Topologia

Cesare Straffelini

Anno Accademico 2019-2020

§1.1. Spazi Metrici

Definizione. Sia $\mathcal{X} \neq \varnothing$. Una *distanza* su $\mathcal{X}$ è una funzione $\mathrm{dist} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che:

- $\mathrm{dist}(x, y) \geq 0$ per ogni x e y in $\mathcal{X}$;
- $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$ per ogni x e y in $\mathcal{X}$;
- $\mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \geq \mathrm{dist}(x, z)$ per ogni x, y e z in $\mathcal{X}$.

Se dist è una distanza su $\mathcal{X}$, la coppia $(\mathcal{X}, \mathrm{dist})$ si dice *spazio metrico.*

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathrm{dist})$ uno spazio metrico. Sia $x_0 \in \mathcal{X}$ e sia $\delta > 0$. Si definisce la *palla aperta* di centro x_0 e raggio δ come l'insieme dei punti

$$\mathcal{B}_\delta(x_0) := \{x \in \mathcal{X}.\ \mathrm{dist}(x_0, x) < \delta\}.$$

Definizione. Un sottoinsieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ di uno spazio metrico $(\mathcal{X}, \mathrm{dist})$ si dice *aperto* se $\mathcal{A} = \varnothing$ oppure se $\mathcal{A}$ si può scrivere come unione (arbitraria) di palle aperte.

Teorema. $\mathcal{A}$ è aperto se e solo se per ogni $x \in \mathcal{A}$ esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{B}_r(x) \subseteq \mathcal{A}$.

Definizione. Siano $(\mathcal{X}, \mathrm{dist}_\mathcal{X})$ e $(\mathcal{Y}, \mathrm{dist}_\mathcal{Y})$ due spazi metrici, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un'applicazione e $x_0 \in \mathcal{X}$. L'applicazione f si dice *continua in* x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in \mathcal{B}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(x_0)),$$

dove la prima è una palla aperta secondo $\mathrm{dist}_\mathcal{X}$ mentre l'altra secondo $\mathrm{dist}_\mathcal{Y}$.

Definizione. Una funzione si dice *continua* se è continua in x per ogni $x \in \mathcal{X}$.

Teorema. Una funzione $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tra due spazi metrici $(\mathcal{X}, \mathrm{dist}_\mathcal{X})$ e $(\mathcal{Y}, \mathrm{dist}_\mathcal{Y})$ è continua se e solo se per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Y}$ aperto, l'insieme $f^{-1}(\mathcal{A})$ è aperto (in $\mathcal{X}$).

§1.2. Spazi Topologici

Teorema. Dato uno spazio metrico $(\mathcal{X}, \mathrm{dist})$, gli insiemi $\varnothing$ e $\mathcal{X}$ sono aperti, l'intersezione finita di insiemi aperti è aperta e l'unione (arbitraria) di insiemi aperti è aperta.

Definizione. Sia $\mathcal{X} \neq \varnothing$ un insieme. Una *topologia* su $\mathcal{X}$ è una famiglia $\mathscr{T}$ di sottoinsiemi di $\mathcal{X}$ tale che $\varnothing \in \mathscr{T}$, $\mathcal{X} \in \mathscr{T}$, l'intersezione finita di elementi di $\mathscr{T}$ appartiene a $\mathscr{T}$, così come l'unione (arbitraria) di elementi di $\mathscr{T}$ appartiene a $\mathscr{T}$. Se $\mathscr{T}$ è una topologia su $\mathcal{X}$, gli elementi di $\mathscr{T}$ si dicono *aperti* e la coppia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si dice *spazio topologico.*

Esempio. La *topologia banale* è la topologia minimale su $\mathcal{X}$, cioè $\mathscr{T}_B := \{\varnothing, \mathcal{X}\}$.

Esempio. La *topologia discreta* è la topologia massimale su $\mathcal{X}$, cioè $\mathscr{T}_D := \mathscr{P}(\mathcal{X})$.

Esempio. La *topologia cofinita* su un insieme $\mathcal{X}$ è

$$\mathscr{T}_C := \{\varnothing\} \cup \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X} \text{ tale che } \mathcal{X} \setminus \mathcal{A} \text{ è finito}\}.$$

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Se esiste una distanza su $\mathcal{X}$ tale che $\mathscr{T}$ rappresenta la famiglia degli aperti rispetto ad essa, lo spazio $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si dice *metrizzabile.*

Esempio. La topologia banale non è metrizzabile, la topologia discreta sì. La topologia cofinita è metrizzabile se e solo se $\mathcal{X}$ è finito (ma in tal caso coincide con la discreta).

Definizione. Se $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ è uno spazio topologico e dist è una distanza su $\mathcal{X}$ tale che $\mathscr{T}$ rappresenta la famiglia degli aperti rispetto a dist, allora $\mathscr{T}$ si dice *topologia indotta* da dist. Se due distanze inducono la stessa topologia, si dicono *topologicamente equivalenti.*

Esempio. Le distanze dist_1, dist_2 e dist_∞ sono topologicamente equivalenti su $\mathbb{R}^n$, dove

$$\mathrm{dist}_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;\ \ \mathrm{dist}_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};\ \ \mathrm{dist}_\infty(x,y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|\,.$$

La topologia indotta da queste distanze si chiama *topologia euclidea* $\mathscr{T}_E$ su $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Sia $\mathcal{X} \neq \varnothing$ e siano $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{T}_2$ due topologie su $\mathcal{X}$. Si dice che $\mathscr{T}_1$ è *meno fine* di $\mathscr{T}_2$ (o equivalentemente che $\mathscr{T}_2$ è *più fine* di $\mathscr{T}_1$) se $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$. Questa relazione si scrive $\mathscr{T}_1 \preceq \mathscr{T}_2$. Se vale $\mathscr{T}_1 \preceq \mathscr{T}_2$ oppure $\mathscr{T}_2 \preceq \mathscr{T}_1$, le due topologie si dicono *confrontabili.* La topologia banale è la meno fine di tutte, la topologia discreta è la più fine di tutte.

§1.3. Basi e Sottobasi

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Una sottofamiglia $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ si dice *base* di $\mathscr{T}$ se ogni elemento di $\mathscr{T}$ si può scrivere come unione (arbitraria) di elementi di $\mathscr{B}$.

Teorema. $\mathscr{B}$ è base di $\mathscr{T}$ se e solo se per ogni $x \in \mathcal{A} \in \mathscr{T}$ esiste $\mathcal{B} \in \mathscr{B}$ con $x \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Esempio. $\mathscr{T}$ è una base di $\mathscr{T}$ per ogni topologia $\mathscr{T}$. Inoltre, se $\mathscr{B}$ è base di $\mathscr{T}$ e $\mathscr{B}'$ è tale che $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{T}$, allora anche $\mathscr{B}'$ è base di $\mathscr{T}$. Se $\mathscr{T}$ è metrizzabile, la famiglia delle palle aperte $\mathcal{B}_\delta(x_0)$ al variare di $\delta > 0$ e $x_0 \in \mathcal{X}$ è una base di $\mathscr{T}$.

Teorema. Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto e $\mathscr{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathcal{X}$ tali che l'unione di tutti gli elementi di $\mathscr{B}$ forma $\mathcal{X}$ (si dice che $\mathscr{B}$ è un *ricoprimento* di $\mathcal{X}$) e tale che comunque presi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ in $\mathscr{B}$, l'intersezione $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ si può scrivere come unione di elementi di $\mathscr{B}$. Allora esiste un'unica topologia $\mathscr{T}$ su $\mathcal{X}$ di cui $\mathscr{B}$ è una base.

Teorema. Ogni base $\mathscr{B}$ di $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ è un ricoprimento di $\mathcal{X}$ ed è tale che, comunque presi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ in $\mathscr{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ si può scrivere come unione di elementi di $\mathscr{B}$.

Definizione. Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto e $\mathscr{C}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathcal{X}$. La topologia più fine $\mathscr{T}$ tale che $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{T}$ si chiama *topologia generata* da $\mathscr{C}$. Essa è l'intersezione di tutte le topologie che contengono $\mathscr{C}$. Se $\mathscr{C}$ è base di una topologia su $\mathcal{X}$, allora la topologia di cui è base è la sua topologia generata.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Una sottofamiglia $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$ si dice *sottobase* di $\mathscr{T}$ se la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathscr{S}$ è una base di $\mathscr{T}$.

Esempio. $\mathscr{T}$ è una sottobase di $\mathscr{T}$. Una base di $\mathscr{T}$ è anche sottobase di $\mathscr{T}$.

Teorema. Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto e $\mathscr{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathcal{X}$ tale che $\mathscr{S}$ è un ricoprimento di $\mathcal{X}$. Allora esiste un'unica topologia $\mathscr{T}$ su $\mathcal{X}$ di cui $\mathscr{S}$ è sottobase, ed essa coincide con la topologia generata da $\mathscr{S}$.

Teorema. Ogni sottobase $\mathscr{S}$ di $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ è un ricoprimento di $\mathcal{X}$.

§1.4. Intorni

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e sia $x \in \mathcal{X}$. Un sottoinsieme $\mathcal{U}$ di $\mathcal{X}$ si dice *intorno* di x se esiste $\mathcal{A} \in \mathscr{T}$ tale che $x \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$. La collezione di tutti gli intorni del punto $x \in \mathcal{X}$ si chiama *sistema di intorni* di x e si indica con $\mathscr{N}(x)$.

Teorema. Un sottoinsieme $\mathcal{A}$ è aperto se e solo se per ogni $x \in \mathcal{A}$ si ha $\mathcal{A} \in \mathscr{N}(x)$.

Teorema. Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto. Consideriamo delle famiglie $\mathscr{N}(x)$ per ogni $x \in \mathcal{X}$ tali che se $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ allora $\mathcal{V} \in \mathscr{N}(x)$, l'intersezione finita di elementi di $\mathscr{N}(x)$ sta in $\mathscr{N}(x)$, se $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ allora $x \in \mathcal{U}$; e se $\mathcal{V} \in \mathscr{N}(x)$ allora esiste $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ tale che comunque scelto $y \in \mathcal{U}$ allora $\mathcal{V} \in \mathscr{N}(y)$. Allora esiste un'unica topologia $\mathscr{T}$ su $\mathcal{X}$ tale che $\mathscr{N}(x)$ è il sistema di intorni di x per ogni $x \in \mathcal{X}$.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Un *sistema fondamentale di intorni* di $x \in \mathcal{X}$ è una famiglia $\mathscr{V}(x) \subseteq \mathscr{N}(x)$ tale che per $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ esiste $\mathcal{V} \in \mathscr{V}(x)$ con $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

Esempio. Se $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ è uno spazio metrizzabile con topologia indotta dalla distanza dist, la famiglia $\mathscr{V}(x) := \{\mathcal{B}_\delta(x).\ \delta > 0\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

Teorema. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ è aperto se e solo se per ogni $x \in \mathcal{A}$ esiste $\mathcal{V} \in \mathscr{V}(x)$ tale che $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorema. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ è una base di $\mathscr{T}$ se e solo se per ogni $x \in \mathcal{X}$ la famiglia $\mathscr{V}(x) := \mathscr{N}(x) \cap \mathscr{B}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

Teorema. Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto. Consideriamo delle famiglie $\mathscr{V}(x)$ per ogni $x \in \mathcal{X}$ tali che l'intersezione di una sottofamiglia finita di elementi di $\mathscr{V}(x)$ contiene un elemento di $\mathscr{V}(x)$, per ogni $\mathcal{V} \in \mathscr{V}(x)$ si ha $x \in \mathcal{V}$ e se $\mathcal{V} \in \mathscr{V}(x)$ esiste $\mathcal{W} \in \mathscr{V}(x)$ tale che per ogni $y \in \mathcal{W}$ esiste $\mathcal{U} \in \mathscr{V}(y)$ tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Allora esiste un'unica topologia $\mathscr{T}$ su $\mathcal{X}$ tale che per ogni $x \in \mathcal{X}$, $\mathscr{V}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

§2.1. Assiomi di Numerabilità e Successioni

Definizione. Si dice che uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ soddisfa il *primo assioma di numerabilità* se per ogni x esiste un sistema fondamentale di intorni di x numerabile.

