Introduzione alla Geometria Algebrica

Quadriche - un veloce ripasso

Gianluca Occhetta

Forme bilineari

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; una forma bilineare su V è un'applicazione

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$$

che sia lineare in entrambi gli argomenti. La forma bilineare si dice simmetrica se $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

Se $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ è una base di V possiamo rappresentare φ con una matrice simmetrica $A = [a_{ij}]$ ponendo $a_{ij} = \varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$

Se $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{a}_i$ e $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{a}_j$ allora

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

Forme bilineari

Se $\mathcal{A}' = \{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n\}$ è un'altra base di V, allora esiste una matrice invertibile $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tale che, per ogni $\mathbf{v} \in V$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

Possiamo dunque scrivere

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T A \mathbf{v} = \mathbf{u}'^T C^T A C \mathbf{v}'$$

trovando che la matrice di φ nella nuova base è

$$A' = C^T A C$$

cioè A e A' sono matrici congruenti

Forme bilineari

Una base $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ di V si dice φ-coniugata se

$$\varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j$$

La matrice rappresentativa di φ rispetto a una tale base è diagonale

Teorema (Lagrange)

Se $\operatorname{Char} \mathbb{K} \neq 2$, $\dim V > 0$ e φ è una forma bilineare simmetrica, allora esiste una base φ-coniugata

Equivalentemente, se $\operatorname{Char} \mathbb{K} \neq 2$, una matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale

Forme quadratiche

Data φ forma bilineare simmetrica, la forma quadratica associata $\Phi : V \to K$ è definita ponendo

$$\Phi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Si noti che Φ non è lineare, ma è omogenea di grado 2:

$$\Phi(\lambda\mathbf{u}) = \varphi(\lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = \lambda^2\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \lambda^2\Phi(\mathbf{u})$$

Come conseguenza del Teorema di Lagrange, esiste una base $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ di V nella quale

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2$$

dove v_i sono le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{A}$.

Forme quadratiche complesse

A meno di riordinare gli elementi della base $\mathcal{A}$ possiamo assumere che la matrice A che rappresenta Φ sia

$$A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$$

con r uguale al rango di A

Con l'ulteriore cambiamento di base $\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i/\eta_i$ per $i = 1, \ldots, r$ con $\eta_i^2 = \lambda_i$ la matrice di Φ diventa

$$A_r = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dunque ogni matrice simmetrica di rango r è congruente ad A_r, e quindi tutte le matrici simmetriche dello stesso rango sono congruenti.

Iperquadriche

Sia ora V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$, e $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$

Data $\Phi : V \to \mathbb{K}$ forma quadratica non nulla, una (iper)quadrica è l'insieme dei punti $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}(V)$ tali che $\Phi(\mathbf{x}) = 0$

Scelta una base $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ di V, se A è la matrice rappresentativa di Φ, scrivendo $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{a}_i$ possiamo descrivere la quadrica come l'insieme dei punti di $\mathbb{P}(V)$ tali che

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

cioè come il luogo di zeri di un polinomio omogeneo di secondo grado

Iperquadriche

Sia Q è una quadrica associata a Φ forma quadratica la cui matrice rappresentativa A ha rango r

Esiste un cambio di base in V tale che la matrice rappresentativa di Φ nella nuova base è A_r

Il cambio di base induce una proiettività di $\mathbb{P}(V)$, che manda Q nell'iperquadrica di equazione

$$x_0^2 + \cdots + x_{r-1}^2 = 0$$

In particolare due iperquadriche sono proiettivamente equivalenti se e solo se le loro matrici rappresentative hanno lo stesso rango

Punti singolari

Un punto $\mathbf{y}$ di un'iperquadrica Q si dice singolare se ogni retta per $\mathbf{y}$ ha (almeno) due intersezioni con Q in $\mathbf{y}$

Sia $\mathbf{y} \in Q$ un punto, e sia ℓ una retta che passa per $\mathbf{y}$, i cui punti si possono dunque scrivere come $\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}$; intersecando ℓ e Q troviamo

$$0 = (\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z})^T A (\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}) = 2\lambda\mu\mathbf{z}^T A\,\mathbf{y} + \mu^2\mathbf{z}^T A\,\mathbf{z}$$

La soluzione $\mu = 0$, che corrisponde a $\mathbf{y}$ è doppia sse $\mathbf{z}^T A\,\mathbf{y} = 0$

In particolare $\mathbf{y}$ è singolare sse $\mathbf{z}^T A\,\mathbf{y} = 0\ \forall\mathbf{z}$, cioè sse $A\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$

I punti singolari di $Q \subset \mathbb{P}^n$ sono quindi un sottospazio lineare, di dimensione $n - \mathrm{rk}(A)$

Un'iperquadrica senza punti singolari si dice liscia; ciò accade sse $\mathrm{rk}(A) = n + 1$

Classificazione

Vediamo la classificazione delle quadriche in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

Rango	Forma canonica	Singolarità	
4	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$\emptyset$	quadrica liscia
3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	$[0 : 0 : 0 : 1]$	cono quadrico
2	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	$x_0 = x_1 = 0$	due piani distinti
1	$x_0^2 = 0$	$x_0 = 0$	un piano doppio

Classificazione

Vediamo la classificazione delle coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Rango	Forma canonica	Singolarità	
3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	$\emptyset$	conica liscia
2	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	$[0 : 0 : 1]$	due rette distinte
1	$x_0^2 = 0$	$x_0 = 0$	una retta doppia