

1 Operatori lineari

Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Un'applicazione lineare $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ è detta *operatore lineare* su \mathcal{V} o *endomorfismo* su \mathcal{V} . La matrice associata a \mathcal{V} nella base \mathcal{B} corrispondente all'operatore f è indicata con $M_{\mathcal{B}}(f)$ (abbreviazione di $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$).

Definizione 1 (matrici simili). Due matrici $M, N \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dicono *simili* se esiste una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile tale che

$$M = A \cdot N \cdot A^{-1}$$

Osservazione. La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza in $\mathbb{K}^{n,n}$, infatti soddisfa le proprietà di riflessività, simmetria e transitività.

1. Considerata la matrice $M \in \mathbb{K}^{n,n}$, essa è sempre simile a sé stessa, infatti $M = I_n^{-1} \cdot M \cdot I_n$.

2. Si considerino due matrici $M, N \in \mathbb{K}^{n,n}$ simili. Si ha che

$$\begin{aligned} M &= A \cdot N \cdot A^{-1} \\ A^{-1} \cdot (M) \cdot A &= A^{-1} \cdot (A \cdot N \cdot A^{-1}) \cdot A \\ A^{-1} \cdot (M) \cdot A &= (A^{-1} \cdot A) \cdot N \cdot (A^{-1} \cdot A) \\ A^{-1} \cdot (M) \cdot A &= I_n^{-1} \cdot N \cdot I_n \\ A^{-1} \cdot (M) \cdot A &= N \end{aligned}$$

3. Siano $M, N, C \in \mathbb{K}^{n,n}$. Se $M = A \cdot N \cdot A^{-1}$ e $N = B \cdot C \cdot B^{-1}$, si ha

$$M = A \cdot N \cdot A^{-1} = A \cdot (B \cdot C \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = (A \cdot B) \cdot C \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (AB) \cdot C \cdot (AB)^{-1}$$

Definizione 2 (operatori diagonalizzabili). Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} con $\dim \mathcal{V} = n$. Un operatore lineare $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ tale che

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

per opportuni valori $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. In tal caso, \mathcal{B} è una *base diagonalizzante* per f .

Osservazione. Rifacendosi alla nozione di *matrice associata* di f , si ha che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_n = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_n = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ f(\mathbf{v}_n) &= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Da ciò si evince che se f è diagonalizzabile, allora $f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ è multiplo di \mathbf{v}_i .

Nel porsi il problema di stabilire l'esistenza di basi diagonalizzanti un determinato operatore lineare, vengono introdotti i concetti di "autovalore" e "autovettore".

Definizione 3 (autovalore). Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un endomorfismo. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice *autovalore* per f se esiste un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tale che $\mathbf{v} \neq 0_{\mathcal{V}}$ e $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Il sottoinsieme di \mathbb{K} costituito dagli autovalori per f si dice *spettro* di f .

Definizione 4 (autovettore). Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un endomorfismo. Un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si dice *autovettore* per f relativo all'autovalore λ se $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. L'insieme degli autovettori per f relativi a λ è detto *autospazio* di f relativo all'autovalore λ e corrisponde all'insieme

$$\mathcal{V}_{\lambda}(f) = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \}$$

Osservazione. $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore se e solo se esiste un autovettore non nullo relativo a λ . Se λ è un autovalore per f , il vettore nullo $0_{\mathcal{V}}$ è sempre autovettore relativo a f : infatti, $f(0_{\mathcal{V}}) = \lambda 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$ per qualunque $\lambda \in \mathbb{K}$.

Basandosi sui concetti appena definiti, è possibile formulare una proposizione che stabilisca un "criterio" di diagonalizzazione di un operatore lineare.

Proposizione 1 (criterio di diagonalizzazione). *Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un operatore lineare. Allora, f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base \mathcal{B} di \mathcal{V} costituita da autovettori per f .*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulle osservazioni finora compiute e sulle definizioni affrontate riguardo agli operatori lineari. \square

Proposizione 2. *Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore per $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Allora, $\mathcal{V}_{\lambda}(f)$ è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V} .*

Dimostrazione. Verifichiamo che \mathcal{V}_{λ} soddisfi le proprietà dei sottospazi vettoriali.

1. $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}_{\lambda}$, come osservato precedentemente.
2. Dati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_{\lambda}$, si ha che

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

da cui si deduce che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_{\lambda}(f)$.

3. Dati $k \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\lambda}$, si ha che

$$f(k\mathbf{v}) = k \cdot f(\mathbf{v}) = k \cdot \lambda \mathbf{v} = \lambda \cdot k\mathbf{v}$$

da cui si deduce che $k\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\lambda}(f)$.

Essendo soddisfatte le proprietà dei sottospazi vettoriali, $\mathcal{V}_{\lambda}(f)$ è uno sottospazio vettoriale di \mathcal{V} . \square

Definizione 5 (molteplicità geometrica). Dato $\lambda \in \mathbb{K}$, si dice *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ la dimensione di $\mathcal{V}_{\lambda}(f)$. Viene definito il simbolo

$$\mathcal{M}_g(\lambda) := \dim \mathcal{V}_{\lambda}(f)$$

Osservazione. Essendo $\mathcal{V}_\lambda(f)$ costituito da almeno un vettore $\mathbf{v} \neq 0_{\mathcal{V}}$, si ha che per ogni autovalore λ vale

$$\mathcal{M}_g(\lambda) \geq 1.$$

Il prossimo problema che viene affrontato è relativo agli autovalori. Dato un endomorfismo, è possibile calcolarne tutti gli autovalori relativi?

