1 Complementi

1.1 Spazi euclidei

Analogia tra nozione di sistema di riferimento nel piano e base di uno spazio vettoriale; nella definizione di sistema di riferimento nel piano, è inclusa una condizione di perpendicolarità tra gli assi del piano ed è introdotta un'unità di misura e conseguentemente il concetto di lunghezza. Viene introdotto il concetto di *base ortonormale*, analogo a quello di sistema di riferimento nel piano, generalizzato per ogni spazio vettoriale finora studiato.

Definizione 1 (Prodotto scalare)**.** Fissato il campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e considerato lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ di dimensione finita, si dice *prodotto scalare* su $\mathcal{V}$ la funzione

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\to \mathbb{K} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned} \tag{1}$$

che associa ad una coppia di vettori un termine numerico appartenente a $\mathbb{K}$, in modo da soddisfare le seguenti proprietà:

PS1 $\forall_{\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u} \in \mathcal{V}} \quad \forall_{a,b \in K}\ \langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + b\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$.

PS2 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.

Promemoria. Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, si dice *coniugato* di z il numero $\bar{z} = a - ib$; di fatto, si ha che $\Im z = -\Im \bar{z}$. Se $z = \bar{z}$, si ha

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= 0 \\ a + ib - (a - ib) &= 0 \\ 2ib &= 0 \implies b = 0 \end{aligned}$$

Essendo $b = \Im z = 0$, ne segue che $z \in \mathbb{R}$.

PS3 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$; inoltre, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$.

Osservazione. Per (PS2), si ha che $(\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, da cui segue che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}$. Ciò consente di affermare che è possibile stabilire una relazione di ordine tra $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ e lo zero, azione non compibile se esso fosse appartenuto al campo complesso.

Definizione del prodotto scalare in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ Vediamo ora come viene definito il prodotto scalare a seconda che lo spazio vettoriale sia fissato sul campo dei reali o sul campo complesso.

Campo dei reali Sia $\mathcal{V} := \mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale fissato su $\mathbb{R}$. Si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Il prodotto scalare in $\mathbb{R}$ viene detto *prodotto scalare standard* e verifica le proprietà del prodotto scalare:

PS1 È correttamente verificata, infatti

$$\begin{aligned}\langle a\mathbf{v}+b\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle &= \langle (av_1+bw_1,\dots,av_n+bw_n),(u_1,\dots,u_n)\rangle \\ &= (av_1+bw_1)u_1+\ldots+(av_n+bw_n)u_n \\ &= av_1u_1+\cdots+av_nu_n+bw_1u_1+\cdots+bw_nu_n \\ &= a\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + b\langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle\end{aligned}$$

PS2 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \in \mathbb{R} = \overline{\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle} \in \mathbb{R} = \langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle \in \mathbb{R}$, vero per la commutatività del prodotto in $\mathbb{R}$. Difatti, $v_1w_1+\cdots+v_nw_n = w_1v_1+\cdots+w_nv_n$.

PS3 $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = {v_1}^2+\cdots+{v_n}^2 \geq 0$ è vera, essendo una somma di quadrati. Inoltre, $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $u_1=\cdots=u_n=0$, ovvero $\mathbf{u}=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$.

Campo complesso Sia $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale fissato su $\mathbb{C}$. Si ha

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle := v_1\bar{w}_1+\cdots+v_n\bar{w}_n \tag{3}$$

Promemoria. Sia $z\in\mathbb{C}$. Allora, $z\bar{z}=(a-ib)(a+ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2\in\mathbb{R}$

Definizione 2 (Spazio euclideo)**.** Si dice *spazio euclideo* uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ su cui è definito un prodotto scalare. Esso viene denotato con la simbologia $(\mathcal{V},\langle\,,\,\rangle)$.

Definizione 3 (Norma)**.** Dato lo spazio euclideo $(\mathcal{V},\langle,\rangle)$ e il vettore $\mathbf{v}\in\mathcal{V}$, si dice *norma* di $\mathbf{v}$ il numero

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle} \tag{4}$$

Nel caso in cui $\|\mathbf{v}\|=1$, $\mathbf{v}$ viene detto *versore.*

Definizione 4 (vettore normalizzato)**.** Dato il vettore $\mathbf{v}\in\mathcal{V}$, si dice *normalizzato di* $\mathbf{v}$ il vettore

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\mathbf{v} \tag{5}$$

Osservazione. Un vettore normalizzato è anche un versore. Infatti:

$$\left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\|\mathbf{v}\| = 1$$

Esempio 1. Sia considerato il vettore $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. La sua norma è

$$\|(v_1,v_2)\| = \sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}$$

Nota: la norma di un vettore misura la sua lunghezza!

