1. Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{W}$ di $\mathcal{V}$ si dice sottospazio vettoriale se:
   (a) $\mathbf{0}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{W}$
   (b) $\mathcal{W}$ è chiuso rispetto alla somma
   (c) $\mathcal{W}$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare
2. Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Vettori generatori dato un set di vettori appartenenti a $\mathcal{V}$, essi costituiscono un sistema di *generatori* se e solo se lo spazio delle combinazioni lineari generato dai vettori coincide con $\mathcal{V}$; ovvero, per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esistono scalari $a_1, \ldots, a_n$ tali che

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} \tag{1}$$

Vettori linearmente indipendenti dati i vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in \mathcal{V}$, essi si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se il vettore nullo è esprimibile come loro combinazione lineare banale; ovvero,

$$a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \iff a_1 = \cdots = a_n = 0 \tag{2}$$

Base dato un set di vettori appartenenti a $\mathcal{V}$, essi ne costituiscono una *base* se e solo se essi sono linearmente indipendenti e generano $\mathcal{V}$.

Proposizione 1. *Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})$ e $\mathcal{Q} = (\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_m})$ basi di $\mathcal{V}$.

(a) Poiché $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}$ sono linearmente indipendenti e $\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_m}$ generano $\mathcal{V}$ – in quanto appartenenenti alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{Q}$ – per il lemma di Steinitz $m \geq n$.

(b) Poiché $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}$ generano $\mathcal{V}$ e $\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_m}$ sono linearmente indipendenti – in quanto appartenenenti alle basi $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{B}$ – per il lemma di Steinitz $m \leq n$.

Da (a) e (b) si deduce che $m = n$; quindi, le basi hanno lo stesso numero di elementi. □

3.

Teorema 1 (Formula di Grassmann)**.** *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathcal{V}$ a dimensione finita. Allora, anche i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$ hanno dimensione finita e vale*

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U + W \tag{3}$$

Dimostrazione. L'intersezione $U \cap W$ è stato dimostrato essere sempre un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$. Ne segue che tale sottospazio esiste ed è a sua volta sottospazio vettoriale di U, che ha dimensione finita. Quindi, $q := \dim U \cap W \leq t$ è un numero finito, e si definiscono $t + q := \dim U$ e

$s+q := \dim W$. Si consideri ora una generica base di $U \cap W$ costituita da $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}$. Essendo i suoi elementi appartenenti sia a U che a W, è possibile completare $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}$ alle basi $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}$ di U e $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s}$ di W.

Osservazione. Affermo che $(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s})$, l'unione delle basi di U e W, è base di $U+W$, essendo esso il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $U \cup W$. Se questo è vero, allora l'insieme $U+W$ ha dimensione finita $q+t+s$ (essendo unione di spazi di dimensioni $t+q$ e $s+q$) e la formula di Grassmann risulta verificata, infatti:

$$(t+q)+(s+q) = (q+t+s)+q \implies \text{l'identità è confermata.} \tag{4}$$

Dimostriamo dunque che $(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s})$ è una base di $U+W = \{\, \mathbf{u}+\mathbf{w} \colon \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W \,\}$.

(a) Si considerino i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$. Essi possono essere espressi rispettivamente come combinazioni lineari delle basi di U e di W:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{z_1} + \dots + a_q\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} \tag{5}$$

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{z_1} + \dots + c_q\mathbf{z_q} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} \tag{6}$$

da cui si ricava che

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{w} &= a_1\mathbf{z_1} + \dots + a_q\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} + \\
&\quad + c_1\mathbf{z_1} + \dots + c_q\mathbf{z_q} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} && (7)\\
&= (a_1+c_1)\mathbf{z_1} + \dots + (a_q+c_q)\mathbf{z_q} + \\
&\quad + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} && (8)\\
&= \sum_{i=1}^{q}(a_i+c_i)\mathbf{z_i} + \sum_{i=1}^{t} b_i\mathbf{u_i} + \sum_{i=1}^{s} d_i\mathbf{w_i} && (9)
\end{aligned}$$

è combinazione lineare di $(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_s})$. È quindi possibile affermare che tali vettori sono generatori.

