

Geometria B

*Topologia generale ed
analisi complessa*

PROGETTO PROMETEO

2020

Geometria B

G. Susanna Leonardo E.

14 settembre 2020

Indice

1	Prefazione	1
I	Topologia Generale	3
2	Introduzione alla topologia generale	5
2.1	La struttura di topologia	6
2.1.1	Alcune definizioni fondamentali	6
2.1.2	Confronto tra topologie	8
2.2	Basi e sottobasi di topologie	9
2.2.1	Semplificare la scrittura: basi di topologie	9
2.2.2	La sottobase di una topologia	12
2.3	Intorni e sistemi fondamentali di intorni	14
2.3.1	Gli intorni in topologia	14
2.3.2	Sistemi fondamentali di intorni	16
2.4	Assiomi di numerabilità	20
2.4.1	Primo assioma di numerabilità	20
2.4.2	Secondo assioma di numerabilità	20
2.5	Successioni in uno spazio topologico	22
2.5.1	Definizione di una successione	22
3	La struttura degli spazi topologici	23
3.1	Sottoinsiemi di uno spazio topologico	24
3.1.1	Punti interni, esterni e di frontiera	24
3.1.2	Chiusi e chiusura negli spazi topologici	25
3.1.3	Il problema della chiusura di un insieme	26
3.2	Densità e separabilità	31
3.2.1	La densità in topologia	31
3.2.2	Spazi topologici separabili	32
4	Spazi topologici ed applicazioni	35
4.1	Lo studio delle applicazioni tra spazi topologici	36
4.1.1	Le applicazioni continue	36
4.1.2	Proprietà delle applicazioni continue	37
4.1.3	Applicazioni aperte e chiuse	39
4.1.4	Gli omeomorfismi	40
4.2	Sottospazi topologici, prodotti e quozienti	41
4.2.1	Sottospazi di uno spazio topologico	41

4.2.2	Sottospazio di uno spazio topologico	42
4.2.3	Il prodotto topologico finito	47
4.2.4	Topologie quozienti	53
4.2.5	Quozienti con mappe surgettive	54
4.2.6	Relazioni di equivalenza e spazi quozienti	57
4.3	Gruppi topologici	60
4.3.1	L'operatore di gruppo	60
5	Proprietà topologiche	61
5.1	Proprietà di Hausdorff T_2	61
5.1.1	La proprietà T_2	61
5.1.2	La proprietà T_1	63
5.2	Compattezza	65
5.2.1	Spazi e sottospazi compatti	65
5.2.2	Caratteristiche degli spazi compatti	66
5.3	Connessione	70
5.3.1	Spazi topologici connessi	70
5.3.2	Connessione per archi	74
6	Esempi	77
6.1	Alcune varianti di topologie su \mathbb{R}	77
6.1.1	Caratteristiche degli spazi compatti	77
6.1.2	Un breve esercizio	78
6.2	Topologia di Zariski e gli insiemi algebrici	78
6.2.1	Una topologia aliena in un mondo noto	78
6.3	Esempio di quoziente	80
6.3.1	Brevi esempi di quoziente topologico	80
6.4	Discriminazione di topologie	81
6.4.1	Discriminare, ma in senso buono	81
II	Topologia Algebrica	83
7	Omotopie: mappe tra cammini	85
7.1	Omotopie e retratti	86
7.1.1	Omotopie e classi di omotopia	86
7.1.2	Retratti e retratti di deformazione	87
7.2	CW-complessi	89
7.2.1	Una semplice classe di spazi complessi	89
7.3	Il gruppo fondamentale	93
7.3.1	Deformare cappi su una superficie	93
7.3.2	Il teorema di invarianza omotopica	96
7.4	Il teorema di Seifert-van Kampen	97
7.4.1	Enunciato e conseguenze	97
7.4.2	Applicazioni di Seifert-van Kampen	97

8	Varietà	101
8.1	Le varietà topologiche	102
8.1.1	Introduzione allo studio delle varietà	102
8.1.2	Struttura delle varietà topologiche	104
8.2	Classificazione delle superfici compatte	106
8.2.1	Alcuni cenni di teoria dei gruppi	106
8.2.2	Il teorema di classificazione per le superfici compatte	107
III	Analisi Complessa	109
9	Calcolo differenziale	111
9.1	Differenziabilità in senso complesso	112
9.1.1	Da \mathbb{R} a \mathbb{C}: funzioni differenziabili	112
9.1.2	Funzioni armoniche ed operatori di Wirtinger	114
9.2	Funzioni analitiche o funzioni olomorfe?	114
9.2.1	Serie e successioni in senso complesso	114
9.2.2	Le serie di potenze	116
10	Integrali di linea	119
10.1	Integrare su una curva	120
10.1.1	Integrare su una curva	120
10.2	L'indice e la formula integrale di Cauchy	126
10.2.1	Indice di un punto rispetto ad una curva	126
10.2.2	La formula integrale di Cauchy	127
10.2.3	Conseguenze della formula integrale	128
10.3	Teoremi integrali di Cauchy	132
10.3.1	Teoremi integrali in forma generale	132
10.4	L'indice rispetto alle curve continue	136
10.4.1	Ridefinire l'indice per curve non C^1	136
10.4.2	Applicazioni dell'indice	137
11	Serie di Laurent	139
11.1	Serie di Laurent e singolarità solate	140
11.1.1	Funzioni olomorfe come serie di potenze	140
11.1.2	Le singolarità di funzioni olomorfe	142
12	Lo studio dei residui	147
12.1	Residuo e residuo a infinito	148
12.1.1	Funzioni olomorfe come serie di potenze	148
12.1.2	Calcolare i residui	149
12.1.3	Applicazioni agli integrali reali	151
13	Zeri di funzioni olomorfe	159
13.1	Alcuni teoremi utili	159
13.1.1	Principi e teoremi per funzioni olomorfe e mero- morfe	159
13.1.2	Il principio del massimo modulo	163

14 Mappe conformi	167
14.1 Una mappa che preserva gli angoli	168
14.1.1 Il significato geometrico delle mappe conformi . . .	168
14.1.2 Le mappe conformi come funzioni olomorfe	168
15 Estensione di funzioni in \mathbb{C}	173
15.1 Funzione esponenziale	174
15.1.1 La funzione esponenziale	174
15.1.2 Le funzioni trigonometriche	175
15.1.3 Il logaritmo ed il logaritmo principale	176

Capitolo 1

Prefazione

Se volete i file .tex sono gratuitamente scaricabili all'indirizzo <https://github.com/Progetto-Prometeo/GeometriaB>. Questo testo contiene gli argomenti svolti al corso di Geometria B 2019-2020 relativi ai seguenti tre argomenti

- Topologia Generale
- Topologia Algebrica
- Analisi Complessa

Se dovete riscontrare errori sentitevi liberi di scrivere a

projectprometheus.org@gmail.com

e provvederemo a rilasciare eventualmente una versione aggiornata. Oppure lasciate un PR o un issue su <https://github.com/Progetto-Prometeo/GeometriaB>.

Parte I

Topologia Generale

Capitolo 2

Introduzione alla topologia generale

Perché studiare topologia?

Oltre al fatto che sia (seppur discutibilmente) molto interessante e divertente, la topologia generalizza gli assiomi degli spazi metrici.

Solitamente abbiamo visto in analisi - e vedremo anche più avanti - il caso degli intorni in formulazione *epsilon-delta*, cioè le *palle aperte*. Questa generalizzazione ci permette di estendere delle “buone” caratteristiche ad oggetti (o insiemi) che altrimenti non le avrebbero; alla fine del corso risulterà ovvio allora che gli spazi dell’analisi matematica fanno parte di una classe particolarmente privilegiata, sono più eccezione che norma.

2.1 La struttura di topologia

2.1.1 Alcune definizioni fondamentali

Definizione 2.1. Sia $X \neq \emptyset$. Una **struttura topologica su X** , o semplicemente topologia su X (o di X), è una famiglia $\tau \subset 2^X$ di sottoinsiemi che soddisfa le seguenti proprietà

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. τ è stabile per unione arbitraria, ovvero

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$

dove I è un qualsiasi insieme indicizzante e $\forall i$ si ha che $A_i \in \tau$.

3. τ è stabile per intersezioni finite, ovvero

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$$

dove $\forall i. A_i \in \tau$.

Osservazione 2.2. È ovvio che l'ultima condizione si può riscrivere come:

$$\forall A_1, A_2 \in \tau \text{ allora } A_1 \cap A_2 \in \tau$$

Infatti per induzione si può ottenere di nuovo il terzo assioma.

Definizione 2.3. Sia τ una topologia su X , la coppia (X, τ) si chiama **spazio topologico**. X è detto **supporto dello spazio topologico**.

Sia $A \in \tau$, A è detto **sottoinsieme aperto di (X, τ)** o aperto di τ oppure aperto di X (se τ è implicitamente definita).

Di seguito mostreremo come alcune semplici topologie possano essere collegate alla struttura di uno spazio metrico in modo più preciso; le due definizioni sono strettamente correlate anche in casi molto complessi, ma non ci estenderemo a tanto.

Definizione 2.4. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **metrizzabile** se esiste una funzione distanza $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che gli insiemi aperti indotti da d sono gli stessi elementi di τ .

In particolare se uno spazio è metrizzabile allora la topologia indotta da d è la stessa già presente nello spazio, $\tau_d = \tau$.

Di seguito mostreremo come alcune semplici topologie possano essere collegate alla struttura di uno spazio metrico in modo più preciso; le due definizioni sono strettamente correlate anche in casi molto complessi, ma non li studieremo in modo approfondito. Parlando di un caso davvero banale, diciamo **topologia euclidea** la topologia su \mathbb{R}^n associata alla ben nota *distanza euclidea*. Già al nostro marginale livello di trattazione, il caso euclideo (e quindi campo dell'analisi matematica) risulta essere una “banale” eccezione.

Questo è esattamente ciò di cui stavamo parlando, il fatto che uno spazio ammetta una funzione distanza compatibile con la propria topologia non è affatto scontato; o almeno non lo è nella maggior parte delle volte.

Altri spazi più *patologici* sono metrizzabili, e questo induce su di loro la struttura di spazio metrico.

Notiamo un fatto importante, che dovrebbe essere ovvio ma è bene sottolineare. Se uno spazio è metrizzabile, quindi se la sua topologia è compatibile con una funzione distanza d , allora gli aperti possono essere costruiti come unione di $B_d(x_i, r_i)$ per $r_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Vedremo in seguito che questi costituiscono una *base della topologia*, ma diamo tempo al tempo.

Esempio 2.5.

1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia la famiglia τ_d degli aperti di X rispetto a d . Allora (X, τ_d) formano uno spazio topologico.
2. La topologia più povera in assoluto è la *topologia banale*:

$$\tau = \{\emptyset, X\}$$

Vediamo che non è metrizzabile se non nel caso in cui $X = \{x\}$, ovvero quando X è un *singoleto*.

Infatti sia d una distanza su X e sia $X = \{p, q\}$ allora per ogni $\rho > 0$ si ha che $q \in B_\rho(p)$, quindi $d(p, q) = 0$. Ma poiché d è una distanza ottengo che $p = q$, contraddicendo l'ipotesi $p \neq q$.

Nel caso del singoletto invece è elementare che sia metrizzabile.

3. Dall'altra parte della barricata c'è la *topologia discreta*:

$$\tau = 2^X$$

Questa è la più ricca topologia possibile da indurre su un insieme; infatti se τ è una topologia ho che $\tau \subseteq 2^X$.

Si tratta ovviamente di una topologia (la verifica è immediata) e vale anche l'assioma della stabilità per intersezioni di famiglie arbitrarie.

Inoltre è sempre metrizzabile per ogni $X \neq \emptyset$: infatti basta prendere la distanza $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, 0 altrimenti.¹

4. Definiamo la *topologia cofinita* come segue:

$$\tau_{\text{cof}} := \{\emptyset\} \cup \{A \in 2^X \mid A^c \text{ è finito}\}$$

Si dimostra che è una topologia.

- (a) $\emptyset \in \tau_{\text{cof}}$. Inoltre $X^c = \emptyset$ e \emptyset è ovviamente finito. Quindi $X \in \tau_{\text{cof}}$.
- (b) Dimostro la stabilità per unione di famiglie arbitrarie di τ_{cof} .
Siano C_i i complementari finiti di A_i per ogni i .

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} C_i^c = \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right)^c \subseteq C_j$$

per qualunque insieme I e qualche $j \in I$. Per cui visto che $A_j \in \tau_{\text{cof}}$ risulta che C_j sia finito.

¹si può anche prendere un valore arbitrario, come $69.42^{0.314159}$; non è questo il punto.

- (c) Siano $A_1, A_2 \in \tau_{\text{cof}}$, allora $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ e l'unione finita di insiemi finiti è finito, per cui anche $A_1 \cap A_2 \in \tau_{\text{cof}}$.

Inoltre non è metrizzabile perché se lo fosse sarebbe di Hausdorff, ma come si vedrà, non è di Hausdorff; quindi non può neppure essere metrizzabile.

2.1.2 Confronto tra topologie

Risulta perfettamente naturale chiedersi quando due topologie siano “uguali”, o comunque “confrontabili”. Ma come si definisce per una topologia l’essere “uguale” ad un’altra? In che senso una topologia è “paragonabile” ad un’altra?

Intuitivamente vogliamo lavorare sulla struttura topologica che inducono nello spazio, ma questa intuizione deve essere formalizzata.

Definizione 2.6. Sia $X \neq \emptyset$. Siano τ, τ' due topologie su X . Diciamo che τ è **meno fine** (più fine) di τ' se $\tau \subset \tau'$ ($\tau' \subset \tau$).

Definizione 2.7. Due topologie τ, τ' si dicono **confrontabili** se τ è più fine o meno fine o uguale a τ' .

Evidentemente, non tutte le topologie sono confrontabili tra loro.

Esempio 2.8. Alcuni esempi di confronto tra topologie.

1. La topologia banale è la meno fine di tutte le topologie di X .
2. La topologia discreta è la più fine delle topologie su X .
3. Sia $X = \{a, b\}$, allora $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ e $\tau' = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ sono topologie non confrontabili.

2.2 Basi e sottobasi di topologie

2.2.1 Semplificare la scrittura: basi di topologie

Poiché le topologie possono essere molto complesse, sarebbe utile avere un modo per poterle scrivere (o costruire) più semplicemente.

Scegliamo il seguente approccio: cerchiamo una sottofamiglia \mathcal{B} della topologia tale che ogni A elemento della topologia si possa scrivere come unione di insiemi B_j contenuti in \mathcal{B} ; intuitivamente sarà un po' come i generatori per i gruppi o le basi per gli spazi vettoriali.

Vediamo come costruire le *basi di una topologia*.

Definizione 2.9. Sia $X \neq \emptyset$. (X, τ) spazio topologico e sia $\mathcal{B} \subset \tau$. \mathcal{B} è una **base di** τ se $\forall A \in \tau \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ per cui $\bigcup_{i \in I} B_i = A$.
O analogamente se la definisco come segue:

$$\tau := \left\{ A \in 2^X \mid \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}, \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = A \right\}$$

Proposizione 2.1. \mathcal{B} è una base se e solo se

$$\forall A \in \tau \forall x \in A \exists B \in \mathcal{B} \text{ tale che } x \in B \subset A$$

Dimostrazione. Dimostriamo che valgono entrambe le implicazioni:

- (\Rightarrow) Scelgo un $x \in A$, poiché \mathcal{B} è una base $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.
Riscrivendo ottengo $x \in A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$, di conseguenza esiste almeno un $B \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ per cui $x \in B$.
- (\Leftarrow) Sia $A \in \tau$, allora posso prendere ogni $x \in A$ e avere che $x \in B_x$ per qualche $B_x \in \mathcal{B}$. Inoltre $B_x \subset A$ per ogni $x \in A$, quindi devo dimostrare che $A \subset \bigcup_{x \in A} B_x$, ma ciò è banalmente vero. ²

□

Esempio 2.10. Alcuni esempi istruttivi nella loro semplicità.

1. Dato uno spazio topologico (X, τ) , τ è una base di τ .
2. Se \mathcal{B} è una base di τ , allora sia $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, allora anche \mathcal{C} è una base di τ .
3. In \mathbb{R} una base può essere $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

Proposizione 2.2. Sia $X \neq \emptyset$ e $\{\tau_i\}$ una famiglia di topologie su X .
Valgono i seguenti enunciati:

1. $\tau_{\cap} = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ è una topologia di X .
2. L'unione di topologie non è sempre una topologia.

²(sia $x \in A$, allora $x \in B_x \subset \bigcup_{x \in A} B_x$).

3. Sia dato un insieme $\mathcal{Y} \subset 2^X$, sia $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi di X presa come segue

$$\mathcal{Y} \subset \tau_i \quad \forall i \in I$$

allora

$$\tau_\cap := \bigcap_{i \in I} \tau_i$$

è la topologia meno fine su X tale da contenere \mathcal{Y} .