Teorema 1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Dato lo spazio euclideo $\mathcal{V}$, è valida la relazione*

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\| \tag{6}$$

Dimostrazione. Si consideri il caso in cui $\mathbf{v}=\mathbf{0}_\mathcal{V}$. Allora, si ha

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{0}_\mathcal{V}\rangle = 0$$

Infatti, per (PS2), $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0}_\mathcal{V}\rangle = \overline{\langle \mathbf{0}_\mathcal{V}, \mathbf{u}\rangle} = \overline{\langle 0\mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle}$; per (PS1), $\overline{\langle 0\mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle} = \overline{0\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle} = \bar{0} = 0$. Quindi, considerando $\|\mathbf{v}\|$, si ha

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{0}_\mathcal{V}, \mathbf{0}_\mathcal{V}\rangle} = \sqrt{0} = 0.$$

Ne risulta che $0 \leq 0$, e quindi la relazione è banalmente vera.

Si consideri $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_\mathcal{V}$. La norma di $\mathbf{v}$ è sicuramente positiva, essendo una radice quadrata di somma di termini non nulli al quadrato. Considerando la disequazione

$$\|\mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}\|^2 \geq 0 \quad t \in \mathbb{K} \tag{7}$$

si ha

$$\|\mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}, \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}\rangle \tag{8}$$

avendo utilizzato la definizione di norma,

$$\langle \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}, \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}\rangle \overset{PS1}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}\rangle \tag{9}$$

$$\overset{PS2}{=} \overline{\langle \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\overline{\langle \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \tag{10}$$

applicando PS1 si ottiene

$$\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} - \left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle} t\bar{t}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\right) \tag{11}$$

applicando nuovamente PS2 si ottiene

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \bar{t}\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle} t\bar{t}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \tag{12}$$

Nel caso in cui $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$t = \bar{t} \tag{13}$$

da cui, sfruttando anche la definizione di norma, si ha

$$\|\mathbf{u}\|^2 - t\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - t\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + t^2\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\|\mathbf{v}\|^2 \tag{14}$$

sfruttando la relazione $z\bar{z} = z^2$ si ottiene

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 2t|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 + |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 t^2\|\mathbf{v}\|^2 \tag{15}$$

La disequazione (7) può essere riscritta come

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 2t|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 + |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 t^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0 \tag{16}$$

Ponendo $t = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}$ in (15) si ottiene

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 2\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} + |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2\left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)^2\|\mathbf{v}\|^2 \tag{17}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 2\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} + \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \tag{19}$$

Sostituendo in (7) si ottiene

$$\|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \geq 0 \tag{20}$$

da cui

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \tag{21}$$

e quindi

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \qquad \square$$

1.2 Ortogonalità

Definizione 5 (Vettori ortogonali)**.** Dato lo spazio euclideo $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$, i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ si dicono *ortogonali* se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ e si dicono *ortonormali* se sono ortogonali di norma 1.

Esempio 2. Considerato $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono ortonormali. Infatti:

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \tag{22}$$

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \tag{23}$$

$$\|(0, 1)\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \tag{24}$$

.

(*disegno: piano cartesiano con vettori della base canonica*)

Teorema 2 (Gram-Schmidt)**.** *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio euclideo. Allora, esiste una base ortonormale per $\mathcal{V}$, ovvero una base formata da vettori a due a due ortogonali di norma* 1*.*

Esempio 3. Considerato lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, la base canonica $\mathcal{C} = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ è una base ortonormale.

Per dimostrare il teorema di Gram-Schmidt, ci si avvarrà dell'uso del seguente lemma.

Lemma. *Dato lo spazio euclideo $\mathcal{V}$ e l'insieme $\{ \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r} \}$ i cui vettori sono ortonormali in $\mathcal{V}$, i vettori $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}$ sono linearmente indipendenti e per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$*

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{r} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i} \rangle \mathbf{u_i} \tag{25}$$

è ortogonale a tutti i vettori di $\{ \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r} \}$.

