Geometria B Mod.1-2

Andrea Chelini

1 settembre 2020

Indice

1 Funzioni **3**
1.1 Spazi metrici e applicazioni (Continue) . . . 6

2 Spazi Topologici **10**
2.1 Topologia . . . 10
2.2 Topologie confrontabili . . . 13
2.2.1 Base di una topologia . . . 13
2.2.2 Sottobase . . . 17
2.3 Intorni . . . 20
2.3.1 Sistema fondamentale di intorni . . . 20
2.4 Primo-Secondo assioma di numerabilità . . . 22
2.5 Successioni . . . 24

3 Sottoinsiemi di uno spazio topologico **26**
3.1 Punti Interni, Esterni e di Frontiera . . . 26
3.1.1 Insieme chiuso . . . 30
3.1.2 Topologia di Zariski . . . 31
3.2 Punti Aderenti, Accumulazione e Isolati . . . 32
3.2.1 Insieme denso . . . 35
3.2.2 Insiemi separabili . . . 37

4 Applicazioni continue tra spazi topologici **39**
4.1 Omeomorfismo . . . 42

5 Prodotti topologici **48**
5.1 Topologia prodotto . . . 48
5.2 Topologia relativa . . . 51
5.2.1 Prodotti topologici finiti . . . 56

6 Topologia Quoziente **57**
6.1 Spazio topologico quoziente . . . 62

7 Proprietà topologiche **66**
7.1 Spazi topologici di Housdorff . . . 66
7.2 Insiemi compatti . . . 69
7.2.1 Tychonoff . . . 73
7.3 Connessione . . . 75
7.3.1 Insiemi convessi . . . 76
7.3.2 Connessione come relazione di equivalenza . . . 78
7.4 Connessione per archi . . . 80

8 Superfici topologiche compatte **81**
8.1 Carte locali . . . 81
8.2 Varietà topologica . . . 83
8.2.1 Esempi di varietà topologiche . . . 84
8.3 Somma connessa . . . 88
8.4 Omotopia . . . 90

9 Gruppo fondamentale **96**
9.1 CW-Complessi . . . 96
9.1.1 Sfera e Toro in CW-complessi . . . 97
9.2 Gruppo fondamentale . . . 100
9.3 Proprietà topologiche gruppi fondamentali . . . 104
9.4 Gruppi di presentazione . . . 109
9.4.1 Abelianizzato . . . 110
9.4.2 Teorema di Seifert-Van Kampen . . . 112
9.4.3 Calcolo di gruppi fondamentali . . . 113
9.5 Classificazione superfici compatte . . . 115
9.5.1 Retrazione per il gruppo fondamentale . . . 118

10 Integrali nel campo complesso **120**
10.1 Funzioni Olomorfe . . . 120
10.2 Serie complesse . . . 123
10.2.1 Serie di potenze complesse . . . 123
10.2.2 Convergenza di serie di funzioni . . . 124
10.2.3 Convergenza di serie di potenze . . . 125
10.3 Integrazione lungo curve . . . 130
10.3.1 Teorema dell'integrale nullo di Cauchy (Locale) . . . 134
10.4 Indice di un punto rispetto ad una curva . . . 137
10.4.1 Calcolo locale dell'indice . . . 140
10.4.2 Applicazioni della formula integrale(singolarità eliminabili) . . . 142
10.5 Teoremi integrali di Cauchy . . . 147
10.6 Indice rispetto a curve continue . . . 154
10.6.1 Il gruppo fondamentale di S^1 . . . 156
10.6.2 Esistenza di un'armonica coniugata . . . 157

11 Analisi complessa **158**
11.1 Singolarità isolate . . . 158
11.1.1 Serie di Laurent . . . 158
11.1.2 Singolarità isolata . . . 160
11.2 Residui . . . 164
11.2.1 Calcolo dei residui . . . 165
11.2.2 Applicazione dei residui agli integrali impropri . . . 168
11.3 Zeri di funzioni olomorfe (principio d'identità) . . . 174
11.3.1 Principio dell'argomento . . . 175
11.3.2 Principio del massimo modulo . . . 178
11.4 Mappe conformi . . . 181

Capitolo 1

Funzioni

Definizione 1.0.1 (funzione). *Siano X, Y due insiemi non vuoti,un'applicazione*

$$f : X \to Y$$

è una legge (nozione primitiva) che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$:

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y | f(x) = y$$

Definizione 1.0.2 (immagine). *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, sia$A \in P(X), B \in P(Y)$ allora definisco immagine di A mediante la funzione f il sottoinsieme $f(A)$ di Y, ovvero:*

$$f(A) := \{y \in Y | y = f(a), per\ qualche\ a \in A\}$$

Definizione 1.0.3 (contro-immagine). *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, sia$A \in P(X), B \in P(Y)$ allora definisco contro-immagine di B mediante la funzione f il sottoinsieme $f^{-1}(B)$ di X, ovvero:*

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}$$

Definizione 1.0.4 (fibre). *Data una funzione*

$$\begin{aligned} f \colon X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) = k \end{aligned}$$

Definisco fibra di k l'insieme

$$f^{-1}(k) := \{x \in X | f(x) = k\}$$

Esempio 1.0.1. *Data una funzione del tipo*

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 2x \end{aligned}$$

Allora $f(x) = -1$ corrisponde a scrivere

$$x^2 - 2x = -1$$

$$Sol(x^2 - 2x = -1) = f^{-1}$$

Definizione 1.0.5 (Iniettività). *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione si definisce iniettiava se:*

$$\forall x_1, x_2 \in X | x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivalentemente

$$\forall x_1, x_2 \in X, se\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Definizione 1.0.6 (Suriettività). *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione si definisce suriettiva se:*

$$f(X) = Y$$

Equivalentemente

$$\exists x \in X | f(x) = y$$

Definizione 1.0.7 (Biettiva). *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione si definisce biettiva se:*

- *f è iniettiva.*
- *f è suriettiva.*

Esercizio. *Sia $f : X \mapsto Y$ allora $\forall A \in P(X) | f(A) = B$ vale che:*

$$f^{-1}(f(A)) \supset A$$

Dimostrazione. Considero l'insieme $A' \in P(X)$ definito in questo modo:

$$A' := \{x \in X | f(x) \in B\}$$

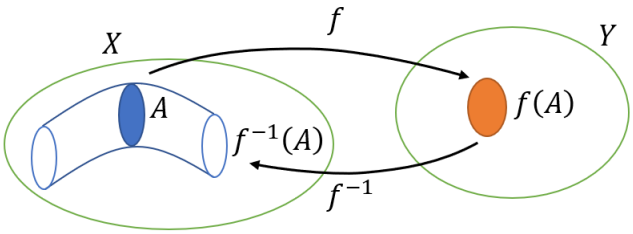
Dunque per definizione A' rappresenta la fibra di B quindi $f^{-1}(B) = A'$ perciò dato che $\forall x \in A, f(x) \in B$ allora per definizione $x \in A'$ allora $A \subset A'$. A questo punto sapendo la relazione che c'è tra A' e B posso dire che

$$f^{-1}(B) \supset A$$

Ma dato che per ipotesi ho che $B = f(A)$ allora ho la mia tesi in quanto vale che

$$f^{-1}(f(A)) \supset A$$

□



Esercizio. *Sia $f : X \mapsto Y$ allora $\forall B \in P(Y)$ vale che*

$$f(f^{-1}(B)) = B$$

Dimostrazione. Per poter dimostrare ciò devo vedere due cose:
"$f(f^{-1}(B)) \subset B$"
Per definizione

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}$$

quindi $\forall x \in f^{-1}(B), f(x) \in B$ quindi segue subito che

$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

"$f(f^{-1}(B)) \supset B$"
Supponendo che $f(X) = Y$ allora posso dire che dato $B \subset Y$ mediante la funzione f:

$$\forall b \in B, \exists x \in X | f^{-1}(b) = x$$

A questo punto posso considerare un insieme

$$A' := \{x \in X | f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$$

Quindi dato un qualsiasi altro insieme $A \in P(X)|f(A) = B \Rightarrow A \subset A'$, perciò:

$$f(A') \supset f(A)$$

$$f(f^{-1}(B)) \supset B$$

Quindi la mia tesi è dimostrata.

$\square$

Esercizio. *Data una funzione $f : X \mapsto Y$ allora f è biettiva* $\iff \exists g : Y \mapsto X| \begin{cases} g \circ f \colon X \to X \\ \qquad x \mapsto g(f(x)) = id(x) \end{cases}$

Dimostrazione. Per dimostrare ciò devo far sì che:
"f è biettiva $\Leftarrow \exists g : Y \mapsto X| \begin{cases} g \circ f \colon X \to X \\ \qquad x \mapsto g(f(x)) = id(x) \end{cases}$"
Supponiamo per assurdo che $f : X \mapsto Y$ non sia iniettiva, quindi significa che

$$\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 | f(x_1) = f(x_2) = y$$

Quindi dato che $g(y) = g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ allora per definizione dato che $g(f(x)) = id(x)$ allora segue che $x_1 = x_2$ ma ciò rappresenta un assurdo in quanto $x_1 \neq x_2$, quindi f è iniettiva.
Adesso supponiamo per assurdo che non sia suriettiva, quindi significa che

$$\exists y_0 \in Y | \nexists x \in X, f(x) = y_0$$

Essendo $Dom(g) = Y$ ciò implica che $g(y_0) = x_0$ ma ciò rappresenta un assurdo e quindi la mia funzione è anche surriettiva e quindi f è biettiva.

"f è biettiva $\Rightarrow \exists g : Y \mapsto X| \begin{cases} gof \colon X \to X \\ \qquad x \mapsto g(f(x)) = id(x) \end{cases}$"
Se la funzione f è bigettiva per ipotesi so per definizione che:

- $\forall y \in Y, \exists x \in X | f(x) = y$.
- $\forall x_1, x_2 \in X | x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$. Quindi posso dedurre che

  $$\forall y \in Y, \exists! x \in X | f(x) = y$$

  ciò è immediatamente verificato in quanto se esistessero più $x \in X$ allora andrei contro l'ipotesi di iniettività e se $\exists y \in Y | \nexists x \in X, f(x) = y$ andrei contro l'ipotesi di surriettività, quindi se il rapporto tra dominio e codominio è $1 : 1$ allora

  $$\begin{aligned} \exists g \colon Y &\to X \\ y &\mapsto g(y) = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

  Ma $y = f(x)$ quindi $g(y) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ e quindi la mia tesi è dimostrata.

$\square$

Definizione 1.0.8 (Famiglie di sottoinsiemi). *Dato un insieme X non vuoto, sia I l'insieme degli indici, anch'esso non vuoto. Un'applicazione*

$$\phi : I \to P(X)$$

Viene indicata con

$$\{A_i\}_{i \in I} \text{ se } A_i = \phi(i), \forall i \in I$$

In questo caso diremo che $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X scrivendo

$$\{A_i\}_{i \in I} \subset X \iff \begin{aligned} \exists \phi \colon I &\to P(X) \\ i &\mapsto \phi(i) = A_i \end{aligned}$$

Se la famiglia $\mathcal{A} \subset P(X)$ allora $A_{A \in \mathcal{A}}$ in quanto non sono presenti alcune ripetizioni, perciò esiste una perfetta corrispondenza.

$$\begin{aligned} \exists \phi \colon \mathcal{A} &\to P(X) \\ A &\mapsto \phi(A) = A \in P(X) \end{aligned}$$

Osservazione 1.0.1. *Dato $\{A_i\}_{i \in I} \subset X$ allora posso dire che*

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X | \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X | \forall i \in I, x \in A\}$$

Osservazione 1.0.2. *Nel caso in cui ho una situazione del tipo*

$$\bigcup_{A \in \phi} A = \phi$$

$$\bigcap_{A \in \phi} A = X$$

L'ultima affermazione è vera in quanto tutti i punti di X sono buoni perché tutti i singoletti contengono l'insieme vuoto.

1.1 Spazi metrici e applicazioni (Continue)

Definizione 1.1.1. *(distanza) Sia X un insieme non vuoto, una distanza su X è una funzione*

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà:

1. $d(x_1, x_2) \geq 0, \forall x_1, x_2 \in X$.
2. $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
3. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1), \forall x_1, x_2 \in X$.
4. $d(x_1, x_3) \geq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), \forall x_1, x_2, x_3 \in X$.

La coppia (X,d) si definisce spazio metrico.

Definizione 1.1.2. ***(continuità su spazi metrici)***
Siano $(X, d), (Y, \xi)$ due spazi metrici e sia

$$f : (X, d) \mapsto (Y, \xi)$$

un'applicazione tra spazi metrici allora dato $x \in X$, f è detta continua in quel punto se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta = \delta_\epsilon | f(B_d(d, \delta)) \subset B_\xi(f(x), \epsilon)$$

Dove

- $B_d(d, \delta) := \{x_0 \in X | d(x, x_0) < \delta\}$.
- $B_\xi(f(x), \epsilon) := \{y \in Y | d(f(x), y) < \epsilon\}$.

Osservazione 1.1.1. *L'intuizione in tutto questo è che preso un qualsiasi punto $y \in Y$ e dato un determinato raggio r riesco a vedere solo punti di Y in $B_d(y, r)$.*

Osservazione 1.1.2. *f viene detta globalmente continua se è continua $\forall x \in X$.*

Definizione 1.1.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$, diremo che Y è un aperto in (X, d) se*

$$Y = \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, r_i), \textit{per qualche } \{x_i\}_{i \in I} \subset X$$

Proposizione 1.1.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \in P(X)$ allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Y è un aperto in (X, d).*
2. *$\forall y \in Y, \exists r_y > 0 | B_d(y, r_y) \subset Y$*

Dimostrazione. Per dimostrare questa proposizione devo far valere:
(1) $\Rightarrow$ (2)
Se $Y = \phi$ allora abbiamo già per definizione che Y è un aperto.
Se $Y \neq \phi$ allora significa per definizione che

$$Y = \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, r_i)$$

Sia $y \in Y$ allora $\exists j \in I | y \in B(x_j, r_j)$ e quindi ciò significa che

$$d(x_j, y) < r_j$$

A questo punto considero una nuova lunghezza:

$$S_j = r_j - d(x_j, y) > 0$$

Che grazie alla disuguaglianza triangolare ottengo

$$B_d(y, S_j) \subset B_d(x_j, r_j) \subset Y$$

Quindi se Y è un aperto, comunque fissi un punto $\exists r > 0 | B_d(y, r) \subset Y$ e quindi la mia tesi è dimostrata.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Se $Y = \phi$ allora abbiamo già per definizione che Y è un aperto.
Se $Y \neq \phi$ allora significa che $\forall y \in Y, \exists r_y > 0 | B_d(y, r_y) \subset Y$.
A questo punto so che un qualsiasi insieme è uguale all'unione di tutti i singoletti e quindi

$$Y = \bigcup_{y \in Y} \{y\}$$

Quindi viene in automatico che sicuramente preso un raggio qualsiasi so che

$$\bigcup_{y \in Y} \{y\} \subset \bigcup_{y \in Y} B_d(y, r_y)$$

ma io so che fissato un certo r_y per ipotesi ho che $B_d(y, r_y) \subset Y$ e quindi data la doppia inclusione

$$Y = \bigcup_{y \in Y} B_d(y, r_y)$$

Perciò per definizione Y è un aperto. □

Teorema 1.1.1. *Sia $f : (X, d) \mapsto (Y, \xi)$ un'applicazione tra due spazi metrici. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è una funzione continua.*
2. *Per ogni aperto $A \subset (Y, \xi) \Rightarrow f^{-1}(A) \subset (X, d)$ è un aperto.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema mostrare che:
(1) $\Rightarrow$ (2)
L'obiettivo è dimostrare che $\forall x \in B, \exists B_d(x, r) \subset B$.
Supponiamo che $f : X \to Y$ sia una funzione continua e consideriamo un aperto $A \subset Y | B = f^{-1}(A)$ allora so per definizione di funzione globalmente continua su B che $\forall x \in B$ vale:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | f\left(B_d(x, \delta)\right) \subset B_\xi(f(x), \epsilon) \subset A$$

Dato che l'applicazione è continua allora so inoltre che

$$\exists \delta > 0 | f(B_d(x, \delta)) \subset B_\xi(f(x), \epsilon) \subset A$$

Quindi per una proposizione precedente ho che

$$B_d(x, \delta) \subset f^{-1}\left(f(B_d(x, \delta))\right) \subset f^{-1}(A) = B$$

Quindi $f^{-1}(A)$ è per definizione un aperto.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Dato un aperto $A \subset Y$ allora $B = f^{-1}(A)$ risulta essere un aperto per quanto supposto di f. Quindi per costruzione ho che $\forall y \in A, \exists x \in X | f(x) = y$ e vale che

$$\forall y \in A | B_\xi(y, \epsilon) \subset A,\ \epsilon > 0$$

Poiché $B_\xi(y, \epsilon)$ è un aperto di (Y, ξ) per definizione allora per ipotesi ho che $f^{-1}(B_\xi(f(x), \epsilon)$ è un aperto, perciò per la proposizione (1.1.1) so che

$$\exists \delta > 0 | B_d(x, \delta) \subset f^{-1}(B_d(x, \delta))$$

Quindi data l'arbitrarietà di ϵ ho che la f è per definizione continua per definizione in quanto

$$f(B_d(x, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_d(x, \delta)))$$

Dunque la mia tesi è dimostrata. □

Proposizione 1.1.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\mathcal{A} \subset P(X)$ la famiglia degli aperti di (X, d) allora proviamo che:*

1. *$\phi \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{A}$ in quanto $\forall x \in X, B_d(x, 1) \subset X$.*
2. *Sia $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.*
3. *Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \{A_1 \cap A_2\} \in \mathcal{A}$.*

Dimostrazione. (1)

□

Dimostrazione. (2)
Scrivere

$$\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A}$$

Significa che

$$\begin{aligned} \varphi \colon I &\to P(X) \\ i &\mapsto A_i, A_i \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Quindi considero un insieme

$$S := \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i | A_i \in \mathcal{A} \right\}$$

Sicuramente $\forall x \in S, \exists i_0 \in I | x \in A_{i_0} \Rightarrow \exists r_{i_0} | B_d(x, r_{i_0}) \subset A_{i_0} \subset S$.
Dunque per definizione se

$$\forall x \in S, \exists r > 0 | B_d(x, r) \subset S$$

Allora S è un insieme aperto e quindi essendo composto da elementi di X segue in automatico che $S \in P(X)$ e quindi $S \in \mathcal{A}$ ma per come abbiamo costruito S è ovvio che

$$S = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

□

Dimostrazione. (3)

Per dimostrare che $A_1 \cap A_2$ è un insieme aperto significa che devo dimostrare che:

$$\forall a \in A_1 \cap A_2, \exists r_a > 0 | B_d(a, r_a) \subset (A_1 \cap A_2)$$

Preso un qualsiasi punto $a \in A_1 \cap A_2$ è ovvio che $a \in A_1, a \in A_2$ ma essendo i due insiemi aperti per ipotesi, ciò mi implica che

$$\exists r_1, r_2 > 0 | B_d(a, r_1) \subset A_1, B_d(a, r_2) \subset A_2$$

A questo punto definisco $r := \min(r_1, r_2)$ e quindi sicuramente ottengo che:

$$B_d(a, r) \subset B_d(a, r_1) \subset A_1$$

$$B_d(a, r) \subset B_d(a, r_2) \subset A_2$$

Quindi segue automaticamente che

$$B_d(a, r) \subset (A_1 \cap A_2)$$

$\square$

Capitolo 2

Spazi Topologici

2.1 Topologia

Definizione 2.1.1. ***(Topologia)***
Sia X un insieme non vuoto. Una struttura topologica su X è una famiglia τ di sottoinsieme di X, cioè $\tau \subset P(X)$ che soddisfa le seguenti 3 proprietà:

1. $\phi \in \tau, X \in \tau$
2. *τ soddisfa l'unione arbitraria, cioè l'unione di ogni sottofamiglia di elementi di τ è ancora un elemento di τ:*
$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$
3. *τ è stabile per l'intersezione finita, cioè l'intersezione di ogni sottofamiglia finita è ancora un elemento di τ*
$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$$

Esempio 2.1.1. *Dato un insieme X non vuoto allora*

$$\tau_{cof} := \{\phi\} \cup \{A \in P(X) | \mathcal{C}_X(A) \text{ è un insieme finito}\}$$

Rappresenta una topologia.

Dimostrazione. Per dimostrare ciò devo far vedere i 3 punti della definizione.

1. Per costruzione $\phi \in \tau_{cof}$. Inoltre dato che $\mathcal{C}_X(X) = \phi$, che è un insieme finito, segue che $X \in \tau_{cof}$.

2. Sia $\{A_i\}_{i \in I} | A_i \in \tau_{cof}, \forall i \in I$ allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{cof} \Longleftrightarrow \mathcal{C}_X \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \text{ è finito}$$

   Dato che

$$\mathcal{C}_X \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\mathcal{C}_X(A_i))$$

   Ma essendo A_i in τ allora $\mathcal{C}_X(A_i)$ è finito $\forall i \in I$ allora anche l'intersezione di insiemi finiti è finita e quindi τ_{cof} è stabile per unione arbitraria.

3. Analogamente considero $\{A_i\}_{i=1}^n | A_i \in \tau_{cof}, \forall i \in I$ allora

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau_{cof} \Longleftrightarrow \mathcal{C}_X \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \text{ è finito}$$

Dato che

$$\mathcal{C}_X \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{C}_X(A_i))$$

Ma essendo A_i in τ allora $\mathcal{C}_X(A_i)$ è finito $\forall i \in I$ allora anche l'unione finita di insiemi finiti è un insieme finito perciò τ_{cof} è stabile per intersezione finita.

Quindi τ_{cof} è per definizione una topologia su X. □

Osservazione 2.1.1. *Per induzione la proprietà (3) è equivalente a scrivere che*

$$\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$$

Definizione 2.1.2. *Se τ è una topologia su X allora (X, τ) si dice essere uno spazio topologico*

Esempio 2.1.2. *Se (X, d) è uno spazio metrico allora la famiglia τ_d degli aperti di X rispetto alla funzione d rappresenta una topologia su X.*

Definizione 2.1.3. ***(metrizzabile)*** *Se uno spazio topologico ammette una distanza d tale che $\tau = \tau_d$ allora si dice che τ è metrizzabile.*

Osservazione 2.1.2. *Sia X un insieme non vuoto, definiamo $\tau_B \subset P(X)$ e $\tau_D \subset P(X)$ ponendo:*

1. $\tau_B = \{\phi, X\}$
2. $\tau_D = P(X)$

Esse rappresentano delle topologie su X.

Dimostrazione. (1)
Per definizione τ_B possiede ϕ, X, quindi la proprietà (1) è soddisfatta.

Se costruisco una famiglia di insiemi vuoti allora la loro unione è l'insieme vuoto il quale è un elemento di τ_B mentre se all'interno di quella famiglia vi è anche un solo insieme $A_i = X$ allora l'unione di tale famiglia è X che è a sua volta contenuto in τ_B, quindi anche il secondo punto è rispettato.

Analogo discorso per quanto riguarda l'intersezione: se le famiglie sono vuote la loro intersezione è vuota e quindi appartiene a τ_B lo stesso se sono composte da insiemi $A_j = X$, quindi è stabile anche per l'intersezione finita.
Dunque τ_B è una topologia, definita banale.

□

Dimostrazione. (2)
Per definizione τ_D possiede ϕ, X, in quanto $\phi, X \in P(X)$ quindi la proprietà (1) è soddisfatta.

Se considero una famiglia di insiemi di X l'unione di tale famiglia è un'operazione di unione tra insiemi di X e quindi sicuramente è un elemento di $P(X)$ e quindi anche di τ_D, quindi è stabile per l'unione.

Analogo discorso di prima se considero una famiglia finita la loro intersezione è un'insieme che sicuramente per definizione appartiene a $P(X)$ e quindi anche di τ_D, quindi è stabile per l'intersezione.
Dunque τ_B è una topologia, definita discreta (ed è la topologia più ricca di tutte). □

Definizione 2.1.4. ***(equivalenza topologica)*** *È una relazione di equivalenza definita sugli insiemi degli spazi topologici, originato dal considerare equivalenti due figure geometriche.*
Due spazi topologici sono equivalenti se esiste un omomorfismo:

$$f : X \to Y$$

Definizione 2.1.5. *Su di un insieme è sempre possibile introdurre una distanza discreta:*

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto d(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 \\ 1, & x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Questa rispetta la definizione di metrica

Esercizio. *Sia uno spazio topologico discreto (X, τ_D) e sia τ_d la topologia indotta dalla distanza discreta allora*

$$\tau_d = \tau_D$$

Dimostrazione.

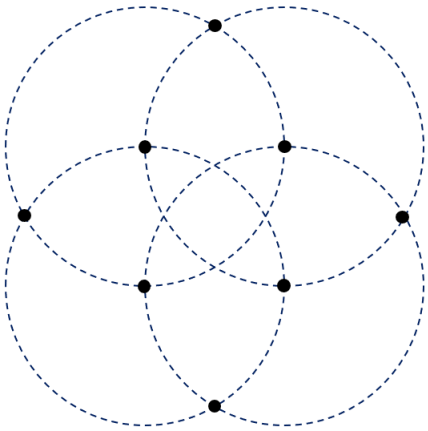
"$\underline{\tau_d \subset \tau_D}$"
Per costruzione di topologia discreta ho che qualsiasi insieme determinato dalla topologia indotta dalla distanza discreta farà parte di $\mathcal{P}(X)$ e quindi apparterrà alla topologia discreta.

"$\underline{\tau_d \supset \tau_D}$"
Se dimostro che i singoletti di τ_D corrispondo alle palle aperte di τ_d allora ho vinto perché qualsiasi altro insieme è unione arbitraria di tali insiemi.
Dunque

$$\forall x \in X, B_d(x, 1) = \{y \in X | d(x, y) < 1\}$$

Perciò è ovvio che $\{x\} \subset B_d(x, 1)$. Inoltre affermo che tale insieme è composto dal solo x in quanto se per assurdo suppongo che esiste un altro elemento $y \neq x, y \in B_d(x, 1)$ allora per come ho costruito la metrica ho che $d(x, y) = 1$ ma ciò è assurdo e quindi $B_d(x, 1) = \{x\}$ allora la mia tesi è dimostrata. □

Osservazione 2.1.3. *Dalla dimostrazione precedente deduciamo quindi che gli elementi in una topologia discreta sono così lontani che non si vedono, inoltre tale dimostrazione sarebbe venuta anche se al posto di $d(x, y) = 1$, $x \neq y$ avessimo avuto un altro numero totalmente casuale.*



Esercizio. *Sia uno spazio topologico banale τ_B su uno spazio metrico (X, d) allora non è metrizzabile.*

Dimostrazione. Nel caso in cui $X = \{x\}$ allora lo spazio topologico banale è uguale a quello discreto e quindi è metrizzabile. Nel caso in cui non lo sia, supponiamo che $X = \{p, q\}$ allora per essere metrizzabile deve essere che

$$\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \in \tau_B = \{\phi, X\}$$

Ma se scegliamo, ad esempio, $\epsilon = d(p, q)$ la palla (che è un insieme aperto) $B_d(p, \epsilon)$ non contiene l'elemento q e quindi l'insieme non è metrizzabile. □

Definizione 2.1.6. *$\mathbb{R}^n$ si definisce topologia euclidea la topologia su $\mathbb{R}^n$ indotta dall'equazione distanza:*

$$d_n \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to X$$

$$(x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

2.2 Topologie confrontabili

Definizione 2.2.1. *Sia X un insieme non vuoto e τ, τ' due topologie su X. Diciamo che τ è meno fine di τ' se*

$$\tau \subset \tau'$$

Allora τ, τ' si dicono confrontabili.

Osservazione 2.2.1. *Da tutto questo posso osservare alcune cose:*

1. *τ_B è la topologia meno fine di tutte, al contrario di τ_D che è quella più fine.*
2. *Se $X = \{a, b, c\}$ posso definire due topologie*

$$\tau = \{\phi, X, \{a\}\}$$
$$\tau' = \{\phi, X, \{b\}\}$$

Le quali non sono confrontabili perché $\{a\} \notin \tau' \wedge \{b\} \notin \tau$.

2.2.1 Base di una topologia

Definizione 2.2.2. ***(Base di una topologia)***
Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\mathcal{B} \subset \tau$. Diciamo che $\mathcal{B}$ è una base per τ se ogni elemento di τ su può scrivere come unione di una qualche sotto famiglia di $\mathcal{B}$:

$$\tau := \left\{ A \in P(X) | \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}, \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = A \right\}$$

Proposizione 2.2.1. *Sia $\mathcal{B} \subset \tau$ allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{B}$.*
2. *$\forall A \in \tau, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} | x \in B_x \subset A$.*

Dimostrazione.

(1) $\Longrightarrow$ (2)
Sia $A \in \tau$ allora per definizione so che $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale per cui

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

Perciò è ovvio che $\forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} | \exists B \in \mathcal{B}' | x \in B \subset A$.

(1) $\Longleftarrow$ (2)
Prendo un elemento $A \in \tau$ quindi

$$\forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B}' | x \in B_x \subset A$$

Quindi sicuramente posso dire che

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset \bigcup_{x \in A} A = A$$

Dunque in conclusione $A = \bigcup B_x$ perciò la famiglia $\{B_x\}_{x \in A} \subset \mathcal{B}$. $\square$

Esempio 2.2.1. *Dato uno spazio topologico (X, τ) allora:*

1. *τ è base di τ.*
2. *Se $\mathcal{B}$ è una base di τ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset P(X) \Rightarrow \mathcal{C}$ è una base di τ.*
3. *Se τ è metrizzabile secondo una distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$ allora la famiglia delle palle*

$$\mathcal{B} := \{B_d(x, r) | x \in X, r \in \mathbb{R}\}$$

   Rappresenta una base di τ_d e quindi di τ.

4. *$(\mathbb{R}, \tau_\xi)$ ha per una base la famiglia*

$$\mathcal{B} := \{(a, b) \in P(\mathbb{R}) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Proposizione 2.2.2. *Dato uno spazio topologico (X, τ) e sia $\mathcal{B}$ una base di τ allora valgono le seguenti proposizioni:*

1. *$\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X, cioè*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X, \mathcal{B} \neq \phi$$

   Dimostrazione. (1)
   Poiché $X \in \tau$ allora per definizione di base posso affermare che

$$\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} | X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset X$$

   □

2. *$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2$ è esprimibile come unione di sottofamiglie di $\mathcal{B}$, quindi $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale che*

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

   Dimostrazione. (2)
   Dato che per definizione di topologia $B_1 \cap B_2 \in \tau$ perché è chiusa per intersezione finita, allora so che per definizione di base di topologia $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale per cui

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

   □

3. *Sia $\mathcal{Y} \subset P(X)$ e sia $\{\tau_i\}_{i \in I}$ la famiglia delle topologie su $X | \forall i \in I, \tau_i \supset \mathcal{Y}$ allora $\tau_\cap := \bigcap_{i \in I} \tau_i$ è la topologia meno fine a contenere $\mathcal{Y}$.*

   Dimostrazione. (3)
   Grazie al primo punto ho che $\tau_\cap := \bigcap_{i \in I} \tau_i$ rappresenta una topologia. Dunque se suppongo che non sia la meno fine allora per definizione

$$\exists \tau \in \{\tau_i\} | \mathcal{Y} \subset \tau \subset \tau_\cap$$

   Dunque per costruzione posso affermare che $\exists i_0 \in I | \tau = \tau_{i_0}$ ma se è così ho che

$$\tau_\cap := \bigcap_{i \in I} \tau_i = \left(\bigcap_{i \in I \setminus \{i_0\}} \tau_i \right) \cap \tau_{i_0} \subset \tau_{i_0}$$

   Quindi $\tau_\cap = \tau$ perciò la mia tesi è dimostrata. □

Esercizio. *Sia X un insieme non vuoto e sia $\{\tau_i\}_{i\in I}$ una famiglia di topologie su X. L'intersezione finita di famiglie di topologie è sempre una topologia mentre l'unione arbitraria non lo è sempre*

Dimostrazione. Consideriamo un insieme $X := \{a, b, c\}$ sul quale posso costruire due topologie egualmente giuste:

$$\tau_1 := \{\phi, X, \{a\}\}$$
$$\tau_2 := \{\phi, X, \{b\}\}$$

Se considero la famiglia $\tau_1 \cup \tau_2 := \{\phi, X, \{a\}, \{b\}\}$ si nota subito che se prendo $\{a\} \cup \{b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$ e quindi non è stabile per l'unione arbitraria perciò non può essere una topologia. □

Teorema 2.2.1. *Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, cioè $\mathcal{B} \subset P(X)$. Quindi se valgono:*

1. *$\mathcal{B}$ un ricoprimento per l'insieme*
2. *$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, |\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale per cui*
$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B$$

Allora:

1. *$\exists! \tau$ su X con base $\mathcal{B}$.*
2. *τ è la topologia meno fine su X generata da $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione.

- **<u>Esistenza della topologia</u>**
  Per mostrare che la famiglia di insiemi definita come
$$\tau := \left\{ A \in P(X) | \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}, A = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B \right\}$$
  È una topologia devo dimostrare per definizione 3 punti:
  1. $\phi \in \tau$ in quanto se scelgo una sottofamiglia vuota la sua unione arbitraria di elementi è sempre vuota.
     $X \in \tau$ per la proprietà (1) in quanto è un suo ricoprimento.
  2. Sia $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ quindi per costruzione ho che
$$\forall i \in I, \forall A_i \in \tau \Rightarrow \exists \mathcal{B}'_i \subset \mathcal{B} | A_i = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'_i} B$$
     Perciò posto $\mathcal{B}' = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}$ ho che $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ dunque posso dire che
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}'_i} B \right) = \bigcup_{B\in\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{B}'_i\right)} B = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B$$
     Quindi per definizione τ è stabile per unione arbitraria.
  3. $\forall A_1, A_2 \in \tau$ devo dimostrare che $A_1 \cap A_2 \in \tau$, quindi analizzando i vari insiemi so che appartenendo a tale topologia possono essere scritti come:
$$A_1 \in \tau \Rightarrow A_1 = \bigcup_{i\in I} B_{1,i}, \text{ per qualche } \{B_{1,i}\}_{i\in I_1} \subset \mathcal{B}$$
$$A_2 \in \tau \Rightarrow A_2 = \bigcup_{i\in I} B_{2,i}, \text{ per qualche } \{B_{2,i}\}_{i\in I_2} \subset \mathcal{B}$$

Dunque

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_{1,i} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_{2,i} \right) = \bigcup_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}} (B_{1,i} \cap B_{2,j})$$

Per la proprietà (2) ho che $\forall i, j, \exists \mathcal{B}_{i,j} \subset \mathcal{B} | B_{1,i} \cap B_{2,j} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{i,j}} B$ dunque posso riscrivere il tutto come

$$\bigcup_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_{i,j}} B \right)$$

Dunque per semplicità pongo $\mathcal{B}' = \bigcup_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}} \mathcal{B}_{i,j}$ il quale è incluso in $\mathcal{B}$ allora ottengo che

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

Quindi per definizione τ, $A_1 \cap A_2 \in \tau$ e quindi è stabile per intersezione finita.

Dunque τ rappresenta per definizione una topologia su X.

- **Unicità della topologia**
  Essendo $\mathcal{B}$ una sua base, significa per definizione che

$$\tau := \left\{ A \in P(X) | \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}, A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \right\}$$

Dato che il tutto dipende solo da $\mathcal{B}$ è chiaro che può esserci solo una topologia così definita.

Topologia meno fine secondo tale base
Supponiamo per assurdo che

$$\exists \tau' := \left\{ A \in P(X) | \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}, A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \right\} | \tau' \subset \tau$$

allora per definizione $\exists A \in \tau | A \notin \tau'$. Dato la topologia di appartenenza posso scrivere che

$$\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} | A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

Ma se tale insieme è esprimibile come unione di insiemi di $\mathcal{B}$ allora appartiene anche a τ' per come lo abbiamo definito e quindi siamo di fronte ad un assurdo, perciò:

$$\tau \subset \tau'$$

$\square$

2.2.2 Sottobase

Definizione 2.2.3 (Sottobase). *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\Sigma \subset \tau$, diciamo che Σ è una sottobase di τ se la famiglia delle sue intersezioni finite di $\mathcal{B}$ rappresenta una base per τ cioè:*

$$\mathcal{B} := \left\{ B \in P(X) \middle| B = \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \quad U_i \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Esempio 2.2.2. *Da quanto detto fin ora posso dedurre che:*

1. *Se $\Sigma = \tau$ è una sottobase allora in quanto*

$$\Sigma \subset \mathcal{B} \subset \tau \Rightarrow \Sigma = \mathcal{B} = \tau$$

2. *Dato lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_\xi)$ allora*

$$\Sigma := \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) | b \in \mathbb{R}\}$$

   Allora

$$\mathcal{B} \supset \{(a, b) \in P(\mathbb{R}) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

   Ma $(a, b) = (-\infty, a) \cap (b, +\infty) \Rightarrow \Sigma$ è una sottobase della retta euclidea ma non può essere una base perché il frammento $(0, 1)$ non si può ottenere con nessuna unione di elementi di Σ.

Osservazione 2.2.2. *Alcune caratteristiche della sottobase sono:*

1. *Σ è una sottobase di τ se*

$$\forall A \in \tau, \forall x \in A, \exists U_1, \ldots, U_n \in \Sigma | x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

2. *Ogni sottobase di τ rappresenta una ricoprimento per X.*

   Dimostrazione. Per definizione so che $\forall x \in A, \exists U_1, \ldots, U_n \in \Sigma | x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ allora

$$x \in U_1^x, \ldots, U_n^x \subset U_1^x$$

   Quindi posso definire una famiglia $\mathcal{U} := \{U_1^x \in P(X) | U_1^x \in \Sigma\} \subset \Sigma$ quindi

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subset \bigcup_{S \in \Sigma} S \subset X$$

   Perciò

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

□

Teorema 2.2.2. *Sia X un insieme non vuoto e sia $\Sigma \subset P(X)$ un ricoprimento di X allora $\exists! \tau | \Sigma$ è una delle sue sottobase.*

Dimostrazione. Se riesco a dimostrare che $\exists! \mathcal{B}$ famiglia di insiemi che soddisfa le ipotesi del teorema 2.2.1 allora ho finito, dunque definisco una nuova famiglia in funzione di Σ

$$\mathcal{B} := \left\{ A \in P(X) | \exists \{U_j\}_{j \in J} \subset \Sigma, \, |J| < +\infty, A = \bigcap_{j \in J} U_j \right\}$$

<u>Esistenza</u>
Questo punto è ovvio in quanto tale famiglia è ben definita.

Unicità

Se per assurdo suppongo che $\exists \mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$ tale che

$$\mathcal{B}' := \left\{ A' \in P(X) | \exists \{U_j\}_{j \in J'} \subset \Sigma,\ |J'| < +\infty,\ A = \bigcap_{j \in J} U_j \right\}$$

Ma è ovvio vedere che $\forall A \in \mathcal{B}$ per costruzione $\exists \{U_j\}_{j \in J}$ con J finito tale per cui $A = \bigcap_{j \in J} U_j$ ma sempre per costruzione $A \in \mathcal{B}'$ (analoga anche l'altra implicazione) quindi $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ quindi tale famiglia è unica.

Soddisfa le ipotesi del teorema

Adesso devo far vedere due cose:

HP1 Dato che per ipotesi Σ è un ricoprimento di X allora per definizione so che

$$\exists \{U_l\}_{l \in L} \subset \Sigma | X = \bigcup_{l \in L} U_l$$

Dunque posso considerare sotto-famiglie di Σ composta da solo $U_l, \forall l \in L$ dunque

$$\{U_l\}_{l \in L} \subset \mathcal{B}$$

Perciò per definizione ho che $\mathcal{B}$ rappresenta un ricoprimento.

HP2 Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dunque per costruzione so che $\exists \{U_i\}_{i \in I}, \exists \{U_j\}_{j \in J} \subset \Sigma$ entrambi finite tali per cui

$$B_1 = \bigcap_{i \in I} U_i$$
$$B_2 = \bigcap_{j \in J} U_j$$

Dunque

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} U_j \right) \\ &= \bigcap_{i \in I} \left(U_i \cap \left(\bigcap_{j \in J} U_j \right) \right) \\ &= \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (U_i \cap U_j) \right) \\ &= \bigcap_{k \in J \cup I} U_k \end{aligned}$$

Dunque tale intersezione è finita perché generata da insiemi finiti e quindi per costruzione appartiene a $\mathcal{B}$.

Per quanto visto inizialmente posso dire che:

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (B_1 \cap B_2) \cap X \\ &= \left(\bigcap_{k \in K} U_k \right) \cap \left(\bigcup_{l \in L} U_l \right) \\ &= \bigcup_{l \in L} \left(U_l \cap \left(\bigcap_{k \in K} U_k \right) \right) \\ &= \bigcup_{l \in L} \left(\bigcap_{k \in K} (U_l \cap U_k) \right) \end{aligned}$$

Considerando il fatto che essendo un'intersezione finita, ho che

$$B_l := \bigcap_{k \in K} (U_l \cap U_k) \in \mathcal{B} \qquad \forall l \in L$$

Dunque posso riscrivere il tutto in maniera equivalente:

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{l \in L} B_l$$

Dunque essendo verificate le due ipotesi del teorema allora la mia tesi è dimostrata.

Rappresenta una sottobase

Dato che per il teorema precedente la famiglia $\mathcal{B}$ rappresenta la base della topologia e, per costruzione, ogni suo punto è intersezione finita di elementi di Σ allora per definizione Σ rappresenta una sottobase per (X, τ). $\square$

2.3 Intorni

Definizione 2.3.1. ***(Intorno di un insieme)*** *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $M \in P(X)$, un sottoinsieme $U \in P(X)$ si definisce intorno di M se*

$$\exists A \in \tau | M \subset A \subset U$$

Definizione 2.3.2. ***(Sistema di intorni)***
Se $M = \{x\}$ allora si definisce la famiglia degli intorni di $\{x\}$:

$$\mathcal{N}_\tau(x) := \{U \in P(X) | U \text{ è un intorno di } x \text{ in } (X, \tau)\}$$

Osservazione 2.3.1. ***(proprietà degli intorni)***

1. *Se $U \in \mathcal{N}_\tau(x) \Rightarrow x \in U$*
2. *$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), \exists A \in \mathcal{N}_\tau(x) \cap \tau | A \subset U$*
3. *Se U è un intorno e $V \in P(X) | V \supset U \Rightarrow V \in \mathcal{N}_\tau(x)$.*

Proposizione 2.3.1. *Dato uno spazio topologico (X, τ) e sia $A \in P(X)$ allora $A \in \tau \iff \forall x \in A, A \in \mathcal{N}_\tau(x)$.*

Dimostrazione. Per dimostrare ciò devo dimostrare che:

"$A \in \tau \Rightarrow \forall x \in A, A \in \mathcal{N}_\tau(x)$"
Se $A \in \tau, x \in A \Rightarrow x \in A \subset A \in \tau \Rightarrow A \in \mathcal{N}_\tau(x)$, e quindi questa implicazione è dimostrata.

"$A \in \tau \Leftarrow \forall x \in A, A \in \mathcal{N}_\tau(x)$"
Supponiamo ora che $A \in \mathcal{N}_\tau(x), \forall x \in A$ allora per definizione so che

$$\exists A_x \in \tau | x \in A_x \subset A$$

Dunque

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$$

Quindi $A = \bigcup_{x \in A} A_x \in \tau \Rightarrow A \in \tau$ □

Questa proposizione mi dice che ogni insieme della topologia è allo stesso tempo intorno di ogni suo punto.

2.3.1 Sistema fondamentale di intorni

Definizione 2.3.3. ***(Sistema fondamentale di intorni)***
Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$ allora definisco sistema fondamentale di intorni la famiglia $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{N}_\tau(x)$ tale per cui

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), \exists V \in \mathcal{V}(x) | V \subset U$$

Esempio 2.3.1. *Una serie di esempi sul come può essere un sistema fondamentale di insiemi:*

1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico con una topologia indotta dalla distanza d e sia $x \in X$ allora*

   $$\mathcal{V}(x) := \{B_d(x, r)\}_{r>0}$$

   Rappresenta un insieme fondamentale di intorni.

Dimostrazione. $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), \exists A \in \tau$ per definizione tale per cui $x \in A \subset U$, dato che A è aperto allora

$$\forall x \in A, \exists r > 0 | B_d(x,r) \subset A \Rightarrow B_d(x,r) \in U$$

Perciò per come abbiamo definito $B_d(x,r) \in \mathcal{V}(x)$ e quindi per definizione $\mathcal{V}(x)$ è un insieme fondamentale di intorni. □

2. *Sia (X, τ_B) uno spazio topologico banale allora*

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{N}_\tau(x) = \{X\}$$

3. *Sia (X, τ_D) uno spazio topologico discreto allora*

$$\mathcal{V}(x) := \{\{x\}\}$$

É il più piccolo sistema fondamentale di intorni di x.

4. *Sia $(\mathbb{R}, d)$ e sia $x \in \mathbb{R}$ allora*

$$\mathcal{V}(x) := \{B_d(x, \epsilon\}_{\epsilon > 0}$$
$$\mathcal{V}(x) := \{B_d(x, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Proposizione 2.3.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico, $\forall x \in X$ sia $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{N}_\tau(x) | \mathcal{V}(x)$ sistema fondamentale di intorni di x e sia $A \in P(X)$ allora*

$$\forall A \in \tau \iff \forall x \in A, \exists V_x \in \mathcal{V}(X) | V_x \subset A$$

Dimostrazione.

"$\forall A \in \tau \Rightarrow \forall x \in A, \exists V_x \in \mathcal{V}(X) | V_x \subset A$"
Se $A \in \tau$ allora per definizione è un aperto e quindi per definizione di aperto so che

$$\forall x \in A, \exists V_x \subset A | x \in V_x \Rightarrow V_x \in \mathcal{V}(x)$$

"$\forall A \in \tau \Leftarrow \forall x \in A, \exists V_x \in \mathcal{V}(X) | V_x \subset A$"
Come ho già dimostrato posso far valere che:

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{\substack{V_x \in \mathcal{V}(x) \\ x \in A}} V_x \subset A$$

Quindi

$$A = \bigcup_{\substack{V_x \in \mathcal{V}(x) \\ x \in A}} V_x \in \tau$$

□

Proposizione 2.3.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico, $\mathcal{B} \subset \tau$ e $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} | x \in \mathcal{B}\}$ allora $\mathcal{B}$ è una base per la topologia $\iff \forall x \in X, \mathcal{B}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni.*

Dimostrazione.

"$\mathcal{B}$ è una base $\Rightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}(x)$ è un SFI"
Sia $x \in X$ dunque $\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ ho per definizione che $\exists A \in \tau | x \in A \subset U$. Dato che per ipotesi $\mathcal{B}$ rappresenta una base della topologia allora per definizione ho che $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} | A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ perciò posso affermare che

$$\exists B \in \mathcal{B}' | x \in B \subset A \subset U \Rightarrow B \in B(x)$$

Dunque per definizione risulta che $B(x)$ è un SFI.

$\underline{\mathcal{B} \text{ è una base} \Leftarrow \forall x \in X, \mathcal{B}(x) \text{ è un SFI"}}$
Sia $A \in \tau$ dunque $\forall x \in A, A \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e dato che $\forall x \in X, B(x)$ è un SFI per ipotesi allora ho che $\exists B_x \in B(x) | x \in B_x \subset A$ dunque

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$$

Dunque poiché $\{B_x\}_{x \in A} \subset \mathcal{B}$ allora per definizione ho che B rappresenta una base. □

Corollario 2.3.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Supponiamo che $\forall x \in X, \mathcal{V}(x) \subset (\mathcal{B}_\tau(x) \cap \tau)$, quindi che tale sistema fondamentale di intorni sia aperto, allora:*

$$B = \bigcup_{\substack{x \in B \\ V \in \mathcal{V}(x)}} V \in \tau$$

Osservazione 2.3.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $\forall x \in X, \mathcal{V}(x)$ un sistema fondamentale di intorni allora*

1. *L'intersezione finita di una sottofamiglia di elementi di $\mathcal{V}(x)$ contiene un elemento di $\mathcal{V}(x)$.*
2. *$\forall V \in \mathcal{V}(x), x \in V \subset X$.*
3. *Se $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}(x) | \forall y \in W, V \in \mathcal{V}(y)$.*

Queste condizioni sono necessarie e sufficienti a dire che $\exists! \tau$.

2.4 Primo-Secondo assioma di numerabilità

Definizione 2.4.1. ***(Numerabilità)***
Un insieme X si definisce numerabile se esiste una funzione biettiva tra esso e l'insieme dei naturali:

$$f : \mathbb{N} \to X$$

Definizione 2.4.2. ***(Primo assioma)***
(X, τ) uno spazio topologico si dice soddisfare il primo assioma di numerabilità se $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}(x) | \mathcal{V}(x)$ è numerabile.

Esempio 2.4.1. *Alcuni esempi di topologie che soddisfano il primo assioma sono:*

- $\tau = \tau_B \Rightarrow \mathcal{V}(x) = \{X\}$
- $\tau = \tau_D \Rightarrow \mathcal{V}(x) = \{\{x\}, \forall x \in X\}$
- $\tau = \tau_d \Rightarrow \mathcal{V}(x) = \left\{B_d\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

Definizione 2.4.3. ***(Secondo assioma)***
(X, τ) uno spazio topologico si dice soddisfare il secondo assioma di numerabilità se τ ammette una base numerabile

Lemma 2.4.1. *Se uno spazio topologico (X, τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità allora soddisfa anche il primo.*

Dimostrazione. Dato che (X, τ) soddisfano il 2° assioma di numerabilità allora per definizione tale spazio topologico ammette base $\mathcal{B}$ numerabile. A questo punto posso definire

$$\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} | x \in B\} \subset \mathcal{B}$$

Sappiamo che $\mathcal{B}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni nello spazio topologico, inoltre dato che $\mathcal{B}$ è numerabile per ipotesi allora dato che $\mathcal{B}(x)$ è un suo sottoinsieme, è anch'esso numerabile e quindi la mia tesi è dimostrata. □

Esempio 2.4.2. *Se consideriamo uno spazio non numerabile come ad esempio $X = \mathbb{R}$ e vi consideriamo la topologia discreta τ_D allora come è già stato dimostrata $\mathcal{V}(x) := \{\{x\}\}_{x\in\mathbb{R}}$ è un sistema fondamentale di intorni. É immediato che tale topologia soddisfa il primo assioma di numerabilità, ma la base da essa generata $\mathcal{B}$ è tale per cui se*

$$\{x\} \in \tau_D \Rightarrow B \in \mathcal{B}|B = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi di conseguenza tale base non è numerabile e quindi non può soddisfare il secondo assioma di numerabilità.

Esempio 2.4.3. *Consideriamo $(\mathbb{R}, \tau_D)$ nel quale posso considerare diverse basi:*

- $\mathcal{B} := \{(a, b) \in P(X)|a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ *la quale non è numerabile.*
- $\mathcal{B} := \{(a, b) \in P(X)|a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ *allora diventa una famiglia di insiemi numerabili. Se considero un intervallo $(c, d) \subset X, c, d \in \mathbb{R}$ posso costruire due successioni monotone di elementi in $\mathbb{Q} : \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali per cui $a_n \to c$ in maniera decrescente e $b_n \to d$ in maniera crescente, quindi:*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) = (c, d)$$

Esempio 2.4.4. *Consideriamo $(\mathbb{R}^n, \tau_d)$ uno spazio topologico indotto dalla metrica euclidea, allora vi posso costruire delle basi in funzione della distanza:*

$$\mathcal{B} := \{B_d(x, r) \in P(\mathbb{R}^n)|x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$$

$$\mathcal{B} := \{B_d(x, r) \in P(\mathbb{R}^n)|x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

É chiaro che la prima rappresenta una base non numerabile mentre la seconda è numerabile e soddisfa il secondo assioma di numerabilità mentre

$$B(x) := \{B_r(x)|r \in \mathbb{Q}\}$$

Soddisfa il primo assioma ma non il secondo.

Teorema 2.4.1. ***(Lindorff)***
Sia (X, τ) uno spazio topologico a base numerabile e una famiglia $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ che potrebbe non essere numerabile, allora

$$\exists J \subset I|J \text{ è numerabile}, \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j$$

Dimostrazione. Prima di tutto definisco una nuova famiglia

$$\widehat{B} := \{B \in \mathcal{B}|\exists i_n \in I, B \subset A_{i_n}\}$$

Poiché la base è numerabile per ipotesi allora essendo $\widehat{B}$ un suo sottoinsieme, segue che $\widehat{B}$ è numerabile, quindi posso scrivere in maniera del tutto equivalente come

$$\widehat{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Inoltre posso definire un nuovo insieme degli indici:

$$J := \left\{j \in I|\exists B \in \widehat{B}, B \subset A_j\right\} \subset I$$

Questo è ovviamente numerabile.

"$\bigcup_{i\in I} A_i \supset \bigcup_{j\in J} A_j$"
Questo è ovvio in quanto $J \subset I$ e quindi

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supset \bigcup_{j\in J} A_j$$

"$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{j\in J} A_j$"
È ovvio affermare che

$$\forall x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I | x \in A_{i_0} \in \tau$$

Dato che per ipotesi ho che $\{A_i\} \subset \tau$ allora in particolare $A_{i_0} \in \tau$ dunque per definizione di base posso affermare che

$$\exists \mathcal{B}_{i_0} \subset \mathcal{B} | A_{i_0} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{i_0}} B$$

Dunque è ovvio che $\forall B \in \mathcal{B}_{i_0}, B \subset A_{i_0}$ dunque $B \in \widehat{B}$ e $i_0 \in J$ quindi posto $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ allora

$$A = \bigcup_{x\in A} \{x\} \subset \bigcup_{j\in J} A_j$$

Perciò la tesi è dimostrata. □

2.5 Successioni

Definizione 2.5.1. ***(Successione)*** *Sia X un insieme non vuoto, un applicazione $f : \mathbb{N} \to X$ è definita successione se:*

$$f(n) = x_n, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Definizione 2.5.2. ***(Convergenza)*** *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, diciamo che la successione converge ad un punto $x \in X$ se*

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \text{ sta definitivamente dentro } X, \text{ ovvero}, \exists n_u \in \mathbb{N} | \forall n > n_u, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$$

Esempio 2.5.1. *Sia (X, τ_B) uno spazio topologico banale e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora*

$$\forall x \in X, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$$

Dimostrazione. Ciò è vero in quanto nella topologia banale l'unico insieme non vuoto presente è X il quale è intorno per ogni punto di se stesso e quindi per definizione di convergenza di una successione, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad ogni punto di X. □

Esempio 2.5.2. *Se considero una topologia discreta le uniche successioni convergenti sono quelle definitivamente uguali a x in quanto dopo un certo $n \in \mathbb{N}$ la successione deve essere contenuta nel più piccolo insieme della topologia, in questo caso corrisponde proprio al singoletto $\{x\}$.*

Esempio 2.5.3. *Se considero uno spazio topologico metrizzabile tramite una certa funzione distanza d, allora ogni successione in (X, τ_d) ammette al più un limite.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abbia due limiti: $x_1, x_2 \in X$, quindi utilizzando la definizione di convergenza di una successione devo dimostrare che

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x) \exists n_u \in \mathbb{N} | \forall n > n_u, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$$

In questo caso dato che ho due limiti e la successione deve stare definitivamente in entrambi gli insiemi appartenenti agli intorni dei punti, significa che deve stare definitivamente nell'intersezione dei due insiemi:

$$\forall U_{x_1} \in \mathcal{N}_\tau(x_1), \forall U_{x_2} \in \mathcal{N}_\tau(x_2), \exists n_u \in \mathbb{N} | \forall n > n_u, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U_{x_1} \cap U_{x_2}$$

A questo punto sfrutto l'ipotesi che l'insieme è metrizzabile e quindi definisco $2r = d(x_1, x_2)$ dunque costruisco delle palle aperte:

$$B_d(x_1, r) \in \mathcal{N}_\tau(x_1), B_d(x_2, r) \in \mathcal{N}_\tau(x_2)$$

Quindi è chiaro che $B_d(x_1, r) \cap B_d(x_2, r) = \phi$ perciò definisco

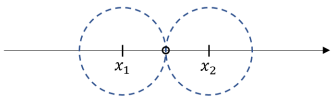
$$n_{x_1} = \max\{n \in \mathbb{N} | \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U \cap B_d(x_1, r), \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x_1)\}$$

$$n_{x_2} = \max\{n \in \mathbb{N} | \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U \cap B_d(x_2, r), \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x_2)\}$$

Quindi posto $n_{max} = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}\}$ e considerata l'arbitrarietà posta per definizione sugli intorni di x_1, x_2 prendo $B_d(x_1, r), B_d(x_2, r)$ i quali fanno parte relativamente della famiglia di intorni del proprio centro.
A questo punto so per definizione che $\exists n_0 | \forall n > n_0, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_d(x_1, r) \cap B_d(x_2, r)$ ma dunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_d(x_1, r)$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cap B_d(x_2, r)$ quindi sicuramente $n_{max} > n_0$ perciò

$$\forall n > n_{max}, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_d(x_1, r) \cap B_d(x_2, r)$$

Ma ciò è impossibile in quanto $B_d(x_1, r) \cap B_d(x_2, r) = \phi$ e quindi tale successione può converge al più ad un solo valore in X. $\square$



Definizione 2.5.3. ***(Sottosuccessione)*** *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, allora una sottosuccessione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di X della seguente forma:*

$$\{x_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}} | \begin{cases} \mathbb{N}: \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & n_k \end{cases}$$

Data una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, un punto $x \in X$ si definisce punto limite se esiste una sottosuccessione tale per cui cui:

$$\{x_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}} \to x$$

Capitolo 3

Sottoinsiemi di uno spazio topologico

3.1 Punti Interni, Esterni e di Frontiera

Definizione 3.1.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $S \subset X$, diciamo che $x \in X$ è:*

- ***Punto interno ad S*** $\longrightarrow \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \subset S$
- ***Punto esterno ad S*** $\longrightarrow \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \subset S^c = X \setminus S$ *oppure se* $\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \cap S = \phi$
- ***Punto di frontiera per S*** $\longrightarrow$ *se tale punto non è né interno né esterno e quindi*

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \cap S \neq \phi, U \cap S^c \neq \phi$$

Definizione 3.1.2. *Posso raggruppare le varie tipologie di punto in modo da formare degli insiemi:*

- *L'insieme dei punti interni di S viene definita parte interne: $Int(S)$.*
- *L'insieme dei punti esterni di S viene definita parte esterna: $Est(S)$.*
- *L'insieme dei punti di frontiera di S viene definita frontiera: $Fr(S), \delta S$.*

Proprietà 3.1.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico allora $\forall S \in P(X)$ valgono le seguenti proprietà*

1. $Int(S) \subset S$
2. $A \subset B \Rightarrow Int(A) \subset Int(B)$.
3. $A \in \tau \Longleftrightarrow A = Int(A)$.
4. $Int(S)$ *è il più grande aperto contenuto in* S.
5. $Int(A \cup B) \supset Int(A) \cup Int(B)$.
6. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.
7. $Est(S) = Int(X \setminus S) \subset X \setminus S$
8. $X = Int(S) \sqcup Est(S) \sqcup Fr(S)$

Dimostrazione. Dimostro procedendo per ordine.