Definizione. Si dice che uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ soddisfa il *secondo assioma di numerabilità* (o che è *a base numerabile*) se esiste una base di $\mathscr{T}$ numerabile.

Teorema. Se $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ è a base numerabile, soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Esempio. La topologia banale e la topologia discreta (così come ogni topologia metrizzabile) soddisfano il primo assioma. La topologia discreta su un insieme non numerabile tuttavia non soddisfa il secondo assioma. La topologia euclidea è a base numerabile.

Teorema (Lindelöf). Dato uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ a base numerabile e data una famiglia $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}$ esiste una sottofamiglia $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ tale che $\mathscr{A}'$ è numerabile e l'unione di tutti gli elementi di $\mathscr{A}'$ è uguale all'unione di tutti gli elementi di $\mathscr{A}$.

Definizione. Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto. Un'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ si chiama *successione* in $\mathcal{X}$. La successione viene anche indicata con $\{x_n\}_n$, dove $x_n := f(n)$.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e $\{x_n\}_n$ una successione in $\mathcal{X}$. Diciamo che la successione *converge* al punto $x_\infty \in \mathcal{X}$, scrivendo $x_n \to x_\infty$, se per ogni $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x_\infty)$ esiste $n_\mathcal{U}$ tale che $x_n \in \mathcal{U}$ per ogni $n \geq n_\mathcal{U}$. In tal caso x_∞ si dice *limite* della successione, e la successione si dice *convergente* se ha almeno un limite.

Esempio. In uno spazio topologico banale ogni successione converge ad ogni elemento. In uno spazio topologico discreto convergono solo le successioni definitivamente costanti (al valore costante). In uno spazio metrizzabile, ogni successione ha al più un limite.

Definizione. Data una successione $\{x_n\}_n$, una sua *sottosuccessione* è una successione $\{x_{n_k}\}_k$ dove $k \mapsto n_k$ è strettamente crescente da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Data una successione $\{x_n\}_n$, $\ell \in \mathcal{X}$ si dice *punto limite* per $\{x_n\}_n$ se esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ con $x_{n_k} \to \ell$.

§2.2. Relazioni tra Punti e Sottoinsiemi

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ e $x \in \mathcal{X}$. Diciamo che

- x è un *punto interno* ad $\mathcal{S}$ se esiste un intorno $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$;
- x è un *punto esterno* ad $\mathcal{S}$ se esiste un intorno $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ tale che $\mathcal{U} \cap \mathcal{S} = \varnothing$;
- x è un *punto di frontiera* di $\mathcal{S}$ altrimenti.

L'insieme dei punti interni ad $\mathcal{S}$ si dice *parte interna* di $\mathcal{S}$ e si indica con $\mathrm{Int}(\mathcal{S})$. L'insieme dei punti esterni ad $\mathcal{S}$ si dice *parte esterna* di $\mathcal{S}$ e si indica con $\mathrm{Est}(\mathcal{S})$. L'insieme dei punti di frontiera di $\mathcal{S}$ si dice *frontiera* di $\mathcal{S}$ e si indica con $\mathrm{Fr}(\mathcal{S})$ oppure $\partial\mathcal{S}$. L'insieme dei punti interni o di frontiera di $\mathcal{S}$ si dice *chiusura* di $\mathcal{S}$ e si indica con $\mathrm{Cl}(\mathcal{S})$.

Teorema. Per ogni sottoinsieme $\mathcal{S}$, si ha che $\mathrm{Int}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathcal{S})$ e $\mathrm{Est}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$. Inoltre, lo spazio $\mathcal{X}$ si può ripartire nei tre insiemi disgiunti $\mathrm{Int}(\mathcal{S})$, $\mathrm{Fr}(\mathcal{S})$ e $\mathrm{Est}(\mathcal{S})$.

Teorema. $\mathrm{Int}(\mathcal{S})$ è l'unione di tutti gli aperti di $\mathscr{T}$ contenuti in $\mathcal{S}$. In altre parole, $\mathrm{Int}(\mathcal{S})$ è il più grande aperto di $\mathscr{T}$ contenuto in $\mathcal{S}$. Inoltre $\mathrm{Int}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathrm{Int}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Int}(\mathcal{B})$.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ si dice *chiuso* se $\mathcal{X} \setminus \mathcal{C}$ è aperto, cioè appartiene a $\mathscr{T}$. La famiglia dei chiusi di $\mathcal{X}$ si indica con $\mathscr{F}$.

Teorema. Un insieme è chiuso se e solo se contiene la propria frontiera, quindi se e solo se si scrive come unione disgiunta della propria parte interna e della propria frontiera.

Teorema. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Sia $\mathscr{F}$ la famiglia dei chiusi. Allora $\varnothing \in \mathscr{F}$, $\mathcal{X} \in \mathscr{F}$, l'unione finita di elementi di $\mathscr{F}$ appartiene a $\mathscr{F}$, così come l'intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathscr{F}$ appartiene a $\mathscr{F}$. Queste proprietà sono caratterizzanti: dato un insieme non vuoto $\mathcal{X}$ e una famiglia $\mathscr{F}$ con queste proprietà, $\mathscr{F}$ è la famiglia dei chiusi per una topologia su $\mathcal{X}$ (quella dei complementari degli elementi di $\mathscr{F}$).

Esempio. Consideriamo su $\mathbb{R}^n$ la famiglia $\mathscr{F}$ che contiene gli insiemi $\mathcal{C}$ tali per cui esiste un polinomio $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $\mathcal{C} = \{\alpha \text{ tali che } p(\alpha) = 0\}$. Allora $\mathscr{F}$ è la famiglia dei chiusi per una topologia su $\mathbb{R}^n$, detta *topologia di Zariski*.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ e $x \in \mathcal{X}$. Diciamo che

- x è *aderente* a $\mathcal{S}$ se per ogni $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ si ha $\mathcal{U} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$;
- x è *di accumulazione* per $\mathcal{S}$ se per ogni $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ si ha $\mathcal{U} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$ e $\neq \{x\}$;
- x è *punto isolato* di $\mathcal{S}$ se esiste $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ tale che $\mathcal{U} \cap \mathcal{S} = \{x\}$.

L'insieme dei punti di accumulazione per $\mathcal{S}$ si chiama *derivato* di $\mathcal{S}$, indicato $\mathrm{Der}(\mathcal{S})$. Un punto è aderente se e solo se è di accumulazione o isolato.

Teorema. Sia $\mathrm{Ad}(\mathcal{S})$ l'insieme dei punti aderenti ad $\mathcal{S}$. Allora $\mathrm{Ad}(\mathcal{S}) = \mathrm{Cl}(\mathcal{S})$.

§2.3. Densità, Chiusura Sequenziale e Separabilità

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$. $\mathcal{D}$ si dice *denso* se $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}) = \mathcal{X}$, cioè se per ogni $x \in \mathcal{X}$ e per ogni $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ si ha $\mathcal{U} \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$.

Esempio. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. In uno spazio topologico banale, ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{X}$ è denso. In uno spazio discreto, solo $\mathcal{X}$ è denso.

Teorema. Se $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{X}$ e $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è continua, $f(\mathcal{D})$ è denso in $f(\mathcal{X})$.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Definiamo la *chiusura sequenziale* di $\mathcal{S}$ come $\mathrm{Clsq}(\mathcal{S}) := \{x_\infty \in \mathcal{X}$ tali che esiste $\{x_n\}_x \in \mathcal{S}$ con $x_n \to x_\infty\}$.

Teorema. Si ha sempre $\mathrm{Clsq}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathcal{S})$. Se lo spazio topologico soddisfa il primo assioma di numerabilità, vale anche $\mathrm{Cl}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Clsq}(\mathcal{S})$ e quindi $\mathrm{Cl}(\mathcal{S}) = \mathrm{Clsq}(\mathcal{S})$.

Esempio. La *topologia della convergenza puntuale* sullo spazio delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ non soddisfa il primo assioma di numerabilità. Inoltre se prendiamo come $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni che sono diverse da zero solo in un numero finito di punti, la chiusura di $\mathcal{S}$ è tutto l'insieme $\mathcal{X}$, mentre la sua chiusura sequenziale non contiene le costanti non nulle.

Definizione. Uno spazio topologico è *separabile* se ha un sottoinsieme denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea è separabile poiché $\mathbb{Q}$ è denso e numerabile.

Teorema. Uno spazio topologico a base numerabile è separabile.

Esempio. Non è vero che uno spazio topologico separabile è a base numerabile, nemmeno sotto l'ulteriore ipotesi del primo assioma di numerabilità. Un esempio è $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey, che come base ha la famiglia degli insiemi della forma $(a, b]$.

Teorema. Uno spazio topologico metrizzabile e separabile è a base numerabile.

§2.4. Continuità Topologica

Definizione. Siano $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ e $(\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ due spazi topologici, e sia $x_0 \in \mathcal{X}$. Sia inoltre $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un'applicazione. Diremo che f è *continua in* x_0 se per ogni $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(f(x_0))$ esiste $\mathcal{V} \in \mathscr{N}(x_0)$ tale che $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$. Diremo che f è *continua* se lo è per ogni $x_0 \in \mathcal{X}$.

Teorema. Una funzione $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tra due spazi topologici $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ e $(\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ è continua se e solo se $f^{-1}(\mathcal{G}) \in \mathscr{T}$ per ogni $\mathcal{G} \in \mathscr{G}$, se e solo se $f^{-1}(\mathcal{F})$ è chiuso per ogni $\mathcal{F}$ chiuso.

Teorema. $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è continua se e solo se $f(\mathrm{Cl}(\mathcal{A})) \subseteq \mathrm{Cl}(f(\mathcal{A}))$ per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$.

Teorema. Se $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ sono funzioni continue tra spazi topologici, anche $g \circ f$ è continua. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, $g \circ f$ è continua in x_0.

Teorema. Sia $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ una funzione continua. Se $\mathscr{T}' \succeq \mathscr{T}$ e $\mathscr{G}' \preceq \mathscr{G}$, allora $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}') \to (\mathcal{Y}, \mathscr{G}')$ è continua. In particolare, se lo spazio di partenza è discreto, ogni funzione è continua; se lo spazio di arrivo è banale, ogni funzione è continua.

Definizione. Una funzione tra due spazi topologici si dice *aperta* se l'immagine di ogni aperto dello spazio di partenza è un aperto dello spazio di arrivo. Si dice invece *chiusa* se l'immagine di ogni chiuso dello spazio di partenza è un chiuso dello spazio di arrivo.

Esempio. Non c'è relazione tra continuità, apertura e chiusura.

Definizione. Un'applicazione tra due spazi topologici si dice *omeomorfismo* se è bigettiva, continua, e la sua inversa (che esiste per la bigettività) è continua.

Teorema. Un'applicazione tra due spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se è bigettiva, continua e aperta, oppure se e solo se è bigettiva, continua e chiusa.

Teorema. L'inversa di un omeomorfismo è un omeomorfismo. L'identità su uno spazio topologico è un omeomorfismo. La composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo.