Dimostrazione. Si consideri la combinazione lineare

$$a_1 \mathbf{u_1} + \cdots + a_r \mathbf{u_r} = \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \tag{26}$$

Considerato il vettore $\mathbf{u_i}$ tale che $i = 1, \ldots, r$, si consideri il prodotto scalare di ciascun membro dell'uguaglianza per $\mathbf{u_i}$:

$$\langle (a_1 \mathbf{u_1} + \cdots + a_r \mathbf{u_r}), \mathbf{u_i} \rangle = \langle \mathbf{0}_{\mathcal{V}}, \mathbf{u_i} \rangle \tag{27}$$

Applicando PS1 e notando che il prodotto scalare di qualunque vettore contro il vettore nullo è pari a 0, si ottiene

$$a_1\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_i}\rangle + \cdots + a_i\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle + \cdots + a_r\langle \mathbf{u_r}, \mathbf{u_i}\rangle = 0 \tag{28}$$

Essendo per ipotesi i vettori di $\{\, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r} \,\}$ tra loro ortonormali, ne risulta che il loro prodotto scalare è uguale a 0 tranne nel caso $\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle$: qui, avendo $\mathbf{u_i}$ norma 1 in quanto ortonormale, si ha che

$$\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle = \|\mathbf{u_i}\|^2 = 1^2 = 1. \tag{29}$$

Perciò, si ha che

$$a_i = 0 \tag{30}$$

Essendo questo vero per ogni $i = 1, \ldots, r$, ne segue che i vettori $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}$ sono tra loro linearmente indipendenti.

Verifichiamo che $\forall_{i\in 1..r}\langle \mathbf{w}, \mathbf{u_i}\rangle = 0$.

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{u_i}\rangle = \langle \mathbf{v} - \textstyle\sum_{i=1}^{r}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle \tag{31}$$

Per PS1 si ha che $\langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{r}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle$ è uguale a

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_i}\rangle - \cdots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle - \cdots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle\langle \mathbf{u_r}, \mathbf{u_i}\rangle \tag{32}$$

Per le stesse considerazioni del passo precedente, si giunge a

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u_i}\rangle = 0 \tag{33}$$

Pertanto, $\mathbf{w}$ risulta essere ortogonale a $\mathbf{u_i}$ per ogni $i = 1, \ldots, r$. □

Dimostriamo Gram-Schmidt.

Dimostrazione. Si consideri la base $\{\, \mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n} \,\}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$. Per induzione su n.

$n = 2$ Si definiscano

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{b_1}}{\|\mathbf{b_1}\|} \\ \mathbf{w_2} = \mathbf{b_2} - \langle \mathbf{b_2}, \mathbf{v_1}\rangle \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|} \end{cases} \tag{34}$$

Il vettore $\mathbf{v_1}$, essendo normalizzato di $\mathbf{b_1}$, ha norma unitaria ed è linearmente indipendente. Per il lemma precedentemente enunciato, $\mathbf{w_2}$ è ortogonale a $\mathbf{v_1}$; inoltre, essendo $\mathbf{v_2}$ definito come il normalizzato di $\mathbf{w_2}$, esso è ortonormale a $\mathbf{v_1}$.

$n - 1 \rightsquigarrow n$ Riprendendo il punto precedente, si definiscano

$$\begin{cases} \mathbf{w_n} = \mathbf{b_n} - \langle \mathbf{b_n}, \mathbf{v_{n-1}}\rangle \mathbf{v_{n-1}} \\ \mathbf{v_n} = \frac{\mathbf{w_n}}{\|\mathbf{w_n}\|} \end{cases} \tag{35}$$

Per il lemma precedentemente enunciato, $\mathbf{w_n}$ è ortogonale a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$; inoltre, $\mathbf{v_n}$, essendo normalizzato di $\mathbf{w_n}$, è ortonormale a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$. Essendo $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ linearmente indipendenti fra loro, l'insieme $\{\, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \,\}$ costituisce una base di vettori ortonormali per $\mathcal{V}$. □

Esempio 4. Sia $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$. Dalla definizione di prodotto scalare standard, dati $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ si ha

$$\langle (v_1, v_2, v_3, v_4), (w_1, w_2, w_3, w_4) \rangle = \sum_{i=1}^{4} v_i w_i$$

Si consideri ora $W = \mathcal{L}((1,1,1,1), (0,1,2,3))$. Come è possibile trovare una base ortonormale per W?