<u>**Punto 1**</u>
È ovvia in quanto per definizione ho che

$$Int(S) := \{x \in S | \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x),\, x \in U \subset S\}$$

Quindi $\forall x \in Int(S), x \in S \Rightarrow Int(S) \subset S$.

Punto 2
Sia $A \subset B$ allora $\forall x \in Int(A)$ per definizione ho che

$$\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | x \in U \subset A$$

Quindi $U \subset B$ e quindi per definizione $x \in Int(B)$.

Punto 3
Per dimostrare ciò devo far vedere due implicazioni:
"$A \in \tau \Rightarrow A = Int(A)$"
Se $A \in \tau$ allora sicuramente per costruzione ho che

$$A \supset Int(A)$$

Ma dato che $\forall x \in A, A \in \mathcal{N}_\tau(x)$ è ovvio dire che $A \subset A$ dunque $x \in Int(A)$ per definizione e quindi

$$A \subset Int(A)$$

"$A \in \tau \Leftarrow A = Int(A)$"
Se assumo per ipotesi che $A = Int(A)$ allora per definizione di parte interna ho che $\forall x \in A, \exists U_x \in \mathcal{N}_\tau(x) | x \in U_x \subset A$ dunque per definizione di intorno $\exists A_x \in \tau | x \in A_x \subset U_x \subset A$ quindi

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$$

Dunque A deriva dall'unione arbitraria di aperti e quindi $A \in \tau$.

Punto 4
$Int(S)$ è un aperto
Per definizione di $Int(S)$ ho che $\exists U_x \in \mathcal{N}_\tau(x)$, $x \in U \subset S$ e quindi per definizione di intorno $\exists V_x \in \tau | x \in V_x \subset U_x$ quindi per il punto due posso affermare che

$$Int(V_x) \subset Int(S)$$

E per il punto (3), dato che $V_x \in \tau$, ho che $V_x \subset Int(S)$ dunque

$$Int(S) = \bigcup_{x \in Int(S)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in Int(S)} V_x \subset Int(S)$$

Dunque $Int(S)$ deriva dall'unione arbitraria di aperti e quindi $Int(S) \in \tau$.

$Int(S)$ è il più grande aperto in S
Supponiamo per assurdo che $Int(S)$ non sia il più grande aperto in S quindi $\exists A \in \tau$ tale per cui

$$Int(S) \subset A \subset S$$

$$Int(Int(S)) \subset Int(A) \subset Int(S)$$

Dato che $A \in \tau$ e $Int(S)$ è aperto allora per quanto dimostrato al punto precedente ho che $A = Int(A)$, $Int(S) = Int(Int(S))$ quindi ottengo che

$$Int(S) \subset A \subset Int(S)$$

Perciò $A = Int(S)$ allora la mia tesi è dimostrata.

Punto 5
Posso osservare che se prendo $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ e $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathcal{C}_\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ allora

$$Int(Q) \cup Int(\mathcal{C}_\mathbb{R}(\mathbb{Q})) = \phi \cup \phi = \phi$$

Ma $int(Q \cup \mathcal{C}_\mathbb{R}(\mathbb{Q})) = Int(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ quindi $Int(A \cup B) \supset Int(A) \cup Int(B)$.
Punto 6

$\underline{Int(A \cap B) \subset Int(A) \cap Int(B)}$
$\forall x \in Int(A \cup B)$ so per definizione che

$$\exists U_x \in \mathcal{N}_\tau(x) | U_x \subset A \cap B \Rightarrow U_x \subset A,\, U_x \subset B$$

Allora per definizione ho che $x \in Int(A)$, $x \in Int(B)$ perciò $x \in Int(A) \cap Int(B)$.

$\underline{Int(A \cap B) \supset Int(A) \cap Int(B)}$
Sia $x \in Int(A) \cap Int(B)$ allora ho che $x \in Int(A)$, $x \in Int(B)$ dunque per definizione ho che

$$\exists U_x, V_x \in \mathcal{N}_\tau(x) | x \in U_x \subset A,\, x \in V_x \subset B$$

Dunque per definizione di intorno ho che $\exists A_x, B_x \in \tau | x \in A_x \subset U_x$, $x \in B_x \subset V_x$ quindi posso affermare che

$$x \in A_x \cap B_x \subset U_x \cap V_x \subset A \cap B$$

Dunque dato che $A_x \cap B_x \in \tau$ allora per definizione $U_x \cap V_x \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e quindi per definizione di parte interna $x \in Int(A \cap B)$.

Punto 7
La tesi in questo caso è equivalente a $Est(S) = Int(S^c)$ ma considerando la definizione di $Est(S)$ e $Int(S)$ vedo che

$$Est(S) = \{x \in S^c | \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x),\, x \in U \subset S^c\} = Int(S^c)$$

Quindi avendo la stessa definizione, tali insiemi sono equivalenti.

Punto 8
Prima di tutto dimostro che le parti di un insieme sono disgiunte.
Iniziando con $Est(S)$ vedo che per definizione corrisponde a

$$\exists x \in Est(S), \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | x \in \ U \subset S^c$$

Ma ciò rappresenta proprio la negazione della definizione di $Int(S), Fr(S)$ quindi $Est(S) \cap Int(S) = Est(S) \cap Fr(S) = \phi$.
Analogamente ho per definizione che $\forall x \in Fr(S)$ ho che

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \cap S \neq \phi, U \cap S^c \neq \phi$$

Ma ciò rappresenta la negazione della definizione di $Int(S)$ e quindi $Int(S) \cap Fr(S) = \phi$.

A questo punto devo dimostrare che la loro unione è tutto l'insieme. Quindi considerando il fatto che

$$S = Int(S) \sqcup (Fr \cap S)$$
$$S^c = Est(S) \sqcup (Fr(S) \cap S^c)$$

E che $Fr(S) = Fr(S) \cap X = Fr(S) \cap (S \cup S^c) = (Fr(S) \cap S) \cup (Fr(S) \cap S^c)$ allora ottengo che

$$Int(S) \sqcup Fr(S) \sqcup Est(S) = Int(S) \sqcup (Fr(S) \cap S) \cup (Fr(S) \cap S^c) \sqcup Est(S) =$$

$$= (Int(S) \sqcup (Fr(S) \cap S)) \cup ((Fr(S) \cap S^c) \sqcup Est(S)) = S \cup S^c = X$$

$\square$

Lemma 3.1.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $S \subset X$ allora*

$$Int(S) = \bigcup_{A \in \tau | A \subset S} A$$

Dimostrazione. Il fatto che $Int(S)$ è un insieme aperto è vero per un risultato precedente.

Sia $A \in \tau | A \subset S$ allora per un risultato precedente ho che

$$\forall x \in A, A \in \mathcal{N}_\tau(x)$$

Quindi dato che $A \subset Int(S)$ allora

$$Int(S) = \bigcup_{x \in Int(S)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in Int(S)} A \subset Int(S)$$

□

Proprietà 3.1.2. *Sia $S \subset X$ allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $S = Int(S) \sqcup (S \cap Fr(S))$
2. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
   (a) $Fr(S) \subset S$
   (b) $S = Int(S) \sqcup Fr(S)$
   (c) $X \setminus S \in \tau$

Dimostrazione. (1)

"$S \supset Int(S) \sqcup (S \cap Fr(S))$"
Per definizione $Int(S) \subset S$ e $S \cap Fr(S) \subset S$ quindi è ovvio che

$$S \supset Int(S) \sqcup (S \cap Fr(S))$$

"$S \subset Int(S) \sqcup (S \cap Fr(S))$"
Escludendo il caso banale per cui $S \setminus Int(S) = \phi$ in quanto ciò significherebbe che $S = Int(S)$ e quindi ciò sarebbe già verificato, suppongo che $S \setminus Int(S) \neq \phi$ quindi considero

$$x \in S \setminus Int(S) \Rightarrow \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \cap S \neq \phi \Rightarrow x \in U \cap S$$

A questo punto posso affermare che $U \cap S^c \neq \phi$ in quanto se per assurdo suppongo che $\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \cap S^c = \phi$ allora $U \subset S$ e quindi $x \in Int(S)$ ma ciò è assurdo con quanto supposto inizialmente perciò:

$$U \cap \mathcal{C}_X(S) = U \setminus S \neq \phi$$

Dunque per definizione $x \in Fr(S)$.
A questo punto dato che $Fr(S) \cap Int(S) = \phi \Rightarrow S \cap Fr(S) \subset Fr(S)$ quindi

$$(S \cap Fr(S)) \cap Int(S) = \phi$$

Ciò significa che sono insiemi disgiunti e quindi $\forall x \in S, x \in S \cap Fr(S) \vee x \in Int(S)$ e quindi

$$S \subset Int(S) \sqcup (S \cap Fr(S))$$

Quindi la mia tesi è dimostrata. □

Dimostrazione. (2)

<u>(a)⇒(b)</u>
Per il punto precedente so che $S = Int(S) \cup (S \cap Fr(S))$ ma dato che per ipotesi

$$Fr(S) \subset S \Rightarrow S \cap Fr(S) = Fr(S)$$

Quindi

$$S = Int(S) \sqcup Fr(S)$$

<u>(b)⇒(c)</u>
Dato che $X = Int(S) \sqcup Est(S) \sqcup Fr(S)$ allora

$$X \setminus S = Est(S) := \{x \in X | \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x), u \subset \mathcal{C}_X(S)\}$$

Quindi per definizione $X \setminus S$ è un aperto e quindi vive dentro la topologia.

<u>(c)⇒(a)</u>
Supponiamo per assurdo che $Fr(S) \not\subset S$ quindi significa che $\exists x \in Fr(S) \setminus S$ ma ciò significa che se $x \notin S \Rightarrow x \in \mathcal{C}_X(S)$ che per ipotesi sappiamo essere un aperto e quindi

$$\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \subset \mathcal{C}_X(S) \Rightarrow U \cap S = \phi$$

ma ciò rappresenta un assurdo in quanto $x \in Fr(S)$ e quindi per definizione $\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \cap S \neq \phi$, quindi la mia tesi è dimostrata. □

3.1.1 Insieme chiuso

Definizione 3.1.3. ***(Chiuso)*** *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $C \in P(X)$. Diremo che C è sottoinsieme chiuso nella topologia se $\mathcal{C}_X(C) \in \tau$.*

Osservazione 3.1.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei chiusi per la topologia, quindi*

$$\mathcal{F} := \{C \in P(X) | \mathcal{C}_X(C) \in \tau\}$$

Allora valgono le seguenti 3 osservazioni:

1. *$\phi \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{F}$ è stabile per intersezione arbitraria.*
3. *$\mathcal{F}$ è stabile per unione finita.*

Lemma 3.1.2. *Sia X uno spazio non vuoto e sia $\mathcal{F} \subset P(X) | \mathcal{F}$ soddisfa:*

1. *$\phi \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{F}$ è stabile per intersezione arbitraria.*
3. *$\mathcal{F}$ è stabile per unione finita.*

Allora $\exists! \tau$ su X tale per cui $\mathcal{F}$ è la famiglia dei suoi chiusi.

Dimostrazione. Per dimostrare tale lemma devo dimostrare esistenza e unicità.

<u>Unicità</u>
Se τ esiste allora preso $A \in P(X)$, $A \in \tau \Leftrightarrow \mathcal{C}_X(A) \in \mathcal{F}$ e dato che esiste un'unica famiglia dei chiusi, in questo caso, la topologia è unica.

<u>Esistenza</u>
Definisco una famiglia

$$\tau := \{A \in P(X) | \mathcal{C}_X(A) \in \mathcal{F}\}$$

Quindi devo provare che tale famiglia è una topologia:

1. $\phi \in \tau$ dato che $\mathcal{C}_X(\phi) = X \in \mathcal{F}$ allora $\phi \in \tau$.
   Lo stesso ragionamento vale per X in quanto $\mathcal{C}_X(X) = \phi \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \tau$.

2. Considero una famiglia arbitraria $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ allora $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau \Leftrightarrow \mathcal{C}_X(\bigcup_{i\in I} A_i) \in \mathcal{F}$ ma

$$\mathcal{C}_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \in \mathcal{F} = \bigcap_{i\in I}(\mathcal{C}_X(A)) \in \mathcal{F}$$

   Dato che soddisfa il punto due.

3. Considero una famiglia finita $\{A_j\}_{j\in J} \subset \tau$, allora $\bigcap_{j\in J} A_j \in \tau \Leftrightarrow \mathcal{C}_X(\bigcap_{j\in J} A_j) \in \mathcal{F}$ ma

$$\mathcal{C}_X\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J}(\mathcal{C}_X(A_j)) \in \mathcal{F}$$

   Dato che soddisfa il punto 3, essendo unione finita di elementi della famiglia dei chiusi.

Quindi dato che soddisfa tutti e 3 i punti, τ rappresenta una topologia. □

3.1.2 Topologia di Zariski

Esempio 3.1.1. ***(Topologia di Zariski)***
Definisco come sottoinsieme algebrico di $\mathbb{R}^n$ se $\exists p \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ l'insieme

$$y := \{x \in \mathbb{R}^n | P(x) = 0\}$$

Allora esso rappresenta la famiglia dei chiusi di una topologia.

Dimostrazione. Per dimostrare ciò devo dimostrare sempre 3 cose:

- Se prendo il polinomio sempre costante $p(x_1, \cdots, x_n) = 1$ esso non si azzera mai e quindi $\phi \in y$, analogamente se prendo $p(x_1, \cdots, x_n) = 0$ allora tutti i punti sono identicamente delle soluzioni e quindi $X \in y$.

- <u>Stabilità per intersezione arbitraria</u>
  Se prendo in considerazione due polinomi $p, q \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ allora so che

$$V(p) \cap V(q) = V(r)$$

  Con $r = p^2 + q^2$ in quanto

$$r = (p(x_1, \cdots, x_n))^2 + (q(x_1, \cdots, x_n))^2 = 0 \Leftrightarrow p(x_1, \cdots, x_n) = q(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

  Questo per quanto riguarda il caso finito.

  Considerando il caso in cui $n = 1$, posso prendere una famiglia $\{p_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}[x] | \exists r \in \mathbb{R}[x], V(r) = \bigcap_{i\in I} V(p_i)$ allora posso dire che

$$r = \prod_{i=1}^{r}(x_i - t_i)$$

- <u>Stabilità per unione finita</u>
  Se prendo in considerazione due polinomi $p, q \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ allora so che

$$V(p) \cup V(q) = V(r)$$

  Con $r = pq$ in quanto

$$V(r) := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | (p * q)(x_1, \cdots, x_n) = 0\}$$

□

Definizione 3.1.4. ***(Chiusura di un insieme)***
Sia (X, τ) uno spazio topologico, $\mathcal{F}_S$ l'insieme di tutti i chiusi rispetto alla topologia che contengono $S \in P(X)$, quindi

$$\mathcal{F} := \{C \subset X | \mathcal{C}_X(C) \in \tau, C \supset S\}$$

Si definisce chiusura di S in (X, τ) l'intersezione di tutti i chiusi dello spazio topologico contenenti S, cioè:

$$\bar{S} = Cl_\tau(S) = \bigcap_{C \in \mathcal{F}_S} C$$

3.2 Punti Aderenti, Accumulazione e Isolati

Definizione 3.2.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $S \in P(X)$. Un punto $x \in S$ si dice:*

- ***Punto aderente*** $\rightarrow \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \cap S \neq \phi$.
- ***Punto di accumulazione*** $\rightarrow \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), (U \setminus \{x\}) \cap S \neq \phi$.
- ***Punto isolato*** $\rightarrow \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | (U \setminus \{x\}) \cap S = \phi$.

Proposizione 3.2.1 (Chiusura di uno spazio). *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $S \in P(X)$, allora $\forall x \in S$, x è aderente a S per $\tau \iff x \in \bar{S}$, cioè $\bar{S}$ è uguale all'insieme di tutti i punti aderenti a S per la topologia.*

Dimostrazione. Se definisco l'insieme dei punti di aderenza come

$$\mathcal{A} := \{x \in X | x \text{ è aderente a S in } (X, \tau)\}$$

La mia tesi si riconduce a dimostrare che $\mathcal{A} = \bar{S}$ ma ciò è uguale a dimostrare che $\mathcal{C}_X(\mathcal{A}) = \mathcal{C}_X(\bar{S})$, quindi:

"$\mathcal{C}_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_X(\bar{S})$"
Considero un punto $x \in \mathcal{C}_X(\mathcal{A})$ quindi per definizione esso non è aderente e quindi $\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \cap S = \phi$ per definizione di intorno, so che

$$\exists A \in \tau | x \in A \subset U$$

Inoltre per il lemma precedente $\mathcal{C}_X(A)$ è un chiuso e dato che $U \cap S = \phi$ e che per restrizione di U vale che

$$A \cap S = \phi \Leftrightarrow S \subset \mathcal{C}_X(A)$$

Allora dato che $x \in A \Rightarrow x \notin \mathcal{C}_X(A)$ ma dato che per definizione di chiusura di un insieme $\bar{S} \subset \mathcal{C}_X(A) \Rightarrow x \notin \bar{S}$ quindi

$$x \in \mathcal{C}_X(\bar{S})$$

Quindi $\mathcal{C}_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_X(\bar{S})$.

"$\mathcal{C}_X(\mathcal{A}) \supset \mathcal{C}_X(\bar{S})$"
$\forall x \in \mathcal{C}_X(\bar{S}), \mathcal{C}_X(\bar{S})$ aperto in quanto il suo complementare è un insieme chiuso per ipotesi. Se $\mathcal{C}_X(\bar{S})$ è aperto allora $\exists A \in \tau | x \in A \subset \mathcal{C}_X(\bar{S})$ dunque visto che $\mathcal{C}_X(\bar{S}) \cap S = \phi$ allora

$$A \cap S = \phi$$

Dunque qualsiasi sia il punto preso in $\mathcal{C}_X(\bar{S})$ allora esso per definizione non è punto di aderenza per S dunque $x \in \mathcal{C}_X(\mathcal{A})$ e quindi

$$\mathcal{C}_X(\mathcal{A}) \supset \mathcal{C}_X(\bar{S})$$

Perciò la mia tesi è dimostrata. □

Proposizione 3.2.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $S \in P(X)$ allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $S \subset \bar{S}$
2. *S è chiuso in $(X, \tau) \Leftrightarrow S = \bar{S}$*
3. $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$.
4. $\bar{S} = X \setminus Est(S) = Int(S) \sqcup Fr(S) = S \cup Fr(S)$
5. $S \subset T \Rightarrow \bar{S} \subset \bar{T}$
6. $Fr(S) = \bar{S} \cap \overline{\mathcal{C}_X(S)} = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Dimostrazione. (1)
Per definizione di insieme chiuso ho che

$$\bar{S} := \left\{ \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F | S \subset F \right\}$$

Quindi per costruzione $\bar{S} \supset S$ □

Dimostrazione. (2)
"S è chiuso $\Rightarrow S = \bar{S}$"
Per il punto precedente ho immediatamente che $\bar{S} \supset S$.
Per quanto riguarda l'altra implicazione so che

$$\bar{S} := \left\{ \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F | S \subset F \right\}$$

Ma per ipotesi ho che S è chiuso e quindi $S \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{S} \subset S$.

"S è chiuso $\Leftarrow S = \bar{S}$"
Dato che $\bar{S}$ è un insieme chiuso per definizione e $S = \bar{S}$ allora segue che S è a sua volta un chiuso. □

Dimostrazione. (3)
Per il punto (1) so che la chiusura di un insieme contiene tale insieme e quindi

$$\bar{\bar{S}} \supset \bar{S}$$

Per definizione $\bar{\bar{S}}$ è intersezione di insiemi appartenenti alla famiglia dei chiusi $\mathcal{F}$ che contengono $\bar{S}$ ma per ipotesi $\bar{S} \in \mathcal{F}, \bar{S} \subset \bar{S}$ quindi

$$\bar{\bar{S}} \subset \bar{S}$$

Quindi la mia tesi è dimostrata. □

Dimostrazione. (4)
Dimostrare che $\bar{S} = X \setminus Est(S)$ è equivalente a mostrare che $\mathcal{C}_X(\bar{S}) = \mathcal{C}_X(X \setminus Est(S)) = Est(S)$, dunque:

"$\mathcal{C}_X(\bar{S}) \subset Est(S)$"
Considero un $x \in \mathcal{C}_X(\bar{S})$ dunque è ovvio che $x \notin \bar{S}$ e che $\mathcal{C}_X(\bar{S}) \in \mathcal{N}_\tau(x)$ quindi per definizione $\exists A \in \tau | x \in A \subset \mathcal{C}_X(\bar{S})$.
Dato che per (1) ho che

$$S \subset \bar{S} \Rightarrow \mathcal{C}_X(S) \supset \mathcal{C}_X(\bar{S})$$

Quindi dato che

$$A \subset \mathcal{C}_X(\bar{S}) \subset \mathcal{C}_X(S) \Rightarrow A \subset \mathcal{C}_X(S)$$

Quindi per definizione $x \in Est(S)$.

"$\mathcal{C}_X(\bar{S}) \supset Est(S)$"
Considero un punto $x \in Est(S)$ dunque $\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \cap S = \phi$ inoltre per definizione di intorno so che $\exists A \in \tau | x \in A \subset U \subset Est(S)$ quindi a maggior ragione vale che

$$A \cap S = \phi \Leftrightarrow \mathcal{C}_X(A) \supset S$$

Dato che A è un aperto allora $\mathcal{C}_X(A) \in \mathcal{F}$ e quindi per definizione $\mathcal{C}_X(A) \supset \bar{S} \subset S$, quindi segue che

$$A \subset \mathcal{C}_X(\bar{S}) \Rightarrow x \in \mathcal{C}_X(\bar{S})$$

Inoltre dato che $X = Int(S) \sqcup Fr(S) \sqcup Est(S)$ segue che

$$\bar{S} = X \setminus Est(S) = Int(S) \sqcup Fr(S) = S \cup Fr(S)$$

Quindi la mia tesi è dimostrata. □

Dimostrazione. (5)
Per il punto (1) so che $\bar{T} \supset T \supset S$ inoltre $\bar{T}$ è per definizione un chiuso, quindi se utilizzo la definizione di chiusura di un insieme vedo che

$$\bar{S} := \left\{ \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F | S \subset F \right\}$$

Ma $\bar{T} \in \mathcal{F}, \bar{T} \supset S$ quindi tale insieme partecipa all'intersezione e quindi

$$\bar{S} \subset \bar{T}$$

□

Dimostrazione. (6)

"$Fr(S) \subset \bar{S} \cap \overline{\mathcal{C}_X(S)}$"
Per il punto (1) so che $S \subset \overline{S}$ dunque posso affermare che

$$\mathcal{C}_X(\overline{S}) \subset \mathcal{C}_X(S) \subset \overline{\mathcal{C}_X(S)}$$

Dato che $\overline{\mathcal{C}_X(S)}$ è un insieme chiuso allora

$$\mathcal{C}_X\left(\overline{\mathcal{C}_X(S)}\right) \in \tau$$

Inoltre $\mathcal{C}_X\left(\overline{\mathcal{C}_X(S)}\right) \subset S$ ma essendo aperto allora esso è contenuto nel più grande aperto contenuto in S, dunque per un risultato precedente posso affermare che

$$\mathcal{C}_X\left(\overline{\mathcal{C}_X(S)}\right) \subset Int(S) \subset S$$

Quindi

$$\overline{\mathcal{C}_X(S)} \supset \mathcal{C}_X(Int(S)) = Est(S) \sqcup Fr(S)$$

Quindi in conclusione

$$\overline{S} \cap \overline{\mathcal{C}_X(S)} \supset \overline{S} \cap (Est(S) \sqcup Fr(S)) = Fr(S)$$

"$Fr(S) \supset \bar{S} \cap \overline{\mathcal{C}_X(S)}$"
Per un risultato precedente so che

$$S = Int(S) \sqcup (Fr(S) \cup S)$$

Allora

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{C}_X(S)} &= \overline{(Est(S) \sqcup Fr(S)) \cap ((Est(S) \sqcup Fr(S)) \cup \mathcal{C}_X(S))} \\
&= \overline{Est(S) \cup (Est(S) \sqcup (Fr(S) \cap \mathcal{C}_X(S)))} \\
&= \overline{Est(S) \sqcup (Fr(S) \cap \mathcal{C}_X(S))} \\
&\subset \overline{Est(S) \sqcup Fr(S)}
\end{aligned}$$

Poiché il complementare di $Est(S) \sqcup Fr(S)$ è un aperto allora segue che questo è un chiuso e quindi per il secondo punto ho che

$$\overline{Est(S) \sqcup Fr(S)} = Est(S) \sqcup Fr(S)$$

Perciò $\overline{\mathcal{C}_X(S)} \subset Est(S) \sqcup Fr(S)$ quindi in conclusione ho che

$$\overline{S} \cap \overline{\mathcal{C}_X(S)} \subset \overline{S} \cap Est(S) \sqcup Fr(S)$$

□

3.2.1 Insieme denso

Definizione 3.2.2. ***(Insieme denso)*** *Sia S un sottoinsieme di (X, τ) allora si dice che S è denso in X se $\bar{S} = X$, ovvero*

$$\forall x \in X, x \text{ è punto di aderenza per } S$$

Osservazione 3.2.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *S è denso in (X, τ).*
2.a *$\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \cap S \neq \phi$.*
2.b *Supposto che $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}(x)$ SFI allora $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap S \neq \phi$*
3. *$Int(\mathcal{C}_X(S)) = Est(S) = \phi$.*
4. *$\forall A \in \tau, A \cap S \neq \phi$.*
5. *Data una base $\mathcal{B}$ per la topologia allora $\forall B \in \mathcal{B}, B \neq \phi \Rightarrow B \cap S \neq \phi$.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine vedo che:

$\underline{(1) \Rightarrow (2.a)}$
Per definizione di denso so che $\bar{S} = X$ allora $\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x) \Rightarrow U \cap S \neq \phi$ in quanto per la proposizione precedente se $\forall x \in X, x \in Int(S) \vee x \in Fr(S)$.
Nel caso in cui $x \in Int(S)$ per definizione so che $\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x) | x \in U$ e quindi chiaramente l'intersezione non è mai vuota.
Nel caso in cui $x \in Fr(S)$ allora per definizione $\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \cap S \neq \phi$, quindi la mia tesi è dimostrata.

$\underline{(2.a) \Rightarrow (2.b)}$
Se $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \cap S \neq \phi$ ma per una proprietà dei sistemi fondamentali di intorni,

$$\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{N}_\tau(x) \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{N}_\tau(x)$$

Quindi per ipotesi $V \cap S \neq \phi$, dunque la mia tesi è dimostrata.

$\underline{(2.b) \Rightarrow (3)}$
Per definizione so che

$$Int(\mathcal{C}_X(S)) := \{x \in X | \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \subset \mathcal{C}_X(S)\}$$

Ma questa è sempre pure la definizione di $Est(S)$ e quindi $Int(\mathcal{C}_X(S)) = Est(S)$.
A questo punto supponiamo che $Est(S) \neq \phi$ quindi $\exists x \in Est(S)$ perciò per definizione

$$\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | x \in U, U \cap S = \phi$$

Ma questo è assurdo con quanto abbiamo supposto e quindi $Int(\mathcal{C}_X(S)) = Est(S) = \phi$.

$\underline{(3) \Rightarrow (4)}$
Supponiamo per assurdo che $\exists A \in \tau | A \cap S = \phi$ ciò significa che $\forall x \in A, x \in Est(S)$ ma ciò è assurdo in quanto abbiamo supposto essere vuoto, quindi $\forall A \in \tau, A \cap S \neq \phi$.

$\underline{(4) \Rightarrow (5)}$
Per definizione di base topologica so che

$$\forall A \in \tau, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} | x \in B_x$$

Dunque per definizione posso dire che $B_x \in \mathcal{N}_\tau(x) \Rightarrow \exists A' \in \tau | x \in A' \subset B_x$. A questo punto so per ipotesi che $A' \cap S \neq \phi \Rightarrow B_x \cap S \neq \phi$ e quindi la mia tesi è dimostrata.

$\underline{(5) \Rightarrow (1)}$
Per definizione di base topologica so che

$$\forall A \in \tau, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} | x \in B_x \Rightarrow B_x \in \mathcal{N}_\tau(x)$$

Inoltre per la tesi ipotesi ho che $B_x \cap S \neq \phi$ quindi per definizione $\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x) | U \cap S \neq \phi$ quindi ogni punto dell'insieme è punto di aderenza per S e quindi per definizione l'insieme è denso in X. □

Definizione 3.2.3. *(Sequenzialmente compatto) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $S \in P(X)$, allora definiremo chiusura sequenziale di S in (X, τ):*

$$\bar{S}^{seq} := \{x \in X | \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S, x_n \to x\}$$

Proposizione 3.2.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico in cui viene soddisfatto il primo assioma di numerabilità allora*

$$\bar{S}^{seq} = \bar{S}$$

Dimostrazione. Per dimostrare tale uguaglianza devo mostrare che:

$\underline{\bar{S}^{seq} \subset \bar{S}}$
Sia $x \in \bar{S}^{seq}$ dunque per definizione ho che

$$\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S | x_n \to x$$

Per definizione di convergenza per successioni so che

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), \exists N > 0 | \forall n > N, x_n \in U$$

Dunque dato che per definizione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ allora $U \cap S \neq \phi$ quindi per definizione x è un punto di aderenza e quindi $x \in \bar{S}$.

$\underline{\bar{S}^{seq} \supset \bar{S}}$
Suppongo che valga il primo assioma di numerabilità e che quindi

$$\forall x \in X. \exists \mathcal{V}(x) | \mathcal{V}(x) \text{ è numerabile}$$

Quindi posso dire che $\mathcal{V}(x) = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. A questo punto posso definire una nuova famiglia di insiemi

$$U(x) := \left\{ U_k \middle| U_k = \bigcap_{i=1}^{k} V_i \right\}$$

Di questa famiglia posso dire alcune cose:

- $U(x) \subset \mathcal{V}(x)$, perciò anch'essa è una famiglia numerabile e quindi posso riscriverla in maniera del tutto equivalente come
$$U(x) = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$
- $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \supset U_{n+1}$ quindi la famiglia è decrescente.
- Dato che per ipotesi x è un punto di aderenza allora $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \cap S \neq \phi$ e quindi segue anche che $U_n \cap S \neq \phi$.

A questo punto creo una successione

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}|\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in U_n \cap S$$

Dunque per costruzione ho che $\forall n \in \mathbb{N}$ la successione è totalmente contenuto in U_n e dato che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ allora $x_n \to x$ perciò $x \in \bar{S}^{seq}$. □

Osservazione 3.2.2. *Un esempio per cui uno spazio topologico che non soddisfa il primo assioma di numerabilità tale per valga*

$$\bar{S}^{seq} \subsetneq \bar{S}$$

É la topologia della convergenza puntuale, definita in questo modo:

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f$ *è una funzione*$\}$.
- $P_F(\mathbb{R}) := \{A \in P(\mathbb{R}) | A$ *è finito*$\}$.
- $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall I \in P_F(\mathbb{R})$ *e* $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ *definiamo:*

$$\mathcal{V}(f, I, \epsilon) := \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \, |f(t) - g(t)| < \epsilon, \forall t \in I\}$$

La topologia τ_{CP} *è l'unica topologia su* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *ho che*

$$\{\mathcal{V}(f, I, \epsilon)\}_{I \in P_F(\mathbb{R}), \epsilon \in \mathbb{R}^+}$$

Rappresenta un sistema fondamentale di intorni.

3.2.2 Insiemi separabili

Definizione 3.2.4. ***(Insieme separabile)***
Sia (X, τ) *uno spazio topologico si dice essere separabile se ammette un sottoinsieme numerabile denso.*

Proposizione 3.2.4. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico che soddisfa il secondo assioma di numerabilità allora è separabile.*

Dimostrazione. Essendo a base numerabile posso dire che $\mathcal{B} := \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ quindi posso creare una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_n$ inoltre definisco

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$$

Il fatto che questo insieme sia numerabile è ovvio per costruzione quindi rimane da dimostrare che è denso.
È ovvio affermare che preso in considerazione $x \in X$ allora $\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ per definizione ho che $\exists A \in \tau | x \in A \subset U$. Per definizione di base di una topologia ho che

$$\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} | A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

Dato che per ogni elemento della base esiste un punto in S significa che $S \cap A \neq \phi$ e quindi $U \cap S \neq \phi$ e quindi $\bar{S} = X$. □

Osservazione 3.2.3. *Esistono spazi topologici separabili che soddisfano il primo assioma di numerabilità ma non sono a base numerabile.*

Dimostrazione. Definisco una famiglia

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \in P(\mathbb{R}) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

Allora se dimostro che quella è una base non numerabile, ho vinto.

<u>$\mathcal{B}$ definisce un unica topologia</u>
Per fare quello $\mathcal{B}$ deve rispettare le ipotesi del teorema e quindi:

- $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} [-n-1, n+1)$ quindi rappresenta un ricoprimento per l'insieme.
- Comunque prendo due insiemi $[a, b), [c, d) \in \mathcal{B}$ la loro intersezione se non è vuota è un insieme chiuso a destra e aperto a sinistra e quindi appartenente a $\mathcal{B}$.

Dunque esiste un unica topologia generata da questa base.

Separabilità dello spazio
Come già visto $\mathbb{R}$ è uno spazio separabile in quanto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è numerabile e denso in $\mathbb{R}$.

$\mathcal{B}$ non è numerabile
Considero $\mathcal{L}$ una base di J_D quindi per definizione $\forall x \in \mathbb{R}, [x, x+1) \in J_D, \exists \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ tale per cui

$$[x, x+1) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}'} L$$

Quindi $\exists L_x \in \mathcal{L}' | x \in L_x \subset [x, x+1)$.
A questo punto considero $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ allora può darsi che

$$x \in L_x, y \in L_y \Rightarrow \forall y' \in L_y, y' > x$$

Quindi $x \notin L_y \Rightarrow L_x \neq L_y$, quindi sicuramente la famiglia

$$\{L_x\}_{x \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{L}$$

Ma essendo $\{L_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ non numerabile dato che ha la cardinalità di $\mathbb{R}$ allora anche $\mathcal{L}$ non è numerabile. □

Proposizione 3.2.5. *Sia (X, τ) uno spazio topologico separabile e metrizzabile dunque tale spazio soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione. Se X è separabile allora per definizione $\exists S \subset X | \overline{S} = X$ ed inoltre S è numerabile, dunque $\forall x \in X$ vale che

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), S \cap U \neq \phi$$

A questo punto definisco una famiglia

$$\mathcal{B} := \left\{ B_x(q) | x \in S, q \in \mathbb{Q}^+ \right\}$$

Che è ovviamente una famiglia numerabile.

$\mathbb{B}$ rappresenta una base
Sia $A \in \tau$ dunque $\forall y \in A, \exists B_y(r) | B_y(r) \subset A$, perciò dato che $B_y(r) \cap S \neq \phi$ posso affermare che

$$\exists x \in S \cap B_y(r), \exists q \in \mathbb{Q}^+ | B_x(q) \subset B_y(r) \subset A$$

Per costruzione $B_x(q) \in \mathcal{B}$ e dato che

$$A = \bigcap_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{B_x(q) \in \mathcal{B}'} B_x(q) \subset A$$

Quindi posso estrarre una sottofamiglia di $\mathcal{B}$ tale per cui ricopre tale aperto e quindi per definizione tale famiglia è aperta. □

Capitolo 4

Applicazioni continue tra spazi topologici

Definizione 4.0.1. ***(Applicazione continua)***
Siano $(X, \tau), (Y, \xi)$ due spazi topologici e sia

$$f(X, \tau) \to (Y, \xi)$$

Un'applicazione, allora sia $x \in X$ diciamo che f è continua nel punto se

$$\forall U \in \mathcal{N}_\xi(f(x)), \exists V \in \mathcal{N}_\tau(x) | f(V) \subset U$$

Proposizione 4.0.1. *Sia $f(X, \tau) \to (Y, \xi)$ un'applicazione tra spazi topologici, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è continua.*
2. *$\forall A \in \xi, f^{-1}(A) \in \tau$.*
3. *$\forall C$ insieme chiuso di $Y, f^{-1}(C)$ è un insieme chiuso.*
4. *$\forall A \subset X, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

<u>(1)⇒(2)</u>
Per dimostrare che $f^{-1}(A) \in \tau$ devo dimostrare che $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_\tau(x), \forall x \in f^{-1}(A)$.
Sia $A \in \xi$ dunque $\forall x \in f^{-1}(A), f(x) \in A \Rightarrow A \in \mathcal{N}_\xi(f(x))$ ma sapendo per ipotesi che la funzione è continua allora

$$\exists V \in \mathcal{N}_\tau(x) | f(V) \subset A$$

Ma ciò è equivalente a dire che $V \subset f^{-1}(A)$, quindi per definizione di sistema di intorni ho che

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_\tau(x), \forall x \in f^{-1}(A)$$

Quindi per una proposizione precedente ho che $f^{-1}(A) \in \tau$
<u>(2)⇒(1)</u>
Sia $x \in X$ quindi $f(x) \in Y$ allora considerato $U \in \mathcal{N}_\xi(f(x))$ allora per definizione

$$\exists A \in \xi | f(x) \in A \subset U$$

Sfruttando la mia ipotesi ho che $f^{-1}(A) \in \tau$ allora $x \in f^{-1}(A)$, quindi $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_\tau(x)$ perciò

$$f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X) \subset A \Rightarrow f(f^{-1}(A)) \subset A \subset U$$

Quindi la mia tesi è dimostrata.

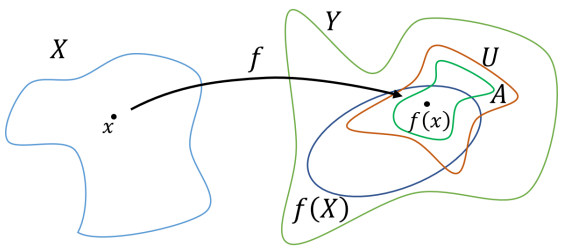


Figura 4.1: Questo disegno mostra il caso in cui la f non sia suriettiva e quindi è importante il passaggio in cui mostro che $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$ dato che non ho fatto alcune ipotesi, oltre alla continuità, su f e sugli intorni del punto.

<u>(2)⇔(3)</u>
$\forall A \in \xi$ ho per definizione che $\mathcal{C}_X(A)$ è un chiuso e quindi

$$f^{-1}\left(\mathcal{C}_Y(A)\right) = \mathcal{C}_X\left(f^{-1}(A)\right)$$

Dunque:

- Se vale (2) allora $f^{-1}(A) \in \tau$ e quindi il suo complementare è chiuso.
- Se vale (3) allora $f^{-1}\left(\mathcal{C}_Y(A)\right)$ è un chiuso, dunque

$$\mathcal{C}_X f^{-1}\left(\mathcal{C}_Y(A)\right) = \mathcal{C}_X\left(\mathcal{C}_X\left(f^{-1}(A)\right)\right) = f^{-1}(A) \in \tau$$

<u>(3)⇒(4)</u>
Sia $A \subset X$ allora per definizione $\overline{f(A)}$ è un chiuso e che $f(A) \subset \overline{f(A)}$ dunque sfruttando la mia ipotesi ho che $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ è un chiuso che contiene A dunque per definizione $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ partecipa alla chiusura di A quindi

$$\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$

Perciò rimappando il tutto ho la mia tesi

$$f\left(\overline{A}\right) \subset \left(\overline{f(A)}\right)$$

<u>(3)⇐(4)</u>
Fisso un chiuso $C \subset Y$ e pongo $B = f^{-1}(C)$ dunque $f^{-1}(C) = B \subset \overline{B}$ perciò sfruttando la mia ipotesi ho che

$$f(B) \subset f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} = \overline{f\left(f^{-1}(C)\right)} = \overline{f(X) \cap C} \subset \overline{C} = C = f(B)$$

Perciò $B = \overline{B}$ e quindi per definizione B è un chiuso. □

Proposizione 4.0.2. *Dati due spazi topologici $(X, \tau), (Y, \xi)$ allora fissato un $y \in Y$ la funzione costante definita come*

$$\begin{aligned} C_y \colon X &\to Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

È una funzione continua.

Dimostrazione. Sia $A \in \xi$ allora ci possono essere due casi:

1. $y \notin A$ quindi $C_y^{-1}(A) = \phi \in \tau$ per definizione di topologia.
2. $y \in A$ quindi $C_y^{-1}(A) = X \in \tau$ per definizione di topologia.

Quindi entrambi i casi qualsiasi sia l'aperto nell'immagine, la sua controimmagine è un aperto e quindi per la proposizione precedente ho che la mia funzione è continua . □

Teorema 4.0.1. *Dati due spazi topologici $(X, \tau), (Y, \xi)$ e una funzione continua $f : X \to Y$ allora valgono i seguenti fatti*

1. *Se $\exists \tau' | \tau \subset \tau'$ allora $f : (X, \tau') \to (Y, \xi)$ è continua.*
2. *Se $\exists \xi' | \xi' \subset \xi$ allora $f : (X, \tau) \to (Y, \xi')$ è continua.*
3. *Se $\exists \tau'$ e $\exists \xi' | \tau \subset \tau'$ e $\xi' \subset \xi$ allora $f : (X, \tau') \to (Y, \xi')$ è continua.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro i vari punti.

Punto 1
Sia $A \in \xi$ allora essendo continua per ipotesi ho che $f^{-1}(A) \in \tau$ dunque $f^{-1}(A) \in \tau'$ e quindi continua ad essere continua.

Punto 2
Sia $A \in \xi'$ allora $A \in \xi$ ma essendo continua per ipotesi ho che $f^{-1}(A) \in \tau$ quindi continua ad essere continua.

Punto 3
Sia $A \in \xi'$ allora $A \in \xi$ ma essendo continua per ipotesi ho che $f^{-1}(A) \in \tau$ dunque $f^{-1}(A) \in \tau'$ e quindi continua ad essere continua. □

Osservazione 4.0.1. *Non è vero il contrario, cioè se prendo una topologia più fine per Y non è detto che f rimanga continua in quanto se considero la mappa identità*

$$\begin{aligned} Id\colon (X, \tau_{euclidea}) &\to (X, \tau_D) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Allora se prendo un aperto della topologia discreta come ad esempio un singoletto ho che $f^{-1}(\{x\}) = x \notin \tau_{euclidea}$ e quindi questa funzione non è più continua.

Proposizione 4.0.3. *Le seguenti proposizioni sono vere:*

1. *$\forall f | f : (X, \tau_D) \to (X, \tau)$ è continua.*
2. *$\forall f | f : (X, \tau) \to (X, \tau_B)$ è continua.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

Punto 1
Banalmente $\forall A \in \tau$, $f^{-1}(A) \in P(X) = \tau_D$ per definizione e dunque per una proposizione precedente ho che questa funzione è continua.

Punto 2
In questo caso gli unici aperti che posso considerare nella topologia in arrivo sono per definizione ϕ, X ma $f^{-1}(\phi) = \phi \in \tau$ e $f^{-1}(X) = X \in \tau$ dunque per una proposizione precedente ho che questa funzione risulta continua. □

4.1 Omeomorfismo

Definizione 4.1.1. ***(Funzione aperta)***
Sia $f(X,\tau) \to (Y,\xi)$ un'applicazione tra spazi topologici. Diciamo che f è aperta se

$$\forall A \in \tau,\ f(A) \in \xi$$

Definizione 4.1.2. ***(Omeomorfismo)***
Siano $(X,\tau),(Y,\xi)$ due spazi topologici e $f(X,\tau) \to (Y,\xi)$ un'applicazione tra di essi allora si dice che è un omeomorfismo se:

- *f è una bigezione.*
- *f, f^{-1} sono continue.*

Teorema 4.1.1. *Sia $f(X,\tau) \to (Y,\xi)$ un'applicazione tra spazi topologici allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è un omeomorfismo.*
2. *f è continua, bigettiva e aperta.*
3. *f è continua, bigettiva e chiusa.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine:

<u>(1)⇒(2)</u>
Per definizione abbiamo già che f è bigettiva e continua, quindi non rimane che dimostrare che è aperta.
Considero $A \in \tau$ allora

$$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$$

Poiché $f^{-1} \in \mathcal{C}^0$ allora per la proposizione precedente ho che $\forall A \in \tau, (f^{-1})^{-1}(A) \in \xi$ e quindi per definizione la funzione è continua.
Questa dimostrazione è analoga per i chiusi.

<u>(2)⇒(1)</u>
Dato che per ipotesi ho già che f è bigettiva e continua, rimane da dimostrare che $f^1 \in \mathcal{C}^0$.
Sfruttando l'ipotesi di continuità ho per una proposizione precedente che $\forall A \in \xi, f^{-1}(A) \in \tau$, inoltre essendo bigettiva, per ipotesi, ho anche che

$$A = f\left(f^{-1}(A)\right)$$

A questo punto sapendo che per ipotesi f è aperta allora per definizione di funzione aperta che $\forall A \in \tau, f(A) \in \xi$ ma dato che $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$, data l'ipotesi di bigettività, allora per la proposizione precedente visto che

$$\forall A \in \tau,\ f(A) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(A) \in \xi$$

Allora per definizione f^{-1} è una funzione continua perciò la mia tesi è dimostrata. □

Esempio 4.1.1. *in generale le mappe più frequenti sono:*

1. $Id_X(X,\tau) \to (X,\tau)$ *è un omeomorfismo.*
2. *Se* f *è un omeomorfismo allora anche* f^{-1} *lo è.*
3. *Se* $f : X \to Y, g : Y \to Z$ *sono due omeomorfismi allora anche* $g \circ f$ *lo è.*

Osservazione 4.1.1. *Le affinità sono tutte omeomorfismi in quanto*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \varphi(x) = Ax + b, A \in GL_{n\times n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

É una bigezione in quanto la matrice è invertibile e, essendo $c = Ax + b$ *arbitrario allora la mappa è suriettiva, inoltre essendo un'espressione polinomiale segue di conseguenza che è anche continua e quindi raprpesenta un omeomorfismo.*

Definizione 4.1.3. *Sia* (X,τ) *uno spazio topologico,* $S \in P(X) \setminus \{\phi\}$ *e sia la funzione inclusione*

$$i_S : S \to X$$

La topologia su S *immagine inversa di* i_S *si dice topologia relativa su* S *indotta da* (X,τ) *inoltre*

$$(i_S)^{-1}(\tau) = \tau_S$$

La coppia (S,τ_S) *viene definita sottospazio topologico di* (X,τ).

Teorema 4.1.2. *Sia* (X,τ) *uno spazio topologico,* (S,τ_S) *un sottospazio topologico allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\tau_S := \{A \cap S \in P(S) | A \in \tau\}$, *un aperto relativo è l'intersezione di aperti con* S.

1'. F *è un chiuso per il sottospazio topologico* $(S,\tau_S) \Leftrightarrow \exists G \in \mathcal{F}$ *un chiuso di* τ *tale per cui* $F = G \cap S$.

2. *Supponiamo che* $\mathcal{B}$ *sia una base di* τ *allora*

$$\mathcal{B}_S := \{B \cap S \in P(S) | B \in \mathcal{B}\}$$

rappresenta una base per τ_S.

2'. *Se* $\mathcal{S}$ *è una sottobase di* τ *allora*

$$\mathcal{S}_S := \{B \cap S \in P(S) | B \in \mathcal{S}\}$$

Rappresenta una sottobase per τ_S.

3. *Sia* $x \in S$ *allora vale che*

$$\mathcal{N}_{\tau_S}(x) = \{U \cap S \in P(S) | U \in \mathcal{N}_\tau(x)\}$$

Rappresenta un sistema di intorni per la sotto topologia.

3'. *Sia* $x \in S$ *e sia* $\mathcal{V}(x)$ *un sistema fondamentale di intorni di* X *in* (X,τ) *allora ponendo*

$$\mathcal{V}_{\tau_S}(x) = \{U \cap S \in P(S) | U \in \mathcal{V}_\tau(x)\}$$

Definisco un sistema fondamentale di intorni per S.

4. *Sia* $W \in P(S)$ *allora*

$$\overline{W}^{\tau_S} = \overline{W} \cap S$$

5. *Sia* $T \in P(S) | T \subset S \subset X$, T *vede due topologie:* τ, τ' *e quindi*

$$\tau|_T = (\tau|_S)_{|_T}$$

Ciò significa che la topologia relativa della topologia relativa è uguale alla relativa.

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

<u>Punto 1</u>
s $\tau_S = (i_S)^{-1}(\tau)$ quindi per definizione posso dire che

$$\tau_S = (i_S)^{-1}(\tau) := \{(i_S)^{-1}(A) \in P(S) | A \in \tau\}$$

Osserviamo che $(i_S)^{-1}(A) = \{x \in S | i_S(x) \in A\} = \{x \in S | x \in A, x \in A \cap S\}$ perciò

$$(i_S)^{-1}(A) = A \cap S$$

<u>Punto 1'</u>
"F è un chiuso per $(S, \tau_S) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{F}$ chiuso di $\tau | F = G \cap S$."
Preso un chiuso F di τ_S allora $\mathcal{C}_S(F) \in \tau_S$ ma $\mathcal{C}_S(F) = S \setminus F$ quindi

$$\exists A \in \tau | A \cap S = \mathcal{C}_S(F) \Rightarrow \mathcal{C}_X(A) \cap S = F$$

Ma essendo $\mathcal{C}_X(A)$ un chiuso allora F è un chiuso relativo.

"F è un chiuso per $(S, \tau_S) \Leftarrow \exists G \in \mathcal{F}$ chiuso di $\tau | F = G \cap S$."
Se G è un chiuso per τ allora

$$S \setminus G = S \setminus (S \cap G) = S \cap \mathcal{C}_X(G)$$

Ma $\mathcal{C}_X(G) \in \tau$ quindi quello rappresenta un aperto relativo.

<u>Punto 2</u>
Sia $A \in \tau$ grazie al punto (1) so che

$$\exists A' \in \tau | A = A' \cap S$$

Poiché $\mathcal{B}$ è una base di τ e $A' \in \tau$ allora so che $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tale per cui

$$A' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

Ma dato che $A = A' \cap S$ allora

$$A = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \right) \cap S = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} (B \cap S)$$

Ma per definizione $B \cap S \in \mathcal{B}_S$ quindi significa che riesco ad esprimere ogni insieme di S come unione degli elementi di una sottofamiglia (quindi riesco a ricostruirne gli aperti) dunque essa rappresenta una base.

<u>Punto 2'</u>
Per un teorema precedente mi basta provare che $\mathcal{S}_S$ genera la base della topologia indotta $\mathcal{B}_S$. Dunque sia $B_S \in \mathcal{B}_S$ dunque per come ho definito $\mathcal{B}_S$ ho che

$$\exists E \in \mathcal{B} | B_S = B \cap S$$

A questo punto sfrutto l'ipotesi per cui $\mathcal{S}$ rappresenta una sotto base per la topologia quindi per definizione so che $\exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ famiglia finita tale per cui $B = \bigcap_{i=1}^n U_i$ quindi posso riscrivere il tutto in maniera equivalente come

$$B_S = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap S = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap S)$$

Ma per costruzione $\forall i$, $U_i \cap S \in \mathcal{S}_S$ quindi per definizione tale famiglia rappresenta una sottobase per τ_S.

Punto 3

"$\mathcal{N}_{\tau_S}(x) \subset \{U \cap S \in P(S) | U \in \mathcal{N}_\tau(x)\}$"
Sia $W \in \mathcal{N}_{\tau_S}(x)$ quindi per definizione $\exists A \in \tau_S | x \in A \subset W$ inoltre per il punto (1) so che

$$\exists A' \in \tau | A = A' \cap S$$

Ponendo $U = W \cup A'$ allora si osserva facilmente che $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ dunque

$$\begin{aligned} U \cap S &= (W \cup A') \cap S \\ &= (W \cap S) \cup (A' \cap S) \\ &= W \cup A \\ &= W \end{aligned}$$

Quindi quell'inclusione è verificata.

"$\mathcal{N}_{\tau_S}(x) \subset \{U \cap S \in P(S) | U \in \mathcal{N}_\tau(x)\}$"
Sia $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ quindi per definizione $\exists A' \in \tau | x \in A' \subset U$, quindi $(A' \cap S) \subset (U \cap S)$ ma dato che $x \in (A' \cap S)$ allora $U \cap S \in \mathcal{N}_{\tau_S}$.

Quindi c'è uguaglianza tra i due insiemi.

Punto 3'

$\forall x \in S, \exists U_S \in \mathcal{N}_{\tau|_S}$. Per costruzione di tale famiglia ho che $\forall U_S \in \mathcal{N}_{\tau|_S}, \exists U \in \mathcal{N}_\tau | U_S = U \cap S$.
A questo punto sfruttando l'ipotesi per cui $\mathcal{V}(x)$ sia un sistema fondamentale di intorni allora per definizione so che $\exists V \in \mathcal{V}_\tau(x) | x \in V \subset U$ dunque ho che

$$U_S = U \cap S \supset V \cap S =: V_S$$

Ma per costruzione ho che $V_S \in \mathcal{V}_{\tau|_S}$ dunque per definizione ho che $\mathcal{N}_{\tau|_S}$ è un sistema fondamentale di intorni.

Punto 4

Per definizione di chiusura topologica ho che

$$\overline{W}^{\tau_S} = \bigcap_{C \in \mathcal{F}(W)} C$$

Con

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(W) = \{C \in P(S) | \mathcal{C}_S(C) \in \tau_S, C \subset W\} \\ &\Updownarrow \\ &\mathcal{F}'(W) = \{C' \in P(X) | \mathcal{C}_X(C') \in \tau, C' \cap S = C \in \mathcal{F}(W)\} \end{aligned}$$

Questo è vero per il punto (2), quindi posso riscrivere il tutto in maniera equivalente come:

$$\begin{aligned} \overline{W}^{\tau_S} &= \bigcap_{C \in \mathcal{F}(W)} C \\ &= \bigcap_{C' \in \mathcal{F}'(W)} (C' \cap S) \\ &= \left(\bigcap_{C' \in \mathcal{F}'(W)} C' \right) \cap S \\ &= \overline{W} \cap S \end{aligned}$$

Punto 5

Se io considero un diagramma commutativo del genere:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "i_{T,S}"] \arrow[dr, "i_T"'] & S \arrow[d, "i_S"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Allora posso scrivere che:

$$\tau_T = (i_T)^{-1}(\tau) = (i_S \circ i_{T,S})^{-1}(\tau) = (i_{T,S}^{-1} \circ i_S^{-1})(\tau)$$

Dunque ottengo che

$$i_{T,S}^{-1}(i_S^{-1}(\tau)) = i_{T,S}^{-1}(\tau|_S) = (\tau|_S)|_T$$

□

Proposizione 4.1.1. *Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \xi)$ un'applicazione continua, $S \in P(X) \setminus \phi$ e sia $T \in P(Y) \setminus \phi$ allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *$f|_S : (S, \tau_S) \to (Y, \xi)$ è un'applicazione continua.*
2. *Se $f(S) \subset T$ allora $f|_S^T$, una restrizione di f tale per cui*

$$\begin{aligned} f|_S^T &: (S, \tau_S) \to (T, \xi_T) \\ &x \mapsto f|_S^T(x) = f(x), \forall x \in S \end{aligned}$$

Allora $f|_S^T$ è continua.

Dimostrazione. Prima di tutto dimostro:

<u>Punto 2</u>
Per semplicità pongo $f|_S^T = g$, quindi

$$g : (S, \tau_S) \to (T, \xi_T)$$

Dunque per definizione di topologia relativa ho che

$$\forall A \in \xi_T, \exists A' \in \xi | A = A' \cap T$$

Perciò ho che

$$g^{-1}(A) = g^{-1}(A' \cap T) := \{x \in S | g(x) \in A\} = \{x \in S | f(x) \in A, f(x) \in T\}$$

Dunque il tutto è equivalente a scrivere

$$\{x \in S | f(x) \in A'\} = S \cap f^{-1}(A')$$

Ma dato che $f^{-1}(A') \in \tau$ in quanto la funzione è continua per ipotese allora per definizione di topologia relativa ho che $S \cap f^{-1}(A') \in \tau_S$, quindi $f|_S^T$ è continua.

<u>Punto 1</u>
Avendo già dimostrato il punto 2 rinominando $T = Y$, la restrizione di f a S è la composizione di f con l'inclusione e quindi rimane sempre una funzione continua, quindi la mia tesi è dimostrata. □

Osservazione 4.1.2. *Dato uno spazio topologico (X, τ) e $\phi \neq T \subset S \subset X$ allora:*

1. *Se $S \in \tau$ e $T \in \tau_S$ allora $T \in \tau$.*
2. *Se $S \in \tau$ è un insieme chiuso in τ e T è un insieme chiuso in τ_S allora T è un chiuso in τ.*

Teorema 4.1.3. *Data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I} \subset \tau$ che compone un ricoprimento di X e una famiglia di funzioni*

$$\mathcal{F} := \{f_i | f_i : X_i \to Y\}_{i \in I}$$

Tale per cui:

1. *$f_i|_{X_i \cap X_i} = f_j|_{X_i \cap X_j}, \forall i, j | X_i \cap X_j \neq \phi$*
2. *$\forall i \in I$, f_i è continua.*

Allora $\exists! f$ *continua tale per cui*

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) = f_i(x), \ \textit{per qualche } i \in I \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per verificare questo teorema devo mostrare 3 cose:

- **<u>Esistenza</u>**
  L'esistenza della f deriva automaticametne dal fatto che ho una forma abbastanza esplicita dato che
  $$\forall x \in X, \exists i_0 \in I | x \in X_{i_0} \implies f(x) = f_{i_0}(x)$$
  Anche nel caso in cui esistesse una sottofamiglia finita di indici J tale per cui
  $$x \in \bigcap_{j \in J} X_j$$
  Ho dalle ipotesi che la funzione su tale insieme è la stessa per tutti gli insiemi:
  $$f_i|_{\bigcap_{j\in J} X_j}(x) = f_j|_{\bigcap_{j\in J} X_j}(x) \qquad \forall j \in J$$

- **<u>Unicità</u>**
  Dato che la famiglia in questione è ben definita e unica allora esiste un'unica funzione completamente determinata da essa.

- **<u>Continuità</u>**
  Sia $A \in Y$ poiché $\{X_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di X per ipotesi allora ho che
  $$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}(A) \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \left(f^{-1}(A) \cap X_i \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(A) \end{aligned}$$
  In quanto per definizione
  $$f^{-1}(A) \cap X_i := \{x \in X_i | f(x) \in A\} = f_i^{-1}(A)$$
  Per ipotesi ho che questa funzione è continua e quindi tale contro immagine è un aperto relativo alla topologia indotta su X_i, $\forall i \in I$. Per una proposizione precedente dato che $X_i \in \tau$ per ipotesi e $f_i^{-1}(A) \in \tau|_{X_i}$ allora $f_i^{-1}(A) \in \tau$, $\forall i \in I$ dunque
  $$\bigcup_{i \in I} \left(f^{-1}(A) \cap X_i \right) \in \tau$$
  In quanto τ stabile per unione arbitraria e quindi f è una funzione continua.