§3.1. Sottospazi Topologici

Definizione. Sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ con $(\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ spazio topologico. Definiamo l'insieme

$$\mathscr{T} := \{f^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X} \text{ al variare di } \mathcal{A} \in \mathscr{G}\}.$$

Allora $\mathscr{T}$ è una topologia su $\mathcal{X}$, la funzione f da $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ in $(\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ è continua, e $\mathscr{T}$ è la meno fine tra tutte le topologie su $\mathcal{X}$ che rendono f continua. È detta *topologia indotta.*

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Consideriamo l'applicazione inclusione $i : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{X}$. La topologia su $\mathcal{S}$ indotta dall'applicazione i si dice *topologia relativa* su $\mathcal{S}$. Indicheremo la topologia relativa con $\mathscr{T}|_{\mathcal{S}}$. La coppia $(\mathcal{S}, \mathscr{T}|_{\mathcal{S}})$ si dice *sottospazio topologico* di $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$.

Teorema. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Allora:

- la topologia relativa su $\mathcal{S}$ è $\mathscr{T}|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{A} \cap \mathcal{S} \text{ al variare di } \mathcal{A} \in \mathscr{T}\}$;
- detta $\mathscr{F}$ la famiglia dei chiusi su $\mathcal{X}$, $\mathscr{F}|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{C} \cap \mathcal{S} \text{ al variare di } \mathcal{C} \in \mathscr{F}\}$;
- se $\mathscr{B}$ è una base di $\mathscr{T}$, $\mathscr{B}|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{B} \cap \mathcal{S} \text{ al variare di } \mathcal{B} \in \mathscr{B}\}$ è base di $\mathscr{T}|_{\mathcal{S}}$;
- se $\mathscr{S}$ è una base di $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{G} \cap \mathcal{S} \text{ al variare di } \mathcal{G} \in \mathscr{S}\}$ è sottobase di $\mathscr{T}|_{\mathcal{S}}$;
- se $x \in \mathcal{S}$, allora $\mathscr{N}|_{\mathcal{S}}(x) = \{\mathcal{N} \cap \mathcal{S} \text{ al variare di } \mathcal{N} \in \mathscr{N}(x)\}$;
- se $x \in \mathcal{S}$ e $\mathscr{V}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di x in $\mathcal{X}$, allora $\mathscr{V}|_{\mathcal{S}}(x) = \{\mathcal{V} \cap \mathcal{S} \text{ al variare di } \mathcal{V} \in \mathscr{V}(x)\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x in $\mathcal{S}$;
- se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$, allora $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}|_{\mathcal{S}}}(\mathcal{U}) = \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{S}$;
- se $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, su $\mathcal{S}'$ a priori ci sono due topologie: quella indotta da $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ e quella indotta da $(\mathcal{S}, \mathscr{T}|_{\mathcal{S}})$. In realtà $\mathscr{T}|_{\mathcal{S}'} = (\mathscr{T}|_{\mathcal{S}})\,|_{\mathcal{S}'}$, poiché il diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}' \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \mathcal{S} \arrow[d, hook] \\
& \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

Teorema. Sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una funzione continua tra spzi topologici. Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sottoinsiemi non vuoti di $\mathcal{X}$ e di $\mathcal{Y}$ rispettivamente. Allora la funzione $f|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{Y}$ è continua, e se $f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}$ allora anche $f|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ è continua.

§3.2. Prodotti Topologici

Definizione. Siano $(\mathcal{X}_1, \mathscr{T}_1)$ e $(\mathcal{X}_2, \mathscr{T}_2)$ due spazi topologici. Definiamo su $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ la *topologia prodotto* come la topologia generata dalla base $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$. La coppia $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \langle \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \rangle)$ si dice *spazio topologico prodotto* di $(\mathcal{X}_1, \mathscr{T}_1)$ e $(\mathcal{X}_2, \mathscr{T}_2)$.

Esempio. La topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ è il prodotto della topologia euclidea di $\mathbb{R}$ n volte.

Teorema. Siano $(\mathcal{X}_1, \mathscr{T}_1)$ e $(\mathcal{X}_2, \mathscr{T}_2)$ due spazi topologici. Se $\mathscr{B}_1$ è una base di $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{B}_2$ è una base di $\mathscr{T}_2$, allora $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ è una base della topologia generata da $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$.

Teorema. Siano $(\mathcal{X}_1, \mathscr{T}_1)$ e $(\mathcal{X}_2, \mathscr{T}_2)$ due spazi topologici, e sia $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathscr{T})$ il loro prodotto. Siano π_1 e π_2 le *proiezioni* da $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ in $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ rispettivamente. Allora la topologia prodotto $\mathscr{T}$ è la meno fine tra quelle che rendono π_1 e π_2 continue.

Teorema. Le mappe π_1 e π_2 sono aperte. In generale non sono chiuse.

Teorema. Siano $(\mathcal{X}_1, \mathscr{T}_1)$ e $(\mathcal{X}_2, \mathscr{T}_2)$ due spazi topologici. Siano $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ e $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{X}_2$. Allora sull'insieme $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ la topologia prodotto delle topologie relative, $\langle \mathscr{T}_1|_{\mathcal{S}_1} \times \mathscr{T}_2|_{\mathcal{S}_2} \rangle$, e la topologia relativa della topologia prodotto, $\langle \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \rangle|_{\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2}$, coincidono.

Teorema. Sia $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Allora $\mathcal{P} \in \mathscr{N}((x_1, x_2))$ se e solo se esistono due intorni $\mathcal{U}_1 \in \mathscr{N}(x_1)$ e $\mathcal{U}_2 \in \mathscr{N}(x_2)$ tali che $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{P}$.

Teorema. Sia $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Sia $\mathscr{V}_1(x_1)$ un sistema fondamentale di intorni di x_1 in $(\mathcal{X}_1, \mathscr{T}_1)$ e sia $\mathscr{V}_2(x_2)$ un sistema fondamentale di intorni di x_2 in $(\mathcal{X}_2, \mathscr{T}_2)$. Allora la famiglia che contiene tutti e soli gli elementi della forma $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ per $\mathcal{V}_1 \in \mathscr{V}_1(x_1)$ e $\mathcal{V}_2 \in \mathscr{V}_2(x_2)$ è un sistema fondamentale di intorni di (x_1, x_2) in $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \langle \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \rangle)$.

Teorema. Siano $(\mathcal{X}_1, \mathscr{T}_1)$ e $(\mathcal{X}_2, \mathscr{T}_2)$ spazi topologici, $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ e $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{X}_2$. Allora

$$\mathrm{Cl}(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) = \mathrm{Cl}(\mathcal{S}_1) \times \mathrm{Cl}(\mathcal{S}_2); \qquad \mathrm{Int}(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) = \mathrm{Int}(\mathcal{S}_1) \times \mathrm{Int}(\mathcal{S}_2).$$

Teorema. $\mathrm{Fr}(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) = (\mathrm{Fr}(\mathcal{S}_1) \times \mathrm{Cl}(\mathcal{S}_2)) \cup (\mathrm{Cl}(\mathcal{S}_1) \times \mathrm{Fr}(\mathcal{S}_2))$.

Teorema. Sia f una funzione da $(\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ in $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \langle \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \rangle)$. Siano $f_1 := \pi_1 \circ f$ e $f_2 := \pi_2 \circ f$ le *componenti canoniche* di f. Allora la funzione f è continua se e solo se f_1 ed f_2 sono entrambe continue. (Proprietà universale del prodotto topologico).

Teorema. Sia $g : (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \langle \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \rangle) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{G})$. Sia $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ e siano $\mathscr{V}_1(x_1)$ e $\mathscr{V}_2(x_2)$ due sistemi fondamentali di intorni. Allora g è continua in (x_1, x_2) se e solo se per ogni $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(g(x_1, x_2))$ esistono $\mathcal{V}_1 \in \mathscr{V}_1(x_1)$ e $\mathcal{V}_2 \in \mathscr{V}_2(x_2)$ tali che $g(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \subseteq \mathcal{U}$.

Teorema. Su $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$ si ha $\langle \langle \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \rangle \times \mathscr{T}_3 \rangle = \langle \mathscr{T}_1 \times \langle \mathscr{T}_2 \times \mathscr{T}_3 \rangle \rangle = \langle \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \times \mathscr{T}_3 \rangle$.

Teorema. $\mathcal{X}$ è omeomorfo a $\mathcal{X} \times \{\star\}$ e a $\{\star\} \times \mathcal{X}$.

§3.3. Topologia Quoziente

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Sia $\mathcal{Y}$ un insieme non vuoto e sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un'applicazione. La *topologia quoziente* su $\mathcal{Y}$ rispetto a f è la topologia più fine su $\mathcal{Y}$ tra quelle che rendono continua l'applicazione f.

Teorema. La topologia quoziente esiste, è unica, e detta $\mathscr{T}_f$ tale topologia si ha che

$$\mathscr{T}_f = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Y} \text{ tali che } f^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathscr{T}\}.$$

Inoltre $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ è chiuso in $(\mathcal{Y}, \mathscr{T}_f)$ se e solo se $f^{-1}(\mathcal{C})$ è chiuso in $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$.

Teorema. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $\mathscr{T}_f$ la topologia quoziente su $\mathcal{Y}$ rispetto ad f. Sia $(\mathcal{Z}, \mathscr{G})$ un altro spazio topologico, e sia $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$. Allora g è continua se e solo se $g \circ f$ è continua. (Proprietà universale del quoziente topologico).

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathscr{T}) \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & (\mathcal{Z}, \mathscr{G}) \\
& (\mathcal{Y}, \mathscr{T}_f) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Definizione. Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due insiemi e sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Diciamo che $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ è *saturo* rispetto a f se $f^{-1}(f(\mathcal{S})) = \mathcal{S}$, cioè $f^{-1}(f(\{x\})) \in \mathcal{S}$ per ogni $x \in \mathcal{S}$. Se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, diremo *saturazione* di $\mathcal{S}$ il più piccolo insieme saturo contenente $\mathcal{S}$, cioè $f^{-1}(f(\mathcal{S}))$.

Teorema. Se f è surgettiva, il complementare di un insieme saturo è anch'esso saturo.

Teorema. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Sia $\mathcal{Y} \neq \varnothing$ e sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ surgettiva. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Y}$ è aperto in $\mathscr{T}_f$ se e solo se $\mathcal{A} = f(\mathcal{S})$ con $\mathcal{S}$ aperto e saturo rispetto a f. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ è un chiuso di $\mathscr{T}_f$ se e solo se $\mathcal{C} = f(\mathcal{S})$ con $\mathcal{S}$ chiuso e saturo rispetto a f.

Definizione. Una mappa $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ tra due spazi topologici si dice *identificazione* se è continua, surgettiva e la topologia $\mathscr{G}$ coincide con la topologia $\mathscr{T}_f$.

Teorema. Sia $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ una funzione continua e surgettiva. f è un'identificazione se e solo se per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Y}$ tale che $f^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathscr{T}$ vale $\mathcal{A} \in \mathscr{G}$, se e solo se per ogni $\mathcal{U} \in \mathscr{T}$ saturo $f(\mathcal{U}) \in \mathscr{G}$, se e solo se per ogni $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ chiuso saturo $f(\mathcal{V})$ è chiuso.

Esempio. Esistono identificazioni che non sono né aperte né chiuse.

Teorema. Sia $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{T}_f)$ un'identificazione. f è aperta se e solo se per ogni $\mathcal{A} \in \mathscr{T}$, $f^{-1}(f(\mathcal{A})) \in \mathscr{T}$. f è chiusa se e solo se per ogni $\mathcal{C}$ chiuso, $f^{-1}(f(\mathcal{C}))$ è chiuso.

