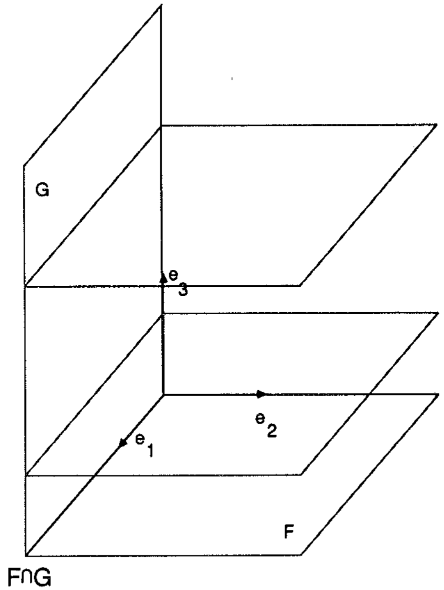
una de esas clases el plano paralelo a G que la contiene (que es un elemento de $\mathbf{R}^3/G$).



V.4 El espacio de las aplicaciones lineales

Consideremos el conjunto $L(E,F)$ de todas las aplicaciones lineales de E en F. Hay una manera natural de definir una suma y un producto por elementos del cuerpo K en $L(E,F)$. Concretamente, si $f,g \in L(E,F)$ y $a \in K$, definimos *la suma* $f+g$ por

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u) \qquad \forall u \in E$$

y *el producto* af por

$$(af)(u) = af(u) \qquad \forall u \in E.$$

Las aplicaciones $f+g$ y af son, claramente, lineales. $L(E,F)$ con estas dos operaciones cumple todas las condiciones de espacio vectorial (IV.1); lo llamaremos *espacio vectorial de las aplicaciones de E en F*.

Proposición 4.1 *Si E y F son de dimensión finita, $L(E,F)$ también lo es y* $\dim L(E,F) = \dim E \cdot \dim F$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $u_1,\ldots,u_n$ una base de E y $v_1,\ldots,v_m$ una base de F. Definimos

$$f_{ij} : E \to F, \qquad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m,$$

por $f_{ij}(u_k) = \vec{0}$ si $k \neq i$, $f_{ij}(u_i) = v_j$.

La proposición quedará demostrada si probamos que estas nm aplicaciones forman una base de $L(E,F)$. Para ello, tenemos que ver que

- $\{f_{ij}\}$ genera $L(E,F)$. En efecto, sea $f : E \to F$ lineal; supongamos que $f(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_k^j v_j$. Entonces $f = \sum_{i,j} a_i^j f_{ij}$, ya que para todo u_k

$$\left(\sum_{i,j} a_i^j f_{ij}\right)(u_k) = \sum_{i,j} a_i^j f_{ij}(u_k) = \sum_j a_k^j v_j = f(u_k).$$

- $\{f_{ij}\}$ son linealmente independientes. En efecto,

$$\sum_{i,j} a_i^j f_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} a_i^j f_{ij}(u_k) = \vec{0} \qquad \forall k = 1,\ldots,n.$$

Mediante un cálculo como el efectuado más arriba, obtenemos

$$\sum_j a_k^j v_j = \vec{0}, \qquad k = 1,\ldots,n$$

y, por tanto, $a_k^j = 0$ para todo $k = 1,\ldots,n$ y todo $j = 1,\ldots,m$. □

La matriz de la aplicación f_{ij} respecto a las bases $u_1,\ldots,u_n$ y $v_1,\ldots,v_m$ es la matriz E_i^j formada por 0 en todas las posiciones, excepto en la columna i, fila j, donde aparece un 1. En (IV.3) vimos que esas matrices forman una base de $M_{m\times n}(K)$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & M_{m\times n}(K) \\ f_{ij} & \longmapsto & E_i^j \end{array} \qquad i = 1,\ldots,n, \qquad j = 1,\ldots,m$$

es un isomorfismo entre estos dos espacios vectoriales. De la demostración de (4.1) se deduce que este isomorfismo asocia a cada aplicación lineal f su matriz en las bases consideradas.