$\square$

Capitolo 5

Prodotti topologici

5.1 Topologia prodotto

Teorema 5.1.1. *Siano* $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ *due spazi topologici allora poniamo*

$$\tau_1 \times \tau_2 := \{A_1 \times A_2 \in P(X_1 \times X_2) | A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$$

Allora questa famiglia rappresenta una base per la topologia su $X_1 \times X_2$.

Dimostrazione. Per il teorema (2.2.1) visto che $\tau_1 \times \tau_2$ rappresenta una famiglia di insiemi allora se dimostro che

- Rappresenta un ricoprimento per l'insieme.
- $\forall B_1, B_2 \in \tau_1 \times \tau_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B | \mathcal{B} \subset \tau_1 \times \tau_2$.

Dunque procedendo con ordine

Ricoprimento per l'insieme
Dato che per costruzione ho $X_1 \in \tau_1, X_2 \in \tau_2$ allora è un ricoprimento di $X_1 \times X_2$.

Intersezione finita
Siano $A, B \in \tau_1 \times \tau_2$ dunque $\exists A_1, B_1 \in \tau_1$ e $\exists A_2, B_2 \in \tau_2$ tali per cui $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$. A questo punto so che per τ_1, τ_2 posso definirvi una base, quindi $\mathcal{B}_1 \subset \tau_1$, $\mathcal{B}_2 \subset \tau_2$ dunque per definizione so che $\exists \mathcal{B}_{1,A} \subset \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_{1,B} \subset \mathcal{B}_1$ tale per cui

$$A_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{1,A}} B$$
$$B_1 = \bigcup_{C \in \mathcal{B}_{1,B}} C$$

Analogamente per l'altro insieme ho che

$$A_2 = \bigcup_{D \in \mathcal{B}_{2,A}} D$$
$$B_2 = \bigcup_{E \in \mathcal{B}_{2,B}} E$$

Dunque dato che $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2))$ allora per quanto detto in precedenza posso scrivere che

$$A_1 \cap B_1 = \left(\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_{1,A}} B \right) \cap \left(\bigcup_{C \in \mathcal{B}_{1,B}} C \right) \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{1,A}} \left(B \cap \left(\bigcup_{C \in \mathcal{B}_{1,B}} C \right) \right) = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_{1,A} \\ C \in \mathcal{B}_{1,B}}} (B \cap C)$$

$$A_2 \cap B_2 = \left(\left(\bigcup_{D \in \mathcal{B}_{2,A}} D \right) \cap \left(\bigcup_{E \in \mathcal{B}_{2,B}} E \right) \right) = \bigcup_{D \in \mathcal{B}_{2,A}} \left(D \cap \left(\bigcup_{E \in \mathcal{B}_{2,B}} E \right) \right) = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{B}_{2,A} \\ E \in \mathcal{B}_{2,B}}} (D \cap E)$$

Perciò posto

$$\begin{aligned}
&F = B \cap C && \forall B \in \mathcal{B}_{1,A}, \forall C \in \mathcal{B}_{1,B} \\
&\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}_{1,A} \cup \mathcal{B}_{1,B} && \\
&G = D \cap E && \forall D \in \mathcal{B}_{2,A}, \forall E \in \mathcal{B}_{2,B} \\
&\mathcal{B}'_2 = \mathcal{B}_{2,A} \cup \mathcal{B}_{2,B} && \\
&H = F \times G && \\
&\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \times \mathcal{B}'_2 &&
\end{aligned}$$

Allora sicuramente per costruzione $H \in \tau_1 \times \tau_2$ e quindi ottengo automaticamente che

$$A \cap B = \bigcup_{H \in \mathcal{B}'} H$$

Dunque dato che le ipotesi del teorema sono verificate ho che $\tau_1 \times \tau_2$ rappresenta una base per la topologia. □

Definizione 5.1.1. ***(Topologia prodotto)***
La topologia su X_1, X_2 che ha come una delle sue basi $\tau_1 \times \tau_2$ è detta topologia prodotto su $X_1 \times X_2$ di τ_1, τ_2. Inoltre la coppia $(X_1 \times X_2, \tau)$ si dice spazio topologico prodotto di $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$.

Esempio 5.1.1. *Dopo tutto ciò devo fare vedere che ci sia della coerenza sulla topologia euclidea in $\mathbb{R}^2$.*

Proposizione 5.1.1. *Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici e sia $X_1 \times X_2$ il loro prodotto topologico. Denotiamo con*

$$\begin{aligned}
p_1 \colon X_1 \times X_2 &\to X_1 \\
x_1, x_2 &\mapsto x_1 \\
p_1 \colon X_1 \times X_2 &\to X_1 \\
x_1, x_2 &\mapsto x_1
\end{aligned}$$

Le proiezioni rispettivamente di $X_1 \times X_2$ su X_1 e su X_2, allora segue che la topologia prodotto τ su $X_1 \times X_2$ è la topologia sul prodotto cartesiano meno fine tra tutte quelle che rendono continue p_1, p_2.

Dimostrazione. Procedendo per ordine faccio notare che:

<u>τ rende continue le funzione</u>
Se considero $A_1 \in \tau_1$ allora $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X \in \tau$, analogamente se considero $A_2 \in \tau_2$ allora $p_2^{-1}(A_2) = X \times A_2 \in \tau$, dunque tali funzioni sono continue.

<u>τ è la topologia meno fine</u>
Per dimostrare ciò suppongo per assurdo che $\exists \tau' \subset \tau$ tale per cui le due funzioni sono continue. Preso in considerazione $A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2$ allora

$$A \in \tau_1 \times \tau_2 \Rightarrow A = A_1 \times A_2$$

Quindi dato che abbiamo supposto essere continue le due funzioni sotto questa topologia è chiaro che

$$\begin{cases} p_1^{-1}(A_1) \in \tau' \\ p_2^{-1}(A_2) \in \tau' \end{cases}$$

Ma dato che

$$p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2) = (A_1 \cap X) \times (X \cap A_2) = A_1 \times A_2 \in \tau$$

Quindi $\tau' = \tau$. □

Proposizione 5.1.2. *Date le due funzioni*

$$\begin{aligned} p_1 &\colon (X_1 \times X_2, \tau) \to (X_1, \tau_1) \\ p_2 &\colon (X_1 \times X_2, \tau) \to (X_2, \tau_2) \end{aligned}$$

Allora tali applicazioni sono aperte.

Dimostrazione. Se considero un $A \in \tau$ allora per definizione di topologia prodotto

$$\exists \{A_{1,i}\}_{i \in I} \subset \tau_1, \exists \{A_{2,i}\}_{i \in I} \subset \tau_2 | A = \bigcup_{i \in I} (A_{1,i} \times A_{2,i})$$

Dunque posso dire che

$$p_1(A) = p_1\left(\bigcup_{i \in I} (A_{1,i} \times A_{2,i})\right) = \bigcup_{i \in I} p_1(A_{1,i} \times A_{2,i}) = \bigcup_{i \in I} A_{1,i} \in \tau_1$$

Analogamente segue che

$$p_2(A) = p_2\left(\bigcup_{i \in I} (A_{1,i} \times A_{2,i})\right) = \bigcup_{i \in I} p_2(A_{1,i} \times A_{2,i}) = \bigcup_{i \in I} A_{2,i} \in \tau_2$$

Quindi l'immagine di un aperto è un aperto e dunque la mia tesi è dimostrata. □

Esempio 5.1.2. *Considero la topologia prodotto* $(\mathbb{R}, \tau_\xi)$ *quindi se considero delle iperbole:*

$$\begin{aligned} g &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to g(x, y) = xy - 1 \end{aligned}$$

É chiaro che la fibra di $\{0\}$ *è* $P := xy = 1$ *ma questo è un chiuso e inoltre* $p_1(P) = p_2(P) = \mathbb{R} \setminus \{\phi\}$.

5.2 Topologia relativa

Proposizione 5.2.1. *Siano $(X, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici e $S_1 \subset X_1$ e $S_2 \subset X_2$ allora*

$$\tau_1|_{S_1} \times \tau_2|_{S_2} =< \tau_1 \times \tau_2 > |_{S_1 \times S_2}$$

E prende il nome di topologia relativa di $S_1 \times S_2$ indotta dal prodotto.

Dimostrazione. Sua V un aperto per la topologia indotta da $X_1 \times X_2$ su $S_1 \times S_2$ dunque per definizione

$$\exists U \in \tau | V = U \cap (S_1 \times S_2)$$

Dunque dato che $\tau_1 \times \tau_2$ è una base per τ allora

$$\exists \{A_j \times B_j\}_{j \in J} \subset \tau_1 \times \tau_2 | U = \bigcup_{j \in J} A_j \times B_j$$

Perciò

$$\begin{aligned} V &= \left(\bigcup_{j \in J} A_j \times B_j \right) \cap (S_1 \times S_2) \\ &= \bigcup_{j \in J} (A_j \cap S_1) \times (B_j \times S_2) \end{aligned}$$

Dato che

$$\begin{aligned} A_j \in \tau_1 &\iff A'_j = A_j \cap S_1 \in \tau_1|_{S_1} \\ B_j \in \tau_2 &\iff B'_j = B_j \cap S_2 \in \tau_2|_{S_2} \end{aligned}$$

Allora

$$V = \bigcup_{j \in J} A'_j \times B'_j$$

Quindi V è un aperto per la topologia prodotto $S_1 \times S_2$. Date le equivalenze di queste affermazioni allora

$$\tau_1|_{S_1} \times \tau_2|_{S_2} =< \tau_1 \times \tau_2 > |_{S_1 \times S_2}$$

□

Teorema 5.2.1. *Dati due spazi topologici $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ e il loro relativo spazio topologico prodotto allora segue che:*

1. *Dato un $P \in P(X_1 \times X_2)$ allora*

$$P \in \mathcal{N}_\tau((x_1, x_2)) \Leftrightarrow \exists U_1 \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1), \exists U_2 \in \mathcal{N}_{\tau_2}(x_2) | (x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset P$$

1'. *Sia $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ e siano $\mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2)$ degli SFI rispettivamente per x_1 in τ_1 e per x_2 in τ_2 allora $\mathcal{V}_{\tau_1} \times \mathcal{V}_{\tau_2}$ è un SFI di (x_1, x_2) nella topologia prodotto.*

1''. *Sia $S \in P(X_1), T \in P(X_2)$ allora vale che*

$$\begin{aligned} \overline{S \times T}^\tau &= \overline{S}^{\tau_1} \times \overline{T}^{\tau_2} \\ Int_\tau(S \times T) &= Int_{\tau_1}(S) \times Int_{\tau_2}(T) \\ Fr(S \times T) &= (Fr(S) \times \overline{T}) \cup (\overline{S} \times Fr(S)) \end{aligned}$$

2. *(**Proprietà universale del prodotto topologico**)*
Sia $f : (Y, \xi) \to (X_1 \times X_2, \tau)$ un applicazione e siano p_1, p_2 le funzioni proiezione canonica allora definendo le seguenti composizioni come

$$\begin{cases} f_1 : Y \to X_1 \\ f_2 : Y \to X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = p_1 \circ f \\ f_2 = p_2 \circ f \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (Y,\xi) \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
 & (X_1 \times X_2, \tau) \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & \\
(X_1,\tau) & & (X_2,\tau)
\end{tikzcd}$$

Perciò $f = (f_1, f_2)$ e allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) f è una funzione continua.

(b) f_1, f_2 sono continue.

<u>Punto 1</u>. "$P \in \mathcal{N}_\tau((x_1,x_2)) \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1), \exists U_2 \in \mathcal{N}_{\tau_2}(x_2) | (x_1,x_2) \in U_1 \times U_2 \subset P$"
Assumiamo che P sia un intorno allora sappiamo che $\exists A \in \tau$ tale per cui

$$(x_1,x_2) \in A \subset P$$

Dunque per definizione di τ so che $\exists \{A_{i,1} \times A_{i,2}\}_{i \in I} \subset \tau_1 x \tau_2$ tale per cui

$$A = \bigcup_{i \in I} (A_{i,1} \times A_{i,2}) \Leftrightarrow \exists i_0 \in I | (x_1,x_2) \in (A_{i_0,1} \times A_{i_0,2})$$

Quindi dicendo che $U_1 = A_{i_0,1}, U_2 = A_{i_0,2}$ la mia implicazione è dimostrata.

"$P \in \mathcal{N}_\tau((x_1,x_2)) \Leftarrow \exists U_1 \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1), \exists U_2 \in \mathcal{N}_{\tau_2}(x_2) | (x_1,x_2) \in U_1 \times U_2 \subset P$"
Supponiamo che $\exists U_1 \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1), \exists U_2 \in \mathcal{N}_{\tau_2}(x_2) | (x_1,x_2) \in U_1 \times U_2 \subset P$, dunque a meno di restrizioni posso considerare U_1, U_2 aperti e quindi per definizione $U_1 \times U_2 \in \tau$. Quindi per definizione posso concludere che

$$P \in \mathcal{N}_\tau(x_1,x_2)$$

Quindi la mia tesi è dimostrata.

□

<u>Punto 1'</u>. Sia $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ allora se per ipotesi ho che $\mathcal{V}_1(x_1)$ è un sistema fondamentale di intorni di x_1 così come lo è $\mathcal{V}_2(x_2)$ per x_2 allora per definizione ho che

$$\forall U_1 \in \mathcal{N}_\tau(x_1), \exists V_1 \in \mathcal{V}_1(x_1) | V_1 \subset U_1$$
$$\forall U_2 \in \mathcal{N}_\tau(x_2), \exists V_2 \in \mathcal{V}_2(x_2) | V_2 \subset U_2$$

Perciò rifacendomi al punto precedente ho che un sistema di intorni di un punto è uguale al prodotto dei sistemi di intorni, dunque

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x_1,x_2),\ \exists U_1 \in \mathcal{N}_1(x_1),\ \exists U_2 \in \mathcal{N}_2(x_2) | U \supset U_1 \times U_2$$

Quindi per la definizione precedente ho che $V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$ perciò per definizione ho che $\mathcal{V}_1(x_1) \times \mathcal{V}_2(x_2)$ rappresenta un sistema fondamentale di intorni per (x_1,x_2).

□

<u>Punto 1"</u>. Questo punto presenta 3 tesi.

- Per quanto dimostrato il punto (1') so che $\mathcal{V}_{\tau_1}(x_1) \times \mathcal{V}_{\tau_2}(x_1)$ è un sistema di intorni per la topologia prodotto.
  Per definizione $(x_1,x_2) \in \overline{S \times T}^\tau$ se e solo se

$$\forall V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \forall V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_1), (V_1 \times V_2) \cap (S \times T) \neq \phi$$

Quindi affinché tale condizione sia soddisfatta deve essere allo stesso tempo vero che

$$\begin{cases} S \cap V_1 \neq \phi \\ T \cap V_2 \neq \phi \end{cases}$$

Cioè per definizione significa che $x_1 \in \overline{S}^{\tau_1}, x_2 \in \overline{T}^{\tau_2}$.

Dato che tutte queste affermazioni sono delle doppie implicazioni segue automaticamente che

$$\overline{S \times T}^{\tau} = \overline{S}^{\tau_1} \times \overline{T}^{\tau_2}$$

- Per dimostrare questo punto devo dimostrare due cose:

  $\underline{Int_\tau(S \times T) \subset Int_{\tau_1}(S) \times Int_{\tau_2}(T)}$
  Sia $(x_1, x_2) \in Int_\tau(S \times T)$ per definizione so che

  $$(x_1, x_2) \in Int_\tau(S \times T) \Leftrightarrow \exists A \in \tau | (x_1, x_2) \in A \subset S \times T$$

  Dunque dato che $(x_1, x_2) \in A$ è ovvio affermare che $A \in \mathcal{N}_\tau(x_1, x_2)$ e quindi per il punto (1) so che

  $$\exists A_1 \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1), \exists A_2 \in \mathcal{N}_{\tau_2}(x_2) | A \supset A_1 \times A_2$$

  Dunque è ovvio che $A_1 \times A_2 \subset S \times T \Leftrightarrow A_1 \subset S$, $A_2 \subset T$ quindi segue per definizione che che $x_1 \in Int_{\tau_1}(S), x_2 \in Int_{\tau_2}(T)$, perciò

  $$Int_\tau(S \times T) = Int_{\tau_1}(S) \times Int_{\tau_2}(T)$$

  $\underline{Int_\tau(S \times T) \supset Int_{\tau_1}(S) \times Int_{\tau_2}(T)}$
  Sia $(x_1, x_2) \in Int_{\tau_1}(S) \times Int_{\tau_2}(T)$ dunque per definizione ho che $x_1 \in Int_{\tau_1}(S)$, $x_2 \in Int_{\tau_2}(T)$, perciò per definizione so che $\exists A_1 \in \tau_1$ e $\exists A_2 \in \tau_2 | x_1 \in A_1 \subset S$, $x_2 \in A_2 \subset T$ dunque è ovvio che $A_1 \times A_2 \in \mathcal{N}_\tau(x_1, x_2)$ quindi per definizione ho che $\exists A \in \tau$ tale per cui

  $$(x_1, x_2) \in A \subset A_1 \times A_2 \subset S \times T$$

  Quindi per definizione $(x_1, x_2) \in Int_\tau(S \times T)$ perciò la mia tesi è dimostrata.

- $\underline{Fr(S \times T) = (Fr(S) \times \overline{T}) \cup (\overline{S} \times Fr(S))}$
  $\forall S \times T \in X_1 \times X_2$ vale la seguente relazione

  $$Fr(S \times T) = (\overline{S} \times \overline{T}) \setminus (Int(S \times T))$$

  Per quanto dimostrato prima so che $Int(S \times T) = Int(S) \times Int(T)$, inoltre l'equazione precedente è equivalente a scrivere

  $$(\overline{S} \times \overline{T}) \cap \mathcal{C}_{X_1 \times X_2}(Int(S) \times Int(T))$$

  Considerando il fatto precedentemente dimostrato per cui $Int(S) \in \tau_1, Int(T) \in \tau_2$ e che sussistono tali relazioni:

  $$\mathcal{C}_{X_1 \times X_2}(Int(S) \times Int(T)) = (\mathcal{C}_{X_1}(Int(S)) \times X_2) \cup (X_1 \times \mathcal{C}_{X_2}(Int(T)))$$
  $$\mathcal{C}_{X_1}(Int(S)) = Est(S) \sqcup Fr(S) = \overline{S^c}$$
  $$\mathcal{C}_{X_2}(Int(T)) = Est(T) \sqcup Fr(T) = \overline{T^c}$$

  Dunque il tutto è equivalente a

  $$\big((\overline{S} \times \overline{T}) \cap (\overline{S^c} \times X_2)\big) \cup \big((\overline{S} \times \overline{T}) \cap (X_1 \times \overline{T^c})\big) = (\overline{S} \cap \overline{S^c} \times \overline{T}) \cup (\overline{S} \times \overline{T} \cap \overline{T^c})$$

  Perciò dato che $\overline{S} \cap \overline{S^c} = Fr(S)$ e che $\overline{T} \cap \overline{T^c} = Fr(T)$ allora la mia tesi è dimostrata.

$\square$

Punto 2.

$(a) \Rightarrow (b)$
Assumiamo che f sia continua allora dato che p_i sono continue allora la composizione di funzioni continue è una funzione continua e quindi la mia tesi.

$(a) \Leftarrow (b)$
Assumiamo che f_1, f_2 siano continue e consideriamo $A \in \tau$. Poiché A è un aperto allora segue che

$$\exists \{A_{1,i} \times A_{2,i}\}_{i \in I} | A_{1,i} \in \tau_1, A_{2,i} \in \tau_2 \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} (A_{1,i} \times A_{2,i})$$

Quindi

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} (A_{1,i} \times A_{2,i})\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_{1,i} \times A_{2,i})$$

Ma questa per definizione è

$$\bigcup_{i \in I} \{y \in Y | f(y) \in (A_{1,i} \times A_{2,i})\} = \bigcup_{i \in I} \{y \in Y | (f_1(y), f_2(y)) \in (A_{1,i} \times A_{2,i})\}$$

Ma quest'ultima è verificata se e solo se

$$\begin{cases} f_1(y) \in A_{1,i} \Longleftrightarrow y \in f_1^{-1}(A_{1,i}) \\ f_2(y) \in A_{2,i} \Longleftrightarrow y \in f_2^{-1}(A_{2,i}) \end{cases}$$

Perciò il tutto è equivalente a scrivere che

$$\bigcup_{i \in I} \left(f_1^{-1}(A_{1,i}) \times f_2^{-1}(A_{2,i})\right)$$

Essendo per ipotesi le componenti continue allora la contro immagine di un aperto è un aperto così come la loro intersezione e quindi la loro unione, perciò

$$f^{-1}(A) \in \xi$$

□

Proposizione 5.2.2. *Sia $g : (X_1 \times X_2, \tau) \to (Y, \xi)$ un applicazione da uno spazio topologico ad un altro, allora se $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ e $\mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2)$ due sistemi fondamentali di intorni allora*

$$g \text{ è continua} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}_\xi(g(x_1, x_2)), \exists V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \exists V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2) | g(V_1 \times V_2) \subset U$$

Dimostrazione. Per dimostrare ciò devo far vedere due cose:

g è continua $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{N}_\xi(g(x_1, x_2)), \exists V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \exists V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2) | g(V_1 \times V_2) \subset U$
Assumiamo che g sia una funzione continua in $x = (x_1, x_2)$ allora per definizione

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(g(x)),\ \exists S \in \mathcal{N}_\tau(x_1, x_2) | g(S) \subset U$$

Dunque per il teorema precedente ho che

$$\exists S_1 \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1),\ \exists S_2 \in \mathcal{N}_{\tau_2}(x_2) | S \supset S_1 \times S_2$$

Dato che ho per ipotesi che $\mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2)$ sono due sistemi fondamentali di intorni allora per definizione ho che

$$\exists V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \exists V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2) | V_1 \subset S_1,\ V_2 \subset S_2$$

Dunque dato che

$$V_1 \times V_1 \subset S_1 \times S_2 \subset S$$

Allora segue che $g(V_1 \times V_2) \subset g(S) \subset U$.

$\underline{g \text{ è continua} \Leftarrow \forall U \in \mathcal{N}_\xi(g(x_1, x_2)), \exists V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \exists V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2) | g(V_1 \times V_2) \subset U}$

Per il teorema precedente ho che $\mathcal{V}_1(x_1) \times \mathcal{V}_2(x_2)$ rappresenta un sistema fondamentale di intorni di τ dunque per definizione di sistema fondamentale ho che $\mathcal{V}_1(x_1) \times \mathcal{V}_2(x_2) \subset \mathcal{N}_\tau(x_1, x_2)$ e quindi $\forall V \in \mathcal{V}_1(x_1) \times \mathcal{V}_2(x_2), \exists A \in \tau | A \subset V$ quindi

$$g(A) \subset g(V)$$

Ma dato che per ipotesi ho che $\forall U \in \mathcal{N}_\xi(g(x_1, x_2)), \exists V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \exists V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2) | g(V_1 \times V_2) \subset U$ allora per quanto detto prima $\exists A \in \tau | A \subset V_1 \times V_2$ e quindi

$$g(A) \subset U$$

Dunque per definizione ho che g è una funzione continua. □

Proposizione 5.2.3. *Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici e sia $X_1 \times X_2$ il relativo spazio topologico prodotto allora $\forall x \in X_1$ data la proiezione canonica*

$$\pi_2 \colon X_1 \times X_2 \to X_2$$
$$(x_1, x_2) \to x_2$$

Ho che $\{x\} \times X_2 \simeq X_2$ e che $\pi_2|^{X_2}_{\{x\} \times X_2}$ è aperta (analogamente $\forall x \in X_2, X_1 \times \{x\} \simeq X_1$).

Dimostrazione. Procedendo con ordine dimostro che

$\underline{\pi_2|^{X_2}_{\{x\} \times X_2} \text{ è aperta}}$

Sia $A \in \tau_{\{x\} \times X_2}$ allora per definizione di topologia relativa ho che $\exists A' \in \tau | A = A' \cap \{x\} \times X_2$ ma dato che $\tau_1 \times \tau_2$ ho dimostrato essere una base della topologia prodotto allora per definizione di base ho che

$$\exists \mathcal{B} \subset \tau_1 \times \tau_2 | A' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

Ma dato che $\mathcal{B} \subset \tau_1 \times \tau_2$ per costruzione è ovvio che $\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists B_1 \in \tau_1$, $\exists B_2 \in \tau_2 | B = B_1 \times B_2$ dunque

$$A = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B_1 \times B_2 \right) \cap \{x\} \times X_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (B_1 \cap \{x\}) \times (B_2 \cap X_2)$$

A questo punto posso osservare due cose:

1. Per come è definita la topologia τ_2 è ovvio che $\forall B \in \mathcal{B}, B_2 \subset X_2 \Rightarrow B_2 \cap X_2 = B_2$.
2. Dato che tale intersezione è non nulla posso estrarre una sottofamiglia

$$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} | \mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} | B_1 \cap \{x\} \neq \phi\}$$

Dunque

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \{x\} \times B_2 = \{x\} \times \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B_2 \right)$$

Perciò

$$\pi(A) = \pi \left(\{x\} \times \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B_2 \right) \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B_2 \in \tau_2$$

Quindi per definizione la funzione è aperta.

$\underline{\{x\} \times X_2 \simeq X_2}$

Per definizione devo provare che $\exists f$ bigettiva e f, f^{-1} sono continue dunque restringo la mia proiezione canonica a $\{x\} \times X_2$ perciò

$$\pi_2 \colon x \times X_2 \to X_2$$
$$(x, x_2) \to x_2$$

Dunque è ovvio che questa funzione sia bigettiva in quanto:

- **Suriettività**: $\pi_2(\{x\} \times X_2) = X_2$
- **Iniettività**: se per assurdo non lo fosse significa che $\exists y_1, y_2 \in X_2 | (x_1, y_1) \neq (x_1, y_2)$ ma $y_1 = y_2$ e questo è impossibile.

A questo punto devo dimostrare che $\pi_2|_{x \times X_2}^{X_2}$ e $\pi_2^{-1}|_{x \times X_2}^{X_2}$ sono continue.
Per quanto riguarda $\pi_2|_{x \times X_2}^{X_2}$ ho dimostrato in precedenza che essendo una restrizione di una funzione continua allora essa è continua, mentre per quanto riguarda la sua inversa ho $\pi_2|_{x \times X_2}^{X_2} = \left(\pi_2^{-1}\right)^{-1}\Big|_{x \times X_2}^{X_2}$ dunque avendo dimostrato precedentemente che è una funzione aperta allora $\forall A \in \tau_{\{x\} \times X_2}$ ho che

$$\left(\pi_2^{-1}\right)^{-1}\Big|_{x \times X_2}^{X_2}(A) = \pi_2|_{x \times X_2}^{X_2}(A) \in \tau'$$

Quindi per un teorema precedente ho che anche l'inversa è continua e quindi per definizione π_2 ristretta a $\{x\} \times X_2$ rappresenta un omeomorfismo perciò

$$\{x\} \times X_2 \simeq X_2$$

$\square$

5.2.1 Prodotti topologici finiti

Siano $(X_1, \tau_1), \cdots, (X_n, \tau_n)$ con $n \geq 2$ $n-$spazi topologici allora

1. Se eseguo il prodotto delle topologie ottengo

$$\tau_1 \times \cdots \times \tau_n := \{A_1 \times \cdots \times A_n \in P(X_1 \times \cdots \times X_n) | A_i \in \tau_i, i = 1, \cdots, n\}$$

2. $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ è un ricoprimento di $X_1 \times \cdots \times X_n$ ed è stabile per intersezione finita quindi individua un unica topologia τ.

3. $\tau :=< \tau_1 \times \cdots \times \tau_n >$è la topologia prodotto delle topologie $\tau_1, \cdots, \tau_n$, è un prodotto topologico dei $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ e vale che:

   - Se $\mathcal{B}_i$ è una base per τ_i allora $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$ è una base per τ.
   - τ è la topologia meno fine costruita su $X_1 \times \cdots \times X_n$ che rende continue tutte le proiezioni canoniche.
   - Le proiezioni sono aperte.
   - Se $\mathcal{V}_{\tau_i}(x_i)$ è un sistema fondamentale di intorni per la topologia τ_i allora $\mathcal{V}_{\tau_1}(x_1) \times \cdots \times \mathcal{V}_{\tau_n}(x_n)$ è un sistema fondamentale di intorni per τ.
   - Se $f : (Y, \xi) \to (X_1 \times \cdots \times X_n, \tau)$ allora

$$f \in C^0 \Leftrightarrow f_i \in C^0, i = 1, \cdots, n$$

   - Siano $S_i \in P(X_i), i = 1, \cdots, n$ allora vale che

$$\overline{S_1 \times \cdots \times S_n}^{\tau} = \overline{S}_1^{\tau_1} \times \cdots \times \overline{S}_n^{\tau_n}$$

     E che

$$Int_{\tau}(S_1 \times \cdots \times S_n) = Int_{\tau_1}(S_1) \times \cdots \times Int_{\tau_n}(S_n)$$

Capitolo 6

Topologia Quoziente

Definizione 6.0.1. *(**Topologia quoziente**)*
Sia (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme non vuoto e sia $f : X \to Y$ un'applicazione. La topologia quoziente su Y rispetto a f è la topologia più fine su Y che rende continua la f.

Lemma 6.0.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme non vuoto e sia $f : X \to Y$ allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *$\exists! \tau$ (topologia quoziente) su Y rispetto a f e vale che*

$$\tau_f := \{A \in P(Y) | f^{-1}(A) \in \tau\}$$

   Inoltre $C \in P(Y)$ è chiuso rispetto a $\tau_f \Leftrightarrow f^{-1}(C)$ è un chiuso di τ.

2. *τ_f ha la seguente proprietà universale del quoziente topologico: $\forall g : (Y, \tau_f) \to (Z, \eta)$ ho che g è continua $\Longleftrightarrow g \circ f$ è continua.*

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ (Y,\tau_f) \arrow[r, "g"] & (Z,\eta) \end{tikzcd}$$

   Dimostrazione.

   Punto 1
   Prima di tutto va mostrato che τ_f per come è definito, rappresenta una topologia, quindi

   - $Y \in \tau_f$ in quanto abbiamo posto che $f^{-1}(Y) = X \in \tau$ analogamente per $\phi \in \tau_f$ in quanto $f^{-1}(\phi) = \phi \in \tau$.
   - Consideriamo una famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau_f$ dunque dato che

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

     E che per costruzione $f^{-1}(A_i) \in \tau, \forall i \in I$ allora essendo τ una topologia è stabile per intersezione arbitraria, quindi

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \in \tau_f$$

   - Considero $A, B \in \tau_f$ allora

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \tau$$

     In quanto τ è stabile per intersezione finita e quindi $A \cap B \in \tau_f$.

Dunque per definizione ho che τ_f rappresenta una topologia.

τ_f rende f continua
Il fatto che τ_f renda continua f è ovvio in quanto per costruzione $\forall A \in \tau_f, \exists A' \in \tau | f^{-1}(A) = A'$ quindi per definizione f è continua.

τ_f è la topologia più fine
Supponiamo per assurdo che τ_f non sia la topologia più fine, dunque $\exists \xi | \xi \supset \tau_f$ e che rende f continua.
Dato che questa topologia rende f continua allora per un risultato precedente ho che

$$\forall A \in \xi, f^{-1}(A) \in \tau$$

Ma per come ho definito τ_f segue che $A \in \tau_f$ quindi $\xi \subset \tau_f$ quindi $\xi = \tau_f$ perciò τ_f è la topologia più fine che rende f continua.

C chiuso per $\tau_f \Leftrightarrow f^{-1}(C)$ è un chiuso per τ
Considero un chiuso C per la topologia $\tau_f \Leftrightarrow \mathcal{C}_Y(C) \in \tau_f$ perciò per costruzione

$$f^{-1}\left(\mathcal{C}_Y(C)\right) \in \tau$$

Ma

$$f^{-1}\left(\mathcal{C}_Y(C)\right) = \mathcal{C}_X f^{-1}(C)$$

Dunque per costruzione segue che $f^{-1}(C) \notin \tau$ quindi C è un chiuso per τ_f.

Punto 2
"$g \in C^0 \Rightarrow g \circ f$ continua"
Dato che anche f è una funzione continua allora ho che la composizione è una funzione continua.

"$g \in C^0 \Leftarrow g \circ f$ continua"
Sia $A \in \eta$ dunque dato che $f \circ g$ supponiamo essere continuo allora

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) = (f^{-1} \circ q^{-1})(A) = (g \circ f)^{-1}(A) \in \tau$$

Dato che f è continua in quanto abbiamo preso la topologia quoziente allora per definizione ho che $g^{-1}(A) \in \tau_f$ quindi per definizione g è continua. □

Osservazione 6.0.1. *Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \xi)$ con f non surgettiva allora $\exists y \in Y \setminus f(X) | f^{-1}(\{y\}) \in \tau_f$. Segue che la topologia relativa su $Y \setminus f(X) | f(x) = \phi$ indotta da τ è la topologia discreta*

Definizione 6.0.2. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione (non necessariamente surgettiva) e sia $S \in P(X)$ diciamo che S è saturo rispetto a f se*

$$f^{-1}(f(S)) = S$$

Osservazione 6.0.2. *Una definizione del tutto equivalente è*

$$S = f^{-1}(f(S)) = f^{-1}\left(f\left(\bigcup_{x \in S} \{x\}\right)\right) = \bigcup_{x \in S} f^{-1}(f(\{x\}))$$

Inoltre $f^{-1}(f(x))$ è l'unica fibra che passa per x quindi due fibre disgiunte individuano due insiemi disgiunti e un insieme saturo contiene tutte le fibre dei suoi punti.

Proposizione 6.0.1. *Sia $f : X \to Y$ un applicazione (non necessariamente surgettiva) e sia $S \in P(X)$ il sottoinsieme $f^{-1}(f(S))$ si dice f-saturazione di S e valgono le seguenti affermazioni:*

- $f^{-1}(f(S)) \supset S$.
- $f^{-1}(f(S))$ *è il più piccolo insieme saturo di X contenente S.*

Dimostrazione. Per verificare questa proposizione devo fare due cose:

<u>$f^{-1}(f(S)) \supset S$</u>
$\forall S \in P(X)$ posso dire che

$$S = \bigcup_{x \in S} x \subset \bigcup_{x \in S} f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(S))$$

<u>$f^{-1}(f(S))$ è il più piccolo insieme saturo contenente S</u>
Supponiamo per assurdo che $\exists K \in P(X)$ saturo tale per cui $S \subset K \subset f^{-1}(f(S))$ dunque mappando il tutto e rimappando all'indietro ho che

$$f^{-1}(f(S)) \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(f(S))))$$

Ma dato per ipotesi che K è saturo e che $f^{-1}(f(S))$ è una $f-$saturazione allora ottengo che

$$f^{-1}(f(S)) \subset K \subset f^{-1}(f(S)) \Rightarrow K = f^{-1}(f(S))$$

Quindi $f^{-1}(f(S))$ è il più piccolo insieme saturo contenente S. □

Lemma 6.0.2. *Data una funzione $f : X \to Y$ un'applicazione surgettiva e sia S un sottoinsieme di X f-saturo allora vale che*

- $f(\mathcal{C}_X(S)) = \mathcal{C}_Y f(S)$.
- $\mathcal{C}_X(S)$ *è f-saturo.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che

<u>$f(\mathcal{C}_X(S)) = \mathcal{C}_Y f(S)$</u>
Sia $S \in P(X)$ un insieme f saturo allora dato che per ipotesi che la funzione è surgettiva allora

$$Y = f(X) = f(S \sqcup S^c)$$

Allora $f(S \sqcup S^c) = f(S) \sqcup f(S^c)$ in quanto se suppongo per assurdo che $f(S) \cap f(S^c) \neq \phi$ allora

$$\exists x \in \mathcal{C}_X(S) | f(x) \in f(S)$$

Dunque $f^{-1}(f(S)) \supsetneq S$ ma ciò è impossibile in quanto $f^{-1}(f(S)) = S$ e quindi $f(S) \cap f(S^c) = \phi$ perciò posso concludere che

$$f(\mathcal{C}_X(S)) = Y \setminus f(S) = \mathcal{C}_Y(f(S))$$

<u>$\mathcal{C}_X(S)$ **è f-saturo**</u>
Procedendo a livello insiemistico e considerando quanto dimostrato prima ho che

$$f^{-1}(f(S^c)) = f^{-1}((f(S))^c) = f^{-1}(Y \setminus f(S)) = X \setminus f^{-1}(f(S)) = X \setminus S = S^c$$

Quindi per definizione $\mathcal{C}_X(S)$ è f-saturo. □

Lemma 6.0.3. *Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_f)$ un applicazione surgettiva tra spazi non vuoti, allora:*

1. *$A \in \tau_f \iff \exists S \in \tau, f-$saturo tale per cui $A = f(S)$.*
   Equivalentemente ho come tesi che

$$\tau_f = \mathcal{A} := \{A \in P(Y) | A = f(S), \text{ per qualche } S \in \tau, S \text{ saturo}\}$$

2. *C è un chiuso per $\tau_f \iff \exists D$ chiuso, f-saturo, tale per cui $C = f(D)$.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

<u>Punto 1</u>
Prima dimostro che $\mathcal{A} = \tau_f$ quindi devo dimostrare la doppia inclusione, quindi

<u>$\mathcal{A} \subset \tau_f$</u>
Considero $A \in \mathcal{A}$ quindi per costruzione so che $\exists S \in \tau$, f-saturo, tale per cui $f(S) = A$ ma dato che

$$S = f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(A)$$

Ma sempre per definizione dati che $f^{-1}(A) \in \tau$ allora segue che per definizione di topologia indotta che $A \in \tau_f$.

<u>$\mathcal{A} \supset \tau_f$</u>
Considero un insieme $A \in \tau_f$ quindi $f^{-1}(A) \in \tau$ per definizione di topologia indotta dunque se definisco $S = f^{-1}(A)$ valgono sicuramente le seguenti proprietà:

- $S \in \tau$ per costruzione.
- $f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(f(f^{-1}(A))))$ dato che f è surgettva per ipotesi mi permette di affermare che $f(f^{-1}(A)) = A$.

Dunque $f^{-1}(f(S)) = S$ perciò è saturo e quindi dato che $f(S) = A$ segue dalla definizione che $S \in \mathcal{A}$.

<u>Punto 2</u>
Per quanto visto fino ad ora posso affermare che queste affermazioni sono equivalenti:

- C un chiuso per τ_f.
- $\mathcal{C}_Y(C) \in \tau_f$.
- $\exists S \in \tau | S$ è f-saturo e $f(S) = \mathcal{C}_Y(C)$.

Allora se C è un chiuso per $\tau_f, \exists S \in \tau | S$ è f-saturo e $f(S) = \mathcal{C}_Y(C)$ dunque

$$C = \mathcal{C}_Y f(S) = f\left(\mathcal{C}_X(S)\right)$$

Quindi posso porre $D = \mathcal{C}_X(S)$.

Se $\exists D$ chiuso per τ, f-saturo allora $D^c \in \tau$ e f-saturo

$$f(D^c) = \mathcal{C}_Y f(D) = C_Y(C) \in \tau_f$$

Dunque C è un chiuso. □

Definizione 6.0.3. *Un applicazione $f : (X, \tau) \to (Y, \xi)$ tra spazi topologici è definita identificazione se f è C^0, surgettiva e $\tau_f = \xi$.*

Proposizione 6.0.2. *Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \xi)$ tra spazi topologici un applicazione continua e surgettiva allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è un identificazione.*

1' $\forall A \in P(Y) | f^{-1}(A) \in \tau \Rightarrow A \in \xi$.

2. *$\forall U \in \tau$, f-saturo, $f(U) \in \xi$.*

3. *$\forall V$ chiuso, f-saturo $f(V)$ è un chiuso di ξ.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

$\underline{1 \Rightarrow 1'}$
$\forall A \in P(Y) | f^{-1}(A) \in \tau$ allora per costruzione ho che $A \in \tau_f$ ma dato che $\xi = \tau_f$ allora

$$A \in \tau_f$$

$\underline{1' \Leftarrow 2}$
Sia $U \in \tau$ saturo allora per definizione

$$f^{-1}(f(U)) = U \in \tau$$

Dunque ho che $f(u) \in \xi$.

$\underline{2 \Leftrightarrow 3}$
Sia V chiuso f saturo allora $U = \mathcal{C}_X(V)$ è f-saturo allora

$$f(U) = f(\mathcal{C}_X(V)) = \mathcal{C}_Y f(V) \in \tau$$

Quindi per definizione $f(V)$ è chiuso per ξ.

$\underline{3 \Leftarrow 1}$
$\forall A \in \xi, f^{-1}(A) \in \tau$ essendo f continua per ipotesi, quindi per costruzione ho che $A \in \tau_f$.

$\forall A \in \tau_f$ ho per definizione che $S := f^{-1}(A) \in \tau$ ma questo insieme è saturo

$$f^{-1}(f(S)) = f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(A)\right)\right) = f^{-1}(A) = S$$

Quindi $A = f(S) \in \xi$ per ipotesi. □

Controesempio.

esistono identificazioni che non sono né aperte né chiuso come ad esempio se considero $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ allora

$$f \colon (\mathbb{R}, \tau_\epsilon) \to \{\{0\}, \{1\}\}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & x \in [0,1)^c \end{cases}$$

Dunque se $A \in \tau_\epsilon . A \neq \phi$ e rappresenta una fibra allora $A = \mathbb{R}$ perché se considero $x \in [0,2) \Rightarrow A \supset [0,2)$ quindi dato che $A \in \tau_\epsilon \Rightarrow A = (-\epsilon, \epsilon)$ quindi anche $[0,2)^c$.

Lemma 6.0.4. *Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_f)$ una identificazione allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *f è aperte $\Longleftrightarrow \forall A \in \tau$ la f saturazione è un aperto.*

2. *f è chiusa $\Longleftrightarrow \forall C$ chiuso in τ la f saturazione è un chiuso.*

6.1 Spazio topologico quoziente

Definizione 6.1.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico, $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X e sia*

$$\begin{aligned} \pi \colon X &\to X/\mathcal{R} \\ x &\mapsto \pi(x) = [x]_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

La proiezione naturale e sia $\tau_{X/\mathcal{R}}$ la topologia su $X/\mathcal{R}$ indotta da π definita come topologia quoziente di τ modulo $\mathcal{R}$.
La coppia $(X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}})$ si definisce spazio topologico quoziente di (X, τ) modulo $\mathcal{R}$.

Osservazione 6.1.1. *Consideriamo $\pi : (X, \tau) \to (X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}})$ allora posso dedurre che:*

1. *$\tau_{X/\mathcal{R}}$ è la topologia di $X/\mathcal{R}$ più fine tra tutte quelle che rende $\pi \in C^0$.*
2. *π è un'identificazione: continua, surgettiva e $\tau_{X/\mathcal{R}}$ è la topologia quoziente se $X/\mathcal{R}$ rispetto a π è surgettiva.*
3. *Posso definire*
$$\pi^{-1}(\pi(x)) := \{y \in X | \pi(y) = \pi(x)\} = [x]_{\mathcal{R}}$$
Sia $A \subset X$ dunque posso osservare che
$$\pi\text{-saturo} \iff \bigcup_{x \in A} [x]_{\mathcal{R}} = A \iff \forall x \in A, [x]_{\mathcal{R}} \subset A$$
Dunque le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   - $A \in \tau_{X/\mathcal{R}}$
   - $\exists U \in \tau, \pi$ *saturo* $A = \pi(U)$
4. *$\pi(X, \tau) \to (X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}})$ è aperto $\iff \forall A \in \tau, \pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} [x]_{\mathcal{R}} \in \tau$.*
5. *Vale la **proprietà universale del quoziente topologico:***
$$\begin{tikzcd} (X, \tau) \arrow[r, "g \circ \pi"] \arrow[d, "\pi"] & (Z, \eta) \\ (X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}}) \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$
g è continua $\Leftrightarrow g \circ f$ è continua.

Lemma 6.1.1. *Sia $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ un applicazione continua e sia*

- *$\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X.*
- *$\mathcal{R}'$ una relazione di equivalenza su X'.*

Allora $f([x]_{\mathcal{R}}) \subset [f(x)]_{\mathcal{R}}, \forall x \in X$ (equivalentemente $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}'f(y)$) $\iff \exists! g$ continua che rende commutativo il diagramma.

$$\begin{tikzcd} (X, \tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & (X', \tau') \arrow[d, "\pi'"] \\ (X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}}) \arrow[r, "g"] & (X'/\mathcal{R}', \tau_{X'/\mathcal{R}'}) \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

$f([x]_{\mathcal{R}}) \subset [f(x)]_{\mathcal{R}}, \forall x \in X \Rightarrow \exists! g$ continua che rende commutativo il diagramma

Prima di tutto definiamo

$$\begin{aligned} g \colon X/\mathcal{R} &\to X'/\mathcal{R}' \\ \alpha &\mapsto g(\alpha) = (\pi' \circ f)(x_\alpha) \end{aligned}$$

Questa funzione è ben definita in quanto sia $x, y \in X | x\mathcal{R}y$ dunque ho per ipotesi che

$$f(x)\mathcal{R}'f(y)$$

Quindi

$$\pi'(f(x)) = \pi'(f(y))$$

Adesso dato che è ben definita noto che

$$g \circ \pi = \pi' \circ f$$

Dunque dato che π', π sono continue per costruzione e f lo è per ipotesi allora segue per un teorema precedente che g è continua.

<u>$f([x]_{\mathcal{R}}) \subset [f(x)]_{\mathcal{R}}, \forall x \in X \Leftarrow \exists! g$ continua che rende commutativo il diagramma</u>
Se assumiamo che $\exists! g$ continua che rende commutativo il grafico allora posso dire che

$$(g \circ \pi)(x) = (\pi' \circ f)(x)$$

Dunque presi in considerazione $x, y \in X | x\mathcal{R}y$ allora posto $\alpha = \pi(x) = \pi(y)$ ho che

$$g(\alpha) = \pi'(f(x)) = \pi'(f(y))$$

Dunque questa è verificata se e solo se $f(x)\mathcal{R}'f(y)$. □

Teorema 6.1.1. *Sia $f : X \to X'$ un'applicazione continua e surgettiva dunque possiamo definire una relazione di equivalenza $\mathcal{R}_f$ indotta da f su X, ponendo*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Allora

1. *$\exists! g : X/\mathcal{R}_f \to X'$ tale che g è biettiva e continua.*
2. *g è un omomorfismo $\Longleftrightarrow$ f è un identificazione.*

Dimostrazione. **(1)**

<u>Esistenza, unicità e continuità</u>
Se induco una relazione di equivalenza $\mathcal{R}'$ su X' tale per cui $f(x)\mathcal{R}'f(y) \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$ allora dato che f è continua allora per il lemma precedente ho immediatamente che $\exists! g$ continua che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ X/\mathcal{R}_f \arrow[r, "g"] & X'/\mathcal{R}' \end{tikzcd}$$

A questo punto noto che $\pi' = Id$ dunque $(X', \tau') = (X'/\mathcal{R}', \tau'/\mathcal{R}')$ perciò il diagramma precedente è equivalente a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & X' \\ X/\mathcal{R}_f \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Dunque la mia g esiste, è unica ed è continua.

<u>Bigettiva</u>
Sempre per il lemma precedente, essendo il mio grafico commutativo allora posso definire

$$f(x) = (g \circ \pi)(x)$$

Dunque dato che f è surgettiva per ipotesi e π lo è per costruzione allora g deve essere surgettiva.
A questo punto suppongo per assurdo che g non sia iniettiva dunque $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in X/\mathcal{R}, \alpha_1 \neq \alpha_2 | g(\alpha_1) = g(\alpha_2)$ allora $\forall x \in [\alpha_1]$, $\forall y \in [\alpha_2]$ ho che

$$f(x_1) = g(\pi(x_1)) = g(\pi(x_2)) = f(x_2)$$

Ma ciò rappresenta un assurdo in quanto per costruzione dato che le due classi sono diverse ho che $f(x_1) \neq f(x_2)$ quindi g è iniettiva, perciò g è biettiva. □

Dimostrazione. **(2)**

"f identificazione $\Rightarrow$ g omeomorfismo"
Dato che il diagramma è commutativo allora

$$\pi = (g^{-1} \circ f)$$

Dunque

$$\pi^{-1} = \left(g^{-1} \circ f\right)^{-1} = \left(f^{-1} \circ g\right)$$

Quindi sia $A \in \tau_{X/\mathcal{R}}$ allora essendo π continua allora $\pi^{-1}(A) \in \tau$. Per come ho costruito $\mathcal{R}$ allora posso affermare che $\pi^{-1}(A)$ è f-saturo quindi per definizione ho che

$$f^{-1}\left(f\left(\pi^{-1}(A)\right)\right) = \pi^{-1}(A)$$

Dato che f è un identificazione allora $\tau' = \tau_f$ quindi dato che $\pi^{-1}(A) \in \tau$ allora per definizione ho che $f\left(\pi^{-1}(A)\right) \in \tau_f$ ma per la commutatività del grafico ho che

$$g(A) = \left(f \circ \pi^{-1}\right)(A)$$

Quindi per definizione g è aperta e quindi per un risultato precedente ho che g è un omeomorfismo.

"f identificazione $\Leftarrow$ g omeomorfismo"

$\tau_f \supset \tau'$
Dato che f è per ipotesi continua allora

$$\forall A \in \tau', f^{-1}(A) \in \tau$$

Quindi per costruzione $A \in \tau_f$.
$\tau_f \subset \tau'$
$\forall A \in \tau_f$ ho per costruzione che $f^{-1}(A) \in \tau$, inoltre $f^{-1}(A)$ è f-saturo ma per come ho costruito $\mathcal{R}$ è anche π saturo quindi essendo π una funzione aperta allora

$$\pi\left(f^{-1}(A)\right) \in \tau_{X/\mathcal{R}}$$

A questo punto essendo g un omeomorfismo allora g è aperta quindi

$$\left(g \circ \pi \circ f^{-1}\right)(A) \in \tau'$$

Ma dato che il diagramma è commutativo ho che $g \circ \pi = f$ quindi

$$\left(g \circ \pi \circ f^{-1}\right)(A) = \left(f \circ f^{-1}\right)(A) = A$$

Quindi $A \in \tau'$ e quindi $\tau_f \subset \tau'$. □

Corollario 6.1.1. *Se $f : (X, \tau) \to (X', \tau_f)$ è un'identificazione allora $X/\mathcal{R}_f \simeq X'$.*

Corollario 6.1.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X. Sia $\pi : (X, \tau) \to (X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}})$ la proiezione al quoziente topologico. Sia inoltre (X', τ') e supponiamo che esista un'applicazione continua $f : X \to X' | f^{-1}(f(x)) = [x]_{\mathcal{R}}, \forall x \in X$, allora f è un'identificazione e $X/\mathcal{R} \simeq X'$.*
Questo è vero in quanto se faccio vale l'equazione precedente allora $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}$ e quindi $X/\mathcal{R} = X/\mathcal{R}_f \simeq X'$.

Esercizio. *Sia* $(X, \tau) = ([0,1], \tau_\epsilon)$ *e sia* $\mathcal{R}$ *la relazione di equivalenza su* $[0,1]$ *allora*

$$\forall x, y \in [0,1], x\mathcal{R}y \iff \begin{cases} x = y \\ x, y \in \{0,1\} \end{cases}$$

Analogamente posso scrivere che

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{a + \mathbb{Z} | a \in [0,1)\}$$

Dunque

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{S}^n$$

Dimostrazione. Prima di tutto costruisco la funzione di parametrizzazione dell'iper-sfera

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}^n, \tau_\epsilon^n) &\to \mathbb{S}^n \\ (t_1, \cdots, t_n) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)\cdots\cos(2\pi t_{n-1})\cos(2\pi t_n) \\ \cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)\cdots\cos(2\pi t_{n-1})\sin(2\pi t_n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per definizione di parametrizzazione ho immediatamente che questa funzione è suriettiva ma non iniettiva perché se considero $(1, 0, \cdots, 0), (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $f((1, 0, \cdots, 0)) = f((0, \cdots, 0)) = (1, 0, \cdots, 0)$, perciò inducendo la relazione di equivalenza so per un teorema che $\exists! g$ biettiva che rende commutativo il grafico:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^n, \tau_\epsilon^n) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{S}^n \\ \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Data la parametrizzazione osservo che la relazione di equivalenza può essere riscritta in maniera del tutto equivalente come

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

Dunque è ovvio che un insieme π-saturo è anche f-saturo e che la g è f con la restrizione del dominio. Per dimostrare che l'insieme quoziente è omeomorfo a $\mathbb{S}^n$ mi rimane da provare che g è una funzione aperta.

Sia $B \in \tau_\epsilon^n/\mathcal{R}$ dunque è ovvio che $g(B) \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^n)$. A questo punto l'idea è quella di dimostrare che $\exists S$ saturo in $\tau_\epsilon^n | f(S) = g(B)$ perché per una proposizione precedente ho $g(B) \in \tau_\epsilon^{n+1}\big|_{\mathbb{S}^n}$.

Sia $B \in \tau_\epsilon^n/\mathcal{R}$ dunque essendo π una funzione continua ho che $\exists S \in \tau | S = \pi^{-1}(B)$ ma come abbiamo visto prima S è f e π saturo dunque

$$S = \pi^{-1}(B) = (f^{-1} \circ g)(B) \in \tau_\epsilon^n$$

Dunque per la proposizione ho che $f(S) \in \tau_\epsilon^{n+1}\big|_{\mathbb{S}^n}$ ma per la commutatività del grafico ho che

$$g(B) = f(S) \in \tau_\epsilon^{n+1}\big|_{\mathbb{S}^n}$$

Perciò g è un omomorfismo e la mia tesi è dimostrata. $\square$

Capitolo 7

Proprietà topologiche

7.1 Spazi topologici di Housdorff

Definizione 7.1.1. *(**T2**)*
Uno spazio topologico (X, τ) è detto di Housforff (o T2) se

$$\forall x, y \in X, \exists U \in \mathcal{N}_\tau(x), \exists V \in \mathcal{N}_\tau(y) | U \cap V = \phi$$

Esempio 7.1.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico:*

1. *Se τ è metrizzabile allora (X, τ) è T2.*

1'. *Se $\tau = \tau_d$ allora è T2.*

2. *Se $|X| > 2$ e $\tau = \tau_b$ allora questo spazio topologico non è T2.*

3. *Se X è insieme infinito e $\tau = \tau_{cof} = \{\phi\} \cup \{\mathcal{C}_X(F) \in P(X) | F$ è finito$\}$ in questo caso $\tau_{cof} \neq T2$. $\forall A, B \in \tau \setminus \{\phi\}, A \cap B = \phi$ allora questa è una condizione sufficiente per non essere T2. Definisco inoltre $A = \mathcal{C}_X(F), B = \mathcal{C}_X(G)$ allora*

$$A \cap B = \mathcal{C}_X(F) \cap \mathcal{C}_X(G) = \mathcal{C}_X(F \cap G) \neq \phi$$

Questi insiemi sono troppo grandi per non avere un intersezione.

Osservazione 7.1.1. *La condizione di Hausdorff è una proprietà topologica: $\exists f : X \to Y$ che permette un omeomorfismo tra spazi topologici allora X è T2 $\Leftrightarrow Y$ è T2, quindi se considero $U, V \in \tau$ allora*

$$f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = f(\phi) = \phi$$

Proposizione 7.1.1. *Dato tutto quello appena visto posso affermare che:*

1. *Sia X uno spazio topologico T2 e sia $S \in P(X), S \neq \phi$, dotiamo S della topologia relativa indotta da τ allora $(S, \tau|_S)$ è T2.*

2. *Sia $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici e $(X_1 \times X_2, \tau)$ il loro prodotto topologico allora*

$$(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \text{ sono T2} \Longleftrightarrow (X_1 \times X_2, \tau) \text{ sono T2}$$

Dimostrazione. Procedendo con ordine dimostro che
<u>Punto 1</u>
Siano $x, y \in S, x \neq y$ allora dato che vivono in X ed essendo per ipotesi T2 so che $\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x), \exists V \in \mathcal{N}_\tau(y) | U \cap V = \phi$. Da questo viene subito che $S \cap U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e $S \cap V \in \mathcal{N}_\tau(y)$ dunque segue che

$$(U \cap S) \cap (V \cap S) = (U \cap V) \cap S = \phi \cap S = \phi$$

Quindi S è T2.

Punto 2

"$(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ sono T2 $\Rightarrow (X_1 \times X_2, \tau)$ sono T2"

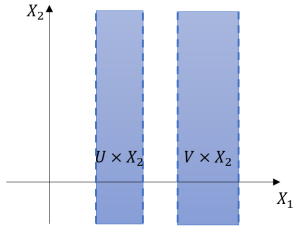
Supponiamo che $\exists (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2 | (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \neq y_1 \vee x_2 \neq y_2$.

Supponiamo che $x_1 \neq y_1$ (nel caso fosse $x_2 \neq y_2$ la dimostrazione sarebbe del tutto analoga) allora essendo per ipotesi X_1 T2 so che per definizione $\exists U \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1), \exists V \in \mathcal{N}_{\tau_1}(y_1) | U \cap V = \phi$.

A questo punto considero la mappa di proiezione canonica, dunque

$$\begin{cases} P_1^{-1}(U) = (U \times X_2) \\ P_1^{-1}(V) = (V \times X_2) \end{cases} \Rightarrow P_1^{-1}(U \cap V) = ((U \cap V) \times X_2) = (\phi, X_2) = \phi$$

Dunque $X_1 \times X_2$ è T2.



"$(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ sono T2 $\Leftarrow (X_1 \times X_2, \tau)$ sono T2"

Sia $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ dunque è ovvio che

$$(\{x_1\} \times X_2), (X_1 \times \{x_2\}) \subset X_1 \times X_2$$

Dunque per quanto dimostrato al punto (1) so che tali insiemi sono T2 e inoltre per quanto dimostrato nella proposizione (5.2.3) ho che tali insiemi sono omeomorfi rispettivamente a X_2, X_1 dunque la mia tesi è dimostrata in quanto per l'osservazione (7.1.1) ho che tali insiemi sono T2. □

Definizione 7.1.2. ***(T1)***
Uno spazio topologico si definisce T1 se i suoi singoletti sono chiusi.

Proposizione 7.1.2. *Uno spazio topologico T2 è anche T1.*

Dimostrazione. Sia (X, τ) uno spazio topologico T2, sia $x \in X$ e sia $y \in \mathcal{C}_X(\{x\})$ dunque essendo $x \neq y$ per costruzione segue dalla definizione di T2 che $\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x), \exists V \in \mathcal{N}_\tau(y) | U \cap V = \phi$ ma ciò è vero se e solo se

$$\exists A \in \tau | y \in A \subset V \cap \mathcal{C}_X(U) \subset \mathcal{C}_X(\{x\})$$

Dunque in questa maniera riesco a costruire $\forall y \in X \setminus \{x\}$ degli intorni aperti che non contengono $\{x\}$ quindi segue che $\mathcal{C}_X(\{x\}) \in \tau$ quindi $\{x\}$ è un chiuso per la topologia.