§3.4. Quozienti Topologici

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su $\mathcal{X}$. Sia $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\sim$ la funzione che ad x associa la sua classe di equivalenza. Allora la topologia $\mathscr{T}_\pi$ indotta da π su $\mathcal{X}/\sim$ si chiama *topologia quoziente* di $\mathscr{T}$ modulo $\sim$ e viene indicata con $\mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim}$. La coppia $(\mathcal{X}/\sim, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim})$ si chiama *spazio topologico quoziente* di $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ modulo $\sim$. La mappa π è un'identificazione da $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ in $(\mathcal{X}/\sim, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim})$.

Teorema. Sia $g : (\mathcal{X}/\sim, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim}) \to (\mathcal{Z}, \mathscr{G})$. g è continua se e solo se $g \circ \pi$ è continua.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathscr{T}) \arrow[rr, "g \circ \pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\mathcal{Z}, \mathscr{G}) \\
& (\mathcal{X}/\sim, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim}) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema. Sia $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ una mappa continua tra spazi topologici. Sia $\sim_\mathcal{X}$ una relazione di equivalenza su $\mathcal{X}$ e sia $\sim_\mathcal{Y}$ una relazione di equivalenza su $\mathcal{Y}$. Siano $\pi_\mathcal{X}$ e $\pi_\mathcal{Y}$ le proiezioni. Supponiamo che $f([x]_{\sim_\mathcal{X}}) \subseteq [f(x)]_{\sim_\mathcal{Y}}$ per ogni $x \in \mathcal{X}$, cioè supponiamo che se $x_1 \sim_\mathcal{X} x_2$ allora $f(x_1) \sim_\mathcal{Y} f(x_2)$. Allora esiste un'unica mappa $g : (\mathcal{X}/\sim_\mathcal{X}, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim_\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}/\sim_\mathcal{Y}, \mathscr{G}_{\mathcal{Y}/\sim_\mathcal{Y}})$ tale che $g \circ \pi_\mathcal{X} = \pi_\mathcal{Y} \circ g$ e che g è continua.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathscr{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_\mathcal{X}"] & (\mathcal{Y}, \mathscr{G}) \arrow[d, "\pi_\mathcal{Y}"] \\
(\mathcal{X}/\sim_\mathcal{X}, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim_\mathcal{X}}) \arrow[r, "g"] & (\mathcal{Y}/\sim_\mathcal{Y}, \mathscr{G}_{\mathcal{Y}/\sim_\mathcal{Y}})
\end{tikzcd}$$

Lemma (Dario). Sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ continua e surgettiva. Definiamo la relazione $\sim_f$ su $\mathcal{X}$ data da $x \sim_f y$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Esiste un'unica $g : \mathcal{X}/\sim_f \to \mathcal{Y}$ continua e bigettiva tale che $g \circ \pi = f$. Inoltre g è un omeomorfismo se e solo se f è un'identificazione.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathscr{T}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\mathcal{Y}, \mathscr{G}) \\
& (\mathcal{X}/\sim_f, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim_f}) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema. Se $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{T}_f)$ è un'identificazione, allora $(\mathcal{X}/\sim_f) \cong \mathcal{Y}$.

§4.1. Proprietà di Separazione

Definizione. Uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si dice *di Hausdorff* se per ogni x e y in $\mathcal{X}$ esistono $\mathcal{U} \in \mathscr{N}(x)$ e $\mathcal{V} \in \mathscr{N}(y)$ tali che $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

Esempio. Ogni spazio metrizzabile è di Hausdorff. La topologia discreta è di Hausdorff. La topologia banale su un insieme con almeno due elementi non è di Hausdorff. La topologia cofinita su un insieme con infiniti elementi non è di Hausdorff.

Teorema. La proprietà di Hausdorff è *topologica* (si conserva per omeomorfismi).

Teorema. Ogni sottospazio di uno spazio topologico di Hausdorff è di Hausdorff.

Teorema. Il prodotto di due spazi topologici di Hausdorff è di Hausdorff. Se il prodotto di due spazi è di Hausdorff, entrambi gli spazi sono di Hausdorff.

Esempio. La proprietà di Hausdorff non passa al quoziente.

Definizione. Uno spazio topologico si dice *a punti chiusi* se ogni singoletto è chiuso.

Teorema. Uno spazio di Hausdorff è a punti chiusi.

Esempio. La topologia cofinita su un insieme con infiniti elementi è a punti chiusi.

Teorema. Una successione in uno spazio di Hausdorff ha al più un limite.

Teorema. Data una successione in uno spazio a punti chiusi che soddisfa il primo assioma di numerabilità, se x è un punto di accumulazione per l'immagine della successione, allora esiste una sottosuccessione convergente ad x.

§4.2. Compattezza

Definizione. Uno spazio topologico si dice *compatto* se da ogni ricoprimento aperto di $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Esempio. Uno spazio topologico banale è compatto. Un qualsiasi spazio topologico finito è compatto. Uno spazio topologico con la topologia cofinita è compatto. Uno spazio topologico infinito con la topologia discreta non è compatto. $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea non è compatto. Nemmeno $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è compatto.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Allora $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ è un *sottoinsieme compatto* di $\mathcal{X}$ se $(\mathcal{S}, \mathscr{T}|_{\mathcal{S}})$ è uno spazio topologico compatto.

Teorema (Heine-Borel). In $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_E)$, ogni intervallo chiuso $[a, b]$ è compatto.

Esempio. Esistono spazi topologici compatti che hanno sottoinsiemi non compatti.

Teorema. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto. Un sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Teorema. In $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_E)$, compatto equivale a chiuso e limitato.

Teorema. L'immagine di un compatto attraverso una funzione continua è un compatto.

Teorema (Weierstraß). Sia $(\mathcal{K}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico compatto. Allora se $f : (\mathcal{K}, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_E)$ è continua, f ammette almeno un punto di massimo e uno di minimo, cioè esistono $k_m \in \mathcal{K}$ e $k_M \in \mathcal{K}$ tali che per ogni $k \in \mathcal{K}$ valga $f(k_m) \leq f(k) \leq f(k_M)$.

Teorema (Tychonoff). Il prodotto di due spazi topologici compatti è compatto. Se il prodotto di due spazi topologici è compatto, entrambi gli spazi sono compatti.

Teorema. In $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_E)$, compatto equivale a chiuso e limitato.

Teorema. Una mappa continua da uno spazio compatto ad uno spazio di Hausdorff è chiusa. Se è surgettiva, è un'identificazione. Se è bigettiva, è un omeomorfismo.

Teorema. Sia $f : (\mathcal{X}, \mathscr{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{G})$ una funzione continua e surgettiva da uno spazio compatto $\mathcal{X}$ ad uno spazio di Hausdorff $\mathcal{Y}$. Allora $(\mathcal{X}/\sim_f) \cong \mathcal{Y}$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, \mathscr{T}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\mathcal{Y}, \mathscr{G}) \\
& (\mathcal{X}/\sim_f, \mathscr{T}_{\mathcal{X}/\sim_f}) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ compatto, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ infinito. Allora $\mathcal{Z}$ ha almeno un punto di accumulazione. Inoltre se $\mathcal{X}$ è a punti chiusi e vale il primo assioma di numerabilità, ogni successione ha una sottosuccessione convergente.

§4.3. Connessione

Definizione. $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si dice *connesso* se gli unici aperti e chiusi di $\mathscr{T}$ sono $\varnothing$ e $\mathcal{X}$.

Definizione. Un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si dice *connesso* se lo spazio $(\mathcal{S}, \mathscr{T}|_{\mathcal{S}})$ è connesso. Il contrario di connesso è *sconnesso*.

Teorema. Uno spazio topologico è sconnesso se e solo se si può esprimere come unione disgiunta di due aperti non vuoti oppure di due chiusi non vuoti.

Esempio. Ogni spazio topologico discreto con almeno due elementi è sconnesso. Ogni spazio topologico banale è connesso. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_E)$ è connesso, ma $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathscr{T}_E)$ non lo è.

Teorema. Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$. $\mathcal{S}$ è connesso (rispetto a $\mathscr{T}_E$) se e solo se è convesso.

Esempio. In $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_E)$ convesso implica connesso ma non vale il viceversa.

Teorema. La connessione è una proprietà topologica (si conserva per omeomorfismi).

Teorema. L'immagine di un insieme connesso è un insieme connesso.

Teorema. Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ due connessi, con $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \varnothing$. Allora $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ è connesso.

Teorema. L'unione di una famiglia di connessi con intersezione non vuota è connessa.

Teorema. Se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathcal{S})$ e $\mathcal{S}$ è connesso, $\mathcal{T}$ è connesso (quindi $\mathrm{Cl}(\mathcal{S})$ è connesso).

Teorema. Il prodotto di spazi topologici connessi è connesso.

Definizione. Sia $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Diremo che x_1 e x_2 sono *connessi* se esiste $\mathcal{S}$ connesso che li contiene entrambi. Essere connessi è una relazione di equivalenza. Le classi di equivalenza si chiamano *componenti connesse* di $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$, e sono connesse.

Teorema. Uno spazio topologico è connesso se e solo se ogni coppia di punti è connessa.

Definizione. Uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si dice *connesso per archi* se comunque presi x_0 e x_1 in $\mathcal{X}$ esiste una funzione $\alpha : [0, 1] \to \mathcal{X}$ continua con $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$.

Teorema. La connessione per archi implica la connessione.

Esempio. La connessione non implica la connessione per archi.

§4.4. Varietà Topologiche

Definizione. Uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ si dice *localmente euclideo* se per ogni $x \in \mathcal{X}$ esistono un intorno aperto $\mathcal{A}$ di x e un intero positivo n tali che esiste un omeomorfismo φ da $\mathcal{A}$ in $\mathbb{D}^n := \{p \in \mathbb{R}^n .\ ||p|| < 1\}$. In tal caso la coppia $(\mathcal{A}, \varphi)$ si dice *carta locale.*

Teorema. Se x appartiene ai domini di due diverse carte locali, n non cambia. In tal caso diremo che $n = \dim_x(\mathcal{X})$ (*dimensione locale* di $\mathcal{X}$ nel punto x). Se $\mathcal{X}$ è connesso, la dimensione locale è unica e viene detta *dimensione* dello spazio localmente euclideo $\mathcal{X}$.

Teorema. Uno spazio topologico connesso e localmente euclideo è connesso per archi.

Teorema. Le componenti connesse di uno spazio localmente euclideo sono aperte.

Esempio. Uno spazio localmente euclideo non è necessariamente di Hausdorff.

Definizione. Uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, a base numerabile e localmente euclideo di dimensione n si dice *varietà topologica* (di dimensione n).

Teorema. Ogni varietà topologica di dimensione 1 è omeomorfa a $\mathbb{S}^1$ oppure a $\mathbb{R}$.

Definizione. Una varietà topologica compatta avente dimensione 2 è detta *superficie compatta*. La classificazione delle superfici compatte è abbastanza complessa.

Teorema (Radò). Una superficie topologica compatta ammette triangolazione finita.

§5.1. Superfici Compatte

Definizione. Il *toro* è una varietà topologica di dimensione 2 omeomorfa al quoziente di un quadrato rispetto alle identificazioni dei lati opposti con lo stesso verso di percorrenza.

Definizione. Il *piano proiettivo reale* è una varietà topologica di dimensione 2 omeomorfa al quoziente di $\mathbb{S}^2$ rispetto all'identificazione dei punti antipodali.

