Lista delle Dimostrazioni di Topologia Generale

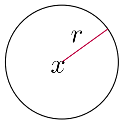
Leonardo Errati

1 agosto 2020

Indice

1 Spazi metrici

1.1 Studio degli aperti in uno spazio metrico



1. Siano dati uno spazio metrico ed un suo sottoinsieme, questo è un aperto nello spazio ambiente se e solo se è intorno di ogni suo punto
2. Sia data f applicazione tra spazi metrici, la definizione metrica di continuità equivale a richiedere che per ogni A aperto di arrivo $f^{-1}(A)$ è un aperto in partenza
3. Sia dato uno spazio metrico, è possibile dimostrare che la famiglia dei suoi aperti rispetta le proprietà di topologia

2 Introduzione alla topologia generale

2.1 La struttura di topologia su uno spazio: basi e sottobasi

1. Le due definizioni di base sono equivalenti:
   - è un insieme B tale che ogni aperto della topologia τ si può scrivere come unione di insiemi di una sua sottofamiglia
   - è tale che per ogni elemento x di ogni aperto A di τ esiste un sottoinsieme di B contenuto in A e che contiene l'elemento x
2. Una base è un ricoprimento dello spazio, in particolare non è vuota
3. L'intersezione numerabile di elementi di una base è un elemento di una base
4. Se B famiglia di sottoinsiemi dello spazio è ricoprimento ed è stabile per intersezione numerabile, allora esiste ed è unica la topologia di cui B è base; in particolare è la topologia meno fine che contiene B (l'intersezione di tutte le topologie che contengono B)
5. Se ξ è un ricoprimento dello spazio, esiste un'unica topologia che ha ξ come sottobase; in particolare è la topologia meno fine che contiene ξ

2.2 Intorni e sistemi fondamentali di intorni

1. Ogni intorno è aperto a meno di restrizione

2. Un insieme della topologia è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto

3. Un sistema di intorni è: stabile per sovrainsiemi (unione), per intersezione finita, contiene il punto di cui è intorno ed un intorno V di ogni punto contenuto in U intorno di x ha U come intorno; in particolare una famiglia di insiemi con queste quattro proprietà ha una ed un'unica topologia rispetto a cui è famiglia di intorni di quel punto

4. Sia dato uno spazio topologico con un sistema fondamentale di intorni $V(x)$ per ogni suo punto x, un suo sottoinsieme è aperto se e solo se ogni suo punto x ha come intorno un insieme di $V(x)$ contenuto in A

5. Sia dato uno spazio topologico con una famiglia di intorni aperti per ogni suo punto, allora la sua base è l'unione degli intorni di ogni punto x

6. L'intersezione finita di elementi del sistema fondamentale contiene un elemento del sistema fondamentale (non necessariamente lo è)

7. Il sistema fondamentale di intorni è il modo più potente per descrivere una topologia: un insieme $V(x)$ (non vuoto per ogni x)[1] che soddisfa le seguenti per ogni punto dello spazio topologico

   - l'intersezione finita di elementi di $V(x)$ contiene un elemento di $V(x)$ (non necessariamente lo è)
   - ogni $V \in V(x)$ contiene il punto di cui voglio che sia intorno (cioè x)
   - per ogni x, per ogni $V \in V(x)$, esiste un $W \in V(x)$ tale che V è intorno di ogni punto di W

   allora esiste un'unica topologia per cui $V(x)$ è sistema fondamentale di intorni per ogni x

2.3 Gli assiomi di numerabilità

1. Se uno spazio soddisfa il primo assioma, posso assumere a meno di banali operazioni che il sistema fondamentale di intorni abbia V_{n+1} contenuto in V_n per ogni $n \in \mathbb{N}$

2. Uno spazio che soddisfa il secondo assioma ne soddisfa il primo

2.4 Successioni in uno spazio topologico

1. In uno spazio metrizzabile ogni successione convergente ha limite unico

2. In ogni spazio topologico le successioni costanti convergono

[1] si sottintende l'esistenza di una mappa $f: X \to P(P(X))$ che associa ad ogni x ciò che vogliamo dimostrare essere sistema fondamentale di intorni