□

Osservazione 7.1.2. *Se una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in uno spazio topologico T2 converge allora converge ad un unico punto.*

Osservazione 7.1.3. *Dato uno spazio T1 che soddisfa il primo assioma di numerabilità, una successione*

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

E sia $x \in X$ un punto di accumulazione di $\{x_n\}$ allora $\{x_n\}$ possiede una sotto-successione convergente a x.

Dimostrazione. Se X soddisfa il primo assioma di numerabilità allora per definizione ho che $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}(x)$ (sistema fondamentale di intorni) numerabile, dunque in particolare modo esiste tale un sistema fondamentale di intorni numerabile per il punto di accumulazione.
Detto ciò definisco una successione di insiemi

$$U_n = \bigcap_{i=i}^{n} U_i,\, U_i \in \mathcal{V}(x)$$

Dunque è ovvio che $U_n \supset U_{n+1}$ perciò dato che per ipotesi quel punto è di accumulazione ho per definizione che

$$\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x), U \setminus \{x\} \cap \{x_n\} \neq \phi$$

Dunque definisco una sotto successione in questo modo $\forall k \in \mathbb{N}$ ho che

$$x_{n_k} = (U_k \setminus \{x\}) \cap \big(\{x_n\} \setminus \{x_{n_j}\}_{n_j < n_k}\big)$$

Quindi per costruzione ottengo che

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N} | \{x_{n_j}\}_{n_j > n_k} \subset U_k$$

Ma essendo tutti intorni di x per costruzione allora per definizione la sotto-successione converge a x $\square$

Proposizione 7.1.3. *Data sia X uno spazio topologico (possiamo supporre (X, τ_{cof})) solamente T1 allora ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita in esso converge ad ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Sia (X, τ_{cof}) uno spazio topologico con topologia cofinita e data una successione della forma

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

L'idea per dimostrare che questa successione converge $\forall x \in X$ devo far vedere che per ognuno di essi posso sempre costruire un insieme nel quale da un certo n in poi la mia successione è contenuta.
Sia $A \in \tau_{cof} | A \in \mathcal{N}_{\tau_{cof}}(x)$ allora per costruzione della topologia ho che $\mathcal{C}_X(A)$ è finito e che ci possono essere due casi:

- Se $\nexists n \in \mathbb{N} | x_n \in \mathcal{C}_X(A)$ allora è ovvio che $\{x_n\} \subset A$ e per definizione ho che la successione è convergente a x.
- Se $\mathcal{C}_X(A) \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \phi$ allora posso definire un nuovo insieme degli indici

  $$N := \{i \in \mathbb{N} | x_i \in \mathcal{C}_X(A)\} \subset \mathbb{N}$$

  Dunque possedendo un ordinamento ed essendo chiuso posso dire che $\exists m = \max N$ quindi

  $$\forall n > m, \{x_n\}_{n>m} \subset A$$

  Se per assurdo suppongo che

  $$\exists n_0 > m | x_{n_0} \notin A \Rightarrow x_{n_0} \in \mathcal{C}_X(A)$$

  Quindi $i_0 \in N$ ma dato che $i_0 > m$ ciò è impossibile e quindi la mia tesi è dimostrata.

$\square$

7.2 Insiemi compatti

Definizione 7.2.1 (Insieme compatto). *Uno spazio topologico (X, τ) si dice compatto se da ogni ricoprimento aperto di (X, τ) si può estrarre un sotto-ricoprimento finito, dunque*

$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau | \bigcup_{i \in I} A_I = X \Rightarrow \exists J \in P(I) \text{ finito} | \bigcup_{\in J} A_j = X,$$

Proposizione 7.2.1. *Da questa definizione posso vedere che i seguenti spazi topologici sono compatti*

1. (X, τ_B).
2. (X, τ_D) *con* X *finito.*
3. (X, τ_{cof}).

I seguenti spazi topologici non sono compatti

4. *Un* (X, τ_D) *con* X *infinito.*
5. $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$.

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

Punto 1
Se considero $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau_B$ allora $\exists i_0 \in I | A_{i_0} = X$ quindi $\{A_{i_0}\}$ rappresenta un sotto ricoprimento già di per se.

Punto 2
L'unione di elementi di una topologia rappresenta già di per se un ricoprimento finito di X quindi per definizione X è compatto.

Punto 3
Sia $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau_{cof}$ una sottofamiglia che ricopre X quindi sicuramente $A_i \neq \phi \Rightarrow \mathcal{C}_X(A_i) = F$ che rappresenta un insieme finito $F = \{x_1, \cdots, x_n\}$.
A questo punto posso considerare $X \setminus A_i = \{x_1, \cdots, x_n\}, n$ finito allora $\exists i_j \in I | x_j \in A_{i_j}, j = 1, \cdots, n$ dunque la famiglia finita composta da $\{A_i\} \cup \{A_{i_j}\}_{j=1}^n$ rappresenta un sotto-ricoprimento finito.

Punto 4
Suppongo che X non sia finito altrimenti sarebbe un compatto per il punto (2).
Dato che per definizione di insieme compatto posso scegliere un ricoprimento arbitrario di X contenuto nella topologia allora considero il ricoprimento di tutti i singoletti $\{x\}_{x \in X} \subset \tau_D$, perciò è ovvio che tale ricoprimento non è finito ed inoltre se tolgo anche un solo elemento di quella famiglia allora non posso più ricoprire l'insieme stesso.

Punto 5
Supponiamo per assurdo che lo sia quindi se prendo un ricoprimento $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ allora potrei prendere un sotto-ricoprimento finito ma ciò non è possibile in quanto dovrei considerare un intorno di infinito e quindi considerare sempre un numero non finito di elementi, dunque tale insieme non è compatto. □

Definizione 7.2.2. *Dato uno spazio topologico (X, τ) e sia $S \in P(X) \setminus \{\phi\}$ si dice che S è un sottoinsieme compatto di (X, τ) se lo è il corrispondente sottospazio topologico (S, τ_S).*

Osservazione 7.2.1. *S è un compatto in $(X,\tau) \Leftrightarrow \forall\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ ricoprimento di S in X si può estrarre una sotto-famiglia finita tale per cui $\bigcup_{j\in J} A_j \supset S$.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

"S è compatto $\Rightarrow \forall\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ ricoprimento di S, $\exists J \in P(I)$ finito$|\bigcup_{j\in J} A_j \supset S$"

Sia $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ una famiglia di aperti tali per cui $S \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ allora per definizione di topologia relativa ho $\forall i \in I$, $A_i' = S \cap A_i \in \tau_S$ perciò

$$S \subset \bigcup_{i\in I}(A_i \cap S) \subset S$$

Dunque quello rappresenta un ricoprimento di S per τ_S dunque, dato che per ipotesi abbiamo che S è compatto, posso estrarre un sotto ricoprimento finito

$$S = \bigcup_{j\in J}(A_j \cap S) = \left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cap S \subset \bigcup_{j\in J} A_j$$

"S è un compatto in $(X,\tau) \Leftarrow \forall\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ ricoprimento di S in X, $\exists J \in P(I)$ finito$|\bigcup_{j\in J} A_j \supset S$"

Preso $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ ricoprimento di S in X so che $\exists J \in P(I)$ finito$|\bigcup_{j\in J} A_j \supset S$, quindi ho che

$$S \cap \left(\bigcup_{i\in J}(A_i \cap S)\right) = S \Leftrightarrow \bigcup_{i\in J}(A_i \cap S) = S$$

Ma $\{A_i \cap S\}_{i\in J}$ per definizione rappresenta un ricoprimento di aperti finiti in τ_S quindi S è un insieme compatto per definizione. □

Teorema 7.2.1. ***(Heine-Borel)***
Ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a,b]$ della retta euclidea $\mathbb{R}$ è un insieme compatto.

Dimostrazione. Preso in considerazione un ricoprimento $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau_\epsilon | \bigcup_{i\in I} A_i \supset [a,b]$, posso definire un nuovo insieme

$$Y := \left\{ x \in [a,b] \middle| [a,x] \subset \bigcup_{j\in J} A_j \quad J \in P(I), J \text{ finito} \right\}$$

Dunque il mio fine è dimostrare $b \in Y$ in questo modo ho per l'osservazione precedente che $[a,b]$ è compatto.

$\underline{Y \neq \phi}$

Si può immediatamente osservare che $a \in Y$ in quanto dato che

$$[a,a] = \{a\} \subset \bigcup_{j\in J} A_j \Longrightarrow a \in \bigcup_{j\in J} A_j$$

Dunque

$$\exists i_0 \in I | a \in A_{i_0} \Rightarrow \{a\} \subset A_{i_0}$$

$\underline{b \in Y}$

Dato che $Y \neq \phi$ allora

$$\exists z = \sup Y \in [a,b]$$

Quindi $\exists k \in I | z \in A_k$ essendo un insieme aperto ed appartenendo alla topologia euclidea so che

$$\exists \epsilon > 0 | [z-\epsilon, z+\epsilon] \subset A_k$$

A questo punto sfruttando la definizione di estremo superiore se che

$$\forall \epsilon' > 0, \exists x \in Y | z - \epsilon' < x < z$$

Dunque posto $\epsilon' = \epsilon$ allora $x \in [z-\epsilon, z+\epsilon]$ ma a questo punto dato che $x \in Y$ sfruttando la definizione segue che

$$[a, z+\epsilon] = [a, x] \cup [z-\epsilon, z+\epsilon] \subset \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \cup A_k$$

Dunque è ovvio che la famiglia $\{A_j\}_{j \in J} \cup \{A_k\}$ è finita quindi per costruzione segue che $[a, z+\epsilon]$ è un compatto e che $z+\epsilon \in Y$ ma questo è assurdo in quanto $\sup Y = z < z+\epsilon \in Y$ quindi non può che essere che $z = b$ altrimenti $\exists y \in Y | y \in [z, z+\epsilon] \Rightarrow y > z, y \in [a, b]$. □

Osservazione 7.2.2. *Esistono spazi topologici compatti che possiedono sottoinsiemi non compatti come* $(X, \tau) = ([0,1], \tau)$ *che possiede come sottospazio* $[0,1)$ *che non è un compatto in quanto se considero un ricoprimento della forma*

$$\mathcal{A} = \left\{ \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Non riuscirò mai a trovare un sotto-ricoprimento finito per tale insieme.

Proposizione 7.2.2. *Valgono le seguenti affermazioni*

1. *Un sottoinsieme chiuso in uno spazio topologico compatto è un compatto.*
2. *Un sottoinsieme compatto in uno spazio topologico T2 è chiuso.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

<u>Punto 1</u>
Considero (X, τ) uno spazio topologico compatto e $K \in P(X)$ chiuso. Considero $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau | \bigcup_{i \in I} A_i \supset K$. Poiché per costruzione K è un chiuso significa che $\mathcal{C}_X(K) \in \tau$, quindi è ragionevole affermare che $\mathcal{A} := \{A_i\}_{i \in I} \cup \mathcal{C}_X(K) \subset \tau$ rappresenti un ricoprimento per X ma essendo per ipotesi un insieme compatto posso estrarre un sotto-ricoprimento finito

$$\mathcal{A}' := \{A_{i_1}, \cdots, A_{i_n}, X \setminus K\} \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \supset X \supset K$$

Dunque $\mathcal{A}' \setminus (X \setminus K)$ rappresenta un ricoprimento finito di K, quindi K è un compatto.

<u>Punto 2</u>
Sia (X, τ) uno spazio topologico T2 e $K \in P(X)$ compatto.
Sia $p \in X \setminus K$ allora dato che X è T2 per ipotesi segue che $\forall x \in K$

$$\exists U_x \in \mathcal{N}_\tau(p), \exists V_x \in \mathcal{N}_\tau(x) | U_x \cap V_x = \phi$$

Dunque per definizione di intorno so che

$$\exists A_x \in \tau | p \in A_x \subset U_x \quad \exists B_x \in \tau | x \in B_x \subset V_x \Rightarrow A_x \cap B_x = \phi$$

Dunque posso dire che

$$K = \bigcup_{x \in K} \{x\} \subset \bigcup_{x \in K} B_x$$

Dunque dato che $\{B_x\}$ rappresenta un ricoprimento di K allora per l'osservazione 7.2.1 ho che posso estrarre una sottofamiglia finita che ricopre K che indicizzo mediante l'insieme degli indici J dunque ho che

$$K \subset \bigcup_{j \in J} B_{x_j} := B$$

Inoltre per quanto visto prima ad ogni B_x corrisponde un A_x dunque pongo $A = \bigcap_{j \in J} A_{x_j} \in \tau$ in quanto intersezione finita di insiemi aperti.

A questo punto se dimostro che $B \cap A = \phi$ allora la mia tesi è dimostrata in quanto $\forall p \in \mathcal{C}_X(K), \exists A | A \cap K = \phi \Rightarrow A \subset \mathcal{C}_X(K)$ e quindi per definizione questo insieme è aperto, dunque K è chiuso.

$$B \cap A = \left(\bigcup_{j \in J} B_{x_j} \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} A_{x_j} \right) = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{j \in J} (B_{x_j} \cap A_{x_j}) \right) = \phi$$

Dunque la mia tesi è dimostrata. □

Osservazione 7.2.3. *Se siamo in uno spazio topologico compatto ma non $T2$ per esempio $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ allora dato un sottoinsieme compatto esso non è anche chiuso infatti $[0,1] \subset \mathbb{R}$ è compatto ma non è chiuso perché non ha cardinalità finita.*

Corollario 7.2.1. *Sia $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ allora un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ è compatto $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Considerando $S \subset \mathbb{R}$ allora devo dimostrare che:

"S compatto $\Rightarrow S$ chiuso e limitato"
Come precedentemente ho visto $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ è uno spazio T2 quindi S per la proposizione precedente è chiuso, inoltre essendo uno spazio compatto segue che è anche limitato in quanto se non lo fosse, considerato un suo ricoprimento non riuscirei ad estrarre un sotto-ricoprimento finito.

"S compatto $\Leftarrow S$ chiuso e limitato"
Supponiamo che S sia un insieme chiuso e limitato, quindi $\exists R > 0 | S \subset [-R, R]$ dunque è banale affermare che $S \cap [-R, R] = S$ è un chiuso per la topologia $\tau_\epsilon|_{[-R,R]}$.
Dato che $[-R, R]$ è un compatto per la topologia euclidea segue per la proposizione precedente che essendo S un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto allora S è compatto di $\tau_\epsilon|_{[-R,R]}$ che è equivalente a dire che lo spazio topologico $(S, \left(\tau_\epsilon|_{[-R,R]}\right)|_S)$ ma la topologia relativa della relativa è uguale alla relativa della topologia, quindi

$$\left(\tau_\epsilon|_{[-R,R]}\right)|_S = \tau_\epsilon|_S$$

Quindi S è un insieme compatto. □

Proposizione 7.2.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto, (Y, ξ) uno spazio topologico e sia $f : (X, \tau) \to (Y, \xi)$ una funzione continua allora $f(X)$ è un insieme compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}_{i \in I} \subset \xi | \bigcup_{i \in I} A_i \supset f(X)$. Poiché la funzione è continua allora so che $\forall i \in I, f^{-1}(A_i) \in \tau$ quindi è logico affermare che $\forall i \in I, f^{-1}(A_i) \subset X$ quindi

$$X \supset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \supset f^{-1}(f(X)) \supset X$$

Quindi segue che

$$X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

Dato che X è un insieme compatto per ipotesi so che $\exists J \in P(I)$ finito $| \bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j) = X$ allora

$$f(X) = f\left(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j) \right) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(A_j)) \subset \bigcup_{j \in J} A_j$$

Quindi $f(X)$ è un insieme compatto. □

Corollario 7.2.2. *(Weierstrass)*

Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto e sia $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ una funzione continua allora f ammette sempre un massimo e un minimo, quindi

$$\exists x_{min}, x_{max} \in X | f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}), \forall x \in X$$

Dimostrazione. Per il corollario precedente se X è un insieme compatto allora $f(X)$ è un insieme compatto e quindi è un chiuso e limitato, dunque per definizione di chiuso $\sup(f(X)), \inf(f(x)) \in f(X)$. Sfruttando la definizione di continuità so che

$$\exists x_{max}, x_{min} \in X | f(x_{max}) = \sup(f(X)), f(x_{min}) = \inf(f(X))$$

Quindi la mia tesi è dimostrata. □

7.2.1 Tychonoff

Teorema 7.2.2. *(Tychonoff)*
Dati due spazi topologici X_1, X_2 allora $X_1 \times X_2$ è un compatto $\Leftrightarrow X_1, X_2$ sono compatti.

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che

$X_1 \times X_2$ è compatto $\Rightarrow X_1, X_2$ sono compatti
Se prendo in considerazione le proiezioni canoniche π_1, π_2 allora, essendo continue, per la proposizione 7.2.3 ho che le loro immagini sono dei compatti e quindi X_1, X_2 sono dei compatti.

$X_1 \times X_2$ è compatto $\Leftarrow X_1, X_2$ sono compatti
Sia $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ un ricoprimento di $X_1 \times X_2$ allora vale che

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{i \in I} U_i$$

A questo punto è abbastanza ovvio che $\forall x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$

$$\{x_1\} \times X_2,\ X_1 \times \{x_2\} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Avendo dimostrato che $\{x_1\} \times X_2 \simeq X_2$, $X_1 \times \{x_2\} \simeq X_1$ allora essendo X_1, X_2 compatti per ipotesi allora $\{x_1\} \times X_2$, $X_1 \times \{x_2\}$ sono compatti perciò per la l'osservazione 7.2.1 ho che

$$\exists \mathcal{U}_1 \subset \{U_i\}_{i \in I}, |\mathcal{U}_1| < +\infty | \{x_1\} \times X_2 \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}_1} U$$
$$\exists \mathcal{U}_2 \subset \{U_i\}_{i \in I}, |\mathcal{U}_2| < +\infty | X_1 \times \{x_2\} \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}_2} U$$

Dunque

$$(\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\}) \subset \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}_1} U \right) \cup \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}_2} U \right) \subset X_1 \times X_2$$

Dunque posto $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ (che continua ad essere finito) allora ho che

$$(\{x_1\} \cup X_1) \times (X_2 \cup \{x_2\}) = X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subset X_1 \times X_2$$

Allora

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

Quindi data l'arbitrarietà di $\{U_i\}_{i \in I}$ ho per definizione che $X_1 \times X_2$ è un compatto e quindi al mia tesi è dimostrata. □

Corollario 7.2.3. *Un sottoinsieme non vuoto di $(\mathbb{R}^n, \tau_\epsilon^n)$ è compatto se e solo se chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Considerando $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\phi\}$ allora devo dimostrare che:

"S compatto $\Rightarrow S$ chiuso e limitato"
Assumiamo che S sia compatto allora ho già dimostrato essere chiuso in quanto $(\mathbb{R}^n, \tau_\epsilon^n)$ è T2 ed è limitato in quanto se per assurdo non lo fosse significherebbe che da una famiglia che costituisce un ricoprimento come $\{B(0,r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ riuscirei ad estrarre un sotto-ricoprimento finito ma ciò è impossibile e quindi S è limitato.

"S compatto $\Leftarrow S$ chiuso e limitato"
Assumiamo S essere chiuso e limitato allora se è limitato so che $\exists R \in \mathbb{R} | S \subset [-R, R]^n$ il quale so essere uno spazio compatto. quindi essendo S chiuso per costruzione posso affermare che $S = S \cap [-R, R]^n$ è un chiuso per la topologia $\tau_\epsilon^n|_{[-R,R]^n}$ dunque per la proposizione precedente so che S è un insieme compatto per $\left(\tau_\epsilon^n|_{[-R,R]^n}\right)|_S$ ma

$$\left(\tau_\epsilon^n|_{[-R,R]^n}\right)|_S = \tau_\epsilon^n|_S$$

Quindi S è un insieme compatto. □

Proprietà 7.2.1. *Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau)$ un applicazione continua e siano X un insieme compatto e Y è un insieme T2 allora*

1. *f è chiusa*
2. *Se f è bigettiva allora f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

f è chiusa
Sia $C \subset X$ un chiuso allora, dato che X è un compatto, per la proposizione 7.2.2 ho che C è un compatto. A questo punto sfruttando l'ipotesi di continuità della f ho per la proposizione 7.2.3 che $f(C)$ è un compatto ma dato che Y è $T2$ per ipotesi allora sempre per la proposizione 7.2.2 $f(C)$ è un chiuso e quindi per definizione f è chiusa.

f è bigettiva allora f è un omeomorfismo
Dato che f è bigettiva e continua per ipotesi allora per dimostrare che f sia un omeomorfismo mi rimane da dimostrare che f^{-1} sia continua.
Considerato che $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$ e che per il punto precedente f è chiuso allora ho che $\forall C \subset X | \mathcal{C}_X(C) \in \tau, f(C)$ è un chiuso perciò per la proposizione 4.0.1 f^{-1} è continua e quindi per definizione f rappresenta un isomorfismo. □

Corollario 7.2.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X e sia $\pi : (X, \tau) \to (X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}})$ allora $\exists f \in C^0 | f : (X, \tau) \to (X', \tau'), R = R_f \iff [x]_\mathcal{R} = f^{-1}(f(x)), \forall x \in X$.*

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & (X',\tau') \\
(X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}}) \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Allora g è un omeomorfismo.

Dimostrazione. $X/\mathcal{R}, \tau_{X/\mathcal{R}}$ è un insieme compatto dato che $\pi \in C^0$ e surgettiva quindi g è un applicazione chiusa ma per ipotesi è C^0 e bigettiva quindi per definizione g è un omeomorfismo. □

7.3 Connessione

Definizione 7.3.1. *Uno spazio topologico (X, τ) si dice connesso se gli unici spazi sia aperti che chiusi della topologia sono ϕ, X.*
Inoltre si definisce uno spazio topologico (X, τ) sconnesso se $\exists A \in P(x) | \phi \neq A \neq X$ tale per cui A non è né aperto né chiuso.

Proposizione 7.3.1. *Dato uno spazio topologico allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Uno spazio topologico (X, τ) è sconnesso.*
2. *X si può scrivere come unione di due aperti di τ non vuoti e disgiunti.*
3. *X si può scrivere come unione di due chiusi di τ non vuoti e disgiunti.*

Dimostrazione. Procedendo per ordine dimostro che:

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$
Per definizione suppongo che $\exists A \in \tau$ tale per cui A è sia aperto che chiuso, inoltre posso affermare che

$$X = A \sqcup (X \setminus A)$$

Dato che A è chiuso allora il suo complementare è aperto ma essendo anche aperto X risulta l'unione di due insiemi disgiunti e aperti.

$\underline{(1) \Rightarrow (3)}$
Analogamente a prima suppongo che $\exists A \in \tau$ tale per cui A è sia aperto che chiuso, inoltre posso affermare che

$$X = A \sqcup (X \setminus A)$$

Dato che A è aperto allora il suo complementare è chiuso ma essendo anche chiuso allora X risulta l'unione di due insiemi disgiunti e chiusi.

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$
Supponiamo che $\exists A, B \in \tau \setminus \{\phi\} | A \cap B = \phi$ inoltre $X = A \sqcup B$ allora per costruzione

$$B = X \setminus A \Rightarrow B = \mathcal{C}_X(A)$$

Dunque dato che A è aperto allora B è anche chiuso, analogamente per A e quindi per definizione segue che X è un insieme sconnesso. □

Esempio 7.3.1. *Seguono le seguenti affermazioni:*

- *Ogni spazio topologico discreto con almeno due punti è sconnesso.*

  Dimostrazione. $\forall x \in X, \{x\} \in \tau_D$ ma anche il suo complementare appartiene alla topologia quindi il singoletto è anche un chiuso e quindi per definizione X sconnesso. □

- *Ogni spazio topologico banale è connesso in quanto per definizione gli unici aperti e chiusi sono ϕ, X.*

- *Dato lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ allora $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ non è connesso*

  Dimostrazione. Preso in considerazione

  $$\mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \sqcup (x, \infty)$$

  I quali sono per definizione due insiemi aperti per la topologia indotta e disgiunti e quindi per la proposizione precedente allora questo insieme è sconnesso. □

- *Lo spazio topologico (X, τ_{cof}) è un insieme connesso in quanto non riesco a trovare dei chiusi che partizionano questo insieme perché sono finiti dunque questo insieme è connesso.*
- *$\mathbb{Q}$ è un insieme sconnesso.*

  Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $(-\infty, z], [z, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Quest'ultimi due insiemi rappresentano degli insiemi chiusi per $\mathbb{R}$ dunque nella topologia indotta su $\mathbb{Q}$ essi rappresentano dei chiusi ma dato che

  $$(-\infty, z] \cap \mathbb{Q} = (-\infty, z) \cap \mathbb{Q}$$
  $$[z, +\infty) \cap \mathbb{Q} = (z, +\infty) \cap \mathbb{Q}$$

  Dunque dato che

  $$((-\infty, z] \cap \mathbb{Q}) \cup ([z, +\infty) \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

  E che

  $$((-\infty, z] \cap \mathbb{Q}) \cap ([z, +\infty) \cap \mathbb{Q}) = ((-\infty, z) \cap \mathbb{Q}) \cap ((z, +\infty) \cap \mathbb{Q}) = \phi$$

  Allora segue che $\mathbb{Q}$ è un insieme sconnesso. □

7.3.1 Insiemi convessi

Definizione 7.3.2. ***(Insieme convesso)***
Sia $S \subset \mathbb{R}$ dunque si dice che S è convesso se $\forall a, b \in S$ vale che

$$\forall c \in \mathbb{R} | a \leq c \leq b, c \in S$$

Teorema 7.3.1. *Sia $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ allora ogni intervallo chiuso e limitato sono connessi.*

Dimostrazione. Sia $J = [a, b] | a, b \in \mathbb{R}$ dunque è ovvio che sia per definizione un insieme convesso.
Adesso supponiamo per assurdo che J sia sconnesso dunque

$$\exists A, B \text{ chiusi} | J = A \sqcup B$$

Dunque a meno di invertire gli elementi posso supporre che $a \in A \cap J, b \in B \cap J$ e che $a < b$. Essendo A, B chiusi per la topologia euclidea allora $A \cap J, B \cap J$ sono dei chiusi per la topologia indotta $\tau_\epsilon|_J$ inoltre

$$(A \cap J) \cap (B \cap J) = (A \cap B) \cap J = \phi$$

Perciò i chiusi relativi sono tra loro disgiunti in J.
A questo punto posso affermare che essendo $A \cap J$ un chiuso allora

$$\exists z = \max(A \cap J)$$

Dunque $z \notin B$ e $(z, b] \subset B \cap J$. Per monotonia sotto chiusura ho che

$$[z, b] = \overline{(z, b]}^{\tau_\epsilon|_J} \subset \overline{B \cap J}^{\tau_\epsilon|_J} = B \cap J$$

Dunque $z \in B$ ma questo rappresenta un assurdo e quindi J è un insieme connesso. □

Teorema 7.3.2. *ogni sottoinsieme connesso di una retta Euclide è un convesso.*

Dimostrazione. Sia $S \in P(\mathbb{R}) \setminus \{\phi\}$ suppongo per assurdo che non sia convesso allora per definizione $\exists a, b \in S, c \notin S | a < c < b$. Considero $A = (-\infty, c), B = (c, +\infty)$ allora $S = (S \cap A) \sqcup (S \cap B)$ ma dato che $A, B \in \tau$ allora $S \cap A \in \tau_S$ e $S \cap B \in \tau_S$ quindi è unione disgiunta di aperti non vuoti e quindi S è sconnesso e quindi questo rappresenta un assurdo perciò S è convesso. □

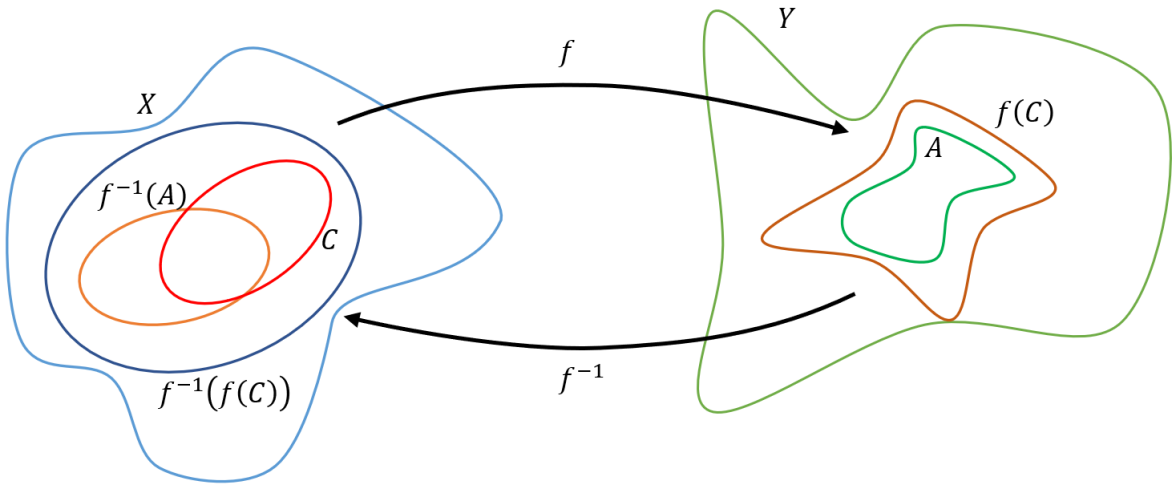
Osservazione 7.3.1. *La connessione è proprietà topologica ovvero se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici allora X è connesso $\Leftrightarrow Y$ è connesso.*

Proposizione 7.3.2. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici. Sia $C \subset X$ un insieme connesso allora $f(C)$ rappresenta un sottoinsieme connesso di Y.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(C)$ sia sconnesso dunque per definizione ho che

$$\exists A \in P(f(C)) | \phi \neq A \neq f(C)$$

Con A sia aperto che chiuso.



Dato che A è aperto per $\xi|_{f(C)}$ allora

$$\exists A' \in \xi | A = A' \cap f(C)$$

Dunque dato che f è continua per ipotesi allora $f^{-1}(A') \in \tau$ dunque

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(f(C)) \in \tau|_{f^{-1}(f(C))}$$

Dunque dato che $C \subset f^{-1}(f(C))$ allora

$$f^{-1}(A) \cap C \in \tau|_C$$

Poiché A è anche un chiuso, con analoghi passaggi ho che $f^{-1}(A) \cap C$ è un chiuso per la topologia indotta. Inoltre dato che $f^{-1}(A) \cap C \neq \phi$ e $f^{-1}(A) \cap C \subset C$ allora per definizione ho che C è sconnesso ma ciò è assurdo in quanto per ipotesi abbiamo che C è connesso e quindi segue che $f(C)$ è connesso. □

Osservazione 7.3.2. *Se X è uno spazio topologico connesso e $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza definita su di esso allora $X/_{\mathcal{R}}$ è connesso*

$$\pi : X \to X/_{\mathcal{R}}$$

Definizione 7.3.3 (Punti connessi). *Sia (X, τ) uno spazio topologico e siano x, y due punti di X. Diciamo che y, x sono connessi in (X, τ) se esiste un sottoinsieme connesso S dello spazio topologico tale per cui $x, y \in S$.*

Proposizione 7.3.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e siano $A, B \subset X$ due insiemi connessi tali per cui $A \cap B \neq \phi$ allora la loro unione è un insieme connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\exists Y \subset A \cup B | Y$ è sia aperto che chiuso. Se $Y = \phi$ la dimostrazione è banale ma supponiamo che $Y \neq \phi$ allora vale che

$$Y = Y \cap (A \cup B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$$

Dunque almeno una tra le due intersezioni è non vuota, perciò posso supporre che $A \cap Y \neq \phi$ dunque per τ risulta essere uno spazio sia aperto che chiuso ma ciò è assurdo in quanto abbiamo che A è connesso per ipotesi dunque deve essere che

$$A \cap Y = A \Rightarrow Y \supset A$$

A questo punto sfruttando l'ipotesi per cui $A \cap B \neq \phi$ segue banalmente da quanto detto sopra che $Y \cap B \neq \phi$ dunque analogamente a prima ho che $Y \cap B$ è sia aperto che chiuso per la topologia indotta su B ma dato che B è connesso per ipotesi ottengo automaticamente che

$$Y \cap B = B \Rightarrow Y \supset B$$

Dunque in conclusione ottengo che

$$A \cup B \subset Y \subset A \cup B$$

Ma ciò mi dimostra per definizione che $A \cup B$ è connesso in quanto è l'unico aperto e chiuso che dell'insieme. □

7.3.2 Connessione come relazione di equivalenza

Lemma 7.3.1. *La relazione di connessione in (X, τ) rappresenta una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. Per dimostrare ciò devo far vedere che:

- **Riflessività**
  $\{x\}$ eredità la topologia che risulta essere, dato l'insieme, banale e quindi è un insieme connesso.
- **Simmetrica**
  L'insieme che connette y, x è lo stesso insieme che connette x, y.
- **Transitività**
  Supponiamo che $x\rho y, y\rho z$ quindi per definizione so che $\exists A, B$ insieme connessi dello spazio topologico tal per cui $x, y \in A$ e $y, z \in B$ quindi per la proposizione precedente dato che $y \in A \cap B$ ho che $A \cup B$ è un insieme connesso e quindi $x\rho z$.

□

Definizione 7.3.4. ***(Componenti connesse)***
Dato uno spazio topologico (X, τ) con ρ la relazione di equivalenza indotta dalla connessione, le ρ-classi di equivalenza si chiamano componenti connesse di (X, τ). Inoltre $\forall p \in X$ indicheremo con $C(p)$ la componente connesso che lo contiene.

Proposizione 7.3.4. *Uno spazio topologico (X, τ) è connesso $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x$ è connesso a y.*

Dimostrazione.

"(X, τ) connesso $\Rightarrow \forall x, y \in X, x$ è connesso a y."
Dato che $\forall x, y \in X$, X è connesso per ipotesi allora per definizione x, y sono connessi.

"(X, τ) connesso $\Leftarrow \forall x, y \in X, x$ è connesso a y."
Per definizione so che $\exists A \in P(X) | x, y \in A$ con A connesso. Supponiamo per assurdo che $\phi \neq A \neq X$ allora $\exists y' \in \mathcal{C}_X(A)$ ma dato che per ipotesi ho che y', x sono connessi allora $\exists A' | y', x \in A'$ con A' connesso, dunque $A \cap A' \neq \phi$ quindi per la proposizione precedente ho che $A \supset A' \Rightarrow y' \in A$ ma ciò rappresenta un assurdo e quindi dato che A non può essere vuoto ho che $A = X$ e quindi X è un insieme connesso. □

Corollario 7.3.1. *Dato uno spazio topologico (X, τ) e $\{K_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X tali per cui*

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \phi$$

Allora la loro unione è un insieme connesso.

Dimostrazione. Posto

$$Y = \bigcup_{i \in I} K_i \neq \phi$$

Siano $y_1, y_2 \in Y$ dunque $\exists i, j \in I | y_1 \in K_i$, $y_2 \in K_j$ allora, essendo K_i, K_j connessi con intersezione non vuota, la loro unione è connessa quindi dato che $y_1, y_2 \in K_i \cup K_j$, per definizione segue che i due punti sono connessi perciò per la proposizione precedente segue che Y è connesso. □

Lemma 7.3.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $A \subset X$ un insieme connesso allora $\overline{A}$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $\exists B \subset \overline{A} | \overline{A} \neq B \neq \phi$ e B è sia aperto che chiuso per la topologia indotta su $\overline{A}$.
A questo punto è ovvio affermare che A è un insieme denso per $\overline{A}$ ed essendo B un aperto in $\tau|_{\overline{A}}$ allora è intorno di qualche suo punto quindi per definizione di denso ho che

$$A \cap B \neq \phi$$

Dunque tale insieme è sia aperto che chiuso in A dunque essendo A un insieme connesso per ipotesi allora segue che $A \subset B \subset \overline{A}$ dunque

$$\overline{A} \subset \overline{B} \subset \overline{\overline{A}}$$

Ma dato che $\overline{A}$ è un chiuso per τ allora $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, quindi

$$\overline{A} \subset \overline{B} \subset \overline{A}$$

Perciò dato che B è chiuso in $\overline{A}$ allora

$$B = \overline{B} = \overline{A}$$

Quindi per definizione $\overline{A}$ è connesso. □

Proposizione 7.3.5. *Sia X uno spazio topologico, $p \in X$ e $C(p)$ la sua componente connessa allora*

1. *$C(p)$ è il più grande connesso di X che contiene p.*
2. *$C(p)$ è chiuso di X.*

Dimostrazione.

Punto 1

$C(p)$ è il più grande connesso di X contenente p
Se per assurdo suppongo che $C(p)$ non sia il più grande connesso di X contenente p allora $\exists Y \subset X | C(p) \subset Y$. Dunque è ovvio che

$$\forall y \in Y, y \rho x \Longrightarrow y \in C(p)$$

Allora segue che $C(p) = Y$ ma questo rappresenta un assurdo con quanto supposto e quindi $C(p)$ è il più grande connesso di X contenente p.

$C(p)$ è un connesso
Per definizione ho che $C(p) = \{x \in X | x \rho p\}$ dunque $\forall x \in C(p), \exists Y_x \subset X$ connesso tale per cui $p, x \in Y_x$ e quindi $p \rho x$. Dato che tale insieme è connesso posso affermare che

$$C(p) = \bigcup_{x \in C(p)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in C(p)} Y_x \subset C(p)$$

Dunque

$$C(p) = \bigcup_{x \in C(p)} Y_x$$

Dato che per costruzione $p \in \bigcap_{x \in C(p)} Y_x$ allora per il corollario precedente ho che l'unione è un connesso.

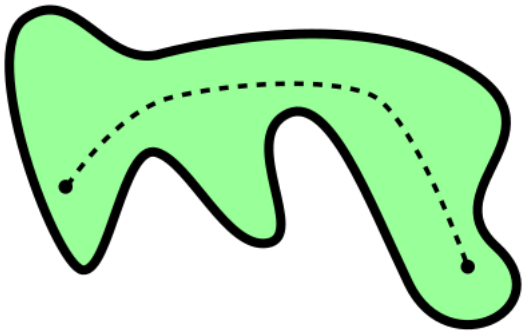
Punto 2
Poiché $C(p)$ è connesso allora anche $\overline{C(p)}$ lo è, ma per costruzione ho che $p \in \overline{C(p)}$ dunque $\overline{C(p)} \subset C(p)$ e quindi $C(p) = \overline{C(p)}$ dunque è un chiuso. □

7.4 Connessione per archi

Definizione 7.4.1. ***(Connessione per archi)***
Uno spazio topologico X si dice connesso per archi se $\forall x, y \in X$ esiste una funzione continua, detta arco, tale per cui

$$\alpha : [0,1] \to X$$

Con $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$.



Lemma 7.4.1. *I cammini sono insiemi connessi.*

Dimostrazione. Per definizione di cammino si ha che

$$\alpha : I \to X$$

Dunque poiché I è un chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ allora per quanto visto prima è connesso quindi essendo α una funzione continua segue che $\alpha(I) \subset X$ è un insieme connesso. □

Teorema 7.4.1. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi allora X è connesso.*

Dimostrazione. Dato che X è connesso per archi e $x \in X$ allora

$$\forall y \in X, \exists \alpha_y : I \to X | \alpha_y(0) = x, \alpha_y(1) = y$$

Dunque

$$X = \bigcup_{y \in X} \{y\} \subset \bigcup_{y \in X} \alpha_y \subset X$$

Dunque X è unione di insiemi connessi aventi tutti il punto iniziale in comune, perciò

$$\bigcap_{y \in X} \alpha_y \neq \phi$$

Allora per un risultato precedente ho che X è un insieme connesso. □

Osservazione 7.4.1. *Da ciò si può dedurre che in $\mathbb{R}$ questi concetti sono equivalenti:*

- *Connessione.*
- *Connessione per archi.*
- *Convessità.*

In questo caso, presi due punti $x, y \in X$, l'arco è proprio la condizione di convessità $tx + (1-t)y$, cioè, formalmente, abbiamo l'applicazione continua

$$\begin{aligned} \alpha \colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto tx + (1-t)y \end{aligned}$$

Ciò non è vero per $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Capitolo 8

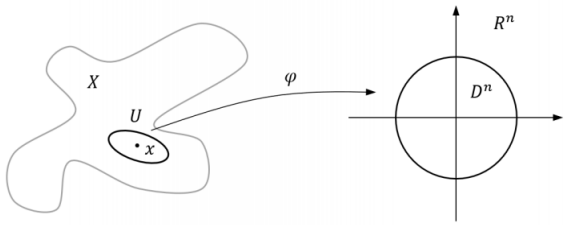
Superfici topologiche compatte

8.1 Carte locali

Definizione 8.1.1. ***(Carta locale)***
Diciamo che uno spazio topologico (X, τ) è localmente Euclideo se $\forall x \in X$, $\exists n \in \mathbb{N}$ e $\exists U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ aperto tale per cui esiste una mappa

$$\varphi : U \to \dot{\mathbb{D}}^n$$

Che rappresenta un omeomorfismo, inoltre $\dot{\mathbb{D}}^n := \{y \in \mathbb{R}^n | |y| < 1\}$.
In questo caso (U, φ) viene definita come carta locale.



Teorema 8.1.1. ***(Invarianza dimensionale)***
Sia X uno spazio topologico localmente euclideo e siano $(U, \varphi), (V, \psi)$ due carte locali tali per cui $\varphi : U \to \dot{\mathbb{D}}^n$ e $\psi : V \to \dot{\mathbb{D}}^m$ allora $m = n$.

Dimostrazione. Dato che U, V sono per definizione degli aperti allora la loro intersezione nelle rispettive topologie relative rappresenta un aperto dunque

- $\varphi(U \cap V)$ è un aperto non vuoto di $\dot{\mathbb{D}}^n$.
- $\psi(U \cap V)$ è un aperto non vuoto di $\dot{\mathbb{D}}^m$.

A questo punto dato che le due mappe sono degli omeomorfismi allora la loro composizione sull'intersezione rappresenta un omeomorfismo:

$$\psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U \cap V)} \dot{\mathbb{D}}^n \to \dot{\mathbb{D}}^m$$

Dunque questa funzione è per definizione aperta e quindi un aperto di $\mathbb{R}^n$ è un aperto di $\mathbb{R}^m$. Sotto queste ipotesi c'è un teorema che ci assicura che $n = m$. □

Definizione 8.1.2. *Definisco dimensione locale di X in x l'immagine derivante dalla funzione*

$$\begin{aligned} \dim\colon X &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto n \end{aligned}$$

Osservazione 8.1.1. *Questa funzione è localmente costante e se $\mathbb{N}$ viene dotato della topologia discreta allora risulta che questa funzione è continua.*

Corollario 8.1.1. *Se X è uno spazio topologico connesso e localmente euclideo allora $\exists! n \in \mathbb{N}$ tale per cui a dimensione $dim_x(X) = n, \forall x \in X$. Il numero naturale "n" si dice dimensione reale di X.*

Definizione 8.1.3. ***(Prodotto per archi)***
Sia (X, τ) uno spazio topologico e siano $\alpha : I \to X | \alpha(0) = x$, $\alpha(1) = 1$ e $\beta : I \to X | \beta(0) = y, \beta(1) = z$ due cammini per archi allora definisco prodotto dei cammini la funzione

$$\alpha * \beta \colon I \to X$$
$$t \mapsto (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Inoltre questa funzione rappresenta un cammino continuo.

Proposizione 8.1.1. *Se X è connesso e localmente euclideo allora è anche connesso per archi.*

Dimostrazione. $\forall x \in X$ posso costruire l'insieme dei dei punti connessi per archi ad x:

$$W_x := \{y \in X | \exists \text{ connessione per archi fra x e y}\}$$

Dunque dato che $x \in W_x$ perché il cammino costante $\alpha_x(t) = x$, $\forall t \in I$ per definizione mi dice che x è connesso per archi a se stesso, dunque $W_x \neq \phi$.

A questo punto il mio obiettivo è dimostrare che $W_x = X$. Sia $Y \subset X | Y \cap W_x \neq \phi$ e Y connesso per archi.
Dunque per definizione ho che $\forall y' \in Y \cap W_x$ e $\forall y \in Y$, $\exists \alpha : [0,1] \to X | \alpha(0) = y$, $\alpha(1) = y'$ ma dato che $y \in W_x$ per costruzione so che esiste un arco β che lo connette con x, allora

$$\gamma := \alpha * \beta \colon I \to X$$
$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Rappresenta un cammino continuo tale per cui $\gamma(0) = y$ e $\gamma(1) = x$ dunque x, y sono connessi per archi, quindi segue per costruzione che $y \in W_x$ perciò $Y \subset W_x$.
Dunque se prendo $y \in X$ ci possono essere 2 casi:

- $\underline{y \in W_x}$
  In questo caso sfruttando l'ipotesi di X localmente euclideo so che $\exists U$ aperto e omeomorfo a $\mathbb{D}$ il quale essendo connesso per archi fa si che U sia connesso per archi ma dato che $y \in U \cap W_x \Rightarrow U \subset W_x$ perciò dato che $\forall y \in W_x$ esiste un aperto totalmente contenuto, per definizione W_x è aperto.

- $\underline{y \notin W_x}$
  In questo caso sfruttando sempre l'ipotesi di X localmente euclideo so che $\exists U$ aperto e omeomorfo a $\mathbb{D}$, dunque connesso per archi, allora vale che

  $$U \cap W_x = \phi$$

  Se suppongo per assurdo che $U \cap W_x \neq \phi \Rightarrow \exists x \in U \cap W_x$ ma per quanto visto prima ho automaticamente che $U \subset W_x$ e quindi $y \in W_x$ e ciò va contro quanto supposto inizialmente. Perciò $\forall y \in \mathcal{C}_X(W_x)$ esiste un aperto totalmente contenuto in tale insieme quindi $\mathcal{C}_X(W_x)$ è aperto.

Se $\mathcal{C}_X(W_x)$ è aperto allora per definizione ho che W_x è chiuso ma ho dimostrato essere anche aperto e diverso dal vuoto, dunque essendo contenuto in un insieme connesso non può che essere $W_x = X$ e quindi X è connesso per archi. □

Corollario 8.1.2. *Sia X uno spazio topologico localmente euclideo e sia $Y \subset X$ uno spazio connesso per archi allora Y è sia aperto che chiuso.*

Osservazione 8.1.2. *Uno spazio localmente euclideo non è necessariamente uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon), ((\{a\}, \{b\}), \tau_D)$ due spazi topologici e sia $X = (\{a\}, \{b\}) \times \mathbb{R}$ lo spazio prodotto con base della topologia prodotto $\mathcal{B}$ definita nel seguenti modo:

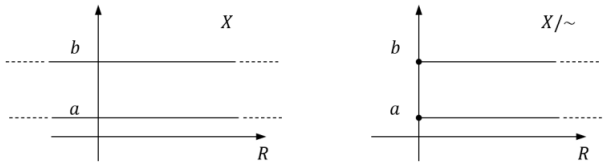
$$\mathcal{B} := \{\{a\} \times (r, s) \in P(X) | r, s \in \mathbb{R}, s > r\} \cup \{\{b\} \times (r', s') \in P(X) | s', r' \in \mathbb{R}, s' > r'\}$$

A questo punto definiamo la seguente relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su X:

$$(a, x)\mathcal{R}(a, x') \iff x, x' \leq 0 \vee x = x'$$

$$(b, x)\mathcal{R}(b, x') \iff x, x' \leq 0 \vee x = x'$$

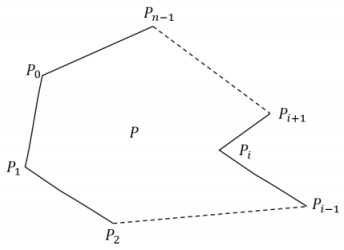
Dunque



Con $\pi : X \to {}^{X}\!/_{\sim}$.
Si nota che $\mathbb{R} \times \{a\}, \mathbb{R} \times \{b\}$ sono due aperti per la topologia prodotto inoltre sono isomorfi a $\mathbb{R}$. Denoto con $A = \pi(\mathbb{R} \times \{a\})$, $B = \pi(\mathbb{R} \times \{b\}) \in {}^{\tau}\!/_{\sim}$. □

8.2 Varietà topologica

Definizione 8.2.1. ***(Etichettare)***
Sia P una regione poligonale del piano con n lati come in figura



L'etichettazione dei lati di P è data da una mappa dallo spazio dei lati di P all'insieme S delle etichette:

$$\begin{aligned} \varphi &\colon \delta P \to S \\ \overline{P_i P_{i+1}} &\mapsto \varphi\left(\overline{P_i P_{i+1}}\right) = s \quad i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Data un orientazione di ogni lato di P e data un etichetta ad ogni lato, definiamo una relazione di equivalenza come segue:

1. *$\forall x \in Int(P)$ ho che $[x] = \{x\}$ quindi x è in relazione solo con se stesso.*
2. *Dati due lati con la stessa etichetta: $\overline{P_i P_{i+1}}, \overline{P_j P_{j+1}} | \varphi\left(\overline{P_i P_{i+1}}\right) = \varphi\left(\overline{P_i P_{i+1}}\right)$, sia*

$$\begin{aligned} h\colon \overline{P_i P_{i+1}} &\to \overline{P_j P_{j+1}} \\ x &\mapsto h(x) = y \end{aligned}$$

   Allora $x \mathcal{R} y \iff y = h(x)$

Dunque pongo $X = {}^{P}\!/_{\mathcal{R}}$ e si dice essere stato ottenuto incollando insieme i lati di P secondo le orientazioni dati dall'etichetazione.

Definizione 8.2.2. ***(Varietà topologica)***
Una varietà topologica di dimensione $n \in \mathbb{N}$ è uno spazio topologico (X, τ) con le seguenti caratteristiche:

- *Connesso*
- *Localmente euclideo*
- T_2
- *Base numerabile.*

Osservazione 8.2.1. *Il fatto che sia localmente euclideo e T_2 ciò non mi assicura che la base sia numerabile.*

- $n = 1$ *curva topologica.*
- $n = 2$ *superficie topologica compatta.*

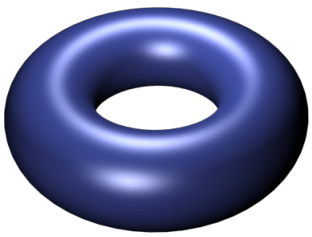
Definizione 8.2.3. ***(Superficie topologica compatta)***
Una superficie topologica compatta è una varietà topologica compatta di dimensione 2.

Osservazione 8.2.2. *Gli spazi topologici ottenuti come quoziente di un poligono rispetto ad un'identificazione dei lati, in cui i vertici sono identificati, possono essere descritti scegliendo arbitrariamente un vertice e un verso di percorrenza e scrivendo i lati nell'ordine in cui si incontrano, con la lettera corrispondente con l'esponente -1, se l'orientazione indicata su di essi è opposta al verso di percorrenza scelto.*

8.2.1 Esempi di varietà topologiche

1. <u>Sfera di dimensione n</u>
   $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ che per semplicità posso considerare P come il polo nord della sfera, dunque posso dimostrare che $\mathbb{S}^n \setminus \{P\} \simeq \mathbb{R}^n$:
   $$\begin{aligned} \pi_P \colon \mathbb{S}^n \setminus \{P\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \cdots, x_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$
   La funzione inversa è data da
   $$\begin{aligned} \pi_P^{-1} \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{S}^n \setminus \{P\} \\ (x_1, \cdots, x_n) &\mapsto \left(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

2. <u>Il toro</u>
   La relazioni di equivalenza in un certo senso corrisponde all'azione di incollamento di punti diversi di uno spazio topologico, cioè identificando tra loro punti diversi come segue:
   - $(0, 0) \sim (1, 0) \sim (0, 1) \sim (1, 1)$.
   - $(0, y) \sim (1, y)$ con $0 < y < 1$.
   - $(x, 0) \sim (x, 1)$ con $0 < x < 1$.



Equivalentemente posso considerare $\left(\mathbb{R}^2, \tau_\epsilon^{(2)}\right)$ e sia $L = \mathbb{Z}^2 = \{(m,n) \in \mathbb{R}^2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$.
Definisco relazione di equivalenza $\mathcal{R}_L$ come

$$(v_1, v_2)\mathcal{R}_L(w_1, w_2) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - w_1 \in \mathbb{Z} \\ v_2 - w_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dunque sia ${}^{\mathbb{R}^2}\!/_L$ un quoziente topologico con π aperto. Quindi se l'insieme è aperto allora anche la loro traslazione è aperta e quindi osserviamo che $Q := [0,1]^2$ interseca ogni $\mathcal{R}_L$-classe di equivalenza

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ Q/_{\mathcal{R}_L|_{Q^2}} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2/_L \end{tikzcd}$$

$Q/_{\mathcal{R}_L|_{Q^2}}$ rappresentano le classi che vanno in classi. A questo punto si nota che g passa in ${}^{\mathbb{R}^2}\!/_L$ come funzione continua e bigettiva e quindi rappresenta un omeomorfismo.

Prendo due vettori disgiunti e quindi i due reticoli traslati non si toccano, quindi posso trovare un raggio così piccolo da non farli toccare mai ed essendo aperti allora anche la loro unione è aperta.

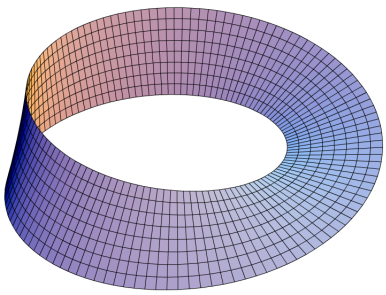
3. <u>Nastro di Moebius</u> Dato I^2 e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza così definito:

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ y_1 = 1 - y_2 \qquad\qquad x_1 = 0, x_2 = 1 \vee x_1 = 1, x_2 = 0 \end{cases}$$

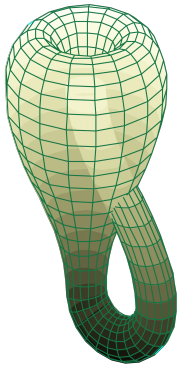
L'omeomorfismo è definito da

$$\begin{aligned} g\colon I^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (s,t) &\mapsto g(s,t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(\pi s)\cos(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(\pi s)\sin(2\pi s) \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)\cos(\pi s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque identifico $M = {}^{I^2}\!/_{\mathcal{R}}$.



4. <u>Bottiglia di Klein</u>
È il risultato del quoziente del quadrato rispetto alle identificazioni $aba^{-1}b$ ed è omeomorfa alla somma connessa di due piani proiettivi.



5. <u>Il piano proiettivo</u>
Sia $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con $n \geq 0$ dunque posso definirvi una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ tale per cui

$$r\mathcal{R}w \Leftrightarrow v = \lambda w, \lambda \in \mathbb{R}$$

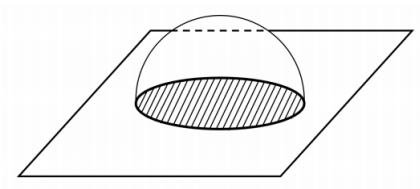
Lo spzio quoziente derivante è detto spazio proiettivo

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = {}^{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}\!/_{\mathcal{R}},$$

Adesso considero $\mathbb{S}^n$ sulla quale vi definisco una relazione di equivalenza $\mathcal{R}'$ tale per cui

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x = \pm y$$

In questo modo si identificano i punti antipodali.