Definizione. Gli spazi topologici ottenuti come quozienti di un poligono rispetto ad identificazioni dei lati, in cui tutti i vertici sono identificati possono essere descritti scegliendo arbitrariamente un vertice e un verso di percorrenza, e scrivendo i lati nell'ordine in cui si incontrano, con la lettera corrispondente se l'orientazione indicata su di essi corrisponde al verso di percorrenza scelto, oppure con la lettera corrispondente elevata all'esponente -1 altrimenti. Chiameremo tale successione di simboli *parola*. Il toro è rappresentato (tra le altre) dalla parola $aba^{-1}b^{-1}$ e il piano proiettivo dalla parola aa.

Definizione. Siano $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ due superfici compatte, siano $x_1 \in \mathcal{S}_1$ e $x_2 \in \mathcal{S}_2$. Siano $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ due intorni di x_1 e x_2 omeomorfi a $\mathbb{D}^2$ tramite gli omeomorfismi $h_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{D}^2$ e $h_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{D}^2$. Consideriamo ora $\mathcal{Y}$ l'unione disgiunta di $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{U}_2$ e sia $\sim$ la relazione di equivalenza che associa $x_1' \in \mathcal{S}_1$ a $x_2' \in \mathcal{S}_2$ se $h_2(x_2') = h_1(x_1')$, pensando qui come se gli omeomorfismi h_1 e h_2 siano estesi anche alla frontiera di $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$. Si può verificare che lo spazio topologico quoziente $\mathcal{S} := \mathcal{Y}/\sim$ è una superficie compatta, ed è detta *somma connessa* di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, che viene indicata con $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$. La somma connessa è definita a meno di classi di omeomorfismo, e non dipende dai punti scelti.

Definizione. Indichiamo con $\mathbb{T}_0$ la sfera, $\mathbb{T}_1$ il toro e con $\mathbb{T}_g$ il g-toro, che si ottiene facendo la somma connessa di $g \geq 2$ tori (per induzione, $\mathbb{T}_{g+1} :\approx \mathbb{T}_g \# \mathbb{T}_1$).

Definizione. Indichiamo con $\mathbb{U}_1$ il piano proiettivo reale e con $\mathbb{U}_h$ la somma connessa di $h \geq 2$ piani proiettivi reali (per induzione, $\mathbb{U}_{h+1} :\approx \mathbb{U}_h \# \mathbb{U}_1$).

Esempio. La somma connessa di due superfici compatte, rappresentate da due parole, è rappresentata dalla giustapposizione di tali due parole. Ad esempio, la somma connessa di due tori è rappresentata da $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ mentre la somma connessa di due piani proiettivi reali è rappresentata da $aabb$. La *bottiglia di Klein* $\mathcal{K}$, rappresentata da $aba^{-1}b$, altro non è che la somma di due piani proiettivi (è $aacc$ con $c = b^{-1}a^{-1}$).

Teorema. Si ha che $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_1 \approx \mathbb{U}_1 \# \mathbb{U}_1 \# \mathbb{U}_1$ (basta dimostrare $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_1 \approx \mathcal{K} \# \mathbb{U}_1$).

Teorema. Si ha che $\mathbb{T}_g \# \mathbb{U}_h \approx \mathbb{U}_{h+2g}$. In generale ogni superficie compatta è omeomorfa a $\mathbb{T}_g$ per qualche $g \geq 0$ oppure a $\mathbb{U}_h$ per qualche $h \geq 1$. La distinzione è data dal fatto che il toro è *orientato* (partendo in piedi e tornando nel punto di partenza sono sempre a testa in su) mentre il piano proiettivo no (è come nel nastro di Moebius).

§5.2. Omotopie

Definizione. Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due spazi topologici e siano f_0 e f_1 due applicazioni continue da $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Esse si dicono *omotope* se esiste una mappa $F : \mathcal{X} \times \mathbb{I} \to \mathcal{Y}$, continua e tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in \mathcal{X}$. Qui $\mathbb{I}$ indica l'intervallo $[0, 1]$ con la topologia euclidea. F è detta *omotopia* tra f_0 ed f_1. Useremo come notazione $f_0 \sim f_1$.

Teorema. L'omotopia è una relazione di equivalenza.

Esempio. Siano $f_0 : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ definita da $f_0(x) = 0$ per ogni x e $f_1 : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ definita da $f_1(x) = x$ per ogni x. Allora $f_0 \sim f_1$, ed una possibile omotopia è $F(x, t) = tx$.

Esempio. Siano $f_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definita da $f_0(x) = x$ per ogni x e $f_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definita da $f_1(x) = -x$ per ogni x. Allora $f_0 \sim f_1$, ed una possibile omotopia è $F(x, t) = xe^{i\pi t}$. Questo è valido solamente per le sfere di dimensione dispari, per $\mathbb{S}^2$ non sono omotope.

Esempio. Ricordiamo che un arco è una funzione $\alpha : \mathbb{I} \to \mathcal{X}$ continua. Ogni arco è omotopo al cammino costante $\varepsilon_0(t) = x_0$ dove $x_0 = \alpha(0)$. Infatti un'omotopia possibile è $F(s, t) = \alpha(ts)$. Questo è scomodo poiché non è quanto desiderato, infatti con questa definizione non riusciamo a far passare il concetto che su una sfera ogni cammino chiuso è omotopo al cammino costante mentre su un toro no. Serve un'altra definizione.

Definizione. Siano f_0 ed f_1 due funzioni omotope da $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$. Esse si dicono *omotope relativamente ad* $\mathcal{A}$, dove $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{X}$, se esiste un'omotopia F tra f_0 ed f_1 tale che $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ per ogni $a \in \mathcal{A}$. In tal caso si scrive $f_0 \sim_{\mathcal{A}} f_1$.

Teorema. L'omotopia relativa ad $\mathcal{A}$ è una relazione di equivalenza.

Esempio. Per due archi $\alpha : \mathbb{I} \to \mathcal{X}$ e $\beta : \mathbb{I} \to \mathcal{X}$ è importante l'omotopia relativa a $\{0, 1\}$.

§5.3. Tipi di Omotopia e Retratti

Definizione. Due spazi topologici $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tali che $g \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ e $f \circ g \sim \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$.

Teorema. L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza.

Teorema. Se due spazi topologici sono omeomorfi, sono omotopicamente equivalenti.

Definizione. Se $\mathcal{X}$ è omotopicamente equivalente a $\{\star\}$, allora si dice *contraibile*.

Teorema. $\mathcal{X}$ è contraibile se e solo se per ogni $p \in \mathcal{X}$ fissato le mappe $f_0 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ e $f_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definite da $f_0(x) = x$ e $f_1(x) = p$ per ogni x sono omotope.

Esempio. Il disco $\mathbb{D}^n$ è contraibile.

Esempio. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è ha il tipo di omotopia di $\mathbb{S}^{n-1}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Definizione. Sia $\mathcal{X}$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme di $\mathcal{X}$. Allora $\mathcal{A}$ si dice *retratto* di $\mathcal{X}$ se esiste una mappa continua $r : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, detta *retrazione*, con $r|_{\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Se indichiamo con $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{X}$ l'inclusione, questa richiesta equivale a $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.

Definizione. Un retratto $\mathcal{A}$ di $\mathcal{X}$ si dice *retratto di deformazione* se, oltre a $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, vale anche $i \circ r \sim \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$. Un retratto di deformazione di $\mathcal{X}$ ha il tipo di omotopia di $\mathcal{X}$.

Esempio. Se $\mathcal{X}$ è stellato e x_0 è un centro, $\{x_0\}$ è un retratto di deformazione di $\mathcal{X}$.

Definizione. Siano $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ due spazi topologici. La loro *unione a un punto*, denotata con $\mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_2$, è definita come la loro somma disgiunta quozientata per la relazione di equivalenza che associa un dato punto x_1 di $\mathcal{S}_1$ ad un dato punto x_2 di $\mathcal{S}_2$. L'unione a un punto di k circonferenze (cioè k copie di $\mathbb{S}^1$) è detta *bouquet di k circonferenze.*

Esempio. $\mathbb{R}^2$ al quale vengono tolti due punti ha come retratto di deformazione $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Esempio. $\mathbb{T}_1$ meno un punto è omotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. In generale, $\mathbb{T}_g$ meno un punto è omotopicamente equivalente a un bouquet di $2g$ circonferenze, mentre $\mathbb{U}_h$ meno un punto è omotopicamente equivalente a un bouquet di h circonferenze.

Esempio. $\mathbb{S}^1$ è retratto di $\mathbb{T}_1$, ma non retratto di deformazione.

§5.4. Complessi Cellulari

Definizione. Un *complesso cellulare* finito $\mathcal{X}$ di dimensione N è uno spazio topologico costruito nel modo seguente: $\mathcal{X}^0$ è uno spazio finito e discreto. Per $n > 0$ e $n \leq N$ si definisce $\mathcal{X}^n$ partendo da $\mathcal{X}^{n-1}$ e attaccando un numero finito di coppie $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ con mappe continue. Si pone poi $\mathcal{X} := \mathcal{X}^N$. Il sottospazio $\mathcal{X}^n$ si dice *n-scheletro* di $\mathcal{X}$. Ogni immagine di $\mathbb{D}^n$ in $\mathcal{X}$ è detta *cella*, aperta se non contiene il bordo e chiusa altrimenti.

Definizione. Dato un complesso cellulare $\mathcal{X}$, possiamo definire la sua caratteristica di Eulero indicando con b_n il numero di n-scheletri di $\mathcal{X}$ e ponendo $\chi(\mathcal{X}) := b_0 - b_1 + b_2 - \ldots$

Teorema. La caratteristica di Eulero è invariante per omotopia.

Esempio. $\mathbb{S}^1$ è un complesso cellulare di caratteristica 0. Il bouquet di k circonferenze è un complesso cellulare di caratteristica $1 - k$. La sfera $\mathbb{S}^n$ è un complesso cellulare di caratteristica 0 se n è dispari e 2 se n è pari. Il disco $\mathbb{D}^n$ è un complesso cellulare di caratteristica 1. Il toro $\mathbb{T}_1$ è un complesso cellulare di caratteristica 0. Il g-toro $\mathbb{T}_g$ è un complesso cellulare di caratteristica $2 - 2g$. Il piano proiettivo $\mathbb{U}_1$ ha caratteristica 1. La somma di h piani proiettivi $\mathbb{U}_h$ è un complesso cellulare di caratteristica $2 - h$.

Definizione. Un *sottocomplesso* $\mathcal{A}$ di un complesso cellulare $\mathcal{X}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{X}$ costituito da un'unione di celle chiuse di $\mathcal{X}$. È anch'esso un complesso cellulare.

Teorema. Se $\mathcal{X}$ è un complesso cellulare e $\mathcal{A}$ è un suo sottocomplesso cellulare contraibile, allora $\mathcal{X}$ è omotopicamente equivalente a $\mathcal{X}/\mathcal{A}$. Questo non vale in generale.

§6.1. Gruppo Fondamentale

Definizione. Sia $\mathcal{X}$ uno spazio topologico e $x_0 \in \mathcal{X}$. Consideriamo l'insieme degli archi chiusi in $\mathcal{X}$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ (detti *cappi*) e suddividiamolo in classi di equivalenza per omotopia. Definiamo $\pi(\mathcal{X}, x_0)$ il quoziente di questo insieme per la relazione di equivalenza. Dati due cappi α e β, definiamo la loro *concatenazione* $\alpha * \beta$ come $(\alpha * \beta)(s) = \alpha(2s)$ se $s < 1/2$ e $(\alpha * \beta)(s) = \beta(2s-1)$ se $s > 1/2$. Dotiamo $\pi(\mathcal{X}, x_0)$ di una struttura di gruppo con l'operazione $*$. L'elemento neutro è la classe del cappio costante ε_{x_0} e l'inverso della classe di α è la classe di $\bar{\alpha}$, definito come $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$.