Dimostrazione.

1. $\emptyset, X \in \tau_\cap$, poi l'unione e l'intersezione vengono per il fatto che sono elementi di qualche topologia.
2. Controesempio alla tesi che l'unione di topologie è ancora una topologia. Sia $X = \{a, b, c\}$ allora definisco $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$ e $\tau' = \{\emptyset, \{b, c\}, X\}$, l'unione non contiene b , ma $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ per cui l'unione delle topologie non è una topologia.
3. Per il primo punto $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ è una topologia, e contiene \mathcal{Y} per definizione. Dimostro che è la meno fine. Infatti sia $\tau' \subset \bigcap_{i \in I} \tau_i$ e per cui $\tau' \subset \mathcal{Y}$, allora $\tau' \in \{\tau_i\}$ e quindi $\bigcap_{i \in I} \tau_i \subset \tau'$.

□

Osservazione 2.11. Sia (X, τ) uno spazio topologico la cui base è \mathcal{B} , allora valgono le seguenti proprietà:

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = X$ per qualche sottofamiglia $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.³
2. Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ allora $B_1 \cap B_2 \in \tau$, quindi per la definizione di base segue che $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ per qualche $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.
3. Il punto precedente vale $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$; allora se $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ abbiamo che $\forall x \in B_1 \cap B_2$ esiste $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$.

Teorema 2.12. Sia $X \neq \emptyset$ e sia \mathcal{B} una famiglia di sottoinsiemi di X . Supponendo che

1. \mathcal{B} è un ricoprimento di X .
2. Sono dati $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ con $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

Allora \mathcal{B} è una delle basi di una topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ su X ; in particolare è l'unica definita da \mathcal{B} ed è la meno fine che contiene \mathcal{B} .

Dimostrazione. Se τ esiste è unica. Infatti dovendo \mathcal{B} essere una sua base allora per definizione di base

$$\tau := \left\{ A \in 2^X \mid \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}, \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = A \right\}$$

Inoltre se esiste è la più piccola contenente \mathcal{B} . Per cui dimostro che τ è una topologia e la dimostrazione è finita.

³Vale banalmente, visto che $X \in \tau$ per la definizione di base segue che \mathcal{B} è un ricoprimento di X .

1. $\emptyset, X \in \tau$ poiché \mathcal{B} è un ricoprimento di X e inoltre anche $\emptyset \in \tau$ perché basta prendere la sottofamiglia vuota di \mathcal{B} per ottenerlo.
2. L'unione di sottofamiglie di \mathcal{B} è l'unione di elementi di \mathcal{B} poiché ogni elemento in τ è unione di elementi in \mathcal{B} .
3. Analogamente per l'intersezione, dove basta aggiungere l'osservazione che

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \bigcup_i B_{1,i} \cap \bigcup_j B_{2,j} \\ &= \bigcup_{i,j} B_{1,i} \cap B_{2,j} = \bigcup_k B_k \end{aligned}$$

per un $k \in I_{i,j}$ insieme degli indici dipendente da i e j .

Ovvero è ancora contenuto in τ , visto che basta prendere l'unione di una sottofamiglia di \mathcal{B} .

□

2.2.2 La sottobase di una topologia

L'idea dietro la costruzione di una sottobase è mostrare un modo semplice di costruire le basi di topologie, che abbiamo visto non essere sempre amichevoli. Spesso ostili, queste possono essere scritte agilmente grazie a quanto vedremo.

Definizione 2.13. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $S \subset \tau$. Si dice che S è una **sottobase di τ** se genera gli elementi di una base \mathcal{B} tramite di intersezioni finite. La base generata da S si definisce nel seguente modo

$$\mathcal{B} = \langle S \rangle := \left\{ B \in 2^X \mid \bigcap_{i \in I} S_i = B \text{ per un indice con } |I| < +\infty \right\}$$

Esempio 2.14.

1. $S = \tau$ è una sottobase, inutile, ma lo è.
2. Si prenda la topologia 2^X dove $X = \{a, b, c\}$, allora $S = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}\}$ è una sottobase di τ .
3. Si consideri \mathbb{R} , una sua sottobase potrebbe essere $S := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$

Proposizione 2.3. S è una sottobase di τ se e solo se

$$\forall A \in \tau. \forall x \in A. \exists U_1, \dots, U_n \in S \text{ tali che } x \in U_1 \cap \dots \cap U_n \subset A$$

Dimostrazione. Riesce immediatamente, usa le definizioni locali di base ricordandoti che la sottobase definisce una base. \square

Osservazione 2.15. Nella proposizione precedente abbiamo ricavato una definizione equivalente di sottobase; usiamo questa definizione con al posto di A tutto l'insieme X , si ha immediatamente che S forma un ricoprimento di X .

Proposizione 2.4. Se $S \subset 2^X$ è un ricoprimento di X allora S è una sottobase di (X, τ) , ed esiste un'unica topologia su X con questa sottobase generatrice della base.

Quindi τ è l'unica topologia generata da S , ed in particolare è anche la meno fine tra tutte le generabili da S .

Dimostrazione. Se si prova l'esistenza della topologia allora è l'unica ed è anche la più fine. Perciò per il Teorema 2.12 basta dimostrare che la base \mathcal{B} generata da S è tale da essere un ricoprimento e che l'intersezione finita di elementi di \mathcal{B} è stabile.

Come base usiamo ovviamente

$$\mathcal{B} = \left\{ A \in 2^X \mid \exists U_1, \dots, U_n \in S \text{ con } A = \bigcap_i U_i \right\}$$

1. Per ipotesi S è un ricoprimento e $S \subset \mathcal{B}$ quindi anche \mathcal{B} è ovviamente un ricoprimento di X .

2. Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ allora sono intersezione finita di elementi di \mathcal{S} per cui

$$B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i=1}^n U_i \cap \bigcap_{j=1}^m U_j = \bigcap_{i=1}^{n+m} U_i \in \mathcal{B}$$

quindi utilizzando il Teorema 2.12 si conclude. \square

Osservazione 2.16. Se $\mathcal{S} = \{X\}$ è ovvio che $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$, poiché $\emptyset = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ dove \mathcal{A} è la famiglia vuota.

Quindi \mathcal{S} induce la topologia banale, che è la meno fine in assoluto.

2.3 Intorni e sistemi fondamentali di intorni

Ad un certo punto, nello studio di analisi si è destinati ad incontrare gli *intorni*. L'idea alla base dello studio della topologia è ampliare e generalizzare quanto è possibile fare con la “banale” analisi matematica in \mathbb{R}^n , quindi è più che naturale arrivare a trattare di intorni.

In analisi matematica si definiscono con la formulazione detta *epsilon-delta*, e sono solitamente intorni circolari (nel caso $n = 2$); vedremo in questo capitolo un modo per rendere più generali tali definizioni e strutture, oltre all'importanza che ricopriranno nel corso delle dimostrazioni e della teoria di topologia generale, ma anche di algebra e di gran parte della matematica.

2.3.1 Gli intorni in topologia

Definizione 2.17. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $M \in 2^X$. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice **intorno di M in (X, τ)** se esiste un aperto A tale che $M \subset A \subset U$.

In particolare se M è un insieme singoletto si può semplificare la scrittura a $M = \{m\}$, quindi U è un intorno di x in (X, τ) se esiste un aperto A tale che $x \in A \subset U$.

Definizione 2.18. Indichiamo con $\mathcal{N}_\tau(x)$ l'insieme degli intorni di x in (X, τ) .

$$\mathcal{N}_\tau(x) := \{U \in 2^X \mid \exists A \in \tau . x \in A \subset U\}$$

In particolare $\mathcal{N}_\tau(x)$ si dice **sistema di intorni** di x in (X, τ) .

Osservazione 2.19.

1. Se $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ allora $x \in U$.
2. $\forall A \in \mathcal{N}_\tau(x) \exists C \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $C \subset A$ e C aperto. Ovvero a meno di restrizioni ogni intorno è aperto, questo è ovvio dalla definizione (basta prendere l'aperto C che rende A intorno di x con $x \in C \subset A$).
3. Se $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e prendo $V \in 2^X$ tale che $U \subset V$ allora ottengo che $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$.

Proposizione 2.5. Sia (X, τ) uno spazio topologico, e sia $A \in 2^X$.

Allora $A \in \tau$ se e solo se $\forall x \in A. A \in \mathcal{N}_\tau(x)$.

Oppure, equivalentemente, se $A \in \bigcap_{x \in A} \mathcal{N}_\tau(x)$.

Dimostrazione.

(\Rightarrow) La prima implicazione è ovvia poiché A aperto. Allora $x \in A \subset A$ per ogni $x \in A$.

(\Leftarrow) La seconda pure perché A è un intorno di ogni suo punto, e quindi esiste $x \in A_x \subset A$ tale che $A_x \in \tau$. Allora

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$$

da cui $A \in \tau$ perché unione di aperti.

□

Dalle osservazioni che seguono vedremo come una topologia induce sugli intorni certe proprietà, ma allo stesso modo se si danno quelle proprietà a degli intorni questi creano una topologia. Insomma, una topologia genera degli intorni se e solo se quegli stessi intorni generano la suddetta topologia. Questo è dato dal fatto che esistono diverse definizioni equivalenti di topologia, tra le quali esiste quella per filtri e filtri principali (si veda [1]).

A meno di restrizioni, ogni intorno appartenente al sistema di intorni è aperto (basti pensare alla definizione di intorno, con $x \in U \subset A$ ed $U \in \tau$, bisogna solo eventualmente restringersi all'aperto A). Gli intorni quindi possono sostituirsi agli aperti, ma sotto opportune condizioni.

Proposizione 2.6. Sia (X, τ) uno spazio topologico ed $x \in X$, indichiamo per semplicità $\mathcal{N}_\tau(x) = \mathcal{N}(x)$. Valgono le seguenti proprietà:

1. Se $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e $V \in 2^X$ tale che $U \subset V$, allora $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$
2. Siano $N_i \in \mathcal{N}(x)$, allora

$$\bigcap_{i=0}^n N_i \in \mathcal{N}(x)$$

3. Se $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$, $x \in U$.
4. Se $U \in \mathcal{N}(x) \exists V \cdot V \subset U$ tale che $V \in \mathcal{N}(x)$ e $\forall y \in V \cdot U \in \mathcal{N}(y)$.

Dimostrazione.

1. Si veda l'Osservazione 2.19.
2. Basta far vedere che $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$, il ché è ovvio.
Per definizione di intorno esistono $A_1, A_2 \in \tau$ tali che $A_1 \subset N_1$ e $A_2 \subset N_2$, per cui $x \in A_1 \cap A_2 \subset N_1 \cap N_2$; e per definizione di aperti $A_1 \cap A_2$ è aperto. La definizione di intorno è soddisfatta, $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$.
3. Si veda l'Osservazione 2.19.
4. Si scelga $V = A$ dove $A \subset U$ e $A \in \tau$. Per la definizione di intorno, A esiste e soddisfa la proprietà richiesta.

□

Proposizione 2.7. Sia $X \neq \emptyset$ e ad ogni $x \in X$ sia associata la famiglia di intorni $\mathcal{N}(x)$, ovvero la famiglia che possiede le seguenti proprietà:

1. Se $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e $V \in 2^X$ tale che $U \subset V$ allora $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$
2. Siano $N_i \in \mathcal{N}(x)$, allora

$$\bigcap_{i=0}^n N_i \in \mathcal{N}(x)$$

3. Se $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$, $x \in U$.
4. Se $U \in \mathcal{N}(x) \exists V \cdot V \subset U$ tale che $V \in \mathcal{N}(x)$ e $\forall y \in V \cdot U \in \mathcal{N}(y)$.

Allora esiste una ed un'unica topologia τ tale che $\forall x \in X. \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_\tau(x)$.

Dimostrazione. Definiamo innanzitutto una topologia come segue (il che richiede la presenza dell'ipotesi 3)

$$\tau := \{A \in 2^X \mid \forall x \in A. \exists N \in \mathcal{N}(x) \text{ t.c. } x \in N \subset A\}$$

Mostriamo la sua struttura topologica:

1. $\emptyset \in \tau$ in quanto non avendo punti soddisfa il criterio, mentre $X \in \tau$ dato che per il punto 1 ho che $U \subset X$ per ogni $U \in \mathcal{N}(x)$ ($x \in X$ qualsiasi).
2. Mostro che se $A_1, A_2 \in \tau$ allora $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
Sia $x \in A_1 \cap A_2$, per definizione di A_1 deve esistere almeno un insieme $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $U \subset A_1$, e lo stesso vale per $V \subset A_2$. Quindi prendo $V \cap U \subset A_1 \cap A_2$ e per il punto 2 deve essere $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$.
Quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
3. Devo dimostrare che rimane stabile per unione arbitraria di aperti.
Considero una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ con I insieme qualunque. Denominiamo poi $S = \bigcup_{i \in I} A_i$. Per cui sia $x \in S$, allora deve esistere $x \in A_{i_0}$. Per definizione di aperto deve esistere $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $x \in U \subset A_{i_0}$. Poiché questo vale per ogni $x \in S$ segue che

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subset S = \bigcup_{x \in S} \{x\} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

e l'unione degli $U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.⁴

Quindi per la definizione della topologia segue che l'unione di questi interni è ancora un intorno di ogni punto di S . Pertanto $S \in \tau$.

Per come si possono caratterizzare gli insiemi aperti, ovvero come interni di ogni loro punto, dev'essere che la topologia sopra definita sia l'unica. \square

2.3.2 Sistemi fondamentali di interni

Gli interni sono tanti. *Davvero* tanti.

Fatto sta che spesso e volentieri sono infiniti; incontriamo lo stesso problema delle topologie. Come possiamo descrivere un sistema di interni in modo computabile entro la fine dell'universo?

Qui entrano in gioco i sistemi fondamentali di interni.

Definizione 2.20. Sia data una famiglia $\mathcal{V}(x)$ di interni di x in (X, τ) , cioè una famiglia $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{N}_\tau(x)$; questa si dice **sistema fondamentale di interni** di x in (X, τ) se $\forall U \in \mathcal{N}_\tau(x) . \exists V \in \mathcal{V}(x)$ tale che $V \subset U$.

Esempio 2.21. Esempi di sistemi fondamentali di interni:

1. Sia (X, τ) spazio topologico metrizzabile tramite una distanza d . Possiamo definire $\mathcal{V}(x) = \{B_d(x, r)\}_{r>0}$ come sistema fondamentale di interni di x .
2. Sia (X, τ) con τ topologia banale e $x \in X$; l'unica scelta come intorno è X stesso, quindi $\mathcal{V}(x) = \{X\}$.

⁴per l'ipotesi 4 posso trovare un ricoprimento di $U_i \in \mathcal{N}(y)$ per ogni $y \in A_i$!

Geometria B

3. Sia (X, τ) con τ topologia discreta e $x \in X$, basta prendere $\mathcal{V}(x) = \{\{x\}\}$ come sistema fondamentale di interni.

Proposizione 2.8. Sia (X, τ) uno spazio topologico $\forall x \in X$, sia $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $\mathcal{V}(x)$ è un sistema fondamentale di interni. Sia inoltre $A \in 2^X$. Allora $A \in \tau$ se e solo se $\forall x \in A \exists V(x)$ tale che $V(x) \subset A$.

Dimostrazione. Se A è aperto allora è anche un intorno di $x \in A$. Per definizione di sistema fondamentale di interni ottengo che esiste $V(x) \in \mathcal{V}(x)$ tale che $V(x) \subset A$.

Se vale $\forall x \in A \exists V(x) \in \mathcal{V}(x)$ tale che $V(x) \subset A$.

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset \bigcup_{x \in A} V(x) \subset A$$

Poiché $V(x)$ è un intorno di x , esiste A_x aperto tale che $A_x \subset V(x)$. □

Teorema 2.22. Sia (X, τ) spazio topologico e $\mathcal{B} \subset \tau$; allora \mathcal{B} è una base per τ se e soltanto se $\forall x \in X$ la famiglia

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$

è un sistema fondamentale di interni di x rispetto a τ .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} una base di τ e $x \in X$. Sia $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$, per definizione $\exists A \in \tau$ tale che $x \in A \subset U$.

Poiché \mathcal{B} base di τ , allora $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ con $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Perciò $x \in A$, che implica $x \in B$ per qualche $B \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ed otteniamo che $B \in \mathcal{B}(x)$.

Quindi dimostro che per ogni intorno $N(x) \in \mathcal{N}(x)$; segue che esiste $B \subset N(x)$, ovvio perché per definizione di intorno $x \in A \subset N(x)$, ma $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ per qualche $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Supponiamo che $\mathcal{B}(x)$ sia un sistema fondamentale di interni per ogni $x \in X$. Sia $A \in \tau$, per la proposizione precedente allora $\forall x \in A, \exists V(x) \in \mathcal{B}(x)$ tale che $V(x) \subset A$. In particolare ottengo che

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} V(x) \subset A$$

poiché ogni $V(x) \subset A$ per definizione. Pertanto $\mathcal{B}(x)$ forma una base per tutti gli aperti in τ . □

Corollario 2.23. Sia (X, τ) spazio topologico. Supponiamo che $\forall x \in X, \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{N}_\tau(x) \cap \tau$. Allora

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}(x) \subset \tau$$

ed è una base di τ .