Soluzione. I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti: difatti, considerati come vettori-riga di una matrice, essi formano una matrice ridotta. Tuttavia, essi non sono ortogonali in quanto il loro prodotto scalare non è nullo. Consideriamo il vettore

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = (1,1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Essendo normalizzato di $\mathbf{v}$, è verificabile che $\mathbf{b}$ ha norma unitaria. Utilizzando (25), si definisca

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= (0,1,2,3) - \langle (0,1,2,3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \\ &= (0,1,2,3) - 3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

I vettori $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$ sono ortogonali, ma $\mathbf{d}$ non è ortogonale, non avendo norma unitaria. Si definisca

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}}} = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Per Gram-Schmidt, l'insieme $\left\{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}) \right\}$ costituisce una base per W. $\square$

Proprietà delle basi ortonormali. Considerati lo spazio euclideo $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ e la base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$, valgono le seguenti proprietà:

1. Per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si ha

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b_1} \rangle \mathbf{b_1} + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b_n} \rangle \mathbf{b_n} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{b_i} \rangle \mathbf{b_i} \tag{36}$$

Dimostrazione. Il vettore $\mathbf{v}$, appartenendo allo spazio $\mathcal{V}$, è esprimibile come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{b_i}$$

con $a_1, \dots, a_n$ scalari appartenenti al campo su cui è definito $\mathcal{V}$. Ora, applicando all'uguaglianza il prodotto scalare per un vettore $\mathbf{b_i} \in \mathcal{B}$, si ottiene

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b_i} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{b_i}, \mathbf{b_i} \rangle \stackrel{PS1}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j \langle \mathbf{b_j}, \mathbf{b_i} \rangle$$

Essendo $\mathcal{B}$ base composta da vettori ortonormali, ne segue che per $i \neq j$ i prodotti scalari $\langle \mathbf{b_j}, \mathbf{b_i} \rangle$ per ortogonalità dei vettori, mentre $\langle \mathbf{b_i}, \mathbf{b_i} \rangle$ è uguale a 1, essendo $\langle \mathbf{b_j}, \mathbf{b_i} \rangle = \|\mathbf{b_i}\|^2$, per ortonormalità. Quindi, si ottiene

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b_i} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b_j} \mathbf{b_i} = a_i \implies \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{b_i} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{b_i} \rangle \mathbf{b_i}$$

□

2. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ un endomorfismo di matrice associata nella base $\mathcal{B}$ corrispondente a $M_{\mathcal{B}}(T) = A = [a_{ij}]$. Allora,

$$a_{ij} = \langle T(\mathbf{b_j}), \mathbf{b_i} \rangle \tag{37}$$

Dimostrazione. Per definizione di matrice associata, si ha

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} T(\mathbf{b_1}) & \dots & T(\mathbf{b_j}) & \dots & T(\mathbf{b_n}) \end{array} \right)$$

Richiamando la proprietà precedentemente dimostrata, è possibile affermare che

$$T(\mathbf{b_j}) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(\mathbf{b_j}), \mathbf{b_i} \rangle \mathbf{b_i}$$

Quindi, la matrice associata a T nella base $\mathcal{B}$ avrà forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & \langle T(\mathbf{b_j}), \mathbf{b_1} \rangle & & \\ & & \vdots & & \\ T(\mathbf{b_1}) & \dots & \langle T(\mathbf{b_j}), \mathbf{b_i} \rangle & \dots & T(\mathbf{b_n}) \\ & & \vdots & & \\ & & \langle T(\mathbf{b_j}), \mathbf{b_n} \rangle & & \end{array} \right)$$

L'elemento di riga i-esima e colonna j-esima corrisponde a $\langle T(\mathbf{b_j}), \mathbf{b_i} \rangle$. □

Definizione 6 (Complemento ortogonale)**.** Sia $\mathcal{V}$ uno spazio euclideo e sia W un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$. Si dice *complemento ortogonale* di W l'insieme

$$W^{\perp} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W \} \tag{38}$$

Lemma. *$W^{\perp}$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$.*

Dimostrazione.