Teorema. La concatenazione è ben definita: se $\alpha \sim \gamma$ e $\beta \sim \delta$, allora $\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$.

Teorema. Sia $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ continua con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. Se α è un arco, $\alpha \sim \alpha \circ \varphi$.

Teorema. Siano α, β e γ archi in $\mathcal{X}$ con $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\beta(1) = \gamma(0)$. Siano $x_0 = \alpha(0)$ e $x_1 = \alpha(1)$. Allora $\varepsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \varepsilon_{x_1}$, $\alpha * \bar{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0}$, $\bar{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{x_1}$ e $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

Definizione. Il gruppo $\pi(\mathcal{X}, x_0)$ è detto *gruppo fondamentale* di $\mathcal{X}$ con punto base x_0.

Teorema. Se x e y sono connessi da un arco, allora $\pi(\mathcal{X}, x) \simeq \pi(\mathcal{X}, y)$.

Definizione. Se $\mathcal{X}$ è connesso per archi, esiste un unico *gruppo fondamentale* di $\mathcal{X}$.

Definizione. Se $\mathcal{X}$ è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale (cioè contiene solo l'elemento neutro), $\mathcal{X}$ si dice *semplicemente connesso.*

Esempio. Il gruppo fondamentale di $\{\star\}$ è $\{[\varepsilon_\star]\}$, dunque $\{\star\}$ è semplicemente connesso.

§6.2. Morfismi

Definizione. Data una funzione continua $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ definiamo il suo *morfismo indotto* come $\varphi_\star : \pi(\mathcal{X}, x) \to \pi(\mathcal{Y}, \varphi(x))$ in modo che $\varphi_\star([\alpha]) = [\varphi \circ \alpha]$ per ogni cappio α in $\mathcal{X}$.

Teorema. Il morfismo $\varphi_\star$ è ben definito ed è un omomorfismo di gruppi.

Teorema. Proprietà funtoriali: $(\psi \circ \varphi)_\star = \psi_\star \circ \varphi_\star$ e $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}})_\star = \mathrm{id}_{\pi(\mathcal{X},x)}$.

Teorema. Il gruppo fondamentale è un invariante topologico.

Teroema. Se $r : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ è una retrazione e $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{X}$ è l'inclusione, allora per ogni a in $\mathcal{A}$ vale $r_\star \circ i_\star = \mathrm{id}_{\pi(\mathcal{A},a)}$. Quindi $r_\star$ è surgettivo e $i_\star$ è iniettivo. Ne segue che il gruppo fondamentale di ogni retratto di $\mathcal{X}$ è isomorfo ad un qualche sottogruppo di $\pi(\mathcal{X}, a)$.

Teorema. Condizione necessaria affinché $\mathcal{A}$ sia retratto di $\mathcal{X}$ è che $i_\star$ sia iniettivo. Condizione necessaria affinché $\mathcal{A}$ sia retratto di deformazione di $\mathcal{X}$ è che $i_\star$ sia un isomorfismo.

Esempio. $\mathbb{S}^1$ non è un retratto di $\mathbb{D}^2$.

Teorema. Siano Φ e Ψ continue ed omotope, e sia $F : \mathcal{X} \times \mathbb{I} \to \mathcal{Y}$ un'omotopia tra Φ e Ψ. Sia inoltre $f(t) := F(x_0, t)$ un cammino congiungente $\Phi(x_0)$ e $\Psi(x_0)$. Allora esiste un isomorfismo u_f da $\pi(\mathcal{Y}, \Phi(x_0))$ in $\pi(\mathcal{Y}, \Psi(x_0))$ tale che $\Psi_\star = u_f \circ \Phi_\star$.

$$\begin{tikzcd}
\pi(\mathcal{X}, x_0) \arrow[rr, "\Phi_\star"] \arrow[dr, "\Psi_\star"'] & & \pi(\mathcal{Y}, \Phi(x_0)) \arrow[dl, "u_f"] \\
& \pi(\mathcal{Y}, \Psi(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Teorema. Sia $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_\star$ è un isomorfismo.

Esempio. Se $\mathcal{X}$ è contraibile, il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\{1\}$.

Teorema. Se $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ allora $\pi(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, (x, y)) \simeq \pi(\mathcal{X}, x) \times \pi(\mathcal{Y}, y)$.

§6.3. Gruppi con Presentazione

Definizione. Sia $\mathcal{S} = \{x_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ un insieme. Chiameremo *alfabeto* $\{x_i\}_{i\in\mathcal{I}} \cup \{x_i^{-1}\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Definizione. Una *parola* è una giustapposizione di elementi dell'alfabeto: $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$.

Definizione Consideriamo l'insieme delle parole e definiamo una relazione di equivalenza tra due parole se si possono ottenere l'una dall'altra cancellando o inserendo un numero finito di espressioni della forma $x_i^{-1}x_i$ o $x_ix_i^{-1}$ con $i \in \mathcal{I}$. L'insieme quoziente risulta essere un gruppo rispetto all'operazione di giustapposizione ed è detto *gruppo libero* generato da $\mathcal{S}$. L'elemento neutro sarà dato dalla classe della parola vuota, che indicheremo con 1, e l'inverso della classe di $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ è la classe di $x_{i_m}^{-\varepsilon_m} \dots x_{i_2}^{-\varepsilon_2} x_{i_1}^{-\varepsilon_1}$.

Esempio. Se $\mathcal{S} = \varnothing$, il suo gruppo libero generato è il gruppo banale $\{1\}$. Se $\mathcal{S} = \{a\}$, il suo gruppo libero generato è isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$. Se $\mathcal{S} = \{a, b\}$, il suo gruppo libero generato è isomorfo al *prodotto libero* di $(\mathbb{Z}, +)$ con sé stesso, indicato con $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Se $\mathcal{S}$ contiene n elementi, il suo gruppo libero è isomorfo al prodotto libero di n copie di $(\mathbb{Z}, +)$.

Definizione. Sia $\mathcal{S}$ un insieme e consideriamo un sottoinsieme $\mathcal{R}$ del suo gruppo libero generato. Consideriamo una relazione di equivalenza sul gruppo in modo che si possano cancellare espressioni della forma $r \in \mathcal{R}$ o r^{-1} con $r \in \mathcal{R}$ oltre che della forma $x_i^{-1}x_i$ o $x_ix_i^{-1}$. Il quoziente che si ottiene è ancora un gruppo, detto *gruppo con presentazione* ed $\mathcal{R}$ è detto insieme dei *relatori*. Si indica con $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$. Un gruppo libero è $\langle \mathcal{S} \mid \varnothing \rangle$.

Esempio. Il gruppo $\langle \{a\} \mid \{a^n\} \rangle$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il gruppo $\langle \{a, b\} \mid \{aba^{-1}b^{-1}\} \rangle$ è isomorfo al prodotto diretto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Per facilitare la notazione toglieremo le parentesi graffe, quindi quest'ultimo sarà anche $\langle \{a, b\} \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Possiamo ulteriormente facilitare la comprensione scrivendo $aba^{-1}b^{-1} = 1$ come relatore, oppure anche $ab = ba$. Il gruppo $\langle \{a, b\} \mid x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$ è il *gruppo diedrale* delle rotazioni di un quadrato.

Teorema (Tietze). Se $r \in \mathcal{R}$ è tale che $r \sim 1$ quando $\sim$ è la relazione fatta con $\mathcal{R} \setminus \{r\}$, allora $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \setminus \{r\} \rangle$. Se ω appartiene al gruppo libero generato da $\mathcal{S}$ mentre invece $\omega' \notin \mathcal{S}$ è un nuovo simbolo, allora $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{S} \cup \{\omega'\} \mid \mathcal{R} \cup \{\omega = \omega'\} \rangle$.

Definizione. Dati g_1 e g_2 in un gruppo $\mathcal{G}$, il loro *commutatore* è $[g_1, g_2] := g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$.

Definizione. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ e $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$, indicheremo con $[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ l'insieme generato dai commutatori $[h, k]$ con $h \in \mathcal{H}$ e $k \in \mathcal{K}$. Inoltre $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ è un sottogruppo normale di $\mathcal{G}$, detto *sottogruppo dei commutatori* di $\mathcal{G}$. Se $\mathcal{G}_1 = \langle \mathcal{S}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle$ e $\mathcal{G}_2 = \langle \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle$ allora $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ ha come presentazione $\langle \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2] \rangle$ nel caso in cui $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \varnothing$.

Definizione. Sia $\mathcal{G}$ un gruppo. Il suo *abelianizzato* $\mathrm{Ab}(\mathcal{G})$ è definito come il gruppo quoziente di $\mathcal{G}$ rispetto a $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$. Se $\mathcal{G} = \langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ allora $\mathrm{Ab}(\mathcal{G}) = \langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \cup [\mathcal{S}, \mathcal{S}] \rangle$. Se due gruppi sono isomorfi, anche i loro abelianizzati lo sono. Vale $\mathrm{Ab}(\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$.

§6.4. Teorema di Seifert Van Kampen

Teorema (Seifert Van Kampen). Sia $\mathcal{X}$ uno spazio topologico, siano $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ due suoi aperti non vuoti e connessi per archi tali che $\mathcal{X} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ mentre $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ è non vuoto e connesso per archi. Sia infine $x_0 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Le inclusioni $i_1 : \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_1$, $i_2 : \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_2$, $j_1 : \mathcal{U}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}$ e $j_2 : \mathcal{U}_2 \hookrightarrow \mathcal{X}$ commutano tra loro nel diagramma

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "i_2"] & \\ \mathcal{U}_1 \arrow[dr, "j_1"] & & \mathcal{U}_2 \arrow[dl, "j_2"] \\ & \mathcal{X} & \end{tikzcd}$$

che induce un diagramma commutativo sui gruppi fondamentali nel modo seguente:

$$\begin{tikzcd} & \pi(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2, x_0) \arrow[dl, "i_{1\star}"'] \arrow[dr, "i_{2\star}"] & \\ \pi(\mathcal{U}_1, x_0) \arrow[dr, "j_{1\star}"] & & \pi(\mathcal{U}_2, x_0) \arrow[dl, "j_{2\star}"] \\ & \pi(\mathcal{X}, x_0) & \end{tikzcd}$$

Se consideriamo ora le presentazioni $\pi(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2, x_0) = \langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$, $\pi(\mathcal{U}_1, x_0) = \langle \mathcal{S}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle$ e $\pi(\mathcal{U}_2, x_0) = \langle \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle$ allora il gruppo fondamentale $\pi(\mathcal{X}, x_0)$ ha come presentazione $\langle \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_{\mathcal{S}} \rangle$ dove $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ si ottiene dalle relazioni che derivano dall'uguaglianza $j_{1\star}(i_{1\star}(s)) = j_{2\star}(i_{2\star}(s))$ per ogni $s \in \pi(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2, x_0)$, cioè $\mathcal{R}_{\mathcal{S}} = \{i_{1\star}(s) = i_{2\star}(s).\ s \in \mathcal{S}\}$.

Esempio. Se $x_0 = (1, 0)$, allora $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) \simeq \langle \{[\alpha]\} \mid \varnothing \rangle \simeq \mathbb{Z}$, con $\alpha(t) = \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Esempio. Se $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ sono semplicemente connessi, anche $\mathcal{X}$ lo è. $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connesso per $n \geq 2$. Il bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1$ ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$.

Teorema. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono spazi topologici, e l'unione ad un punto $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ in cui $x_0 \in \mathcal{X}$ e $y_0 \in \mathcal{Y}$ sono identificati è tale che $x_0 \in \mathcal{X}$ ha un intorno aperto contraibile e $y_0 \in \mathcal{Y}$ ha un intorno aperto contraibile, allora se $\pi(\mathcal{X}, x_0) = \langle \mathcal{S}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle$ e $\pi(\mathcal{Y}, y_0) = \langle \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle$ allora $\pi(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}, x_0 = y_0) = \langle \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \rangle$, cioè in altre parole si ha $\mathcal{R}_{\mathcal{S}} = \varnothing$.