Dimostrazione. Dalla definizione data di \mathcal{B} sappiamo che $\forall x. \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{B}$, e quindi \mathcal{B} forma un sistema fondamentale di interni.

Per il teorema precedente, \mathcal{B} forma una base di τ . □

Osservazione 2.24. Sia (X, τ) uno spazio topologico tale che $\forall x \in X$ esiste $\mathcal{V}(x)$ sistema fondamentale di interni di x in τ .

1. Allora è ovvio che dati $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V' \in \mathcal{V}(x)$ tale che $V' \subset V_1 \cap V_2$.
Infatti per definizione $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_\tau(x)$ e siccome $\forall N \in \mathcal{N}_\tau(x)$ esiste $V' \in \mathcal{V}(x)$ tale che $V \subset N$; basta prendere $N = V_1 \cap V_2$.
2. Banalmente vale che $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.
3. Una osservazione meno banale è che fissato un $V \in \mathcal{V}(x)$ allora esiste $W \in \mathcal{V}(x)$ tale che $\forall y \in W$. $\exists W_y \in \mathcal{V}(y)$ tale che $W_y \subset V$ (notare che questa osservazione è molto simile a quella per gli interni).

Teorema 2.25. Sia $X \neq \emptyset$ e $V: X \rightarrow 2^{2^X}$ tale che $\forall x \in X$ valga $V(x) \subset 2^X$ e $V(x) \neq \emptyset$, e che rispetti i seguenti enunciati:

1. Dati $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$ anche $\exists V' \in \mathcal{V}(x)$ tale che $V' \subset V_1 \cap V_2$.
2. $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.
3. fissato un $V \in \mathcal{V}(x)$ allora esiste $W \in \mathcal{V}(x)$ tale che $\forall y \in W$. $\exists W_y \in \mathcal{V}(y)$ tale che $W_y \subset V$

allora esiste un'unica topologia τ su X tale che $\forall x \in X$ $V(x)$ è un sistema fondamentale di interni.

Dimostrazione. Se la topologia esiste è chiaramente unica: questo vale per costruzione della topologia tramite la propria base e per i risultati di unicità della topologia data la base. Allora dobbiamo solo dimostrare che questa topologia esiste.

In un risultato precedente abbiamo visto che \mathcal{B} è base di una topologia τ se e solo se ogni punto x dello spazio X ha come sistema fondamentale di interni

$$B_x := \{b \in \mathcal{B} \text{ tali che } x \in b\}$$

che è il sistema fondamentale di interni che supponiamo di avere (si noti che possiamo farlo).

Usando questo per costruire la base possiamo definire la topologia τ ed usare le tre proprietà richieste dalle ipotesi per dimostrare che è effettivamente una topologia.

- Effettivamente l'insieme vuoto e lo spazio X appartengono a τ , per definizione di base il primo e per unione di interni di ogni suo punto il secondo.
- L'unione arbitraria di suoi elementi è ancora un elemento, questo risulta chiaramente dalle proprietà richieste.
- Per l'intersezione finita basta usare la prima proprietà unita alla terza richiesta al sistema fondamentale di interni.

□

Osservazione 2.26 (Sistema fondamentale come funzione). Abbiamo sempre indicato con $\mathcal{V}(x)$ il sistema fondamentale di interni nel punto x di X ; questo può essere visto come immagine di una funzione

$$f: X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

che associa ad ogni punto il suo sistema fondamentale di intorni.

Chiaramente abbiamo usato la notazione che indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti dell'insieme A .

Un discorso esattamente analogo vale per i sistemi di intorni $\mathcal{N}(x)$.

Per quanto possa sembrare non interessante, è un fatto che a posteriori vale la pena sottolineare.

2.4 Assiomi di numerabilità

Gli assiomi di numerabilità descrivono proprietà dello spazio in cui lavoriamo, e sono strettamente legati alle proprietà di Hausdorff - che vedremo.

Torneranno utili nella descrizione degli spazi e nella comprensione della loro struttura, ad esempio: in che modo sono collegati i sistemi di intorni e gli aperti?

A prima intuizione la corrispondenza sembra essere “biunivoca” (da entrambe le parti, data la struttura degli intorni ho quella degli aperti), ma scopriremo che imporre la base è un’operazione più potente dell’imporre il sistema fondamentale di intorni: questo può sembrare contro intuitivo

2.4.1 Primo assioma di numerabilità

Definizione 2.27. Sia (X, τ) uno spazio topologico, esso soddisfa il **primo assioma di numerabilità** se $\forall x \in X$ esiste un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{V}(x)$ di x per τ tale che $\mathcal{V}(x)$ è numerabile.

Esempio 2.28.

1. Sia X con τ banale, allora un sistema fondamentale di intorni è $\mathcal{V}(x) = \{X\}$, che è numerabile; quindi soddisfa il primo assioma di numerabilità.
2. Sia X con τ discreta, allora un sistema fondamentale di intorni è $\mathcal{V}(x) = \{\{x\}\}$.⁵ Questo è ancora numerabile e quindi soddisfa il primo assioma di numerabilità.
3. Un esempio meno banale è il sistema fondamentale di intorni $\mathcal{V}(x) = \{B_d(x, 1/n)\}_{n>0}$, che è ancora numerabile e fa da sistema fondamentale di intorni per x in \mathbb{R}^n con la distanza euclidea.

2.4.2 Secondo assioma di numerabilità

Definizione 2.29. Sia (X, τ) uno spazio topologico, esso soddisfa il **secondo assioma di numerabilità** se esiste una base \mathcal{B} numerabile tale da generare la topologia τ .

Lemma 2.30. Sia (X, τ) uno spazio topologico, se esso soddisfa il secondo assioma di numerabilità allora soddisfa anche il primo.

Dimostrazione. Prendendo come abbiamo sempre fatto la costruzione del sistema fondamentale di intorni (in un punto x generico) dalla base

$$B_x := \{b \in \mathcal{B} \text{ tali che } x \in b\}$$

risulta ovvio che se la base \mathcal{B} è numerabile, allora lo è anche il sistema fondamentale di intorni. \square

Esempio 2.31.

⁵infatti se prendi tutti i sistemi fondamentali di intorni per ogni $x \in X$ ottieni la base dei singoletti.

1. Sia X non numerabile con τ_d topologia discreta. Allora questa è metrizzabile, inoltre per ogni $x \in X$ esiste un sistema fondamentale di intorno $\mathcal{V}(x) := \{\{x\}\}$ tale da essere numerabile e quindi soddisfare il primo assioma di numerabilità.
Ma non esiste alcuna base tale da soddisfare il criterio di numerabilità. Infatti preso $\mathcal{B} \subset \tau$ e \mathcal{B} una base di τ , allora deve contenere tutti i singoletti di X . Per cui \mathcal{B} è non numerabile.
2. Si consideri $(\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}})$ ovvero lo spazio topologico euclideo sulla retta reale. Posso creare la base $B = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q} \ a < b\}$ che è numerabile e fa da base di τ_{euclidea} .⁶

Teorema 2.32 (Teorema di Lindeloff). Sia (X, τ) uno spazio topologico con base numerabile e sia data la famiglia $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \tau$, dove \mathcal{I} non per forza numerabile; allora $\exists \mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ insieme indicizzante numerabile tale che

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} A_i$$

Dimostrazione. Se \mathcal{I} numerabile allora basta prendere $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ ed è risolto il mistero. Si consideri il caso non banale, ovvero \mathcal{I} insieme non numerabile. Allora

$$S := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \tau$$

per definizione di topologia. Essendo $S \in \tau$ dev'essere della forma

$$S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

Sappiamo che la base è numerabile quindi per ogni $A_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$ dove $i \in \mathcal{I}$. Pertanto

$$S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$$

e poiché la base è numerabile possiamo riscrivere l'ultima uguaglianza come una sola unione numerabile di elementi della base \mathcal{B} , quindi scriviamo con J l'insieme degli indici numerabile tale che raccoglie tutto S :

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B = \bigcup_{j \in J} B_j \subset \bigcup_{j \in J} A_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

dove gli A_j sono una scelta di insiemi contenenti i rispettivi B_j , da cui si ottiene la tesi. \square

⁶poiché dato un (a, b) per $a, b \in \mathbb{R}$ posso sempre creare due successioni p_k e q_k tali da convergere, rispettivamente, in a e b (per il fatto che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R}) e quindi $\bigcup_{i=1}^{+\infty} (p_i, q_i) = (a, b)$. Questo procedimento si può estendere a \mathbb{R}^n usando le palle aperte razionali come base topologica.

2.5 Successioni in uno spazio topologico

Abusi di notazione: la rigiosità della topologia si scontra pesantemente con l'utilizzo di abusi di notazione.

Questo però non ci impedisce di usarli, perché spesso rendono ben più facile la scrittura e la comprensione del testo matematico; nonostante siano utilizzati spesso ed ormai accettati, è bene esserne a conoscenza. Vediamone alcuni:

- Scrivere l'immagine di una successione invece della sua vera espressione.
- Indicare con 2^X l'insieme delle parti di X , $P(X)$.

Come detto prima, la topologia cerca di generalizzare i concetti visti in analisi per applicarli a spazi decisamente più complessi di \mathbb{R}^n .

In questo capitolo studieremo le successioni ed il legame tra queste e gli spazi topologici; ora che abbiamo ricavato i modi più potenti di descrivere la topologia di uno spazio possiamo occuparcene con libertà di mezzi.

2.5.1 Definizione di una successione

Definizione 2.33. Sia $X \neq \emptyset$. Si definisce successione una qualsiasi funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Per abuso di notazione si può identificare la funzione f con $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove $x_i := f(i)$ (quindi identifico la funzione con la sua immagine).

Definizione 2.34. Sia (X, τ) uno spazio topologico sia $\{x_n\} \subset X$ diremo che la successione **converge ad un punto di** $x \in X$ se $\forall U \in \mathcal{N}(x)$. $\exists n_U \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_U$. $x_n \in U$. Inoltre la successione si dice convergente in (X, τ) se esiste almeno un **valore limite** x , cioè un $x \in X$ per cui $\{x_n\} \rightarrow x$.

Definizione 2.35. Si dice che $x \in X$ è un **valore limite di una successione** $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ se esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subset X$ tale che $\{x_{n_k}\} \rightarrow x$.

Esempio 2.36.

1. Sia (X, τ) con τ topologia banale. Sia $\{x_n\}$ una successione, allora $\forall x \in X$ si può dire che $\{x_n\} \rightarrow x$ dato che abbiamo un unico intorno possibile.
2. Se invece si considera (X, τ) con la topologia discreta si ha che ogni successione converge a x se e solo se dopo un certo $n \geq n_0$, $x_n = x$.
Siccome ha come aperti i singoletti, questo ci dice che la successione per convergere deve essere "talmente vicina" da essere la stessa cosa (è qui che sta la ricchezza della topologia discreta).
3. Se (X, τ) è uno spazio topologico metrizzabile, allora le successioni convergenti hanno un unico valore limite.

Questo è ovvio: supponiamo che abbia due valori limite P e Q distinti, allora per ogni V_P intorno di P esiste un indice n_P per cui la successione si trova definitivamente in V_P . Posso procedere analogamente per V_Q intorno di Q . Ma allora - prendendo per comodità la base delle palle aperte $B_d(x, r)$, noto che posso farlo - scegliendo n come il massimo tra n_Q ed n_P trovo un assurdo. Se $n = n_P$ allora l'intorno aperto $V_P = B_d(P, \frac{d(P, Q)}{2})$ non interseca al passo n l'intorno di Q (perché?), ed analogamente se $n = n_Q$.

Definizione 2.37. Una **sottosuccessione di una successione** $\{x_n\} \subset X$ si definisce come una successione $\{x_{n_k}\} \subset X$, dove $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ è una successione strettamente crescente.

Capitolo 3

La struttura degli spazi topologici

Abbiamo visto tutti gli strumenti che ci possono servire per iniziare a descrivere le strutture degli spazi topologici, quindi ora possiamo davvero dare inizio al divertimento.

Studieremo queste strutture e vedremo come possono essere collegate tra loro, partendo dalle più semplici (interno, esterno, ...) per arrivare a manipolare la struttura della topologia in modo da costruire degli *spazi quozienti*.

3.1 Sottoinsiemi di uno spazio topologico

3.1.1 Punti interni, esterni e di frontiera

Definizione 3.1. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Sia $S \subset X$.

1. Allora $x \in X$ si dice **interno** a S se $\exists U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $U \subset S$.
2. Allora $x \in X$ si dice **esterno** a S se $\exists U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $U \cap S = \emptyset$.
3. Allora $x \in X$ si dice di **frontiera** a S se $\forall U \in \mathcal{N}(x)$ tali che $U \cap S \neq \emptyset$ e $U \not\subset S$ (oppure analogamente se $U \cap S \neq \emptyset$ e $U \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$).

Definizione 3.2. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Sia $S \subset X$.

1. Si indica con $Int(S)$ l'insieme dei **punti interni** di S secondo (X, τ) .
2. Si indica con $Est(S)$ l'insieme dei **punti esterni** di S secondo (X, τ) .
3. Si indica con $Fr(S)$ l'insieme dei **punti frontiera** di S secondo (X, τ) .

Vediamo alcune proprietà di questi insiemi.

Proposizione 3.1. Sia (X, τ) spazio topologico con $S \subset X$, allora le seguenti affermazioni sono vere.

1. $Int(S) \subset S$
2. $Est(S) \subset X \setminus S$
3. $X = Int(S) \cup Est(S) \cup Fr(S)$
4. $Int(S)$ è il più grande aperto contenuto in S . Inoltre se A è un aperto tale che $A \subset S$, $A \subset Int(S)$.

Dimostrazione.

1. Ovvio per definizione di punto interno.
2. Ovvio, $Est(S) = Int(X \setminus S)$.
3. Ovvio. Se non è interno o esterno, allora è di frontiera per definizione; inoltre nei punti precedenti abbiamo dimostrato che l'interno di S ed il suo esterno hanno intersezione vuota.
4. Sia $A \subset S$, posso prendere $x \in A$; allora deve esistere un intorno di x , $U(x)$ tale che $U(x) \subset S$, ma ciò è vero, basta prendere A . Per cui tutto $A \subset Int(S)$. Dal precedente risultato risulta ovvio

$$Int(S) = \bigcup_{x \in Int(S)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in S} A_x \subset Int(S)$$

che è il maggiore aperto, poiché se ci fosse un aperto più grande sarebbe contenuto in $\bigcup_{x \in S} A_x$, anzi sarebbe uno degli A_x .

□

Il fatto che “la chiusura della chiusura è la chiusura” non è immediato, e nemmeno scontato; ad esempio prendendo la chiusura sequenziale (vedremo in seguito cosa sia) questo smette di valere. Perché sia vero devo applicare la chiusura sequenziale \aleph_0 volte.

Teorema 3.3. Sia (X, τ) spazio topologico con $S \subset X$, allora vale che

$$S = \text{Int}(S) \cup (S \cap \text{Fr}(S))$$

Dimostrazione. Da $\text{Int}(S) \subset S$ e $S \cap \text{Fr}(S) \subset S$ segue che $\text{Int}(S) \cup (S \cap \text{Fr}(S)) \subset S$. Di conseguenza basta dimostrare che se $x \in S \setminus \text{Int}(S)$, $x \in S \cap \text{Fr}(S)$. Ovvero bisogna dimostrare che $x \in \text{Fr}(S)$. Quindi $\forall U \in \mathcal{N}(x)$ intorno di x ho che $x \in U$ e quindi $U \cap S \neq \emptyset$. Ma dev'essere anche $U \not\subset S$ (equivalentemente: $U \setminus S \neq \emptyset$) perché altrimenti avrei che $x \in \text{Int}(S)$, che è assurdo. Pertanto dev'essere $x \in \text{Fr}(S)$. \square

Corollario 3.4. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\text{Fr}(S) \subset S$
2. $S = \text{Int}(S) \cup \text{Fr}(S)$
3. $X \setminus S \in \tau$

Dimostrazione.

(1 \Rightarrow 2) È caso particolare dell'enunciato 3.3 del precedente teorema.

(2 \Rightarrow 3) Applicando la stessa formulina a $X \setminus S$ e dimostrando che $\text{Fr}(X \setminus S) = \text{Fr}(S)$ otteniamo che

$$X \setminus S = \text{Int}(X \setminus S) \cup (X \setminus S \cap \text{Fr}(S)) = \text{Int}(X \setminus S)$$

e quindi è un aperto.

