 0$ $\quad \rightarrow\leftarrow \quad \Rightarrow t = s$

Def. K campo, $b(v,w)$ f. bilin. simm., $r = rk(b(v,w)) = rk\,A$
Se $r = n$ la forma bilineare è NON DEGENERE
Se $K = \mathbb{R}$ il numero di elementi di una base diag. per cui $b(e_i, e_i) = 1$ si chiama l'INDICE DI POSITIVITÀ t
$\#\{e_i\}$ $b(e_i, e_i) = -1$ INDICE DI NEGATIVITÀ

$K = \mathbb{R}$, la segnatura di $b(v,w)$ su V ($\dim V = n$) è data da:
- rango r - positività p - negatività m ed è $(p, r-p) = (p, m)$

Def. Una forma quadratica q sullo s.v. $\mathbb{R}$ si dice
- DEFINITA POSITIVA se $q(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
- DEFINITA NEGATIVA se $q(v) < 0 \quad \forall v \neq 0$
- SEMIDEF. POSITIVA se $q(v) \geq 0 \quad \forall v \neq 0$
- SEMIDEF. NEGATIVA se $q(v) \leq 0 \quad \forall v \neq 0$

Proposizione: V s.v. su K, $V^\vee$ s.v. duale, $V^\vee = \{f: V \to K \text{ lin.}\}$
Sia $b(v,w)$ f. bilin. simm. non degenere su V, $B: V \to V^\vee$, $v \mapsto b(v, \cdot)$ $\qquad b(v,w): V \to K$ lineare $\in V^\vee$
$\Rightarrow B$ è un isomorfismo lineare

$b(v,w) = \langle v,w \rangle = v \cdot w$

Def. V s.v. su $\mathbb{R}$, $b: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simm., def. positiva si dice PRODOTTO SCALARE

Se $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare esiste una base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ t.c. $v = \sum a_i e_i$ $w = \sum b_j e_j$ $\langle v,w \rangle = \sum a_i b_i$
ovvero $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ BASE ORTONORMALE (ortogonale + normalizzata)

Proposizione: Sia $\langle , \rangle$ prodotto scalare su $V/\mathbb{R}$.
Allora $\forall v, w \in V$ $\langle v,w \rangle^2 \leq \langle v,v \rangle \cdot \langle w,w \rangle$ (è $=$ sse $v = \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{R}$) Disuguag. di Schwarz

Def. $V, \langle , \rangle$ si chiama SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO
Def. $V, \langle , \rangle$. Se $v \in V$ si definisce la NORMA di v come $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Proprietà: 1) $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \iff v = 0$ 2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ 3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dis. triangolare

Oss: Siano $v, w \in V$, $\langle , \rangle$ definiamo l'angolo convesso (non orientato) tra v e w come
$$\cos\theta = \frac{\langle v,w \rangle}{\sqrt{\langle v,v \rangle}\sqrt{\langle w,w \rangle}} = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\|\,\|w\|} \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Oss. $\left| \frac{\langle v,w \rangle}{\sqrt{\langle v,v \rangle}\sqrt{\langle w,w \rangle}} \right| \leq 1$

Oss. $\langle v,w \rangle = 0$ (sono ortogonali) $\iff \theta = \widehat{vw} = \frac{\pi}{2}$

TEOREMA DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT:

Sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ una successione di vettori in $V, \langle , \rangle$ (sp. euclideo)
Esiste in corrispondenza una successione di vettori $w_1, w_2, \dots, w_n$ t.c. $\forall k \geq 1$
1) $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$
2) $\{w_1, \dots, w_k\}$ sono tra loro ortogonali
(la successione $w_1, \dots, w_n$ è unica a meno di multipli)

DIM. Per induzione su k. Se $k = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo che il teorema sia vero per $(k-1)$ ovvero $\exists\, w_1, \dots, w_{k-1}$ che soddisfano 1) e 2)

Definisco $w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$, dove la somma è sugli $i \mid w_i \neq 0$. Chiameremo $\frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$ la proiezione di v_k su w_i

$j < k$ $\quad \langle w_k, w_j \rangle = \langle v_k - \sum \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i, w_j \rangle = \langle v_k, w_j \rangle - \langle v_k, w_j \rangle = 0$
dimostra con l'HP induttiva che vale 2)
Per quanto riguarda 1) osservo che $w_k \in \langle v_k, w_1, \dots, w_{k-1} \rangle = \langle v_k, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \Rightarrow \langle w_1, \dots, w_k \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_k \rangle$
ma anche $v_k \in \langle w_1, \dots, w_k \rangle \Rightarrow \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \langle w_1, \dots, w_k \rangle$

Def. V, $\langle\,,\rangle$ sp.v. euclideo. $\{v_1,\dots,v_n\}\in V$ si dice **ORTOGONALE** se (ORTONORMALE)
$v_i\neq 0\ \forall i$, $\langle v_i,v_j\rangle=0\ \forall i\neq j$
$(\langle v_i,v_i\rangle=1)$

Prop.: $\{v_1,\dots,v_r\}\in V$ ortogonale. Allora sono linearmente indipendenti

DIM. $\sum_{i=1}^{r} a_i v_i=0$ $\quad 0=\langle\sum_{i=1}^{r} a_i v_i, v_j\rangle \overset{ORT.}{=} a_j\langle v_j,\overset{>0}{v_j}\rangle \Rightarrow a_j=0$

Def. V s.v. su $\mathbb{R}$, $\langle\,,\rangle$, $\dim V=3$, $\{e_1,e_2,e_3\}$ base ortonormale. Sia $v=(x_1,x_2,x_3)$, $w=(y_1,y_2,y_3)$

Definiamo $v\wedge w\in\mathbb{R}^3$ come $v\wedge w=(x_2y_3-x_3y_2,\ x_1y_3-x_3y_1,\ x_1y_2-y_1x_2)$
$v\wedge w$ (v ESTERNO w) è un vettore in $\mathbb{R}^3$ che soddisfa queste proprietà

1. $v\wedge w\neq 0 \iff v\neq\lambda w$
2. $\langle v\wedge w, v\rangle=\langle v\wedge w, w\rangle=0$
3. $v\wedge w=-w\wedge v$
4. $\|v\wedge w\|^2=\|v\|^2\|w\|^2-\langle v,w\rangle^2$

DIM. 1. "$\Rightarrow$" $\quad A\Rightarrow B \iff \neg B\Rightarrow\neg A$ $\quad v=\lambda w$ $\quad v=(\lambda y_1,\lambda y_2,\lambda y_3)$ $\quad w=(y_1,y_2,y_3)$

$\Rightarrow v\wedge w=(\lambda y_2y_3-y_3\lambda y_2,\ \lambda y_1y_3-y_3\lambda y_1,\ \lambda y_1y_2-y_1\lambda y_2)=0$

2) $$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(-x_1y_3+x_3y_1)+x_3(x_1y_2-x_2y_1)=\langle v, v\wedge w\rangle$$

Prop. Sia V, $\langle\,,\rangle$ sp.v. euclideo e sia $W<V$ sottosp. vett.. Allora $V=W\oplus W^\perp$

DIM. Sia $\{e_1,\dots,e_r\}$ una base ortonormale di W. Sia $v\in V$, $w=\sum_{i=1}^{r}\langle v_i,e_i\rangle e_i\in W$ (proiezione di v su W)
$w^\perp:=v-w\in W^\perp \Rightarrow v=w+w^\perp$ $\quad w\in W,\ w^\perp\in W^\perp$
La somma è diretta perché $W\cap W^\perp=\{0\}$. Vale inoltre $\|v\|^2=\|w\|^2+\|w^\perp\|^2$ (Identità di Pitagora)

Def. Uno **SPAZIO AFFINE** $\mathbb{A}^n$ su V (s.v. su K) è un insieme $\mathbb{A}$ con una funzione
$$\mathbb{A}\times\mathbb{A}\to V \qquad \begin{cases} 1)\ \forall P\in\mathbb{A},\ v\in V.\ \exists!\ Q\in\mathbb{A} \text{ con } \overline{PQ}=v\\ 2)\ \forall P,Q,R\in\mathbb{A}\quad \overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR}\end{cases}$$
$P,\ Q\mapsto\overline{PQ}$ $\quad$ t.c.

Prop. Uno s.v. V ha una struttura di spazio affine su se stesso. Basta definire la funzione
$$V\times V\to V$$
$$(v,w)\mapsto\overline{vw}:=w-v$$

Def. Un **SISTEMA DI RIFERIMENTO AFFINE** su $\mathbb{A}$ è dato da $O\in\mathbb{A}$ e una base per V $\beta=\{e_1,\dots,e_n\}$
Nota: dato un sist. di rif. e preso $P\in\mathbb{A}$ consideriamo $\overline{OP}=v=\sum_i x_ie_i$
$P\in\mathbb{A}\longleftrightarrow(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ $\quad$ [$x_1\dots x_n$ si chiamano le COORDINATE di P nel sist. di rif. $(O;e_1\dots e_n)$]

Def. Un **SOTTOSPAZIO AFFINE** di $\mathbb{A}^n$ è dato da un punto $P\in\mathbb{A}^n$ e un sottospazio vettoriale $W\leq V$. $S=\{Q\in\mathbb{A}^n\mid\overline{PQ}\in W\}$ è il sottospazio affine passante per P con giacitura W

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE PIANI IN $\mathbb{A}^3$
H_1, H_2 $\qquad H_1\cap H_2=\begin{cases}k_1x+k_2y+k_3z+d=0\\ k_4x+k_5y+k_6z+d_2=0\end{cases}$ — il sistema è compatibile $\to$ retta; il sistema è incompatibile $\to H_1\cap H_2=\emptyset$
$k_1x+k_2y+k_3z+d=0$
$k_4x+k_5y+k_6z+d_2=0$

