DOMANDE GEOMETRIA
GHILONI

- Topologia prodotto:
  - Definizione
  - Dimostrare che $B_1 \times B_2$ è una base e che la topologia prodotto è la meno fine che rende continue le proiezioni.

- Topologia quoziente
  - Definizione topologia quoziente.
  - teorema nel quale le classi di equivalenza coincidono con le fibre.
  - Quando la proiezione al quoziente è aperta e/o chiusa.
  - Esempio di proiezione al quoziente non aperta e non chiusa.
  - Dimostrare che:
    - $[0,1]/\sim \; \approx \mathbb{S}^1$.
    - $\mathbb{S}^1$ è connesso.

- Insieme compatto:
  - Definizione insieme compatto.
  - Definizione insieme T2.
  - Definizione insieme T1.
  - Definizione di saturazione.
  - Se X è uno spazio T2 allora è anche T1.
  - Una successione in uno spazio solamente T1 converge a qualsiasi $x \in X$.
  - Sia $S \subset X$ allora S ècompatto $\leftrightarrow \forall$ ricoprimento nell'insieme iniziale posso estrarre un sotto-ricoprimento finito.
  - Heine-Borel.
  - Chiuso in compatto è compatto.
  - Compatto in T2 è chiuso
  - Corollario di Weierstrass.
  - Tychonoff
  - Sia $f: (X, \tau) \to (Y, \xi)$ continua, X compatto e Y T2 allora
    - f è chiusa.
    - Se f è biettiva allora è un omeomorfismo.

- Dimostrare:
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - Uguaglianza definizioni continuità
  - Distanza è funzione continua da $X \times X$ in R.
  - Siano $f, g: (X, \tau) \to (Y, \xi)$ con (Y, ξ) T2 e $B := \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ allora
    - B è chiuso.
    - Se le due funzioni coincidono su un insieme denso, cos'è l'insieme B.

- Connessione:
  - Definizione insieme connesso.
  - Definizione insieme convesso.
  - L'insieme $\mathbb{Q}$ con la topologia relativa indotta da quella euclidea è sconnesso.
  - Immagine di un connesso tramite funzione continua è connesso.
  - U, V connessi, $U \cap V \neq \phi \Rightarrow U \cup V$ connessi.
  - Connessione come relazione su X.
  - Definizione componenti connesse.
  - La chiusura di un connesso è un connesso.
  - Componente connessa:

        - È sempre chiusa.
        - È connessa.
        - È il più grande connesso contenente X.
    - Connessione come proprietà topologica.
    - Definizione connessione per archi.
    - Connesso per archi implica connesso.
    - Un insieme aperto e chiuso è unione di componenti connesse.
    - Dare esempio di
        - componenti connesse non sono aperte.
        - Unione di componenti connesse che non è né chiusa né aperta.
    - In $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ Convesso $\Longleftrightarrow$ connesso.

- Esercizio:
    - $F\big(int(A)\big) \subset F(A)$
    - f continua implica che $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$.
    - Superficie laterale di un cilindro con la base inferiore quozientata a un punto è omeomorfo al disco chiuso.

PEROTTI

- Teorema:
    - Lemma per invarianza per omotopia
    - Invarianza per omotopia.
    - Seifert-Van Kampen (spiegazione del significato di R_S).
    - Cauchy-Riemann.
    - Abel.
    - Goursat.
    - Abel.
    - Integrale nullo di Cauchy locale.
    - Formula integrale di Cauchy locale.
    - Media integrale.
    - Weierstass.
    - Luiville.
    - Teorema fondamentale dell'algebra.
    - Morera.
    - Integrale di Cauchy globale.
    - Esistenza di un'armonica coniugata.
    - Residui.
    - Lemma per calcolare i residui in funzione dei poli.
    - Rouché.
    - Mappa aperta (perché serve l'ipotesi di connessione?)
    - Principio del massimo modulo.
    - Lemma di Jordan.
    - Mappa inversa.
    - Mappa conforme.
    - Analitica $\Longleftrightarrow$ olomorfa

- Dimostrazione:
    - Se X è contraibile e A è retratto di C anche A è contraibile.
    - Date due mappe continue da X in una sfera, la cui somma non è mai zero, sono omotope.
    - Retratto di contraibile è contraibile.
    - Due spazi omeomorfi hanno gruppi fondamentali isomorfi.

    - Il gruppo fondamentale è una proprietà topologica.
    - f olomorfa allora
        - u, v di classe C^∞.
        - È aperta.

- Cosa è una proprietà topologica
- Se f automorfismo del disco manda il bordo in bordo

- Gruppo fondamentale:
    - Definizione.
    - Classi di equivalenza dei cammini.
    - Definizione delle operazioni.
    - Dimostrazione che è veramente un gruppo.
    - Dipendenza dai punti fissi.
    - φ_* è isomorfismo.
    - invariante omotopico

- Retratto:
    - Gruppo fondamentale di un retratto (ed esempio di un sottospazio che non sia un retratto del suo spazio)
    - Se A è retratto di X allora il gruppo fondamentale di A è un sottogruppo di quello di X
    - esempio di un sottoinsieme non retratto e perché non è un retratto? ($S^1\ in\ R^2$, il gruppo fondamentale di S^1 non è banale).
    - Fare un esempio di insieme non retratto.

- Definizione di
    - Retratto di deformazione.
    - Elemento di torsione.
    - Indice
    - Catena
    - Omologia
    - Funzione olomorfa
    - Curva di Jordan

- Esercizio:
    - calcolare gruppo fondamentale di:
        - toro con una sfera incollata nella circonferenza interna sul suo equatore.
        - $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$.
        - $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$.
        - $\mathbb{S}^2$.
        - $\mathbb{S}^2$ con due poli collegati da un segmento.
        - $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ vista come una sfera piena.
    - Calcolare il gruppo fondamentale del poligono "$a^{-1}\ b\ a^{-1} b$" coi vertici identificati dalle identificazioni discendenti dai lati. con blank si intende un lato non identificato.
    - Calcolare il massimo di
$$f(z) = (z - i)e^z \qquad z \in [-2,2] \times [-2,2]$$
    - Risolvere:
$$\int_R \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10}$$
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^3 dx$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{2 + \sin t}\, dt$$

- Spazi top omotopicamente equivalenti
- semplicemente connesso non implica contraibile (sfera)
- singolarità eliminabili, come elimino le singolarità?
- Parlare delle singolarità isolate con caratterizzazione mediante serie di Laurent e comportamento della funzione vicino alla singolarità

- Teorema di classificazione delle superfici compatte:
    - Enunciato
    - Dimostrazione 1
    - Dimostrazione 2
    - Elementi di torsione
    - Abelianizzati
    - Come utilizzare la proposizione di invarianza topologica