Lemma (Lemma di Steinitz, SERNESI 4.12). *Sia* $\{\,\mathbf{v_1},\dots,\mathbf{v_n}\,\}$ *un sistema di vettori generatori dello spazio vettoriale* $\mathcal{V}$ *definito su* $\mathbb{K}$ *e siano* $\mathbf{w_1},\dots,\mathbf{w_m}\in\mathcal{V}$ *linearmente indipendenti. Allora, vale la relazione*

$$m \le n$$

Promemoria. La dimostrazione è articolata in due fasi: nella prima parte, verrà dimostrato per induzione che, dati n vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\mathcal{V}$, essi sono generatori di $\mathcal{V}$; successivamente, verrà dimostrato per assurdo che il numero di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale non può essere maggiore del numero di vettori generatori. Se la comprensione dovesse risultare difficoltosa, può ritornare utile la consultazione di [SERNESI 4.12], che affronta il problema con un approccio differente. La dimostrazione riportata di seguito concilia quanto detto in classe con quanto riportato sul libro di testo, nel tentativo di facilitare la comprensione di questo utile lemma.

Dimostrazione. Essendo per ipotesi $\mathbf{v_1},\dots,\mathbf{v_n}$ generatori di $\mathcal{V}$, ogni elemento di $\mathcal{V}$ è esprimibile come loro combinazione lineare. È possibile affermare che esistono scalari $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{w_1} = a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_n\mathbf{v_n}(*)$$

e sfruttando l'indipendenza lineare di $\mathbf{w_1},\dots,\mathbf{w_m}$, si può inoltre aggiungere che $\mathbf{w_1}\neq\mathbf{0}_{\mathcal{V}}$. Ne segue che

$$\exists_{i\in 0..n}\colon a_i \neq 0$$

A meno di riordinare $\mathbf{v_1},\dots,\mathbf{v_n}$ si suppone $a_1\neq 0$. Di conseguenza, è possibile riformulare (*) nel seguente modo:

$$a_1\mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} - \cdots - a_n\mathbf{v_n}$$
$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{w_1}}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\mathbf{v_2} - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\mathbf{v_n}$$

$\mathbf{v_1}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{w_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n}$ e quindi $\mathbf{v_1}\in\mathcal{L}(\mathbf{w_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n})$. D'altra parte, applicando lo stesso ragionamento per $\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n}$, si ha che $\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n}\in\mathcal{L}(\mathbf{w_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n})$, da cui segue che

$$\mathcal{L}(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{w_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n})$$

essendo $\mathcal{L}(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n})=\mathcal{V}$, ne consegue che $\mathbf{w_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_n}$ sono a loro volta generatori di $\mathcal{V}$.

Procedendo per induzione, si dimostra ora che ciò vale per tutti i vettori $\mathbf{w_1},\dots,\mathbf{w_n}$. Si supponga che per $1\le s\le n-1$ valga la proposizione

$$\mathbf{w_1},\dots,\mathbf{w_s},\mathbf{v_{s+1}},\dots,\mathbf{v_n} \text{ generano } \mathcal{V}.$$

Pertanto, esistono gli scalari $b_1,\dots,b_s,c_{s+1},\dots,c_n\in\mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{w_{s+1}} = b_1\mathbf{w_1} + \cdots + b_s\mathbf{w_s} + c_{s+1}\mathbf{v_{s+1}} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$$

sfruttando l'indipendenza lineare di $\mathbf{w_1},\dots,\mathbf{w_s},\mathbf{w_{s+1}},\dots,\mathbf{w_m}$ si può affermare che $\mathbf{w_{s+1}}\neq\mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ e anche che

$$\exists_{i\in(s+1)..n}\colon c_i\neq 0$$

A meno di riordinare $\mathbf{v_{s+1}}, \dots, \mathbf{v_n}$ è possibile supporre $c_{s+1} \neq 0$. Procedendo similmente a quanto fatto per (*), si ottiene

$$c_{s+1}\mathbf{v_{s+1}} = \mathbf{w_{s+1}} - b_1\mathbf{w_1} - \cdots - b_s\mathbf{w_s} - c_{s+2}\mathbf{v_{s+2}} - \cdots - c_n\mathbf{v_n}$$

$\mathrm{v}_{s+1} = \frac{\mathbf{w_{s+1}}}{c_{s+1}} - \frac{b_1}{c_{s+1}}\mathbf{w_1} - \cdots - \frac{b_s}{c_{s+1}}\mathbf{w_s} - \frac{c_{s+2}}{c_{s+1}}\mathbf{v_{s+2}} - \cdots - \frac{c_n}{c_{s+1}}\mathbf{v_n}$conseguentemente, si ha che $\mathbf{v_{s+1}} \in \mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{w_{s+1}}, \mathbf{v_{s+2}}, \dots, \mathbf{v_n})$. Sapendo che

$$\mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{v_{s+1}}, \dots, \mathbf{v_n}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{w_{s+1}}, \mathbf{v_{s+2}}, \dots, \mathbf{v_n})$$

e che per ipotesi induttiva $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{v_{s+1}}, \dots, \mathbf{v_n}$ generano $\mathcal{V}$, allora $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}, \mathbf{w_{s+1}}, \mathbf{v_{s+2}}, \dots, \mathbf{v_n}$ sono a loro volta generatori di $\mathcal{V}$. Essendo verificato che per $s = 1$ la proposizione è vera, è dimostrato per induzione su s che $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n}$ sono generatori di $\mathcal{V}$.

Si supponga ora, per assurdo, che date le ipotesi, valga invece la relazione $m > n$.

Ne segue che $\mathbf{w_m} \in \mathcal{V}$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n}$:

$$\mathbf{w_m} = a_1\mathbf{w_1} + \cdots + a_n\mathbf{w_n}$$

da cui

$$a_1\mathbf{w_1} + \cdots + a_n\mathbf{w_n} - \mathbf{w_m} = 0_{\mathcal{V}}$$

essendo $-\mathbf{w_m} = (-1)\mathbf{w_m} \implies a_m = -1$, risulta che $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n}, \mathbf{w_{n+1}}, \dots, \mathbf{w_m}$ sono linearmente dipendenti. ASSURDO! Per ipotesi $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_m}$ sono linearmente indipendenti. Pertanto, è dimostrato che vale $m \leq n$. □