V.5 El álgebra de endomorfismos

Un caso particular del espacio estudiado en el apartado anterior es $L(E,E)$, el espacio de los endomorfismos de E, que denotaremos por $\mathrm{End}(E)$.

Dos elementos $f,g \in \mathrm{End}(E)$ se pueden componer siempre y la composición $g \circ f$ es también un elemento de $\mathrm{End}(E)$, que denominaremos *producto*, o *producto interno* si hay peligro de confusión con el producto por elementos del cuerpo. Este producto cumple las propiedades siguientes:

- Asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \forall f, g, h \in \mathrm{End}(E)$.
- Existe un elemento neutro, que es la aplicación identidad I_E:

$$I_E \circ f = f \circ I_E = f \qquad \forall f \in \mathrm{End}(E).$$

En general, no obstante, el producto no es conmutativo y los únicos elementos que tienen inverso son los endomorfismos biyectivos (automorfismos).

El producto interno de $\mathrm{End}(E)$ está relacionado con las dos operaciones de la estructura vectorial por las propiedades siguientes:

- Distributivas:

$$\begin{aligned} (h+g)\circ f &= h\circ f + g\circ f \\ h\circ(g+f) &= h\circ g + h\circ f \qquad \forall f,g,h \in \mathrm{End}(E). \end{aligned}$$

- $(ag)\circ f = a(g\circ f) = g\circ(af) \ \ \forall a \in K \ \ \forall f, g \in \mathrm{End}(E)$.

En particular, $\mathrm{End}(E)$ con las operaciones $+$ y $\circ$ es un anillo con unidad.

Un conjunto A con tres operaciones —una suma $+$, un producto $\cdot$, y un producto por elementos de un cuerpo K— se llama una *álgebra sobre* K si A con $+$ y $\cdot$ es un anillo, A con $+$ y el producto por elementos de K es un espacio vectorial y $k(a \cdot b) = (ka) \cdot b = a \cdot (kb)$ para todo $k \in K$, $a, b \in A$.

Ejemplos:

1. El conjunto de polinomios $K[x]$ es una álgebra conmutativa y con unidad sobre K.
2. $\mathrm{End}(E)$ es una álgebra con unidad. También es una álgebra con unidad el conjunto de las matrices cuadradas $M_{n\times n}(K)$. Si E es de dimensión n, en el apartado anterior hemos establecido una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) = L(E,E) & \longrightarrow & M_{n\times n}(K) \\ f & \longmapsto & A \end{array}$$

donde A es la matriz asociada a f en una base prefijada del espacio E. Esta aplicación es un isomorfismo de espacios vectoriales y, además, "conserva" los productos internos, por (2.2). Se dice entonces que es un isomorfismo de álgebras y que las álgebras $\mathrm{End}(E)$ y $M_{n\times n}(K)$ son isomorfas.

Denominaremos *homotecia vectorial de razón* a al endomorfismo aI_E de E.

Proposición 5.1 *Si E tiene dimensión 1, sus únicos endomorfismos son las homotecias vectoriales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $u \neq 0$ una base de E y $f \in \mathrm{End}(E)$. La imagen de u se expresa como combinación lineal de la base:

$$f(u) = au.$$

Entonces, la imagen de cualquier otro vector $v = cu \in E$ es

$$f(v) = f(cu) = cf(u) = c(au) = a(cu) = av,$$

de donde resulta que $f = aI_E$. □

Observemos que, en el caso de la proposición 5.1, la matriz de $f = aI_E$ es precisamente (a) y, por tanto, independiente de la base. El isomorfismo de álgebras del ejemplo 2 es, en este caso, un isomorfismo canónico

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) & \xrightarrow{\simeq} & K \\ f = aI_E & \longmapsto & a. \end{array}$$