2.5 Chiusura di un sottoinsieme

1. L'interno di un insieme S è contenuto nell'insieme stesso; l'esterno di S è l'interno del complementare di S; lo spazio ambiente si può partizionare come unione disgiunta dell'interno di S, dell'esterno di S e della frontiera di S
2. L'interno di un insieme è il più grande aperto contenuto nell'insieme stesso
3. (Teorema di Lindeloff) Sia dato uno spazio topologico a base numerabile e con una famiglia numerabile di insiemi A_i indicizzata da I non numerabile; allora esiste un'indicizzazione $J \in P(I)$ tale che l'unione degli A_i rispetto ad I sia identica all'unione rispetto a J
4. Ogni S è unione disgiunta del suo interno e di sé intersecato alla frontiera
5. Sono equivalenti: S contiene la sua frontiera, S è unione disgiunta del suo interno e della sua frontiera, il complementare di S è aperto
6. La famiglia dei chiusi di una topologia definisce un'unica topologia
7. x è aderente ad S se e solo se appartiene alla sua chiusura
8. La chiusura sequenziale di un insieme è contenuta nella sua chiusura (e sono uguali se lo spazio ambiente soddisfa il primo assioma di numerabilità)
9. Uno spazio a base numerabile è separabile

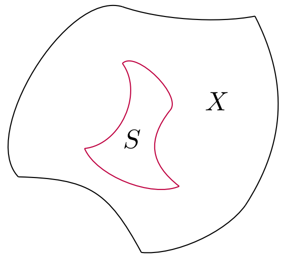
3 Applicazioni tra spazi topologici

$$\mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y}$$

3.1 Applicazioni continue

1. Le seguenti sono equivalenti: f è continua, f^{-1} mappa ogni aperto in arrivo in un aperto di partenza, f^{-1} mappa ogni chiuso in arrivo in un chiuso di partenza
2. Le seguenti sono equivalenti: f è un omeomorfismo, f è continua biettiva ed aperta, f è continua biettiva e chiusa
3. L'immagine inversa della topologia di arrivo è la topologia meno fine sullo spazio di partenza che rende f continua

3.2 Sottospazi di uno spazio topologico



1. Ogni aperto di S sottoinsieme può essere scritto come intersezione di S ed un aperto dello spazio ambiente (questo caratterizza la topologia ristretta ad S, detta τ_S)

2. Quanto appena visto vale anche per i chiusi

3. Una base della topologia τ_S è definibile come intersezione di elementi della base dello spazio ambiente ed S; questo vale anche per le sottobasi, gli intorni ed i sistemi fondamentali di intorni

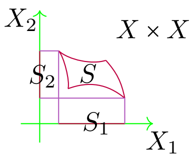
4. La chiusura di un sottoinsieme di S è intersezione della sua chiusura nello spazio ambiente ed S

5. Se T è contenuto in S, la topologia ristretta ad S e poi ristretta a T coincide con la topologia ristretta a T (in altre parole $\tau|_T = (\tau|_S)|_T$)

6. Una funzione $f : X \to Y$ continua può essere ristretta ad un $S \in X$ ed essere ancora continua, inoltre anche $f(S)$ può essere ristretta a T se $f(S)$ è contenuto in T; anche applicando tutte queste restrizioni, la funzione resta continua

4 Prodotti e quozienti topologici

4.1 Il prodotto di spazi topologici



1. Sia dato uno spazio topologico prodotto, la sua base è uguale al prodotto delle basi degli spazi che compongono il prodotto

2. Le mappe p_i (proiezioni) sono continue, e la topologia prodotto è la meno fine tra tutte le topologie che le rendono continue

3. Le proiezioni sono mappe aperte

4. Il prodotto di topologie relative (ristrette) a degli S_i in partenza è uguale alla topologia prodotto ristretta solo in seguito al prodotto degli S_i

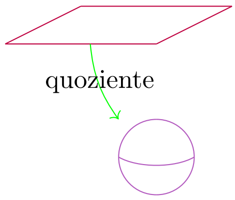
5. La chiusura di un sottoinsieme dello spazio prodotto è il prodotto delle chiusure delle proiezioni