POSIZIONE RECIPROCA DI UN PIANO E UNA RETTA IN $\mathbb{A}^3$
$H=k_1x+k_2y+k_3z+d=0$ $\quad r=\begin{cases}k_4x+k_5y+k_6z+d_2=0\\ k_7x+k_8y+k_9z+d_3=0\end{cases}$ $\quad H\cap r=\begin{cases}\sim\\ \sim\\ \sim\end{cases}$ — il sist è compatibile $\to$ punto; il sist è incompatibile $\to H\cap r=\emptyset$

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE IN $\mathbb{A}^3$
$r=\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_3z+d_2=0\end{cases}$ $\qquad s=\begin{cases}a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0\end{cases}$

Def. Se $r\cap s\neq\emptyset$ e se $r\parallel s$ allora r e s si dicono **COMPLANARI**
Se r e s non sono complanari allora si dicono **SGHEMBE**

Proposizione: r e s sono complanari $\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{vmatrix} = 0$

DIM. "$\Rightarrow$"
Se si intersecano significa che $rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Capelli}]{\text{Rouché}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{vmatrix}$

se $r // s$ $\quad rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = 2 \longrightarrow$ hanno stessa giacitura, stessa direzione quindi i due sistemi omogenei sono equivalenti

$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix} \leq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{vmatrix} = 0$

"$\Leftarrow$"
$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ o $rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow r \cap s \neq \emptyset$
o $rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r // s$

Def. Chiameremo SPAZIO EUCLIDEO uno spazio affine $\mathbb{A}^n$ su V (s.v. su $\mathbb{R}$) con un prodotto scalare (Notaz. $\mathbb{E}^n$)

→ Sistema di riferimento cartesiano euclideo $(O; \{e_1, \dots, e_n\})$ con e_i ortonormali $(\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij})$

In uno spazio euclideo possiamo definire la DISTANZA tra due punti $P, Q \in \mathbb{E}^n$
$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}$

(Se $P = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (y_1, \dots, y_n)$ $\Rightarrow d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

In uno spazio euclideo due sottospazi sono ortogonali quando "le loro giaciture sono ortogonali"

SFERA

Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ si può definire la sfera $n-1$ dimensionale di centro P e raggio r come il luogo geometrico dei punti che distano r da P. Fissato un sistema di riferimento cartesiano si ha $P = (p_1, \dots, p_n)$ e l'equazione della sfera è

$S^{n-1} = \{X \in \mathbb{E}^n \mid d(X,P) = r\} = \{(x_1 \dots x_n) \mid (x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2 = r^2\}$ dove $c = (\sum_i p_i^2) - r^2$
$= \{(x_1 \dots x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2p_1x_1 - \dots - 2p_nx_n + c = 0\}$

VOLUMI

Sia $\mathbb{E}^n$ uno sp. euclideo, $(O, \{e_1, \dots, e_n\})$ sist. di rif. cart.. Prendiamo un insieme di $n+1$ punti $Q_0, \dots, Q_n$ dove $Q_i = (q_1^i, \dots, q_n^i)$. Allora il volume dell'$n$-parallelepipedo determinato da $\overrightarrow{Q_0Q_1}, \dots, \overrightarrow{Q_0Q_n}$ è dato dal valore assoluto del determinante della matrice

$V = \left\| \begin{matrix} q_1^1 - q_1^0 & \dots & q_n^1 - q_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ q_1^n - q_1^0 & \dots & q_n^n - q_n^0 \end{matrix} \right\|$ se scegliamo delle basi ortonormali il determinante della matrice non dipende dalla scelta della base

LEMMA: Sia V s.v. euclideo su $\mathbb{R}$ con $\langle , \rangle$, $\dim V < \infty$. Siano $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\gamma = \{u_1, \dots, u_n\}$ due basi ortonormali. Allora $M := M_{\beta\gamma}(I)$ è ortogonale, ovvero ${}^tM = M^{-1}$

DIM. Osserviamo che M ha come colonne i vettori di γ rispetto a β, mentre ${}^tM$ ha come righe gli stessi vettori. Per definizione di prodotto tra matrici si ha che ${}^tMM = (\langle u_i, u_j \rangle)_{ij} = (\delta_{ij})_{ij} = I$, in quanto le matrici sono ortogonali

Da questo segue inoltre che $\det M = \pm 1$, infatti per la formula di Cauchy-Binet e per costruzione del determinante si ha $1 = \det I = \det({}^tMM) = (\det M)^2 \Rightarrow \det M = \pm 1$

Di conseguenza esiste una matrice $N = (\det M)M \in SO(n)$

POLIEDRI

wiat! che bella scrittura!

Def. Si dice SEMISPAZIO un $T \subset \mathbb{E}^n$ tale che $T = \{(x_1 \dots x_n) \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \leq 0\}$

Def. Un POLIEDRO CONVESSO Π è un sottoinsieme di $\mathbb{E}^n$ tale che
i) è limitato, ovvero $\exists r > 0, \exists P \in \mathbb{E}^n \mid \Pi \subset B_r(P)$
ii) non è contenuto in un iperpiano
iii) è intersezione di un numero finito di iperspazi

FORMULA DI EULERO

TEOREMA: Si consideri un solido $\Pi \subset \mathbb{E}^3$, e siano v il numero dei suoi vertici, f il numero delle sue facce e s il numero dei suoi spigoli. Allora è verificata l'identità $f + v - s = 2$

DIM. Supponiamo che il solido possa essere costruito interamente partendo da una faccia e aggiungendone altre lungo spigoli consecutivi. Consideriamo ora la quantità $\varphi = f + v - s - 1$ e dimostriamo che ogni volta che viene aggiunta una faccia essa rimanga costante. Al primo passo viene aggiunta una faccia con k_1 lati e k_1 spigoli. Otteniamo quindi $\varphi = 1 + k_1 - k_1 - 1 = 0$. Al passaggio i-esimo aggiungiamo una faccia con k_i spigoli e $k_i - 1$ vertici, infatti siccome gli spigoli devono essere adiacenti, i vertici già presenti sono 1 in più degli spigoli. Di conseguenza

$$\varphi = i + \sum k_j - \sum (k_j - 1) = i + \sum k_j - \sum k_j - i = 0$$

Quando aggiungiamo l'ultima faccia e chiudiamo il solido, i vertici e gli spigoli sono già tutti presenti, per cui otteniamo $\varphi_{fin} = 1$, da chiusa $\Rightarrow f + v - s = 2$

SOLIDI PLATONICI

TEOREMA: Ci sono solo 5 solidi platonici in $\mathbb{E}^3$, ovvero solidi con tutte le facce poligoni regolari e congruenti

DIM. Supponiamo che le facce siano triangoli equilateri. Allora in un vertice possiamo metterne tra 3 e 5. Analogam. con i quadrati e i pentagoni possiamo metterne solo 3. Di conseguenza i solidi possono essere soltanto 5.

PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI SIMMETRICI

Def. Sia V un s.v. euclideo su $\mathbb{R}$ con $\langle , \rangle$, e $T \in End(V)$. La mappa T si dice
- SIMMETRICA se $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$
- UNITARIA se $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$

Osservazione: Sia $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale e $M = M_\beta(T)$. Allora
i) T è simmetrica $\Leftrightarrow M$ è simmetrica
ii) T è unitaria $\Leftrightarrow M$ è ortogonale ($^tM = M^{-1}$)

$(T(e_1) \dots T(e_n))$

DIM. i) "$\Rightarrow$" Sia $M = (a_{ij})_{ij}$. Si ha che $\forall i$ $T(e_i) = \sum a_{ji} e_j$. Segue quindi che
$a_{ij} = \langle T(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, T(e_j) \rangle = a_{ji}$

$\rightsquigarrow$ i-esima colonna

"$\Leftarrow$" $\langle T(v), w \rangle = {}^t(Mv)w = {}^tv(Mw) = \langle v, T(w) \rangle$
M simm. $({}^tM = M)$

ii) "$\Rightarrow$" Supp. che $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, allora $\langle T(v), T(w) \rangle = {}^t(Mv)(Mw) = {}^tv\,{}^tMMw$, $\langle v, w \rangle = {}^tvw$
quindi ${}^tv\,{}^tMMw = {}^tvw \Rightarrow {}^tMM = I$, ovvero M è ortogonale
"$\Leftarrow$" Supponiamo M ortogonale, allora
$\langle T(v), T(w) \rangle = {}^t(Mv)(Mw) = {}^tv\,{}^tMMw = {}^tvw = \langle v, w \rangle$

LEMMA: Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore

DIM. Pensiamo $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore per A, ovvero $\exists \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x, x \neq 0$
Passando al coniugato $\overline{Ax} = \overline{\lambda x} = A\overline{x} = \overline{\lambda}\,\overline{x}$

$$\left.\begin{array}{l} {}^t\overline{x}Ax = {}^t\overline{x}(Ax) = {}^t\overline{x}\lambda x = \lambda\,{}^t\overline{x}x \\ \quad \| \\ {}^t\overline{x}Ax = ({}^t\overline{x}A)x = {}^t(A\overline{x})x = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{x}x \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \text{è reale} \quad (\overline{x} \cdot x \neq 0, x \neq 0)$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA:
$p(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio. Allora $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $p(\alpha) = 0$

TEOREMA SPETTRALE: Sia V s.v. euclideo $\langle,\rangle/\mathbb{R}$, $T: V \to V$ lineare e simmetrica
$\Rightarrow \exists$ una base di AUTOVETTORI ORTONORMALI $\{e_1, \dots, e_n\}$

DIM.\ Per induzione su n
- $n=1$, teorema ovvio
- supponiamo vero per $n-1$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di T con autovettore e_1 (supp. di norma 1).