V.6 El espacio dual

En este apartado vamos a estudiar otro caso particular del espacio de aplicaciones lineales: el caso en que el segundo espacio vectorial es K. Las aplicaciones lineales en K se llaman, también, *formas*; al espacio

$$E' = L(E, K)$$

lo llamaremos el *espacio dual de* E. Todas las consideraciones del apartado 4 se aplican, en particular, a este caso. Así pues, E' es un espacio vectorial de la misma dimensión que E (si $\dim E$ es finita). Dada una base $u_1, \ldots, u_n$ de E, las aplicaciones

$$\begin{array}{rrcll} u_i' : & E & \longrightarrow & K & \\ & u_j & \longmapsto & 0 \ \text{ si } \ i \neq j & \\ & u_j & \longmapsto & 1 \ \text{ si } \ i = j, & \qquad i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

forman una base de E', que denominaremos *base dual* de $u_1, \ldots, u_n$.

¡Atención!:

Supongamos que $u_1, \ldots, u_n$ y $v_1, \ldots, v_n$ son dos bases diferentes de E, pero con algunos vectores comunes, por ejemplo $u_1 = v_1$; en las bases duales $u_1', \ldots, u_n'$, $v_1', \ldots, v_n'$ los elementos u_1' y v_1' no tienen por qué ser iguales.

Proposición 6.1 *Sea $u_1, \ldots, u_n$ una base del espacio E y $u'_1, \ldots, u'_n$ su base dual. Las coordenadas de una forma $\omega \in E'$ en la base $u'_1, \ldots, u'_n$ son $\omega(u_1), \ldots, \omega(u_n)$*

$$\omega = \omega(u_1)u'_1 + \ldots + \omega(u_n)u'_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Para todo vector u_k de la base de E, tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \omega(u_i)u'_i\right)(u_k) = \sum_{i=1}^{n} \omega(u_i)u'_i(u_k) = \omega(u_k)$$

y, por tanto, $\sum_{i=1}^{n} \omega(u_i)u'_i = \omega$. □

Fijada una aplicación lineal $f : E \to F$, cada elemento $\omega \in F'$ nos da, al componer con f, un elemento $\omega \circ f$ de E'

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\omega \circ f"'] & F \arrow[d, "\omega"] \\ & K. \end{tikzcd}$$

Tenemos, por tanto, una aplicación de F' en E', que designaremos por

$$f' : F' \to E'$$

y denominaremos *aplicación dual de f*. Es fácil ver que f' es lineal y que

$$(g \circ f)' = f' \circ g'.$$

Comprobamos esto último: para toda forma ω,

$$(g \circ f)'(\omega) = \omega \circ (g \circ f) = (\omega \circ g) \circ f = f'(\omega \circ g) = f'(g'(\omega)) = (f' \circ g')(\omega).$$

Supongamos, ahora, que $f : E \to F$ tiene por matriz asociada en unas determinadas bases $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_m$ la matriz $A = (a_i^j)$. Sea $B = (b_i^j)$ la matriz asociada a $f' : F' \to E'$ en las bases duales de las anteriores: $v'_1, \ldots, v'_m$, $u'_1, \ldots, u'_n$. ¿Cuál es la relación entre las matrices A y B? Por (6.1),

$$\begin{aligned} b_i^j &= (f'(v'_i))(u_j) &&= (v'_i \circ f)(u_j) &&= v'_i(f(u_j)) = \\ &= v'_i\left(\sum_{k=1}^{m} a_j^k v_k\right) &&= \sum_{k=1}^{m} a_j^k v'_i(v_k) &&= a_j^i. \end{aligned}$$

Así pues,

Proposición 6.2 *Si A es la matriz de la aplicación lineal f en unas determinadas bases, la matriz de su dual f' en las bases duales es la matriz* traspuesta *de A, que denotaremos por A^t.* □

Podemos considerar el espacio dual de cualquier espacio vectorial; en particular, podemos considerar el espacio dual de E', que denominaremos *bidual de E* y denotaremos por E''. Nos proponemos demostrar que, si la dimensión de E es finita, el bidual E'' es canónicamente isomorfo al espacio inicial E.