(3 \Rightarrow 1) Per assurdo, sia $x \in \text{Fr}(S)$ e $x \in X \setminus S$; allora $x \in \text{Est}(S)$ e per cui $x \notin \text{Fr}(S)$: assurdo. Quindi vale che $\text{Fr}(S) \subset S$. \square

3.1.2 Chiusi e chiusura negli spazi topologici

Definizione 3.5. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Sia $S \subset X$. Diciamo che S è un **insieme chiuso** se in (X, τ) se $X \setminus S \in \tau$.

Osservazione 3.6. È immediato verificare dalla definizione che la famiglia dei chiusi \mathcal{F}_τ rispetta le seguenti proprietà (ereditate dagli aperti):

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}_\tau$
- 2.

$$\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}_\tau$$

dove $\{F_i\}_{i \in I}$ è una famiglia arbitraria di chiusi.

3.

$$\bigcup_{i=0}^n F_i \in \mathcal{F}_\tau$$

dove $\{F_i\}_{i=0}^n$ è una famiglia di chiusi.

Lemma 3.7. Sia $X \neq \emptyset$ e sia $\mathcal{F} \subset 2^X$ tale che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

2.

$$\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$$

dove $\{F_i\}_{i \in I}$ è una famiglia arbitraria di \mathcal{F} .

3.

$$\bigcup_{i=0}^n F_i \in \mathcal{F}$$

dove $\{F_i\}_{i=0}^n$ è una famiglia di \mathcal{F} .

Allora definisce un'unica topologia τ sull'insieme X tale che $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}$.

Dimostrazione. È ovvio che se esiste è unica. Infatti se e solo se $A \in \tau$ allora $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Definisco la topologia indotta come

$$\tau := \{A \in 2^X \mid X \setminus A \in \mathcal{F}\}$$

Basta dimostrare che quest'ultima è una topologia e si è concluso. \square

Come è lecito chiedersi, si potrebbe voler trovare il minimo chiuso contenente un insieme: può essere per divertimento personale, per questioni di dimostrazione o altro. L'assioma dell'intersezione arbitraria di chiusi (direttamente dalla definizione) ci fornisce la possibilità di definirlo come segue.

Definizione 3.8. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Sia $S \subset X$. L'intersezione di tutti i chiusi F_i di (X, τ) tali da contenere S si dice **chiusura di S in (X, τ)** . Si indica con \bar{S} (oppure $cl(S)$ per indicare *closure*) ed è definita come:

$$\bar{S} = \bigcap_{i \in I} F_i$$

dove $S \subset F_i$ per ogni $i \in I$.

3.1.3 Il problema della chiusura di un insieme

Vediamo subito che per il calcolo della chiusura di un insieme, la definizione vista è leggermente inutile.

Infatti questa non fornisce alcun algoritmo utilizzabile nella pratica; pertanto dobbiamo costruire un linguaggio che ci permetta di calcolare le chiusure degli insiemi con facilità.

Definizione 3.9. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Sia $S \subset X$. Un punto $x \in X$ si dice

1. **Punto aderente** se $\forall U \in \mathcal{N}(x) \ U \cap S \neq \emptyset$
2. **Punto di accumulazione** se $\forall U \in \mathcal{N}(x) \ (U \cap S) \setminus \{x\} \neq \emptyset$
3. **Punto isolato** se $\forall U \in \mathcal{N}(x) \ U \cap S = \{x\}$

Definizione 3.10. L'insieme dei punti di accumulazione di S in (X, τ) si dice **derivato** di S in (X, τ) . Si indica con $D_\tau(S)$.
L'insieme dei punti isolati si indicherà con S^* .

Teorema 3.11. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $S \in 2^X$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. x è aderente a S per τ .
2. $x \in \bar{S}$.

In particolare \bar{S} è uguale all'insieme di tutti i punti aderenti a S in τ . Inoltre $\bar{S} = D(S) \cup S^*$.

Dimostrazione rivista. È ovvio che un punto è aderente a S se e solo se è di frontiera o è interno (supponi $x \in Est(S)$ e aderente, allora $\forall U \in \mathcal{N}(x)$. $U \cap S \neq \emptyset$ allora si ha già una contraddizione nelle ipotesi), quindi è dimostrata la tesi anche per la proposizione che dice che $\bar{S} = S \cup Fr(S)$. \square

Dimostrazione ufficiale. Definendo l'insieme dei punti aderenti A di S dimostro un enunciato equivalente, ovvero che $A^c = \bar{S}^c$.

1. Caso $A^c \subset \bar{S}^c$
Sia $x \in A^c$ dove A è l'insieme dei punti aderenti a S . Allora esiste un intorno di x , chiamiamolo U , tale che $U \cap S = \emptyset$. Per definizione di intorno esiste un aperto $O \in \tau$ tale che $x \in O \subset U$. Per cui anche $O \cap S = \emptyset$. Allora dev'essere che $S \subset O^c$, e O^c è chiuso per definizione, per cui $\bar{S} \subset O^c$. Ma $x \notin O^c$ e quindi anche $x \notin \bar{S}$; dev'essere che $x \in \bar{S}^c$.
2. Caso $\bar{S}^c \subset A^c$
Se $x \in \bar{S}^c$, allora esiste un chiuso C tale che $x \notin C$ e $S \subset C$. Per cui posso prendere $C^c \in \mathcal{N}(x)$ come intorno di x (visto che $C^c \in \tau$), e ovviamente $x \in C^c$. Per questo $C^c \cap S = S \setminus C = \emptyset$, ed ottengo che x non è aderente e $x \in A^c$.

\square

Proposizione 3.2. Dato $S \subset (X, \tau)$ spazio topologico, valgono i seguenti enunciati

1. $S \subset \bar{S}$.
2. Se S è chiuso, $S = \bar{S}$.
3. $\bar{S} = D(S) \cup S^*$.
4. $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$.
5. $\bar{S} = Fr(S) \cup S = Fr(S) \cup Int(S) = X \setminus Est(S)$.

6. Se $S \subset T$, $\bar{S} \subset \bar{T}$.

7. $Fr(S) = Fr(S^c)$.

8. $Fr(S) = \bar{S} \cap \bar{S}^c$.

Dimostrazione. Se usassimo la caratterizzazione della chiusura tramite i punti aderenti questi punti sarebbero immediati; difatti la descrizione tramite aderenza è la più potente in assoluto. Consigliamo altamente di utilizzarla sempre quando possibile, ma per questioni didattiche proporrò delle dimostrazioni “vere e proprie”.

1. Per definizione $\bar{S} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ dove per ogni $C \in \mathcal{C}$, C chiuso e $S \subset C$, anche $S \subset \bar{S}$.

2. Per definizione $\bar{S} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$, ma in $S \in \mathcal{C}$ poiché S è chiuso e $S \subset S$. Per cui $\bar{S} \subset S$ e per il precedente punto $\bar{S} = S$.

3. Deriva dalla precedente proposizione.

4. Poiché \bar{S} è chiuso, basta usare il punto 2 e ottenere la tesi.

5. Dimostro che $\bar{S} = S \cup Fr(S)$.

Ovviamente $\bar{S} \subset S \cup Fr(S)$ per definizione di \bar{S} ; per cui sia $x \in S \cup Fr(S)$, se $x \in S$ allora è anche vero che $x \in \bar{S}$ per definizione. Sia $x \in Fr(S)$ tale che $x \notin \bar{S}$. Allora $x \in X \setminus \bar{S}$ per cui è interno all'aperto $X \setminus \bar{S}$. Quindi $\exists U(x) \in \mathcal{N}(x)$ tale che $U \cap \bar{S} = \emptyset$ e siccome $S \subset \bar{S}$ ho anche che $U \cap S = \emptyset$. Ma questo è un assurdo visto che $x \in Fr(S)$. Pertanto $\bar{S} = S \cup Fr(S)$.

6. Sia $S \subset T$. Allora esiste un C chiuso tale che $T \not\subset C$ ma $S \subset C$, per cui dev'essere che $\bar{S} \subset \bar{T}$. Se non esiste C invece ho che $\bar{S} = \bar{T}$.

7. Bisogna dimostrare $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$. Sia $x \in Fr(S)$, allora esiste un intorno per cui $U \cap S \neq \emptyset$ e $U \not\subset S$. Esistono $y \in U$ tali che $y \notin S$, e quindi $y \in S^c$; per ogni intorno di x ho che $U \cap S^c \neq \emptyset$, ma non può essere neanche che $U \subset S^c$ perché ha elementi che stanno in S . Quindi $x \in Fr(S^c)$. Analogamente si dimostra l'altra inclusione.

8. . Per il punto precedente si arriva all'enunciato:

$$\begin{aligned} Fr(S) &= (Int(S) \cup Fr(S)) \cap (Est(S) \cup Fr(S)) \\ &= (Int(S) \cup Fr(S)) \cap (Int(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)) = \bar{S} \cap \bar{S}^c \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.12. Osserviamo infine che i precedenti enunciati diventano molto più semplici una volta dimostrata l'equivalenza della definizione per “aderenza” della chiusura, alla definizione insiemistica di chiusura.

Proposizione 3.3. Sia (X, τ) uno spazio topologico e $A, B \subset X$. Allora vale

$$Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$$

Dimostrazione. Dimostrazione standard.

(\supset) $x \in \text{Int}(A \cap B)$. Per cui $A' \in \tau$ e $x \in A'$ allora $A' \subset A \cap B$ allora $A' \subset A$ e $A' \subset B$.

(\subset) $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ e $x \in A_x \subset A$, $x \in B_x \subset B$ e dunque $x \in \text{Int}(A \cap B)$.

□

Definizione 3.13. Sia (X, τ) uno spazio topologico, $S \subset X$; la sua **chiusura sequenziale** si indica con \bar{S}^{seq} ed è definita ponendo

$$\bar{S}^{\text{seq}} := \{x \in X \mid \exists \{x_n\} \subset S \text{ t.c. } \{x_n\} \rightarrow x\}$$

quindi è l'insieme di tutti i valori per cui esiste una successione convergente in S contenuto in (X, τ) .

Teorema 3.14. Sia (X, τ) uno spazio topologico, $S \subset X$. Allora vale:

1. $\bar{S}^{\text{seq}} \subset \bar{S}$
2. Nel caso in cui (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità allora

$$\bar{S}^{\text{seq}} = \bar{S}$$

In particolare questo vale su tutti gli spazi topologici metrizzabili.

Dimostrazione.

1. Sia $x \in \bar{S}^{\text{seq}}$ allora esiste $\{x_n\}$ successione in S che converge a x . Per definizione di convergenza allora $\forall U \in \mathcal{N}(x)$ esiste un n_U tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_U$. Ma $x_n \in S \forall n \geq n_U$, per cui $U \cap S \neq \emptyset$, ovvero x è aderente a S . In particolare per il Teorema 3.11 $x \in \bar{S}$.
2. Per l'ulteriore ipotesi si ottiene che dato un $x \in \bar{S}$ allora esiste un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{V}(x) = \{V_1, V_2, \dots, V_n, \dots\}$ tale da essere numerabile. Per cui posso costruire un sistema di intorni equivalente ma tale da essere decrescente, ovvero $\mathcal{V}'(x) = \{V'_1, \dots, V'_n\}$ (tutto quello che ho usato è definito!) con

$$V'_k := \bigcap_{i=1}^k V_i$$

da questa definizione si ottiene che $V'_m \subset V'_p$ per ogni $m \geq p$.¹ Poiché $x \in \bar{S}$, allora x è aderente e quindi $\forall U \in \mathcal{N}(x)$ $U \cap S \neq \emptyset$, in particolare anche per ogni $V'_k \in \mathcal{V}'(x)$ ho che $V'_k \cap S \neq \emptyset$.

Inoltre per dimostrare la convergenza devo dimostrare che fissato $x_{n_U} \in U \in \mathcal{N}(x)$ e un corrispettivo n_U tale che $V'_{n_U} \subset U$ (questo esiste per definizione di sistema fondamentale di intorni), allora per ogni $n > n_U$ $x_n \in U$. Ma questo è vero perché sia $x_n \in V'_n$, allora per la decrescenza degli intorni fondamentali $V'_n \subset V'_{n_U} \subset U$. La successione costruita quindi converge $\{x_n\} \rightarrow x \in \bar{S}^{\text{seq}}$.

□

¹ $\mathcal{V}'(x)$ è ancora un sistema fondamentale di intorni perché gli intorni diventano “più piccoli”, ma contengono sempre tutti gli aperti che $\mathcal{V}(x)$ conteneva.

Osservazione 3.15. Senza l'ipotesi sul primo assioma di numerabilità, non è detto che $\bar{S}^{\text{seq}} = \bar{S}$. Un possibile controesempio è dato dalla **topologia della convergenza puntuale** su $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Definendo il sistema fondamentale di intorni

$$\mathcal{V}(f, I, \varepsilon) := \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |g(t) - f(t)| < \varepsilon, \forall t \in I\}$$

dove $I \in \mathcal{P}_{\text{finite}}(\mathbb{R})$ (ovvero la famiglia delle parti finite di \mathbb{R}), f un endomorfismo su \mathbb{R} e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Dal teorema si vede che questo sistema fondamentale di intorni genera un'unica topologia, la topologia della convergenza puntuale sulle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} .

Cosa bisogna dimostrare:

1. Dimostrare che genera una ed una sola topologia

Dimostrazione. Per il teorema 2.25 basta dimostrare che:

- (a) Siano $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(f, I, \varepsilon)$ allora esiste $V \subset V_1 \cap V_2$. Ma è ovvio, siano $V_1 = V(f, I_1, \varepsilon_1)$ e $V_2 = V(f, I_2, \varepsilon_2)$, per quanto visto

$$V = V(f, I_1 \cup I_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$$

sta in $V_1 \cap V_2$.

- (b) $f \in V(f, I, \varepsilon)$ per ogni I, ε .

- (c) Bisogna dimostrare che dato $V = V(f, I, \varepsilon) \in \mathcal{V}(f, I, \varepsilon)$ esiste un $W \in \mathcal{V}(f, I, \varepsilon)$ tale che per ogni $g \in W$ si possa avere $W_g \subset V$ e $W_g \in \mathcal{V}(f, I, \varepsilon)$. Ma basta prendere $W = \{f\}$ e definire $W_f = V(f, I_1 \subset I, \varepsilon/2)$ e poi è ovvio che $W_f \subset V$, che è ancora nel sistema fondamentale di intorni.

per cui, sì, genera una ed una sola topologia. \square

2. Non soddisfa il primo assioma di numerabilità e non è metrizzabile
3. Sia $\{f_n\}$ una famiglia di funzioni e sia $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ allora $\{f_n\} \rightarrow f$ se solo se $\forall x \in \mathbb{R}$ allora $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$.²
4. Dato l'insieme

$$S := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})| < +\infty\}$$

dimostrare che $\bar{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, mentre $f(x) = 1 \notin \bar{S}^{\text{seq}}$.

Questo mostra che avendo dati solo sulle successioni di un dato spazio topologico e non sulla sua topologia bisogna verificare il primo assioma per ottenere dei risultati coerenti.

²questa è la classica convergenza puntuale di analisi

3.2 Densità e separabilità

3.2.1 La densità in topologia

Definizione 3.16. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un insieme E si dice **denso** in (X, τ) se $\bar{E} = X$.

Esempio 3.17.

1. \mathbb{Q} è denso in $(\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}})$. Inoltre anche \mathbb{Q}^c è denso nella stessa topologia.
2. Sia $(X, \tau_{\text{banale}})$, allora tutti i sottoinsiemi di X sono densi.
3. Sia $(X, \tau_{\text{discreta}})$, allora nessun sottoinsieme di X è denso.

Teorema 3.18. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un insieme $E \subset X$, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti.

1. E è denso.
2. $\forall x \in X. \forall U \in \mathcal{N}(x)$ ho che $U \cap E \neq \emptyset$.
3. Si supponga che per ogni $x \in X$ sia assegnato un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{V}(x)$. Allora $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ ho che $V \cap E \neq \emptyset$.
4. $\text{Int}(X \setminus E) = \text{Est}(E) = \emptyset$.
5. $\forall A \in \tau$ dove $A \neq \emptyset$, allora $A \cap E \neq \emptyset$.
6. $\exists \mathcal{B}$ che è una base di τ tale che $\forall B \in \mathcal{B}$ allora $B \cap E \neq \emptyset$.

Dimostrazione. A seguire una lunga catena di implicazioni che dimostrano l'equivalenza. Notare che il passo da 6 a 1 è stato dimostrato partendo da 6 \implies 5 e da 5 \implies 1.