Consideriamo $W = e_1^\perp$, $\dim W = n-1$, $V = e_1 \oplus e_1^\perp$
Consideriamo $T_{|W}: W \to W$ perché $w \in W$ $\langle T(w), e_1\rangle = \langle w, \overset{f(v)=\lambda v}{T(e_1)}\rangle = \langle w, \lambda e_1\rangle = \lambda\langle w, e_1\rangle = 0$
(ovvero se $w \in W \Rightarrow T(w) \in W$)

Applichiamo l'ipotesi induttiva: $\exists \{e_2, \dots, e_n\} \in W \subset V$ base di vettori ortonormali per $T_{|W}$
$\Rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è la base cercata

Proposizione: V s.v. euclideo $\langle,\rangle/\mathbb{R}$, sia $T: V \to V$ funzione. Le seguenti affermazioni sono equiv.
1. T è lineare unitaria
2. T è lineare e $\|T(v)\| = \|v\|$ $\forall v \in V$
3. $T(0) = 0$ e $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$ $\forall v, w \in V$

DIM.\ $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sono ovvie. Dimostriamo $3 \Rightarrow 1$

Osserviamo che $\forall v \in V$ $\|T(v)\| = \|T(v) - 0\| = \|T(v) - T(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$ $\quad \|T(v)\|^2 = \|v\|^2$, $\|T(w)\|^2 = \|w\|^2$
Esplicitando $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$ otteniamo $\|T(v)\|^2 - 2\langle T(v), T(w)\rangle + \|T(w)\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
$\Rightarrow \langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ $\forall v, w \in V$ ∎

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale per $(V, \langle,\rangle)$. Per $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ base ortonormale.
Sia $v \in V$, $v = \sum \langle v, e_i\rangle e_i = \sum x_i e_i$ $\quad x_i = \langle v, e_i\rangle$
$\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$
Calcoliamo $T(v) = \sum \langle T(v), T(e_i)\rangle T(e_i) = \sum \langle v, e_i\rangle T(e_i) = \sum x_i T(e_i)$ $\Big\} \Rightarrow T$ è lineare

se $v = \sum x_i e_i$, $w = \sum y_i e_i$ $\Rightarrow v + w = \sum (x_i + y_i) e_i$, $T(v+w) = \sum (x_i + y_i) T(e_i) = \sum x_i T(e_i) + \sum y_i T(e_i) = T(v) + T(w)$

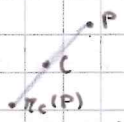
AFFINITÀ

Def. $\mathbb{A}^n$ sp. affine su V/K. $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ si dice un'AFFINITÀ con isomorfismo lineare associato $\varphi: V \to V$ se: 1) $\forall P, Q \in \mathbb{A}^n$ $\overline{f(P)f(Q)} = \varphi(\overline{PQ})$ 2) f è biettiva

Es: Sia $(O; \{e_1, \dots, e_n\})$ un sist. di rif. affine su $\mathbb{A}^n$, $P \in \mathbb{A}^n \longleftrightarrow (p_1, \dots, p_n) \in K^n$
Se $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ è un'affinità con φ associata, allora $f(P)$ ha coordinate $f(p_1 \dots p_n) = A\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Definiamo la **TRASLAZIONE** di un vettore $v \in V$ la mappa $t_v: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ che associa a $P \in \mathbb{A}^n$ il punto $t_v(P)$ tale che $\overline{Pt_v(P)} = v$

Esercizio: t_v è affine con isomorfismo associato I
Soluzione: $\overline{t_v(P)t_v(Q)} = \overline{t_v(P)P} + \overline{Pt_v(Q)} = \overline{t_v(P)P} + \overline{PQ} + \overline{Qt_v(Q)} = -v + \overline{PQ} + v = \overline{PQ}$



Def.: Sia $C \in \mathbb{A}^n$. Definiamo la trasformazione **RIFLESSIONE** rispetto a C la mappa r_C t.c.
$\overline{Cr_C(P)} = -\overline{CP}$ $\quad r_C(P)$ è un'affinità con isomorfismo lineare associato $= -1$

Def. In $\mathbb{E}^n/\mathbb{R}$ possiamo definire la **RIFLESSIONE** rispetto a un iperpiano H come la mappa $r_H(P)$ t.c.
$\overline{Nr_H(P)} = -\overline{NP}$ dove N è l'intersezione della retta ortogonale ad H passante per P
$r_H(P)$ è un'affinità

Oss: Un'affinità $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ è completamente determinata dall'immagine di un punto fissato e da φ
Infatti sia O fissato e $O' = f(O)$. Allora $f(P)$ è dato da $\overline{f(P)O'} = \overline{f(P)f(O)} = \varphi(\overline{PO})$

Prop: $(O; \overset{\to \beta}{\{e_1, \dots, e_n\}})$ sist. di rif. affine, $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ affinità con $\varphi: V \to V$ associata.
Se $P = (x_1 \dots x_n)$ allora $f(x_1 \dots x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ $\quad$ dove $A = M_\beta(\varphi)$ e $C = f(O)$ $\quad C = (c_1 \dots c_n)$

DIM.\ $\overline{f(O)f(P)} = \varphi(\overline{OP}) \Rightarrow \overset{f(P)}{f(x_1 \dots x_n)} - \overset{f(O)}{(c_1 \dots c_n)} = A\overset{\varphi(\overline{OP})}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Def. $\mathbb{E}^n$ sp. euclideo (affine su $V, \langle , \rangle / \mathbb{R}$). Se $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ è un'affinità con isomorfismo associato unitario si dice **ISOMETRIA**.

TEOREMA: Sia $\mathbb{E}^n$ uno sp. euclideo, $d(P,Q) = \|\overline{PQ}\|$ $\forall P,Q \in \mathbb{E}^n$, $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ funzione
Allora $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q) \iff f$ è una ISOMETRIA $\forall P,Q \in \mathbb{E}^n$

DIM. "$\Leftarrow$" Se f è isometria con trasf. associata $\varphi: V \to V$ unitaria
$d(f(P), f(Q)) = \|\overline{f(P)f(Q)}\| = \|\varphi(\overline{PQ})\| = \|\overline{PQ}\| = d(P,Q)$

"$\Rightarrow$" Sia $O \in \mathbb{E}^n$. Definiamo $\varphi: V \to V$ nel modo seguente
$\forall v \in V$ sia $!P \in \mathbb{E}^n$ t.c. $\overline{OP} = v$. Definiamo $\varphi(v) = \varphi(\overline{OP}) := \overline{f(O)f(P)}$

1. È una buona definizione ($\varphi(v)$ è unico)
2. • $\varphi(0) = 0$ $\quad \overline{OP} = v, \overline{OQ} = w$
•• $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| = \|\varphi(\overline{OP}) - \varphi(\overline{OQ})\| = \|\overline{f(O)f(P)} - \overline{f(O)f(Q)}\| \overset{\text{Def.}}{=} \|\overline{f(Q)f(P)}\| \overset{\text{HP.}}{=} \|\overline{QP}\| = v - w$
• e •• per la prop. 3 prec. $\Rightarrow \varphi$ è lineare e unitario

Proposizione: $T: V \to V$ unitaria, $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale, $M_\beta(T) = A$, A è ortogonale e unitaria $({}^tA = A^{-1})$. $\Rightarrow \det A = \pm 1$. Inoltre se $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $T \Rightarrow \lambda = \pm 1$

DIM. $\|v\| = \|T(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Def. $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ isometria si dice **DIRETTA (/INDIRETTA)** se il determinante della trasformazione lineare associata è 1 (/è −1)

Es: $n=2 \to \mathbb{R}^2$ con rif. $(O; \{e_1, e_2\})$ $\quad f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ $\qquad {}^tA = A^{-1} \Rightarrow A \cdot {}^tA = I$

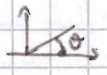
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

Se $a = \sin\varphi$, $b = \cos\varphi$, $c = \sin\theta$, $d = \cos\theta$ $\to 0 = \underset{a}{\sin\varphi}\,\underset{c}{\sin\theta} + \underset{b}{\cos\varphi}\,\underset{d}{\cos\theta} = \cos(\theta - \varphi)$

Due casi. 1. $\theta - \varphi = \frac{\pi}{2} \to \theta - \frac{\pi}{2} = \varphi$ $\qquad \begin{cases} a = \sin\varphi = \cos\theta \\ b = \cos\varphi = -\sin\theta \end{cases}$

$\to A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1$

A è la rotazione di un angolo θ

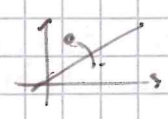


ho invertito (viene comunque)

2. $\theta - \varphi = \frac{3}{2}\pi \to \theta - \frac{3}{2}\pi = \varphi$ $\qquad a = \sin\varphi = -\cos\theta$, $b = \cos\varphi = \sin\theta$

$\to A = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -1$

A è la riflessione rispetto ad una retta per l'origine con angolo $\frac{\theta}{2}$



Prop.: Una trasformazione rigida di $\mathbb{R}^2$ (una isometria) è data da una rotazione o una riflessione rispetto ad una retta e una traslazione

LEMMA: Sia $A \in SO(3)$. Allora A ha un autovalore $= 1$ con autospazio di dim. 1

D.) A ha un autovalore reale (polinomio caratteristico di grado 3), quindi $\lambda = \pm 1$. Poiché $\det A = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ e l'autospazio ha dim. 1 (es.)