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & E' \times E & \longrightarrow & K \\ & (\omega, u) & \longmapsto & \langle \omega, u\rangle = \omega(u). \end{array}$$

Si fijamos $u \in E$, obtenemos una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \langle\ , u\rangle : & E' & \longrightarrow & K \\ & \omega & \longmapsto & \langle \omega, u\rangle \end{array}$$

que es lineal y, por tanto, un elemento de E''.

Proposición 6.3 *Si la dimensión de E es finita, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E'' \\ & u & \longmapsto & \langle\ , u\rangle \end{array}$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: φ es lineal, ya que para todo $u, v \in E$ y todo $\omega \in E'$,

$$\begin{aligned} (\varphi(u+v))(\omega) &= \langle \omega, u+v\rangle = \omega(u+v) = \\ &= \omega(u) + \omega(v) = \langle \omega, u\rangle + \langle \omega, v\rangle = \\ &= \varphi(u)(\omega) + \varphi(v)(\omega) = \\ &= (\varphi(u) + \varphi(v))(\omega), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

Análogamente se demuestra que $\varphi(au) = a\varphi(u)$.

Para ver que φ es inyectiva, probaremos que el único vector del núcleo es $\vec{0}$ (1.2). Si $\varphi(u) = \vec{0}$, entonces, para todo $\omega \in E'$,

$$0 = \varphi(u)(\omega) = \langle \omega, u\rangle = \omega(u).$$

Si $u \neq \vec{0}$, hay una base de E de la forma $u, u_2, \ldots, u_n$; consideremos un $\omega \in E'$ tal que $\omega(u) = 1$, $\omega(u_i) = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Entonces

$$\varphi(u)(\omega) = \langle \omega, u\rangle = 1 \neq 0,$$

en contra de lo que hemos obtenido antes. Así pues, $u = \vec{0}$ y la aplicación φ es inyectiva.

La exhaustividad de φ resulta de (1.1) y de que E y E'' tienen la misma dimensión finita. □

Observación:

En la demostración anterior solamente hemos utilizado que la dimensión de E es finita para probar la exhaustividad; para espacios de dimensión infinita, φ es un monomorfismo.

Proposición 6.4 *Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios de dimensión finita, y sea $f'' : E'' \to F''$ su bidual. Si $\varphi : E \cong E''$ y $\bar{\varphi} : F \cong F''$ son los isomorfismos de (6.3), entonces*

$$\bar{\varphi}^{-1} \circ f'' \circ \varphi : E \cong E'' \longrightarrow F'' \cong F$$

coincide con f.

DEMOSTRACIÓN: Si $u \in E$,

$$(f'' \circ \varphi)(u) = f''(\langle\ ,u\rangle) = \langle\ ,u\rangle \circ f' \in F'',$$

y si $\omega \in F'$,

$$\begin{aligned}(\langle\ ,u\rangle \circ f')(\omega) &= \langle\ ,u\rangle(f'(\omega)) = \langle f'(\omega), u\rangle = (f'(\omega))(u) = \\ &= \omega(f(u)) = \langle \omega, f(u)\rangle = \langle\ ,f(u)\rangle(\omega),\end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\langle\ ,u\rangle \circ f' = \langle\ ,f(u)\rangle.$$

El vector de F que corresponde por $\bar{\varphi}$ a este elemento de F'' es $f(u)$ y, por tanto,

$$\left(\bar{\varphi}^{-1} \circ f'' \circ \varphi\right)(u) = \bar{\varphi}^{-1}(\langle\ ,f(u)\rangle) = f(u).$$

Así pues, $\bar{\varphi}^{-1} \circ f'' \circ \varphi = f$. □

V.7 Subespacios ortogonales

En este apartado supondremos que trabajamos únicamente con espacios vectoriales de dimensión finita. Al igual que en el apartado anterior, E' indicará el dual del espacio E, $E' = L(E, K)$.