Banalmente si può osservare che $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supset \mathbb{S}^n$ e che $\mathcal{R}'$ è una restrizione di $\mathcal{R}$ su $\mathbb{S}^n$ perciò posso affermare che presa in considerazione la funzione inclusione

$$\begin{aligned} i \colon \mathbb{S}^n &\to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

Ho che

$$x\mathcal{R}'y \Longleftrightarrow i(x)\mathcal{R}i(y)$$

A questo punto definisco una funzione

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \tilde{\mu}(x) = \frac{x}{\| x \|} \end{aligned}$$

Questa funzione risulta essere continua inoltre presi in considerazione $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ allora per come ho definito la relazione ho che

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} | y = \lambda x$$

Quindi

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(y) &= \frac{y}{\| y \|} \\ &= \frac{\lambda x}{|\lambda| \, \| x \|} \quad = \pm \frac{x}{\| x \|} \\ &= \pm \tilde{\mu}(x) \end{aligned}$$

Dunque per come ho definito la relazione su $\mathbb{S}^n$ ho che $\tilde{\mu}(y)\mathcal{R}'\tilde{\mu}(x)$ dunque per un lemma precedente ho che $\exists! \overline{\mu}$ continua che rende commutativo questo diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\pi'"] \\
\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\overline{\mu}"] & \mathbb{S}^n/\sim
\end{tikzcd}$$

A questo punto consideriamo $\mu = \pi' \circ \tilde{\mu}$ essendo composizione di due funzioni continue, è continua dunque prendo in considerazione il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{S}^n/\sim \\
\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, "\overline{\mu}"] &
\end{tikzcd}$$

A questo punto posso affermare che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x\mathcal{R}y \iff \mu(x) = \mu(y)$$

In quanto

$$x\mathcal{R}'y \iff \tilde{\mu}(x)\mathcal{R}'\tilde{\mu}(y)$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \pi'(\tilde{\mu}(x)) \\
&= \pi'(\tilde{\mu}(y)) \\
&= \mu(y)
\end{aligned}$$

Perciò per un teorema ho che $\overline{\mu}$ è una funzione bigettiva e continua.
Se prendo in considerazione un aperto A del piano proiettivo allora

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(A) &= \left(\mu \circ \pi^{-1}\right)(A) \\
&= \mu\left(\pi^{-1}(A)\right) \\
&= \pi'\left(\tilde{\mu}\left(\pi^{-1}(A)\right)\right) \\
&= \pi'\left(\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}(A)\right)
\end{aligned}$$

In quanto $\pi^{-1}(A)$ identifica delle rette passanti per l'origine quindi dato che la mappa $\tilde{mu}$ individua l'intersezione tra i punti e la sfera allora è giusto affermare che

$$\tilde{\mu}\left(\pi^{-1}(A)\right) = \mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}(A)$$

Dato che π è continua allora $\pi^{-1}(A)$ è un aperto perciò $\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}(A)$ è un aperto per la topologia relativa a $\mathbb{S}^n$ quindi essendo π' aperta allora

$$\overline{\mu}(A) = \pi'\left(\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}(A)\right)$$

Rappresenta un aperto nella topologia dello spazio quoziente, quindi per definizione g è aperta e quindi g è un omeomorfismo

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{S}^n$$

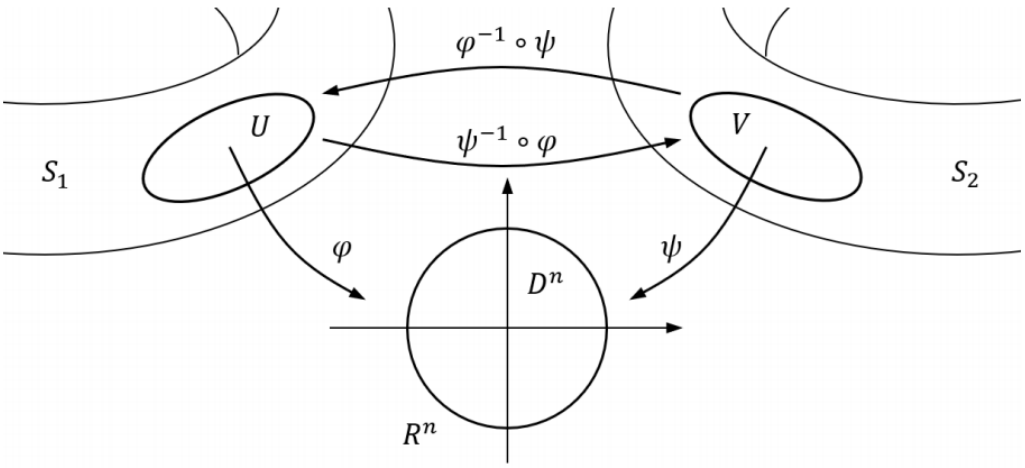
8.3 Somma connessa

Definizione 8.3.1. ***(Somma connessa)***
Siano S_1, S_2 due varietà topologiche tali per cui $\exists (U, \varphi), (V, \psi)$ due carte rispettivamente di S_1, S_2 tali per cui U, V sono omeomorfi ad un disco chiuso di dimensione n allora ho che

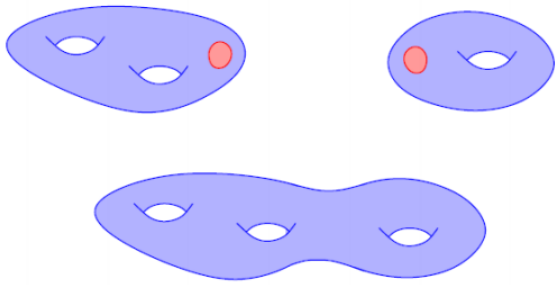
$$\psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$$
$$\varphi^{-1} \circ \psi : V \to U$$

Rappresentano due omeomorfismi. Allora definisco somma connessa di S_1, S_2 come

$$S_1 \# S_2 = (S_1 \setminus U) \cup (S_2 \setminus V)$$

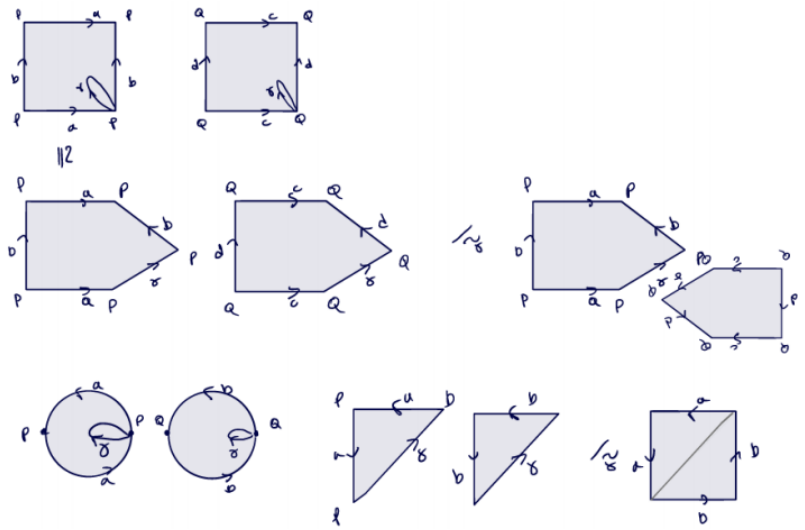


Osservazione 8.3.1. *A livello geometrico la somma connessa significa che date due superfici disgiunte, si taglia un piccolo foro circolare in entrambe le superfici e inseguito si incollano sui bordi del taglio.*



Osservazione 8.3.2. *Da ciò possiamo osservare che S ha delle caratteristiche:*

1. *Localmente euclideo*
2. *Compatto*
3. *Connesso*
4. *T_2.*
5. *Di dimensione 2.*



Definizione 8.3.2. *Indichiamo con:*

- T_0 *la sfera.*
- T_1 *il toro.*
- T_g *la somma connessa di* $g \geq 2$ *tori*

Mentre indichiamo con:

- U_1 *il piano complesso.*
- U_n *la somma connessa di* $n \geq 2$ *piani proiettivi reali.*

8.4 Omotopia

Definisco la seguente funzione

$$\begin{aligned} F\colon X \times I &\to Y \\ (x,t) &\mapsto tx \end{aligned}$$

Dunque si vede che $F(x,0) = 0$ e $F(x,1) = x$ quindi deformo con continuità il cammino costante nell'identità.

Definizione 8.4.1. ***(Omotopia)***
Siano $f_0, f_1 : X \to Y$ due funzioni continue allora f_0, f_1 si definisco omotope, e si indicano con $f_0 \sim_F f_1$, se $\exists F : X \times I \to Y$ continua detta omotopia fra f_0, f_1 cioè $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f_0 \\ F(x,1) &= f_1(x) \end{aligned}$$

Mentre $f_t(x) = F(x,t)$ sono tutte quelle funzioni continue che variano con continuità.

Esempio 8.4.1. *Alcuni fatti banali sono:*

1. *$X = Y = \dot{\mathbb{D}}^n$ insiemi densi chiusi di $\mathbb{R}^n$ dunque definiti*

$$\begin{cases} f_0 = Id(x) \\ f_1(x) = 0 \end{cases}$$

   Allora l'omotopia che in questo caso è rappresentata da

$$\begin{aligned} F\colon X \times [0,1] &\to \dot{\mathbb{D}}^n \\ (x,t) &\mapsto (1-t)x \end{aligned}$$

2. *Se $f_0 = Id(x)$ e $f_1 = -x$ (la mappa antipodale) allora dato che $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, posso costruire un omotopia*

$$\begin{aligned} F\colon X \times [0,1] &\to \dot{\mathbb{D}}^n \\ (z,t) &\mapsto e^{i\pi t} z \end{aligned}$$

Osservazione 8.4.1. *Ogni cammino è omotopo al cammino constante.*

Proposizione 8.4.1. *L'omotopia è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. Per dimostrare questa affermazione devo dimostrare 3 proprietà:

1. <u>Riflessiva</u>
   Se costruisco $F(x,t) = f(x)$ allora $\forall t \in [0,1]$ allora vale la relazione e quindi $f \sim f$.

2. <u>Simmetrica</u>
   Se considero due funzioni $f, g | f \sim g$ e suppongo che $F(x,t)$ sia l'omotopia relativa allora $F(x, 1-t)$ è tale per cui $F(x,0) = g$ mentre $F(x,1) = f$ dunque $g \sim f$.

3. <u>Transitiva</u>
   Supponiamo che $f \sim_F g$ e che $g \sim_G h$ allora posso costruire una nuova funzione

$$\begin{aligned} H\colon X \times [0,1] &\to Y \\ (x,t) &\mapsto H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x, 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

   Dunque dato che $H(x,0) = f(x)$e $H(x,1) = h$ allora per definizione ho che $f \sim h$.

Dunque per definizione l'omotopia rappresenta una relazione di equivalenza. □

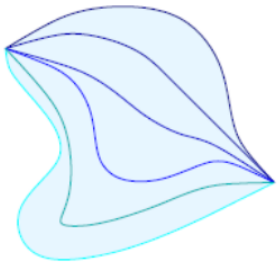
Definizione 8.4.2 (Omotopia relativa). *Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$ un sottospazio. $f_0, f_1 : X \to Y$ si definiscono omotopicamente relative ad A se $\exists F : X \times I \to Y$ tale per cui*

- $F(x, 0) = f_0(x)$
- $F(x, 1) = f_1(x)$
- $F(x, a) = f_0(a) = f_1(a)$, $\forall a \in A$, $\forall t \in I$.

Inoltre si indica con $f_0 \sim_A f_1$.

Definizione 8.4.3 (Cammini omotopi). *Due cammini α, β in X si definiscono omotopi se hanno lo stesso punto iniziale e stesso punto finale quindi se $\exists F : I \times I \to X$ continua tale che*

- $F(s, 0) = \alpha(s)$
- $F(s, 1) = \beta(s)$
- $F(0, t) = \alpha(0) = \beta(0) = x_0$
- $F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1) = x_1$



Definizione 8.4.4 (Spazi omotopici). *Siano X, Y due spazi topologici allora X, Y si definiscono omotopicamente equivalenti, e si indicano con $X \sim Y$, se $\exists f : X \to Y$ e $\exists g : Y \to X$ funzioni continue tali per cui $g \circ f \sim Id(x)$ e $f \circ g \sim Id(y)$*

Osservazione 8.4.2. *Siano X, Y due spazi topologici tali per cui $X \cong Y$ allora $X \sim Y$.*

Dimostrazione. Dato che $X \sim Y$ sono isomorfi allora per definizione so che $\exists f$ biettiva e lineare che congiunge i due spazi.
Dato che $f^{-1} \circ f = Id_X$ e $f \circ f^{-1} = Id_Y$ allora è ovvio che siano omotope a tali mappe quindi per definizione tali spazi sono omotopicamente equivalenti. □

Le proprietà che si preservano per omotopia si dicono proprietà omotopiche.

Osservazione 8.4.3. *L'essere omotopi rappresenta una relazione di equivalenza tra insiemi.*

Dimostrazione. Per dimostrare questa affermazione devo dimostrare 3 proprietà:

1. <u>Riflessiva</u>
   Dato che uno spazio $X \cong X$ mediante la funzione identità allora per quanto dimostrato precedentemente ho che $X \sim X$.

2. <u>Simmetrica</u>
   Se considero $X, Y | X \sim Y$ allora per definizione so che $\exists f : X \to Y$ e $\exists g : Y \to X | g \circ f \sim Id(x)$ e $f \circ g \sim Id(y)$ dunque per definizione ho anche che $Y \sim X$.

3. <u>Transitiva</u>
   Supponiamo che $X \sim Y$ e che $Y \sim Z$ allora per definizione so che $\exists f, f', g, g'$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "f'"] \arrow[r, bend left, "g"] & Z \arrow[l, bend left, "g'"] \end{tikzcd}$$

Tali per cui

- $f \circ f' \sim Id(y)$
- $f' \circ f \sim Id(x)$
- $g \circ g' \sim Id(z)$
- $g' \circ g \sim Id(y)$

Dunque sempre per definizione di omotopia so che esistono

$$F(x,t) \left| \begin{array}{l} F(x,0) = (f' \circ f)(x) \\ F(x,1) = Id(x) \end{array} \right.$$

$$G(y,t) \left| \begin{array}{l} G(y,0) = (g' \circ g)(y) \\ G(y,1) = Id(y) \end{array} \right.$$

Dunque posso costruire una funzione

$$\begin{aligned} H &\colon X \times I \to X \\ (x,t) &\mapsto H(x,t) = \begin{cases} f'(G(f(x),2t)) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ F(x, 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Questa funzione è continua in quanto

$$H\left(x, \frac{1}{2}\right) = f'(G(f(x),1) = f'\left(Id_y(f(x))\right) = (f' \circ f)(x) = F(x,0)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &H(x,0) = f'(G(f(x),0)) = f'((g' \circ g)(f(x))) = (f' \circ g' \circ g \circ f)(x) = (f' \circ g') \circ (g \circ f)(x) \\ &H(x,1) = F(x,1) = Id(x) \end{aligned}$$

Perciò per definizione $(f' \circ g') \circ (g \circ f) \sim Id(x)$.

Dall'altra parte definisco

$$F'(y,t) \left| \begin{array}{l} F'(y,0) = (f \circ f')(y) \\ F(y,1) = Id(y) \end{array} \right.$$

$$G'(z,t) \left| \begin{array}{l} G'(z,0) = (g \circ g')(z) \\ G'(z,1) = Id(z) \end{array} \right.$$

Dunque posso costruire una funzione

$$\begin{aligned} H' &\colon Z \times I \to Z \\ (z,t) &\mapsto H'(z,t) = \begin{cases} g(F'(g'(z),2t)) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G'(z, 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Questa funzione è continua in quanto

$$H'\left(z, \frac{1}{2}\right) = g(F'(g'(z),1) = g(f \circ f')(g'(z)) = g \circ f \circ f' \circ g' = G'(z,1)$$

Inoltre

$$H'(z,0) = g(F'(g'(z),0)) = g(f \circ f')(g'(z)) = g \circ f \circ f' \circ g' = (g \circ f) \circ (f' \circ g')$$
$$H'(z,1) = G'(z,1) = Id(z)$$

Dunque per definizione ho che $(g \circ f) \circ (f' \circ g') \sim Id(z)$.
Perciò per definizione ho che $X \sim Z$.

Dunque per definizione rappresenta una relazione di equivalenza. □

Definizione 8.4.5 (**Spazio contraibile**). *Se X è omotopicamente equivalente ad un punto si dice che è contraibile.*

Definizione 8.4.6 (**Retratto di deformazione**). *Sia $A \subset X$ un sottospazio topologico, si dice che A è un retratto di X se presa la mappa inclusione*

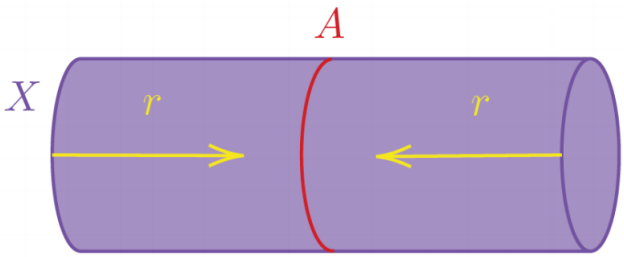
$$\begin{aligned} i\colon A &\to X \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

$\exists r : X \to A$, detta retrazione, tale per cui

$$r \circ i = Id_A$$

Diremo inoltre che che A è retratto di deformazione se

$$\begin{cases} r \circ i = Id_A \\ i \circ r \sim Id_X \end{cases}$$



Osservazione 8.4.4. *Sia X sottospazio di $(\mathbb{R}^n, \tau_\epsilon)$ e sia $A \subset X$. Se $\exists r : X \to A$ retrazione tale per cui il segmento che unisce il punto x al punto $r(x)$ è contenuto in X, $\forall x \in X$ allora*

$$\begin{aligned} F\colon X \times I &\to X \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = (1-t)x + t(i \circ r(x)) \end{aligned}$$

È un'omotopia relativa ad A tra Id_X e $i \circ r$, pertanto A è un retratto di deformazione di X.

Dimostrazione. Per costruzione ho che

$$F(x,0) = Id(x)$$
$$F(x,1) = (i \circ r)(x)$$

Dunque dato che fissato $x \in X$ ho che $F(x,t)$ può essere scritto come $t((i \circ r)(x) - x) + x)$ dato che per ipotesi r è una retroazione allora $(i \circ r)(x) = Id(x)$ quindi ho che $\forall t \in I$

$$F(x,t) = (i \circ r)(x) = Id(x)$$

Perciò per definizione F rappresenta un'omotopia. □

Proposizione 8.4.2. *$\mathbb{S}^n$ è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione. Per semplicità posso considerare $n = 1$ dunque definisco la mappa

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{\parallel x \parallel} \end{aligned}$$

La quale è ovviamente una funzione continua e posto i come la mappa inclusione ho che

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

Perciò vedo che

$$f \circ i = Id_{\mathbb{S}^1}$$

E posta l'omotopia

$$H(x,t) = (1-t)x + \frac{x}{\parallel x \parallel} t$$

Allora $Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sim_H i \circ f$ dunque per definizione ho che $\mathbb{S}^1$ è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. □

Proposizione 8.4.3. *D^n è contraibile.*

Dimostrazione. Siano

$$\begin{aligned} f\colon D^n &\to \{0\} \\ x &\mapsto f(x) = 0 \\ g\colon \{0\} &\to D^n \\ 0 &\mapsto g(0) = 0 \end{aligned}$$

È ovvio che

$$\begin{aligned} g \circ f\colon D^n &\to \{0\} \\ x &\mapsto g \circ f(x) = 0 \end{aligned}$$

Dunque posso considerare un'omotopia del tipo $F(x,t) = (1-t)x$, in questo modo osservo che $g \circ f \sim Id_{D^n}$ mentre se considero

$$\begin{aligned} f \circ g\colon \{0\} &\to : D^n \\ 0 &\mapsto f \circ g(0) = 0 \end{aligned}$$

È ovvio che $f \circ g = Id_{\{0\}}$ dunque per definizione D^n è contraibile. □

Esempio 8.4.2. *Da quanto definito fino ad ora posso vedere che*

1. *Un sottospazio stellato di $\mathbb{R}^n$ contraibile.*
2. *Sia T il toro ottenuto da $I \times I$ come quoziente rispetto alla relazione di equivalenza:*

$$(x,y) \sim (x',y') \iff \{x,x'\} = \{0,1\} \text{ e } y = y' \text{ oppure } \{y,y'\} = \{0,1\} \text{ e } x = x'$$

Sia A la circonferenza quoziente del segmento $\{0\} \times I$ rispetto alla relazione indotta da $\sim$ allora A è retratto di T. Per mostrarlo basta considerare l'applicazione $R : T \to A$ indotta dall'applicazione

$$\begin{aligned} r\colon I \times I &\to \{0\} \times I \\ (x,y) &\mapsto (0,y) \end{aligned}$$

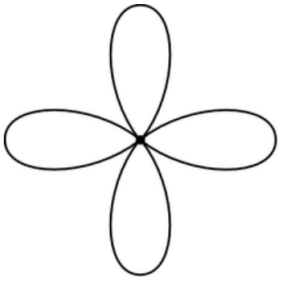
Definizione 8.4.7 (Bouquet). *Siano $\{(X_i, x_i)\}_{i=1}^n$ una famiglia di coppie costituite da uno spazio topologico $X_i | \forall i \neq j, X_i \cap X_j = \phi$ ed un punto $x_i \in X_i$. Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza tale per cui*

$$x \mathcal{R} y \iff x = y \vee \exists i, j | x_i = x,\, x_j = y$$

Dunque definisco Bouquet di n insiemi

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} X_i \big/ \mathcal{R}$$

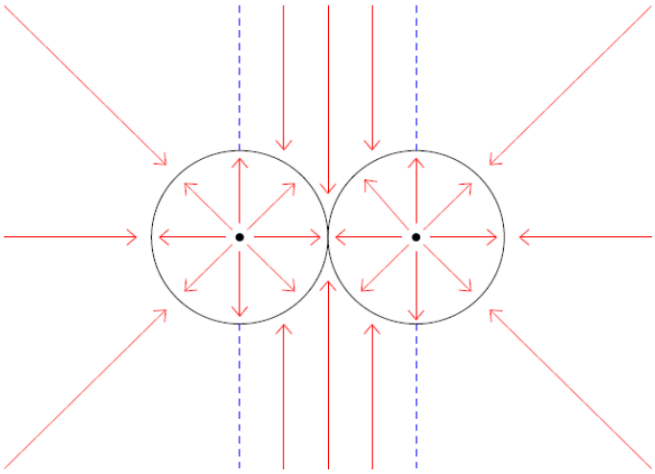
Osservazione 8.4.5. *Se prendo $X_i = \mathbb{S}^1$ ed identifico tra loro un punto tale relazione mi permette di incollare tra loro n circonferenze in quei punti.*



Osservazione 8.4.6. *Si può osservare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$ ha $S_1 \vee S1$ come retratto di deformazione. Posto $P_1 = (p_1, 0), P_2 = (p_2, 0)$ per semplicità la retrazione è definita diversamente in regioni diverse $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$*

$$r \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$$

$$x \mapsto \begin{cases} \begin{cases} \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) & y \geq \sqrt{1-x^2} \\ \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) & y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases} & p_1 \leq x_p \leq p_2 \\ \dfrac{x - P_1}{|x - P_1|} & x \in B_{P_1}(1) \vee x < p_1 \\ \dfrac{x - P_2}{|x - P_2|} & x \in B_{P_2}(1) \vee x > p_2 \end{cases}$$



In quanto

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \\ \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Osservazione 8.4.7. *Si può osservare che*

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{K\text{-}punti\} \sim \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{Bouquet\ di\ K\text{-}circonferenze}$$

Capitolo 9

Gruppo fondamentale

9.1 CW-Complessi

Definizione 9.1.1 (Cella). *Dato uno spazio topologico (X, τ), si definisca n-cella se X è omeomorfo a $\mathbb{D}^n$.*

Definizione 9.1.2. ***(CW-complesso)***
Un CW-complesso di dimensione N (finita) è uno spazio topologico costruito nel seguente modo:

1. 0-***scheletro:*** *Data una famiglia finita di punti, dunque di 0-celle, $\{X_i\}_{i=1}^n$ allora definisco lo 0-scheletro come lo spazio topologico dotato di topologia discreta*

$$X^0 = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

2. ***1-scheletro:*** *Preso in considerazione lo 0-scheletro, aggiungo ad ogni punto un numero arbitrario di 1-celle e lo chiamo X^1.*

3. n-***scheletro:*** *sia $0 < n < N$ lo spazio X^n è costruito a partire da X^{n-1} attaccando un numero finito di coppie*

$$(X, A) = \left(\mathbb{D}_i^n, \mathbb{S}_i^{n-1}\right)$$

Mediante l'applicazione continua

$$\varphi_i^n : \mathbb{S}_i^{n-1} \to X^{n-1}$$

Quindi ogni coppia ha una mappa caratteristica φ_i^n che rappresenta la composizione

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}^n \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{D}^n \amalg X^{n-1}/\sim \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Questa rappresenta la funzione caratteristica che estende l'applicazione di attaccamento.

Dunque in conclusione il CW-complesso sarà dato da

$$X = \bigcup_{k \geq 0} X^k$$

Definizione 9.1.3. ***(Caratteristica di Eulero)***
Definisco χ caratteristica di Eulero come un numero intero che descrive uno spazio topologico X indipendentemente dal modo in cui è piegato ed è calcolato in funzione delle celle che possiede:

$$\chi(X) = \#0 - celle - \#1 - celle + \#2 - celle - \cdots$$

Osservazione 9.1.1. *Presi in considerazione due insiemi X, Y, sia $A \subset X$ e una mappa*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

Dunque se vogliamo incollare Y con X, definisco una relazione tale per cui $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$$x \sim y \iff \exists a \in A | x = a, f(a) = y$$

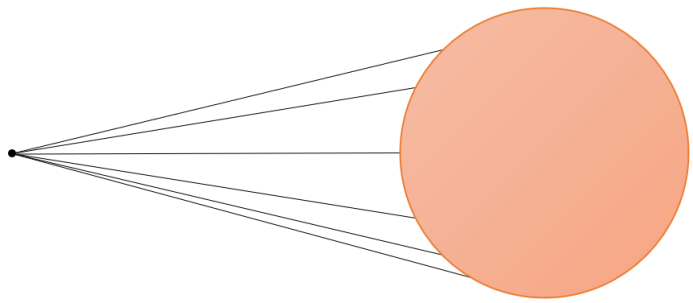
Mentre X/A significa considerare tutti gli elementi di A come un singolo elemento.

9.1.1 Sfera e Toro in CW-complessi

Per costruire la sfera ci posso essere due modi:

1. Sia X_0 un punto e $(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}^2)$ che unisco mediante funzione

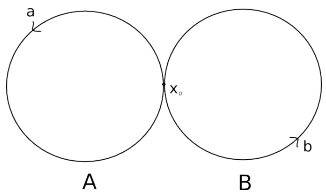
$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{S}^1 &\to \{0\} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$



   Ed infine attacco $(\mathbb{S}^2, \mathbb{D}^3)$ tramite identità su $\mathbb{S}^2$.

2. Sia X_0 un punto poi vi attacco un $(\mathbb{S}^0, \mathbb{D}^1)$ quindi a questo punto attacco su X_1 due $(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}^2)$ mediante identità sul bordo ed infine attacco $(\mathbb{S}^2, \mathbb{D}^3)$ tramite identità su $\mathbb{S}^2$.

Per quanto riguarda il toro considero X_0 come un punto e attacco due $(\mathbb{S}^0, \mathbb{D}^1)$ dunque ottengo un bouquet di due circonferenze:



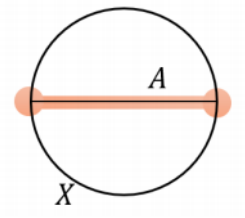
A questo punto prendo $(\mathbb{S}^1, \mathbb{D}^2)$ e la incollo tramite questa mappa a tale bouquet:

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \begin{cases} (1 + \cos(\pi + 4t), -\sin(4t)) & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ (-1 + \cos(4t), \sin(4t)) & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ (1 + \cos(\pi + 4t), \sin(4t)) & t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \\ (-1 + \cos(4t), -\sin(4t)) & t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases} \end{aligned}$$

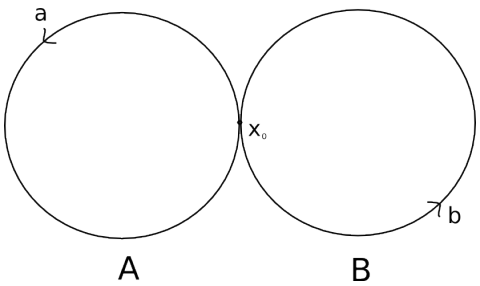
Teorema 9.1.1. *Se X è un CW-complesso finito e $A \subset X$ è un sotto-complesso contraibile allora $X \sim {}^{X}\!/_{A}$.*

Da quanto visto fino ad ora posso fare alcuni esempi:

1. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ ottenuto tramite 2 punti e 3 $(\mathbb{S}^0, \mathbb{D}^1)$ dunque ottengo una figura del tipo:

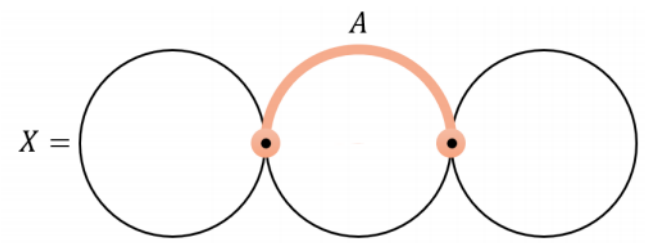


   Dato che ciascuno $(\mathbb{S}^0, \mathbb{D}^1)$ è contraibile allora, posto $A = (\mathbb{S}^0, \mathbb{D}^1)$, per il teorema precedente ho che $X \sim {}^{X}\!/_{A}$ perciò ottengo



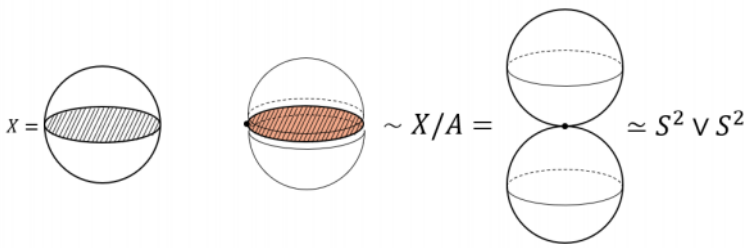
   Inoltre
$$\chi(X) = 2 - 3 = -1 = 1 - 2 = \chi\left({}^{X}\!/_{A}\right)$$

2. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ ottenuto unendo 3 circonferenze e sia A mezza circonferenza



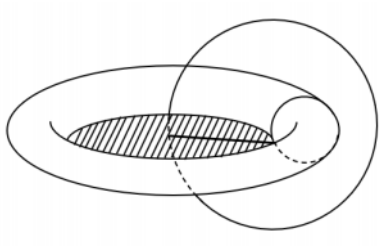
   Dunque $X \sim {}^{X}\!/_{A}$ inoltre ho che $\chi(X) = 2 - 4 = -2 = \chi(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$.

3. Preso $X = \mathbb{S}^2 \cup A \subset \mathbb{R}^3$ con A disco diametrale ho che



Inoltre ho che $\chi(X) = 1 - 1 + 3 = 3 = \chi(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2)$.

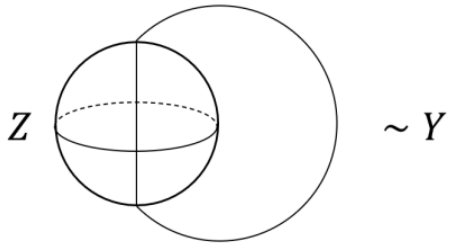
4. Sia X l'unione di un toro con un disco e una circonferenza come in figura



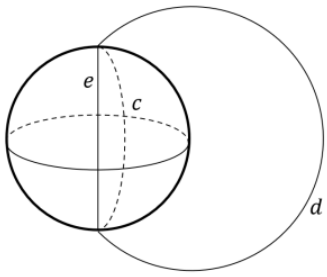
Dunque X è un CW complesso di dimensione 2 ottenuto da

- 2 punti= 2 0-celle.
- 4 1-celle.
- 2 2-celle.

Dunque $\chi(X) = 2 - 4 + s = 0$.
Contraendo il disco si ottiene che $X \sim Y$ con Y lo spazio complesso con 1 0-cella, 2 1-cella e 1 2-cella.
Per studiare Y consideriamo lo spazio X unione di una sfera con un diametro e una curva che unisce i poli esternamente



Infine per studiare Z tracciamo sulla sfera un cammino dal polo nord al polo sud e lo contraiamo



Dunque è omotopicamente equivalente allo spazio $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

9.2 Gruppo fondamentale

Definizione 9.2.1. ***(Cappio)***
Sia $\alpha : I \to X$ un cammino. Definiamo cappio se il punto iniziale e finale coincidono.

Definizione 9.2.2. ***(Gruppo fondamentale di X)***
Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto

$$\Pi(X, x_0) := \{[\alpha] | \alpha \text{ è un capio di punto base } x_0\}$$

Questo insieme prende il nome di gruppo fondamentale di X.

Definizione 9.2.3. ***(Concatenazione di cammini)***
Siano α, β due cammini allora se $\alpha(1) = \beta(0)$ definisco concatenazione di cammini

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$\Pi(X, x)$ rappresenta un gruppo:

- l'operazione è associativa.
- L'elemento neutro è
$$1 := [\varepsilon_{x_0}]$$
- L'inverso di $[\alpha]$ è $[\overline{\alpha}] = [\alpha]^{-1}$ dunque $\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$.

Proposizione 9.2.1. *Siano $[\alpha], [\beta] \in \Pi(X, x_0)$ allora la seguente operazione è ben definita:*

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$$

Proposizione 9.2.2. *Siano α, β due cammini in X tali che sia definito il prodotto $\alpha * \beta$ e siano γ, δ altri due cammini tali per cui $\alpha \sim \gamma$ e $\beta \sim \delta$ allora*

$$\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$$

Dimostrazione. Per ipotesi so che $\alpha \sim_F \gamma$ e $\beta \sim_G \delta$ dunque posso costruire una funzione

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s, t) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1, t) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Si vede che questa rappresenta un'omotopia e quindi la tesi è dimostrata. □

Lemma 9.2.1. *Sia $\alpha : I \to X$ un cammino e $\varphi : I \to I$ continua con $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ allora*

$$\alpha \circ \varphi \sim \alpha$$

Dimostrazione. Questa dimostrazione risulta banale in quanto posso costruire una funzione così definita che rappresenta l'omotopia

$$\begin{aligned} F \colon I \times I &\to X \\ (s,t) &\mapsto F(s,t) = \alpha\left((1-t)s + t\varphi(s)\right) \end{aligned}$$

In questo modo osservo che

$$F(s, 0) = \alpha(s)$$
$$F(s, 1) = (\alpha \circ \varphi)(s)$$

Dunque per definizione ho che $\alpha \circ \varphi \sim_F \alpha$. □

Osservazione 9.2.1. *Questo lemma mi dice che cambiando la velocità del cammino, la classe di omotopia non cambia.*

Teorema 9.2.1. *Siano $\alpha, \beta, \gamma : I \to X$ cammini tali per cui*

- $\alpha(1) = \beta(0)$ *e* $\beta(1) = \gamma(0)$
- $\alpha(0) = x_0$ *e* $\alpha(1) = x_1$.

Siano inoltre $\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_1}$ i cammini costanti tali per cui $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$ e $\varepsilon_{x_1}(s) = x_1$, $\forall s \in I$. Allora valgono i seguenti fatti:

1. $\varepsilon_{x_o} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \varepsilon_1$
2. $\alpha * \overline{\alpha} \sim \varepsilon_0$ *e* $\overline{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_1$.
3. *Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi(X, x_0)$ allora si può vedere che*

$$([\alpha][\beta])[\gamma] = (\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma) = [\alpha]([\beta][\gamma])$$

Dimostrazione. Dimostro procedendo per ordine.

<u>Punto 1</u>
Voglio trovare φ che mi cambi la velocità di percorrenza quindi per il lemma precedente ho che

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2s - 1 & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Allora $\alpha \circ \varphi \sim \alpha$, inoltre posso osservare come per definizione

$$\alpha \circ \varphi = \begin{cases} x_0 & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2s - 1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \epsilon_0 * \alpha$$

Analogamente posto

$$\overline{\varphi}(s) = \begin{cases} 2\overline{s} & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Ho che $\alpha \circ \overline{\varphi} \sim \alpha$ e che

$$\alpha \circ \overline{\varphi} = \epsilon_1 * \alpha$$

Dunque il primo punto è verificato.

<u>Punto 2</u>
Si può costruire l'omotopia in questo modo:

$$F(s,t) = \begin{cases} x_0 & s \in \left[0, \frac{t}{2}\right] \\ \alpha(2s - t) & s \in \left[\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ \overline{\alpha(2s + t - 1)} & s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2-t}{2}\right] \\ x_0 & s \in \left[\frac{2-t}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Così facendo ho che

$$F(s,0) = \alpha * \overline{\alpha}$$
$$F(s,1) = x_0 = \varepsilon_{x_0}$$

Quindi per definizione ho che $\alpha * \overline{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0}$.

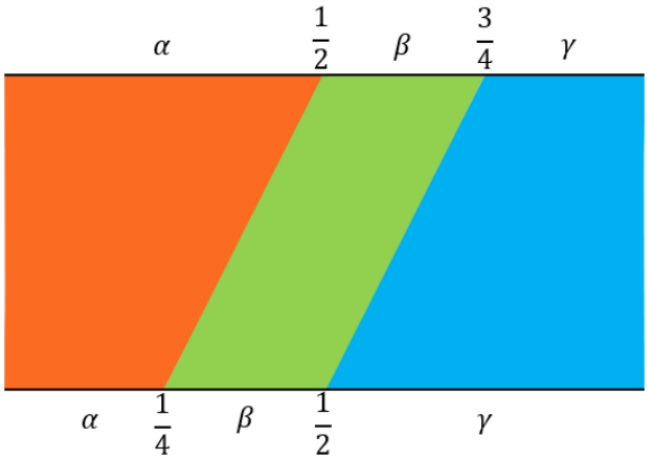
<u>Punto 3</u>

Per definizione ho che

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \beta(2s) & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Mentre

$$\alpha * (\beta * \gamma) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (\beta * \gamma)(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma(2s-1) & s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$



Dunque posta la funzione

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t\right] \\ \beta(2s-1+t) & s \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t, \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t\right] \\ \gamma(2s-1) & s \in \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}t, 1\right] \end{cases}$$

Si può osservare come questa rappresenta un'omotetia e quindi

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim_F \alpha * (\beta * \gamma)$$

Dunque passando allo spazio quoziente posso dire che $[(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)]$ dunque la tesi è dimostrata. $\square$

Osservazione 9.2.2. *Questo teorema ci dimostra che* $\Pi(X,x)$ *è un gruppo(in generale non commutativo).* $\Pi(X,x_0)$ *è il gruppo fondamentale di* X *con punto base* x_0.
In realtà se X *è connesso per archi,* $\Pi(X,x_0)$ *non dipende dal punto base* x_0.

Proposizione 9.2.3. *Sia* X *uno spazio topologico,* $x,y \in X$ *e* $f: I \to X$ *una funzione che congiunge* $x,y: \begin{cases} f(0)=x \\ f(1)=y \end{cases}$ *allora*

$$\Pi(X,x) \cong \Pi(X,y)$$

Dimostrazione. Dobbiamo trovare un isomorfismo tra i due gruppi, quindi definiamo la seguente applicazione

$$\begin{aligned} \mu_f \colon \Pi(X,x) &\to \Pi(X,y) \\ [\alpha] &\mapsto [\overline{f} * \alpha * f] \end{aligned}$$

<u>Buona definizione</u>
Se considero elementi appartenenti alla stessa classe α, β ho che $\alpha \sim \beta$ perciò posto $\overline{f} = f^{-1}$ e considerato il fatto che ovviamente si ha $f \sim f$ e $\overline{f} \sim \overline{f}$.
Sia F l'omotopia tra α e β dunque posso notare come la funzione

$$H(s,t) = \overline{f} * F(s,t)$$

Rappresenti l'omotopia tra $\overline{f} * \alpha$ e $\overline{f} * \beta$ mentre

$$K(s,t) = H(s,t) * f$$

Rappresenti l'omotopia tra $\overline{f} * \alpha * f$ e $\overline{f} * \beta * f$ perciò la funzione è ben definita.

<u>Morfismo</u>
Siano $[\alpha], [\beta] \in \Pi(X,x)$ allora per definizione ho che

$$\begin{aligned} \mu_f([\alpha][\beta]) = \mu_f([\alpha * \beta]) = \left[\overline{f} * (\alpha * \beta) * f\right] = \\ &= \left[\overline{f} * (\alpha * (f * \overline{f}) * \beta) * f\right] \\ &= \left[(\overline{f} * \alpha * f) * (\overline{f} * \beta * f)\right] \\ &= \left[(\overline{f} * \alpha * f)\right]\left[(\overline{f} * \beta \circ f)\right] \\ &= \mu_f([\alpha])\mu_f([\beta]) \end{aligned}$$

<u>Isomorfismo</u>
Dato che $\forall [\alpha] \in \Pi(X,x)$

$$\begin{aligned} \left(\mu_{\overline{f}} \circ \mu_f\right)([\alpha]) &= \mu_f\left(\left[f * \alpha * \overline{f}\right]\right) \\ &= \left[\overline{f} * f * \alpha * \overline{f} * f\right] \\ &= [\overline{f} * f][\alpha][f * \overline{f}] \\ &= [\varepsilon_x][\alpha][\varepsilon_y] \\ &= [\alpha] \end{aligned}$$

Dunque posso affermare che

$$\mu_{\overline{f}} \circ \mu_f = Id_{\Pi(X,x)}$$

Ed analogamente a prima che $\mu_f \circ \mu_{\overline{f}} = Id_{(Y,y)}$ allora ho la mia tesi. □

Definizione 9.2.4. ***(Semplicemente connesso)***
Se X *è connesso per archi e* $\Pi(X,x_0) = \{1\}$ *(quindi composto da un solo elemento) allora* X *è detto semplicemente connesso.*

9.3 Proprietà topologiche gruppi fondamentali

Osservazione 9.3.1. *I gruppi fondamentali sono invarianti topologici. Dunque se $X \simeq Y$ sono omeomorfi allora $\Pi(X, x_0)$ e $\Pi(Y, \varphi(x_0))$ sono isomorfi.*

Definizione 9.3.1 (Morfismo indotto). *Sia $\varphi : X \to Y$ una funzione continua allora definiamo φ_* morfismo indotto da φ la funzione*

$$\begin{aligned} \varphi_* \colon \Pi(X, x) &\to \Pi(Y, \varphi(x)) \\ [\alpha] &\mapsto [\varphi \circ \alpha] \end{aligned}$$

Proposizione 9.3.1. *Il morfismo indotto è ben definito ed è un omomorfismo di gruppi $\varphi_* : \Pi(X, x) \to \Pi(Y, \varphi(x))$.*

Dimostrazione. Dimostro procedendo per ordine.

<u>Buona definizione</u>
Presi in considerazione $\alpha \sim_F \beta$ allora per quanto visto in precedenza ho che $\varphi \circ \alpha \sim_G \varphi \circ \beta$ allora è ovvio che

$$\varphi_*([\alpha]) = [\varphi \circ \alpha] = [\varphi \circ \beta] = \varphi_*([\beta])$$

<u>Morfismo</u>
Prese in considerazione $[\alpha], [\beta] \in \Pi(X, x)$ allora

$$\varphi_* ([\alpha][\beta]) = \varphi_* ([\alpha * \beta]) = [\varphi \circ (\alpha * \beta)] = [(\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)]$$

Che per definizione è equivalente a

$$[(\varphi \circ \alpha)] \, [(\varphi \circ \beta)] = \varphi_*([\alpha])\varphi_*([\beta])$$

□

Teorema 9.3.1. *φ_* ha inoltre 2 proprietà "**funtoriali**":*

1. *Siano X, Y, Z spazi topologici tali per cui $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$ sono funzioni continue*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & Y \arrow[r, "\psi"] & Z \end{tikzcd}$$

   Allora $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

2. *$(Id_X)_* = Id_{\pi(X,x)}$ identità rimane identità.*

Dimostrazione. Dimostro procedendo per ordine.

<u>Punto 1</u>
Per definizione ho che

$$(\psi \circ \varphi)_*([\alpha]) = [(\psi \circ \varphi)(\alpha)] = [\psi(\varphi(\alpha))] = [\psi \circ \varphi \circ \alpha] = \psi_* ([\varphi \circ \alpha]) = \psi_* (\varphi_*([\alpha])) = (\psi_* \circ \varphi_*)$$

<u>Punto 2</u>
Banalmente ho che

$$(Id_X)_* [\alpha] = [Id_x \circ \alpha] = [\alpha]$$

□

Corollario 9.3.1. *Il gruppo fondamentale è un invariante topologico.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi : X \to Y$ sia un omeomorfismo e $x \in X$, allora per definizione ho che $\varphi^1 \circ \varphi = Id_X$ ma per il lemma precedente ho che

$$(Id_X)_* = Id_{\Pi(X,x)}$$

Analogamente scambiando l'ordine ottengo che

$$\varphi_* \circ \left(\varphi^{-1}\right)_* = \left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right) = Id_{\Pi(Y,\varphi(x))}$$

questo dice che φ_* e φ_*^{-1} sono due isomorfismi nel gruppo fondamentale. □

Corollario 9.3.2. *Se $X \simeq Y$ (omeomorfo) tramite φ allora $\Pi(X) \cong \Pi(Y)$ tramite a φ_*.*

Dimostrazione. Dato che per ipotesi $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo allora per definizione φ è una funzione biunivoca quindi posto $\psi = \varphi^{-1}|\psi : Y \to X$ allora è ovvio che

$$\psi \circ \varphi = Id_X$$

$$\varphi \circ \psi = Id_Y$$

Dunque posto $y = \varphi(x)$ allora

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (Id_X)_* = Id_{\Pi(X,x)}$$

$$\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (Id_Y) = Id_{\Pi(Y,y)}$$

Perciò per definizione ho che φ_* rappresenta un isomorfismo. □

Corollario 9.3.3. *Sia $A \subset X$ e $f : X \to A$ una retrazione ($r \circ i = Id_A$), $i : A \to X$ la funzione inclusione, denoto con*

$$i_* : \Pi(A,a) \to \Pi(X,a)$$
$$r_* : \Pi(X,x) \to \Pi(A,a)$$

Morfismi indotti allora

$$r_* \circ i_* = Id_{\Pi(A,a)}$$

Osserviamo che $\Pi(A,a) \simeq i_*(\Pi(A,a)) \subset \Pi(X,a)$

Dimostrazione. Per come ho definito le mappe

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "r \circ i"'] & X \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd}$$

Dunque

$$\begin{tikzcd} \Pi(A,a) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "r_* \circ i_*"'] & \Pi(X,a) \arrow[d, "r_*"] \\ & A \end{tikzcd}$$

□

Osservazione 9.3.2. *Dai precedenti corollario posso osservare che per ogni retratto A di X il gruppo fondamentale di A è isomorfo a un sottogruppo di $\Pi(X,a)$ infatti*

$$\Pi(A,a) \xrightarrow{i_*} \Pi(X,a)$$

Rappresenta un isomorfismo con immagine un sottogruppo di $\Pi(X,a)$ in quanto omomorfismo iniettivo.

Lemma 9.3.1. *Siano $\phi, \psi : X \to Y$ continue e omotope con omotopia $F : X \times I \to Y$ e sia $f(t) = F(x_0, t)$ un cammino continuo in Y che congiunge $\phi(x_0)$ e $\psi(x_0)$ allora il seguente diagramma commuta*

$$\begin{tikzcd}
\Pi(X, x_0) \arrow[rr, "\phi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & & \Pi(Y, \phi(x_0)) \arrow[dl, "\mu_f"] \\
& \Pi(Y, \psi(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Cioè vale che $\psi_* = \mu_f \circ \phi_*$.

Dimostrazione. Bisogna far vedere la nostra tesi che equivalente può essere espressa come $\forall [\alpha] \in \Pi(X, x_0)$ vale che

$$\begin{array}{ccc}
(\mu_f \circ \phi_*)([(\alpha]) & = & \psi_*([\alpha]) \\
\| & & \| \\
[(\overline{f} * (\phi \circ \alpha)) * f] & = & [\psi \circ \alpha]
\end{array}$$

Cioè

$$\left(\overline{f} * (\phi \circ \alpha)\right) * f \sim \psi \circ \alpha$$

Dunque posto $y_0 = \psi(x_0)$, essendo $\psi \circ \alpha \sim (\epsilon_{y_0} * (\psi \circ \alpha)) * \epsilon_{y_0}$ basta mostrare che

$$\left(\overline{f} * (\phi \circ \alpha)\right) * f \sim_H (\epsilon_{y_0} * (\psi \circ \alpha)) * \epsilon_{y_0}$$

Ricordando che $f(s)$ è un cammino che congiunge $\varphi(x_0)$ a $\psi(x_0)$ allora per definizione ho che $F(x_0, 0) = f(0) = \varphi(x_0)$ e $F(x_0, 1) = f(1) = \psi(x_0)$ Per definizione ho che

$$\left(\overline{f} * (\phi \circ \alpha)\right) * f = \begin{cases} \overline{f}(4s) & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ (\phi \circ a)(4s-1) & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ f(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} F(x_0, 1-4s) & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ F(a(4s-1), 0) & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ F(x_0, 2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$(\epsilon_{y_0} * (\psi \circ \alpha)) * \epsilon_{y_0} = \begin{cases} \epsilon_{y_0} & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ (\varphi \circ a)(4s-1) & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \epsilon_{y_0} & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} F(x_0, 1) & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ F(a(4s-1), 1) & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ F(x_0, 1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Dunque posso osservare come questa funzione rappresenti un omotopia:

$$H \colon I \times I \to X$$

$$(s, t) \mapsto H(s, t) = \begin{cases} F(x_0, (1-4s)(1-t) + t) & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ F(a(4s-1), t) & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ F(x_0, (2s-1)(1-t) + t) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

In quanto

$$\begin{aligned}
H(s, 0) &= \left(\overline{f} * (\phi \circ \alpha)\right) * f \\
H(s, 1) &= (\epsilon_{y_0} * (\psi \circ \alpha)) * \epsilon_{y_0} \\
H(0, t) &= F(x_0, 1) = (\epsilon_{y_0} * (\psi \circ \alpha)) * \epsilon_{y_0} = \left(\overline{f} * (\phi \circ \alpha)\right) * f \\
H(1, t) &= F(x_0, 1) = (\epsilon_{y_0} * (\psi \circ \alpha)) * \epsilon_{y_0} = \left(\overline{f} * (\phi \circ \alpha)\right) * f
\end{aligned}$$

□

Teorema 9.3.2. ***(Invarianza per omotopia)***
Siano X, Y spazi topologici omotopicamente equivalenti tramite $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$ allora

$$\varphi_* : \Pi(X, x) \to \Pi(Y, \phi(x))$$

Rappresenta un isomorfismo.

Dimostrazione. Poiché φ, ψ rendono omotopicamente equivalenti X, Y allora per definizione ho che

$$\psi \circ \varphi \sim Id_X$$

$$\varphi \circ \psi \sim Id_Y$$

Dunque posso affermare che

$$(\psi \circ \varphi)_* = Id_{\Pi(X,x)}$$

Inoltre definisco

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_* \colon \Pi(Y, \varphi(x)) &\to \Pi(X, \psi(\varphi(x))) \\ [\alpha] &\mapsto \tilde{\psi}_*([\alpha]) = [\psi \circ \alpha] \end{aligned}$$

Il morfismo indotto da ψ su $\Pi(Y, \varphi(x)), \Pi(X, \psi(\varphi(x))$ in quanto questi gruppi dipendono dal punto base e non è detto che $\psi(\varphi(x)) = x$ comunque ottengo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\Pi(X,x) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[rr, bend right, "(\psi\circ\varphi)_*"'] \arrow[dr, "Id_{\Pi(X,x)}"'] & \Pi(Y,\varphi(x)) \arrow[r, "\tilde{\psi}_*"] & \Pi(X,\psi(\varphi(x))) \arrow[dl, "\mu_f"] \\
& \Pi(X,x) &
\end{tikzcd}$$

Dunque

$$\mu_f \circ \psi_* \circ \varphi_* = Id_{\Pi(X,x)}$$

Perciò per quanto visto in precedenza, essendo μ_f l'isomorfismo relativo al cambio di punto base allora anche $\psi_* \circ \varphi_*$ è un isomorfismo allora ψ_* è suriettivo.

Analogamente a prima ho che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Pi(Y,y) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[rr, bend right, "(\varphi\circ\psi)_*"'] \arrow[dr, "Id_{\Pi(Y,y)}"'] & \Pi(X,\psi(y)) \arrow[r, "\tilde{\varphi}_*"] & \Pi(Y,\varphi(\psi(x))) \arrow[dl, "\mu_g"] \\
& \Pi(Y,y) &
\end{tikzcd}$$

Con μ_f isomorfismo e $\tilde{\varphi}_*$ il morfismo indotto da φ tra $\Pi(X, x)$ e $\Pi(Y, \varphi(\psi(y)))$.
Come prima si ottiene che $\tilde{\varphi}_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo di gruppi in particolare ψ_* è iniettivo in quanto se assumo per assurdo che non lo sia allora $\exists \alpha, \beta \in \Pi(Y, y) | \alpha \neq \beta, \psi_*(\alpha) = \psi_*(\beta)$ dunque

$$(\mu_g \circ \varphi_*)(\psi_*(\alpha)) = (\mu_g \circ \varphi_*)(\psi_*(\beta))$$

Ma per la commutatività del grafico ho che

$$\alpha = (\mu_g \circ \varphi_*)(\psi_*(\alpha)) = (\mu_g \circ \varphi_*)(\psi_*(\beta)) = \beta$$

Ma questa cosa è impossibile e quindi ψ_* è iniettivo e quindi rappresenta un isomorfismo, così come φ_*. □

Corollario 9.3.4. *Se X è contraibile allora $\Pi(X, x) = \{1\}$ è il gruppo banale $\forall x \in X$.*

Dimostrazione. Per definizione ho che X è omotopicamente equivalente ad un punto quindi tutti i cammini sono omotopicamente equivalenti a quello costante perciò è ovvio che

$$\Pi(X, x_0) = \{[\epsilon_{x_0}]\} = \{1\}$$

□

Definizione 9.3.2 (Semplicemente connesso). *Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ allora si dice che X è semplicemente connesso se $\forall \alpha$ cappio di x_0 risulta che*

$$\alpha \sim \varepsilon_{x_0}$$

Proposizione 9.3.2. *X è semplicemente connesso $\iff \Pi(x, x_0) = \{1\}$*

Dimostrazione.

$\underline{X \text{ è semplicemente connesso} \implies \Pi(x, x_0) = \{1\}}$
Dato che X è semplicemente connesso allora per definizione ho che $\forall \alpha$ cappio di x_0 allora $\alpha \sim \varphi_{x_0}$ dunque

$$\exists![\alpha] = 1 \implies \Pi(X, x_0) = \{1\}$$

$\underline{X \text{ è semplicemente connesso} \impliedby \Pi(x, x_0) = \{1\}}$
Se $\Pi(x, x_0) = \{1\}$ allora significa che tutti i cappi che passano per x_0 sono omotopicamente equivalenti al cammino costante e quindi per definizione ho che X è semplicemente connesso. □

Corollario 9.3.5. *Sia $A \subset X$ retratto di deformazione allora r_*, i_* sono isomorfismi, in particolare ho che $\Pi(A, a) \simeq \Pi(X, a)\, \forall a \in A$.*

Osservazione 9.3.3. *In questo caso essendo $r \circ i = Id_A$ si ha che $r_* \circ i_* = Id_{\Pi(A,a)}$ cioè $i_* = r_*^{-1}$. In generale date due equivalente omotopiche*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\varphi"] & Y \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

Con $\psi \circ \sim Id_X$ e $\varphi \circ \psi \sim Id_Y$ non è detto che valga $\psi_* = \varphi_*^{-1}$

Teorema 9.3.3. ***(Prodotto)***
Dati $x \in X, y \in Y$ si ha l'isomorfismo

$$\pi(X \times Y, (x, y)) \simeq \Pi(X, x) \times \Pi(Y, y)$$

(prodotto diretto dei gruppi fondamentali)

Osservazione 9.3.4. *$\mathbb{S}^1$ non è un retratto di deformazione di D^2 in quanto, posto $x_0 = (1, 0)$, se per assurdo lo fosse allora la mappa*

$$i_* : \Pi(\mathbb{S}^1, x_0) \to \Pi(D^2, x_0)$$

Sarebbe iniettiva ma dato che $\Pi(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ e $\Pi(D^2, x_0) = \{1\}$ allora questo rappresenta un assurdo e quindi $\mathbb{S}^1$ non è un retratto di deformazione di D^2.

9.4 Gruppi di presentazione

Definizione 9.4.1. ***(Alfabeto)***
Sia $S = \{x_i\}_{i\in I}$, chiamiamo alfabeto l'insieme delle lettere:$\{x_i, x_i^{-1}\}_{i\in I}, x_i^{-1} \in S$ e definiamo l'insieme delle parole W come

$$W := \left\{x_{i_1}^{\varepsilon(i_1)} x_{i_2}^{\varepsilon(i_2)} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon(i_n)} | x_{i_k} \in S,\, \varepsilon(i_m) = \pm 1, k, m = 1, \cdots, n\right\}$$

W comprende anche la parola vuota che non contiene nessun simbolo.

A questo punto possiamo introdurre delle relazioni su W:

1. $w_1 \sim w_2 \iff$ si possono ottenere l'una dall'altra aggiungendo/togliendo un numero finito di espressioni di tipo $x_i x_i^{-1}$ o $x_i^{-1} x_i$ con $x_i \in S$.
   Ad esempio se considero la parola $abb^{-1}a \sim aa$.

2. **R-equivalenza:** Sia $R \subset W$, diciamo che

$$w_1 \sim_R w_2 \iff w_1 \sim w_2 \text{ oppure aggiungendo/togliendo un numero finito di } r \text{ o } r^{-1} \text{ con } r \in R.$$

Definizione 9.4.2. *Passando al quoziente posso definire due nuovi gruppi:*

1. *$G = W/\sim$ che è un gruppo rispetto alla giustapposizione (il prodotto tra due parole è l'unione di esse: il prodotto tra ab e aa è abaa) ed è detto* ***gruppo libero generato da*** *S, denotato con F_S.*
   - *L'elemento neutro è la parola vuota che, indicata con 1.*
   - *L'inverso della parola $x_{i_1}^{\varepsilon(i_1)} x_{i_2}^{\varepsilon(i_2)} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon(i_n)}$ è dato dalla classe della parola*

$$x_{i_n}^{-\varepsilon(i_n)} \cdots x_{i_2}^{-\varepsilon(i_2)} x_{i_1}^{-\varepsilon(i_1)}$$

2. *$W/\sim_R$ che è un gruppo rispetto alla giustapposizione*

$$[w_1]_R [w_2]_R = [w_1 w_2]_R$$

   Detto ***gruppo con presentazione*** *$< S|R >$:*
   - *S è l'insieme dei generatori*
   - *R è l'insieme dei relatori $< S|\{r = 1|r \in R\} >$.*

Esempio 9.4.1. *Avendo dato queste definizioni degli esempi di ciò:*

1. *Se $S = \phi$ allora $G = \{1\}$, questo rappresenta il gruppo libero banale e l'unica parola quella vuota.*

2. *Se $S = \{x\}$ allora $F_{\{x\}} = \{1, x, x^{-1}, xx, x^{-1}x^{-1}, \cdots\}$ inoltre posso notare che se considero la seguente funzione*

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\to (\mathbb{Z}, +) \\ x^n &\mapsto \varphi(x^n) = n \end{aligned}$$

   Allora è facile dimostrare che $G \cong (\mathbb{Z}, +)$.

3. *Se $S = \{a, b\}$ allora $F_{\{a,b\}} = \{1, a, b, ab, a^{-1}b^{-1}, ba, \cdots\} \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ dove $*$ indica il prodotto libero di gruppi. Tale gruppo non è abeliano.*
   Posso notare che definite

$$\begin{aligned} \varphi_1\colon F_{\{a\}} &\hookrightarrow F_{\{a,b\}} \\ a &\mapsto a^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2\colon F_{\{b\}} &\hookrightarrow F_{\{a,b\}} \\ b &\mapsto b^n \end{aligned}$$

   Allora $F_{\{a\}}, F_{\{b\}} \subset F_{\{a,b\}}$.