Esempio. Il gruppo fondamentale del toro $\mathbb{T}_1$ è $\langle \{\alpha, \beta\} \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$.

Esempio. Il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein è $\langle \{\alpha, \beta\} \mid \alpha\beta\alpha = \beta \rangle$.

Esempio. L'abelianizzato del gruppo fondamentale di $\mathbb{T}_g$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^{2g}$, mentre invece l'abelianizzato del gruppo fondamentale di $\mathbb{U}_h$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Da questo si può dedurre il teorema di classificazione delle superfici compatte.

§7.1. Funzioni Olomorfe

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione. Scriviamo $z = x + iy \in \Omega$ e consideriamo due funzioni u e v da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Allora f è continua (rispetto alla topologia euclidea) se e solo se lo sono sia u sia v.

Definizione. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *differenziabile* nel punto $z_0 \in \Omega$ se esiste un numero complesso $f'(z_0)$ tale che, per $h \to 0$ (complesso),

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + o(|h|).$$

Equivalentemente f è differenziabile in z_0 se e solo se esiste finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

detto *derivata* di f in z_0. Valgono tutte le proprietà analoghe al caso reale (ad esempio le formule per la derivata della somma, del prodotto, del quoziente e della composizione).

Definizione. f si dice *olomorfa* se è differenziabile in ogni punto di Ω.

Teorema (Cauchy-Riemann). Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tale che u e v sono di classe $\mathcal{C}^1$. Allora f è differenziabile in $z_0 = x_0 + iy_0$ se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Tali condizioni sono dette *equazioni di Cauchy-Riemann.*

Definizione. Definiamo i seguenti operatori per le funzioni da $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^1$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Questi sono detti *operatori di Wirtinger.* Le equazioni di Cauchy-Riemann sono equivalenti a chiedere che $\partial f/\partial \bar{z} = 0$. In tal caso, si può calcolare $\partial f/\partial z = f'(z)$.

Definizione. Una funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che

$$\Delta g := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

si dice *armonica* sul dominio Ω. L'operatore Δ si dice *laplaciano.*

Teorema. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica e sia Ω semplicemente connesso. Allora esiste $v : \Omega \to \mathbb{R}$, unica a meno di costanti additive, tale che $f := u + iv$ è olomorfa.

§7.2. Successioni e Serie Complesse

Definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e siano $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ funzioni, per $n \in \mathbb{N}$. Sia inoltre $f : \Omega \to \mathbb{C}$ un'altra funzione. Diremo che $\{f_n\}$ *converge puntualmente* a f se $f_n(z) \to f(z)$ per ogni $z \in \Omega$. Diremo che $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a f se $\sup\{|f_n(z) - f(z)|\} \to 0$.

Teorema. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale. Il limite uniforme di funzioni continue è continuo. Il limite uniforme di funzioni olomorfe è olomorfo.

Definizione. Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ con $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *converge puntualmente* se la successione delle somme parziali converge puntualmente in Ω, *converge assolutamente* se la serie dei valori assoluti converge, *converge uniformemente* se la successione delle somme parziali converge assolutamente in Ω, *converge totalmente* se esiste una successione m_n convergente con $|f_n(z)| \leq m_n$ per ogni $n \geq 1$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Teorema (Weierstraß). La convergenza totale implica quella assoluta e uniforme.

Teorema (Hadamard). Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze, e sia

$$\rho := \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Allora detto $R := 1/\rho$, se $|z - z_0| < R$ la serie converge assolutamente in z, se $r < R$ la serie converge uniformemente in $|z - z_0| \leq r$, e se invece $|z - z_0| > R$ la serie diverge.

Teorema. Chiamiamo *raggio di convergenza* di una serie il valore $R := 1/\rho$. Le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}(n + 1)a_{n+1}(z - z_0)^n$ hanno medesimo raggio di convergenza.

Teorema (Abel). Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze con $R > 0$. Allora $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ è olomorfa in $|z-z_0| < R$ e $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$.

Esempio. La funzione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ è olomorfa.

Esempio. La funzione $\zeta(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ è olomorfa (*zeta di Riemann*).

Esempio. Anche $\sin z := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k + 1)!}$ e $\cos z := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ sono olomorfe.

Esempio. Si possono definire $\tan z$ e $\cot z$, olomorfe nei domini in cui hanno senso.

Esempio. Ci sono infinite *branche* della funzione logaritmo: il logaritmo principale di $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ è dato da $\mathrm{Log} z := \ln |z| + i\mathrm{Arg} z$ dove $\mathrm{Arg} z \in (-\pi, \pi)$. Le altre branche si ottengono aggiungendo multipli di $2i\pi$: $\mathrm{Log}_{(k)} z = \mathrm{Log} z + 2ki\pi$. La funzione potenza è definita come $z^a := e^{a\mathrm{Log} z}$ ed è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ per $a \in \mathbb{C}$. La funzione esponenziale invece è definita come $a^z := e^{z\mathrm{Log} a}$ ed è olomorfa su $\mathbb{C}$ per $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

§7.3. Integrazione lungo Curve

Definizione. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua con $f(t) = u(t) + iv(t)$. Definiamo l'integrale

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

Teorema. L'integrale è un operatore lineare, e se $\vartheta : [c, d] \to [a, b]$ è $\mathcal{C}^1$ con inversa $\mathcal{C}^1$, l'integrale di f tra $\vartheta(c)$ e $\vartheta(d)$ coincide con l'integrale di $(f \circ \vartheta)\dot{\vartheta}$ tra c e d. Inoltre il valore assoluto dell'integrale di f tra a e b è minore o uguale dell'integrale di $|f|$ tra a e b.

Definizione. Una *curva* di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{C}$ è una mappa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^1$. L'immagine è detta *sostegno* di γ. Considereremo anche curve $\mathcal{C}^1$ a tratti, cioè $\mathcal{C}^1$ ovunque tranne che su un numero finito di punti. Sia $\vartheta : [c, d] \to [a, b]$ una funzione $\mathcal{C}^1$ con inversa $\mathcal{C}^1$ e crescente (cioè $\vartheta(c) = a$ e $\vartheta(d) = b$). La curva $\gamma'(s) := \gamma \circ \vartheta(s)$ è una curva di classe $\mathcal{C}^1$, detta *riparametrizzazione* di γ, avente lo stesso sostegno.

Definizione. La *lunghezza* di una curva γ è $\ell(\gamma) := \displaystyle\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\mathrm{d}t$ e vale $\ell(\gamma) = \ell(\gamma')$.

Definizione. L'integrale di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua su una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ con supporto in Ω e di classe $\mathcal{C}^1$ è dato dalla seguente formula:

$$\int_\gamma f(z) := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t.$$

Lo stesso integrale calcolato su una riparametrizzazione $\gamma' = \gamma \circ \vartheta$ ha lo stesso valore (purché ϑ sia crescente). Inoltre il valore assoluto dell'integrale di f su γ è minore o uguale del prodotto del massimo del valore assoluto di f su γ per la lunghezza di γ.

Teorema. Se esiste F olomorfa con $F' = f$, allora $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Teorema (Goursat). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa su Ω, $\mathcal{R} \subseteq \Omega$ un rettangolo, con bordo $\partial\mathcal{R}$ percorso in senso antiorario. Allora l'integrale di f lungo $\partial\mathcal{R}$ è nullo.

Teorema (integrale nullo di Cauchy locale). Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ un disco aperto, f olomorfa su $\mathcal{D}$, γ curva chiusa con supporto in $\mathcal{D}$. Allora l'integrale di f lungo γ è nullo. Se γ_1 e γ_2 sono due curve con stessi estremi, l'integrale di f lungo γ_1 o lungo γ_2 è uguale.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa su $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ e tale che per ogni j da 1 ad n il limite di $(z - a_j)f(z)$ sia 0 per $z \to a_j$. Sia inoltre $\mathcal{R} \subseteq \Omega$ un rettangolo, con bordo $\partial\mathcal{R}$ percorso in senso antiorario. Allora l'integrale di f lungo $\partial\mathcal{R}$ è nullo.

Teorema. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ un disco aperto, f olomorfa su $\mathcal{D} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ e tale che per ogni j da 1 ad n il limite di $(z - a_j)f(z)$ sia 0 per $z \to a_j$. Sia γ una curva chiusa con supporto in $\mathcal{D} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Allora l'integrale di f lungo γ è nullo.

§7.4. Indice e Conseguenze

Definizione. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa, $z \in \mathbb{C}$ non appartenente al supporto di γ. Si dice *indice* di z rispetto a γ il numero (che è sempre un intero)

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z}.$$

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, γ curva chiusa con supporto in Ω e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Allora la funzione f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$, dove

$$f(z) := \int_\gamma \frac{g(w)\mathrm{d}w}{w - z}.$$

Teorema. L'indice è una funzione continua da Ω in $\mathbb{Z}$, quindi è localmente costante.

Teorema (formula integrale di Cauchy locale). Sia $\mathcal{D}$ un disco aperto, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ olomorfa, γ curva chiusa con supporto in $\mathcal{D}$. Allora per $z \in \mathcal{D} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$ si ha

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w - z}.$$

Definizione. Una curva semplice chiusa e $\mathcal{C}^1$ a tratti si dice *curva di Jordan*.

Teorema (media integrale). Sia f olomorfa su $\mathcal{D}$ e sia $\mathcal{B}_r(a)$ un disco aperto in $\mathcal{D}$.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\mathrm{d}t.$$

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in \Omega$, f olomorfa su $\Omega \setminus \{a\}$ con limite di $(z - a)f(z)$ nullo per $z \to a$. Allora esiste un'unica funzione g olomorfa su Ω tale che $g|_{\Omega\setminus\{a\}} = f$.

Teorema (Weierstraß). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa su Ω, $z_0 \in \Omega$. Allora esiste un intorno $\mathcal{B}_r(z_0)$ tale che in tale intorno $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{B}_r(z_0)} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Dunque ogni funzione olomorfa è analitica. Avevamo già mostrato il viceversa.

Teorema (Cauchy). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa su Ω, $z_0 \in \Omega$, γ bordo di un disco chiuso centrato in z_0 di raggio r contenuto in Ω, M il massimo di $|f|$ su γ. Allora

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n!M/r^n.$$

Teorema (Liouville). Se f è olomorfa su $\mathbb{C}$ e limitata, è costante.

Teorema (fondamentale dell'algebra). Sia p un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado positivo, cioè non costante. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_0) = 0$.

Teorema (Morera). Sia $\mathcal{D}$ un disco aperto, f continua su $\mathcal{D}$ tale che l'integrale di f sul bordo di ogni rettangolo $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ sia nullo. Allora f è olomorfa su $\mathcal{D}$.

§8.1. Catene e Teorema di Cauchy

Definizione. Una *catena* è una somma formale finita $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i$ dove le γ_i sono curve chiuse distinte e m_i sono interi relativi. Il supporto di Γ è l'unione dei supporti delle curve γ_i. Le catene possono essere sommate. Se f è definita in un intorno di $\mathrm{supp}(\Gamma)$,

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z := \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\gamma_i} f(z)\mathrm{d}z.$$

Infine $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) := \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(z)$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\Gamma)$.