(b) Si consideri la seguente combinazione lineare:

$$a_1\mathbf{z_1} + \dots + a_q\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} + d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s} = 0 \tag{10}$$

sistemando i termini, si definisca il vettore $\mathbf{v}$ nel seguente modo:

$$\mathbf{v} := \underbrace{d_1\mathbf{w_1} + \dots + d_s\mathbf{w_s}}_{\mathbf{v} \in W} = \underbrace{-a_1\mathbf{z_1} - \dots - a_q\mathbf{z_q} - b_1\mathbf{u_1} - \dots - b_t\mathbf{u_t}}_{\mathbf{v} \in U} \tag{11}$$

È possibile affermare che $\mathbf{v}$ appartiene a $U \cap W$, e quindi vale la relazione

$$\underbrace{-a_1\mathbf{z_1} - \dots - a_q\mathbf{z_q} - b_1\mathbf{u_1} - \dots - b_t\mathbf{u_t}}_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_t})} = \underbrace{k_1\mathbf{z_1} + \dots + k_q\mathbf{z_q}}_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_q})} \tag{12}$$

da cui si ottiene

$$(a_1+k_1)\mathbf{z_1} + \dots + (a_q+k_q)\mathbf{z_q} + b_1\mathbf{u_1} + \dots + b_t\mathbf{u_t} = 0 \tag{13}$$

$$\Downarrow \tag{14}$$

$$(a_1+k_1) = \dots = (a_q+k_q) = b_1 = \dots = b_t = 0 \tag{15}$$

essendo $\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_t}$ vettori appartenenti alla base di U e quindi linearmente indipendenti. Considerando la combinazione lineare (10), sapendo ora che $b_1 = \cdots = b_t = 0$, si ha

$$a_1\mathbf{z_1} + \cdots + a_q\mathbf{z_q} + d_1\mathbf{w_1} + \cdots + d_s\mathbf{w_s} = 0 \tag{16}$$

Essendo essa combinazione lineare dei vettori della base di W – ed essendo essi linearmente indipendenti – ne segue che

$$a_1 = \cdots = a_q = d_1 = \cdots = d_s = 0 \tag{17}$$

Pertanto, $\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ sono vettori linearmente indipendenti.

Essendo i vettori $(\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_q}, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_t}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s})$ generatori e linearmente indipendenti, essi costituiscono una base di $U+W$ e l'affermazione compiuta precedentemente è verificata, quindi la formula è verificata. □

4. Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Considerate le righe di A come vettori nell'insieme $\mathbb{K}^n$, si dice *rango* di A il numero massimo di righe linearmente indipendenti. Equivalentemente, il rango di A corrisponde alla dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

Proposizione 2. *Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, siano $\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_m}$ le righe di A e $\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n}$ le colonne di A. Allora, vale la relazione*

$$\varrho(A) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n}). \tag{18}$$

Promemoria. Essendo per definizione $\varrho(A) := \dim \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_m})$, sarà sufficiente dimostrare che le dimensioni dello spazio delle righe e dello spazio delle colonne coincidono. Ricordiamo che con a_{ij} viene indicato l'elemento della matrice A sull'i-esima riga e la j-esima colonna; $\mathbf{r_{i_1}}, \ldots, \mathbf{r_{i_k}}$, invece, denota un certo insieme di elementi dello spazio delle righe di A considerate a meno del loro effettivo ordine.

Dimostrazione. La dimensione di $\mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n})$ è dipendente dalle relazioni di dipendenza lineare fra le colonne della matrice A. Tali relazioni sono determinate dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$:

$$A\mathbf{X} = \mathbf{0} \implies \begin{cases} a_{11}\mathbf{x_1} + \cdots + a_{1n}\mathbf{x_n} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{x_1} + \cdots + a_{mn}\mathbf{x_n} = 0 \end{cases}$$

$$\implies \mathbf{x_1}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \mathbf{x_n}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sapendo che $k := \varrho(A)$, si può affermare che esistono k righe di A, denotate con $\mathbf{r_{i_1}}, \ldots, \mathbf{r_{i_k}}$ linearmente indipendenti; le rimanenti $m-k$ righe di A possono essere espresse come loro combinazione lineare. Si consideri quindi la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{r_{i_1}} \\ \vdots \\ \mathbf{r_{i_k}} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k,n}$$

Osservazione. Le soluzioni di $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e $A'\mathbf{X} = \mathbf{0}$ sono coincidenti. Infatti, presa un'n-upla che soddisfa $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$, essa risulta essere soddisfacente $A'\mathbf{X} = \mathbf{0}$, essendo A composta dalle righe di A' e da altre righe esprimibili come combinazione lineare di $\mathbf{r_{i_1}}, \dots, \mathbf{r_{i_k}}$.