4. *Se* $\#|S| = n$ *allora* $G \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ *è detto gruppo libero a* n *generatori. La sua struttura dipende solo dalla cardinalità di* S*, non dalla natura degli elementi di* S*.*

Osservazione 9.4.1. *Il gruppo* $< S|R >$ *è il quoziente del gruppo libero* $< S|\phi >$ *rispetto alla chiusura normale di* R*, cioè rispetto al pi piccolo sottogruppo normale che contiene* R*.*

Osservazione 9.4.2. *Un gruppo può essere scritto con presentazioni diverse in quanto sono presenti delle trasformazioni che permettono di passare da una presentazione all'altra.*

Esempio 9.4.2. *Da tutto ciò si possono fare alcuni esempi:*

1. $< \phi|\phi >= \{1\}$ *rappresenta il gruppo banale.*
2. $< x|x^n >= \{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *classi di resi modulo* n*.*
3. $< x, y|xy = yx >\simeq \mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *mediante la funzione che mappa* $x^n y^m \to (n, m)$ *inoltre rappresenta il gruppo abeliano con 2 generatori.*
   Formalmente l'insieme dei relatori sarebbe $r = xyx^{-1}y^{-1} = 1$
4. *Ogni gruppo* $(G, \cdot)$ *è un gruppo con presentazione. Una presentazione data da* $< S_G|R_G >$*, con* $S_G = G$ *e* $R_G = \{(x \cdot y)y^{-1}x^{-1}, x, y \in G\}$*.*
5. $< x, y|x^4 = x^2 = (xy)^2 = 1 >$ *rappresenta il gruppo diedrale e l'insieme dei relatori le sue riflessioni.*

Proposizione 9.4.1. ***(Trasformazioni di Tietze)***
Sia $G =< S|R >$ *allora*

1. *Se una relazione* $r \in R$ *è conseguenza delle relazioni in* $R \setminus \{r\}$ *allora*
$$r \sim_{R\setminus\{r\}} 1 \Longrightarrow < S|R > \simeq < S|R \setminus \{r_0\} >$$
2. *Sia* $\overline{s} \notin S$ *e* w *una parola nell'alfabeto su* S *allora*
$$< S|R > \simeq < S \cup \{\overline{S}\}|R \cup \{\overline{s} = w\} >$$

Definizione 9.4.3. *Sia* G *un gruppo e* $g_1, g_2 \in G$ *il commutatore di* g_1, g_2 *denotato con* $[g_1, g_2]$ *è l'elemento* $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$*. Se* H, K *sono sotto-insiemi di* G*, definiremo l'insieme generato dai commutatori come*
$$[H, K] := \{[h, k]|h \in H, k \in K]$$
Prendendo $H = K = G$*, l'insieme* $[G, G]$ *risulta essere un sottogruppo normale, detto sottogruppo dei commutatori di* G*.*

9.4.1 Abelianizzato

Definizione 9.4.4 (Abelianizzato). *Sia* G *un gruppo con rappresentazione* $< S|R >$*, definisco l'abelianizzato* $Ab(G) = {}^{G}\!/_{[G,G]}$ *inoltre*
$$Ab(G) =< S|R \cup [S, S] >$$

Proposizione 9.4.2. *Dati due gruppi* $G, G'|G \simeq G'$ *allora*
$$Ab(G) \simeq Ab(G')$$

Osservazione 9.4.3. *Dati due gruppi di presentazione* $G_1 =< S_1|R_1 >$ *e* $G_2 =< S_2|R_2 >$ *allora*
$$G := G_1 \oplus G_2 \simeq G_1 \times G_2$$
Ed ammette gruppo di rappresentazione
$$G =< S_1 \cup S_2|R_1 \cup R_2 \cup [S_1, S_2] >$$
Da questo si può ulteriormente osservare che gli elementi che generano G *commutano ma non per questo significa che* G *sia abeliano, ciò giustifica la presenza di* $[S_1, S_2]$ *nei relatori.*

Osservazione 9.4.4. *Da tutto questo posso osservare alcune cose:*

1. *Siano* $G_1 =< S_1|R_1 >$, $G_2 =< S_2|R_2 >$ *allora*

$$G_1 \times G_2 =< S_1 \cup S_2|R_1 \cup R_2 \cup [S_1S_2] >$$

2. $$G =< x_1, \cdots, x_n|\phi >\simeq \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z} \longrightarrow Ab(G) =< x_1, \cdots, x_n|\bigcup[x_ix_i] >\simeq \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

Esempio 9.4.3. *Da quanto detto fino ad ora possiamo fare alcuni esempi:*

1. ***Klein*** *dato* $G =< a, b|aba^{-1}b^{-1} = 1 >$ *allora*

$$Ab(G) =< ab|aba^{-1}b = 1\, ab = ba >=< ab|b^2 = 1 >= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

2. $G =< S|\phi >, S = \{x_1, \cdots, x_n\}$. *Allora*

$$Ab(G) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cdots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$$

   Rappresenta un gruppo abeliano con n *generatori.*

3. $G =< x, y|x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 >$ *l'abelianizzato è*

$$Ab(G) =< x, y|x^4 = y^2 = (xy)^2 = [x, y] = 1 >$$

   Poiché x, y *commutano la terza relazione diventa* $x^2y^2 = 1$ *e quindi utilizzando la seconda si deduce che* $x^2 = 1$. *Pertanto* $< x, y|x^4 = y^2 = (xy)^2 = [x, y] = x^2 = 1 >$, *dunque*

$$\begin{aligned} Ab(G) &=< x, y|x^4 = y^2 = (xy)^2 = [x, y] = 1 > \\ &=< x|x^2 = 1 > \times < y|y^2 = 1 > \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

4. *Sia* $S_3 =< s_1, s_2|s_i^2 = (s_1s_2)^3 = 1 >$ *il gruppo di sostituzioni su tre elementi; il suo abelianizzato è*

$$Ab(S_3) =< s_1, s_2|s_i^2 = (s_1s_2)^3 = [s_1, s_2] = 1 >$$

   Combinando la seconda e la terza relazione si ottiene $s_1^3s_2^3 = 1$, *e quindi, utilizzando l'idempotenza degli* s; *otteniamo* $s_1 = s_2^{-1}$. *Dunque applicando le proposizioni precedenti ho che*

$$Ab(SB) =< s_1, s_2|s_i^2 = (s_1s_2)^3 = [s_1, s_2] = s_1s_2 = 1 >=< s_1, s_2|s_i^2 = s_1s_2 = 1 >=< s_1|s_1^2 = 1 >\simeq \mathbb{Z}_2$$

   In modo analogo è possibile mostrare che $Ab(S_n) \simeq \mathbb{Z}_2, \forall n \geq 2$.

9.4.2 Teorema di Seifert-Van Kampen

Sia X spazio topologico e $U_1, U_2 \in \tau \setminus \{\phi\} | X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 \neq \phi$ siano connessi per archi. Le inclusioni danno luogo al seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[rr, dashed, "p"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\
 & U_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Che induce un diagramma commutativo sui gruppi fondamentali

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi(U_1, x_0) \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\
\Pi(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "i_{1*}"] \arrow[dr, "i_{2*}"'] & & \Pi(X, x_0) \\
 & \Pi(U_2, x_0) \arrow[ur, "j_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Sappiamo che

$$\Pi(U_1, x_0) =< S_1, R_1 >$$
$$\Pi(U_2, x_0) =< S_2, R_2 >$$
$$\Pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< S, R >$$

Definizione 9.4.5 (**Relazione** R_s)**.** *Le relazioni in R_S sono quelle che derivano dall'uguaglianza*

$$j_{1*}(i_{1*}s) = j_{2*}(i_{2*}s), \qquad \forall s \in \Pi(U_1 \cap U_2, x_0)$$

Cioè sia $s \in \Pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ dunque posso considerare

$$i_{1_*}s \in \Pi(U_1, x_0)$$

$$i_{2_*}s \in \Pi(U_2, x_0)$$

Ed entrambe considerarle le parole corrispondenti che indico con "$i_{1_*}s$" e "$i_{2_*}s$", dunque definisco la relazione R_s come

$$R_S = \left\{ "i_{1*}s", ("i_{1*}s")^{-1} \middle| s \in S \right\}$$

Teorema 9.4.1. ***(Seifert-Van Kampen)***
Sia X uno spazio topologico e $U_1, U_2 \subset X$ due aperti non vuoti e connessi per archi$|X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \neq \phi$ e connesso per archi e posto $x_0 \in U_1 \cap U_2$ siano

$$\pi(U_1, x_0) =< S_1 | R_1 >$$
$$\pi(U_2, x_0) =< S_2 | R_2 >$$
$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< S | R >$$

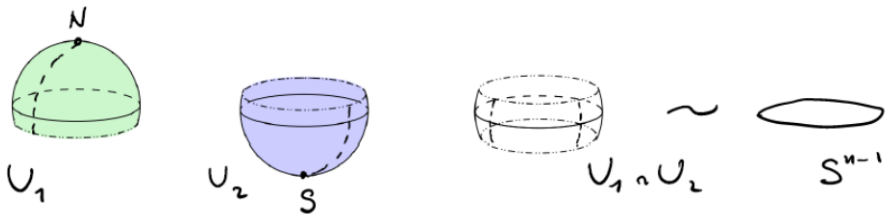
Allora presa in considerazione la relazione R_s, definita precedentemente, ottengo che

$$\pi(X, x_0) \simeq < S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup R_S >$$

9.4.3 Calcolo di gruppi fondamentali

1. Se U_1, U_2 sono semplicemente connessi allora anche X è semplicemente connesso, infatti $S_1 = S_2 = \phi$ allora $\pi(X, x_0) =< \phi|\phi >= \{1\}$.

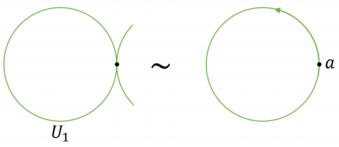
2. $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connesso $\forall n \geq 2$ cioè $\pi(\mathbb{S}^n, x_0) =< \phi|\phi >= \{1\}$, infatti $\mathbb{S}^n$ è unione di due aperti U_1, U_2 contenenti le due calotte chiuse con bordo l'equatore e tali che $U_1 \cap U_2$ abbia l'equatore come retratto di deformazione



U_1, U_2 sono contraibili: si retraggono con deformazione al polo nord N e al polo sud S rispettivamente, quindi anche $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connesso $\forall n \geq 2$.

3. Sia $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ il bouquet di due circonferenze

U_1, U_2 si retraggono a una circonferenza con deformazione



Per cui $\pi(U_1, x_0) =< \alpha|\phi >\simeq \mathbb{Z}$ con α la classe del cappio a e $\pi(U_2, x_0) =< \beta|\phi >$ con β la classe di un cappio b che percorre la circonferenza una volta in senso antiorario.
$U_1 \cap U_2$ è contraibile quindi

$$\pi\left(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0\right) =< \alpha, \beta|\phi >= \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Il gruppo libero generato da α, β.

4. Si può ripetere lo stesso ragionamento e applicare l'induzione su n per il bouquet di n circonferenze $\underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{n-volte}$.
In generale

$$\pi \underbrace{\left(\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1\right)}_{n-volte} = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n-volte}$$

5. Siano X, Y spazi topologici e sia $Z = X \vee Y$ l'unione a un punto di X, Y in cui $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ sono identificati. Supponiamo che $_0$ abbia in X un intorno aperto contraibile A e y_0 abbia un intorno aperto contraibile B in Y, allora se $\pi(X, x_0) =< S_1|R_1 >$ e $\pi(Y, y_0) =< S_2|R_2 >$ allora

$$\pi(Z, x_0) =< S_1 \cup S_2|R_1 \cup R_2 >$$

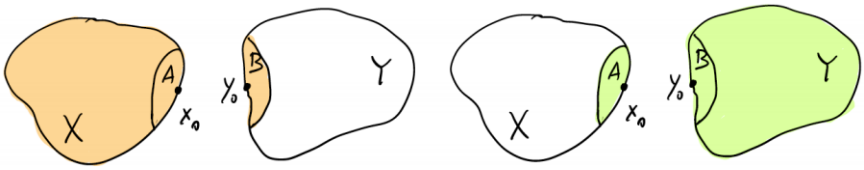
Ad esempio $\pi(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1, x_0) =< \alpha|\phi >\simeq \mathbb{Z}$ e $\pi(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2, x_0) = \{1\}$.
la scomposizione di Seifer-Van Kampen è data da:

- $U_1 = {}^{X \cup B}/_{\sim}$ aperto in $X \vee Y = {}^{U \amalg Y}/_{\sim}$
- $U_2 = {}^{X \cup A}/_{\sim}$ aperto in $X \vee Y$.

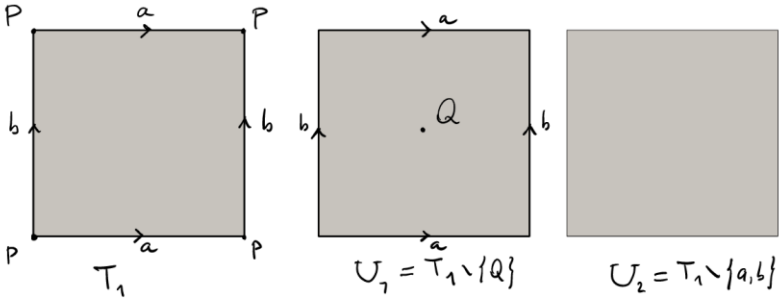
Dunque

$$U_1 \sim {}^{X}/_{\sim} \quad U_2 \sim {}^{A \cup B}/_{\sim}$$

Mentre $U_1 \cap U_2 = {}^{A \cup B}/_{\sim} \sim \{x_0\}$ è contraibile .



6. Sia $X = T_1$ il toro



U_1 ha i lati $\{a, b\}$ del poligono come retratto di trasformazione, quindi

$$U_1 \sim \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 = \{a, b\} \subset T_1$$

U_2 è contraibile (è convesso). L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha la circonferenza C come retratto di deformazione. Sia $\pi(C, x_0) =< x|\phi >$ e $\pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< \gamma|\phi >$ con il generatore corrispondente a c nell'isomorfismo $\pi(U_1 \cap U_2, x_0) \simeq \pi(C, x_0)$ dato dall'inclusione $C \hookrightarrow U_1 \cap U_2$.
Sia $i : \{a, b\} \hookrightarrow U_1$ l'inclusione e sia δ cammino da P a x_0. Si hanno isomorfismi

$$i_* : \pi(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, P) \to \pi(U_1, P)$$
$$\mu_\delta : \pi(U_1, P) \to \pi(U_1, x_0)$$

posto $\alpha = \mu_\delta(u_*(a))$ e $\beta = \mu_\delta(i_*(b))$, si ottiene

$$\begin{cases} \pi(U_1, x_0) =< \alpha, \beta|\phi >\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ \pi(U_2, x_0) =< \phi|\phi >= \{1\} \\ \pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< \gamma|\phi > \end{cases}$$

Per il teorema ho che $\pi(T_1, x_0) =< \alpha, \beta|R_S >$ con $S = \{\gamma\}$. Per determinare "$i_{1,*}\gamma$" e "$i_{2,*}\gamma$", osserviamo che

$$\mu_{\overline{\delta}}\left(i_{1,*}\gamma\right) = \left[(\delta * c) * \overline{\delta}\right]$$

E

$$r_*\mu_{\overline{\delta}}\left(i_{1,*}\gamma\right) = aba^{-1}b^{-1}$$

Corrispondente al cammino $\left(((a * b) * \overline{a}) * \overline{b}\right)$, dunque

$$i_{1,*}\gamma = \mu_\delta i_*\left(aba^{-1}b^{-1}\right) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

Inoltre $i_{2,*} = 1$ poiché $\pi(U_2, x_0) = \{1\}$ dunque $R_S\{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\}$ e

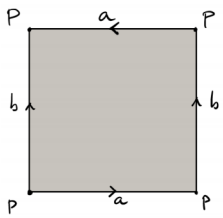
$$\pi(T_1, x_0) =< \alpha, \beta|\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 >= Ab(< \alpha, \beta|\phi >) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

In particolare è un gruppo abeliano.

7. Analogamente per la bottiglia di Klein K si ottiene

$$\pi(K, x_0) =< \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 >$$

Dunque un gruppo non abeliano.



Osservazione 9.4.5. $G \cong G' \Rightarrow T(G) \cong T(G')$

9.5 Classificazione superfici compatte

Teorema 9.5.1. ***(Classificazione superfici compatte)***
Sia S una superficie compatta, allora

1. *S è omeomorfa ad una superficie T_g, $(g \geq 0)$ oppure ad una superficie U_h con $h \geq 1$.*
2. *$T_g \not\simeq U_h$, $\forall g \geq 0$, $h \geq 1$*
3. *Se $g \neq g'$ allora $T_g \not\simeq T_{g'}$ e se $h \neq h'$ allora $U_h \not\simeq U_{h'}$.*

Dimostrazione.

Parte 1
È stato precedentemente dimostrato che ogni superficie compatta è omeomorfa a un poligono con lati identificati a coppie, della forma T_g con $g \geq 0$ (somma connessa di g tori), oppure della forma U_h con $h \geq 1$ (somma connessa di h piani proiettivi).

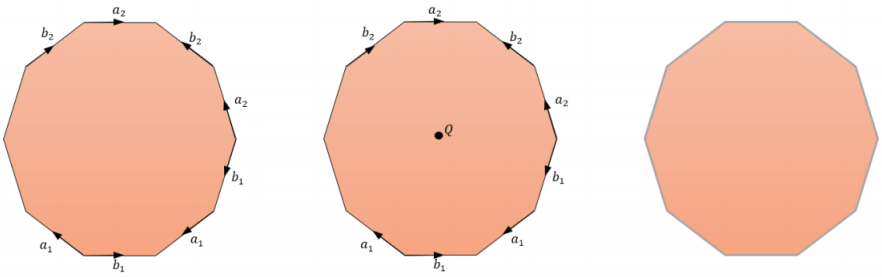
Parte 2
Mostreremo che $\Pi(T_g) \ncong \Pi(U_h)$. In questo modo se per assurdo suppongo che $T_g \simeq U_h$ allora otterrei un assurdo e da qui la mia tesi.
Finora sappiamo che

$$\pi\left(\mathbb{S}^2, x_0\right) = \{1\} \quad \pi(T_1, x_0) \simeq \mathbb{Z}^2$$

Il calcolo di $\pi(T_g, x_0)$ e di $\pi(U_h, x_0)$ su può fare come il toro T_1 ricordando che fissato un punto Q interno al poligono se $a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g$ sono i lati di T_g, $T_g \setminus \{Q\}$ ha il bouquet

$$\{a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g\} \simeq \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{\text{2g-volte}}$$

Come retratto di deformazione. Vediamo T_g



T_g $\qquad$ $X_1 = T_g \setminus \{Q\}$ $\qquad$ $X_1 = T_g \setminus \{a_i, b_i\}$

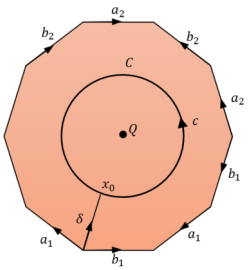
$T_g = X_1 \cup X_2$ con

- $X_1 \sim \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}$ 2g-volte.
- X_2 contraibile.
- $X_1 \cap X_2$ ha la circonferenza C come retratto di deformazione. Data γ al classe di C sia

$$\pi(X_1 \cap X_2, x_0) =< \gamma | \phi > \simeq \mathbb{Z}$$

Sia $i : \{a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g\} \hookrightarrow X_1$ la mappa inclusione e $r : X_1 \to \{a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g\}$ la retrazione, questi inducono isomorfismi

$$\begin{tikzcd} \pi(\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1, P) \arrow[r, bend left, "i_*"] & \pi(X_1, P) \arrow[l, bend left, "r_* = (i_*)^{-1}"] \end{tikzcd}$$



Sia u_f l'isomorfismo per il cambio di punto base

$$\begin{tikzcd} \pi(X_1, P) \arrow[r, bend left, "u_\delta"] & \pi(X_1, x_0) \arrow[l, bend left, "u_{\overline{\delta}} = (u_\delta)^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Posto $\alpha_i = u_\delta(i_* a_i)$ e $\beta_i = u_\delta(i_* b_i)$ con $i = 1, \cdots, g$ si ha che

$$\pi(X_1, x_0) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g | \phi >$$

Come per il toro T_1 si ha che $u_{\overline{\delta}}(i_{1,*}\gamma) = \left[(\delta * c) * \overline{\delta}\right]$ e che in $\pi(\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1, P)$

$$r_* u_{\overline{\delta}}(i_{1,*}\gamma) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

Dunque

$$i_{1,*}\gamma = u_\delta i_* \left(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\right) = \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$$

Perciò ho che

$$R_S = \left\{\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}\right\}$$

$$\pi(T_g, x_0) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g | \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1 >$$

Se $g > 1$ è un gruppo non abeliano.

Per le superfici U_h si procede allo stesso modo ottenendo l'unica relazione $\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1$ tra i generatori $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ corrispondenti ai cappi di $a_1, \cdots, a_h$ con $\alpha_i = u_\delta(i_* a_i)$ quindi

$$\pi(U_h, x_0) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_h | \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 >$$

Questo gruppo è abeliano solo per $h = 1$. $\square$

Per mostrare che i gruppi fondamentali sono a due a due non isomorfi calcoliamo i loro abelianizzanti, inoltre è difficile stabilire che due gruppi con presentazione non sono isomorfi.

Proposizione 9.5.1. *Valgono i seguenti fatti:*

1. $\forall g \geq 1$ *vale che*
$$Ab(\pi(T_g, x_0)) = \mathbb{Z}^{2g}$$

2. $\forall h \geq 1$ *vale che*
$$Ab(\pi(U_h, x_0)) = \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$$

Dimostrazione. Dimostro procedendo per ordine.

<u>Punto 1</u>
La relazione $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$ del gruppo

$$\pi(T_g, x_0) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g | \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 >$$

È prodotto dei commutatori $[\alpha_1, \beta_1], \cdots, [\alpha_1, \beta_g]$ quindi ho che

$$Ab(\pi(T_g, x_0)) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g | [\alpha_1, \alpha_j] = [\alpha_i, \beta_j] = [\beta_i, \beta_j] = 1,\ i, j = 1, \cdots, g >$$
$$=< \alpha_1|\phi > \times \cdots \times < \alpha_g|\phi > \times < \beta_1|\phi > \times \cdots \times < \beta_g|\phi >= \mathbb{Z}^{2g}$$

<u>Punto 2</u>
Se i generatori $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ del gruppo

$$\pi(U_h, x_0) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_h | \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_h^2 = 1 >$$

Commutano, la relazione $\alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_h^2 = 1$ diventa $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h)^2 = 1$. Posto $\alpha_0 = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h$ si ha per una proposizione precedente che

$$Ab(\pi(U_h, x_0)) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_h | \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_h^2 = 1,\ [\alpha_i, \alpha_j] = 1, \forall i, j >$$
$$=< \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_h | \alpha_0 = \alpha_1\cdots\alpha_h,\ \alpha_0^2 = 1,\ [\alpha_i, \alpha_j] = 1,\ \forall i, j >$$
$$=< \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{h-1} | \alpha_0^2 = 1,\ [\alpha_i, \alpha_j] = 1,\ \forall i, j >$$

Quindi

$$Ab(\pi(U_h, x_0)) =< \alpha_1, \cdots \alpha_{h-1} | [\alpha_i, \alpha_j] = 1,\ i, j = 1, \cdots, h-1 > \times < \alpha_0 | \alpha_0^2 = 1 >= \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$$

□

Osservazione 9.5.1. *Gli elementi* $(0, b) \in \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$ *hanno ordine 2, cioè* $2(0, b) = (0, b) + (0, b) = (0, 0)$. *Sono gli elementi di <u>torsione</u> del gruppo abeliano* $Ab(\pi(U_h, x_0))$.

Definizione 9.5.1. ***(Elemento di torsione)***
Sia G un gruppo abeliano, un elemento $g \in G$ si dice di torsione se $\exists n \in \mathbb{N} | ng = 0$. Denoteremo l'insieme degli elementi di torsione di G con $T(G)$; è immediato verificare che $T(G)$ è un sottogruppo di G, detto sottogruppo di torsione.

Proposizione 9.5.2. *Siano G, G' due gruppi abeliani allora valgono i seguenti fatti:*

1. *Se φ è un morfismo di gruppi allora $\varphi(T(G)) \subset T(G')$.*

2. *Se φ è un isomorfismo allora $\varphi|_{T(G)} : T(G) \to T(G')$ è un isomorfismo.*

Corollario 9.5.1. *Sia $\varphi : G \to G'$ un isomorfismo di gruppi abeliani allora φ induce un isomorfismo $\overline{\varphi} : G/T(G) \to G'/T(G')$.*

Corollario 9.5.2. *$\forall g, h$ i gruppi $\pi(T_g, x_0), \pi(U_h, x_0)$ non sono isomorfi.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che tali gruppi siano isomorfi allora per un risultato precedente ho che

$$Ab(\pi(T_g, x_0)) \simeq Ab(\pi(U_h, x_0))$$

Ma essendo tali gruppi abeliani allora per il corollario precedente ho che

$$T\left(Ab(\pi(T_g, x_0))\right) \simeq T\left(Ab(\pi(U_h, x_0))\right)$$

Ma dato che

$$T(Ab(\pi(T_g, x_0))) = \{0\}$$
$$T(Ab(\pi(U_h, x_0))) = \{(0,0),(0,1)\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Ciò rappresenta un assurdo e quindi la tesi è dimostrata. □

Proposizione 9.5.3. *Sia $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ un isomorfismo di gruppi allora $n = m$.*

Corollario 9.5.3. *Valgono i seguenti fatti:*

1. *Se $g = g'$ allora $\pi(T_g, x_0) \not\simeq \pi(T_g, x_0)$.*
2. *Se $h \neq h'$ allora $\pi(U_h, x_0) \not\simeq \pi(U_h, x_0)$.*

Dimostrazione. Dimostro procedendo per ordine.

Punto 1
Se $g = 0$ oppure $g' = 0$ uno dei gruppi è banale e l'altro no, per cui non sono isomorfi. Dunque supponiamo che $g \geq 1$, $g' \geq 1$ perciò se $\pi(T_g, x_0)$, $\pi(T_{g'}, x_0)$ fossero isomorfi si avrebbe anche che

$$\mathbb{Z}^{2g} \simeq \not\simeq \mathbb{Z}^{2g'}$$

Ma questo è assurdo con quanto supposto.

Punto 2
Se $\pi(U_h, x_0), \pi(U_{h'}, x_0)$ fossero isomorfi allora sarebbe che $\mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}^{h'-1} \times \mathbb{Z}_2$ dunque per una proposizione precedente si avrebbe anche che

$$\mathbb{Z}^{h-1} \simeq {\mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2}/{\mathbb{Z}_2} \simeq {\mathbb{Z}^{h'-1} \times \mathbb{Z}_2}/{\mathbb{Z}_2} \simeq \mathbb{Z}^{h'-1}$$

□

9.5.1 Retrazione per il gruppo fondamentale

Abbiamo già visto precedentemente che la condizione necessaria affinché A sia un retratto di X è che

$$i_* : \pi(A, a) \to \pi(X, a)$$

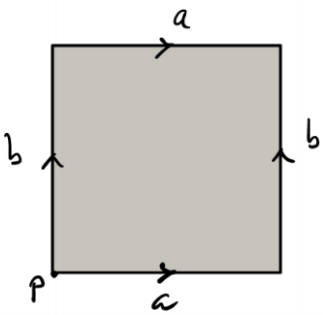
Sia iniettiva, inoltre la condizione necessaria affinché A sia retratta di deformazione di X è i_* è un isomorfismo.

Esempio 9.5.1. *Da quanto detto precedentemente posso vedere che:*

1. *$\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ non è retratto del disco chiuso $\mathbb{D}^2$ in quanto $\pi(\mathbb{S}^1, x_0)$ non è banale.*
2. *Nel toro $A = \{a\}$ è retratto di T_1 ma non è retratto di deformazione in quanto*

$$\pi(T_1, P) \simeq \mathbb{Z}^2 \not\simeq \pi(A, P) \simeq \mathbb{Z}$$

Anche $\{b\}$ è retratto.



3. *Nella bottiglia di Klein K il ruolo di a, b è differente. $\{b\}$ è retratto (non di deformazione) di $K = {}^{[0,1]\times[0,1]}\!/_{\sim}$ con*

$$\begin{array}{lll} (0,t) \sim (1,t) & \forall t \in [0,1] & "b" \\ (s,0) \sim (1-s,1) & \forall a \in [0,1] & "a" \end{array}$$

Infatti la mappa $r : K \to \{b\}$ data $r([(s,t)]) = [(0,t)]$ è ben definita e continua poiché $r([(1,t)]) = [(0,t)] = r([(0,t)])$ e $r([(s,0)]) = [(0,0)] = P = [(0,1)] = r([(1-s,1)])$. Invece $A = \{a\}$ non è retratto di K. Si ha $\pi(K,P) =< a, b|abab^{-1} = 1 >$ e $\pi(A,P) =< a|\phi >$. Supponiamo, per assurdo, che esista la retrazione $r : K \to A$.
Si ha $i_*(a) = 0 \Rightarrow r_*(a) = r_* \circ i_*(a) = a$. Inoltre

$$r_*(b) \in < a|\phi > \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} | r_*(b) = a^k$$

Ma allora ho che

$$r_*(abab^{-1}) = aa^k a \left(a^{-1}\right)^k = a^2 = r_*(1) = 1$$

Cioè dovrebbe essere $a^2 = 1$ in $\pi(A,P)$ e ciò rappresenta una contraddizione.

4. *Un esempio con $\pi(A, x_9)$ e $\pi(X, x_0)$ isomorfi. Sia $\mathbb{S}^1$ la circonferenza unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^2$ e sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ con P estremo alla circonferenza, allora $A = \mathbb{S}^1$ non è retratto di X: sia α un generatore di $\pi(A, x_0) =< \alpha|\phi >$ definito dal cappio*

$$a(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$$

$i_*(\alpha) = 1$ in $\pi(X, x_0)$ in quanto

$$F(s,t) = x_0 + (1-t)(i(a(s)) - x_0)$$

È un omotopia in X tra $i \circ a$ e il cappio costante ϵ_{x_0}, quindi $i_* : \pi(A, x_0) \to \pi(X, x_0)$ non è iniettivo.

Capitolo 10

Integrali nel campo complesso

10.1 Funzioni Olomorfe

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, dare f equivale a dare due funzioni $\mu, \nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | z := x + iy$

$$f(z) = \mu(x, y) + iv(x, y)$$

Quindi f è continua $\iff \mu, \nu$ sono continue.

Definizione 10.1.1. ***(Derivabile)***
Una funzione si dice derivabile se esiste

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Definizione 10.1.2. ***(Differenziabile)***
Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}, z \in \Omega$ si dice differenziabile in $\mathbb{Z}$ se preso $h \in \mathbb{C}$ esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Equivalentemente

$$f(z+h) - f(z) = hf'(z) + o(|h|)$$

Osservazione 10.1.1. *$o(|h|)$ denota una funzione φ a valori complessi tali per cui*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0$$

Analogamente al caso reale ho che

1. $(f + g)(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(fg)(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
3. Se $f(z) \neq 0$ allora $\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

Esempio 10.1.1. *Da queste prime definizione si può subito vedere che*

1. *L'identità $f(z) = z$ ha derivata*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{h} = 1$$

2. *Il coniugato $f(z) = \overline{z}$ ha derivata*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1 & h \geq 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

Dunque non è differenziabile.

Definizione 10.1.3. ***(Funzione olomorfa)***
Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con Ω aperto, si definisce olomorfa se è differenziabile (in senso complesso) $\forall x \in \Omega$. Sia

$$\theta(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f - olomorfa\}$$

Inoltre posso dire che f è olomorfa nel punto z_0 se $\exists U$ interno del punto tale per cui f è olomorfa in tale intorno.

Proprietà 10.1.1. *Alcune proprietà caratteristiche delle funzioni olomorfe:*

1. ***Integrazione lungo curve***
   Se $\alpha \sim \beta$ congiungono due punti di Ω allora

$$\int_\alpha f = \int_\beta f$$

2. ***Regolarità***
   Se f è olomorfa allora $f \in C^\infty$.

3. ***Principio d'identità***
   Se due funzioni olomorfe in Ω coincidono su un disco piccolo quanto si vuole, allora $f = g$ su Ω

Teorema 10.1.1. ***(Equazioni di Cauchy Reimann)***
Sia $f = u+iv$ una funzione complessa su $\Omega \subset \mathbb{C}$. f è differenziabile in $z \in \Omega \iff u, v$ sono differenziabili in z e

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Inoltre vale che $f'(z) = f_x(z) = -if_y(z)$.

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$
Sia f differenziabile in z. Posto $h = rv$ con $r \in \mathbb{R}$ e $|v| = 1$ si ha che la derivata direzionale esiste $\forall v$ ed è tale che

$$D_v f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{f(z + rv) - f(z)}{r} = f'(z)v$$

In particolare per $v = 1$ si ha che $D_1 f(z) = f'(z) = f_x(z)$ mentre per $v = i$ si ha che $D_i f(z) = f'(z)i = f_i(z)$.
Dunque essendo $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$ le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y esistono in $z = x + iy$ e vale che

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = -i\left(u_y(z) + iv_y(z)\right)$$

Da cui si deduce che $u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$ in z.
Inoltre u, v sono differenziabili in quel punto quindi posto $h = a + ib \in \mathbb{C}$ allora ho che

$$f(z + h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|)$$

Dunque isolata la parte reale e quella immaginaria, ottengo che

$$u(x + h) - u(z) = u_x a - v_x b + o\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) = \nabla u \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)$$
$$v(z + h) - v(z) = u_x b + v_x a + o\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) = \nabla u \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

$\Longleftarrow$
Se u, v sono differenziabili in z e valgono le condizioni di CR si ha che, posto $h = a + ib$

$$\begin{cases} u(z + h) - u(z) = u_x a + u_y b + o\left(|h|\right) = u_x a - u_x b + o\left(|h|\right) \\ v(z + h) - v(z) = u_x a + u_y b + o\left(|h|\right) = u_x a + u_x b + o\left(|h|\right) \end{cases}$$

Da cui ottengo che

$$f(z+h)-f(z)=(u_x+iv_x)\,a+(-v_x+iu_x)\,b+o\left(|h|\right)=(u_x+iv_x)\,(a+ib)+o\left(|h|\right)=(u_x+iv_x)\,h+o(|h|)$$

Dunque f è differenziabili in z e vale che $f'(z)=f_x(z)$. $\square$

Corollario 10.1.1. *Dal precedente torema possiamo dedurre alcune cose:*

1. *La matrice Jacobiana della funzione reale*

$$(u,v):\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

È

$$J_f=\begin{bmatrix}u_x & -v_x\\ v_x & u_x\end{bmatrix}\Longrightarrow\det\left(J_f\right)=u_x^2+v_x^2=\left|f'(z)\right|^2\geq 0$$

2. *Se $f'(z)\equiv 0$ su Ω allora f è costante.*

3. ***Notazione di Wirtinger***
Sia $f:\Omega\to\mathbb{C}$ di classe C^1 allora

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Osservazione 10.1.2. *Dalle equazioni di CR si può dire che se $f:\Omega\to\mathbb{C}$ di classe C^1 e*

$$\frac{\partial f}{\partial z}=f'(z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$$

Allora la funzione è olomorfa.

Osservazione 10.1.3. *$\forall n\in\mathbb{N}$ vale che $\frac{\partial z^n}{\partial z}=nz^{n-1}$. Per induzione su n vedo che*

- $n=1$
Ho che $\frac{\partial z}{\partial z}=1$

- $n>1$
Per Leibniz ho che

$$\frac{\partial z^n}{\partial z}=(z^n)=\left(z^{n-1}\right)'z+z^{n-1}$$

Dunque per ipotesi induttiva ho che il tutto è equivalente a

$$(n-1)z^{n-2}z+z^{n-1}=nz^{n-1}$$

Quindi per ogni polinomio $p(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$ vale la formula

$$\frac{\partial p}{\partial z}=p'(z)=\sum_{i=1}^{n}a_iiz^{i-1}$$

10.2 Serie complesse

Definizione 10.2.1. *Sia $f = u + iv$ con $u, v \in C^2$ allora dico che f è armonica se*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa con $f = u + iv$ allora $f \in C^\infty$ e per le condizioni di CR ho che

$$u_{xx} = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$
$$v_{xx} = (-u_y)_x = -(u_x)_y = -(v_y)_y = -v_{yy}$$

Proposizione 10.2.1. *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica su un dominio semplicemente connesso Ω. Allora $\exists! v : \Omega \to \mathbb{R}$ (a meno di una costante) tale per cui*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Sia una funzione olomorfa.

Osservazione 10.2.1. *Da quanto visto fino ad ora si possono osservare un paio di cose:*

1. *Ogni punto di Ω ha un intorno aperto semplicemente connesso (ad esempio un disco aperto) allora localmente ogni n armonica è parte reale di f olomorfa.*
2. *Se $f = u + iv$ e $g = u + iv_1$ sono funzione olomorfe su Ω allora $f - g = i(v - v_1)$ è olomorfa con parte reale nulla. Per le condizioni di CR ho che*

   $$(v - v_1)_x \cong (v - v_1)_1 \cong 0$$

   Dunque segue che $v - v_1$ è una costante dunque f è unica a meno di una costante immaginaria.

Esempio 10.2.1. *Se $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ allora*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$$

Infatti si vede che posto $z = x + iy$, $u = \mathcal{R}(z^2 + z)$, inoltre $u = Im(iz^2 + iz)$.

10.2.1 Serie di potenze complesse

Osservazione 10.2.2. *Il piano complesso è uno spazio metrico compatto con distanza definita dal modulo, inoltre segue dalle disuguaglianze*

$$\max(|Re(z)|, |Im(z)|) \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$$

Che le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. $|\alpha_n - l| \to 0$
2. $\begin{cases} |Re(\alpha_n) - Re(l)| \to 0 \\ |Im(\alpha_n) - Im(l)| \to 0 \end{cases}$

Definizione 10.2.2. ***(Convergenza)***
Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni tali per cui $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, \Omega \subset \mathbb{C}$ e $f_n \to f$ allora diciamo che <u>*converge puntualmente*</u> *a f se $\forall z \in \Omega$*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(z) = f(z)$$

Mentre <u>*converge uniformemente*</u> *in Ω se*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

10.2.2 Convergenza di serie di funzioni

Definizione 10.2.3. *Sia $\sum_{k=0}^{n} f_n(z)$ una serie di funzioni tali per cui $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ allora diciamo che*

1. ***Puntualmente convergente:*** *se $\forall z \in \Omega$ la successione delle somme parziali definite come*

$$S_N(z) = \sum_{k=0}^{N} f_n(z)$$

Converge puntualmente a

$$S(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

2. ***Assolutamente convergente:*** *se la successione*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f(z)|$$

È convergente.

3. ***Uniformemente convergente:*** *se la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente.*

Osservazione 10.2.3. *Assoluta convergenza implica la puntuale.*

Dimostrazione. Per definizione so che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_n|$$

Converge quindi per quanto detto inizialmente so che $\sum |Im(z)|, \sum |Re(z)|$ converge quindi $\sum Re(z), \sum Im(z)$ convergono. □

Teorema 10.2.1. ***(M-test di Weierstrass)***
Sia $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni tali per cui

$$|f_n(z)| \leq M_n \qquad \forall z \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ converge allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge assolutamente e uniformemente in Ω.

Dimostrazione. Posto

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$$

Allora sapendo per ipotesi che $\sum_{k=1}^{+\infty} M_n$ converge allora $S_n \to S$ converge, quindi per definizione ho che

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 | \forall n > N \quad |S - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} M_n \right| < \epsilon$$

<u>Convergenza assoluta</u>
Per ipotesi so che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k| < \sum_{k=1}^{+\infty} M_k$$

Dunque la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente in Ω.

Convergenza uniforme

Per definizione ho che

$$\limsup_n |s(z) - s_n(z)| = \limsup_n \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \right| \leq \limsup_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_n| \limsup_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

Ma dato che

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k = |S - S_n|$$

E sapendo che tale successione converge allora $\limsup |S - S_n| = \lim |S - S_n|$ perciò per quanto visto inizialmente ho che $\forall n > N, |S - S_n| < \epsilon$ dunque definitivamente ho che

$$\limsup_n |s(z) - s_n(z)| \leq \epsilon$$

Quindi per definizione tale successione converge uniformemente in Ω. □

Esempio 10.2.2. *Alcuni esempi di convergenza sono:*

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ *converge uniformemente sul disco chiuso* $B_0(1)$.
2. *Definiamo* $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ *e definiamo* $\frac{1}{n^z} = e^{-z\log(n)}$.
   La serie
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-z\log(n)}$$
   Converge uniformemente su ogni regione $\{z \in \mathbb{C} | \mathcal{R}(z) \geq s\}$ *con* $s > 1$ *fissato. Infatti ho che se* $x \geq s$
   $$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| e^{-x\log(n) - iy\log(n)} \right| \leq e^{-s\log(n)}$$
   Quindi
   $$\left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^s}$$
   E la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ *converge per* $s > 1$.
   La funzione olomorfa
   $$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$
   È La zera di Riemann

10.2.3 Convergenza di serie di potenze

Teorema 10.2.2 (Hadamard). *Siano* $z_0, a_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *una serie di potenze e detto* R *raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$R = \left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, +\infty]$$

Allora

1. *La serie converge assolutamente nel disco* $B_{Z_0}(R)$ *e non converge* $\forall z \notin \overline{B_{z_0}(R)}$.
2. *La serie converge uniformemente su ogni disco chiuso* $\overline{B_{z_0}(r)}$ *con* $r < R$.

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo supporre $z_0 = 0$ se $0 < r < R$ prendo $t | r < t < R$. Essendo per ipotesi $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R^{-1} < t^{-1}$ allora per la caratterizzazione del limite superiore ho che

$$\exists N > 0 | \forall n \geq N, \quad \sqrt[n]{|a_n|} < t^{-1}$$

Dunque se $|z| \leq r$:

$$\begin{array}{ccc} |a_n| & < & t^{-n} \\ & \| & \\ |a_n z^n| & < & \left(\frac{r}{t}\right)^n < 1 \end{array}$$

Perciò per l'M-test la serie la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente e uniformemente in $\overline{B_0(r)}$. Valendo $\forall r < R$ allora la serie converge assolutamente sul disco aperto $\overline{B_0(R)}$.
Se $|z| > R$ si che che

$$|z|^{-1} < \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < t^{-1}$$

Dunque

$$\forall N, \exists n > N ||z|^{-1} < \sqrt[n]{|a_n|} < t^{-1}$$

Quindi esiste una sotto-successione di $\{a_n z^n\}$ formata da numeri complessi di modulo maggiore di 1 e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ non converge. □

Proposizione 10.2.2. *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ la serie derivata. Allora i raggi di convergenza delle due serie sono uguali.*

Dimostrazione. I coefficienti della serie derivata sono

$$b_n = (n+1)a_{n+1}$$

E

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{n+1}\,\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$$

Allora i lim sup delle due successioni sono uguali. □

Teorema 10.2.3. ***(Abel)***
Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza R positivo, allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

È una funzione olomorfa in $|z-z_0| < R$ e

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$$

Dimostrazione. Possiamo assumere senza perdita di generalità che $z_0 = 0$. Sia $z \neq 0, z \in B_0(R)$ e sia δ un numero reale positivo tale per cui $\overline{B_z(\delta)} \subset B_0(R)$ e $h \in B_0(\delta)$ allora

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{z+h-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n-1} \frac{\left(\frac{z+h}{z}\right)^n - 1}{\left(\frac{z+h}{z}\right) - 1}$$

Dunque per la proprietà delle serie geometriche ho che il tutto è equivalente a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z+h}{z}\right)^j = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j}(z+h)^j$$

Adesso rimane da dimostrare che converge uniformemente per $h \in B_0(\delta)$. Utilizzando il criterio di Weierstrass osserviamo innanzitutto che

$$|z+h| \leq |z| + |h| < |z| + \delta$$

Dunque possiamo scrivere che

$$\left| a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j}(z+h)^j \right| \leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |z|^{n-1-j}(|z|+\delta)^j \leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} (|z|+\delta)^{n-1} = n|a_n| (|z|+\delta)^{n-1}$$

Quindi posto

$$M_n = n|a_n| (|z|+\delta)^{n-1}$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ converge perché per la proposizione precedente questa nuova serie ha lo stesso raggio di convergenza di quella di prima e $|z|+\delta \in B_0(R)$ dunque converge assolutamente quindi la serie iniziale converge anche semplicemente.
Possiamo dunque calcolare il limite del rapporto incrementale nel seguente modo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lim_{h\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j}(z+h)^j = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Dunque f è differenziabile in $z \neq 0$ e

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Rimane il caso con $z = 0$ dunque

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} - a_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h^{n-1} - a_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n h^{n-1} = h \left(\sum_{n=2}^{+\infty} a_n h^{n-2} \right)$$

L'ultima serie converge con raggio ancora R e quindi $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = a_1$ quindi $f'(0) = a_1$ che è il valore della serie derivata per $z = 0$. □

Osservazione 10.2.4. *Ogni serie di potenze è olomorfa nel disco di convergenza.*

Esempio 10.2.3. *Alcuni esempi sono*

1. *La funzione esponenziale*

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Per il teorema 10.2.3 tale funzione è olomorfa su $\mathbb{C}$. La funzione è tale per cui $(e^z)' = e^z$ dunque dato $w \in \mathbb{C}$ la funzione

$$g_w(z) = e^{w-z} e^z$$

È una funzione costante in quanto $g_w'(z) = 0$. ponendo $z = 0$ si trova che $g_w(z) = e^w$.
Osserviamo ora che per $\theta \in \mathbb{R}$ ho che

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (i)^n \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (i)^{2k} \frac{\theta^{2k}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (i)^{2k+1} \frac{\theta^{2k}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{k!} \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{aligned}$$

dunque se $z = x + iy$ ho che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i\sin(y))$$

Pertanto sia $\alpha \in \mathbb{C}$ allora

$$e^z = \alpha$$

Può essere scritta rifacendomi a quanto visto prima, dunque

$$e^x e^{iy} = |\alpha| e^{i\mathcal{I}(\alpha)}$$

Allora

$$\begin{cases} x = \log(|\alpha|) \\ y = \mathcal{I}(\alpha) + 2k\pi \end{cases} \tag{10.1}$$

Pertanto la soluzione a tale equazione è

$$z = \log(|\alpha|) + i(\mathcal{I}(\alpha) + 2k\pi)$$

Ma dato che $k \in \mathbb{Z}$ si deduce che esistono infinite soluzioni.

2. *Le funzioni trigonometriche*

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2k!} \end{aligned} \tag{10.2}$$

Dunque si deduce che

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

A questo punto si vede che queste funzioni sono 2π periodiche ma non limitate e che vale $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$, $\forall z$.
L'immagine della funzione $\sin(z)$ è tutto $\mathbb{C}$. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ dunque ho che

$$\alpha = \sin(z) \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2i\alpha \iff e^{-iz}\left(\left(e^{iz}\right)^2 - 2i\alpha e^{iz} - 1\right) = 0$$

Dunque posto $e^{iz} = w$ l'equazione precedente si riconduce allo studio di un'equazione di secondo grado

$$w^2 - 2i\alpha w + 1 = 0$$

Ha due soluzioni non nulle quindi $e^{iz} = w$ ha infinite soluzioni.
Analogo discorso per il coseno.

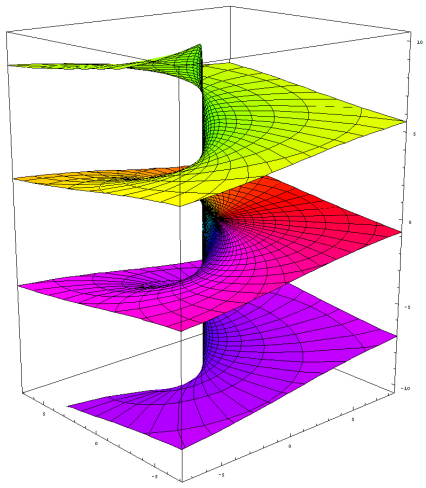
3. ***Logaritmo***
Per quanto dimostrato nei punti precedenti ho che la soluzioni ad equazioni della forma $e^w = z$ è

$$w = \log(|z|) + i(\mathcal{I}(z) + 2k\pi)$$

$\forall k$ la funzione $\log(|z|) + i(\mathcal{I}(z) + 2k\pi)$ non è continua su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Definizione 10.2.4. ***(Logaritmo principale)***
Il logaritmo principale è la funzione

$$\begin{aligned} Log\colon \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto Log(z) = \log(|z|) + i\mathcal{I}(z) \end{aligned}$$



Osservazione 10.2.5. *In generale* $Log(zw) \neq Log(z) + Log(w)$.

Proposizione 10.2.3. $Log(z)$ *è olomorfa e* $(Log(z))' = \frac{1}{z}$

Dimostrazione. Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \mathcal{R}(z) > 0\}$. Su Ω

$$Log(z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right) =: u + iv$$

Valgono le condizioni di CR dunque

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$v_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad v_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Quindi

$$(Log(z))' = u_x + iv_x = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}$$

A questo punto se $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ allora

$$\exists \alpha = \pm\frac{\pi}{2} \Big| e^{i\alpha} z \in \Omega$$

Dunque

$$Log\left(e^{i\alpha}z\right) = \log|z| + iArg\left(e^{i\alpha}z\right) = Log(z) + \alpha$$

Quindi esiste la derivata. □

Definizione 10.2.5. *Sia* $a \in \mathbb{C}$ *fissato, definiamo la funzione potenza*

$$z^a = e^{a\log(z)}$$

Inoltre sia $a \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$, *definiamo l'esponenziale*

$$a^z = e^{z\log(a)}$$

Osservazione 10.2.6. *Da tutto ciò possiamo osservare due cose:*

1. $(z^a)' = \left(e^{aLog(z)}\right)' \frac{a}{z} = e^{aLog(z)}\frac{a}{z} = az^{a-1}$
2. $(z^a)' = (Log(a))\, a^z$.

Osservazione 10.2.7. *Le differenti scelte tra le soluzioni* $w_k = \log(|z|) + i(\mathcal{I}(z) + 2k\pi)$ *portano a differenti definizioni della funzione logaritmo e quindi delle funzioni* z^a*: sono le* <u>*branche del logaritmo*</u> *per* $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$

$$Log_{(k)}z = \log(|z|) + i(\mathcal{I}(z) + 2k\pi)$$

10.3 Integrazione lungo curve

Definizione 10.3.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una funzione continua con $f(t) = u(t) + iv(t)$ poniamo*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Proposizione 10.3.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. ***Linearità***
   $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ *ho che*
   $$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$
2. $\forall f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$
   $$\mathcal{R}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathcal{R}f(t)\,dt$$
   $$\mathcal{I}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathcal{I}f(t)\,dt$$
3. $$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$
4. *Se $\theta : [c, d] \to [a, b]$ è di classe C^1 con inversa di classe C^1 allora*
   $$\int_{\theta(c)}^{\theta(d)} f(s)\,ds = \int_c^d f(\theta(t))\theta'(t)\,dt$$

Dimostrazione. Le proprietà (1) e (2) sono immediate dalla definizione di integrale.

Punto 3
Sia $w = \int_a^b f(t)\,dt$. Se $w = 0$ allora non c'è nulla da dimostrare. Se $w \neq 0$ allora poniamo $u = \frac{\overline{w}}{w}$ e quindi $|u| = 1$ e $uw = |w|$ dunque sfruttando i primi due punti ho che

$$|w| = u\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b uf(t)\,dt = \mathcal{R}\left(\int_a^b uf(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathcal{R}(uf(t))\,dt \leq \int_a^b |uf(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Punto 4
È la formula di sostituzione per l'integrale di Riemann. □

Definizione 10.3.2. *Una curva di classe C^1 nel piano complesso è una funzione $\gamma : J = [a, b] \to \mathbb{C}$ di classe C^1. L'immagine $\gamma(J) \subset \mathbb{C}$ p detta traccia o sostegno della curva. Una curva di classe C^1 a tratti è una funzione continua $\gamma : J \to \mathbb{C}$ di classe C^1 su J meno un numero finito di punti.*
Sia $\theta : [c, d] \to [a, b]$ una funzione di classe C^1 con inversa di classe C^1. Supponiamo che $\theta' > 0$ su $[c, d]$. Dunque θ è monotona crescente con $\theta(c) = a$, $\theta(d) = b$. La curva $\tilde{\gamma}$ di classe C^1 definita da $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\theta(s)) : [c, d] \to \mathbb{C}$ è detta riparametrizzazione di γ.

Definizione 10.3.3. *La lunghezza della curva di classe C^1, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ è definita come l'integrale*

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

Definizione 10.3.4. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva di classe C^1 con traccia contenuta in un aperto Ω di $\mathbb{C}$. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Definiamo*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_z^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Osservazione 10.3.1. *La definizione non dipende dalla parametrizzazione di γ purché la riparamentrizzzazione $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \theta$ conservi l'orientazione della curva. Infatti si ha che*

$$\int_{\tilde{\gamma}(s)} f(z)\,dz = \int_c^d f\left(\gamma\left(\theta(s)\right)\right)\gamma'(\theta(s))\theta'(s)\,ds = \int_{a=\theta(c)}^{b=\theta(d)} f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Proposizione 10.3.2. *L'integrale lungo una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ha le seguenti proprietà:*

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *continue*

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz + \mu \int_\gamma g(z)\,dz$$

2. $$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \max_\gamma |f(z)l(z)$$

3. *Sia $-\gamma$ la curva percorsa in senso opposto $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$ allora*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

4. *Se $\exists F \in O(\Omega)$ tale per cui $F' = f$ allora*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

In particolare se γ è chiusa: $\gamma(a) = \gamma(b)$ allora $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione (1) deriva dalla proposizione 1 mentre la dimostrazione (2) segue dalla (3) della dimostrazione 1:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dz\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \leq \max_\gamma |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt = \max_\gamma |f(z)|l(z)$$

<u>Punto 3</u>

Deriva dalla formula (4) della proposizione 1. Ponendo $s = \theta(t) = a + b - t$ allora

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_a^b f(\gamma(\theta(t))\gamma'(\theta(t))\,dt = \int_{\theta(a)=b}^{\theta(b)=a} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

<u>Punto 4</u>

Innanzitutto osserviamo che

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma) = (f \circ \gamma)\gamma'$$

Infatti se $F = U + iV$ e $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ allora

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma) = \frac{d}{dt}(U \circ \gamma_1 + i(V \circ \gamma_2) =$$

$$= (U_x \circ \gamma)\gamma_1' + (U_y \circ \gamma)\gamma_2' + i\left((V_x \circ \gamma)\gamma_1' + (V \circ \gamma)\gamma_2'\right) = (F_x \circ \gamma)\gamma_1' + (F_y \circ \gamma)\gamma_2'$$

Dalle equazioni di CR ho che $F' = f = F_x = -iF_y$ da cui

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma) = (f \circ \gamma)\gamma_1' + i(f \circ \gamma)\gamma_2' = (f \circ \gamma)\gamma'$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale ho che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

□

Osservazione 10.3.2. *L'integrale di una funzione continua lungo una curva di classe X^1 a tratti si definisce come la somma degli integrali lungo gli archi di classe C^1 della curva. L'integrale così ottenuto ha tutte le proprietà viste nella proposizione precedente.*

Esempio 10.3.1. *Sia $\gamma(t) = e^{it} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario, allora $\gamma'(t) = ie^{it}$ dunque*

$$\int_\gamma \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\, dt = 2\pi i \neq 0$$

Osservazione 10.3.3. *L'esempio precedente mostra che non esiste una funzione logaritmo olomorfa in tutti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti se esistesse tale $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ alomorfa tale per cui $e^{f(z)} = z$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si avrebbe che*

$$\left(e^{f(z)}\right)' = e^{f(z)} f'(z) = z' = 1 \Longrightarrow f'(z) = \frac{1}{e^{f(z)}} = \frac{1}{z}$$

Quindi f sarebbe una primitiva olomorfa di $\frac{1}{z}$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ quindi per (iv) dovrebbe essere

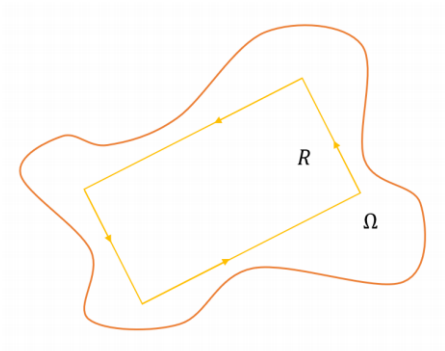
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$$

Contraddicendo quanto calcolato precedentemente.

Teorema 10.3.1. ***(Goursat)***
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f \in O(\Omega)$ e sia R un rettangolo contenuto in Ω allora vale che

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

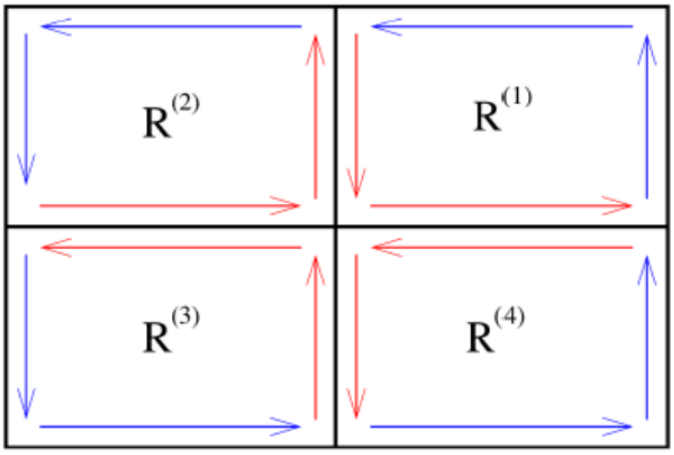
Dove ∂R si denota il bordo del rettangolo.



Dimostrazione. Per ogni rettangolo $R' \subset \Omega$ definiamo

$$\nu(R') = \left| \int_{\partial R'} f(z)\, dz \right|$$

Suddividaiamo il rettangolo R in quattro rettangoli uguali: $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$ chiaramente l'integrale di f sul bordo di R è uguale alla somma degli integrali di f sui bordi dei quattro rettangoli perché i lati comuni sono percorsi in verso opposto.



A questo punto possiamo vedere che se suppongo per assurdo che $\nu(R_i) < \frac{\nu(R)}{4}$, $\forall i$ allora

$$\nu(R) = \left| \int_{\partial R'} f(z)\, dz \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \nu(R_i) < \nu(R)$$

Ma ciò è impossibile, pertanto uno dei quattro rettangoli, facciamo conto (senza perdita di generalità) che sia $R_1^{(1)}$, si avrà che

$$\nu(R_1^{(1)}) \geq \frac{\nu(R)}{4}$$

Analogamente a prima, prendiamo ora il rettangolo $R^{(1)}$, suddividiamolo in quattro rettangoli uguali e ripetiamo il ragionamento, trovando un rettangolo $R_2^{(1)}$ tale per cui

$$\nu(R_2^{(1)}) \geq \frac{\nu(R_1^{(1)})}{4} \geq \frac{\nu(R)}{16}$$

Continuando in quanto modo costruiamo una successione di rettangoli $R \subset R_1^{(1)} \subset \cdots \subset R_n^{(1)}$ tale per cui

$$\nu(R_n^{(1)}) \geq \frac{\nu(R)}{4^n}$$

Sia $\{z_n\}$ una successione di punti con $z_n \in R_n$. La successione è di Cauchy poiché

$$\forall n, m \geq N,\ |z_n - z_m| \leq diam(R_N) \Rightarrow \exists z^* = \lim_{n \to +\infty} z_n$$

E $z^* \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} R_n$. La funzione f è olomorfa in z^* quindi per definizione ho che

$$\exists \lim_{z \to z^*} \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} = f'(z^*)$$

Quindi per definizione di limite ho che $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | \forall z \in B_{z^*}(\delta)$ vale che

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \epsilon$$

Dunque

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \epsilon |z - z^*|$$

Dato che ovviamente $f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*)$ è una funzione con primitiva olomorfa allora per la proprietà (4) si ha che

$$\int_{\partial R_n} (f(z^*) + (z - z^*) f'(z^*))\, dz = 0$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\nu(R_n) &= \left| \int_{\partial R'} f(z)\, dz \right| \\
&= \left| \int_{\partial R_n} f(z)\, dz - \int_{\partial R_n} (f(z^*) + (z - z^*) f'(z^*))\, dz \right| \\
&= \left| \int_{\partial R_n} f(z) - f(z^*) - (z - z^*) f'(z^*)\, dz \right| \\
&\leq \int_{\partial R_n} |f(z) - f(z^*) - (z - z^*) f'(z^*)|\, dz \\
&\leq \int_{\partial R_n} \epsilon |z - z^*|\, dz
\end{aligned}$$

A questo punto considerato che $z \in R_n$ allora $|z - z^*| \leq diam(R_n)$ perciò

$$\nu(R_n) \leq \epsilon \mathrm{diam}(R_n) l(\partial R_n) \leq \epsilon \frac{\mathrm{diam}(R)}{2^n} \frac{l(\partial R)}{2^n} = \epsilon \frac{K}{4^n}$$

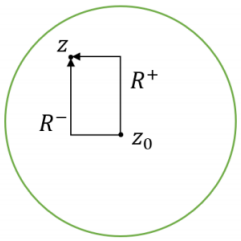
Dunque $\nu(R) \leq \epsilon K$ e quindi dall'arbitrarietà di ϵ segue la tesi. □

10.3.1 Teorema dell'integrale nullo di Cauchy (Locale)

Teorema 10.3.2 (Integrale nullo). *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un disco aperto, $f \in \Theta(D)$ e γ una curva chiusa con supporto in D. Allora*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Dimostrazione. Sia z_0 il centro del disco, preso $z \in D$ sia R il rettangolo con i lati paralleli agli assi i cui vertici opposti sono z_0 e z, sia ∂R^- la curva da z_0 a z costituita dal lato orizzontale del rettangolo che passa per z_0 e dal lato verticale del rettangolo che passa per il z e sia ∂R^+ la curva da z_0 a z costituita dal lato verticale del rettangolo che passa per z_0 e dal lato orizzontale del rettangolo che passa per z.