TEOREMA DI CHASLES:

Una isometria di $\mathbb{E}^2$ che fissa un punto è una rotazione o una riflessione (a seconda se è diretta o meno)

Proposizione: Sia $\mathbb{A}^n$ sp. affine, S sottosp. affine passante per $P \in S$ e con giacitura W. Sia $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ un affinità (con $\varphi: V \to V$ associato). Allora $f(S)$ è un sottosp. affine con la stessa dimensione di S

DIM.: $S = \{Q \in \mathbb{A}^n \mid \overline{PQ} \in W\} \Rightarrow f(S) = \{R \in \mathbb{A}^n \mid \overline{f(P)R} \in \varphi(W)\}$

SPAZI PROIETTIVI

Def. Sia V s.v. su K, $\dim V = n+1$. Siano $v, w \in V$, diremo $v \sim w \iff \exists \lambda \in K \mid v = \lambda w, \lambda \neq 0$

Lo SPAZIO PROIETTIVO associato a V è l'insieme $\mathbb{P}(V) = \{[v] \mid v \in V, v \neq 0\}$
$[v] = \{w \in V \mid w \sim v\} \in V/\sim$ (sp. quoziente); $\dim \mathbb{P}(V) := n$ (se $V = \{0\}$, $\mathbb{P}(V) = \emptyset$, $\dim \mathbb{P}(\{0\}) = -1$)

$\mathbb{P}^n_K = \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \mid x_i \in K, (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)\}$

Def. Un SISTEMA DI RIFERIMENTO PROIETTIVO è una base per V $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$

Dato $[v] \in \mathbb{P}(V)$ le sue coordinate nel sist. di rif. proiettivo sono $[v] = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ dove (a meno di multipli) $v = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

OSS. Fissato un sist. di rif. proiettivo V è l'insieme $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n_K$

Def. Dato uno sp. proiettivo $\mathbb{P}(V)$, un SOTTOSPAZIO PROIETTIVO è dato da $\mathbb{P}(W)$, dove $W \lhd V$ sottosp. vettoriale. $\mathbb{P}(W) = \{[w] \mid w \in W, w \neq 0\}$, $\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1$

Nota: W può essere descritto come i vettori di V le cui coordinate sono soluzioni di un sistema omogeneo

$$W = \left\{[x_0, \dots, x_n] = rk \begin{vmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ w_0^0 & \dots & w_n^0 \\ w_r^0 & \dots & w_r^n \end{vmatrix} = \overset{\dim W}{\overset{\shortparallel}{r}} + 1\right\}$$

Dato $\mathbb{P}(V)$ sp. proiettivo, $\mathbb{P}(W)$ sottosp. proiettivo ($W \lhd V$) e fissato un sist. di rif. proiettivo $\{e_0, \dots, e_n\}$, le EQUAZIONI CARTESIANE di $\mathbb{P}(W)$ sono date dal sistema omogeneo che definisce W nella base $\{e_0, \dots, e_n\}$

RECAP 2 SPAZI PROIETTIVI

V sp.v., $\dim V = n+1$, $\mathbb{P}(V) = \{[v] \mid v \in V, v \neq 0\}$ sp. proiettivo di dim. n su V
Se $W \lhd V$ sottosp.v., $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ sottosp. proiettivo di dim $= (\dim W - 1)$
Se $\{e_0, \dots, e_n\}$ base per V, in questa "categoria" viene chiamato un sist. di rif. proiettivo

$P = [v] \in \mathbb{P}(V) \longleftrightarrow [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n_K$, $v = \sum x_i e_i$

Se $W \lhd V$, $W = \langle w_0, \dots, w_m \rangle$, $w_i = \sum w_j^i e_j$
$P = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(W) \iff$ soddisfa il sistema omogeneo $rk \begin{vmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ w_0^0 & \dots & w_n^0 \\ w_0^m & \dots & w_n^m \end{vmatrix} = m+1$ $\boxed{\text{equazioni cartesiane}}$

$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 w_0^0 + \dots + \lambda_m w_0^m \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 w_n^0 + \dots + \lambda_m w_n^m \end{cases}$ $\boxed{\text{equazioni parametriche}}$ $\iff v = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m$, $\lambda_i \in K$

Osservazione/Proposizione: Siano $W, U \lhd V$ sottosp.v., $\mathbb{P}(W), \mathbb{P}(U)$ sottosp. proiettivi
$\Rightarrow \mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W)$ ovvio; $\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)$ non è un sottospazio proiettivo

Def. Dato $S \subset \mathbb{P}(V)$ consideriamo $L(S)$ il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene S $= \bigcap \{\text{tutti i sottospazi proiettivi che contengono } S\} = \mathbb{P}(Z)$ $(Z \lhd W_i)$

Ora ci chiediamo $L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) \overset{?}{=} \mathbb{P}(U+W)$

"$\subset$" è vera perché $\mathbb{P}(U+W)$ contiene $\mathbb{P}(U)$ e $\mathbb{P}(W)$ ed è un sottospazio proiettivo (e L è il più piccolo)

"$\supset$" $Z \supset U$ e $Z \supset W \Rightarrow Z \supset U+W \Rightarrow \mathbb{P}(Z) \supset \mathbb{P}(U+W)$ $\quad (\mathbb{P}(Z) := L(S))$

FORMULA DI GRASSMANN PROIETTIVA

Siano $\mathbb{P}(W), \mathbb{P}(U)$ sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$

$\Rightarrow \dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) = \underbrace{\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W))}_{\text{intersezione spazi}} + \underbrace{\dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))}_{\text{somma spazi}}$

DIM.\ $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W)$, $\underbrace{L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))}_{\text{dim precedentemente}} = \mathbb{P}(U+W)$ Il resto uguale a Grassmann mod 1

[Notaz. $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(W) \rightarrow L(P_1, \dots, P_r) := L(\{P_1, \dots, P_r\})$]

Def. Se $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U) = \emptyset$ (ovvero $W \cap U = \{0\}$), $\mathbb{P}(W)$ e $\mathbb{P}(U)$ si dicono **SGHEMBI**

(Da Grassmann segue che se $\dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) \geq n$ $\Rightarrow \mathbb{P}(W)$ e $\mathbb{P}(U)$ non sono sghembi
D.\ $\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) = \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - \dim L(\dots) \geq \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - n \geq 0$) $\quad \dim \mathbb{P}(V)$

Def. Siano $P_1 = [v_1] \dots P_r = [v_r] \in \mathbb{P}(V)$, $L(\{P_1, \dots, P_r\}) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_r \rangle)$

a) $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ si dicono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** se $\dim L(\{P_1, \dots, P_r\}) = r-1$

b) $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}(V)$ si dicono **IN POSIZIONE GENERALE** se: $t \leq n+1$ e $\{P_1, \dots, P_t\}$ sono LIN. IND.
o se: $t > n+1$ e ogni sottoinsieme di $(n+1)$ di loro è LIN. INDIP.

Def. 2. Siano $S = \mathbb{P}(U)$, $T = \mathbb{P}(W)$ sottosp. proiettivi di $\mathbb{P}(V)$

$\left.\begin{array}{l} \text{se } \dim S + \dim T \geq n \text{ e } \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - n \\ \text{o se } \dim S + \dim T < n \text{ e } S \cap T = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow S$ e T si diranno IN POSIZIONE GEN.

= sono sghembi

se si intersecano nel minimo punto

PROIEZIONI in $\mathbb{P}(V)$ $(\dim V = n+1)$

Sia $H \subset \mathbb{P}(V)$ ($= \mathbb{P}(W)$, $\dim W = n$) un iperpiano e sia $P \in \mathbb{P}(V) \setminus H$. Definiamo la funzione $\pi_{P,H} : \mathbb{P}(V) \setminus P \longrightarrow H$
come $\pi_{P,H}(Q) := Q \longmapsto L(P,Q) \cap H$

Più in generale: siano $H, K \subset \mathbb{P}(V)$ due sottospazi proiettivi in posizione generale con $\dim H = h$, $\dim K = k$ e $h + k = n-1$. La **PROIEZIONE** di H su K è la funzione $\pi_{H,K} : \mathbb{P}(V) \setminus H \rightarrow K$
$Q \longmapsto \pi_{H,K}(Q) = L(H,Q) \cap K$.

$L(H \cup Q) \rightarrow$ punto

$\mathbb{P}^n_k = \{[x_0, \dots, x_n]\}$ Definisco una mappa $j_0 : K^n \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1, x_1, \dots, x_n)$

1) j_0 è ben definita
2) j_0 è INIETTIVA
3) $\mathrm{Im}(j_0) = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_0 \neq 0\} = \mathbb{P}^n \setminus H_0$, dove H_0 è l'iperpiano definito da $x_0 = 0$
$\Rightarrow \exists\, j_0^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus H_0 \longrightarrow K^n$
$[x_0, \dots, x_n] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$

j_0 è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{P}^n \setminus H_0$
$\Rightarrow$ è invertibile

$\mathbb{P}^n_k = j_0(K^n) \cup H_0 \cong K^n \cup H_0$

Def. Sia $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$ equazione lineare in $x_1, \dots, x_n$.
Definiamo l'**EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA** come $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + bx_0 = 0$ (OMOGENEIZZAZIONE)

$\rightarrow$ otteniamo la **chiusura proiettiva** (retta + punto all'∞ / piano + retta all'∞)

Osservazione: Se due rette in $\mathbb{R}^2$ sono parallele, le loro chiusure proiettive hanno lo stesso p.to all'∞

Def. Sia $\overline{S} = \begin{cases} a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \\ \vdots \\ a_0^{n-r}x_0 + \dots + a_n^{n-r}x_n = 0 \end{cases}$ sottospazio proiettivo di dim. $1 \subset \mathbb{P}^n$

La sua **TRACCIA AFFINE** è data dal sottospazio affine

$S = \begin{cases} a_0^1 + a_1^1x_1 + \dots + a_n^1x_n = 0 \\ \vdots \\ a_0^{n-r} + a_1^{n-r}x_1 + \dots + a_n^{n-r}x_n = 0 \end{cases}$ $\quad S \subset K^n$, $\dim S = r$

(tolgo x_0 al primo membro)

TEOREMA: Sia $\mathbb{P}_K$ spazio proiettivo, $\mathbb{P}_K = \mathbb{P}(K^{n+1})$, e H un iperpiano $\subset \mathbb{P}_K$
Allora $\mathbb{P}_K^n \setminus H$ è uno spazio affine di dimensione n