- 1 \implies 2 Poiché E denso allora $\bar{E} = X$. Quindi tutti i punti di X sono aderenti a E per definizione di denso e per la proposizione 3.11.
- 2 \implies 3 Si fissi un $x \in X$, allora esiste il sistema di intorni $\mathcal{N}(x)$ e un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{V}(x)$, poiché $V \in \mathcal{V}(x)$ è anche un intorno ottengo banalmente la tesi.
- 3 \implies 4 Suppongo esista un intorno $U \in \mathcal{N}(x)$ per cui $x \in U$ e $U \cap E = \emptyset$. Allora per definizione di sistema fondamentale di intorni esiste $V \in \mathcal{V}(x)$ tale che $V \subset U$, allora anche $V \cap E \subset U \cap E = \emptyset$, il ché è un assurdo date le nostre ipotesi.
- 4 \implies 5 Suppongo esista $A \in \tau$ e $A \cap E = \emptyset$. Allora prendo un $x \in A$ e considero A come intorno, ottengo che $x \in \text{Est}(E)$, assurdo.
- 5 \implies 6 Poiché $\mathcal{B} \subset \tau$ e per ipotesi ho che per ogni $A \in \tau$, $A \cap E \neq \emptyset$, risulta anche che per ogni $B \in \mathcal{B}$, $B \cap E \neq \emptyset$.

$6 \Rightarrow 1$ Prendiamo $x \in E^c$. Allora facciamo vedere che è aderente a E . Prendiamo un qualsiasi intorno U_x di x , allora esiste $x \in A \subset U_x$. In particolare sappiamo che esiste un B elemento della base tale che $x \in B \subset A$ per definizione di base. Concludiamo utilizzando l'ipotesi che

$$\emptyset \neq B \cap E \subset U_x \cap E$$

da cui x è aderente a E . In particolare $\overline{E} = X$.

□

Teorema 3.19. Siano $(X, \tau), (Y, \xi)$ spazi topologici e $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ una applicazione continua e suriettiva. Sia D insieme denso in (X, τ) , allora $f(D)$ è un insieme denso in Y .

Dimostrazione. Usiamo la caratterizzazione della continuità che ci dice che per ogni sottoinsieme $W \subset X$ abbiamo $f(\overline{W}) \subseteq \overline{f(W)}$. Quindi abbiamo che

$$f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$$

poiché f è suriettiva $f(X) = Y$, inoltre $\overline{f(D)} \subseteq f(X) = Y$.

$$Y \subseteq \overline{f(D)} \subseteq Y$$

□

3.2.2 Spazi topologici separabili

Definizione 3.20. Uno spazio topologico si dice **separabile** se ammette un sottoinsieme numerabile denso.

Esempio 3.21. \mathbb{Q} in \mathbb{R} è un sottoinsieme numerabile denso, per cui $(\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}})$ è uno spazio separabile.

Notare che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso, ma non è numerabile. Analogamente $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{euclidea}})$ è uno spazio topologico separabile.

Teorema 3.22. Sia (X, τ) spazio topologico che soddisfa il secondo assioma di numerabilità, allora è separabile.

Dimostrazione. Per il Teorema 3.18 $S \subset X$ è denso se e solo se esiste \mathcal{B} base numerabile di τ tale che $B \cap S \neq \emptyset$. Per cui posso scegliere una base \mathcal{B} numerabile e quindi prendere $x_i \in B_i$ per ogni $B_i \in \mathcal{B}$. L'insieme $T = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{B}|} x_i$ è denso e numerabile. Per cui (X, τ) è separabile. □

Osservazione 3.23 (Topologia j_d). Non è vero invece che se (X, τ) è uno spazio topologico separabile e soddisfa il primo assioma di numerabilità allora soddisfa anche il secondo assioma di numerabilità.

Si consideri la topologia generata dalla base

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

- (\mathbb{R}, τ_j) è uno spazio topologico
Dobbiamo verificare che questa base genera una topologia. \mathcal{B} è un ricoprimento di \mathbb{R} , l'intersezione è ancora un elemento di \mathcal{B} e quindi per il Teorema 2.12 \mathcal{B} genera una e una sola topologia.

- *Soddisfa il primo assioma di numerabilità*

Basta prendere

$$\mathcal{V}(x) := \{[x, x + 1/h) \mid h \in \mathbb{N}\}$$

come sistema di intorni fondamentali che è numerabile.

- *Lo spazio è separabile*

Ovvio, \mathbb{Q} è denso ed è numerabile.

- *Non soddisfa il secondo assioma di numerabilità*

La base \mathcal{B} originale non soddisfa il secondo assioma, quindi proviamo a cercarne un'altra. Sia \mathcal{L} una nuova base numerabile di τ_j , siccome $[x, x + 1)$ è un aperto in τ_j deve valere

$$[x, x + 1) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}'} L$$

per cui esiste L_x tale che $x \in L_x \subset [x, x + 1)$. Inoltre dato un y vale che $L_x \neq L_y$ per $x \neq y$; questo perché se $x > y$ allora ho infiniti z tra i due valori. Ho ottenuto che $\#\{L_x\}_{x \in \mathbb{R}} = \#\mathbb{R}$.

Come si è visto dal controesempio, servono ipotesi molto più forti per poter stabilire se un insieme è a base numerabile.

Teorema 3.24. Sia (X, τ) uno spazio topologico separabile e metrizzabile, allora soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Dimostrazione. Sia S insieme denso numerabile. Allora basta far vedere che $\mathcal{B} = \{D_q(s) \mid q \in \mathbb{Q}, s \in S\}$. Questa base forma la stessa topologia; infatti ogni aperto è tale per cui da essere $A = \bigcup_{x \in X} D_q(x)$ per qualche $q > 0, q \in \mathbb{R}$, posso riscriverlo come $A = \bigcup_{p \in S} D_q(p)$ dove $q \in \mathbb{Q}^+$. \square

Capitolo 4

Spazi topologici ed applicazioni

Molti dei concetti che vedremo possono a primo avviso sembrare banali ed intuitivi, ma a posteriori questo è forse uno dei capitoli più importanti dello studio della topologia generale: impareremo a trattare le *funzioni continue* ed a costruire sottospazi di uno spazio topologico. In particolare studieremo anche la costruzione di spazi topologici tramite il *prodotto* ed il *quoziente* (solitamente per relazioni di equivalenza); tutte queste definizioni e strutture sono fondamentali in topologia algebrica.

4.1 Lo studio delle applicazioni tra spazi topologici

4.1.1 Le applicazioni continue

Definizione 4.1. Siano (X, τ) , (Y, ξ) spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ una applicazione - scrittura con cui indichiamo l'applicazione $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ sottintendendo la topologia in partenza e quella in arrivo.

Dato $x \in X$ diciamo che f è **continua** in x se per ogni $U \in \mathcal{N}_\xi(f(x))$ esiste $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $f(V) \subset U$.

Diremo che f è **globalmente continua** se è continua in ogni $x \in X$.

Teorema 4.2. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è continua
2. Per ogni $A \in \xi$. $f^{-1}(A) \in \tau$
3. Per ogni $A^c \in \xi$. $f^{-1}(A)^c \in \tau$.¹
4. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ per ogni $A \subset X$

Dimostrazione. Dimostro la catena di implicazioni, malgrado $2 \iff 3$ valga per fatti totalmente insiemistici; non ha nulla a che fare con la topologia.

- (1 \Rightarrow 2) Prendo $A \in \xi$, voglio dimostrare che $f^{-1}(A)$ è ancora un aperto. Mi basta dimostrare che $\forall x \in f^{-1}(A)$ questo è un intorno di x . Quindi fisso un $x \in f^{-1}(A)$, allora per ogni $U \in \mathcal{N}_\xi(f(x))$ ho che esiste $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $f(V) \subset U$. Ora prendo $U = A$ ed ottengo che esiste un intorno V . Ma $V \subset f^{-1}(A)$; allora

$$f(V) \subset A \implies V \subset f^{-1}f(V) \subset f^{-1}(A)$$

per cui anche $f^{-1}(A)$ è un intorno di x . Ma questo vale per ogni $x \in f^{-1}(A)$, che è un aperto.

- (2 \Rightarrow 1) Sia $x \in X$ allora si fissa un $U \in \mathcal{N}_\xi(f(x))$ dimostro che esiste $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ da definizione. Per cui prendo un $A \in \xi$ tale che $f(x) \in A \subset U$ (esiste per la definizione di intorno). Allora $f^{-1}(A)$ è ancora un aperto e dunque anche un intorno di x . Per cui

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(U) \implies f(f^{-1}(A)) \subset f(f^{-1}(U)) \subset U$$

e quindi $f^{-1}(A)$ è l'intorno che stavamo cercando ed abbiamo dimostrato la continuità della funzione per ogni x .

- (2 \Leftrightarrow 3) È una mera questione insiemistica, infatti, poiché vale

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$$

allora se fisso un chiuso C , questo sarà uguale a $C = A^c$ dove A aperto. Per cui $f^{-1}(C) = f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ e per ipotesi $f^{-1}(A)$ è aperto e per definizione il suo complementare dev'essere chiuso. Analogamente si dimostra se si fissa un aperto.

¹ovvero dato un chiuso la sua controimmagine è ancora un chiuso.

(4 \Leftrightarrow 3) Sia f continua. Allora $f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso che contiene A quindi per definizione $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, e mappandolo di nuovo in avanti ottengo $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}$.

Fisso un C chiuso in Y . Allora $B = f^{-1}(C)$ per qualche $B \subset X$. Usando la proprietà della chiusura e l'ipotesi ottengo

$$f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} = \overline{f(f^{-1}(C))} \subset \overline{C} = C$$

poiché C chiuso. Questo significa che $\overline{B} \subset f^{-1}(C) = B$. Ovvero la controimmagine è chiusa ed f è continua.

□

A livello intuitivo abbiamo appena dimostrato che possiamo sostituire alla continuità classica la *continuità topologica*.

Teorema 4.3. Siano $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$, $g: (Y, \xi) \rightarrow (Z, \eta)$ applicazioni continue; allora $g \circ f: (X, \tau) \rightarrow (Z, \eta)$ è un'applicazione continua.

Dimostrazione "pulita". Usando la caratterizzazione dal teorema precedente, basta dimostrare che dato un aperto $A \in \eta$ allora $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \tau$. Ma questo è ovvio, visto che $g^{-1}(A) \in \xi$ poiché g continua e $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \tau$ per lo stesso motivo. □

Dimostrazione per definizione. Per definizione di continuità ho che $\forall U \in \mathcal{N}_\nu(g \circ f(x))$ allora esiste $V \in \mathcal{N}_\xi(f(x))$ tale che $g(V) \subset U$. Sempre per definizione di continuità su f ho $\forall M \in \mathcal{N}_\xi(f(x))$, quindi esiste $W \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $f(W) \subset M$. Allora posso scegliere un M tale che $g(M) \subset U$, ovvero scelgo $M \subset V$ per cui vale

$$g(f(W)) \subset g(V) \subset U$$

e quindi $g \circ f$ è continua. □

4.1.2 Proprietà delle applicazioni continue

Le applicazioni continue sono fondamentali per la topologia, soprattutto nella trattazione che svolgeremo della topologia algebrica; passare dalla caratterizzazione delle funzioni continue è un battesimo del fuoco attraverso cui tutti gli studenti di matematica devono passare.

Insomma, che le danze abbiano inizio!

Teorema 4.4. Sia $C_y: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ una funzione costante, ovvero tale che $C_y: x \mapsto y$ per ogni $x \in X$.

Allora C_y è continua.

Dimostrazione. Sia A un aperto in ξ , allora o $y \in A$ o $y \notin A$. Se $y \in A$ allora $C_y^{-1}(A) = X \in \tau$ per definizione di topologia. Se $y \notin A$ allora $C_y^{-1}(A) = \emptyset \in \tau$ ancora per definizione di topologia. □

Teorema 4.5. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ una applicazione continua.

1. Sia $\tau \subset \tau'$, allora $f: (X, \tau') \rightarrow (Y, \xi)$ è ancora continua.

2. Sia $\xi' \subset \xi$, allora $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi')$ è ancora continua.
3. Sia $\tau \subset \tau'$ e $\xi' \subset \xi$, allora $f: (X, \tau') \rightarrow (Y, \xi')$ è ancora continua.

Dimostrazione.

1. Prendiamo $A \in \xi$, allora $f^{-1}(A) \in \tau \subset \tau'$.
2. Prendiamo $A \in \xi'$, allora $A \in \xi$, quindi $f^{-1}(A) \in \tau$.
3. Prendiamo $A \in \xi' \subset \xi$, allora $A \in \xi$, quindi $f^{-1}(A) \in \tau \subset \tau'$.

□

Osservazione 4.6. Non è vero il contrario, ovvero il caso in cui prendo una funzione continua ed allargo la topologia in arrivo.

Per esempio si prenda la funzione identità $f: (\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}}) \rightarrow (\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$, questa non è continua perché:

- $f(\{x\})$ è un aperto in $2^{\mathbb{R}}$
- $f^{-1}(\{x\}) = x$ **non** è un aperto nella topologia euclidea

Teorema 4.7. Le seguenti proposizioni sono vere.

1. Tutte le applicazioni $f: (X, \tau_{\text{discreta}}) \rightarrow (Y, \xi)$ sono continue.
2. Tutte le applicazioni $f: (X, \nu) \rightarrow (Y, \tau_{\text{banale}})$ sono continue.

Dimostrazione.

1. Sia $A \in \xi$ allora $f^{-1}(A) \in 2^X$ per forza di cose e quindi appartiene a τ_{discreta} . Per cui è continua.
2. Sia $A \in \tau_{\text{banale}}$ allora o $A = \emptyset$ o $A = Y$. Se $A = \emptyset$ allora $f^{-1}(A) = \emptyset$ che è aperto. Se $A = Y$ allora $f^{-1}(A) = X$ che è ancora aperto dimostrando così che è continua.

□

Teorema 4.8. Dato uno spazio topologico qualsiasi (Y, ν) , allora le mappe continue $f: (X, \tau_{\text{banale}}) \rightarrow (Y, \nu)$ e le mappe $g: (Y, \nu) \rightarrow (Z, \tau_{\text{discreta}})$ sono tutte le mappe costanti.

Dimostrazione. Indico con $\mathcal{F}((X, \tau_{\text{banale}}), (Y, \nu))$ l'insieme di tutte le funzioni continue che vanno da $(X, \tau_{\text{banale}})$ a (Y, ν) .

È ovvio che le classe delle funzioni costanti $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}((X, \tau_{\text{banale}}), (Y, \nu))$. Per cui supponiamo esiste una funzione non costante $f \in \mathcal{F}((X, \tau_{\text{banale}}), (Y, \nu))$. Allora esistono almeno $a, b \in \text{Im } f$ dove $a \neq b$. Poiché è continua $\forall A \in \nu$. $f^{-1}(A) = X$ o $f^{-1}(A) = \emptyset$. Per cui ogni topologia ν ha almeno un aperto tale che contiene sempre $\{a, b\} \subset A \in \nu$ oppure $\{a, b\} \not\subset A \in \nu$, o li contiene entrambi o non li contiene. Ma ciò è falso, si prenda τ_{discreta} . Per cui posso solo dire che fissata una topologia arbitraria le uniche funzioni continue di cui posso essere certo dell'esistenza sono le funzioni costanti.

Svolto lo stesso procedimento ma con $\mathcal{F}((Y, \nu), (X, \tau_{\text{discreta}}))$. Anche qui è ovvio che tutte le funzioni costanti $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}((Y, \nu), (X, \tau_{\text{discreta}}))$. Per cui supponiamo esista una funzione continua $f \in \mathcal{F}((Y, \nu), (X, \tau_{\text{discreta}}))$ non costante. Allora $a, b \in \text{Im } f$ dove $a \neq b$, per la continuità $f^{-1}(\{a\}) \in \nu$ e $f^{-1}(\{b\}) \in \nu$. Ciò non vale ad esempio se si prende $\nu = \tau_{\text{banale}}$. Quindi per una topologia arbitrariamente scelta si può solo dire che le funzioni continue sono tutte le funzioni costanti. \square

4.1.3 Applicazioni aperte e chiuse

Definizione 4.9. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ applicazione su spazi topologici. Allora f è **aperta** se $\forall A \in \tau, f(A) \in \xi$. Analogamente si definisce per f **chiusa**.

Esempio 4.10.