Per il teorema di Goursat ho che

$$\int_{\partial R} f(w)\, dw = 0 \Rightarrow \int_{\partial R^-} f(w)\, dw = \int_{\partial R^+} f(w)\, dw$$

Definiamo $F(z) = \int_{\partial R^-} f(w)\, dw = \int_{\partial R^+} f(w)\, dw$ e mostriamo che $f \in \Theta(D)$, per fare ciò devo calcolare le due derivate parziali:

- Sfruttando il tratto su R^- ho che per definizione

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{r \to 0} \frac{F(z + ri) - F(z)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_z^{z+ir} f(w)\, dw$$

  Dove l'integrale è sul segmento che unisce z a $z + ir$, parametrizzando tale segmento come $\gamma(t) = z + it$ e ponendo $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ troviamo che

$$\int_z^{z+ir} f(w)\, dw = \int_0^i i f(z + it)\, dt = i \left(\int_0^r u(z + it)\, dt + i \int_0^r v(z + it)\, dt \right)$$

A questo punto per la formula del valore medio ho che $\exists r_0, r_1 \in [0, r]$ tali per cui il tutto è equivalente a

$$ir(u(z + ir_0) + iv(z + ir_1))$$

Dunque tornado al limite precedente e facendo presente che per $r \to 0$ si ha che $r_0, r_1 \to 0$ allora

$$\lim_{r \to 0} i(u(z + ir_0) + iv(z + ir_1)) = if(z)$$

- Sfruttando il tratto su R^+ ho che per definizione

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{r \to 0} \frac{F(z + r) - F(z)}{r} = \lim_{r \to 0} \int_z^{z+r} f(w)\, dw$$

Con ragionamento analogo al precedente troviamo che

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z)$$

Dunque

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$$

Quindi F è olomorfa per l'osservazione precedente, inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f(z)$$

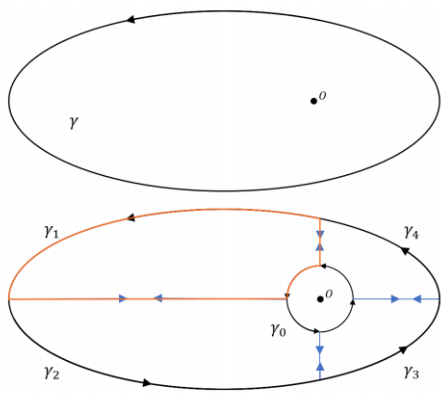
Quindi F è una primitiva di f e concludiamo per il punto (4) della proposizione 2. □

Corollario 10.3.1. *Sia D un disco aperto, sia $f \in \Theta(D)$ e siano γ_1, γ_2 curve con lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale il cui supporto è contenuto in D allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

($\gamma = \gamma_1 * (-\gamma_2)$ è chiusa).

Esempio 10.3.2. *Se γ è un ellisse con l'origine punto interno, gli integrali di $\frac{1}{z} \in \Theta(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ lungo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ si annullano.*



Quindi preso γ_0 una circonferenza centrata in 0 sufficientemente piccolo ho che

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 0$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

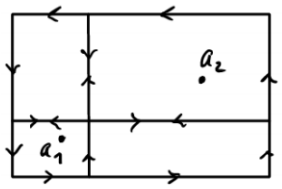
Teorema 10.3.3. *Sia $f \in \Theta(\Omega \setminus \{a_1, \cdots, a_n\})$ tale che*

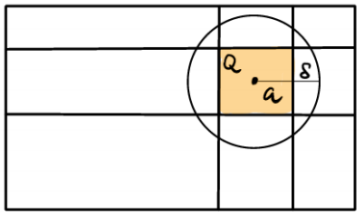
$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i) f(z) = 0$$

E sia $R \subset \Omega \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ un rettangolo allora

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

Dimostrazione. A meno di suddividere il rettangolo R in più rettangoli, possiamo assumere che esso contenga solo uno dei punti a_i che indicheremo con a. Dividiamo il rettangolo in otto rettangoli e un quadrato Q centrato in a, come in figura:





Applicando il teorema di Coursat agli otto rettangoli esterni otteniamo che l'integrale di f sul bordo esterno di R è uguale all'integrale sul bordo fi Q.
Per ipotesi ho che $\lim_{z \to a_i} (z - a_i) f(z) = 0$ dunque per definizione so che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | \forall a, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z)(z - a)| < \epsilon$$

Dato ϵ scegliamo Q in modo tale che sia contenuto nel disco centrato in a e di raggio δ e quindi per tutti si suoi punti valga $|f(z)(z - a)| < \epsilon$. Sia l la lunghezza del lato di Q. Si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial Q} f(z)\, dz \right| &\leq \int_{\partial Q} |f(z)|\, dz \\ &\leq \int_{\partial Q} \frac{\epsilon}{|z - a|}\, dz \\ &\leq 4\epsilon l \max_{z \in \partial Q} \left(\frac{1}{|z - a|} \right) \end{aligned}$$

Dato che abbiamo supposto a sia posizionato al centro del rettangolo allora

$$\max_{z \in \partial Q} \left(\frac{1}{|z - a|} \right) = \left(\min_{z \in \partial Q} |z - a| \right)^{-1} = \left(\frac{l}{2} \right)^{-1}$$

Perciò ottengo che

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)\, dz \right| \leq 8\epsilon$$

E dall'arbitrarietà di ϵ segue la tesi. □

Corollario 10.3.2. *Sia D un disco aperto, $f \in \Theta(D \setminus \{a_1, \cdots, a_n\})$ tale per cui*

$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i) f(z) = 0$$

$\forall i$ e sia γ una curva chiusa il cui supporto è contenuto in $D \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ allora

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

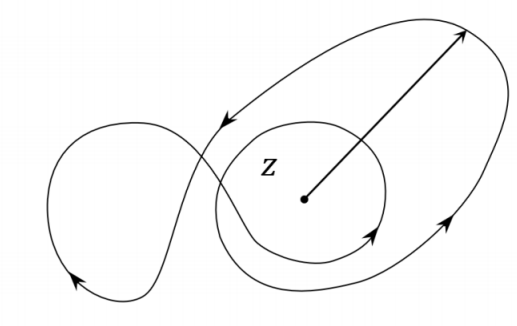
Dimostrazione. Si procede come nel teorema di Cauchy per costruire una primitiva olomorfa di f su $D \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$. Per applicare il teorema precedente bisogna scegliere curve opportune nella disposizione di $F(z)$. □

10.4 Indice di un punto rispetto ad una curva

Definizione 10.4.1 (Indice di z). *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus supp(\gamma)$, si definisce indice $z \in \mathbb{C}$ rispetto a γ*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Osservazione 10.4.1. *Questo valore indica il numero di giri fatti per percorrere tutta la curva dal vettore che congiunge il punto z coi punti della curva.*



Lemma 10.4.1. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva, $\Omega = \mathbb{C} \setminus supp(\gamma)$ e*

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto g(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt \end{aligned}$$

Allora

$$Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \iff e^{g(b)} = 1$$

Dimostrazione. Prima di tutto osservo che

$$g(b) = 2\pi i Ind_\gamma(z)$$

$\underline{Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \Longleftarrow e^{g(b)} = 1}$
Se assumiamo che $e^{g(b)} = 1$ allora le possibili soluzioni di $g(b)$ affinché ciò sia vero è che $g(b) = 2\pi i k$ con $k \in \mathbb{Z}$ in questo modo ho che $2\pi i k = 2\pi i Ind_\gamma(z)$ dunque $Ind_\gamma(z) = k \in \mathbb{Z}$.

$\underline{Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow e^{g(b)} = 1}$
Questo è ovvio in quanto posso supporre che $Ind_\gamma(z) = k$ per un qualche $k \in \mathbb{Z}$ dunque $g(b) = 2\pi i k$ perciò è ovvio che

$$e^{2\pi i k} = 1$$

□

Lemma 10.4.2. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus supp(\gamma)$. Sia $Ind_\gamma(z)$ l'indice di $z \in \Omega$ allora $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$*

Dimostrazione. Per dimostrare questo risultato utilizzerò il risultato precedente dunque il mio fine sarà dimostrare che $e^{g(b)} = 1$, per fare ciò utilizzo una funzione ausiliaria:

$$\begin{aligned} \varphi\colon [a,b] &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \varphi(s) = e^{g(s)} \end{aligned}$$

Si può subito notare che questa funzione è olomorfa e che

$$\varphi' = e^g g' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}$$

Dunque

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma - z}\right)' = \frac{\varphi'}{\gamma - z} - \frac{\varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} = \frac{\varphi'}{\gamma - z} - \frac{\varphi'}{\gamma - z} = 0$$

Perciò $\frac{\varphi}{\gamma - z}$ è una funzione costante e dato che per ipotesi ho che la mia curva è chiusa allora $\gamma(b) = \gamma(a)$ dunque

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} \Longrightarrow \varphi(b) = \varphi(a)$$

A questo punto per definizione ho che $\varphi(a) = e^{g(a)} = e^0 = 1$ e quindi

$$e^{g(b)} = 1$$

Dunque la mia tesi è dimostrata. □

Lemma 10.4.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, γ una curva chiusa con supporto $supp(\gamma) \subset \Omega$ e sia $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua sul $supp(\gamma)$ allora la funzione*

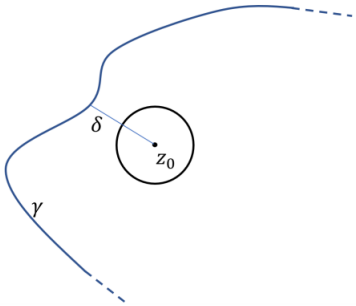
$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z}\, dw$$

È olomorfa su $\mathbb{C} \setminus supp(\gamma)$.

Dimostrazione. Per dimostrare questo lemma devo fare vedere prima che f è continua e poi che è olomorfa.

f è continua

Sia $z_0 \in \mathbb{C} \setminus supp(\gamma), \delta = dist(z_0, supp(\gamma))$ e sia $z \in B_{z_0}\left(\frac{\delta}{2}\right)$ allora $|z - supp(\gamma)| > \frac{\delta}{2}$, $\forall t$



Quindi

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= \left|\int_\gamma \left(\frac{g(w)}{w - z} - \frac{g(w)}{w - z_0}\right) dw\right| \\
&= \left|\int_\gamma \frac{g(w)(z - z_0)}{(w - z)(w - z_0)}\, dw\right| \\
&\leq |z - z_0| \int_\gamma \left|\frac{g(w)}{(w - z)(w - z_0)}\right| dw \\
&\leq \max_t \left|\frac{g(\gamma(t))}{(\gamma(t) - z)(\gamma(t) - z_0)}\right| |z - z_0| l(\gamma)
\end{aligned}$$

Ciò è vero in quanto $\frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)}$ è una funzione continua sul supporto di γ ed essendo tale insieme chiuso allora tale funzione ammette massimo.
Dato che

$$|\gamma(t) - z_0| \geq \delta$$

$$|\gamma(t) - z| \geq |\gamma(t) - z_0| - |z - z_0| \geq \frac{\delta}{2}$$

Allora

$$\left|\frac{g(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-z_0)}\right| = |g(\gamma)|\left|\frac{1}{\gamma(t)-z}\right|\left|\frac{1}{\gamma(t)-z_0}\right|$$
$$\leq \max_{\gamma}|g(w)|\frac{2}{\delta}\frac{1}{\delta}|z-z_0|l(\gamma)$$

Dunque è ovvio che

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)-f(z_0)| \leq \lim_{z\to z_0}\max_{\gamma}|g(w)|\frac{2}{\delta}\frac{1}{\delta}|z-z_0|l(\gamma) = 0$$

Dunque per definizione questa funzione è continua.

f è olomorfa

Sia $z_0 \in \mathbb{C}\setminus supp(\gamma)$ e definita

$$r(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,dw$$

Per la parte precedente ho che questa funzione è continua quindi per definizione $\exists \lim_{z\to z_0} r(z) = f'(z_0)$ dunque f è differenziabile in senso complesso e quindi dato che vale $\forall z_0$ per definizione f è olomorfa. □

Corollario 10.4.1. *L'indice $Ind_\gamma(z)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C}\setminus(\gamma)$.*

Dimostrazione. Per il lemma con $g = 1$ l'indice è funzione continua su $\mathbb{C}\setminus supp(\gamma)$ a volori in $\mathbb{Z}$. L'immagine di ogni componente connesso è connesso in $\mathbb{Z}$ ma tali connessi sono i punti e quindi un intero e ciò significa che l'indice è una costante. □

Corollario 10.4.2. *$Ind_\gamma(z) = 0, \forall z$ nelle componenti connesse illimitata di $\mathbb{C}\setminus supp(\gamma)$.*

Dimostrazione. Essendo il supporto di γ un insieme compatto allora esiste un unica componente connessa di $\mathbb{C}\setminus supp(\gamma)$ che sia non limitata.
Sia $supp(\gamma) \subset B(0,R)$. Dato $\epsilon > 0$ per $|z|$ grande vale che $\forall w \in supp(\gamma)$

$$\frac{1}{|w-z|} \leq \frac{1}{|z|-|w|} \leq \frac{1}{|z|-R} < \epsilon$$

Quindi

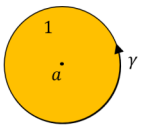
$$|Ind_\gamma(z)| < \frac{1}{2\pi}\epsilon l(\gamma)$$

Essendo $Ind_\gamma(z)$ costante sulla componente illimitata di $\mathbb{C}\setminus supp(\gamma)$ deve essere 0 □

Osservazione 10.4.2. *Il significato geometrico dell'indice è quello di contare il numero di avvolgimenti di γ attorno a z con segno positivo in senso antiorario, negativo in senso orario.*

Da quanto detto fino ad ora possiamo fare degli esempi:

1. Sie $\gamma(t) = a + re^{it}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ la circonferenza di raggio r centrata in a



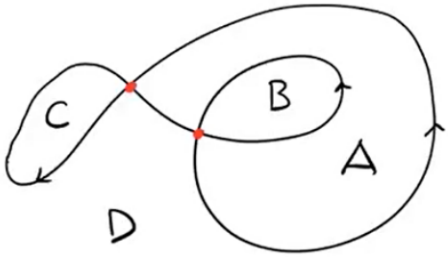
Allora

$$Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}rie^{it}\,dt = 1$$

Quindi $Ind_\gamma(z) = 1$ nel cerchio $Ind_\gamma(z) = 0$ all'esterno.

2. Se considero la circonferenza percorso in senso orario, quindi $-\gamma$ dunque l'indice è -1 ma all'esterno vale sempre 0.

3. Data una curva del tipo

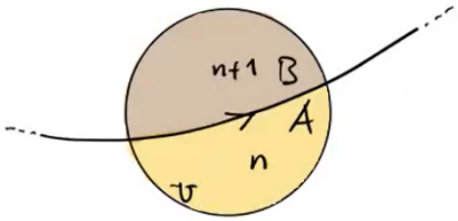


Allora possiamo dire che $\mathbb{C} \setminus supp(\gamma) = A \cup B \cup C \cup D$ (con D che rappresenta la componente connessa e illimitata) inoltre si vede che

$$Ind_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & A \\ 2 & B \\ -1 & C \\ 0 & D \end{cases}$$

10.4.1 Calcolo locale dell'indice

Osservazione 10.4.3. *Se γ separa U in due regioni A, B lasciando A a destra e B a sinistra (essendoci un orientamento ha senso parlare di destra e sinistra).*



Allora $\forall x \in B, w \in A$

$$Ind_\gamma(z) = Ind_\gamma(w) + 1$$

Questo procedimento funziona se ci sono punti che vengono percorsi una volta sola.

Osservazione 10.4.4. *Tutte le proprietà continuano a valere per curve C^1 a tratti.*

Teorema 10.4.1. ***(Formula Integrale di Cauchy-locale)***
Sia D un disco aperto, $f \in \Theta(D)$ e γ curva chiusa con $supp(\gamma) \subset D$ allora

$$f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

Dimostrazione. Sia $z \in D \setminus supp(\gamma)$ e introduciamo una funzione

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

La quale varia su $D \setminus \{z\}$ in maniera tale che sia ben definita. Essendo quoziente di funzioni olomorfe allora è olomorfa, inoltre essendo f continua si ha che

$$\lim_{w \to z} g(w)(w - z) = 0$$

Allora essendo g una funzione olomorfa su tutto un disco meno un punto sul quale vi è un controllo (il limite calcolato precedentemente) allora posso applicare il teorema dell'integrale nullo:

$$0 = \int_\gamma g(w)\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)2\pi i Ind_\gamma(z)$$

Da qui la nostra tesi

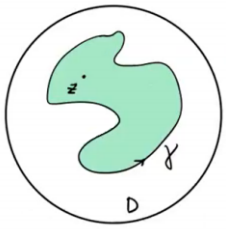
$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

□

Definizione 10.4.2. ***(Curva di Jordan)***
Si definisce curva di Jordan una curva continua, C^1 a tratti,semplice (iniettiva) e chiusa

Osservazione 10.4.5. *Sia γ una curva semplice,* ***curva di Jordan****, $\mathbb{C} \setminus supp(\gamma)$ è composto da componenti:*

- ***Parte interna:*** *limitata*
- ***Parte esterna:*** *illimitata*



Se γ è orientata positivamente allora $Ind_z(\gamma) = 1$, $\forall z \in Int(\gamma)$.

Corollario 10.4.3. *Se γ è una curva di Jordan in D e $f \in \Theta(D)$ allora $\forall z \in Int(\gamma)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Teorema 10.4.2. ***(Media integrale)***
Sia $f \in \Theta(\Omega)$ e $B_a(r) \subset \Omega$ un disco aperto allora vale

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{it}\right)\,dt$$

Dimostrazione. Dato che per ipotesi $f \in \Theta(\Omega)$ e $supp(\gamma) = B_a(r)$ rappresenta curva di Jordan allora per il corollario precedente, posto $z = a$, ho che

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\,dw$$

Essendo γ la parametrizzazione regolare della circonferenza:

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0, 2\pi] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto \gamma(t) = a + re^{it}\end{aligned}$$

Allora per la formula dell'area posso affermare che

$$\begin{aligned}f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-a}\gamma'(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(a+re^{it}\right)}{a+e^{it}-a} rie^{it}\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{it}\right)\,dt\end{aligned}$$

□

Osservazione 10.4.6. *Questo principio vale in analisi reali per funioni armoniche in quanto se prendiamo una funzione oolomorfa con parti reali della forma $f = u + iv$ si ottiene immediatamente che la formula della media per le funzioni armoniche u, v.*

Osservazione 10.4.7. *Sia $f \in \Theta(D \setminus \{a_1, \cdots, a_n\})$ tale per cui*

$$\lim_{z \to a_i} f(z)(z - a_i) = 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

Allora $\forall z \in D \setminus (\{a_1, \cdots, a_n\} \cup supp(\gamma))$ la tesi del teorema di Cauchy continua a valere.

10.4.2 Applicazioni della formula integrale(singolarità eliminabili)

Teorema 10.4.3. ***(Singolarità eliminabili)***
Sia $f \in \Theta(\Omega \setminus \{a\})$ con controllo su a: $\lim_{x \to a} f(z)(z - a) = 0$ allora

$$\exists \tilde{f} \in \Theta(\Omega) | \ \tilde{f}\Big|_{\Omega \setminus \{a\}} = f$$

Dimostrazione. Per l'osservazione precedente so che se $f \in \Theta(\Omega \setminus \{a\})$ e $\lim_{x \to a} f(z)(z - a) = 0$ allora posto $\gamma = \partial B_a(r)$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

È olomorfa su $B_a(r)$ per un lemma precedenza, dunque posso definire

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ g(z) & z \in B_a(r) \end{cases}$$

È olomorfa su Ω. □

Definizione 10.4.3. ***(singolarità eliminabile)***
Se $f \in \Theta(\Omega \setminus \{a\})$ e $\lim_{z \to a} f(z)(z - a) = 0$, a è detta singolarità eliminabile di f

Esempio 10.4.1. *Sia $f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^2} \in \Theta(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ questa funzione è quoziente di funzioni olomorfe e quindi è olomorfa. Inoltre posso sviluppare la funzione come serie:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{z^{2k-2}}{(2k)!}$$

Dunque

$$\lim_{z \to 0} f(z) z = 0$$

quindi $z = 0$ è singolarità eliminabile di f e $\tilde{f}(0) = \lim_{z \to 0} f(z) = -\frac{1}{2}$.

Proposizione 10.4.1. ***(Teorema di Weierstrass)***
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in \Theta(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ allora $\exists \overline{B_{z_0}(r)} \subset \Omega | \forall z \in B_{z_0}(r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Inoltre posto $\gamma = \partial B_{z_0}(r)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw$$

Dimostrazione. Dalla formula integrale per $z \in B_{z_0}(r)$ ho che

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} \, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \, dw \end{aligned}$$

Dato che $w \in \partial B_{z_0}(r)$ allora $|w - z_0| \geq |z - z_0|$ perciò

$$|\alpha| = \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$$

Dunque dato che

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$$

Allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw$$

A questo punto essendo $|w - z_0| = r, \forall w \in \gamma$ e dato che $|z - z_0| < r$ allora posso affermare che $\exists t < r || z - z_0| \leq t$ perciò

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| \leq \frac{t}{r} < 1$$

Per M-test di Weierstrass la serie converge uniformemente a w e quindi l'integrale della serie è la serie degli integrali dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n$$

Dunque

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

□

Corollario 10.4.4. *Ogni funzione olomorfa è di classe C^∞.*

Dimostrazione. Se $f \in \Theta(\Omega), f$ è analitica e la serie di potenze sono derivabili con derivata $f' \in \Theta(\Omega)$, ma $f' = f_x = -if_y \Rightarrow f \in C^1(\Omega)$. Ripetendo il ragionamento con f_x, f_y e poi così via si ottiene che $f \in C^\infty(\Omega)$. □

Corollario 10.4.5. ***(Maggiorazione di Cauchy)***
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f \in \Theta(\Omega)$ allora:

1. *Esistono le derivate complesse n-esime $f^{(n)}$, $\forall z \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Se $\overline{B_{z_0}(r)} \subset \Omega$ e $\gamma = \partial B_{z_0}(r) \subset \Omega$ vale che*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

3. *Sia $M = \max_\gamma (|f|)$ allora ho che*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M}{r^n}$$

Dimostrazione. Dimostro procedendo con ordine.

<u>Punto 1</u>
Se $f \in \Theta(\Omega)$ allora per un risultato precedente supponiamo che $f \in C^\infty(\Omega)$ dunque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega \quad \exists f^{(n)}(z)$$

<u>Punto 2</u>
Dato che $f \in \Theta(\Omega)$ per ipotesi allora per il teorema di Weierstrass ho che $\forall z \in B_{z_0}(r) \subset \Omega$ vale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Cioè f è una funzione analitica dalla quale, derivando, si ottiene appunto la seconda tesi in quanto

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

<u>Punto 3</u>
Preso nuovamente in considerazione il punto precedente posso vedere che

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \left|\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\right|\,dw \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}l(\gamma)\end{aligned}$$

Ma dato che γ è una circonferenza ho che $l(\gamma) = 2\pi r$ e quindi la mia tesi

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

□

Teorema 10.4.4. ***(Luiville)***
Sia $f \in \Theta(\mathbb{C})$ (funzione intera) e limitata allora è costante.

Dimostrazione. Dato che per ipotesi ho che f è limitata allora $\exists K := \sup_{\mathbb{C}}|f|$, inoltre posso usare il risultato precedente e considerare una circonferenza $B_r(0)$ dunque

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!K}{r^n}$$

Quindi, dato che tale circonferenza può essere estesa a tutto $\mathbb{C}$ essendo f definita per ipotesi su tutto $\mathbb{C}$ allora ho che

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \lim_{r\to+\infty}\frac{n!K}{r^n} = 0$$

In particolar modo si ha per $n = 1$ quindi f è una funzione costante. □

Corollario 10.4.6. *Sia $f \in \Theta(\mathbb{C}), f = u + iv$. Se u oppure v è limitata allora f è costante.*

Dimostrazione. Sia $g(z) = e^{f(z)} \in \Theta(\mathbb{C})$ allora

$$|g(z)| = \left|e^u e^{iv}\right| = |e^u|\left|e^{iv}\right| \leq |e^u| \leq e^M$$

Quindi se u è limitata allora f è limitata quindi per Luiville g è una costante, quindi

$$0 = g' = e^f f' \Rightarrow f' = 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

Dunque f è costante.
Analogo discorso se supponiamo che v è limitata, basta osservare che $\left|e^{-if(z)}\right| = e^{v(z)}$ □

Osservazione 10.4.8. *È importante vedere che per questi risultati f deve essere intera in quanto per domini più piccoli di $\mathbb{C}$ non vale.*

Teorema 10.4.5 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Sia $p(z) = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polinomio non costante allora $p(z)$ ha una radice $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo suppongo che $p(z) \neq 0$ allora $\forall z \in \mathbb{C}$ ho che

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} \in \Theta(\mathbb{C})$$

Si vede che f una funzione intera e limitata in quanto la funzione

$$h(z) := \frac{z^n}{p(z)} = \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} \cdots + \frac{a_0}{z^n}}$$

È tale per cui

$$\lim_{|z| \to +\infty} h(z) = \frac{1}{a_n}$$

Quindi

$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{h(z)}{z^n} = 0$$

Dunque per definizione di limite posso dire che

$$\forall \epsilon > 0, \exists R | \forall |z| > R, |f(z)| \leq \epsilon$$

Perciò considerando $B_0(R)$ e posto $\epsilon = 1$ allora

$$f(z) \leq \max \left\{ 1, \max_{|z| \leq R} |f(z)| \right\}$$

Dunque f è una funzione limitata e quindi per il teorema di Luiville f è una funzione costante e quindi anche p deve essere un polinomio costante ma ciò contraddice la mia ipotesi e quindi assurdo. □

Teorema 10.4.6. ***(Moreira)***
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in C^0(\Omega)$ e tale per cui

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

Per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ allora $f \in \Theta(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Sia $D \subset \Omega$ un disco. Si può ripetere la dimostrazione dell'integrale nullo dei Cauchy usando l'ipotesi al posto del teorema di Goursat e ottenere una primitiva olomorfa F di f su D.
F è analitica quindi $F' = f$ è anch'essa analitica perché la deriva di una serie di potenze è la serie derivata e quindi f è olomorfa. □

Corollario 10.4.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni tali per cui $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \Theta(\Omega)$ ed inoltre converge uniformemente sui compatti di Ω a f*

$$f \in \Theta(\Omega)$$

Dimostrazione. Per verificare questa affermazione voglio utilizzare il teorema di Moreira.

$\underline{f \in C^0(\Omega)}$
Dato che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $f_n \in \Theta(\Omega)$ allora $f_n \in C^\infty$ perciò convergendo uniformemente a f per ipotesi allora dato che la continuità viene trasmessa mediante convergenza uniforme ho che

$$f \in C^0(\Omega)$$

$\underline{\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0}$
Preso in considerazione un qualsiasi $R \subset \Omega$ allora questa regione è ovviamente un compatto e quindi posso affermare che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n | M_n = \max_R |f_n| < +\infty$$

Dunque definita la funzione constante come $g(z) = \max_{n\in\mathbb{N}} M_n$ allora è ovvio che g sia misurabile e tale per cui $g \geq |f_n|$ dunque per il teorema di Lebesgue ho che

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial R} \lim_{n\to+\infty} f_n(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial R} f_n(z)\,dz$$

Dato che $\left\{\int_{\partial R} f_n(z)\,dz\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\int_{\partial R} f(z)\,dz$ e per Goursat si ha che

$$\int_{\partial R} f_n(z)\,dz = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial R} f_n(z)\,dz = 0$$

Perciò per Moreira ho che $f \in \Theta(\Omega)$. □

Proposizione 10.4.2. *n armonica su $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ disco allora $\exists f \in \Theta(\mathbb{D})$ con $\mathcal{R}(f) = u$.*

Dimostrazione. Sia $g = ux - ivy$ si vede che è olomorfa dunque $u_{xx} =$
$g_z = -igy$ dunque per CR è olomorfa

$\exists h \in \Theta(D)$ primitiva di $g|h' = g$ dunque $h' = hx = ihy = g$ dunque h è della forma $\alpha + i\beta$ perciò

$$\begin{cases} \alpha x = ux \\ \beta x = uy \end{cases}$$

quindi $u - \alpha$ ha derivate parziali nulle quindi $u - \alpha = c \in \mathbb{R}$ dunque

$$u + c = (\alpha + i\beta) + \mu - \alpha = \mu - i\beta \Rightarrow \mathcal{R}(u + c) = u$$

□

10.5 Teoremi integrali di Cauchy

Definizione 10.5.1. *Una catena è una somma finita formale*

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i$$

Di curve chiuse distinte γ_i, C^1 *a tratti con coefficienti* $m_i \in \mathbb{Z}$. *Il supporto di* Γ *è*

$$supp(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{n} supp(\gamma_i)$$

Proprietà 10.5.1. *Le catene detengono delle proprietà:*

- <u>*Possono essere sommate*</u>
  Siano $\Gamma_1 = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j^1, \Gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i^2$ *due catene allora*

  $$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i^1 + \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j^2$$

  Dove si raccolgono i coefficienti m_i, m_j *ogni volta che* $\gamma_i^1 = \gamma_j^2$.

- <u>*Posso integrare lungo la catena*</u>
  Se f *è definita sul* $supp(\Gamma)$ *allora*

  $$\int_\gamma f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\gamma_i} f(z)\, dz$$

- <u>*Posso definire l'indice rispetto ad una catena*</u>

  $$Ind_\Gamma(z) = \sum_{i=1}^{n} m_i Ind_{\gamma_i}(z) \qquad z \in \mathbb{C} \setminus supp(\Gamma)$$

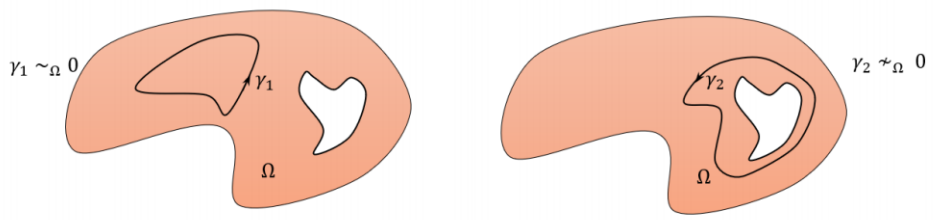
Definizione 10.5.2. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *aperto e sia* Γ *una catena con* $supp(\Gamma) \subset \Omega$.
Γ *è detta omologa a zero in* Ω *se* $Ind_\Gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *e si indica con*

$$\Gamma \sim_\Omega 0$$

Due catene Γ, Γ' *sono omologhe in* Γ *se* $\Gamma - \Gamma' \sim_\Omega 0$ *cioè* $Ind_\Gamma(z) = Ind_{\Gamma'}(z), \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

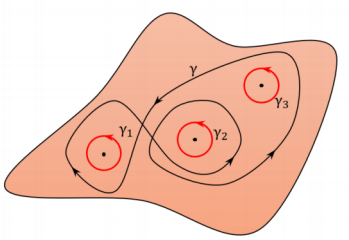
Esempio 10.5.1. *Per visualizzare queste definizione possiamo porre alcuni esempi:*

- *Ogni curva* C^1 *a tratti chiusa può essere considerata come una catena, ad esempio se* γ *è una curva di Jordan in* Ω *allora* $\gamma \sim_\Omega 0 \iff Int(\gamma) \subset \Omega$



  Relativamente al disegno ho che $Int(\gamma_1) \subset \Omega$ *allora* $Ind_{\gamma_1}(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *mentre* $Int(\gamma_2) \not\subset \Omega$ *allora* $Ind_{\gamma_2}(z) = 1, \forall z \in Int(\gamma_2) \setminus \Omega$.

- *Siano z_1, z_2, z_3 i centri di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e sia $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$*



Allora

$$\gamma \sim_{\Omega'} -\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3$$
$$\mathbb{C} \setminus \Omega' = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{z_1, z_2, z_3\}$$

E $Ind_\gamma(z) = Ind_{\gamma_i}(z) = 0$ se $z \notin \Omega$ mentre

$$Ind_\gamma(z_1) = -1 = -Ind_{\gamma_1}(z_1)$$
$$Ind_\gamma(z_2) = 2 = 2Ind_{\gamma_2}(z_2)$$
$$Ind_\gamma(z_3) = 1 = Ind_{\gamma_3}(z_3)$$

Proposizione 10.5.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia γ una catena tale per cui $\gamma \sim_\Omega 0$. Siano $z_1, \cdots, z_n$ punti di Ω, siano D_i per $i = 1, \cdots, n$ dischi centrati in z_i la cui chiusura è contenuta in Ω e a due a due disgiunti e siano γ_i per $i = 1, \cdots, n$ le circonferenze bordo dei dischi. Siano $m_i = Ind_\gamma(z_i)$ e denotiamo con Ω' l'aperto definito come $\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ allora*

$$\gamma \sim_{\Omega'} \sum m_i \gamma_i$$

Dimostrazione. Prima di tutto osservo che

$$\mathbb{C} \setminus \Omega' = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{z_1, \cdots, z_2\}$$

A questo punto può essere che

- Se $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ allora $Ind_\gamma(z) = 0$ poiché $\gamma \sim_\Omega 0$.
- Se $z = z_j$ allora $Ind_\gamma(z_j) = m_j$ e $Ind_{\gamma_i}(z_i) = \delta_{i,j}$

Allora segue che

$$Ind_{\sum m_i \gamma_i}(z_j) = \sum m_i \delta_{ij} = m_j$$

□

Lemma 10.5.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f \in \Theta(\Omega)$ e*

$$g \colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$$
$$(z, w) \mapsto g(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Allora g è una funzione continua, inoltre $\forall w_0 \in \Omega$ fissato $g(z, w_0) \in O(\Omega)$.

Dimostrazione.

<u>g continua</u>

Posto

$$D = \{(z, w) \in \Omega \times \Omega | z = w\}$$

Dunque questo insieme è un chiuso (essendo la rappresentazione di un iperpiano).
A quanto punto considero un punto $(z_0, w_0) \in \Omega \times \Omega$, dunque ci possono essere due casi:

1. Se $z_0 \neq w_0 \Rightarrow (z_0, w_0) \notin D$ allora essendo $\mathcal{C}(D)$ un aperto posso affermare che $\exists B_\delta(z_0, w_0)$ aperto del punto per cui
$$B_\delta(z_0, w_0) \cap D = \phi$$
Dunque $\forall (z, w) \in B_\delta(z_0, w_0), z \neq w$ perciò la continuità della funzione g viene immediatamente poiché $w - z \neq 0$ vicino a (z_0, w_0).

2. Se $z_0 = w_0$ allora per definizione ho che $g(z_0, w_0) = f'(z_0)$. Essendo f' continua ho per definizione ho che
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | \forall \alpha \in B_{z_0}(\delta) \subset \Omega, |f'(\alpha) - f'(z_0)| < \epsilon$$
Siano $z, w \in B_{z_0}(\delta)$ (dunque è come se considerassi un intorno quadrato di (z_0, z_0)) in questo caso ci possono essere due possibilità:

   (a) Se $z = w$ si ha per definizione che
$$|g(z, w) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| \leq \epsilon$$

   (b) Se $z \neq w$ allora definita una curva
$$\begin{aligned} \gamma \colon [0, 1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = (1 - t)z + wt \end{aligned}$$
Per cui
$$\begin{aligned} |g(z, w) - g(z_0, z_0)| &= \frac{1}{|w - z|} |f(w) - f(z) - f'(z_0)(w - z)| \\ &= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_\gamma f'(\alpha) - f'(z_0) \, d\alpha \right| \\ &\leq \frac{1}{|w - z|} \int_\gamma |f'(\alpha) - f'(z_0)| \, d\alpha \\ &= \int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(z_0)| \, dt \\ &< \int_0^1 \epsilon \, dt \\ &= \epsilon \end{aligned}$$
Allora segue che
$$|g(z, w) - g(z_0, z_0)| \leq \epsilon$$
Dunque per definizione ho che g è continua in (z_0, z_0).

<u>$g \in \Theta(\Omega)$</u>

È ovvio affermare che fissato $w_0 \in \Omega$ allora segue dalla definizione di g che $g(z, w_0) \in O(\Omega \setminus \{w_0\})$. Dato che per $z = w_0$ ho una singolarità eliminabile in quanto
$$\lim_{z \to w_0} (z - w_0) g(z, w_0) = 0$$
Dunque per il teorema della singolarità eliminabile ho che
$$\exists \tilde{g}(z, w_0) \in \Theta(\Omega) \left| \tilde{g}(z, w_0) \right|_{\Omega \setminus \{w_0\}} = g(z, w_0)$$
Ma dato che g è continua in quel punto allora $\tilde{g}(z, w_0) = g(z, w_0)$ quindi $g(z, w_0) \in \Theta(\Omega)$. $\square$

Teorema 10.5.1. *(Cauchy in forma generale)*
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, Γ una catena $|\Gamma \sim_\Omega 0$ e $f \in \Theta(\Omega)$ allora valgono i seguenti fatti:

- ***Formula integrale di Cauchy***

$$f(z)Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus supp(\Gamma)$$

- ***Teorema dell'integrale nullo di Cauchy***

$$\int_\Gamma f(x)\,dz = 0$$

Dimostrazione.

<u>**Formula integrale di Cauchy**</u>
Sia

$$\Omega' = \{z \in \mathbb{C} \setminus supp(\Gamma) | Ind_\Gamma(z) = 0\}$$

Si vede come $\Omega' \supset \mathbb{C} \setminus \Omega$ quindi $\Omega \cup \Omega' = \mathbb{C}$, inoltre sia

$$g\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}(z,w) \quad \mapsto g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Per quanto visto in precedenza ho che questa funzione è continua dunque data

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma g(z,w)\,dw & z \in \Omega \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{f(w)}{w-z}\,dw & z \in \Omega' \end{cases} \end{aligned}$$

Allora se dimostro che questa funzione è ben definita, olomorfa in $\mathbb{C}$ e limitata allora per Luiville h è costante.

<u>h è ben definita</u>
Sia $z \in \Omega \cap \Omega'$ allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{f(z)}{2\pi i}Ind_\Gamma \end{aligned}$$

Poiché $Ind_\Gamma(z) = 0$ allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Dunque h è ben definita.

<u>$h \in \Theta(\mathbb{C})$</u>
Il fatto che sia continua viene subito dalla definizione dunque:

- Sia $R \subset \Omega$ allora dato che

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} h(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\int_{\Gamma} g(z,w)\,dw\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\int_{\partial R} g(z,w)\,dz\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} 0\,dw \\ &= 0\end{aligned}$$

  Quindi per Moreira ho che $h \in \Theta(\Omega)$.

- Dato che $f \in \Theta(\Omega)$ per ipotesi allora per un risultato precedente ho che

$$f \in \Theta(\mathbb{C} \setminus supp(\Gamma))$$

Quindi $h \in \Theta(\mathbb{C})$.

<u>h è limitata</u>
Sia z tale per cu i $|z|$ è sufficientemente grande in modo che $|z| - |w| > 0$, $\forall w \in supp(\Gamma)$ e $In_\gamma(z) = 0$ allora $z \in \Omega'$ e

$$2\pi|h(z)| = \left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dz\right| \leq \left(\sup_{w \in supp(\gamma)} \frac{|f(w)|}{|z|-|w|}\right) l(\Gamma) \xrightarrow{|z|\to+\infty} 0$$

Se $|h(z)| \leq 1$ per $|z| \geq M$ allora $|h(z)| \leq \max\left\{1, \max_{|w|\leq M}|h(w)|\right\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
Per il teorema di Liouville h è costante ma dato che $h(z) \xrightarrow{z\to+\infty} 0$ allora $h \equiv 0$. Se $z \in \Omega \setminus supp(\Gamma)$ si ha che

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)Ind_\Gamma(z)$$

Da cui si ha la formula integrale di Cauchy

$$f(z)Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d(w)}{w-z}\,dw \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus supp(\Gamma)$$

<u>Integrale nullo di Cauchy</u>
Sia $z_0 \in \Omega \setminus supp(\Gamma)$ per quanto visto in precedenza applicato a $F(z) = f(z)(z - z_0)$ ho che

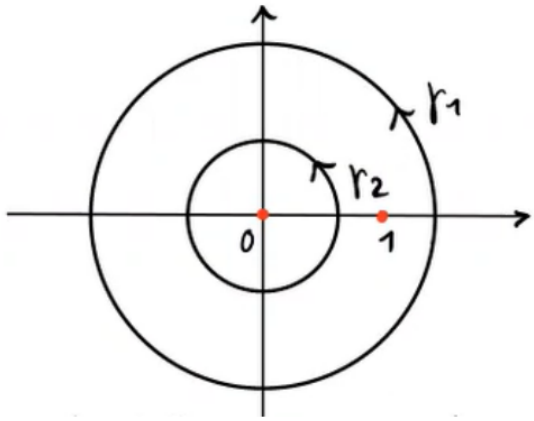
$$0 = F(z_0)Ind_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(w)}{w-z_0}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\,dw$$

□

Corollario 10.5.1. *Se* $\Gamma_1 \sim_\Omega \Gamma_2$ *allora*

$$\int_{\Gamma_1} f(x)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(x)\,dz$$

Esempio 10.5.2. *Sia* $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \sim_\Omega 0$ *in* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *con* $Ind_\Gamma(0) = 1 - 1 = 0$



Per calcolare

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2 - z}\, dz$$

Poniamo

$$f(z) = \frac{1}{z} \in \Theta(\Omega)$$

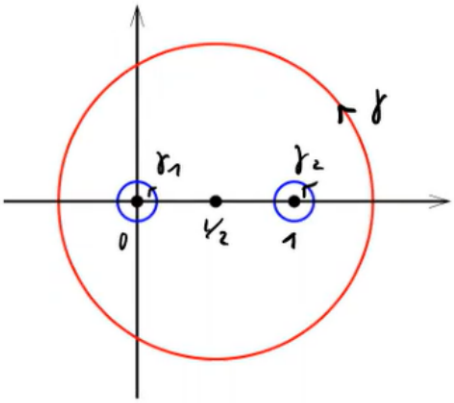
Ottenendo così

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2 - z}\, dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-1}\, dz = 2\pi i Ind_\Gamma(1) f(1) = 2\pi i$$

Esempio 10.5.3. *Data* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *la curva di equazione* $\gamma(\theta) = \frac{1}{2} + e^{i\theta}$ *si calcoli*

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)z^2}\, dz$$

Osserviamo che la funzione integranda è olomorfa su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *e che la curva* γ *è omologa in* Ω *alla catena* $\gamma_1 + \gamma_2$ *con* γ_1, γ_2 *circonferenze di raggio* $r < \frac{1}{2}$ *centrate in 0 e 1.*



Definiamo le seguenti funzioni

$$g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)} \qquad h(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2}$$

Dunque possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)z^2}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-1}\, dz$$

Utilizzando la formula delle derivate e la formula integrale scriviamo

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i g'(0) = -2\pi i \qquad \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-1}\, dz = 2\pi i h(1) = -2\pi i$$

Dunque in conclusione ho che

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)z^2}\, dz = -4\pi i$$

10.6 Indice rispetto a curve continue

Lemma 10.6.1. *Siano γ_1, γ_2 curve chiuse di classe C^1 a tratti definite su $[a,b]$ tali che $z \notin supp(\gamma_i)$ allora se vale che*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_2(t) - z| \qquad \forall t \in [a,b]$$

Ho $Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z)$.

Dimostrazione. Prima di tutto posso assumere che z sia l'origine altrimenti dalla definizione ho che

$$Ind_\gamma(z) = Ind_{\gamma - z}(0)$$

Quindi il tutto non cambia se attuo una traslazione.
Preso $z = 0$ e posto

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}$$

Allora raccogliendo da entrambe le parti alla disequazione $\gamma_2(t)$ ottengo che

$$|\gamma(t) - 1| \leq 1$$

Dunque $supp(\gamma)$ è contenuto nel disco chiuso di centro 1 e raggio 1 e l'origine appartiene alla componente illimitata di $\mathbb{C} \setminus supp(\gamma)$ per cui $Ind_\gamma(0) = 0$ ma

$$2\pi i Ind_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \int_a^b \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} - \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} \right) dt$$

Per cui dato che $0 = Ind_\gamma(0) = Ind_{\gamma_1}(0) - Ind_{\gamma_2}(0)$ dunque hanno lo stesso indice. □

Corollario 10.6.1. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva continua chiusa con $z \notin supp(\gamma)$. Esiste $\delta > 0$ tale che per ogni coppia di curve $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ tali che $\|\gamma - \gamma\| < \delta$ si ha che*

$$Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z)$$

Dimostrazione. Dato che l'indice è invariante sotto traslazioni ho che z può essere assunto come l'origine. Sia $\delta := \frac{1}{3} \int_{t \in [a,b]} |\gamma(t)| > 0$ per ogni $t \in [a,b]$ vale che

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_1(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma_2(t)| < 2\delta$$

E

$$|\gamma_2(t)| \geq |\gamma(t)| - |\gamma(t) - \gamma_2(t)| \geq 3\delta - \delta = 2\delta$$

Dunque per il lemma precedente ho la mi tesi. □

Il corollario permette di definire l'indice di un punto rispetto a una curva continua chiusa $\gamma : [A,b] \to \mathbb{C}$. Infatti per l'uniforme continuità di γ su $[a,b]$ si può approssimare uniformemente γ con curve poligonali $\tilde{\gamma}$ tali per cui $\|\gamma - \tilde{\gamma}\| < \delta$. L'indice di z rispetto a tali curve è costante e definisce $Ind_\gamma(z)$. Ogni partizione di $[a,b]$ con

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Che definisce una poligonale $\tilde{\gamma}$.

Definizione 10.6.1. *Sia Ω aperto in $\mathbb{C}$. Due curve continue chiuse $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ si dicono omotope in Ω se esiste un'omotopia $F : [a,b] \times I \to \Omega$ tra γ_0, γ_1 tale che $\gamma_t(s) = F(s,t)$ sia una curva chiusa $\forall t \in I$.*

Teorema 10.6.1. *Sia Ω aperto se $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ sono curve continue chiuse omotope in Ω allora $Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z), \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ cioè le due curve sono omologhe in $\Omega : \gamma_0 \sim_\Omega \gamma_1$*

Dimostrazione. Sia $F : [a,b] \times I \to \Omega$ l'omotopia tra $\gamma_0, \gamma_1, t_0 \in I$ fissato e sia $\delta > 0$ associato a γ_{t_0} come nel corollario precedente. Per l'uniforme continuità di F ho che $\exists \delta' > 0$ tale per cui

$$|t - t_0| < \delta' \Rightarrow \|\gamma_t - \gamma_{t_0}\| < \frac{\delta}{2}$$

Fissato t_1 tale che $|t_1 - t_0| < \delta'$ siano $\tilde{\gamma}_{t_0}, \tilde{\gamma}_{t_1}$ curve di classe C^1 a tratti tali che

$$\|\gamma_{t_i} - \tilde{\gamma}_{t_i}\| < \frac{\delta}{2}$$

Allora

$$\|\gamma_{t_0} - \tilde{\gamma}_{t_1}\| \leq \|\gamma_{t_0} - \gamma_{t_1}\| + \|\gamma_{t_1} - \tilde{\gamma}_{t_1}\| < \delta$$

Perciò per il corollario precedente ho che

$$Ind_{\tilde{\gamma}_{t_0}}(z) = Ind_{\tilde{\gamma}_{t_1}}(z)$$

Per definizione si ha che

$$Ind_{\gamma_{t_0}}(z) = Ind_{\gamma_{t_1}}(z)$$

Dunque la funzione $t \mapsto Ind_{\gamma_r}(z)$ è localmente costante e quindi continua, è a valori interi sull'insieme connesso I e quindi costante. In particolare

$$Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z)$$

□

Corollario 10.6.2. *Sia Ω aperto in $\mathbb{C}$ e f olomorfa in Ω. se γ_0, γ_1 sono curve chiuse di classe C^1 a tratti omotope in Ω allora*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

Con $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 \sim_\Omega 0$.

Corollario 10.6.3. *Sia Ω aperto in $\mathbb{C}$ e f olomorfa in Ω. se $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ sono curve chiuse di classe C^1 a tratti omotope relativamente a $\{0,1\}$ allora*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

Dimostrazione. La curva chiusa $\gamma = \gamma_0 * \overline{\gamma}_1$ è omotopa in Ω al camino costante $\epsilon_{\gamma(0)}$ in quanto

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_0 * \overline{\gamma}_1 \sim \gamma_1 * \overline{\gamma}_1 \sim \epsilon_{\gamma(0)}$$

E

$$0 = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_0} f(z)\, dz - \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

□

10.6.1 Il gruppo fondamentale di S^1

Teorema 10.6.2. *La funzione*

$$\begin{aligned}\Phi\colon \Pi(\mathbb{S}^1,1) &\to \mathbb{Z}\\ [\gamma] &\mapsto \Phi([\gamma]) = Ind_\gamma(0)\end{aligned}$$

Rappresenta un isomorfismo di gruppi. Dunque $\pi(\mathbb{S}^1,1) \simeq \mathbb{Z}$ con generatore la classe di omotopia di $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$.

Dimostrazione. Per dimostrare questa tesi devo far vedere alcune cose:

<u>Φ è ben definita</u>
Se considero due cappi $\alpha, \beta \in \Pi(\mathbb{S}^1,1)$ allora essi sono omotopi se e solo hanno lo stesso numero di giri dunque è ovvio che la loro immagine è uguale.

<u>Φ è un omomorfismo di gruppi</u>
Siano α, β cappi in $(\mathbb{S}^1,1)$ dunque dato che $\Phi([\alpha][\beta]) = \Phi([\alpha * \beta]) = Ind_{\alpha*\beta}$ vedo che

$$\begin{aligned}Ind_{\alpha*\beta}(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(\alpha*\beta)'(t)}{(\alpha*\beta)(t)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\alpha'(2t)}{\alpha(2t)}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2\beta'(2t-1)}{\beta(2t-1)}\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\alpha'(s)}{\alpha(s)}\,ds + \int_0^1\int_0^1 \frac{\beta'(s)}{\beta(s)}\,ds\\ &= Ind_\alpha(0) + Ind_\beta(0)\\ &= \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta])\end{aligned}$$

Dunque per definizione Φ rappresenta un omomorfismo di gruppi.

<u>Φ è suriettivo</u>
Un qualsiasi cammino che compie n giri è espresso da $\alpha(t) = e^{2\pi i n t}$ dunque

$$\Phi([\alpha]) = n$$

Perciò data l'arbitrarietà di $n \in \mathbb{Z}$ allora segue che Φ è suriettiva.

<u>Φ è iniettivo</u>
Se la classe $[\alpha] \in \ker\Phi$ è rappresentata da una curva di classe C^1 a tratti $\gamma : I = [0,1] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ allora definisco fue funzioni

$$\begin{aligned}g\colon I &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\,ds\\ f\colon I &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto f(t) = e^{2\pi i g(t)}\end{aligned}$$

La funzione $g : I \to \mathbb{C}$ soddisfa le condizioni $g(0) = 0, g(1) = Ind_\gamma(0) = 0, g' = \frac{\gamma'}{2\pi i\gamma}$ e $f' = f\frac{\gamma'}{\gamma}$ dunque

$$\left(\frac{f}{\gamma}\right) = \frac{f'}{\gamma} - \frac{f\gamma'}{\gamma^2} = 0$$

Quindi $\frac{f}{\gamma}$ è una costante uguale a $\frac{f(0)}{\gamma(0)} = 1$. Ne deriva che $\gamma(t) = e^{2\pi i g(t)}, \forall t \in I$, $g(t)$ ha valori reali poiché $|\gamma(t)| = 1$ e $g : I \to \mathbb{R}$ è un cappio in $(\mathbb{R}, 0)$ spazio contraibile.
Se F è un'omotopia tra g e il cammino costante ϵ_0 la composizione $H = e^{2\pi i F}$ definisce un'omotopia tra γ e ϵ_1 cioè $[\alpha] = [\epsilon_1]$.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che nella classe di omotopia $[\alpha]$ si può sempre trovare un rappresentante γ di classe C^1 a tratti; sia $r : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1$ la retrazione $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Sia $h : I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una curva poligonale vicina a α in modo che

$$H(s,t) = t\alpha(s) + (1-t)h(s)$$

Abbia valori in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ponendo $\gamma = r \circ h : I \to \mathbb{S}^1$ si ottiene una curva di classe C^1 a tratti omotopa ad α mediante l'omotopia $G = r \circ H$. $\square$

10.6.2 Esistenza di un'armonica coniugata

Definizione 10.6.2. *Sia $u : U \to \mathbb{R}$ una funzione armonica, $v : U \to \mathbb{R}$ è detta armonica coniugata se*

$$f := u + iv \in \Theta(U)$$

Teorema 10.6.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e $u \in C^2(\Omega)$ armonica allora $\exists v \in C^2(\Omega)$ armonica coniugata.*

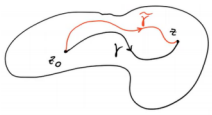
Dimostrazione. Sia $g := u_x - iu_y$ dunque dato che u è armonica per ipotesi e C^2 allora

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u_{xy} = u_{yx} \end{cases}$$

Dunque si osserva che queste rappresentano le condizioni di CR per g e quindi $g \in \Theta(\Omega)$. Sia $z_0 \in \Omega$ allora possiamo definire una nuova funzione:

$$\begin{aligned} h \colon \Omega &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto h(z) = \int_\gamma g(w)\, dw \end{aligned}$$

Con γ il cammino che congiunge z_0 a z; questo cammino esiste in quanto Ω è semplicemente connesso per ipotesi.



<u>h è ben definita</u>
Dato che per ipotesi Ω è semplicemente connesso allora tutti i cammini che congiungono z_0 a z sono omotopi e quindi essendo $g(z) \in \Theta(\Omega)$ allora dati $\gamma \sim \gamma'$

$$\int_\gamma g(w)\, dw = \int_{\gamma'} g(w)\, dw$$

Ciò significa che h non dipende dal cammino e quindi h è ben definita.

<u>$h \in \Theta(\Omega)$</u>
La dimostrazione per questo punto è analoga a quello per l'integrale nullo.

<u>Esistenza di un'armonica coniugata</u>
Dato che $h \in \Theta(\Omega)$ allora posso dire che$\exists \alpha, \beta : \Omega \to \mathbb{C}$ tali per cui

$$h(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$$

Quindi

$$g = h' = h_x = -ih_y$$

Perciò

$$\begin{cases} u_x = \mathcal{R}(g) = \alpha_x \\ u_y = -\mathcal{I}(g) = -\beta_x = \alpha_y \end{cases}$$

A questo punto dato che

$$(u - \alpha)_x = (u - \alpha)_y = 0 \Longrightarrow u - \alpha = c \in \mathbb{R}$$

Perciò definita una nuova funzione $f := (u - \alpha) + h = u + i\beta$ segue che $\mathcal{R}(f) = u$ e $f = c + h \in \Theta(\Omega)$. $\square$

Capitolo 11

Analisi complessa

11.1 Singolarità isolate

11.1.1 Serie di Laurent

Funzioni olomorfe come $f(z) = \frac{1}{z}$ hanno "singolarità isolate" il punto $z = 0$ è un punto dove f non è definita e f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ cioè su un intorno aperto di 0 privato dell'origine.

Definizione 11.1.1. *Una serie di Laureant è una serie di funzioni della forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}\frac{1}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Con $a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, z_0 \in \mathbb{C}$ *fissato e* $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Proposizione 11.1.1. *Sia*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

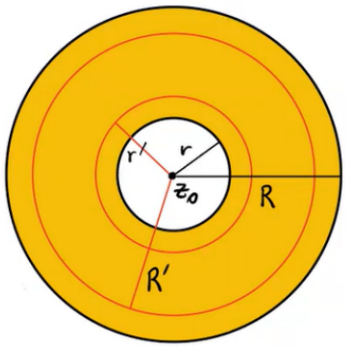
Una serie di Laurent allora $\exists r, R \in [0, +\infty]$ *tali per cui la serie converge assolutamente su una corona circolare*

$$C := \{z \in \mathbb{C} | r < |z - z_0| < R\}$$

E converge uniformemente su una corona circolare

$$C' := \{z \in \mathbb{C} | r' < |z - z_0| < R'\}$$

Con $r' > r, R' < R$



Dimostrazione. Data la serie di Laurent allora posso scrivere

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Dunque è ovvio che la serie converge se e solo se le serie a destra dell'equazione convergono. Per il teorema di Hadamard abbiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ha un raggio di convergenza $R \in [0,+\infty]$ mentre se prendo in considerazione l'altra serie e faccio un cambio di variabile $w = \frac{1}{z-z_0}$ la serie di funzioni diventa

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}\frac{1}{(z-z_0)^m} = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}w^m(z)$$

Dunque sempre per il teorema di Hadamard ho che il raggio di convergenza è dato da

$$R' = \left(\limsup_{n\to+\infty}\sqrt{|a_{-n}|}\right)^{-1}$$

Perciò la serie converge assolutamente in

$$\{w \in \mathbb{C} | |w| < R'\} = \left\{z \in \mathbb{C} \left| \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < R'\right.\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \left| |z-z_0| > \frac{1}{R'}\right.\right\}$$

Dunque posto $r = \frac{1}{R'}$ e intersecando le due regioni di convergenza ottengo che la serie di Laurent converge assolutamente sulla corona

$$\{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\} \neq \phi$$

Mentre converge uniformemente su

$$\{z \in \mathbb{C} | r' < |z-z_0| < R'\} \qquad \forall r < r' < R' < R$$

□

Osservazione 11.1.1. *Se $r < R$ la corona*

$$C_{z_0}(r,R) := \{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\} \neq \phi$$

E la serie di Lauren ha somma $f \in \Theta(C_{z_0}(r,R))$. Viceversa se f è olomorfa su una corona si ottiene uno sviluppo di Laurent.

Teorema 11.1.1. *Sia $f \in \Theta(\Omega), \Omega \subset \mathbb{C}$ aperto contenente la corona circolare chiusa*

$$\overline{C_{z_0}(r,R)} := \{z \in \mathbb{C} | r \leq |z-z_0| \leq R\} \neq \phi$$

Allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \forall z \in C_{z_0}(r,R)$$

Con convergenza assoluta su $C_{z_0}(r,R)$ ed uniforme su $\overline{C_{z_0}(r',R')}$, $\forall r < r' < R' < R$.
I coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, r > 0,\ r \leq r' \leq R$$

Con $\gamma_{r'} = \partial B_{z_0}(r')$ circonferenza percorsa in senso antiorario.