Sea A un subconjunto de E. Definimos el *ortogonal de A* como el conjunto

$$A^{\perp} = \{\omega \in E' \mid \omega(u) = 0\ \forall u \in A\}.$$

Se tienen, entonces, las propiedades siguientes:

1. $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E'.
2. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
3. Si F es un subespacio de E, $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.
4. $E^{\perp} = \{0\}$, $\{\vec{0}\}^{\perp} = E'$.

1, 2 y 4 son inmediatas; demostremos 3: tomemos una base $u_1, \ldots, u_k$ de F y completémosla hasta obtener una base $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ de E. Sea $u'_1, \ldots, u'_k, u'_{k+1}, \ldots, u'_n$ la base dual correspondiente. Para $j =$ k+1$, \ldots, n$, u'_j se anula sobre la base $u_1, \ldots, u_k$ de F y, por tanto, sobre todo F; es decir, $u'_j \in F^{\perp}$ para $j = k+1, \ldots, n$. Ahora bien, estos elementos forman una base de $F^{\perp}$, ya que son linealmente independientes (por formar parte de una base) y generan $F^{\perp}$, ya que si $\omega = a^1 u'_1 + \ldots + a^n u'_n \in F^{\perp} \subset E'$, como $u_h \in F$, $h = 1, \ldots, k$, se tiene $0 = \omega(u_h) = a^h$, de donde $\omega = a^{k+1} u'_{k+1} + \ldots + a^n u'_n$.

Queremos definir, ahora, el ortogonal de un subconjunto A de E'. Hay dos maneras de hacerlo.

1. $A^{\perp} = \{u \in E \mid \omega(u) = 0 \quad \forall \omega \in A\}$.

   Obtenemos, así, un subconjunto del espacio inicial E de manera muy parecida a como hemos obtenido el ortogonal de un $A \subset E$.

2. Aplicamos la definición que hemos dado al principio del apartado. Obtenemos así un subconjunto del bidual

$$A^{\perp} = \{\alpha \in E'' \mid \alpha(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in A\}.$$

Estas dos maneras son, esencialmente, la misma. Con más precisión, estos dos ortogonales se corresponden por el isomorfismo de (6.3). En efecto, recordemos que en aquel isomorfismo un elemento $\alpha \in E''$ correspondía a un vector $u \in E$ de forma que $\alpha = \langle\ ,u\rangle$. Por tanto, en 2,

$$\begin{aligned}\{\alpha \in E'' \mid \alpha(\omega) = 0 \quad \forall\omega \in A\} &= \{\langle\ ,u\rangle \in E'' \mid \langle\omega, u\rangle = 0 \quad \forall\omega \in A\} = \\ &= \{\langle\ ,u\rangle \in E'' \mid \omega(u) = 0 \quad \forall\omega \in A\},\end{aligned}$$

que corresponde a $\{u \in E \mid \omega(u) = 0 \quad \forall\omega \in A\}$ de 1.

La definición 2 es la dada al principio del apartado. Por tanto, las propiedades 1, 2, 3 y 4 son válidas en este caso. Las consideraciones anteriores nos dicen que estas propiedades son también válidas para ortogonales definidos según 1. De aquí en adelante trabajaremos siempre con la definición 1.

Otras propiedades de los ortogonales son:

5. Si F es un subespacio vectorial, $F^{\perp\perp} = F$.
6. Si F y G son subespacios vectoriales,
$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \text{ y } (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$
7. Si $E = F \oplus G$, $E' = F^\perp \oplus G^\perp$.