1. La funzione $\pi_1: (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{euclidea}}^2) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}})$ tale che $\pi_1: (x, y) \mapsto x$ è aperta, continua, ma non chiusa.
Infatti si consideri il grafico di $xy - 1 = 0$ in \mathbb{R}^2 , che chiameremo S , allora $\pi_1(S) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è chiuso, mentre S lo è.
2. In modo analogo posso considerare degli iperboloidi per notare che le proiezioni da \mathbb{R}^n alle sue componenti sono aperte, continue e non chiuse.
3. Invece la funzione $i_1: (\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{euclidea}}^2)$ tale che $i_1: x \mapsto (x, 0)$ è una mappa continua, chiusa e non aperta. È ovvio che sia chiusa dato che il grafico di una funzione in uno spazio di Hausdorff è chiuso. Questo si potrebbe dimostrare facilmente.
4. L'applicazione $\gamma: (X = \{z\}, \tau = \tau_{\text{banale}}) \rightarrow (Y = \{a, b\}, \xi = \tau_{\text{banale}})$ tale che $\gamma: z \mapsto a$ è una mappa continua, ma non è aperta e nemmeno chiusa.
5. Un esempio di funzione non continua aperta e chiusa è dato dalla funzione $\omega: (X, \tau = \tau_{\text{banale}}) \rightarrow (Y, \xi = \tau_{\text{discreta}})$ tale che $\text{Im } \omega = Y$ e $|Y| > 1$.² Allora si prenda il singoletto $\{y\} \subset Y$, è ovvio che $\omega^{-1}(\{y\}) \notin \tau_{\text{banale}}$, quindi non è continua. È aperta e chiusa perché $\omega(\emptyset) = \emptyset$ e chiusa perché $\omega(X) = Y$.
6. Per un esempio di funzione non continua, non aperta, non chiusa si considerino gli insiemi $X = \{a, b, c\}$ e $Y = X \cup \{d\}$ e le topologie $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c, d\}\}$.
Allora la funzione $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ tale che assegna $a \mapsto b$, $b \mapsto a$, $c \mapsto a$. Questa funzione non è continua perché $q^{-1}(Y) = \{a, b\}$ che non è un aperto. Inoltre non è aperta perché $q(X) = \{a, b\}$ che non è aperta e non è chiusa perché $q(\{b, c\}) = \{a\}$ ma $\{a\}$ è un aperto in μ .
7. Una funzione continua, aperta e chiusa è l'identità, o un qualsiasi omeomorfismo.
8. Per l'esempio di una funzione che non è continua e neanche chiusa ma è aperta ricorro di nuovo ad insiemi semplici come $X = \{a, b, c\}$ e le due topologie $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$, $\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

²notare che ω non è una funzione costante quindi non è continua.

Allora definendo la mappa $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \mu)$ come $f: a \mapsto a$, $f: b \mapsto a$, $f: c \mapsto c$ non è continua poiché $f^{-1}(X) = \{a, c\} \notin \tau$, inoltre non è chiusa perché $f(\{b, c\}) = \{a, c\} \in \mu$, ma è aperta.

9. Sia $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{a, b, c\}$, definisco $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\nu = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, Y\}$; allora la mappa $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ definita come $f: a \rightarrow b$, $f: b \rightarrow b$, $f: c \rightarrow b$, $f: d \rightarrow c$ non è continua, perché $f^{-1}(\{c\}) = \{d\} \notin \tau$, inoltre $f(X) = \{b, c\} \notin \nu$ quindi non è aperta, ma è chiusa perché $f(X) = \{b, c\} = \{a\}^c$, $f(\{b, c, d\}) = \{b, c\} = \{a\}^c$.

	chiusa	non chiusa
Riassumiamo alcuni casi visti di funzioni continue:	identità	proiezione π
aperta	$i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$	q tra banali
non aperta		

4.1.4 Gli omeomorfismi

Definizione 4.11. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ una applicazione tra spazi topologici tale che soddisfa le seguenti proprietà

1. f è una bigezione tra X e Y .
2. f e f^{-1} sono continue.

allora f si dice **omeomorfismo**.

Teorema 4.12. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ una applicazione tra spazi topologici, le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. f è un omeomorfismo.
2. f è biettiva, continua ed aperta.
3. f è biettiva, continua e chiusa.

Dimostrazione.

- (1 \Rightarrow 2) Sia $A \in \tau$, allora $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$, ma la controimmagine di f^{-1} di un aperto è ancora un aperto visto che f^{-1} è continua, quindi $f(A) \in \xi$.
- (2 \Rightarrow 1) Fisso un $B \in \tau$, allora voglio che $(f^{-1})^{-1}(B) \in \xi$, ma questo ovvio poiché f è aperta e $(f^{-1})^{-1} = f$. Ovvero $(f^{-1})^{-1}(B) = f(B) \in \xi$.
- (2 \Leftrightarrow 3) Se è aperta allora sia C chiuso in τ , allora $C^c \in \tau$. Quindi $f(C^c) = f(C)^c \in \xi$ poiché biettiva, in particolare $f(C)$ è chiuso. Quindi f è chiusa. Per dualità del complementare ho l'altra implicazione.

□

Osservazione 4.13 (L'importanza degli omeomorfismo). L'omeomorfismo è una definizione fondamentale per la topologia: infatti un omeomorfismo **rispetta la struttura topologica dei due spazi**. Intuitivamente questo vuol dire che se due spazi sono omeomorfi le loro topologie sono “preservate” dalla funzione.

Lo si può vedere chiaramente: supponiamo esista $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ omeomorfismo tra spazi topologici e definiamo

$$f(\tau) := \{f(A) \mid A \in \tau\}$$

$$f^{-1}(\xi) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \xi\}$$

Per costruzione f è aperta, quindi $f(\tau) \subset \xi$, ma anche f^{-1} è aperta, quindi $f^{-1}(\xi) \subset \tau$. Per il teorema precedente ed applicando f ottengo immediatamente

$$f(f^{-1}(\xi)) \subset f(\tau)$$

$$f(\tau) \subset \xi \subset f(\tau) \implies f(\tau) = \xi$$

e applicando f^{-1} su $f(\tau) \subset \xi$ ottengo anche $f^{-1}(\xi) = \tau$.

Esempio 4.14.

1. La funzione identità $id: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ è un omeomorfismo.
2. f è un omeomorfismo se e solo se f^{-1} lo è.
3. La composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo.
4. Le affinità sono omeomorfismi. Infatti si consideri $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una affinità qualsiasi, quindi è della forma $\varphi: x \mapsto Ax + b$ per qualche $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Allora ha inversa, che è $\varphi^{-1}: x \mapsto A^{-1}x - A^{-1}b$, per cui è biettiva. Inoltre essendo entrambe affinità sono continue visto che si possono vedere come composizione di funzioni lineari sommate a funzioni costanti.
5. Un altro esempio è la funzione arctan: $(\mathbb{R}, \tau_{euclidea}) \rightarrow ((-\pi/2, \pi/2), \tau_{euclidea})$. Continua e biettiva, analogamente alla sua inversa, la funzione tan.

4.2 Sottospazi topologici, prodotti e quozienti

Arriviamo alla parte saliente del corso: possiamo utilizzare la teoria delle funzioni continue in modo ingegnoso per “manipolare” le strutture degli spazi topologici. La vera forma di questo tipo di stregoneria sarà ben chiara a fine capitolo, soprattutto dopo alcuni esempi.

4.2.1 Sottospazi di uno spazio topologico

Teorema 4.15. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione. Sia ξ topologia su Y allora definiamo $f^{-1}(\xi) = \tau := \{f^{-1}(A) \mid A \in \xi\}$. Allora τ risulta essere la topologia meno fine su X tale che f sia continua. Si dice che $f^{-1}(\xi)$ è l'immagine inversa di ξ tramite f ; oppure topologia indotta da f e ξ .

Dimostrazione. Dimostrerò che è una topologia e che è la meno fine.

τ è una topologia

$\emptyset \in \tau$ poiché $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, inoltre $X \in \tau$ perché $f^{-1}(Y) = X$.
Per un semplice fatto insiemistico ho che

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \in \tau$$

se A_i è una famiglia numerabile di ξ .
Per lo stesso motivo

$$\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \in \tau$$

quindi τ è ovviamente una topologia.

È la meno fine

Sia τ' tale che f sia continua. Allora τ' deve contenere $f^{-1}(A)$ per ogni $A \in \xi$. Quindi $\tau \subset \tau'$ per definizione. Quindi τ è la topologia meno fine affinché f sia continua. \square

Osservazione 4.16. Sia \mathcal{B} una base di ξ allora $f^{-1}(\mathcal{B})$ è una base di $f^{-1}(\xi)$. Infatti mi basta dimostrare che $f^{-1}(\mathcal{B})$ ricopre $f^{-1}(\xi)$, ma è ovvio: $\xi = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ poiché una base, per cui $f^{-1}(\xi) = f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$. Inoltre devo dimostrare che se $B_1, B_2 \in f^{-1}(\mathcal{B})$ allora $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f^{-1}(B)$. Questo deriva dal fatto che $B_1 = f^{-1}(B'_1), B_2 = f^{-1}(B'_2)$ per definizione, ma poiché $B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}$ allora $B_1 \cap B_2 = \bigcap_{B \in \mathcal{B}'} B$, per cui puoi passare a controimmagine senza problemi.

Ovviamente dunque è una base. Ma è anche vero che genera la stessa topologia di $f^{-1}(\xi)$?

Prendiamo A aperto in τ , allora esiste $A' \in \xi$ tale che $A = f^{-1}(A')$. Ma $A' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ poiché \mathcal{B} lo genera, per cui

$$A = f^{-1}(A') = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f^{-1}(B)$$

dunque ogni aperto è di τ è generato dalla base definita; inoltre la base non può generare una topologia più fine, altrimenti avrei $A \in \tau$ tale da non essere della forma $f^{-1}(A')$ per $A' \in \xi$. Pertanto genera la stessa topologia.

4.2.2 Sottospazio di uno spazio topologico

Definizione 4.17. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\emptyset \neq S \subset X$; consideriamo $i_S: S \rightarrow X$, allora $(S, i_S^{-1}(\tau))^3$ forma un **sottospazio topologico**. Siccome la mappa i rispetta la teoria appena vista, la topologia del sottospazio si può indicare come $i_S^{-1}(\tau) := \tau|_S$ e si dice **topologia indotta** da τ su S .

Teorema 4.18. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $(S, \tau|_S)$ sottospazio topologico; allora valgono le seguenti affermazioni.

³Questa scelta è una scelta naturale e si vedrà che è ben caratterizzabile

1. $\tau|_S = \{A \cap S \subset S \mid A \in \tau\}$.
2. F è chiuso in $\tau|_S$ se e solo se esiste G chiuso in τ tale che $F = G \cap S$.
3. Se \mathcal{B} è una base di τ , allora $\mathcal{B}_S = \{B_i \cap S \mid B_i \in \mathcal{B}\}$ è una base di $\tau|_S$.
4. Sia \mathcal{L} una sottobase di τ , allora $\mathcal{L}_S = \{L_i \cap S \mid L_i \in \mathcal{L}\}$ è una sottobase della topologia indotta $\tau|_S$.
5. Sia $\mathcal{N}(x)$ un sistema di intorni di x in τ , allora $\mathcal{N}_{\tau|_S}(x) = \{U \cap S \mid U \in \mathcal{N}_\tau(x)\}$ è un sistema di intorni di x in $\tau|_S$.
6. Sia $\mathcal{V}_\tau(x)$ un sistema fondamentale di intorni di x in τ , allora $\mathcal{V}_{\tau|_S}(x) = \{V \cap S \mid V \in \mathcal{V}_\tau(x)\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x in $\tau|_S$.
7. $\forall W \subset S$ ho la seguente relazione tra le chiusure $\overline{W}^{\tau|_S} = \overline{W}^\tau \cap S$.
8. Sia $T \subset S \subset X$, allora $\tau|_T = \tau|_{S|_T}$; ovvero la topologia indotta da T sulla topologia indotta da S è uguale allora topologia indotta da T su X .

Dimostrazione.

1. È ovvio per definizione

$$\begin{aligned} i_S^{-1}(A) &= \{x \in S \mid x \in i_S^{-1}(A)\} = \{x \in S \mid i_S(x) \in A\} \\ &= \{x \in S \mid x \in A\} = S \cap A \end{aligned}$$

questo vale per ogni aperto A , quindi è dimostrato.

2. Considero un chiuso in $\tau|_S$, allora $C^c = A \cap S$ per qualche $A \in \tau$ per il punto sopra. Ma vale anche la seguente formula

$$S \cap A^c = S \cap (X \setminus A) = S \setminus A = S \setminus (A \cap S) = S \setminus C^c = C$$

quindi esiste un chiuso in τ per cui vale. ⁴ Dimostro l'altra implicazione. Sia G chiuso in τ tale che $A \in \tau$, allora $G = A^c$.

$$S \setminus S \cap G = S \setminus G = S \cap G^c \in \tau|_S$$

avendo dimostrato che il complementare rispetto a S di G è aperto in $\tau|_S$, allora $S \cap G$ è chiuso in $\tau|_S$.

3. Propongo due dimostrazioni del seguente fatto.

Dimostrazione per osservazione. Risulta come una conseguenza dell'osservazione 4.16 applicata alla mappa di inclusione, usando il punto 1 si ottiene la tesi. \square

Dimostrazione ridotta al banale. Sia $A \in \tau|_S$, allora per il punto 1 $Q \cap S = A$ per qualche $Q \in \tau$. Per cui $Q = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ e anche $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} (B \cap S)$, ovvero i $B \cap S$ generano A per ogni $A \in \tau|_S$. Dev'essere dunque una base di $\tau|_S$. \square

⁴notare che quando scrivo C^c è complementare rispetto a S , mentre A^c è rispetto ad X .

4. Basta mostrare che se \mathcal{L} è una sottobase di \mathcal{B} in τ allora la base relativa a S generata da \mathcal{B} è generata dalla sottobase relativa di \mathcal{L} a S . Per cui sia $B \in \mathcal{B}_S$, per il punto precedente esiste $B' \in \mathcal{B}$ tale che $B = B' \cap S$. Per definizione di sottobase $B' = \bigcap_{i=1}^n L_i$ dove gli L_i sono elementi della sottobase \mathcal{L} . Per cui

$$B = B' \cap S = \bigcap_{i=1}^n L_i \cap S = \bigcap_{i=1}^n (L_i \cap S)$$

quindi ogni $B \in \mathcal{B}_S$ è generato per intersezioni da elementi di \mathcal{L} intersecati con S . \mathcal{L}_S è una sottobase di $\tau|_S$.

5. Devo mostrare che $\mathcal{N}_{\tau|_S}(x) \subset \{U \cap S \mid U \in \mathcal{N}_\tau(x)\}$. Sia $W \in \mathcal{N}_{\tau|_S}(x)$, esiste $A \in \tau|_S$ tale che $x \in A \subset W$. Inoltre $A = A' \cap S$ per qualche $A' \in \tau$. Per cui posso prendere $W \cup A' \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tale che $(W \cup A') \cap S = W$. Da cui la prima inclusione è dimostrata.

Rimane dunque $\{U \cap S \mid U \in \mathcal{N}_\tau(x)\} \subset \mathcal{N}_{\tau|_S}(x)$. Sia $U \cap S$, allora devo dimostrare l'esistenza di un $A \subset U \cap S$ dove $x \in A$ e $A \in \tau|_S$. Per definizione di intorno esiste $A' \in \tau$ tale che $x \in A' \subset U$, quindi posso prendere $A = A' \cap S$ come aperto di $\tau|_S$ ed è dimostrato che $x \in A = A' \cap S \subset U \cap S$ e dunque è un intorno di x in $\tau|_S$.

6. Prendo un sistema fondamentale di intorni di x che chiameremo $\mathcal{V}_{\tau|_S}(x)$. Per il punto precedente $\mathcal{V}_{\tau|_S}(x) \subset \mathcal{N}_{\tau|_S}(x)$ e quindi se V è un intorno in $\tau|_S$ lo posso scrivere come $V' \cap S$ dove V' è un intorno in τ . Se invece prendo un sistema fondamentale di intorni di x , $\mathcal{V}_\tau(x)$, mi basta prendere ogni intorno $V \cap S$, e questo è ovviamente un intorno di x in $\tau|_S$ poiché se per ogni $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ esiste $x \in V \subset U$ allora $x \in V \cap S \subset U \cap S$, che è ancora un intorno (e per il punto precedente abbiamo che $U \cap S$ è un intorno per $\tau|_S$), quindi abbiamo la tesi.

7. Anche qui propongo due dimostrazioni più o meno simili.

Dimostrazione. Un punto x è aderente a W in $\tau|_S$ se e solo se $x \in \bar{W}^{\tau|_S}$. Per cui sia x aderente a W in $\tau|_S$. Vale $\forall U \in \mathcal{N}_{\tau|_S}(x)$ ho che $U \cap W \neq \emptyset$. Per il punto 3 ciò equivale a dire che $\forall U' \in \mathcal{N}_\tau(x)$, $U' \cap W \neq \emptyset$. Inoltre dato che U, U' intorni di x in due topologie distinte, vale comunque $x \in U$, $x \in U'$. E per il punto 3 vale $U = U' \cap S$ per cui $U' \cap S \neq \emptyset$ e dev'essere che $x \in U' \cap S$ quindi ho anche $x \in S$, da cui risulta che x è aderente a W in $\tau|_S$ se e solo se è aderente a W in τ ed è contenuto in S . Ovvero $\bar{W}^{\tau|_S} = \bar{W}^\tau \cap S$. \square

Dimostrazione. Dimostro prima che $\bar{W}^{\tau|_S} \subset \bar{W}^\tau \cap S$. $W \subset \bar{W}^\tau \cap S$ poiché $W \subset S$. Inoltre $\bar{W}^\tau \cap S$ è un chiuso in $\tau|_S$, quindi per la definizione di chiusura (e la sua minimalità), dev'essere che $\bar{W}^{\tau|_S} \subset \bar{W}^\tau \cap S$. Dimostro $\bar{W}^\tau \cap S \subset \bar{W}^{\tau|_S}$. Per il punto 2 esiste un chiuso C di τ tale che $C \cap S = \bar{W}^{\tau|_S}$. Per cui $W \subset C$ e per l'ipotesi di minimalità della chiusura ho anche che $\bar{W}^\tau \subset C$, e segue $\bar{W}^\tau \cap S \subset C \cap S = \bar{W}^{\tau|_S}$. \square

8. Per definizione di topologia indotta $\tau|_T = i_T^{-1}(\tau)$, $\tau|_{S|_T} = (i_{T,S}^{-1} \circ i_S^{-1})(\tau) = i_T^{-1}(\tau)$. Oppure guardi il seguente diagramma commutativo e ti convinchi che funziona.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i_{T,S}} & S \\ & \searrow & \downarrow i_S \\ & i_S \circ i_{T,S} & X \end{array}$$

□

Teorema 4.19. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ ed f continua. Sia $\emptyset \neq S \subset X$ e $T \subset Y$.