Dimostrazione. La catena $\Gamma = \gamma_R - \gamma_r \sim_\Omega 0$. Per la formula integrale di Cauchy se $z \in C_{z_0}(r,R)$ si ha che $Ind_{\gamma_R}(z) = 1, Ind_{\gamma_r}(z) = 0$ dunque

$$f(z) = f(z)Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Il primo integrale come nella dimostrazione di Weierstrass

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z0)^n$$

Il secondo integrale si sviluppa in modo analogo

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\,dw$$

Posto $\alpha=\frac{w-z_0}{z-z_0}$ il quale risulta essere $|\alpha|<1$ allora

$$\frac{1}{1-\alpha}=\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha^m=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}$$

Dunque

$$-\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}dw=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right)(z-z_0)^n$$

Per la convergenza uniforme.
Per concludere basta osservare che $\gamma_{r'}\sim_\Omega\gamma_r\sim_\Omega\gamma_R$, $\forall r'>0$ con $r\le r'\le R$ e che la funzione

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\in\Theta(\Omega)\qquad\forall n\in\mathbb{Z}$$

Allora per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy gli integrali lungo $\gamma_{r'},\gamma_r,\gamma_R$ coincidono. □

Osservazione 11.1.2. *Al posto di $\gamma_{r'}$ nella formula per a_n si può integrare lungo una qualsiasi curva di Jordan $\gamma\sim_\Omega\gamma_R$*

Osservazione 11.1.3. *Da tutto questo si può dedurre che*

1. *Se f è olomorfa sul disco $B_{z_0}(R)$ i coefficienti a_n con $n<0$ sono tutti nulli e quidni la serie di Laurant diventa lo sviluppo in seire di potenze.*

2. *Il coefficiente*

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\,dw$$

Per quanto detto prima γ può essere una qualsiasi curva di Jordan a patto che contenga z_0 ed è detta residuo di f in z_0

11.1.2 Singolarità isolata

Definizione 11.1.2 (Singolarità isolata). *Sia D un disco aperto centrato in z_0. Se $f\in\Theta(D\setminus\{z_0\})$ si dice che z_0 è una singolarità isolata di f.*

Esempio 11.1.1. *Preso in considerazione il limite:*

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\tilde{f}(z_0)$$

Con $\tilde{f}\in\Theta(\Omega)$ estensione di f.
Dunque z_0 è eliminabile $\iff|f(z)|\le K,\forall z\in\overline{D}_1\setminus\{z_0\}$ con D_1 disco chiuso contenuto in D. Se f è limitata allora $\lim_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)=0$ e viceversa se z_0 è eliminabile dunque

$$|f(z)|=|\tilde{f}(z)|\le\max_{\overline{D}_1}|\tilde{f}|$$

Le singolarità isolate si possono caratterizzare anche mediante la serie di Laurent di f su una corona $C_{z_0}(r,R)$.

Definizione 11.1.3. ***(Tipo di singolarità isolata)***
Sia f una funzione con singolarità isolata in z_0 e sia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Lo sviluppo in serie di Laurent di f allora diremo che:

1. *z_0 è **eliminabile** $\iff a_n = 0, \forall n < 0$.*
2. *z_0 è un **polo di ordine** $m > 0$ di $f \iff a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0, \forall n < -m$.*
3. *z_0 è **singolarità essenziale** se esistono infiniti coefficienti $a_n \neq 0$ con $n < 0$.*

Osservazione 11.1.4. *L'implicazione $(1) \Rightarrow$ deriva dalla formula*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{\tilde{f}(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = 0$$

Poiché

$$\frac{\tilde{f}(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \in \Theta\left(B_{z_0}(R)\right)$$

Viceversa se $a_n = 0, \forall n < 0$ allora la serie di Laurent ha somma la funzione olomorfa che estende f su $B_{z_0}(R)$.

Esempio 11.1.2. *Da tutto questo posso fare alcuni esempi:*

1. *Considerata la funzione $f(z) = \frac{z}{(\cos(z)-1)^2}$ ha un polo di ordine 3 nell'origine. Dato che*

$$\cos(z) - 1 = -\frac{z^2}{2} + o(z^3) = z^2 h(z)$$

Con $h(0) = -\frac{1}{2} \neq 0, h \in \Theta(\mathbb{C})$ dunque

$$f(z) = \frac{z}{z^2 h(z)^2} = \frac{1}{z^4}\frac{1}{h(z)^3}$$

Con $\frac{1}{h^3}$ olomorfa su un intorno di $z = 0$ se

$$\frac{1}{h^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

La serie di Laurent è

$$f(z) = \frac{b_0}{z^3} + \frac{b_1}{z^2} + \frac{b_2}{z} + b_3 + b_4 z + \cdots \qquad b_0 = \frac{1}{h(0)^0} \neq 0$$

Proposizione 11.1.2. *f ha un polo di ordine m in $z_0 \iff g := \frac{1}{f}$ è olomorfa in un intorno di z_0 e ha uno zero di ordine m in z_0.*

Dimostrazione. Per dimostrare questa tesi devo dimostrare due implicazioni.

$\overset{\Longrightarrow}{}$
Se $f \in \Theta(D \setminus \{z_0\})$ allora considero

$$h(z) = f(z)(z-z_0)^m \in \Theta(D)$$

Inoltre dato che f ha un polo di ordine m se consideriamo il suo sviluppo di Laurent ho per definizione che

$$h(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m = \lim_{z\to z_0}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots\right] = a_{-m} \neq 0$$

Quindi

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \frac{1}{h(z)}$$

Non presenta poli in z_0 in quanto $h(z) \neq 0$ dunque è olomorfa in un intorno di z_0 con sviluppo in serie di potenze

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Con $a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$ dunque dato che

$$g^{(n)}(z_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{(n-k)}(z_0) \left(\frac{1}{h}\right)^k$$

Allora si vede che il primo coefficiente della serie non nullo è

$$a_m = \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} = \frac{m!}{m! h(z)} = \frac{1}{a_{-m}}$$

Allora

$$g(z) = \frac{1}{a_{-m}} (z - z_0)^m + \cdots$$

Quindi è ovvio che $g(z)$ ha uno zero di ordine m in z_0.

$\Leftarrow$

Se g ha uno zero di ordine m in z_0 allora posso dire che

$$g(z) = (z - z_0)^m \tilde{h}(z)$$

Con $\tilde{h}(z_0) \neq 0$ allora

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\tilde{h}(z)} = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots$$

In un intorno di z_0 con

$$a_{-m} = \frac{1}{\tilde{h}(z_0)} \neq 0$$

Dunque z_0 è polo di ordine m per f. □

Osservazione 11.1.5. *Se z_0 è un polo di ordine $m > 0$ di f e*

$$f(z)(z - z_0)^m = h(z)$$

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{h(z)}{(z - z_0)^m} \right| = +\infty$$

Ed esiste finito

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^m \neq 0$$

Definizione 11.1.4 (Funzione meromorfa). *Sia $S \subset \Omega$ sottoinsieme discreto dell'aperto Ω. Se $f \in \Theta(\Omega \setminus S)$ e f ha poli o singolarità eliminabili nei punti di S allora f è detta meromorfa su Ω e si indica con*

$$f \in \mathscr{M}(\Omega)$$

Esempio 11.1.3. *Ogni funzione razionale della forma*

$$f = \frac{p}{q}$$

Con $p, q \in \mathbb{C}[z]$ con $q \not\equiv 0$ è meromorfa su $\mathbb{C}$ infatti se z_0 è zero di q di ordine k e

$$p(z) = (z - z_0)^l \tilde{p}(z) \qquad q(z) = (z - z_0)^k \tilde{q}(z)$$

Con $\tilde{q}(z_0) \neq 0$ allora

$$f(z) = (z - z_0)^{l-k} \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)}$$

In un intorno di z_0 allora z_0 è un polo di f o una singolarità eliminabile se $k \leq l$.

Esempio 11.1.4. *Data la funzione*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{1}{(-m)!} z^m \in \Theta(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Ha una singolarità essenziale nell'origine.

Teorema 11.1.2. *Se $f \in \Theta(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ è una singolarità essenziale di f allora $f(D \setminus \{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Se $\overline{f(D \setminus \{z_0\})} \neq \mathbb{C}$ allora $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$ tale per cui

$$B_\alpha(\delta) \cap f(D \setminus \{z_0\}) = \phi \Rightarrow |f(z) - \alpha| \geq \delta, \quad \forall z \in D \setminus \{z_0\}$$

Sia

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha} \in \Theta(D \setminus \{z_0\})$$

Se g è limitata allora z_0 è singolarità eliminabile di g allora possono capitare due cose:

1. $\frac{1}{g}$ ha estensione olomorfa su D se $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$
2. $\frac{1}{g}$ ha un polo se $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ allora $f(z) - \alpha$ e quindi anche f ha una singolarità eliminabile oppure un polo in z_0 e ciò rappresenta un assurdo.

□

Osservazione 11.1.6. *Le singolarità isolate possono essere quindi caratterizzate dal comportamento locale di f in z_0 sia $f \in \Theta(D \setminus \{z_0\})$ allora*

1. *z_0 è **eliminabile** $\iff \exists \lim_{z \to z_0} f(z) < +\infty$.*
2. *z_0 è **polo** $\iff \exists \lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.*
3. *z_0 è **essenziale** $\iff \nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$.*

11.2 Residui

Definizione 11.2.1. *Se $z_0 \in \Omega$ è una singolarità isolata di $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_0\})$ il residuo di f in z_0 è definito come*

$$Res_{z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

Dove γ è una circonferenza centrata in z_0 piccola quanto si vuole con $supp(\gamma) \subset \Omega$ percorsa in senso antiorario, inoltre a_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent centrata in z_0.

Teorema 11.2.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto, $f \in \Theta(\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\})$ e γ una catena$|supp(\gamma) \subset \Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ e $\gamma \sim_\Omega 0$ allora vale che*

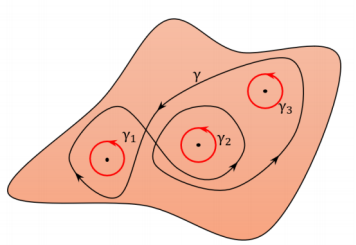
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Ind_\gamma(z_i) Res_{z_i}(f)$$

Dimostrazione. $\forall z_i$ posso considerare γ_i : delle circonferenze centrate in z_i tali per cui

$$\gamma_i \cap \gamma_j = \phi \quad \forall j \neq i$$

Dunque se pongo $m_i = Ind_\gamma(z_i)$ allora per un risultato precedente ho che

$$\gamma \sim_{\Omega'} \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma'$$



Dunque per definizione ho che

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\, dz &= \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i 2\pi i Rez_{z_i}(f) \\
&= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Ind_\gamma(z_i) Rez_{z_i}(f)
\end{aligned}$$

Perciò la tesi è dimostrata. □

Definizione 11.2.2 (Singolarità isolata all'infinito). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un intorno aperto di ∞ e $f \in \Theta(\Omega)$ allora si dice che f ha una singolarità isolata all'infinito se*

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$$

Ha una singolarità isolata in $w = 0$.
Il tipo di singolarità per f in ∞ è lo stesso per g in 0. Se $w = 0$ è eliminabile per g allora si dice che f è olomorfa all'infinito.
Il residuo all'infinito di f è

$$Res_\infty(f) = Res_0\left(-\frac{g(w)}{w^2}\right)$$

Lemma 11.2.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un intorno aperto di ∞, $f \in \Theta(\Omega)$ e γ una circonferenza centrata nell'origine tale per cui supp$(\gamma) \subset \Omega$ allora*

$$Res_\infty(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre che

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto \gamma(t) = Re^{it}\end{aligned}$$

Dunque per quanto visto in precedenza sappiamo che

$$Res_\infty(f) = Res_0\left(-\frac{g(w)}{w^2}\right)$$

Dunque sia

$$\tilde{\gamma}(t) := \frac{1}{\gamma(t)} = \frac{1}{R}e^{-it}$$

Questa rappresenta una circonferenza percorsa in senso orario con centro nell'origine, perciò per definizione possiamo dire che

$$\begin{aligned}2\pi i\, Res_0\left(-\frac{g(w)}{w^2}\right) &= \int_{-\tilde{\gamma}}\left(-\frac{g(w)}{w^2}\right)dw\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{g\left(\tilde{\gamma}(t)\right)}{\tilde{\gamma}^2(t)}\tilde{\gamma}'(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} g\left(\frac{1}{\gamma(t)}\right)\gamma^2(t)\left(-\frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}\right)dt\\ &= -\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\\ &= -\int_\gamma f(w)\,dw\end{aligned}$$

Perciò riassumendo il tutto ho che

$$Res_\infty(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$$

Quindi la tesi è dimostrata. □

Corollario 11.2.1. *Sia $f \in \Theta(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \cdots, z_2\})$ allora*

$$Res_\infty(f) + \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f) = 0$$

Dimostrazione. Basta integrare lungo una circonferenza γ con $z_1, \cdots, z_n$ punti interni e applicare il teorema dei residui. □

11.2.1 Calcolo dei residui

Lemma 11.2.2. *Se f ha un polo semplice in z_0 e g è olomorfa nell'intorno di z_0 allora*

$$Res_{z_0}(fg) = g(z_0)Res_{z_0}(f)$$

Dimostrazione. Sia

$$f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + h(z)$$

Con h olomorfa vicino a z_0 e sia

$$g(z) = b_0 + h_1(z)(z - z_0)$$

Con h_1 olomorfa vicino a z_0 allora

$$f(z)g(z) = \frac{a_{-1}b_0}{z-z_0} + \underbrace{(a_{-1}h_1(z) + b_0h(z) + h(z)h_1(z)(z-z_0))}_{\text{Olomorfa nell'intorno di } z_0}$$

Allora per definizione abbiamo che

$$\begin{aligned}
Res_{z_0}(fg) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)g(z)\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{a_{-1}b_0}{z-z_0} + a_{-1}h_1(z) + b_0h(z) + \cdots\right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{a_{-1}b_0}{z-z_0} + \int_\gamma (a_{-1}h_1(z) + b_0h(z) + \cdots\, dz\right) \\
&= a_{-1}b_0 Ind_\gamma(z_0) \\
&= a_{-1}b_0 \\
&= Res_{z_0}(f)g(z_0)
\end{aligned}$$

Con

$$\int_\gamma (a_{-1}h_1(z) + b_0h(z) + \cdots)\, dz = 0$$

Per il teorema di Cauchy locale. □

Corollario 11.2.2. *Se f ha uno zero semplice all'infinito, cioè $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$, ha una singolarità eliminabile in $w = 0$ e $w = 0$ è uno zero semplice per l'estensione olomorfa $\tilde{g}$ di g allora*

$$Res_\infty(f) = -\lim_{z\to+\infty}(zf(z))$$

Dimostrazione. Sia $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ allora $\tilde{g}(w) = wh(w)$ con h olomorfa vicino a 0 e $h(0) \neq 0$, quindi

$$\frac{g(w)}{w^2} = \frac{1}{w}h(w) \qquad \forall w \neq 0$$

Allora $\frac{g(w)}{w^2}$ ha un polo semplice in 0. Per il lemma recedente ho che

$$\begin{aligned}
Res_\infty(f) &= Res_0\left(-\frac{g(w)}{w^2}\right) = Res_0\left(\left(-\frac{1}{w}\right)h(w)\right) = h(0)Res_0\left(-\frac{1}{w}\right) \\
&= \lim_{w\to 0}\left(\frac{g(w)}{w^2}\right) = -\lim_{z\to+\infty}(zf(z))
\end{aligned}$$

□

Esempio 11.2.1. *Calcoliamo i residui delle funzioni*

$$h(z) = \frac{z^2}{z^2-1}$$

$h \in \Theta(\mathbb{C}\setminus\{\pm\})$ *e* $h(z) = \frac{1}{z-1}\frac{z^2}{z+1} = f(z)g(z)$.

- *In $z = 1$, f ha un polo semplice con residuo 1 mentre g è olomorfa nell'intorno di 1 con $g(1) = \frac{1}{2}$ quindi*

$$Res_1(f) = \frac{1}{2}$$

- *In $z = -1$, g ha un polo semplice con residuo 1*

$$g(z) = \frac{1}{z+1}z^2 \Longrightarrow Res_{-1}(g) = 1$$

Mentre f è olomorfa nell'intorno di -1 con $f(-1) = -\frac{1}{2}$ allora

$$Res_{-1}(h) = -\frac{1}{2}$$

- *All'infinito si ha che*
$$Res_\infty(h) = -Res_1(h) - Res_{-1}(h) = 0$$

Lemma 11.2.3. *Se f è olomorfa nell'intorno di z_0 e in z_0 ha uno zero semplice allora $\frac{1}{z}$ ha un polo semplice in z_0 con*
$$Res_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Dimostrazione. Dato che
$$f(z) = (z - z_0)g(z)$$
Con g olomorfa vincino a z_0 e $g(z_0) = f'(z_0) \neq 0$ allora
$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0}\frac{1}{g(z)}$$
Con $\frac{1}{g}$ olomorfa vicino a z_0 allora per il lemma iniziale ho che
$$Res_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$
□

Esempio 11.2.2. *Data la funzione*
$$h(z) = \frac{1}{\sin(z)}$$
La funzione $\sin(z)$ *si annulla solo per* $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ *e* $(\sin(z))' = \cos(z) \neq 0$ *per* $k = \pi k$ *dunque sono zeri semplici di* $\sin(z)$*. Per il lemma* $z = \pi k$ *sono tutti i poli di* h *e sono semplici, inoltre ho che*
$$Res_{k\pi}(h) = \frac{1}{\cos(k\pi)} = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Lemma 11.2.4. *Se f ha un polo di ordine m in z_0 allora*
$$Res_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\left[((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}\right]$$
In particolare se è polo semplice e $g(z) = (z - z_0)f(z)$
$$Res_{z_0}(f) = g(z_0)$$
Se è polo doppio, $m = 2$*, e* $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$
$$Res_{z_0}(f) = g'(z_0)$$

Dimostrazione. Sia
$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$
Ha un'esenzione olomorfa su un intorno di z_0 allora ho che
$$f(z) = b_0(z - z_0)^{-m} + b_1(z - z_0)^{-m+1} + \cdots + b_{m-1}(z - z_0)^{-1} + \cdots$$
Dunque
$$a_{-1} = Res_{z_0}(f) = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$
□

Esempio 11.2.3. *I residui di*

$$h(z) = \frac{z^2}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)}$$

Dunque si vede che $h \in \Theta(\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\})$ *e*

$\underline{z = 1}$ *è polo doppio di* $h(z)$ *quindi*

$$Res_1(h) = \left(\frac{z^2}{z+1}\right)\Bigg|_{z=1} = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2}\Bigg|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

$\underline{z = -1}$ *è polo semplice di* $h(z)$ *dunque*

$$Res_{-1}(h) = \frac{z^2}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$\underline{z = \infty}$ *in questo caso ho che*

$$Res_\infty(h) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1$$

Infatti

$$g(w) = h\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{1 - w - w^2 + w^3} \qquad -\frac{g(w)}{w^2} = \frac{1}{w}\frac{-1}{-1 - w - w^2 + w^3}$$

Quindi

$$Res_\infty(h) = 1$$

11.2.2 Applicazione dei residui agli integrali impropri

Caso 1

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una restrizione di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa in $\{z \in \mathbb{C} | Im(z) \geq 0\} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ con $z_1, \cdots, z_n$ poli di $f | Im(z_i) > 0, \forall i$ allora se $\exists K, M, a > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^{1+a}} \qquad |z| \geq M$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f)$$

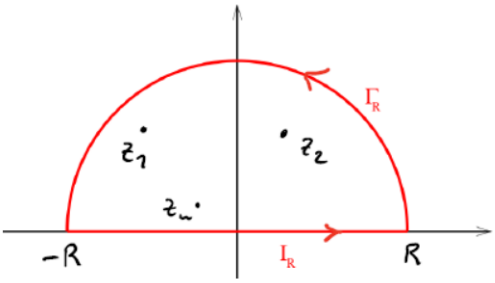
Osservazione 11.2.1. *Con le stesse ipotesi fatte su* f *precedentemente esistono finiti i seguenti limiti*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{\alpha} f(x)\,dx \qquad \lim_{R \to +\infty} \int_{\beta}^{R} f(x)\,dx$$

E quindi esiste anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Dimostrazione. Per dimostrare la formula applichiamo il teorema dei residui a f lungo la catena Γ ottenuta percorrendo l'intervallo $I_R = [-R, R]$ e al semicirconferenza Γ_R



Per $R \geq M$ da $|f(z)| \leq K|z|^{-1-a}$ si ottiene che f ha poli esterni a Γ quindi

$$2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f) = \int_{I_R} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$$

Il secondo integrale

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{K}{R^{1+a}} l(\Gamma_R) = \frac{\pi K}{R^a} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

Mentre il primo ha limite

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

□

Osservazione 11.2.2. *Parametrizzando I_R con $\gamma(t) = t, t \in [-R, R]$ l'integrale di linea*

$$\int_{I_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt$$

Esempio 11.2.4. *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

La prima osservazione è che per la parità dell'integrando ho che tale integrale è equivalente a

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Se $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ allora $\forall z \neq 0$ vale che

$$|f(z)| = \left| \frac{z^{-4}}{z^{-4}(1+z^2)^2} \right| = \left| \frac{z^{-4}}{(z^{-2}+1)^2} \right| = \frac{|z|^{-4}}{|z^{-2}+1|^2} \leq \frac{|z|^{-4}}{(1-M^{-2})^2}$$

Se $|z| \geq M > 1$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z+i)^2}$$

Dunque ha poli in $z = \pm i$ solo $z = i$ sta nel semipiano $Im(z) > 0$ perciò per un lemma precedente ho che

$$\begin{aligned} Res_i(f) &= \lim_{z \to i} \left((z-i)^2 f(z) \right)' \\ &= \lim_{z \to i} \left(\left(\frac{1}{z+1} \right)^2 \right)' \\ &= \lim_{z \to +i} \frac{-2}{(z+i)^3} \\ &= \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

Dunque per quanto visto precedentemente ho che

$$\begin{aligned} I &= \pi i Res_i(f) \\ &= \pi i \frac{1}{4i} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Caso 2

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua,restrizione di $f \in \Theta \in (\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\})$ con $\Omega \supset \{z \in \mathbb{C} | Im(z) \geq 0\}$ e $z_1, \cdots, z_n \in \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ se $\exists K, M > 0$ e $a > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq \frac{k}{|z|} \qquad |z| \geq M$$

Allora vale che

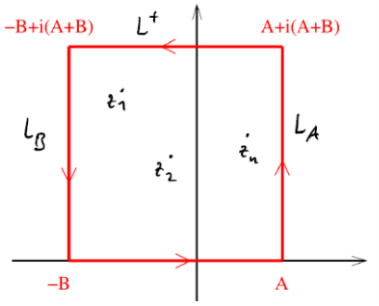
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}\left(f(z)e^{iz}\right)$$

Osservazione 11.2.3. *Dall'integrale precedente si osserva che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(x)\, dx + i\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(x)\, dx\right)$$

In particolare la formula implica che questi integrali sono finiti.

Dimostrazione. Sia $\Gamma_{A,B}$ il bordo del quadrato di lato $T = A + B$ con $A, B \geq M$ con T sufficientemente grande in modo che $\{z_1, \cdots, z_n\}$ siano nel quadrato.



Sul lato superiore L^+ parametrizzato da $\gamma^+(x) = -x + iT$ con $x \in [-A, B]$ si ha che

$$\left|\int_{L^+} f(z)e^{iz}\, dz\right| = \left|\int_{-A}^{B} f(-x+iT)\left(-e^{-ix-T}\right)\, dx\right| \leq \frac{K}{T}e^{-T}l(L^+) = Ke^{-T}$$

Poiché $|z| \geq T \geq$ su $L^+ \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{K}{T}$. Sul lato destro L_A parametrizzato da $\gamma_A(y) = A + iy$ con $y \in [0, T]$ vale

$$\left|\int_{L_A} f(z)e^{iz}\, dz\right| = \left|\int_{0}^{T} f(A+iy)e^{-y+ia}i\, dy\right| \leq \frac{K}{A}\int_{0}^{T} e^{-y}\, dy = \frac{K}{A}\left(1 - e^{-T}\right)$$

Analogamente

$$\left|\int_{L_B} f(z)e^{iz}\, dz\right| \leq \frac{K}{B}(1 - e^{-T})$$

Quindi gli integrali lungo Γ^+, L_A e L_B vanno a zero per $A, B \to +\infty$, dunque

$$2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f) = \int_{\Gamma_{A,B}} f(z)e^{iz}\, dz$$

Ha limite pari a

$$\lim_{A,B\to+\infty} \int_{-B}^{A} f(x)e^{ix}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx$$

□

Esempio 11.2.5. *Calcolare*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, dx$$

Sia $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ *se* $|z| \geq |M| \geq 1$ *allora*

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+z^2}\right| = \left|\frac{z^{-2}}{z^{-2}+1}\right| \leq \frac{1}{|z^2|}\frac{1}{1-M} \leq \frac{K}{|z|} \qquad K = \frac{1}{1-M}$$

Si ha che

$$I = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx\right)$$

Dunque

$$I = Re\left[2\pi i Res_i\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right)\right]$$

Dunque essendo

$$Res_i\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = Res_i\left(\frac{1}{z-i}\frac{e^{iz}}{z+i}\right) = \frac{e^{-1}}{2i}$$

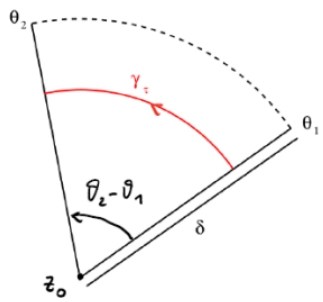
Allora

$$I = Re\left[\pi e^{-1}\right] = \frac{\pi}{e}$$

Caso 3 Consideriamo anche funzioni che hanno poli sull'asse reale. In questo caso l'esistenza dell'integrale improprio va valutata caso per caso.

Lemma 11.2.5. *Sia* Ω *un aperto* $z_0 \in \Omega$ *e* $f \in \mathscr{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. *Sia* $\overline{B_{z_0}(\delta)} \subset \Omega$ *e sia* γ_τ *l'arco di raggio* τ *con* $\theta_1 \leq arg(\gamma_\tau) \leq \theta_2$ *e* $\tau \leq \delta$. *Se* f *ha un polo semplice o una singolarità eliminabile in* z_0, *cioè* $\exists \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = b$ *e quindi* $b = Res_{z_0}(f)$ *allora*

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{\gamma_\tau} f(z)\, dz = ib(\theta_2 - \theta_1)$$



Dimostrazione. Data la funzione

$$f(z) = \frac{b}{z-z_0} + h(z)$$

Con h olomorfa vicino a z_0 quindi

$$\int_{\gamma_\tau} f(z)\, dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{b}{\tau e i\theta} i\tau e^{i\theta}\, d\theta + \int_{\gamma_\tau} h(z)\, dz \xrightarrow{\tau\to 0} ib(\theta_2 - \theta_1)$$

Poiché

$$\left|\int_{\gamma_\tau} h(z)\, dz\right| \leq \max_{\gamma_\tau}|h| l(\gamma_\tau) \xrightarrow{\tau\to 0} 0$$

□

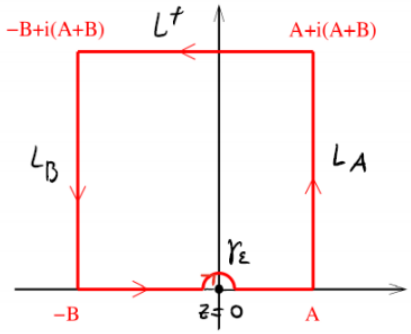
Esempio 11.2.6. *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

Da notare che questa funzione non è integrabile secondo Lebesgue ma esiste l'integrale improprio di Riemann cioè

$$\exists \lim_{A,B\to+\infty} \int_{-B}^{A} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

Sia $f(z) = \frac{1}{z}$ *e sia* Γ *la curva formata da* $L_A, L_B, L^+, \gamma_\epsilon$ *e gli intervalli* $[-B, -\epsilon], [\epsilon, A]$ *con* $\epsilon > 0$ *sufficientemente piccolo.*



L'interno di Γ *non contiene poli di* $f(z)e^{iz} = \frac{e^{iz}}{z}$ *e quindi*

$$0 = \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{LA} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{L^+} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{L_B} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{-B}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{\epsilon}^{A} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = 0$$

Usando la stima $|f(z)| = \frac{1}{|z|}$ *come nel caso 2 si ottiene che gli integrali lungo* $L_A, L^+, L_b \xrightarrow{A,B\to+\infty} 0$ *dunque si ha che*

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = 0$$

Per il lemma, posto $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0$ *e* $b = Res_0\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) = 1$ *si ha che*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -\pi i$$

Quindi

$$\exists \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \pi i$$

Prendendo le parti immaginarie si ottiene dunque che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi$$

<u>Caso 4</u>

Siano g, h polinomi reali in x, y con $h \neq 0$ per $x^2 + y^2 = 1$. Sia la funzione razionale

$$Q(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

Allora

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f)$$

Con

$$f(z) = \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z+z^{-1}}{2i}\right)$$

E $z_1 - z_n$ poli di f in $B_0(1)$ infatti se $\gamma = \partial B_0(1), f\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{ie^{i\theta}} Q(\cos(\theta), \sin(\theta))$ allora ho che

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\theta}} Q(\cos(\theta), \sin(\theta)) ie^{i\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} Q(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta$$

Esempio 11.2.7. *Calcolare l'integrale di*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos(\theta)}\, d\theta$$

In questo caso ho che $Q(x, y) = \frac{1}{3-x}$ *dunque*

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{3 - \frac{z - z^{-1}}{2}} = \frac{2i}{z^2 - 6z + 1} = \frac{1}{z - z_1} \frac{2i}{z - z_1}$$

Con $z_1 = 3 - 2\sqrt{2} \in B_0(1)$ *e* $z_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ *perciò*

$$Res_{z_1} = \left(\frac{2i}{z - z_2}\right)\Bigg|_{z=z_1} = \frac{2i}{z_1 - z_2} = \frac{2i}{-4\sqrt{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

E quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos(\theta)}\, d\theta = 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

11.3 Zeri di funzioni olomorfe (principio d'identità)

Teorema 11.3.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f \in \Theta(\Omega)$ non identicamente nulla e sia*

$$Z(f) = \{z \in \Omega | f(z) = 0\}$$

Allora $Z(f)$ non ha punti di accumulazione in Ω, quindi gli zeri di f sono isolati.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che la tesi è vera localmente quindi sia $z_0 \in Z(f)$. Se f non è identicamente nulla su di un intorno di z_0 allora z_0 ha ordine $m > 0$ quindi su un intorno di z_0 si può scrivere che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

Con g olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z_0) \neq 0$ dunque $\exists B_{z_0}(r) | \forall z \in B_{z_0}(r), g(z) \neq 0$ perciò

$$\forall z \in B_{z_0}(r) \setminus \{z_0\}, f(z) \neq 0$$

Restringendo eventualmente l'intorno di z_0 si può supporre che $g(z_0) \neq 0$ nell'intorno. Quindi $f(z) \neq 0$ per $z \neq z_0$ in un intorno di z_0, cioè z_0 è uno zero isolato di f.

Per ottenere il risultato globale usiamo la connessione di Ω. Sia $A \subset \Omega$ l'insieme dei punti di accumulazione di $Z(f)$ in Ω allora se f è continua abbiamo che che $A \subset Z(f)$ ma dato che

1. $\forall z_0 \in A$ allora è uno zero non isolato di f in quanto visto sopra che f è nulla su un intorno di z_0 quindi tale intorno è contenuto in A, perciò A è aperto.
2. Presa una successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A | z_n \to z$ allora si ha che $z \in Z(f)$ e non è isolato quindi $z \in A$ perciò A è chiuso.

Quindi A è sia aperto che chiuso e poiché $A \subset \Omega$ il quale è per ipotesi connesso seguo che $A = \phi$ o $A = \Omega$ perciò $A = \phi$ poiché $f \not\equiv 0$. □

Corollario 11.3.1 (principio d'identità). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ connesso e $f, g \in \Theta(\Omega)$. Se esiste $S \subset \Omega$ tale per cui $f|_S = g|_S$ e S ha punti di accumulazione in Ω allora $f \equiv g$ su Ω.*

Dimostrazione. Posto $h = f - g$ allora si ha che $h \in \Theta(\Omega)$ dunque poiché $\forall z \in S, f(z) = g(z) \Rightarrow h(z) = 0$ e $Z(h) \supset S$ dunque, avendo S punti di accumulazione di Ω per ipotesi segue che $h \equiv 0$. □

Corollario 11.3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ connesso e $f, g \in \Theta(\Omega)$ con $f \not\equiv 0$ allora $g/f \in \mathscr{M}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Dato che $f \not\equiv 0$ per ipotesi allora gli zeri di f sono isolati e sono poli di $\frac{1}{f}$ quindi $\frac{g}{f}$ è olomorfa su $\Omega \setminus S$ con S discreto in Ω. □

Definizione 11.3.1. *Sia $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Se a_m è il primo coefficiente non nullo della serie di Laurent di f centrata in z_0 allora definisco l'ordine di f in z_0 come*

$$ord_{z_0}(f) = m$$

Osservazione 11.3.1. *$ord_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$ è positivo negli zeri di f e coincide con l'ordine di zero mentre risulta negativo nei poli di f ed è l'opposto dell'ordine di polo.*

11.3.1 Principio dell'argomento

Teorema 11.3.2 (Principio dell'argomento). *Sia $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ con un numero finito di zeri di poli $z_1, \cdots, z_n \in \Omega$ e sia γ una catena$|supp(\gamma) \subset \Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ e $\gamma \sim_\Omega 0$ allora vale che*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Ind_\gamma(z_i) ord_{z_i}(f)$$

Dimostrazione.

$\underline{\frac{f'}{f} \in \mathscr{M}}$
Dato che $f \in \Theta(\Omega)$ per ipotesi allora $f' \in \Theta(\Omega)$ inoltre l'insieme $\{z_1, \cdots, z_n\} \subset \Omega$ è discreto ed indica gli zeri di f per ipotesi dunque $\forall z \notin \{z_1, \cdots, z_n\}, f(z) \neq 0$ dunque

$$\frac{f'}{f} \in \Theta(\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\})$$

Quindi dato che $\{z_1, \cdots, z_n\}$ rappresentano punti di polo per quella funzione allora per definizione ho che $\frac{f'}{f} \in \mathscr{M}(\Omega)$.

Per un risultato precedente essendo ho che

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Ind_{z_i}(\gamma) Res_{z_i}\left(\frac{f'}{f}\right)$$

$\underline{Res_{z_i}\left(\frac{f'}{f}\right) = ord_{z_i}(f) = m}$
Sia z_i uno zero di f e $m_i := ord_{z_i}(f)$ dunque posso scrivere che

$$f(z) = (z - z_i)^{m_i} h(z)$$

Con h olomorfa e $h(z_i) \neq 0$. A questo punto è ovvio affermare che

$$f'(z) = m_i(z - z_i)^{m_i - 1} h(z) + (z - z_i)^{m_i} h'(z) \qquad \forall z \neq z_i \text{ vicino a } z_i$$

Quindi vale che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_i}{z - z_i} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Quindi dato che $\frac{h'(z)}{h(z)}$ olomorfa allora

$$\begin{aligned}
Res_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{z_0}(r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{z_0}(r)} \frac{m_i}{z - z_i}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{z_0}(r)} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz \\
&= m_i \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{z_0}(r)} \frac{dz}{z - z_i} + 0 \\
&= m_i Ind_{B_{z_0}(r)}(z_i) \\
&= m_i
\end{aligned}$$

Dunque la tesi è dimostrata. □

Corollario 11.3.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathscr{M}(\Omega)$. Sia γ una curva di Jordan in $\Omega | int(\gamma) \subset \Omega$ e $supp(\gamma)$ non contenga zeri o poli di f. Posto*

- $N_0 =$ *numero di zeri di f.*
- $N_\infty =$ *numero di poli di f.*

Entrambi contati con le varie molteplicità, allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0 - N_\infty$$

Dimostrazione. Essendo γ per ipotesi una curva di Jordan allora $\gamma \sim_\Omega 0$ e $Ind_\gamma(z) = 1$ per ogni punto interno alla parte connessa e limitata. Sia $\{z_1, \cdots, z_n\}$ l'insieme dei poli e zeri di $f | \{z_1, \cdots, z_n\} \subset Int(\gamma)$ dunque posso affermare che

$$N_0 = \sum_{z_i \text{ zero di f}} ord_{z_i}(f)$$

$$N_\infty = -\sum_{z_i \text{ polo di f}} ord_{z_i}(f)$$

Quindi per teorema precedente ho che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{i=1}^{n} Ind_\gamma(z_i) ord_{z_i}(f)\\ &= \sum_{i=1}^{n} ord_{z_i}(f)\\ &= N_0 - N_\infty\end{aligned}$$

□

Corollario 11.3.4. *Se $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ e $int(\gamma)$ contiene tutti gl zeri e i poli di f allora*

$$N_0 - N_\infty = -Res_\infty\left(\frac{f'}{f}\right)$$

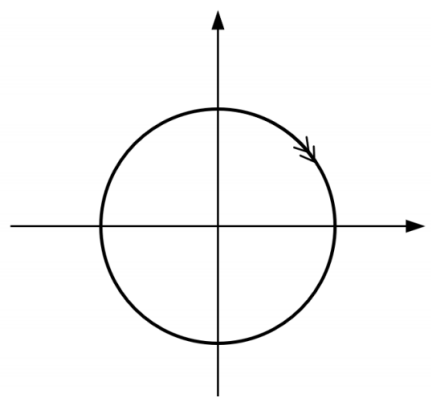
Osservazione 11.3.2. *Il termine "Principio dell'argomento" deriva dall'interpretazione geometrica dell'integrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

Inteso come variazione dell'argomento dei punti della curva $f \circ \gamma$.
Ad esempio se considero $f(z) = \frac{1}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ allora si avrebbe che

$$f \circ \gamma(t) = e^{-2it}$$

Una curva che gira due volte attorno all'origine in senso orario.



Dunque calcolando si ha che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma -\frac{z}{z}\,dz = -2$$

La variazione $\Delta_{f\circ\gamma} arg(w)$ *dell'argomento di* $f = f\circ\gamma(t)$ *lungo la curva* $f\circ\gamma$ *è* -4π *quindi*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_{f\circ\gamma} arg(w)$$

In generale se g *è una funzione logaritmo di* f*, cioè* $e^g = f$ *si ha che* $g' = \frac{f'}{f}$ *non dipende dalla branca del logaritmo, cioè*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz &= \log(f(\gamma(b))) - \log(f(\gamma(a)))\\ &= \log|f(\gamma(b))| - \log|f(\gamma(a))| + i\left(arg(g(\gamma(b))) - arg(f(\gamma(a)))\right)\\ &= i\Delta_{f\circ\gamma} arg(w)\end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_{f\circ\gamma} arg(w) = Ind_{f\circ\gamma(0)}$$

Teorema 11.3.3 (Rouché). *Sia* $\Omega\subset\mathbb{C}$ *aperto,* $f,g\in\Theta(\Omega)$ *e* γ *curva di Jordan in* Ω *con interno contenuto in* Ω*. Se vale*

$$|f(z)-g(z)| < |f(z)| \qquad \forall z\in supp(\gamma) \tag{11.1}$$

Allora f,g

1. *Non hanno zeri su* $supp(\gamma)$*.*
2. *Hanno lo stesso numero di zeri, contati anche con le loro molteplicità nell'interno di* γ*.*

Dimostrazione.

<u>Punto 1</u>
Se supponiamo per assurdo che f,g si annullano su γ cioè $f(z)=0$ ottengo da (11.1) che

$$|g(z)| < 0$$

Mentre se $g(z)=0$ da (11.1) si avrebbe che

$$|f(z)| < |f(z)|$$

E questo è impossibile, per cui f,g non si annullano su γ.

<u>Punto 2</u>
Sia $h=\frac{g}{f}$ allora essendo $f,g\in\Theta(\Omega)$ allora segue che $h\in\mathscr{M}(\Omega)$, inoltre per la disuguaglianza iniziale segue che

$$|h(z)-1| = \frac{|g(z)-f(z)|}{|f(z)|} < 1 \qquad z\in supp(\gamma)$$

Ciò significa che la curva $h\circ\gamma\subset B_1(1)$ quindi dato che $0\notin B_1(1)$ allora

$$\begin{aligned}0 &= Ind_{h\circ\gamma}(0)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{h\circ\gamma}\frac{1}{w}\,dw\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz\end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{h'}{h} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$$

Allora ottengo che

$$\int_\gamma \frac{g'}{g}\,dz = \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz$$

Per il corollario i due integrali sono uguali al numero di zeri di f e f nell'interno di γ. □

Esempio 11.3.1. *A questo punto possiamo fare due esempi:*

1. *Sia $p(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ e $f(z) = -5z^3$ dunque*
   - *Su $\{|z| < 1\}$ vale che*

     $$|p(z) - f(z)| = |z^8 + z - 2| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4 < |f(z)|$$

     Perciò p ha 3 zeri come f nel disco unitario $\{|z| < 1\}$ e non si annulla su $|z| = 1$.
   - *Su $\{|z| < 2\}$, scegliendo $g(z) = z^8$ vale che*

     $$|p(z) - g(z)| = |-5z^3 + z - 2| \leq 5|z|^3 + |z| + 2 = 44 < |g(z)|$$

     Perciò p ha tutti i suo8 zeri nel disco $B_0(2)$ quindi cinque nella corona $\{1 < |z| < 2\}$.
2. *Sia $q(z) = 4z^5 - z^3 + z^2 - 2 + z - 2$. Se si pone $f(z) = 4z^5$ allora*

   $$|q(z) - f(z)| \leq |z|^3 + |z|^2 + 2 = 4$$

   Su $\gamma = \partial B_0(1)$ ma $|f(z)| = 4$ su γ per cui non vale la disuguaglianza stretta (11.1) del teorema. Consideriamo $B_0(1+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$ allora si ha che

   $$|q(z) - f(z)| \leq (1+\epsilon)^3 + (1+\epsilon)^2 + 2 < 4(1+\epsilon)^4 = |f(z)|$$

   Per cui $\forall \epsilon > 0$ si ha che q ha 5 zeri in $B_0(1+\epsilon)$ quindi q ha 5 zeri nel dico chiuso $\overline{B_0(1)}$.

11.3.2 Principio del massimo modulo

Teorema 11.3.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in \Theta(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ uno zero di ordine m di f allora*

$$\exists \epsilon_0 > 0 | \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

$$\exists \delta > 0 | \forall w_0, |w_0| < \delta$$

L'equazione $f(z) = w_0$ ha una soluzione in $B_{z_0}(\epsilon)$ distinte se $w_0 \neq 0$

Dimostrazione. Se z_0 è uno zero isolato di f allora $\exists \epsilon_0 > 0 | B_{z_0}(\epsilon_0) \subset \Omega$ dunque

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_{z_0}(\epsilon_0) \setminus \{z_0\}$$

Sia $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e sia $\gamma = \partial B_{z_0}(\epsilon)$ dunque essendo $|f|$ una funzione continua allora

$$\exists \delta = \min_{z \in \gamma} |f(z)|$$

Se $|w_0| < \delta$ allora si ha che $g = f - w_0 \in \Theta(\Omega)$ e quindi vale che

$$|f(z) - g(z)| = |w_0| < \delta \leq |f(z)| \qquad \forall z \in supp(\gamma)$$

Quindi per il teorema di Rouché si ha che g ha m zeri in $B_{z_0}(\epsilon)$ cioè $f(z) = w_0$ ha m soluzioni con la molteplicità in $B_{z_0}(\epsilon)$.
Se ϵ_0 viene scelto sufficientemente piccolo in modo che

$$Z(f') \cap B_{z_0}(\epsilon_0) = \{z_0\}$$

Si ha che $g' \neq 0$ su $B_{z_0}(\epsilon_0) \setminus \{z_0\}$ quindi gli zeri di g in $B_{z_0}(\epsilon_0) \setminus \{z_0\}$ sono semplici quindi le m soluzioni di $f(z) = w_0$ sono tutte distinte per $w_0 \neq 0$. □

Corollario 11.3.5. *Sia $f \in \Theta(\Omega)$ non costante e $z_0 \in \Omega$. Sia $f(z_0) = \alpha$ e $ord_{z_0}(f - \alpha) = m$ allora*

$$\exists \epsilon_0 > 0 | \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

$$\exists \delta > 0 | \forall w_0, |w_0 - \alpha| < \delta$$

L'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\epsilon)$ distinte se $w_0 \neq \alpha$.

Dimostrazione. Si applica il teorema precedente a $f - \alpha \in \Theta(\Omega)$. □

Teorema 11.3.5 (mappa aperta). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f \in \Theta(\Omega)$ non costante allora f è aperta.*

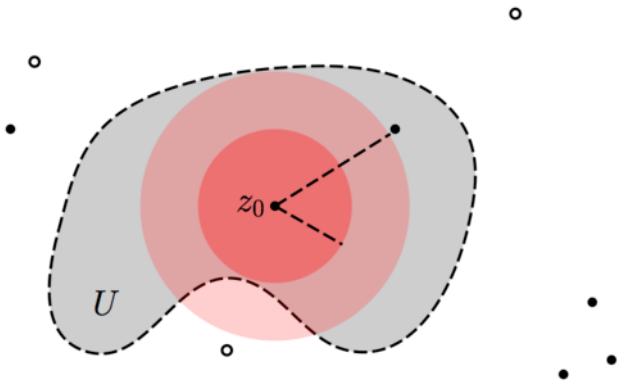
Dimostrazione. Sia $A \subset \Omega$ aperto e $z_0 \in A$. Posto $\alpha = f(z_0) \in f(A)$ allora prendo in considerazione la seguente funzione

$$h(z) = f(z) - \alpha$$

Dato che $f \in \Theta(\Omega)$ e non è costante allora è ovvio affermare che $h \in \Theta(\Omega)$ e non è una funzione costante, inoltre z_0 è uno zero per $h(z)$ dunque z_0 è uno zero isolato.
Per il corollario precedente ho che

$$\exists \epsilon_0 > 0 | \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

$$\exists \delta > 0 || w_0 - \alpha| < \delta$$



La funzione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni $B_{z_0}(\epsilon)$ dunque

$$\forall w_0 \in B_\alpha(\delta), \exists z \in B_{z_0}(\epsilon) | f(z) = w_0$$

Dunque se considero un ϵ sufficientemente piccolo posso affermare che

$$B_{z_0}(\epsilon) \subset A$$

Perciò essendo $f(B_{z_0}(\epsilon)) \subset f(A)$ allora

$$B_\alpha(\delta) \subset f(A)$$

Quindi $f(A)$ è un aperto, perciò per definizione f è una mappa aperta. □

Teorema 11.3.6 (Principio del massimo). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f \in \Theta(\Omega)$ non costante. Allora $|f|$ non ha massimi locali in Ω.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ dunque posto $w_0 = f(z_0)$ per un risultato precedente ho che $\exists B_{w_0}(\delta), \exists B_{z_0}(\epsilon)$ tale per cui

$$\forall w \in B_{w_0}(\delta), \exists z \in B_{z_0}(\epsilon) | f(z) = w$$

Dunque è ovvio affermare che $\exists w \in B_{w_0}(\delta) || w| > |w_0|$ quindi

$$\exists x \in B_{z_0}(\epsilon) || f(z)| > |f(z_0)|$$

Dunque z_0 non è un punto di massimo locale. □

Corollario 11.3.6. *Sia Ω aperto connesso con chiusura $\overline{\Omega}$ compatto. Se $f \in \Theta(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

Teorema 11.3.7 (mappa inversa). *Sia $f \in \Theta(\Omega), z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$ allora $\exists V$ intorno aperto di z_0 e $\exists W$ intorno aperto di $f(z_0)$ tali che*

$$f : V \to W$$

È invertibile con inversa $f^{-1} : W \to V$ olomorfa, inoltre vale inoltre la formula

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w)\right)} \qquad \forall w \in W$$

Dimostrazione. Prima di tutto definisco $\alpha = f(z_0)$ allora

$$g(z) = f(z) - \alpha \in \Theta(\Omega)$$

<u>f è localmente invertibile</u>
Si osserva subito che g ha uno zero di ordine 1 in z_0 poiché

$$g(z_0) = f(z_0) - \alpha = 0$$

$$g'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$$

Dunque

$$ord_{z_0}(f - \alpha) = 1$$

Per un risultato precedente si ha che

$$\exists \epsilon_0 > 0 | \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

$$\exists \delta > 0 | \forall w_0, |w_0 - \alpha| < \delta$$

Tali per cui l'equazione $f(z) = w_0$ ha un'unica soluzione in $B_{z_0}(\epsilon), \forall w_0 \in B_\alpha(\delta)$. Poiché f è una funzione continua allora $f^{-1}\left(B_\alpha(\delta)\right)$ è un aperto e quindi

$$V = B_{z_0}(\epsilon) \cap f^{-1}\left(B_\alpha(\delta)\right)$$

È un aperto, dunque posto $W = B_\alpha(\delta)$ si ha dunque che

$$f : V \to W$$

Rappresenta per definizione una funzione biunivoca.

<u>f^{-1} è olomorfa su W</u>
Avendo dimostrato che f è biunivoca allora posso affermare che $\exists! z = f^{-1}(w)$ e $\exists! z_1 = f^{-1}(w_1)$ in V, quando $w \to w_1$ allora anche $z \to z_1$ per la continuità di f^{-1} perciò si ha che

$$\begin{aligned}
\lim_{w \to w_1} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} &= \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} \\
&= \frac{1}{f'(z)} \\
&= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w_1)\right)} \\
&= \left(f^{-1}\right)'(w_1)
\end{aligned}$$

Dunque il limite esiste in ogni punto $w_1 \in W$. □

Osservazione 11.3.3. *Se $f'(z_0) = 0$ allora la funzione non è iniettiva in quanto z_0 non è uno zero di $g = f - f(z_0)$ di ordine $m > 1$ quindi nell'intorno di z_0 l'equazione $f(z) = w_0$ ha $m > 1$ soluzioni quindi f non è invertibile.*
Sui reali non è vero che $f'(z_0) = 0 \Longrightarrow f$ non è invertibile come ad esempio $f(x) = z^3$.

11.4 Mappe conformi

Una convergenza delle equazioni di Cauchy-Riemann soddisfatte dalle componenti reali di una funzione olomorfa $f = u + iv$ è il seguente.

Corollario 11.4.1. *La matrice Jacobiana della funzione (reale)* $(u, v) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *è*

$$J_f = \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(J_f) = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$$

Il risultato vale anche puntualmente: se f è differenziabile in z_0 allora la matrice $j_f(z_0)$ ha la forma

$$\begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix}_{z=z_0}$$

Questa proprietà ha un significato geometrico: se $f'(z_0) \neq 0$ allora la mappa $(u, v) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preserva gli angoli in z_0: dati due vettori non nulli a, b in z_0, l'angolo tra a, b è uguale all'angolo tra $J_f(z_0)a$ e $J_f(z_0)b$.

Definizione 11.4.1 (Mappa conforme). *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}, f \in \Theta(\Omega)$ e $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$ allora si dice che f è conforme.*

Teorema 11.4.1. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}, z_0 \in \Omega$. Sia $f = u + iv$ con u, v differenziabili in z_0. Allora f è conforme in $z_0 \Longleftrightarrow$ esiste la derivata complessa $f'(z_0)$ e $f'(z_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. Per dimostrare questo risultato devo dimostrare due implicazioni.

<u>"f è conforme in $z_0 \Longleftarrow \exists$ la derivata complessa $f'(z_0)$ e $f'(z_0) \neq 0$"</u>

Se f è differenziabile in z_0 allora $J_f(z_0)$ ha la forma del corollario con $\det(J_f(z_0)) = |f'(z_0)|^2 > 0$.
Sia

$$(u_x, v_x) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad r = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} = |f'(z_0)| > 0$$

Alla la matrice Jacobiana si può scrivere come

$$J_f(z_0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Corrispondente alla composizione di una rotazione con un'omotetia

$$(a, b) \mapsto (ra, rb)$$

Trasformazione del piano che preserva gli angoli dunque per definizione f è conforme.

<u>"f è conforme in $z_0 \Longrightarrow \exists$ la derivata complessa $f'(z_0)$ e $f'(z_0) \neq 0$"</u>

Sia f conforme in z_0. Sia θ l'angolo tra i vettori $(1, 0)$ e $J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $J = J_f(z_0)$. Sia

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Allora $R_\theta^{-1} J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad r > 0$ La trasformazione definita dalla matrice $R_\theta^{-1} J$ preserva gli angoli, poiché J preserva gli angoli. Quindi $R_\theta^{-1} J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$ $\quad s > 0$ e $R_\theta^{-1} J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ dunque deve essere che $r = s$.
Sia ha dunque $R_\theta^{-1} J \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ quindi

$$J = R_\theta \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Perciò

$$J_f(z_0) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ciò implica che $u_x = v_y$ e che $u_y = -v_x$, queste rappresentano le condizioni di Cauchy Riemann e mi dicono che f è differenziabile in z_0 e $f'(z_0) \neq 0$ poiché $\det J \neq 0$. $\square$

Corollario 11.4.2. *f è conforme in $\Omega \iff f \in \Theta(\Omega)$ e $f' \neq 0$ su Ω.*

Osservazione 11.4.1. *Se si richiede che f conservi solo l'ampiezza dell'angolo tra i vettori e non l'orientazione, oltre alle fuznioni olomorfe bisogna considerare anche quelle antiolomorfe, cioè le funzioni $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tali che $f = \overline{g}$ è olomorfa su Ω.*
In tal caso $\det J_g \leq 0$ quindi la moltiplicazione per J_g inverte l'orientazione.

Osservazione 11.4.2. *La mappa f è conforme in $z_0 \iff$ per le coppie di vettori non nulli $a, b \in \mathbb{R}^2$, l'angolo in z_0 tra due curve γ_a e γ_b con $\gamma_a(0) = \gamma_b(0) = z_0$ e $\gamma'(0) = a, \gamma_b'(0) = b$ è uguale all'angolo in $f(z_0)$ tra le curve $f \circ \gamma_a$ e $f \circ \gamma_b$.*
Infatti se $f = u + iv$ e $\gamma_a(t) = (x(t), y(t))$, si ha che

$$(f \circ \gamma_a)' = \frac{d}{dt}(u \circ \gamma_a(t) + i(v \circ \gamma_a(t)) = (u_x x' + y_y y') + i(v_x x' + v_y y')$$

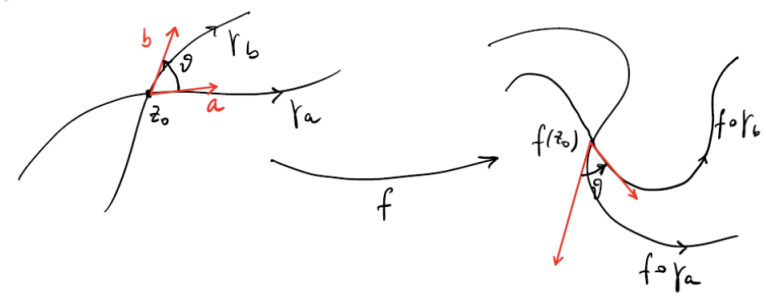
Quindi $(f \circ \gamma_a)'(0)$ ha componenti date dal prodotto

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{z=z_0} \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = J_f(z_0) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = J_f(z_0)a$$

Analogamente $(f \circ \gamma_b)'(0)$ ha componenti date da $J_f(z_0)b$. Per quanto visto nel teorema precedente, la moltiplicazione per $J_f(z_0)$ preserva gli angoli se e solo se $J_f(z_0)$ ha la forma

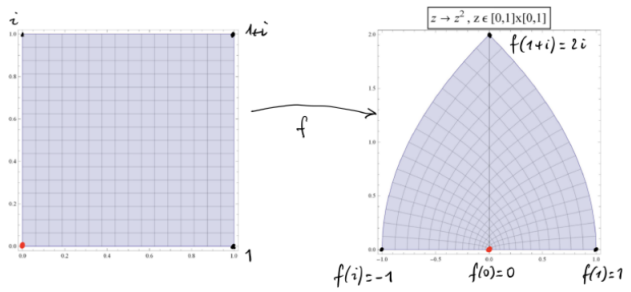
$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & -v_y \end{bmatrix}$$

Equivalente alle condizioni di CR nel punto z_0.

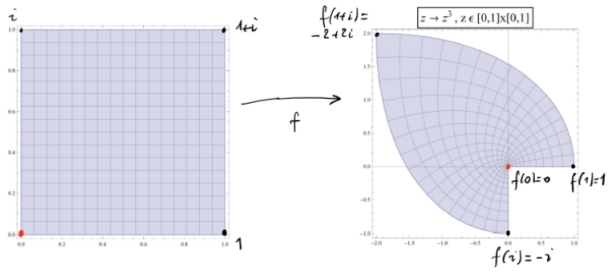


Esempio 11.4.1. *Da quanto visto fino ad ora posso fare alcuni esempi:*

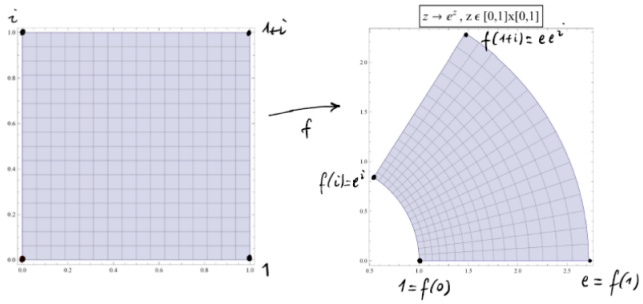
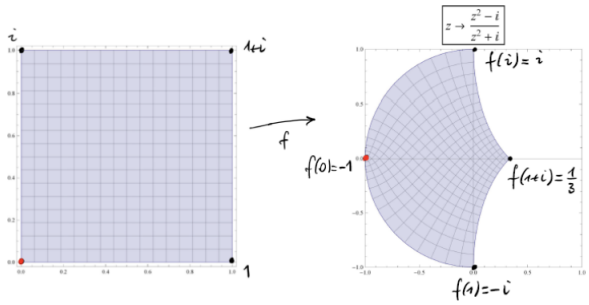
1. *Sia $f(z) = z^2$ allora $f'(z) \neq 0 \forall z \neq'$ dunque f per definizione è conforme in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*



2. *Sia* $f(z) = z^3$ *allora* $f'(z) \neq 0 \forall z \neq'$ *dunque* f *per definizione è conforme in* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$



3. *Sia* $f(z) = e^z$ *si vede che per definizione è conforme in* $\mathbb{C}$



4. *Sia* $f(z) = \frac{z^2-i}{z^2+i}$ *per definizione è conforme in* $\mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$, *in particolare è conforme sul* I° *quadrante*