PROIETTIVITÀ

Def. Sia V un $\mathbb{K}$-sp. vett.. Una mappa $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ si dice **PROIETTIVITÀ** se

(i) f è biettiva (ii) esiste un isomorfismo $\varphi: V \to V$ t.c. $f([v]) = [\varphi(v)]$

Oss: L'insieme delle proiettività ha la struttura di gruppo con la composizione

Non classificheremo le proiettività, ci limiteremo a studiare le relazioni tra proiettività e affinità

TEOREMA: V $\mathbb{K}$-sp.v., $\dim V = n+1$. Dati due insiemi di $n+2$ punti di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ e $\{Q_0, \dots, Q_{n+1}\}$
allora esiste un'unica proiettività f tale che $f(P_i) = Q_i$ $\forall i = 0, \dots, n+1$

TEOREMA: Data una proiettività $f: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ e S un sottosp. proiettivo di dim s, allora $f(S)$ è un sottospazio proiettivo di dim. s. Dato un altro sottospazio proiettivo S' di dim s, allora esiste una proiettività $f: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ t.c. $f(S) = S'$

OMOGENEIZZAZIONE DI MAPPE AFFINI

Abbiamo visto che possiamo immergere $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ definendo una mappa $j_0: \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus H_0$
Siano ora $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ una mappa affine e B un sistema di riferimento di $\mathbb{A}^n$. Abbiamo visto in precedenza che $(f(P))_B = A\underline{x} + \underline{c}$, con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, $\underline{c} \in \mathbb{K}^n$ e $x_0 = (P)_B$
Possiamo quindi associare una matrice $\bar{A}$ a f in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ rendendo la mappa affine una mappa proiettiva lineare

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \underline{c} & A \end{array}\right).$$ Otteniamo quindi $j_0(A\underline{x}) = \bar{A} j_0(\underline{x}) = [1, \dots, A\underline{x} + \underline{c}, \dots]$

CLASSIFICAZIONE DI CURVE ALGEBRICHE

Teorema: Se D è UFD $\Rightarrow D[x]$ è UFD
(Ricordando che $D[x_1, \dots, x_n] =: D[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ segue che ogni $D[x_1, \dots, x_n]$ è un U.F.D.)

Def. Sia $f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = d$
f si dice **OMOGENEO** se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

1. Se f è somma di monomi di grado d
2. Se $\forall \lambda \in K$. $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n)$
3. $\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = d$ (formula di eulero)

Def. Sia $f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = d$. L'**OMOGENEIZZATO** di f è il polinomio $F \in K[x_0, \dots, x_n]$ definito come

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Esso è a sua volta un polinomio di grado d

Def. Sia $F(x_0, \dots, x_n) \in K[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado d. Il suo **DISOMOGENEIZZATO** è un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ definito come $f(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$

Oss. F omogeneizzato del disomogeneizzato di f è uguale a F stesso

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\delta p = n$. Allora $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $p(\alpha) = 0$
COROLLARIO: $p(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c. $p(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$ $\alpha_i \in \mathbb{C}$

Oss: Sia $F(x_0,\dots,x_n)$ omogeneo e supponiamo $F(x_0,\dots,x_n)=G(x_0,\dots,x_n)=H(x_0,\dots,x_n)$.
Allora G e H sono omogenei

Def. Diremo che $f,g\in K[x_1,\dots,x_n]$ sono **EQUIVALENTI** ($f\sim g$) $\iff \exists\, \lambda\in K\setminus\{0\}$ t.c. $f=\lambda g$
(ovvero se f e g sono associati)

Def. Una **CURVA ALGEBRICA PIANA** $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2_K=K^2$ è una classe di equivalenza $[f]$ con $f\in K(x,y)$
Definiamo inoltre
- **SUPPORTO** di $\mathcal{C}=\{(x,y)\in K^2 \mid f(x,y)=0\}$
- **GRADO** di $\mathcal{C}=\delta f$ ($=\deg f$)

OSS. Supporto e grado sono buone definizioni (non dipendono dal rappresentante f)

OSS. 1. Due curve diverse possono avere lo stesso supporto (es: $[x]$ e $[x^2]$)
2. In $\mathbb{R}$ una curva può avere supporto vuoto (es: $[x^2+y^2+1]$), ma in $\mathbb{C}$ no

Def. Una **CURVA ALGEBRICA PIANA PROIETTIVA** $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_K=\mathbb{P}(K^3)$ è una classe di equivalenza $[F]$
con $F(x_0,x_1,x_2)\in K[x_0,x_1,x_2]$ omogeneo
- Supporto di $\mathcal{C}=\{[x_0,x_1,x_2]\in\mathbb{P}^2_K \mid F(x_0,x_1,x_2)=0\}$
- Grado di $\mathcal{C}=\delta F$ ($:=\deg F$)

OSS. Supporto e grado sono buone definizioni (non dipendono dalla scelta del rappresentante F)

Def. Sia $\mathcal{C}=[f(x,y)]$ una curva piana affine in K^2. Definiamo la **CHIUSURA PROIETTIVA** di $\mathcal{C}$ come una curva piana proiettiva $\overline{\mathcal{C}}=[F(x_0,x_1,x_2)]$, con $F\in K[x_0,x_1,x_2]$ l'omogeneizzato di f.
Viceversa si dice **TRACCIA AFFINE** di $\overline{\mathcal{C}}$ la curva $\mathcal{C}$

In particolare osserviamo che $\deg\mathcal{C}=\deg\overline{\mathcal{C}}$ e $\text{Supp.}\,\overline{\mathcal{C}}=\text{Supp.}\,\mathcal{C}\cup\{\text{punti all'infinito}\}$ (punti di $\overline{\mathcal{C}}$ in $x_2=0$)

Def. Due curve $\mathcal{C}=[f(x,y)]$ $\mathcal{D}=[g(x,y)]$ si dicono **AFFINEMENTE EQUIVALENTI** se esiste un'affinità
$T:K^2\to K^2$ t.c. $g(x,y)=f\circ T(x,y)$ $\to f(T(x,y))$ Scriveremo $T(\mathcal{D})=\mathcal{C}$

Def. Due curve algebriche piane $\overline{\mathcal{C}}=[F(x_0,x_1,x_2)]$ $\overline{\mathcal{D}}=[G(x_0,x_1,x_2)]$ in $\mathbb{P}^2_K$ si dicono **PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI** se esiste una proiettività $P:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ t.c. $G(x_0,x_1,x_2)=F\circ P(x_0,x_1,x_2)$. Scriveremo $P(\overline{\mathcal{D}})=\overline{\mathcal{C}}$

Pb: Classificare le curve algebriche piane a meno di equivalenza affine (/isometrica/proiettiva)

OSS. due curve affinemente (proiettivamente) equivalenti hanno lo stesso grado. Inoltre i supporti sono legati dalla legge $\text{Supp}\,\mathcal{C}=T(\text{Supp}\,\mathcal{D})$ $(\text{Supp}\,\overline{\mathcal{C}}=P(\text{Supp}\,\overline{\mathcal{D}}))$

CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE ALGEBRICHE PROIETTIVE

- CURVE DI GRADO 1

Prop. Ogni retta affine (/proiettiva) è affinemente (/proiettivamente) equivalente alla retta $r:[x]$ $(/R:[x_2])$

DIM. - Sia s una retta affine data da $[ax+by+c]$. Consideriamo $T(x,y)=(ax+by+c,y)$.
Allora $s=T(r)=[ax+by+c]$, quindi s è affinemente equivalente a r

- Sia S una retta proiettiva data da $[ax_0+bx_1+cx_2]$. Consideriamo $T(x_0,x_1,x_2)=(ax_0+bx_1+cx_2,x_1,x_2)$.
Allora $S=T(R)=[ax_0+bx_1+cx_2]$, quindi S è affinemente equivalente a R

• CURVE DI GRADO 2 (quadriche)

$$F(x_0,x_1,x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2$$
$$= (x_0\ x_1\ x_2)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ è simmetrica}$$

Osserviamo che una quadrica è associata ad una forma quadratica. Se applichiamo una proiettività T con $M = M_{\mathcal{C}}(T)$ otteniamo che

$$(F\circ T)(x_0\ x_1\ x_2) = (x_0\ x_1\ x_2)\,{}^tMAM\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

TEOREMA: una quadrica $[F(x_0,x_1,x_2)]$ in $\mathbb{P}^2_K$ ($\delta F = 2$) è proiettivamente equivalente a una delle seguenti

• Se $K = \mathbb{C}$
- i) $[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ (non degenere)
- ii) $[x_0^2 + x_1^2]$ (degenere)
- iii) $[x_0^2]$ (doppiamente degenere)

• Se $K = \mathbb{R}$
- i) $[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ (non degenere a punti non reali)
- ii) $[x_0^2 + x_1^2 - x_2^2]$ (non degenere a punti reali)
- iii) $[x_0^2 + x_1^2]$ (degenere con supporto un punto)
- iv) $[x_0^2 - x_1^2]$ (degenere con supporto due rette)
- v) $[x_0^2]$ (doppiamente degenere)

DIM.\ Con la notazione precedente, per il teorema di diagonalizzazione di forme lineari e il teorema di Sylvester, ad ogni quadrica associo tramite proiettività una quadri in forma canonica. Dal teorema di Sylvester segue che le forme canoniche possibili sono quel elencate.