1. $f|_S: (S, \tau|_S) \rightarrow (Y, \xi)$ è continua.
2. Se $f|_S(S) \subset T$ allora $f|_S^T: (S, \tau|_S) \rightarrow (T, \xi|_T)$ è continua.

Dimostrazione. È ovvio che il punto 2 implica il punto 1. Per cui dimostrerò solo il punto 2. (Indipendentemente dal punto 2, la dimostrazione del punto 1 è una riga: $f|_S = f \circ i_S$ poiché la composizione di funzioni continue è continua, $f|_S$ è continua.)

Scrivo $f = f|_S^T$, comunque non è importante. Considero $A = A' \cap T$ dove $A' \in \xi$, e dunque $A \in \xi|_T$, intuitivamente voglio ripercorrere la classica dimostrazione della continuità: la controimmagine di un generico aperto in arrivo deve essere un aperto in partenza. Allora

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{x \in S \mid x \in f^{-1}(A)\} \\ &= \{x \in S \mid f(x) \in A\} \\ &= \{x \in S \mid f(x) \in A, f(x) \in T\} \\ &= \{x \in S \mid f(x) \in A'\} \\ &= S \cap \{x \in X \mid f(x) \in A'\} = S \cap f^{-1}(A') \in \tau|_S \end{aligned}$$

dove ho notato che $S \cap f^{-1}(A') \in \tau|_S$ perché per ipotesi $f^{-1}(A) \in \tau$.

Più immediato è vedere che la controimmagine commuta con l'intersezione. Pertanto se $A = A' \cap T$ con $A \in \xi|_T$ e $A' \in \xi$, allora

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A' \cap T) = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(T) = f^{-1}(A') \cap S$$

che diventa quindi un aperto di $\tau|_S$. Pertanto f è continua. □

Osservazione 4.20. Se $S \in \tau$ e $T \in \tau|_S$ allora $T \in \tau$. Infatti se $T \in \tau|_S$ allora esiste $A \in \tau$ tale che $A \cap S = T$, ma l'intersezione di aperti (in τ) è un aperto in τ , quindi $T \in \tau$.

Teorema 4.21 (Un primo esercizio coomologico⁵). Sia (X, τ) spazio topologico e sia $\{X_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X . Sia $\mathcal{F} = \{f_i: X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$. Se

1. $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$, dove $X_i \cap X_j \neq \emptyset$
2. $\forall i \in I$. f_i continua e X_i aperto.

⁵La coomologia è la globalizzazione di fenomeni locali.

Allora esiste un'unica $f: X \rightarrow Y$ tale da essere anche continua e $f|_{X_i} = f_i$.⁶ La funzione sarà dunque definita come $f: x \mapsto f_i(x)$ dove $x \in X_i$.

Dimostrazione. L'esistenza è banale perché abbiamo una forma abbastanza esplicita, ovvero $f: x \mapsto f_i(x)$ dove $x \in X_i$.

Anche l'unicità è banale per la proprietà di incollamento: infatti se $x \in X_i$ allora $f'(x) = f_i(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

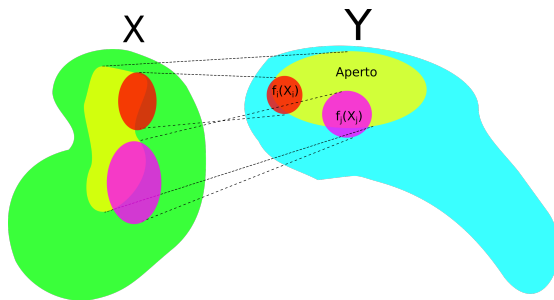


Figura 4.1: un'immagine del caso generico per convincersi

Devo solo dimostrare che la funzione f globale è continua. Sia A aperto in Y . Allora considero $f^{-1}(A)$. Per la definizione di f e siccome potrebbe essere che una parte di $A \cap \text{Im } f_j \neq \emptyset$ e $A \cap \text{Im } f_i \neq \emptyset$, prendo tutte quelle funzioni la cui immagine contiene punti di A . Allora vale

$$f^{-1}(A) = \bigcup_i f_i^{-1}(A)$$

ma poiché le funzioni f_i sono continue negli X_i , portando la proprietà a livello globale ottengo che $f^{-1}(A) = X_i \cap A'_i$ per degli $A' \in \tau$. Dunque

$$f^{-1}(A) = \bigcup_i f_i^{-1}(A) = \bigcup_i X_i \cap A'_i$$

ma $X_i, A'_i \in \tau$ quindi la loro intersezione è ancora un aperto, inoltre l'intersezione qualsiasi di aperti è un aperto. Segue che $f^{-1}(A)$ è aperto e dunque f continua. \square

⁶il termine **coomologico** indica la generalizzazione di fenomeni locali.

4.2.3 Il prodotto topologico finito

In questa sezione si userà spesso la notazione

$$\begin{aligned}(X_1, \tau_1) \\ (X_2, \tau_2) \\ (X_1 \times X_2, \tau = \langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle)\end{aligned}$$

per indicare tre spazi topologici. L'ultimo in particolare è il prodotto di due spazi topologici che adesso definiremo.

Definizione 4.22. La topologia τ che viene generata dalla base $\tau_1 \times \tau_2$ è detta topologia prodotto su $X_1 \times X_2$. Inoltre $(X_1 \times X_2, \tau)$ è uno spazio topologico e si dice prodotto degli spazi topologici $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$.

Osservazione 4.23. Per quanto ovvio, facciamo vedere che $\tau_1 \times \tau_2$ forma una base su $X_1 \times X_2$.

Per la Proposizione 2.25 un insieme è una base di $X_1 \times X_2$ se tale insieme copre $X_1 \times X_2$, ma questo è ovvio visto che $X_1 \times X_2 \in \tau_1 \times \tau_2$; e dati due elementi $A_1, A_2 \in \tau_1 \times \tau_2$ allora la loro intersezione

$$A_1 \cap A_2 = B_{1,1} \times B_{2,1} \cap B_{2,1} \times B_{2,2} = B_{1,1} \cap B_{2,1} \times B_{1,2} \cap B_{2,2}$$

dove ogni $B_{j,i} \in \tau_j \cap A_i$ per cui sono ancora elementi di $\tau_1 \times \tau_2$. Pertanto è una base ed identifica un'unica topologia.

Esempio 4.24. Si consideri $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{euclidea}}^2)$, allora questo sarà omeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau) \times (\mathbb{R}, \tau)$?

Se la risposta fosse negativa non avrebbe senso parlare di prodotti di topologie, pertanto dobbiamo arrivare ad una risposta positiva. In senso geometrico mi basta dimostrare la finezza tra le due topologie, quindi sceglierò la base più comoda per i miei scopi:

- τ' topologia risultante dal prodotto topologico (topologia prodotto), in \mathbb{R}^2 gli elementi della topologia avranno “la forma di rettangoli” (per capire la motivazione basti pensare a come funziona un prodotto cartesiano)
- τ topologia naturale di \mathbb{R}^2 , noto che lo spazio è metrizzabile con la distanza euclidea

τ' più fine di τ

In sostanza devo mostrare che ogni elemento della topologia naturale si può scrivere come “unione di rettangoli aperti”, questo è elementare: intuitivamente perché dentro ogni palla aperta è possibile prendere un rettangolo totalmente contenuto nella palla aperta. Più rigorosamente prendo r raggio della palla aperta, x tra 0 ed r (escluso) ed il quadrato aperto di base $r - x$: il quadrato è totalmente incluso nella palla aperta e per unione di questi quadrati posso ottenere la palla stessa.

τ più fine di τ'

Come sopra, devo mostrare che ogni rettangolo si può scrivere come unione di palle aperte. Trovato il modo di incastrare la palla dentro il rettangolo aperto

questo è immediato, basta usare il fatto che lo spazio sia metrizzabile.

In generale si può dimostrare che $\tau^n = \underbrace{\tau \times \cdots \times \tau}_{n\text{-volte}}$, dove τ è la topologia euclidea.

Teorema 4.25. Sia \mathcal{B}_1 base di τ_1 e \mathcal{B}_2 base di τ_2 , allora

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 := \{B_1 \times B_2 \in 2^{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2} \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

forma una base della topologia τ (ovvero il generato del prodotto delle topologie).

Dimostrazione. Devo far vedere che se $A \in \tau$ allora è generato dalla base $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Se $A \in \tau$, la topologia è generata dalla base $\tau_1 \times \tau_2$. Per cui $A = \bigcup_{i \in I} A_{1,i} \times A_{2,i}$, dove $A_{1,i} \in \tau_1$ e $A_{2,i} \in \tau_2$ per ogni $i \in I$. Ma ogni $A_{1,i} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'_{1,i}} B$, dove $\mathcal{B}'_{1,i} \subset \mathcal{B}_1$ e analogamente per $A_{2,i}$. Sostituendo si ottiene

$$A = \bigcup_{i \in I} A_{1,i} \times A_{2,i} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{B \in \mathcal{B}'_{1,i}} B \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}'_{2,i}} B = \bigcup_{\substack{i \in I \\ B_1 \in \mathcal{B}'_{1,i} \\ B_2 \in \mathcal{B}'_{2,i}}} B_1 \times B_2$$

Notare che $B_1 \times B_2$ indica tutti i possibili prodotti tra gli insiemi nelle rispettive famiglie, $\mathcal{B}'_{1,i}$ e $\mathcal{B}'_{2,i}$, e questi sono sempre elementi di $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ e la somma dipende solo da I , per cui genera A .

Devo vedere anche che la topologia generata da $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ non sia più fine di τ . Per cui sia $A \in \langle \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \rangle$. Allora $A = \bigcup_{i \in I} B_{1,i} \times B_{2,i}$, mi basta considerare la proiezione di A (che è una mappa aperta) per vedere che

$$\pi_1(A) = \bigcup_{i \in I} B_{1,i} = A_1 \in \tau_1$$

e analogamente per τ_2 .

Per cui risulta che $A_1 \times A_2 = \pi_1(A) \times \pi_2(A) = A$. □

Teorema 4.26. La topologia prodotto τ è la meno fine per cui le mappe $\pi_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ sono continue.

Dimostrazione. La topologia prodotto rende palesamente le mappe continue, dobbiamo solo verificare che sia la più fine.

Suppongo esista una topologia meno fine di τ che chiamerò τ' . Allora π_1 è continua e quindi contiene almeno tutti gli aperti della forma $\pi_1^{-1}(A_1) \times \pi_2^{-1}(A_2)$ dove A_i aperto in τ_i . Ma questi aperti sono esattamente gli aperti della base che genera τ , pertanto $\tau \subset \tau'$. □

Teorema 4.27. Le mappe $\pi_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ sono aperte (dove $i \in \{1, 2\}$).

Dimostrazione. Si consideri $\pi_1(A)$ dove $A \in \tau$. Allora $A = \bigcup_{i \in I} A_{1,i} \times A_{2,i}$, per cui $\pi_1(A) = \pi_1(\bigcup_{i \in I} A_{1,i} \times A_{2,i}) = \bigcup_{i \in I} \pi_1(A_{1,i} \times A_{2,i}) = \bigcup_{i \in I} A_{1,i}$. Poiché ogni $A_{1,i} \in \tau_1$ segue che anche la loro unione lo è. Analogamente si dimostra per la proiezione π_2 . □

Teorema 4.28. Siano $S_1 \subset X_1, S_2 \subset X_2$; il prodotto di sotto topologie si comporta bene, ovvero

$$\langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle|_{S_1 \times S_2} = \langle \tau_1|_{S_1} \times \tau_2|_{S_2} \rangle$$

Dimostrazione. Spezzo la dimostrazione nelle due inclusioni. Dimostro come primo caso $\langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle|_{S_1 \times S_2} \subset \langle \tau_1|_{S_1} \times \tau_2|_{S_2} \rangle$.

Quindi sia $A \in \langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle|_{S_1 \times S_2}$ allora $A = \left(\bigcup_{i \in I} A_{1,i} \times A_{2,i} \right) \cap S_1 \times S_2$, per cui posso distribuire l'intersezione su tutti gli elementi dell'unione:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_{1,i} \times A_{2,i} \right) \cap S_1 \times S_2 = \bigcup_{i \in I} (A_{1,i} \cap S_1) \times (A_{2,i} \cap S_2)$$

per il Teorema 4.18 per ogni $i \in I$, $(A_{1,i} \cap S_1) \times (A_{2,i} \cap S_2) \in \tau_1|_{S_1} \times \tau_2|_{S_2}$, ovvero $A \in \langle \tau_1|_{S_1} \times \tau_2|_{S_2} \rangle$.

Come si può notare le implicazioni fatte sopra valgono anche nel verso opposto, per cui è dimostrata la tesi. \square

Teorema 4.29. Gli intorni si “comportano bene” rispetto al prodotto topologico. In questo modo voglio dire che:

1. Sia $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, allora $P \in \mathcal{N}_\tau((x_1, x_2))$ se e solo se esistono $U_1 \in \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1)$ e $U_2 \in \mathcal{N}_{\tau_2}(x_2)$ tali che $U_1 \times U_2 \subset P$.
2. Siano $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $\mathcal{V}_1(x_1)$ e $\mathcal{V}_2(x_2)$ rispettivamente un sistema fondamentale di intorni di x_1 in τ_1 e di x_2 in τ_2 ; allora $\mathcal{V}_1(x_1) \times \mathcal{V}_2(x_2)$ è un sistema fondamentale di intorni di (x_1, x_2) nella topologia $\tau = \langle \tau_1 \times \tau_2 \rangle$.

Dimostrazione. Punto 1:

\Leftarrow Abbastanza ovvio. Per definizione di intorno su U_1 esiste $A_1 \in \tau_1$ tale che $A_1 \subset U_1$, ed un discorso analogo vale su τ_2 . Allora $A_1 \times A_2 \in \tau$ per definizione, inoltre ho che

$$A_1 \times A_2 \subset U_1 \times U_2 \subset P$$

per cui P è un intorno in τ .

\Rightarrow Per definizione di intorno questo vuol dire che esiste $A \subset P$ tale che $A \in \tau$. Allora $A = \bigcup_{i \in I} A_{1,i} \times A_{2,i}$, prendo A_{1,i_0}, A_{2,i_0} tali da contenere rispettivamente x_1, x_2 . Devo dimostrare che A_{1,i_0} è un intorno di x_1 in τ_1 , ma è ovvio poiché $A_{1,i_0} \in \tau_1$. Analogo discorso su A_{2,i_0} . Ho dunque trovato un intorno in τ_1 e uno in τ_2 tali che il loro prodotto sta in P (poiché il loro prodotto sta addirittura in $A \subset P$).

\square

Dimostrazione. Punto 2: Abbiamo provato il risultato per gli intorni.

Sia $x = (x_1, x_2)$ fissato, siano

- U_1 intorno in X_1 di x_1 , per ipotesi esiste un V_1 appartenente al sistema fondamentale di intorni con $x_1 \in V_1 \subset U_1$
- U_2 intorno in X_2 di x_2 , per ipotesi esiste un V_2 appartenente al sistema fondamentale di intorni con $x_2 \in V_2 \subset U_2$

Siccome è ben noto (l'abbiamo provato) che U intorno di x si può comporre come

$$U = U_1 \times U_2$$

con U_i intorno degli x_i , otteniamo subito la tesi.

$$x = (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$$

Quindi il prodotto di un sistema fondamentale di intorno è sistema fondamentale di intorno del prodotto. \square

Teorema 4.30. Siano $S_1 \subset X_1, S_2 \subset X_2$, allora valgono le seguenti formule

$$\begin{aligned}\overline{S_1 \times S_2}^\tau &= \overline{S_1}^{\tau_1} \times \overline{S_2}^{\tau_2} \\ \text{Int}(S_1 \times S_2) &= \text{Int}(S_1) \times \text{Int}(S_2) \\ \text{Fr}(S_1 \times S_2) &= (\text{Fr}(S_1) \times \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \times \text{Fr}(S_2))\end{aligned}$$

Dimostrazione equazione 1. Uso il fatto che un punto $x \in \overline{S_1 \times S_2}^\tau$ se e solo se x è aderente a $S_1 \times S_2$ in τ . Fisso dunque un $(x_1, x_2) \in \overline{S_1 \times S_2}^\tau$ e dei sistemi fondamentali di intorno $\mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2)$.