DEMOSTRACIÓN DE 5:

$$u \in F \Rightarrow \langle\omega, u\rangle = \omega(u) = 0\ \forall\omega \in F^\perp \Rightarrow u \in F^{\perp\perp},$$

de donde $F \subset F^{\perp\perp}$; pero la propiedad 3 nos dice que estos dos espacios tienen la misma dimensión y, por tanto, $F = F^{\perp\perp}$. □

DEMOSTRACIÓN DE 6:

$$\begin{array}{lcll} F\cap G \subset F,\ F \cap G \subset G & \Rightarrow & \text{(por 2) } F^\perp \subset (F\cap G)^\perp, G^\perp \subset (F \cap G)^\perp & \Rightarrow \\ & \Rightarrow & F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp; & (*) \\ F+G \supset F, F+G \supset G & \Rightarrow & \text{(por 2) } F^\perp \supset (F+G)^\perp, G^\perp \supset (F+G)^\perp & \Rightarrow \\ & \Rightarrow & (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp; & (**) \end{array}$$

Entonces, por 5, $(*)$ y $(**)$,

$$F \cap G = (F\cap G)^{\perp\perp} \subset (F^\perp + G^\perp)^\perp \subset F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} = F \cap G,$$

y todas las inclusiones son igualdades; en particular, $F \cap G = (F^\perp + G^\perp)^\perp$, de donde, por 5, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Para demostrar la otra igualdad se procede de manera parecida. □

DEMOSTRACIÓN DE 7:

$$\begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \Leftrightarrow & E = F + G \text{ y } F \cap G = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow & \{\vec{0}\} = E^\perp = (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ y} \\ & & E' = \{\vec{0}\}^\perp = (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow & E' = F^\perp \oplus G^\perp. \ \square \end{array}$$

Proposición 7.1 *Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y $f' : F' \to E'$ su dual. Entonces,*

$$(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Nuc} f' \quad y \quad (\operatorname{Nuc} f)^\perp = \operatorname{Im} f'.$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Im} f)^\perp &= \{\omega \in F' \mid \omega(v) = 0\ \forall v \in Imf\} = \{\omega \in F' \mid \omega(fu) = 0\ \forall u \in E\} = \\ &= \{\omega \in F' \mid (f'\omega)(u) = 0\ \forall u \in E\} = \{\omega \in F' \mid f'\omega = 0\} = \operatorname{Nuc} f'. \\ (\operatorname{Im} f')^\perp &= \{u \in E \mid \rho(u) = 0\ \forall\rho \in Imf'\} = \{u \in E \mid (f'\omega)(u) = 0\ \forall\omega \in F'\} = \\ &= \{u \in E \mid \omega(fu) = 0\ \forall\omega \in F'\} = \\ & \quad \text{(por un razonamiento hecho en (6.3))} \\ &= \{u \in E \mid (fu) = 0\} = \operatorname{Nuc} f.\end{aligned}$$

La propiedad 5 nos da, ahora, la segunda igualdad. □

V.8 Nota histórica

Para Leonhard Euler (1707–1783) una función era una fórmula o ecuación que contenía variables y constantes. Euler y Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) ya sabían que las soluciones de un sistema homogéneo forman un espacio vectorial, pero este hecho no fue explotado hasta Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). La teoría de aplicaciones lineales se desarrolla a mediados del siglo 19 (aunque una definición precisa como la actual no fue dada hasta finales de siglo por Giuseppe Peano (1858–1932)) y la conexión entre matrices y aplicaciones lineales fue establecida y desarrollada por Arthur Cayley (1821–1895) en 1855. Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917) considera en 1879 el rango de una matriz y lo utiliza en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (ver Cap. VII).

Se puede observar en las notas históricas de estos capítulos que, contrariamente a lo que hemos hecho nosotros, en el desarrollo histórico de las matemáticas las definiciones precisas llegan después de la utilización de las herramientas y de la obtención de buena parte de los resultados.

V.9 Ejercicios

1. Demostrar que, dada cualquier aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$, existen bases de E y F tales que la matriz de f en esas bases es

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$