Pertanto, la dimensione dello spazio delle colonne di A coincide con quella dello spazio delle colonne di A', che è debolmente minore di k in quanto le colonne di A' sono vettori di $\mathbb{K}^k$; vale quindi la relazione $\dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}) \leq k$.

Si consideri la matrice ${}^tA$, trasposta di A. Applicando il ragionamento precedente su A^t, si evince che:

- La dimensione dello spazio delle colonne di A^t è debolmente minore di $\varrho(A^t)$, che per definizione coincide con la dimensione del suo spazio delle righe.
- Essendo A^t trasposta di A, la dimensione dello spazio delle righe di A^t coincide con la dimensione dello spazio delle colonne di A (rispettivamente, la dimensione dello spazio delle colonne di A^t coincide con la dimensione dello spazio delle righe di A).

Per cui, essendo $\dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}) \leq k$ e $(k = \dim \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m}) \leq \dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n})$, vale $\varrho(A) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m}) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n})$ □

5.

Definizione 1 (matrice invertibile)**.** Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice quadrata. Essa si dice *invertibile* se e solo se

$$\exists_{A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}} \quad _{A \cdot A^{-1} = I_n}.$$

Calcolo dell'inversa di una matrice Data una matrice invertibile, come è possibile calcolare la sua inversa?

Osservazione. Dalla definizione di prodotto tra matrici, si ha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

che implica

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + \dots + a_[1nx_{n1} = 1 \\ a_{11}x_{21} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Essendo le matrici di dimensioni $n \times n$, si ottiene un sistema lineare di n^2 equazioni in n^2 incognite. È un metodo efficiente? No. Esiste una soluzione più efficace? SÌ.

Consideriamo le righe della matrice inversa come incognite del sistema lineare. A^{-1} viene espressa come

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \dots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{x_i} \in \mathbb{K}^n$ denotante una riga della matrice inversa. Si ottiene il sistema

$$A \cdot A^{-1} = I_n \implies A \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \dots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

detto *sistema lineare a incognite vettoriali.* Applicando ad A il metodo di riduzione per righe, si ottiene che il sistema è risolvibile — e quindi A è invertibile — se e solo se $\varrho(A|I_n) = \varrho(A)$ (per Rouché-Capelli). Essendo I_n ridotta di rango n, ne segue che il sistema è risolvibile se e solo se

$$\varrho(A|I_n) = \varrho(A) = n$$

Teorema 2. *Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice quadrata. Allora, la matrice A è invertibile se e solo se ha rango massimo, ovvero*

$$\varrho(A) = \varrho(A|I_n) = n \iff \exists_{A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}} \quad A \cdot A^{-1} = I_n$$

6.

Definizione 2 (matrice ridotta per righe)**.** Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice *ridotta per righe* se ogni riga non nulla di A contiene un elemento diverso da zero sotto al quale compaiono soltanto zeri.

7. Un *sistema lineare* è un insieme di m equazioni lineari in n incognite, ovvero di m equazioni nella forma $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ con $x_1, \dots, x_n$ incognite di primo grado (monico?) e $a_1, \dots, a_n$ coefficienti in $\mathbb{K}$. Data l'n-upla $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$, essa si dice *soluzione* di un'equazione lineare se $a_1k_1 + \cdots + a_nk_n = 0_{\mathbb{K}}$. Una soluzione comune a tutte le equazioni del sistema è soluzione del sistema. Un sistema lineare è rappresentabile mediante una notazione a doppio indice, e viene espresso come

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{K}$ indica il coefficiente dell'incognita x_j nell'i-esima equazione del sistema e b_i il termine noto di tale equazione. Il sistema può essere riscritto in forma matriciale nel seguente modo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{K}^{m,n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X} \in \mathbb{K}^{n,1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B \in \mathbb{K}^{m,1}}$$