1. L'appartenenza dell'elemento nullo è verificata. Infatti, per ogni $\mathbf{w} \in W$
$$\langle \mathbf{0}_{\mathcal{V}}, \mathbf{w} \rangle = 0$$

2. Si considerino $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in W^{\perp}$. Per definizione,
$$\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W$$
La chiusura rispetto alla somma è verificata, infatti
$$\langle \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \rangle \overset{PS1}{=} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0 \implies \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \in W^{\perp}$$

3. Si considerino $\mathbf{v} \in W^{\perp}$ e lo scalare $\lambda \in \mathbb{K}$. La chiusura rispetto al prodotto per scalare è verificata, infatti
$$\langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \overset{PS1}{=} \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \implies \lambda\mathbf{v} \in W^{\perp}$$

$\square$

Proposizione 1. *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio euclideo e sia W un suo sottospazio vettoriale. Allora,*

$$\mathcal{V} = W + W^{\perp} \tag{39}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_k} \}$ una base ortonormale di W. Come conseguenza del lemma di Steinitz, è possibile completarla ad una base di $\mathcal{V}$, corrispondente a

$$\mathcal{B}' = \{ \mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_k}, \mathbf{v_{k+1}}, \dots, \mathbf{v_n} \}$$

L'ortonormalità di questa base non è garantita. Applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (= teorema) ai vettori $\mathbf{v_{k+1}}, \dots, \mathbf{v_n}$, è possibile ottenere la base ortonormale di $\mathcal{V}$

$$\mathcal{B}'' = \{ \mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_k}, \mathbf{b_{k+1}}, \dots, \mathbf{b_n} \}$$

Essendo $\mathcal{B}''$ ottenuta a partire da $\mathcal{B}'$ base di $\mathcal{V}$, è possibile esprimere $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}''$:

$$\mathbf{v} = \underbrace{a_1\mathbf{b_1} + \cdots + a_k\mathbf{b_k}}_{\in W} + \underbrace{a_{k+1}\mathbf{b_{k+1}} + \cdots + a_n\mathbf{b_n}}_{\in W^{\perp}}$$

Affermare che $a_{k+1}\mathbf{b_{k+1}} + \cdots + a_n\mathbf{b_n} \in W^{\perp}$ è lecito: infatti, per ogni $\mathbf{w} \in W$, si ha

$$\langle a_{k+1}\mathbf{b_{k+1}} + \cdots + a_n\mathbf{b_n}, \mathbf{w} \rangle = \langle a_{k+1}\mathbf{b_{k+1}} + \cdots + a_n\mathbf{b_n}, a_1\mathbf{b_1} + \cdots + a_k\mathbf{b_k} \rangle = 0$$

Questo è dovuto al fatto che tutti i vettori di $\mathcal{B}''$ sono ortogonali fra loro (infatti, quest'ultima uguaglianza è facilmente verificabile, svolgendo i calcoli). $\square$

1.3 Operatori aggiunti

Definizione 7 (Operatore aggiunto)**.** Sia $\mathcal{V}$ uno spazio euclideo e sia $T \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$. Si dice che l'operatore T possiede un *operatore aggiunto* $T^* \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ se per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si ha

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}) \rangle \tag{40}$$

Come è definito l'endomorfismo T^*?

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n} \}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$. La matrice associata a T^* in $\mathcal{B}$ risulta essere la matrice coniugata trasposta della matrice associata a T nella medesima base. Infatti, considerata $M_{\mathcal{B}}(T^*) = [a_{ij}]$, si ha

$$a_{ij} = \langle T^*(\mathbf{b_j}), \mathbf{b_i} \rangle \overset{PS2}{=} \overline{\langle \mathbf{b_i}, T^*(\mathbf{b_j}) \rangle} \overset{def}{=} \overline{\langle T^*(\mathbf{b_i}), \mathbf{b_j} \rangle} \tag{41}$$

quindi, a_{ij} corrisponde al coniugato dell'elemento sulla j-esima riga e i-esima colonna di $M_{\mathcal{B}}(T)$.

Definizione 8 (Operatore autoaggiunto)**.** Sia $\mathcal{V}$ uno spazio euclideo e sia $T \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$. L'operatore T si dice *autoaggiunto* se $T^* = T$, ovvero, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v}) \rangle \tag{42}$$

Osservazione. Essendo, in generale, $M_{\mathcal{B}}(T^*) = {}^t\overline{M_{\mathcal{B}}(T)}$, se T è autoaggiunto allora

$$T = T^* \iff M_{\mathcal{B}}(T) = {}^t\overline{M_{\mathcal{B}}(T)}$$

In particolare, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora $M_{\mathcal{B}}(T)^t M_{\mathcal{B}}(T)$. Ne segue che la matrice associata ad un operatore autoaggiunto in una base ortonormale è una matrice simmetrica.