Osserviamo inoltre che se $M \in GL(3,K)$ allora $rk\,A = rk\,{}^tMAM$; quindi possiamo definire rango di una quadrica come il rango della matrice associata, ottenendo un invariante proiett

• GENERALIZZAZIONE A N DIMENSIONI

Def. Una IPERSUPERFICIE proiettiva J in $\mathbb{P}^n_K$ è data da $J = [F]$, con $F(x_0,\dots,x_n)$ omoge

Si definiscono inoltre $\deg J = \deg F$ e $\operatorname{Supp} J = \{[x_0,\dots,x_n] \in \mathbb{P}^n_K \mid F(x_0,\dots,x_n) = 0\}$

Pb: anche per le superfici si può considerare il problema di classificare a meno di proiett

TEOREMA: Ogni iperpiano (ipersup. di grado 2) è proiettivamente equivalente a $H_0 : [x_0]$
TEOREMA 2: Una ipersuperficie quadrica in $\mathbb{P}^n_K$ è proiett. equivalente a una delle seguenti:
- Se $K = \mathbb{C}$ $\quad [x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_r^2] \quad 0 \le r \le n$
- Se $K = \mathbb{R}$ $\quad [x_0^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2] \quad 0 \le p \le r \le n$

CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE ALGEBRICHE AFFINI

Sia $\mathcal{C} = [f(x,y)]$ una quadrica in $\mathbb{A}^2_K$. La curva è data da un'equazione di secondo grad in x e y:

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{21}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = (1\ x\ y)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Sia inoltre $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ un'affinità tale che

$$T(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con A_0 il minore $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e M_0 il minore $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$, allora le matri associate a $f\circ T$ sono

$$B = {}^tMAM \quad \text{e} \quad B_0 = {}^tMA_0M$$

Inoltre siccome T è biettiva il rango delle matrici è un'invariante affine

Def. (CONICHE AFFINI): Una quadrica $\mathcal{C} = [f] = [{}^t\underline{x} A \underline{x}]$ di $\mathbb{A}^2$ si dice

- non degenere se $rk\, A = 3$
- semplicemente degenere se $rk\, A = 2$
- doppiamente degenere se $rk\, A = 1$

Inoltre si dice
- a centro se $\det A_0 \neq 0$
- parabola se $\det A_0 = 0$

In conclusione, se $K = \mathbb{R}$ anche il segno di $\det A_0$ è un invariante affine, per cui si dice
- ellisse se $\det A_0 > 0$
- iperbole se $\det A_0 < 0$

TEOREMA: Una quadrica $\mathcal{C} = [f]$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è affinemente equivalente a una delle seguenti quadriche

i) $[x^2+y^2-1]$ (a centro non degenere)
ii) $[x^2+y^2]$ (a centro degenere)
iii) $[y^2-x]$ (parabola non degenere)
iv) $[y^2-1]$ (parabola degenere)
v) $[y^2]$ (doppiamente degenere)

TEOREMA: Una quadrica $\mathcal{C} = [f]$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è affinemente equivalente ad una delle seg. quadriche

i) $[x^2+y^2-1]$	$[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1]$	(ellisse)
ii) $[x^2+y^2+1]$	$[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1]$	(ellisse a punti non reali)
iii) $[x^2+y^2]$	$[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}]$	(ellisse degenere)
iv) $[x^2-y^2-1]$	$[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1]$	(ellisse)
v) $[x^2-y^2]$	$[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}]$	(iperbole degenere)
vi) $[y^2-x]$	$[y^2-2bx]$	(parabola)
vii) $[y^2-1]$	$[y^2-a^2]$	(parabola degenere)
viii) $[y^2+1]$	$[y^2+b^2]$	(parabola degenere)
ix) $[y^2]$	$[y^2]$	(doppiamente degenere)

DIM. Dimostriamo il caso reale isometrico, poi gli altri seguono direttamente

1. ELIMINAZIONE DEL TERMINE RETTANGOLARE

La forma quadratica $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy$ può essere diagonalizzata per il teorema spettrale, ovvero $\exists M \in GL(2,\mathbb{R})$ t.c. ${}^tMA_0M = D$ con D diagonale. Applicando M a f si ottiene una forma quadratica

$$g = f \circ T_M = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{01}x + 2b_{02}y + b_{00}$$

2. ELIMINAZIONE DEI TERMINI LINEARI

- Se la conica è a centro, ovvero $b_{11} \neq 0$ e $b_{22} \neq 0$ completiamo i quadrati eliminando i termini lineari $T(x,y) = (x + \frac{b_{01}}{b_{11}}, y + \frac{b_{02}}{b_{22}})$

e otteniamo $h = g \circ T = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + c_{00}$

In particolare:
- se $c_{00} \neq 0$ la conica è nella forma $[\frac{b_{11}}{c_{00}}x^2 + \frac{b_{22}}{c_{00}}y^2 + 1]$ (i) (ii) (iv)
- se $c_{00} = 0$ la conica è nella forma $[b_{11}x^2 + b_{22}y^2]$ (iii) (v)

• Se la conica non è a centro supponiamo $b_{11}=0$ e $b_{22}\neq 0$ (altrimenti non sarebbe una quadrica). Completiamo i quadrati per eliminare il termine $2b_{02}y$

$$T(x,y)=\left(x,\ y+\frac{b_{02}}{b_{22}}\right)$$

e otteniamo $h=g\circ T=b_{22}y^2+2b_{01}x+d_{00}$

ora

- se $b_{01}\neq 0$ eliminiamo d_{00} con una trasformazione $(x,y)\mapsto\left(x+\frac{d_{00}}{2b_{01}}y\right)$. $\Rightarrow$ La conica è nella forma $\left[y^2+2\frac{b_{01}}{b_{22}}\right]$ (vi)
- se $b_{01}=0$ la conica è nella forma $[b_{22}y^2+d_{00}]$ — $d_{00}\neq 0$ (vii) (viii); $d_{00}=0$ (ix)

3. CON OMOTETIE CI RICONDUCIAMO AL CASO AFFINE
4. CON OMOTETIE COMPLESSE CI RICONDUCIAMO AL CASO COMPLESSO

QED

Oss: Sia $\mathcal{C}=[a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{21}xy+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{00}]$ una conica a centro, ovvero con $\det A_0=0$. Allora il sistema lineare seguente ha un'unica soluzione, il centro della conica

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{22}y+a_{01}=0\\ a_{12}x+a_{22}y+a_{02}=0\end{cases}\xrightarrow[\text{sol.}]{}(x_0,y_0)=C_0$$

• GENERALIZZAZIONE A n DIMENSIONI

In $\mathbb{R}^n$ sia $Q=[f(x_1,\dots,x_n)]$ un'ipersuperficie quadrica ($n\geq 2$). Allora

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum a_{ii}x_i^2+2\sum a_{ij}x_ix_j+2\sum a_{0i}x_i+a_{00}$$

Sia A la sua matrice associata. $\Rightarrow f(x_1,\dots,x_n)=(1,x_1,\dots,x_n)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

Def. Un'ipersuperficie quadrica di $\mathbb{A}^n_k$ si dice DEGENERE se $\det A=0$ (il determinante della sua matrice associata)

TEOREMA: ogni quadrica non degenere è congruente ad una delle seguenti ipersuperfici

- $\left[\sum_1^p a_ix_i^2-\sum_{p+1}^n a_jx_j^2\right]$ $(p=0,\dots,n)$ $(a_1\geq\dots\geq a_p,\ a_{p+1}>0\geq\dots\geq a_n>0)$
- $\left[\sum_1^p a_ix_i^2-\sum_{p+1}^{n-1} a_jx_j^2-x_n\right]$ $(a_1\geq\dots\geq a_p>0,\ a_{p+1}\geq\dots\geq a_{n-1}>0)$

TEOREMA: Una superficie quadrica in $\mathbb{R}^3$ non degenere e a punti reali $Q=[f(x,y,z)]$, $\deg f=2$ è congruente (isometricamente equivalente a uno dei seguenti:

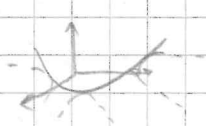
i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $a>b>c>0$ ELLISSOIDE

ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $a>b>0,\ c>0$ IPERBOLOIDE IPERBOLICO AD UNA FALDA

iii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $a>0,\ b>c>0$ IPERBOLOIDE ELLITTICO A DUE FALDE

iv) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$ $a>b>0$ PARABOLOIDE ELLITTICO

v) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$ $a,b>0$ PARABOLOIDE IPERBOLICO



IPERBOLOIDE IPERBOLICO

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\iff\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\iff\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

Le rette $\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\frac{1}{t}\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}$ al variare di t coprono l'iperboloide iperbolica

$\Rightarrow$ L'iperboloide iperbolico è una superficie (doppiamente) rigata [e se $a=b$ è una sup. di rotazione]

PARABOLOIDE IPERBOLICO

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \iff \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z$

Le rette $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{t} \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t \end{cases}$ al variare di t coprono il paraboloide iperbolico

RISULTANTE

TEOREMA: Sia $R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_m & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_m \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ m righe, $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ n righe (Risultante)

f e g hanno un fattore comune se e solo se $R = 0$

DIM.\ f e g hanno un fattore comune $\iff \exists\ \psi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$, $\varphi = \beta_1 + \beta_2 x + \dots + \beta_m x^{m-1}$ tale che $\varphi f = \psi g$ con α_i, β_j non tutti nulli

$$\iff \begin{cases} \beta_1 a_0 = \alpha_1 b_0 & \text{termine di grado } 0 \\ \beta_2 a_0 + \beta_1 a_1 = \alpha_2 b_0 + \alpha_1 b_1 & \text{termine di grado } 1 \\ \vdots \\ \beta_m a_m = \alpha_m b_m & \text{termine di grado } m+n-1 \end{cases}$$

È un sistema lineare omogeneo nelle variabili α_i, β_j a coefficienti in a_i, b_j.
Ha soluzione diversa da zero se e solo se $R = 0$

TEOREMA FOND. ALGEBRA 2: Sia $F(x_0, x_1)$ polinomio omogeneo di grado n. Allora esistono n coppie $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ t.c. $F(x_0, x_1) = (a_1 x_1 - b_1 x_0) \cdot \ldots \cdot (a_n x_1 - b_n x_0)$

Le coppie sono uniche a meno di fattori di proporzionalità (sono uniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$)