Definizione. Una catena si dice *omologa a zero* in Ω (indicato $\Gamma \sim_\Omega 0$) se $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Due catene Γ_1 e Γ_2 si dicono *omologhe* in Ω se $\Gamma_1 - \Gamma_2 \sim_\Omega 0$, e si scrive $\Gamma_1 \sim_\Omega \Gamma_2$. Questo equivale a richiedere che $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, Γ una catena omologa a zero in Ω, siano $z_1, \ldots, z_n$ punti di Ω e siano $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ dischi centrati nei punti z_j la cui chiusura è contenuta in Ω e a due a due disgiunti. Siano $\gamma_j := \partial\mathcal{D}_j$. Siano $m_j := \mathrm{Ind}_\Gamma(z_j)$ e sia $\Omega' := \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Allora la catena Γ è omologa a $\sum_{j=1}^{n} m_j\gamma_j$ nell'aperto Ω'.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, f olomorfa su Ω e $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definita da $g(z, w) = (f(w) - f(z))/(w - z)$ se $w \neq z$ mentre $g(z, z) = f'(z)$. Allora g è continua.

Teorema (integrale nullo di Cauchy). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, Γ una catena omologa a zero in Ω e f olomorfa su Ω. Allora l'integrale di f su Γ è nullo.

Teorema (formula integrale di Cauchy). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, Γ una catena omologa a zero in Ω e f olomorfa su Ω. Allora per ogni $z \in \Omega \setminus \mathrm{supp}(\Gamma)$ si ha

$$f(z)\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w - z}.$$

Teorema. Siano γ_1 e γ_2 curve chiuse di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti definite su $[a, b]$ e sia z fuori dal loro supporto. Se $|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)| \leq |\gamma_2(t)-z|$ per ogni $t \in [a, b]$, allora $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z)$.

Teorema. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva continua e chiusa, $z \notin \mathrm{supp}(\gamma)$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni coppia di curve di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti γ_1 e γ_2 da $[a, b]$ in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ tali che $||\gamma - \gamma_i|| < \delta$, si ha $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z)$.

Definizione. Si può definire l'*indice* di z rispetto ad una qualsiasi curva $\mathcal{C}^0$ e chiusa.

Definizione. Due curve continue e chiuse γ_0 e γ_1 da $[a, b]$ in $\mathbb{C}$ sono *omotope* se esiste un'omotopia $F : [a, b]\times\mathbb{I} \to \Omega$ tale che $\gamma_t := F(\cdot, t)$ sia una curva chiusa per ogni $t \in \mathbb{I}$.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, e siano γ_0 e γ_1 due curve omotope contenute in Ω. Allora $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, cioè le due curve sono omologhe.

Teorema. Definiamo $\Phi : \pi(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ come $\Phi([\alpha]) = \mathrm{Ind}_\alpha(0)$. Questo è ben definito per le osservazioni precedenti, ed è inoltre un isomorfismo di gruppi, dunque $\pi(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

§8.2. Serie di Laurent

Definizione. Una *serie di Laurent* è una serie di funzioni avente la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Teorema. Esistono r e R in $[0,+\infty]$ tale che la serie converge assolutamente in $\{z \in \mathbb{C}.\ r < |z-z_0| < R\}$ e uniformemente in $\{z \in \mathbb{C}.\ r' \leq |z-z_0| \leq R'\}$ per $r < r' < R' < R$.

Teorema. Sia f olomorfa su Ω, con Ω aperto contenente $\{z \in \mathbb{C}.\ r \leq |z-z_0| \leq R\}$. Allora per ogni z con $r < |z-z_0| < R$ si ha che, detta $\gamma = \partial\mathcal{B}_{r'}(z_0)$ con $r \leq r' \leq R$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ dove } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Definizione. Il coefficiente a_{-1} è detto *residuo* di f in z_0.

Definizione. Sia $\mathcal{D}$ un disco aperto centrato in z_0. Se f è olomorfa in $\mathcal{D} \setminus \{z_0\}$, si dice che z_0 è una *singolarità isolata* di f. Sia ora z_0 una singolarità isolata e consideriamo la serie di Laurent di f in una corona circolare centrata in z_0 e contenuta in $\mathcal{D}$. Se $a_n = 0$ per ogni $n < 0$, allora z_0 è una *singolarità eliminabile*. Se esiste $m > 0$ tale che $a_{-m} \neq 0$ ma $a_n = 0$ per ogni $n < -m$, si dice che z_0 è un *polo* di ordine m. Se invece esistono infiniti $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$, si dice che z_0 è una *singolarità essenziale*.

Teorema. Le due definizioni di singolarità eliminabile coincidono.

Teorema. Una funzione f ha un polo di ordine m in z_0 se e solo se $1/f$ è olomorfa in un intorno di z_0 e ha uno zero di ordine m in z_0, cioè $f^{(n)}(z_0) = 0$ per $n < m$ ma $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Definizione. Sia $\mathcal{S} \subseteq \Omega$ discreto. Se f è olomorfa su $\Omega \setminus \mathcal{S}$, i punti di $\mathcal{S}$ sono singolarità isolate di f. Se nessuna di queste singolarità è essenziale, f si dice *meromorfa* su Ω.

Teorema (Casorati-Weierstraß). Se una funzione f è olomorfa su $\mathcal{D} \setminus \{z_0\}$ dove $\mathcal{D}$ è un disco e $z_0 \in \mathcal{D}$, e z_0 è una singolarità essenziale, allora $f(\mathcal{D} \setminus \{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$.

Teorema. Sia z_0 una singolarità isolata per una funzione f. Allora z_0 è eliminabile se e solo se esiste finito il limite di $f(z)$ per $z \to z_0$, è un polo se esiste il limite di $|f(z)|$ per $z \to z_0$ ed è infinito, mentre invece è essenziale se il limite non esiste.

§8.3. Residui

Definizione. Definiamo $\mathrm{Res}_{z_0}(f) := \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

Teorema (dei residui). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, z_1, …, z_n punti in Ω e f olomorfa in $\Omega' := \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Sia Γ una catena in Ω tale che $z_j \notin \mathrm{supp}(\Gamma)$ per ogni j, e $\Gamma \sim_\Omega 0$.

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathrm{Ind}_\Gamma(z_j)\mathrm{Res}_{z_j}(f).$$

Definizione. Sia Ω un intorno aperto di ∞, cioè un aperto contenente il complementare di un insieme limitato di $\mathbb{C}$. Se f è olomorfa in Ω, si dice che ha una *singolarità isolata all'infinito* se $g(w) := f(1/w)$ ha una singolarità isolata in 0. Il tipo di singolarità è lo stesso. Se è eliminabile, si dice che f è *olomorfa all'infinito*. Il *residuo all'infinito* è

$$\mathrm{Res}_\infty(f) := \mathrm{Res}_0(-g(w)/w^2).$$

Teorema. Si ha che $\mathrm{Res}_\infty(f) + \displaystyle\sum_{j=1}^n \mathrm{Res}_{z_j}(f) = 0$.

Teorema. Se f ha un polo semplice (cioè un polo di ordine 1) in z_0 e g è olomorfa in un intorno di z_0, allora $\mathrm{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0)\mathrm{Res}_{z_0}(f)$.

Teorema. Se f ha uno zero semplice in ∞ (cioè $g(w) = f(1/w)$ ha una singolarità eliminabile in $w = 0$, e $w = 0$ è uno zero semplice per l'estensione olomorfa di g), allora

$$\mathrm{Res}_\infty(f) = -\lim_{z\to\infty} zf(z).$$

Teorema. Se f è olomorfa intorno a z_0 e in z_0 ha uno zero semplice, allora $1/f$ in z_0 ha un polo semplice, con $\mathrm{Res}_{z_0}(1/f) = 1/f'(z_0)$.

Teorema. Se f ha un polo di ordine m in z_0, allora

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{(z-z_0)^m f(z)}{(m-1)!}\right)^{(m-1)}.$$

In particolare, se z_0 è uno zero semplice, $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Lemma (Jordan). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in \Omega$, f olomorfa su $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sia $\delta > 0$ tale che la palla chiusa centrata in z_0 di raggio δ sia contenuta in Ω, e sia γ_τ l'arco di raggio $\tau \le \delta$ con argomento compreso tra ϑ_1 e ϑ_2. Se f ha un polo semplice o una singolarità eliminabile in z_0, allora esiste il limite di $f(z)(z-z_0)$ per $z \to z_0$ e vale $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$, quindi

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{\gamma_\tau} f(z)\mathrm{d}z = i(\vartheta_2 - \vartheta_1)\mathrm{Res}_{z_0}(f).$$

§8.4. Zeri di Funzioni e Mappe Conformi

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, f olomorfa su Ω non identicamente nulla. Sia $\mathcal{Z}(f)$ l'insieme degli zeri di f. Allora $\mathcal{Z}(f)$ non ha punti di accumulazione in Ω.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, f e g funzioni olomorfe su Ω. Se esiste $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ tale che $f|_\mathcal{S} = g|_\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}$ ha almeno un punto di accumulazione in Ω, allora $f = g$ su tutto Ω.

Definizione. Sia f meromorfa su Ω, $z_0 \in \Omega$. L'*ordine* di f in z_0 è

$$\mathrm{Ord}_{z_0}(f) := \min\{m.\ a_m \neq 0\}.$$

Uno zero di molteplicità m ha ordine m, un polo di ordine m ha ordine $-m$.

Teorema. Sia f meromorfa su Ω con una quantità finita di zeri e poli $z_1, \ldots, z_n$ in Ω. Sia Γ catena in Ω con $\Gamma \sim_\Omega 0$ e tale che $\mathrm{supp}(\Gamma) \cap \{z_1, \ldots, z_n\} = \varnothing$. Allora

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathrm{Ind}_\Gamma(z_j) \mathrm{Ord}_{z_j}(f).$$

Teorema. Nelle stesse ipotesi, se γ è una curva di Jordan e indichiamo con N_0 il numero di zeri interni a γ e con N_∞ il numero di poli interni a γ, contati con molteplicità, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = N_0 - N_\infty.$$

Questo si chiama *principio dell'argomento* perché l'integrale su γ di f'/f si può interpretare in modo geometrico come variazione dell'argomento di $f \circ \gamma$.

Teorema (Rouché). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f e g olomorfe su Ω. Sia γ curva di Jordan in Ω con interno contenuto in Ω. Allora se per ogni $z \in \mathrm{supp}(\gamma)$ si ha $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, le funzioni f e g non hanno zeri in $\mathrm{supp}(\gamma)$ e hanno lo stesso numero di zeri in $\mathrm{int}(\gamma)$.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa non costantemente nulla, $z_0 \in \Omega$ uno zero di ordine m di f. Esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \varepsilon_0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni w_0 con $|w_0| < \delta$, l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $\mathcal{B}_\varepsilon(z_0)$, distinte se $w_0 \neq 0$.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, f olomorfa su Ω non costante. Allora f è aperta.

Teorema. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, f olomorfa su Ω non costante. Allora $|f|$ non ha massimi locali in Ω. Questo si chiama *principio del massimo modulo*.

Teorema (mappa inversa). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa in Ω, $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$. Allora esistono un intorno aperto $\mathcal{V}$ di z_0 e un intorno aperto $\mathcal{W}$ di $f(z_0)$ tali che $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ è invertibile, con inversa olomorfa. Inoltre per $w \in \mathcal{W}$ vale

$$(f^{-1})'(w) = \big(f'(f^{-1}(w))\big)^{-1}.$$

Definizione. Una mappa $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice *conforme* se preserva gli angoli.

Teorema. Sia $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, con u e v differenziabili. f è conforme in z_0 se e solo se esiste $f'(z_0) \neq 0$. f è conforme in Ω se e solo se è olomorfa e $f' \neq 0$ su Ω.