A è detta *matrice dei coefficienti*, $\mathbf{X}$ è detto *vettore delle incognite* e B è il *vettore dei termini noti.*

Osservazione. Dalla definizione di prodotto tra matrici, si ha che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Da cui si evince che il sistema ammette soluzione se e solo se il vettore B dei termini noti può essere ottenuto come combinazione lineare dei vettori costituiti dalle colonne di A. Indicate con $\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}$ le colonne di A, vale la relazione

$$B \in \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}) \iff \text{il sistema ammette soluzioni}$$

Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n})$ è detto *spazio delle colonne* di A.

Definizione 3 (matrice completa di un sistema)**.** Sia $A\mathbf{X} = B$ un sistema lineare con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Si dice *matrice completa* del sistema la matrice ottenuta orlando A con B. Denotata con $A|B$, questa matrice corrisponde a

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n+1}$$

Promemoria. Data una matrice $M \in \mathbb{K}^{m,n}$, vale la relazione

$$\varrho(M) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \dots, \mathbf{r_m}) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_n}).$$

Se B può essere ottenuto come combinazione lineare delle colonne di A, lo spazio vettoriale generato da queste coincide con quello generato dalle colonne di $A|B$. Pertanto, ricorrendo alla relazione contenuta nel promemoria, il sistema ammette soluzione se e solo se $\varrho(A|B) = \varrho(A)$.

Teorema 3 (Rouché-Capelli, prima enunciazione)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché $A\mathbf{X} = B$ ammetta soluzione è che $\varrho(A|B) = \varrho(A)$.*

Come è possibile determinare le soluzioni di un sistema lineare che ammette soluzioni?

(a) Se il sistema lineare è ridotto, è possibile passare alla sua risoluzione.

(b) Se si ha un generico sistema lineare, è necessario operare una riduzione per poi passare alla sua risoluzione.

Definizione 4 (sistema lineare ridotto)**.** Dato un sistema lineare $A\mathbf{X} = B$, esso si dice *ridotto* se la matrice dei coefficienti A risulta essere ridotta per righe.

(a) Un metodo per risolvere un sistema lineare ridotto consiste nell'isolare singole incognite, procedendo a ritroso dall'ultima equazione. Essendo la matrice dei coefficienti ridotta, è garantita l'esistenza, ad ogni passaggio, di un'incognita non presente nell'equazione precedente risolta; pertanto, è possibile isolare ad ogni passaggio un'incognita differente.

(b) Nel caso di un sistema lineare non ridotto, è possibile procedere alla riduzione per righe di $A|B$, ottenendo la matrice $A'|B'$ dove A' è la ridotta corrispondente alla matrice dei coefficienti A.

Osservazione. Essendo $A'|B'$ ridotta di $A|B$, gli spazi vettoriali generati dalle colonne di una o dell'altra matrice coincidono. Pertanto, anche le soluzioni dei due sistemi coincidono.

Sia $A\mathbf{X} = B$ un sistema lineare in n incognite che ammette soluzione. Vale $k := \varrho(A|B) = \varrho(A)$. Il sistema lineare ridotto $A'\mathbf{X} = B'$ è quindi composto da k equazioni, corrispondenti alle righe non nulle di $A'|B'$. Pertanto, la soluzione del sistema sarà costituita da $n - k$ *incognite libere* e da k incognite espresse in funzione delle incognite libere. Se la soluzione del sistema dipende da $n-k$ parametri liberi, si dice che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni.

Teorema 4 (Rouché-Capelli, enunciato completo)**.** *Sia $A\mathbf{X} = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Allora:*

(a) Il sistema ammette soluzione ed è quindi risolvibile se e solo se $\varrho(A|B) = \varrho(A)$, con $k := \varrho(A|B)$ numero di incognite libere.

(b) Se il sistema è risolvibile, allora ammette ∞^{n-k} soluzioni.

8.

Teorema 5 (Binet)**.** *Date le matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$, si ha*

$$\det AB = \det A \cdot \det B \tag{19}$$

ovvero, il determinante ha carattere moltiplicativo.

