Proposizione 1. *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$, sia $f \in \mathcal{E}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovalori per f. Inoltre, per ogni $i = 1, \ldots, m$ sia h_i l'ordine massimo dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore λ_i che appaiono nella forma canonica di Jordan di f. Allora,*

$$m_f[t] = \prod_{i=1}^{m}(t - \lambda_i)^{h_i} \tag{1}$$

Promemoria. $\mathcal{E}$ denota l'insieme degli endomorfismi triangolarizzabili su $\mathcal{V}$.

Definizione 1 (Polinomio minimo). Dati $f \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ e l'anello $\mathbb{K}[t]$ di polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$, si dice *polinomio minimo* il polinomio monico $m_f[t] \in \mathbb{K}[t]$ tale che $m_f[t] \not\equiv 0$ – ovvero diverso dal polinomio nullo – di grado minimo tra i polinomi non nulli in $\mathbb{K}[t]$ soddisfatti da f.

Un'altra cosa da tenere bene a mente è che con "ordine massimo dei blocchi di Jordan" si intende la somma degli ordini dei blocchi di Jordan presenti nella FCJ di f.

Dimostrazione. Per il teorema di Jordan, è possibile considerare una base $\mathcal{S}$ di $\mathcal{V}$ composta da stringhe per f. Per ogni $i = 1, \ldots, m$, la λ_i-stringa per f $\mathcal{S}_i$ risulta essere un insieme di esattamente h_i vettori linearmente indipendenti che generano il sottospazio vettoriale $\widetilde{\mathcal{V}}_i$ di $\mathcal{V}$. Dal teorema di Jordan si ha che $h_i = \mathcal{M}_a(\lambda_i)$, quindi la λ_i-stringa ha lunghezza $\mathcal{M}_a(\lambda_i)$. Sapendo che a f è associato il corrispettivo operatore nilpotente $g := (f - \lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})$, e che

$$\forall_{\mathbf{v_j} \in \mathcal{S}_i} \quad \mathbf{v_j} \xrightarrow{(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})^j} \mathbf{0}$$

è possibile dire che

$$\widetilde{\mathcal{V}}_i = \ker((f - \lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})^{\mathcal{M}_a(\lambda_i)}) \tag{2}$$

Infatti, preso un vettore $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathcal{V}}_i$, esso è combinazione lineare dei vettori appartenenti alla stringa, che vengono annullati dall'operatore nilpotente corrispondente a f. Da tenersi in considerazione è anche il fatto che

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{m} \widetilde{\mathcal{V}}_i \tag{3}$$

Questo asserto è lecito: ogni sottospazio è generato da un distinto insieme di vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\mathcal{S}$; ne consegue che $\mathbf{u_i} \in \widetilde{\mathcal{V}}_i$ è linearmente indipendente rispetto ai vettori appartenenti agli altri sottospazi, per ogni $i = 1, \ldots, m$. Da cui l'affermazione precedente.

Promemoria. $\widetilde{\mathcal{V}}_i$ è detto anche *autospazio generalizzato* relativo all'autovalore λ_i.

Questo fatto ci consente di esprimere $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ come

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_m\mathbf{v_m} \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \mathbf{v_i} \in \widetilde{\mathcal{V}}_i\,\forall_{i=1,\ldots,m} \tag{4}$$

Si consideri $s[t] := \prod_{i=1}^{m}(t - \lambda_i)^{h_i}$. Affermare che f soddisfa $s[t]$ equivale a dire che

$$\forall_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \quad s[f](\mathbf{v}) = 0$$

Allora, per linearità

$$s[f](\mathbf{v}) = s[f](\alpha_1\mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_m\mathbf{v_m}) = \alpha_1 s[f](\mathbf{v_1}) + \cdots + \alpha_m s[f]\mathbf{v_m}$$

Per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha che

$$\begin{aligned} s[f](\mathbf{v_i}) &= (\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{h_i})(\mathbf{v_i}) && (5)\\ &= (s_f^i \cdot (f - \lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})^{h_i})(\mathbf{v_i}) = (s_f^i)(\underbrace{(f-\lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})^{h_i})(\mathbf{v_i})}_{=0}) = 0 && (6)\end{aligned}$$

dove $s_f^i = \prod_{i \neq j}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})^{h_j}$. Si può dire il polinomio è soddisfatto da f, ma non è garantito che esso sia il polinomio minimo. Sapendo che vale

$$s[t] = q[t]m_f[t]$$

è possibile affermare che

$$m_f[t] = \prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})^{\widetilde{h_i}} \quad \widetilde{h_i} \leq h_i \forall_{i=1,\ldots,m} \tag{7}$$

Si supponga che esiste $i \in 1, \ldots, m$ per cui $\widetilde{h_i} < h_i$. Allora, esiste un vettore $\mathbf{u_i} \in \widetilde{\mathcal{V}}_i \subset \mathcal{V}$ non nullo tale che

$$(f - \lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathcal{V}})^{\widetilde{h_i}}(\mathbf{u_i}) \neq 0$$

Questo determinerebbe un assurdo, in quanto f non soddisferebbe $m_f[t]$. Quindi,

$$m_f[t] = s[t]$$

$\square$