Teorema 3 (Teorema spettrale)**.** *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio euclideo fissato sul campo $\mathbb{R}$ e sia $T \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ un operatore autoaggiunto. Allora, esiste una base ortonormale di $\mathcal{V}$ formata da autovettori per T. In particolare, T è diagonalizzabile.*

Corollario. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice simmetrica. Allora, A è simile ad una matrice diagonale*

$$D = M^{-1}AM$$

dove D è una matrice diagonale e M una matrice ortogonale, ovvero $M^{-1} = {}^tM$.

Dimostrazione. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Essendo la matrice A simmetrica per ipotesi, l'operatore $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$x \overset{T}{\mapsto} Ax$$

è un operatore autoaggiunto. Per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale $\{ \mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n} \}$ di autovettori per T. Per similitudine, si ottiene

$$D = M^{-1}AM \quad M = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b_1} & \dots & \mathbf{b_n} \end{array} \right)$$

Si osserva che

$${}^tM \cdot M = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b_n} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b_1} & \dots & \mathbf{b_n} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Ne segue che M è una matrice ortogonale. □

Dato l'operatore autoaggiunto, cosa garantisce l'esistenza di autovalori nel campo dei reali?

Lemma. *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio euclideo e sia $T \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ un operatore autoaggiunto su $\mathcal{V}$, con λ autovalore per T. Allora, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore per T, allora esiste $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Si consideri $\lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$; allora

$$\begin{aligned}\lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle &\overset{PS1}{=} \langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = \langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle = \underbrace{\langle\mathbf{v},T(\mathbf{v})\rangle}_{T \text{ è autoaggiunto}} \\ &= \langle\mathbf{v},\lambda\mathbf{v}\rangle \overset{PS2}{=} \overline{\langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle} \overset{PS1}{=} \overline{\lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle} \overset{PS2}{=} \bar{\lambda}\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\end{aligned}$$

Quindi, essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ per definizione di autovalore, vale la relazione

$$\lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = \bar{\lambda}\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

Quindi, è dimostrato che $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Abbiamo quindi dimostrato che gli autovalori per T appartengono tutti al campo dei reali. Procediamo alla dimostrazione del teorema spettrale.

Dimostrazione. Si supponda $\dim(\mathcal{V}) = n$. Per induzione su n.

$n = 1$ La matrice associata a T nella base canonica $\mathcal{C}$ ha dimensione 1×1, quindi è sicuramente diagonalizzabile, essendo la matrice composta da un unico elemento corrispondente alla sua diagonale principale.

$n-1 \rightsquigarrow n$ Per il lemma precedentemente dimostrato, esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore per T per cui esiste un autovettore non nullo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Si consideri il sottospazio vettoriale $U = \mathcal{L}(\mathbf{u}) \subseteq \mathcal{V}$ ed il suo complemento ortogonale

$$U^{\perp} = \{\, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0 \forall\mathbf{w} \in U \,\}$$

Sapendo che $U \cap U^{\perp} = \{\, \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \,\}$, per Grassmann si ha

$$\dim(U^{\perp}) = \dim(U) + \dim(U^{\perp}) - \dim(U \cap U^{\perp}) = n + 0 - 1 = n - 1$$

Ne segue che per $U^{\perp}$ il teorema spettrale è valido. Verifichiamo che sia possibile attuare una restrizione di T su $U^{\perp}$, ovvero che $T(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$ e quindi per ogni $\mathbf{v} \in U^{\perp}$ valga $T(\mathbf{v} \in U^{\perp}$.

$$\begin{aligned}T(\mathbf{v}) \in U^{\perp} &\implies \langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle = 0 \quad \forall\mathbf{w} \in U \\ &\iff \underbrace{\langle\mathbf{v},T(\mathbf{w})\rangle = 0 \quad \forall\mathbf{w} \in U}_{T \text{ è autoaggiunto}} \\ &\iff \langle\mathbf{v},T(m\mathbf{u})\rangle \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ &\iff \langle\mathbf{v},\underbrace{m\lambda\mathbf{u}}_{\in U}\rangle = 0\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è verificata, poiché $\mathbf{v} \in U^{\perp}$ per ipotesi. Si consideri allora la restrizione

$$T|_{U^{\perp}} : U^{\perp} \to U^{\perp}$$

Per il teorema spettrale, esiste una base di ortonormale $\{ \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \}$ di $U^\perp$ formata da autovettori per $T|_{U^\perp}$. Si consideri $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$. Allora, l'insieme

$$\mathcal{B} = \{ \mathbf{v}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \}$$

è una base di $\mathcal{V} = U + U^\perp$ formata da autovettori per T. $\square$