Def. Le coppie $[a_i, b_i]$ si chiamano **RADICI** di $F(x_0, x_1)$. La **MOLTEPLICITÀ** di $[a_i, b_i]$ è il numero di volte che appare tra le coppie

Def. Sia $\mathcal{C} = [f(x,y)]$ una curva algebrica piana affine. Se f è irriducibile allora $\mathcal{C}$ si dice **IRRIDUCIBILE**.
Se $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ è una decomposizione in irriducibili allora $\mathcal{C}_i = [f_i]$ si dicono <u>COMPONENTI IRRIDUCIBILI</u> di $\mathcal{C}$. Si scriverà $\mathcal{C} \doteq \mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_r$

TEOREMA DI BEZOUT

TEOREMA (formulazione base o elementare): Siano $\mathcal{C} = [F]$, $\mathcal{D} = [G]$ due curve algebriche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di grado n e m

Se $\mathcal{C}$ o $\mathcal{D}$ hanno più di $m \cdot n$ punti in comune allora hanno una componente in comune (e dunque infiniti punti in comune)

DIM.\ Supponiamo che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ abbiano $P_1 \dots P_{n \cdot m + 1}$ punti in comune ($\in \operatorname{Supp}\mathcal{C} \cap \operatorname{Supp}\mathcal{D}$)

Consideriamo tutte le possibili rette per due qualunque di questi punti $\{r_i\}_{i \in I}$, I finito

Sia $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \{r_i\}_{i \in I}\}$ e prendiamo coordinate proiettive su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tali che $P = [0, 0, 1]$.

Scriviamo in queste coordinate $\begin{matrix} F = A_n + A_{n-1} x_2 + \dots + A_0 x_2^n \\ G = B_m + B_{m-1} x_2 + \dots + B_0 x_2^m \end{matrix}$ $(K[x_0, x_1, x_2] = K[x_0, x_1][x_2])$

$\Rightarrow R(F, G) = R(x_0, x_1)$

$R(x_0, x_1)$ è un polinomio omogeneo in (x_0, x_1) di grado $n \cdot m$

Sia $P_1=[c_0,c_1,c_2] \neq P_2[\tilde{c}_0,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2]$ $\Big\}$ $F(c_0,c_1,c_2)=G(c_0,c_1,c_2)=0$
$\Rightarrow F(\tilde{c}_0,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2)=G(\tilde{c}_0,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2)=0$

Chiaramente $R(c_0,c_1)=0$, $R(\tilde{c}_0,\tilde{c}_1)=0$

Osservo che anche $[c_0,c_1] \neq [\tilde{c}_0,\tilde{c}_1]$, perché se $[c_0,c_1]=[\tilde{c}_0,\tilde{c}_1]$ allora P_1 e P_2 stanno sulla retta $c_0x_1-c_1x_0=0$ che passa per $P=[0,0,1]$ ↯

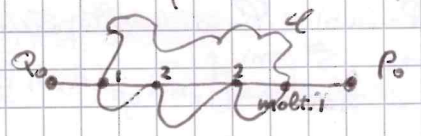
Quindi $R(x_0,x_1)$ ha $n\cdot m+1$ radici distinte $\Rightarrow R(x_0,x_1)\equiv 0 \Rightarrow F(x_0,x_1,x_2)$ e $G(x_0,x_1,x_2)$ hanno una componente in comune

MOLTEPLICITÀ DI INTERSEZIONE

Sia $\mathcal{C}=[F(x_0,x_1,x_2)]$ una curva algebrica piana proiettiva in $\mathbb{P}^2_K$. Sia r una retta in $\mathbb{P}^2_K$ passante per $P_0, Q_0 \in \mathbb{P}^2_K$

Voglio definire la molteplicità di intersezione tra $\mathcal{C}$ ed r in un punto P. I punti della retta r sono dati da $\lambda P_0+\mu Q_0$, $\lambda,\mu \in K$. Calcoliamo F lungo r.
$F(\lambda P_0+\mu Q_0)=F(\lambda,\mu)$. $F(\lambda,\mu)$ è un polinomio omogeneo in λ e μ di grado n

Def. Sia $P_1=\lambda_1P_0+\mu_1Q_0 \in r$. Definisco la molteplicità di intersezione tra $\mathcal{C}$ ed r in P_1 come $I(\mathcal{C},r;P_1)$ =: molteplicità di (λ_1,μ_1) come radice di $F(\lambda,\mu)$
(mettiamo 0 se (λ_1,μ_1) non è radice)



Nota: conveniamo nel porre

$I(\mathcal{C},r;P_1)=0$ se $P_1 \notin \mathcal{C}$
$I(\mathcal{C},r;P_1)=\infty$ se $r \subset \mathcal{C}$

Osserviamo che se $r \not\subset \mathcal{C}$ allora $0 \leq I(\mathcal{C},r;P_1) \leq n$

TEOREMA DI BEZOUT PER UNA RETTA: Sia $\mathcal{C}=[F]$ una curva in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di grado n, e r una retta. Supponiamo che $r \not\subset \mathcal{C}$. Allora $\sum_{P_1 \in r} I(\mathcal{C},r;P_1)=n$

TEOREMA DI BEZOUT AFFINE:

$\sum_{P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}} I(\mathcal{C},r;P) \leq \delta f = n$ vale $=$ se e solo se il punto all'∞ di r non è un p.to all'∞ di $\mathcal{C}$

OSS: Siano $\mathcal{C}, r, P_1$ rispettivamente una curva, una retta, un punto in $\mathbb{P}^2$ o in $\mathbb{A}^2$

1. $I(\mathcal{C},r;P_1)$ non dipende dalla scelta dei punti su r e nemmeno dalla direzione
2. Sia T una proiettività o un'affinità. Allora $I(\mathcal{C},r;P_1)=I(T(\mathcal{C}),T(r),T(P_1))$
3. $I(\mathcal{C},r;P_1)+I(\mathcal{D},r;P_1)=I(\mathcal{C}+\mathcal{D},r;P_1)$

Def. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica piana e P un punto nel piano.
$m_P(\mathcal{C})$ = molteplicità della curva in P := $\min_{P \in r} I(\mathcal{C},r;P)$

OSS. Fono rette per P non contenute in $\mathcal{C} \Rightarrow m_P(\mathcal{C}) < +\infty$

Più specificatamente $0 \leq m_P(\mathcal{C}) \leq \delta\mathcal{C}$. $m_P(\mathcal{C})=0 \Leftrightarrow P \notin \mathcal{C}$

Def. Se $m_P(\mathcal{C})=1$ il punto si dice SEMPLICE (/NON SINGOLARE/LISCIO)
Se $m_P(\mathcal{C})>1$ il punto si dice SINGOLARE (/DI MOLTEPLICITÀ M)
$\vdots$
m

OSS./Prop.: • $P \in \mathcal{C}$ è un punto semplice $\iff \underbrace{(f_x(a,b), f_y(a,b))}_{=\nabla f(a,b)} \neq (0,0)$

• Se il punto è semplice $\Rightarrow \exists$ sono $(\bar{l}, \bar{m})$ t.c.

$f_x(a,b)\,\bar{l} + f_y(a,b)\,\bar{m} = 0$ ↳ sono unici a meno di multipli

La retta $r_{\bar{l},\bar{m}}$ è tale che $I(\mathcal{C}, r_{\bar{l},\bar{m}}; P) \geq 2$. Si chiama RETTA TANGENTE

RIASSUNTO

$P=(a,b) \in \mathcal{C} = [f(x,y)]$ è liscio $\iff \nabla f(a,b) = (f_x(a,b) + f_y(a,b)) \neq (0,0)$

$\tilde{\mathcal{C}} = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ è la retta tangente

STUDIO LOCALE CURVE

Prop. P è un punto di molteplicità m se e solo se

$$\begin{cases} f_{x^{r-k}y^k}(a,b) = 0 & \forall\ \begin{matrix} 0 \leq r \leq m-1 \\ 0 \leq k \leq r \end{matrix} \\ f_{x^{m-k}y^k}(a,b) \neq 0 & \forall\ 0 \leq k \leq r \end{cases}$$

(per almeno un k compreso tra 0 e r)

Def. Sia $\mathcal{C} = [f(x,y)]$ e $P=(a,b) \in \mathcal{C}$ di molteplicità m. Le rette passanti per P con direzione (l,m) soluzioni di $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_{x^{m-k}y^k}(a,b)\, l^{m-k} m^k = 0$ sono le TANGENTI PRINCIPALI di $\mathcal{C}$

OSS.

1) se τ è una tangente principale in P allora $I(\mathcal{C}, r; P) > m_P(\mathcal{C}) =: m$
2) ci sono al più m tangenti principali; se sono esattamente m il punto si dice MULTIPLO ORDINARIO

OSS. $\mathcal{C} = [f(x,y)]$, $\delta f = n$

1) $P \in \mathcal{C} \Rightarrow 1 \leq m_P(\mathcal{C}) \leq n$
2) le rette non hanno punti singolari
3) le coniche non degeneri (ellissi, parabole, iperboli) non hanno punti singolari
4) una cubica irriducibile ha al più un punto singolare doppio (nodo, cuspide)

Lo studio delle molteplicità in un punto di una curva algebrica è un problema locale, quindi è equivalente farlo nell'affine o nel proiettivo

Nel proiettivo si considera $[F(x_0,x_1,x_2)] \subset \mathbb{P}^2_K$ e r la retta per P_0, Q_0. $m_P(\mathcal{C}) := \inf_{P \in \mathcal{C}} I(\mathcal{C}, r; P)$.