6. Sia dato un punto dello spazio prodotto, un insieme P è suo intorno se e solo se esistono intorni U_i negli spazi iniziali tali che il loro prodotto è contenuto in P

7. Il prodotto di sistemi fondamentali di intorni degli spazi iniziali è un sistema fondamentale di intorni nello spazio prodotto

8. (Proprietà fondamentale del prodotto topologico) Una applicazione tra X ed Y (con Y prodotto topologico tra Y_1, Y_2) è continua se e solo se le sue composizioni con le proiezioni p_i di Y sono continue

4.2 Il quoziente di spazi topologici



1. La topologia quoziente esiste ed è unica

2. C è chiuso nella topologia quoziente se e solo se la sua controimmagine è chiusa in partenza

3. (Proprietà universale del quoziente topologico) siano X, Y, Z spazi topologici, Z arbitrario: g è continua se e solo se lo è $g \circ f$

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"] & (Z,\eta) \\
(Y,\tau_f) \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

4.3 Insiemi f-saturi

1. Sia data una funzione suriettiva con spazio di arrivo dotato della topologia indotta da f, allora vale che un A in Y è aperto (chiuso) se e solo se esiste un S aperto (chiuso) f-saturo con $A = f(S)$

2. Le seguenti sono equivalenti: f è identificazione, ogni aperto di Y è aperto se ha $f^{-1}(A)$ aperto, ogni U aperto (chiuso) f-saturo ha immagine aperta (chiusa) nella topologia di arrivo

4.4 Relazioni di equivalenza

1. Sia f continua tra spazi topologici con relazioni di equivalenza R ed R', se rispetta le relazioni di equivalenza ($\forall x, y \in X \; xRy \iff f(x)Rf(y)$) allora esiste un'unica g continua che chiude commutativamente il diagramma tra i due spazi quozienti

5 Proprietà topologiche

5.1 Spazi di Hausdorff

1. Sia X uno spazio T2 con S sottoinsieme non vuoto, allora S dotato di topologia ristretta è T2

2. Il prodotto di due spazi T2 è uno spazio T2

3. La proprietà T2 implica T1

4. In uno spazio T2 le successioni convergenti hanno limite unico

5.2 Compattezza

1. Uno spazio è compatto se e solo se per ogni suo ricoprimento di A_i ed ogni suo insieme S esiste un indicizzazione finita J per cui S è contenuto nell'unione degli A_j per $j \in J$

2. (Teorema di Heine-Borel) Ogni intervallo chiuso e limitato nella retta reale con topologia naturale è compatto

3. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto

4. Un sottoinsieme compatto di uno spazio T2 è chiuso

5. Un sottoinsieme non vuoto della retta reale con topologia naturale è compatto se e solo se è chiuso e limitato

6. Data una mappa da uno spazio compatto X ad uno spazio topologico Y, se questa è continua allora $f(X)$ è compatto in Y

7. (Teorema di Weierstrass) In uno spazio compatto con una funzione continua f che lo porta nella retta euclidea, questa funzione ammette massimo e minimo

8. (Teorema di Tychonoff) uno spazio prodotto è compatto se e solo se lo sono gli spazi originali

9. Un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato

10. Una funzione continua da un compatto ad un T" è chiusa

11. Sia data una $f : X \to Y$ continua e suriettiva che induce una relazione di equivalenza R su X, allora se X è uno spazio compatto ed Y è T2 la funzione $g : X/R \to Y$ è un omeomorfismo ed f una identificazione

5.3 Connessione

1. Le seguenti sono equivalenti: uno spazio topologico è connesso, si può scrivere come unione di due aperti non vuoti disgiunti, si può scrivere come unione di due chiusi non vuoti disgiunti
2. Ogni spazio discreto con almeno due punti è sconnesso
3. Gli insiemi connessi di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea sono solo gli intervalli (di ogni tipo)
4. La connessione è una proprietà topologica
5. La connessione è una relazione di equivalenza in uno spazio topologico
6. Uno spazio topologico è connesso se e solo se ogni due punti che contiene sono connessi tra loro