Sia $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ una base dello spazio vettoriale \mathcal{V} . Un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B}' , ovvero

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{b}_1 + \dots + a_n \mathbf{b}_n$$

Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore per f se $f(\mathbf{v}) = \lambda(a_1 \mathbf{b}_1 + \dots + a_n \mathbf{b}_n)$. Riprendendo la nozione di matrice associata e autovalore, si ha quindi

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}'}(f) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ricordando che $M \cdot I_n = M$, l'espressione appena formulata è equivalente a

$$(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si può affermare che λ è autovalore per f se e solo se il sistema lineare omogeneo $(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n)X = 0$ ammette una soluzione non nulla. Per Rouché-Capelli, si ha che lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n - \rho(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n)$, con $n = \dim \mathcal{V}$ corrispondente al numero delle incognite del sistema. Ne consegue che λ è autovalore per f se e solo se

$$n - \rho(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) \geq 1 \implies \rho(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) \leq n - 1$$

che equivale a dire che il rango di $M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n$ non è massimo, condizione verificata per $\det(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) = 0$.

Definizione 6 (polinomio caratteristico). Sia f un endomorfismo sullo spazio vettoriale \mathcal{V} avente una base \mathcal{B}' . Il *polinomio caratteristico* di f corrisponde a

$$p(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n)$$

Osservazione. Cosa accade a $p(\lambda)$ al variare della scelta della base? $p(\lambda)$ è effettivamente un polinomio?

1. Basi diagonalizzanti uno stesso operatore lineare sono simili tra loro, ovvero, date le basi $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$ dello spazio vettoriale \mathcal{V} e le rispettive matrici associate $M_{\mathcal{B}'}, M_{\mathcal{B}''}$, vale $M_{\mathcal{B}''} = A \cdot M_{\mathcal{B}'} \cdot A^{-1}$, con $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile. È possibile affermare che

$$\det(M_{\mathcal{B}''}(f) - \lambda I_n) = \det(A \cdot M_{\mathcal{B}'} \cdot A^{-1} - \lambda A \cdot I_n \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) \cdot \det A^{-1}$$

Per il teorema di Binet si ha che

$$\det A \cdot \det(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) \cdot \det A^{-1} = \det A \cdot \det(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) \cdot \det A^{-1} = \det(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n)$$

essendo $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Ne consegue che, qualunque sia la base scelta, $p(\lambda)$ non varia.

2. $p(\lambda)$ è un polinomio di grado n per la regola di Laplace:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(M_{\mathcal{B}'}(f) - \lambda I_n) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi, è dimostrato che λ è autovalore per f se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$.

Esempio 1 (calcolo di autovalori dato un endomorfismo). Sia

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, x + y) \end{aligned}$$

si determinino gli autovalori per f .

Soluzione. Si consideri la base banonica $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$. La matrice associata a f nella base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$ corrisponde a $M_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto, si ha che

$$p(\lambda) = \det(M_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}}(f) - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2$$

e quindi 1 è radice di molteplicità 2 di $p(\lambda)$. \square

Promemoria 1. Dato un polinomio avente radice x_0 , essa ha molteplicità m se

$$p(x) = (x - x_0)^m \cdot q(x)$$

con $q(x)$ tale che $q(x_0) \neq 0$.

Definizione 7 (molteplicità algebrica). Dato $\lambda \in \mathbb{K}$, si dice *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ — indicata con $\mathcal{M}_a(\lambda)$ — la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$.

Teorema 1 (13.12 SERNESI). Sia f un endomorfismo e λ un autovalore per f . Allora, vale la relazione

$$1 \leq \mathcal{M}_g(\lambda) \leq \mathcal{M}_a(\lambda)$$

Dimostrazione. Si scomponga la disequazione in casi più semplicemente analizzabili.

1. $1 \leq \mathcal{M}_g(\lambda)$ è vero per definizione.
2. Sia $d := \mathcal{M}_g(\lambda)$ e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d)$ una base di \mathcal{V}_λ . Completandola a una base di \mathcal{V} — ovviamente, $(n := \dim \mathcal{V}) \geq d$ — si ottiene

$$\mathcal{B}' = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

la cui matrice associata per f corrisponde a

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}}(f) & A \\ O^{n-d,d} & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{K}^{d,n-d}, B \in \mathbb{K}^{n-d,n-d}$$

Sia t un autovalore per f con base \mathcal{B}' . Il polinomio caratteristico corrisponde a

$$p(t) = \det(M_{\mathcal{B}'} - tI_n)$$

Applicando Laplace rispetto alle colonne di $M_{\mathcal{B}'}$, si ottiene

$$p(t) = (\lambda - t)^d \cdot \det(B)$$

Pertanto, $p(t)$ ha molteplicità debolmente maggiore di d . Ne consegue che $(\mathcal{M}_g(\lambda) = d) \leq \mathcal{M}_a(\lambda)$. \square