$P \in \mathcal{C}$ è semplice (liscio) $\iff (F_{x_0}(P), F_{x_1}(P), F_{x_2}(P)) \neq (0,0,0)$

Se P è semplice allora la retta $\tau: F_{x_0}(P)x_0 + F_{x_1}(P)x_1 + F_{x_2}(P)x_2 = 0$ è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P ($I(\mathcal{C}, r; P) \geq 2$)

OSS. τ è una retta in $\mathbb{P}^2_K$ che passa per $P=[p_0,p_1,p_2]$ perché

$F_{x_0}(P)p_0 + F_{x_1}(P)p_1 + F_{x_2}(P)p_2 \underset{\text{formula Eulero}}{=} \delta F \cdot F(P) = 0$

Prop. $P \in \mathcal{C} = [F(x_0,x_1,x_2)] \subset \mathbb{P}^2_K$ con F omogenea è un punto singolare di molteplicità $m \overset{=m_P(\mathcal{C})}{>} 2$ $\iff$ tutte le derivate parziali di ordine $m-1$ si annullano in P, e almeno una der. parz. di ordine m non si annulla in P

OSS. Sia $\mathcal{C} = [F(x_0,x_1,x_2)] \subseteq \mathbb{P}^2_K$ irriducibile e $\delta F = n$. Allora il numero di punti singolari è finito

DIM. Sia $[F_{x_0}] = \mathcal{D}$ con $\delta \mathcal{D} = n-1$ (abbiamo derivato) (rispetto a x_0)

Le singolarità di $\mathcal{C}$ sono contenute in $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Se esse fossero infinite allora $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ avrebbero una componente in comune, ma $\mathcal{C}$ è irriducibile

TEOREMA DEL DINI

TEOREMA: Se $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, allora in un intorno di P la curva si può scrivere come grafico $y = y(x)$
Se $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$, allora in un intorno di P la curva si può scrivere come grafico $x = x(y)$

PUNTI DI FLESSO

Def. Sia $\mathcal{C}$ una curva e $P \in \mathcal{C}$. P è un PUNTO DI FLESSO DI ORDINE K se P è liscio e $I(\mathcal{C}, \tau; P) = 2 + K$ con $K \geq 1$, dove τ è la tangente in P

Def. L'hessiana di $\mathcal{C}$ è la curva $\mathcal{H} = [H(x_0, x_1, x_2)]$

$$H(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} F_{00}(\underline{x}) & F_{01}(\underline{x}) & F_{02}(\underline{x}) \\ F_{10}(\underline{x}) & F_{11}(\underline{x}) & F_{12}(\underline{x}) \\ F_{20}(\underline{x}) & F_{21}(\underline{x}) & F_{22}(\underline{x}) \end{vmatrix} \quad \text{dove } F_{ij} = F_{x_i x_j} \text{ e } \underline{x} = (x_0, x_1, x_2)$$

$\rightsquigarrow$ L'hessiana è un polinomio omogeneo di grado $3(n-2)$

non lo chiede
~ TEOREMA: $P \in \mathcal{C} = [F(x_0, x_1, x_2)] \subset \mathbb{P}^2_K$, $\delta F = n$. P è un punto di flesso $\iff$ P è liscio e P appartiene all'hessiana ($\rightsquigarrow H(P) = 0$)

CLASSIFICAZIONE CUBICHE

Prop.: $\mathcal{C} = [F]$, $\mathcal{D} = [G]$ curve piane. $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ hanno sempre un punto in comune

DIM.\ $[c_0, c_1, c_2] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff R_{F,G}(c_1, c_2) = 0$

$R_{F,G}(x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo in $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, che ha sempre n radici.

~ $\Rightarrow$ COROLLARIO: Se $\mathcal{C} = [F]$ è una curva liscia con $\delta F \geq 3 \Rightarrow \mathcal{C}$ ha un p.to di flesso

TEOREMA: Sia $\mathcal{C} = [F] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica piana irriducibile, non singolare, $\delta \mathcal{C} = 3$. Allora $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente a una cubica con traccia affine $y^2 = x(x-1)(x-c)$
$c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. $\rightarrow (F(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_2^2 - x_1^3 + (c+1) x_1^2 x_0 - c x_1 x_0^2)$

DIM.\ Sia P un p.to di flesso di $\mathcal{C}$ e scegliamo coordinate proiettive t.c. $P = [0, 0, 1]$ e che la tangente a $\mathcal{C}$ in P sia $x_0 = \underline{0} := \tau$

Scriviamo F in queste coordinate: $F(x_0, x_1, x_2) = a_{000} x_0^3 + a_{111} x_1^3 + a_{222} x_2^3 + a_{011} x_0 x_1^2 + a_{022} x_0 x_2^2$
$+ a_{122} x_1 x_2^2 + a_{112} x_1^2 x_2 + a_{001} x_0^2 x_1 + a_{002} x_0^2 x_2 + a_{012} x_0 x_1 x_2$

$F(0,0,1) = 0 \Rightarrow a_{222} = 0$; $F_{x_0}(0,0,1) = 1 \Rightarrow a_{022} = 1$; $F_{x_1}(0,0,1) = 0 \Rightarrow a_{122} = 0$;
$F_{x_2}(0,0,1) = 0 \Rightarrow a_{222} = 0$

$\Rightarrow F(x_0, x_1, x_2) = a_{000} x_0^3 + a_{111} x_1^3 + a_{011} x_0 x_1^2 + x_0 x_2^2 + a_{122} x_1^2 x_2 + a_{001} x_0^2 x_1 + a_{002} x_0^2 x_2$
$+ a_{012} x_0 x_1 x_2$

P è un flesso $\Rightarrow I(\mathcal{C}, \tau; P) \geq 3$. $F(x_0 = 0, x_1, x_2) = a_{111} x_1^3 + a_{112} x_1^2 x_2 = x_1^2 (a_{111} x_1 + a_{112} x_2)$
$\Rightarrow$ molteplicità di intersezione $\geq 3 \iff a_{112} = 0$
Disomogeneizziamo prendendo $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$
$\rightsquigarrow y^2 + bxy + cy := \tilde{g}(x)$, $\delta \tilde{g} = 3$

Prendiamo l'affinità $x = X$, $y = Y - \frac{b}{2} X - \frac{c}{2}$ $\Rightarrow Y^2 = g(x)$, $\delta g = 3$

* sto usando un lemma $\rightarrow$ pag. succ.
Allora l'affinità $X = (\alpha_2 - \alpha_1) x' + \alpha_1$, $Y = \sqrt{a(\alpha_2 - \alpha_1)^3}\, y'$ trasforma la curva in
$y'^2 = x'(x'-1)(x'-c)$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

$(F(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_2^2 - x_1^3 + (c+1) x_1^2 x_0 - c x_1 x_0^2)$

* LEMMA: $y^2 = g(x)$, $\delta g = 3$ è liscia $\Leftrightarrow$ $g(x)$ ha tre radici distinte

DIM.) Consideriamo la curva $f(x,y) = y^2 - g(x)$. Se α fosse una radice doppia di $g(x)$ allora $f(\alpha,0) = 0$, $f_x(\alpha,0) = -g'(\alpha) = 0$, $f_y(\alpha,0) = 2y = 0$ ↯
$\Rightarrow y^2 = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$ (le radici sono tutte distinte)

Proposizione: Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due cubiche non singolari con forma canonica
$F(x_0,x_1,x_2) = x_0x_1^2 - x_1^3 + (c+1)x_1^2x_0 - cx_1x_0^2$
$G(x_0,x_1,x_2) = x_0x_1^2 - x_1^3 + (c'+1)x_1^2x_0 - c'x_1x_0^2$

$\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono proiettivamente equivalenti $\Leftrightarrow$ $J(\mathcal{C}) = \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)} = \frac{(c'^2-c'+1)^3}{c'^2(c'-1)} = J(\mathcal{C}')$

COROLLARIO: ci sono ∞ cubiche piane irriducibili lisce non proiett. equivalenti tra loro.

$\mathcal{C}$ cubica irriducibile liscia è proiettivamente equivalente a
$f(x,y) = y^2 - x(x-1)(x-c)$ $\quad F(x_0,x_1,x_2) = x_0x_1^2 - x_1^3 + (c+1)x_1^2x_0 - cx_1x_0^2$

TEOREMA: Ogni cubica irriducibile liscia ha 9 flessi distinti

TEOREMA: Sia $\mathcal{C} = [F(x_0,x_1,x_2)] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una cubica irriducibile singolare. Allora $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente a una cubica con traccia affine:
a) $y^2 = x^2(x-1)$ $\quad (x_0x_2^2 - x_1^3 + x_0x_1^2)$
b) $y^2 = x^3$ $\quad (x_0x_2^2 - x_1^3)$

COROLLARIO: ogni cubica singolare ha almeno un flesso (oltre il pt. di singolarità)

GRUPPO ABELIANO

Prendiamo una cubica irriducibile piana liscia in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: $y^2 = x(x-1)(x-c)$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$
Sia $O \in \mathcal{C}$ un punto di flesso. Vogliamo definire "geometricamente" un operazione su $\mathcal{C}$ che la renda un GRUPPO ABELIANO

$+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ $\quad A, B \in \mathcal{C}$

$R(A,B) :=$ la terza intersezione della retta $L(A,B)$ con $\mathcal{C}$

$A + B$: $R(R(A,B), O)$

1. l'operazione è COMMUTATIVA
2. $A + O = R(R(A,O),O)$
3. $R(A,O) = -A$
4. $A + (B+C) = (A+B) + C$ ovvero
   $R(R(A,B+C),O) = R(R(A+B,C),O)$ ovvero
   $R(A,B+C) = R(A+B,C)$
   ovvero che A, $B+C$, $R(A+B,C)$ sono allineati

PROPRIETÀ
1. Una cubica piana liscia irriducibile è un GRUPPO
2. Una cubica piana liscia irriducibile è una CURVA ELLITTICA
3. Si può dimostrare che $y^2 = x(x-1)(x-c)$ non ha una parametrizzazione razionale (ovvero fatta con polinomi o quozienti di polinomi)