Proposizione 3. *Una matrice quadrata ha determinante non nullo se e solo se ha rango massimo.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Affermare che una matrice quadrata ha rango massimo è equivalente a dire che essa è invertibile. Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $\varrho A = n$, allora esiste la matrice inversa A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = I_n$. Applicando il teorema di Binet, si ha

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1 \tag{20}$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \tag{21}$$

ciò implica che $\det A \neq 0$. In particolare,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tag{22}$$

(⇒) Dimostrare che se $\det A \neq 0$ allora la matrice non ha rango massimo è equivalente a dimostrare che se il rango della matrice non è massimo allora $\det A = 0$. Se il rango della matrice non è massimo, esiste una riga di A ottenibile come combinazione lineari delle rimanenti righe:

$$\mathbf{r_i} = c_1\mathbf{r_1} + \cdots + c_{i-1}\mathbf{r_{i-1}} + c_{i+1}\mathbf{r_{i+1}} + \cdots + c_n\mathbf{r_n} \tag{23}$$

Quindi, ne segue, dalle proprietà dei determinanti:

$$\det A = c_1 \det \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r_n} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \det \begin{pmatrix} \mathbf{r_n} \\ \mathbf{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r_n} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Ed essendoci in ogni matrice due righe uguali, si ha

$$\det A = 0 \cdots 0 = 0 \tag{25}$$

□

9. Dati due insiemi A e B e la funzione $f\colon A \to B$, si dice che:

   (a) f è *iniettiva* se

   $$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \tag{26}$$

   o equivalentemente

   $$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \tag{27}$$

   per ogni $a_1, a_2 \in A$.

   Osservazione. Se esiste $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tale che $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_\mathcal{V}$ e $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_\mathcal{V}$ allora f non è iniettiva.

   (b) f è *suriettiva* se

   $$\forall_{b\in B}\exists_{a\in A} b = f(a). \tag{28}$$

   Promemoria. Trovare una base di $\ker f$ significa trovare i vettori che appartengono all'insieme $\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_\mathcal{W} \}$, ovvero, trovare i vettori appartenenti a

   $$\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : M(f)\mathbf{v} = \mathbf{0}_\mathcal{W} \} \tag{29}$$

   Analogamente, una base di $\operatorname{Im} f$ equivale ad una base dello spazio delle colonne di $M(f)$.

10.

   Definizione 5 (Nucleo di un'applicazione)**.** Sia $f\colon \mathcal{V} \to W$ una funzione lineare. Si dice *nucleo* di f (o *kernel*) l'insieme

   $$\ker f = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0_W} \} \tag{30}$$

   Osservazione. Cosa garantisce l'esistenza del nucleo? La funzione è influenzata dalla composizione del nucleo?

(a) Essendo $f(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$ precedentemente dimostrato, si ha

$$\mathbf{0}_{\mathcal{V}} \in \ker f \implies \ker f \neq \emptyset \tag{31}$$

Il nucleo di f esiste sempre.

(b) Se $\mathbf{v} \in \ker f$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ allora la funzione non è iniettiva.

Teorema 6. *Sia $f : \mathcal{V} \to W$ una funzione lineare. Allora,*

$$f \text{ \textit{è iniettiva}} \iff \ker f = \{ \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \} \tag{32}$$

Dimostrazione. Verifichiamo la doppia implicazione nei due versi distinti.

($\Longrightarrow$) È verificata per l'osservazione (2) del punto precedente.

($\Longleftarrow$) Si supponga che $\ker f = \{ \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \}$ e $f(\mathbf{v_1}) = f(\mathbf{v_2})$; per la definizione di funzione iniettiva, deve essere verificata l'uguaglianza $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2}$.

$$f(\mathbf{v_1}) = f(\mathbf{v_2}) \implies f(\mathbf{v_1}) - f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \tag{33}$$

$$f(\mathbf{v_1}) - f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \stackrel{L2}{=} f(\mathbf{v_1}) + f(-\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \tag{34}$$

$$f(\mathbf{v_1}) + f(-\mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \stackrel{L1}{=} f(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = \mathbf{0_W} \tag{35}$$

Quindi, $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} \in \ker f = \{ \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \}$, da cui

$$\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \mathbf{0}_{\mathcal{V}} \implies \mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} \tag{36}$$

□