L'aderenza per definizione indica che esiste un sistema fondamentale di intorno $\mathcal{V}_\tau(x) = \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1) \times \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2)$ tale che per ogni $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$ vale $V \cap S_1 \times S_2 \neq \emptyset$. Usando la definizione data di $\mathcal{V}_\tau(x)$ posso riscrivere come per ogni $V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1), V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2)$ tali che $V_1 \times V_2 \cap S_1 \times S_2 \neq \emptyset$.

Applicando un po' di leggi insiemistiche diventa $V_1 \cap S_1 \times V_2 \cap S_2 \neq \emptyset$, ovvero $V_1 \cap S_1 \neq \emptyset$ e $V_2 \cap S_2 \neq \emptyset$, per cui dev'essere che x_1 sia aderente a S_1 secondo τ_1 ; ed analogamente per x_2 . \square

Dimostrazione equazione 2.

$$\text{Int}(S \times T) = \text{Int}(S) \times \text{Int}(T)$$

(\subset) Sia $x \in \text{Int}(S \times T)$, questo vuol dire che esiste un intorno di x totalmente contenuto in $S \times T$. Sia A tale intorno (posso supporlo aperto a meno di restrizione), per proprietà viste posso decomporlo come

$$x \in A = A_1 \times A_2$$

Ma questo vuol dire che le due componenti di x hanno intorno rispettivamente dentro S e dentro T .

(\supset) Sia $x \in \text{Int}(S) \times \text{Int}(T)$, questo vuol dire che le due componenti di x hanno intorno (aperti a meno di restrizione) totalmente contenuti in S e T , procedendo come prima ottengo subito la tesi. \square

Dimostrazione equazione 3. Considero, analogamente a quanto fatto per dimostrare la prima equazione, $(x_1, x_2) \in \text{Fr}(S_1 \times S_2)$. Fisso un sistema fondamentale di intorno su S_1 e S_2 . Per cui se $x \in \text{Fr}(S_1 \times S_2)$, allora $V \cap S_1 \times S_2 \neq \emptyset$ e $V \not\subset S_1 \times S_2$. Sostituendo la decomposizione per sistemi fondamentali di intorno $V_1 \times V_2 \cap S_1 \times S_2 = V_1 \cap V_2 \times S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ per cui $V_1 \cap S_1 \neq \emptyset$ e $V_2 \cap S_2 \neq \emptyset$. Inoltre dalla condizione $V \not\subset S_1 \times S_2$ si ottengono le condizioni *esclusive*:

1. $V_1 \subset S_1 \wedge V_2 \not\subset S_2$
2. $V_1 \not\subset S_1 \wedge V_2 \subset S_2$
3. $V_1 \not\subset S_1 \wedge V_2 \not\subset S_2$

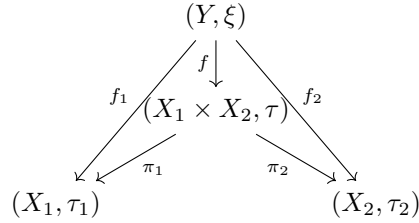
Unendo tutte le condizioni si ottiene la tesi. \square

Teorema 4.31 (Proprietà universale del prodotto topologico). Sia data

$$f: (Y, \xi) \rightarrow (X_1 \times X_2, \tau)$$

una applicazione su spazi topologici e siano π_1, π_2 le proiezioni canoniche dal prodotto topologico. Allora $f_i = \pi_i \circ f$ si dicono componenti di f e vale l'equivalenza delle seguenti affermazioni:

1. f è continua
2. f_i sono continue per $i \in \{1, 2\}$



Dimostrazione.

\Leftarrow Se f continua allora $\pi_1 \circ f$ è continua, perché composizione di funzioni continue, analogamente per $\pi_2 \circ f$.

\Rightarrow Questa è la proprietà meno ovvia e la più importante del teorema. Se le componenti f_1, f_2 sono continue. Allora si prenda un aperto $A \in \tau$, e si prenda la sua controimmagine attraverso f . È ovvio che dati A_1, A_2 aperti rispettivamente in τ_1, τ_2 vale

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}\left(\bigcup_i A_{1,i} \times A_{2,i}\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_{1,i} \times A_{2,i}) \\ &= \bigcup_i f^{-1}\{y \in Y \text{ con } f(y) \in A_{1,i} \times A_{2,i}\} \\ &= \bigcup_i f^{-1}\{y \in Y \text{ con } f_j(y) \in A_{j,i} \text{ per } j = 1, 2\} \\ &= \bigcup_i (f_1^{-1}(A_{1,i}) \cap f_2^{-1}(A_{2,i})) \end{aligned}$$

Siccome non abbiamo ancora usato l'ipotesi, è arrivato il momento di usarla. Infatti si vede che essendo f_1, f_2 continue, la loro controimmagine di aperti è aperta. Da cui ho anche $f^{-1}(A_{1,i} \times A_{2,i})$ aperto; f è continua. \square

La proprietà universale del prodotto topologico è molto utile in applicazioni pratiche, inoltre notiamo che è possibile dimostrarla sfruttando le proprietà dei sistemi fondamentali di intorni.

Teorema 4.32. Sia $g: (X_1 \times X_2, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$. Fissato un $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ le seguenti sono equivalenti.

1. g è continua in (x_1, x_2)
2. per ogni intorno $U \in \mathcal{N}_\xi(g(x_1, x_2))$ esistono $V_1 \in \mathcal{V}_1(x_1)$ e $V_2 \in \mathcal{V}_2(x_2)$ tali che $g(V_1 \times V_2) \subset U$

Dimostrazione. Se g è continua in x allora per ogni intorno V di $g(x)$ esisterà un intorno N di x tale che $g(N) \subset V$. Poiché N è un intorno nella topologia prodotto allora esistono N_1, N_2 rispettivamente intorni di x_1, x_2 dove $x = (x_1, x_2)$. Ovvero la tesi.

Al contrario, fissiamo V intorno di $g(x)$, allora devo dimostrare che $g^{-1}(V)$ è ancora un intorno di x , ma questo è ovvio dato che esistono N_1, N_2 tali che $g(N_1 \times N_2) \subset g(g^{-1}(V)) \subset V$ e quindi $N_1 \times N_2 \subset g^{-1}(V)$. \square

Estendere i risultati per $n > 2$

Possiamo notare che in generale i teoremi dimostrati per $n = 2$, ovvero $X = X_1 \times X_2$, valgono anche per il prodotto topologico di $n \in \mathbb{N}$ spazi topologici; infatti basta procedere per induzione.

Il vero problema è dimostrare che $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \simeq X_1 \times (X_2 \times \cdots \times X_n)$ e così via, cioè dimostrare che il prodotto di topologie è un operatore associativo nella categoria degli spazi topologici.

Teorema 4.33. Le topologie con l'operazione di prodotto formano un monoide commutativo su Top/\sim , dove $X \sim Y$ se e solo se X è omeomorfo Y .

Dimostrazione.

1. *Associatività*
Ovvia.
2. *Commutatività*
Basta definire la mappa $f: X \times Y \rightarrow Y \times X$, con $f(x, y) = (y, x)$. La mappa così definita è continua, biettiva e aperta. Per cui la proprietà commutativa vale.
3. L'identità è il singoletto $\{p\}$ con la topologia qualsiasi (tanto è sempre la stessa). Quindi sia (X, τ) uno spazio topologico. Definisco la mappa $f: (X, \tau) \rightarrow (X \times \{p\}, \tau')$ nell'unico modo in cui è possibile definirla. La mappa è biettiva perché $f^{-1}(x, p) = x$ è la sua funzione inversa. È ovviamente continua perché $f^{-1}((A, \emptyset)) = \emptyset$, $f^{-1}((A, \{p\})) = A$ perché f biettiva. E analogamente si dimostra che è aperta. Pertanto è l'identità.

\square

4.2.4 Topologie quozienti

Definizione 4.34 (Topologia quoziente). Sia (X, τ) spazio topologico e $f: X \rightarrow Y$ applicazione, con $Y \neq \emptyset$. Si dice **topologia quoziente su Y rispetto ad f** , oppure **topologia indotta da f su Y** , la più fine topologia su Y tale che f è continua.

Teorema 4.35. Sia (X, τ) spazio topologico e $f: X \rightarrow Y$ applicazione e $Y \neq \emptyset$. Valgono le seguenti affermazioni.

1. La topologia quoziente su Y rispetto a f esiste ed è unica, inoltre denotandola come τ_f vale

$$\tau_f := \{A \in 2^Y \mid f^{-1}(A) \in \tau\}$$

2. C è chiuso in τ_f se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in τ .
3. La topologia quoziente rispetto ad f è la topologia più fine che rende f continua.
4. **Proprietà universale degli spazi quozienti:** Sotto le ipotesi precedenti, sia f continua. Considerando il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_f) \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & (Z, \mu) \end{array}$$

g è continua se e solo se $g \circ f$ è continua.

Dimostrazione.

1. È ovviamente una topologia ed è la più fine.
2. La controimmagine commuta con il complementare.
3. Chiaramente, per come abbiamo definito la topologia quoziente.
4. Se g è continua è ovvio che $g \circ f$ è continua perché la composizione di funzioni continue è continua.
Se $f \circ g$ è continua, sia A aperto in arrivo rispetto a g , allora $g^{-1}(A)$ deve essere un aperto.

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$$

Siccome la composizione è continua per ipotesi allora ho ottenuto un aperto in partenza. Si noti l'importanza della topologia quoziente in Y .

□

Osservazione 4.36. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_f)$, se f non è surgettiva allora $\exists y \in Y \setminus f(X)$; il singoletto $\{y\}$ è un aperto nella topologia τ_f poiché $f^{-1}(y) = \emptyset$.

Definizione 4.37. Sia $f: X \rightarrow Y$ applicazione e sia $S \subset X$. Diciamo che S è **saturo**⁷ rispetto a f se $f^{-1}(f(S)) = S$.

⁷un'idea sul significato del termine è che essenzialmente la funzione *divora* tutte le fibre di S in modo tale che stiano in S stesso.

La proprietà universale dei quozienti topologici: perché è interessante questa proprietà universale? La proprietà è addirittura fondamentale, perché permette di by-passare la topologia quoziente per verificare che una mappa è continua, senza dover lavorare sulla topologia quoziente stessa. In particolare è una costruzione generale valente per ogni categoria, ovvero se si parla di Anelli o di Gruppi o di qualsiasi altro oggetto algebrico, questa costruzione identifica (con opportune modifiche riguardanti i morfismi) lo spazio quoziente[2]

Osservazione 4.38. Possiamo caratterizzare S sottospazio saturo rispetto ad f .

$$S = f^{-1}f(S) = \bigcup_{x \in S} f^{-1}f(x)$$

ovvero se per ogni $x \in S$ abbiamo un'unica fibra in S . Ovvero S contiene tutte le fibre di f contenenti i suoi punti.

Osservazione 4.39. Se f è iniettiva, allora ogni insieme è f -saturo, poiché $S = f^{-1}f(S)$.

Teorema 4.40. $f: X \rightarrow Y$ applicazione e sia $S \subset X$. $f^{-1}f(S)$ si dice f -saturazione di S . Si può dimostrare che

1. $S \subset f^{-1}f(S)$
2. $f^{-1}(f(S))$ è il più piccolo insieme f -saturo contenente S .

Dimostrazione.

1. Ovvio. Volendo usare quanto detto nell'osservazione precedente

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\} \subset \bigcup_{x \in S} f^{-1}f(x)$$

e l'uguaglianza vale solo se S è saturo.

2. È semplice vedere che

$$f(f^{-1}(f(S))) = f(S) \implies f^{-1}(f(f^{-1}(f(S)))) = f^{-1}(f(S))$$

poiché se $x \in f^{-1}(f(S))$ allora $f(x) \in f(S)$ per definizione (e viceversa), quindi la f -saturazione di S è f -saturo. Devo inoltre dimostrare che è la più piccola. Per cui sia K f -saturo tale che $S \subset K \subset f^{-1}f(S)$. Applicando $f^{-1}f$ sulla precedente successione di inclusioni (dove per comodità di lettura abbiamo omissso le parentesi, per esempio $f \circ g = f(g)$)

$$f^{-1}f(S) \subset f^{-1}f(K) \stackrel{\text{è } f\text{-sat.}}{=} K \subset f^{-1}f f^{-1}f(S) = f^{-1}f(S)$$

Otengo che $K = f^{-1}f(S)$. Per cui la più piccola è necessariamente $f^{-1}f(S)$

□

4.2.5 Quozienti con mappe surgettive

La topologia quoziente può essere cattiva. Decisamente cattiva.

Costruire un modo più facile per studiarla è necessario per i casi peggiori e più contorti; possiamo provare a collegare le proprietà della topologia τ_f a quella di partenza τ .

Uno strumento utile saranno le identificazioni.

Lemma 4.41. Sia $f: X \rightarrow Y$ applicazione surgettiva e $S \subset X$ f -saturo, allora

1. S^c è f -saturo

$$2. f(S^c) = f(S)^c$$

Dimostrazione. Dimostro per prima cosa $f(S)^c = f(S^c)$. Data f suriettiva allora

$$f(X) = f(S \cup S^c) = f(S) \cup f(S^c) = Y$$

e dunque $f(S^c) = Y \setminus f(S) = f(S)^c$. Per la f -saturazione di S ho che $S = f^{-1}f(S)$, dunque applicando il complementare ottengo immediatamente che

$$S^c = f^{-1}(f(S))^c = f^{-1}(f(S)^c) = f^{-1}(f(S^c))$$

□

Teorema 4.42. Sia (X, τ) spazio topologico, $f: X \rightarrow Y$ surgettiva ed Y con τ_f allora vale

1. $A \subset Y$ è un aperto in τ_f se e solo se esiste $Q \in \tau$ tale da essere f -saturo e che $f(Q) = A$. Dunque vale

$$\tau_f = \mathcal{A} = \{A \in 2^Y \mid A = f(S), \text{dove } S \in \tau, f^{-1}f(S) = S\}$$

2. $C \subset Y$ è un chiuso in τ_f se e solo se esiste $Q \subset X$ chiuso tale da essere f -saturo e che $f(Q) = C$.

Dimostrazione.

1. Sia $A \in \mathcal{A}$, allora esiste $S \in \tau$ tale da essere f -saturo. Per cui $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(S)) \stackrel{\text{saturazione}}{=} S \in \tau$. Questo dimostra $\mathcal{A} \subset \tau_f$. Sia dunque $A \in \tau_f$ e $U = f^{-1}(A) \in \tau$, devo dimostrare che U è f -saturo. Dato che $f(f^{-1}(A)) = A$ per la surgettività di f

$$f^{-1}f(U) = f^{-1}(A) = U$$

e dunque è anche f -saturo. Si evince che $\tau_f \subset \mathcal{A}$ e dunque anche che $\tau_f = \mathcal{A}$.

2. Devo dimostrare che un chiuso in τ_f è sempre della forma $K = f(C)$ per C f -saturo e C chiuso in τ . Quindi vale che $K^c = f(S)$ dove $S \in \tau$ e f -saturo. Quindi posso riscrivere $S = C^c$ dove C chiuso in τ . Per il precedente lemma ho dunque

$$K^c = f(S) = f(C^c) \stackrel{\text{lem. prec.}}{=} f(C)^c$$

dove C è un chiuso f -saturo. Ovvero per ogni K chiuso in τ_f , vale $K = f(C)$ per qualche C chiuso in τ e f -saturo (e viceversa), cioè la tesi.

□

Definizione 4.43. Una applicazione $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ tra spazi topologici è detta **identificazione** se è continua, surgettiva e $\xi = \tau_f$.

Teorema 4.44 (Caratterizzazione delle identificazioni). Sia data una funzione $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ continua e surgettiva, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. f è un identificazione.

2. Se $\forall A \subset Y$ tale che $f^{-1}(A) \in \tau$ allora $A \in \xi$.
3. Se $\forall A \in \tau$ A è f -saturato, $f(A) \in \xi$.
4. Se $\forall C \subset X$ chiuso e f -saturato vale $f(C)$ chiuso in ξ .

Dimostrazione.

- (1 \Leftrightarrow 2) f identificazione se e solo se $\tau_f = \xi$ e abbiamo gratis che $\xi \subset \tau_f$ perché topologia più fine tale da render f continua. Quindi bisogna dimostrare $\tau_f \subset \xi \iff \forall A \subset Y$ tali che $f^{-1}(A) \in \tau \Rightarrow A \in \xi$. Per cui se vale $\tau_f \subset \xi$ è ovvio che per ogni A con $f^{-1}(A) \in \tau$ si ha $A \in \tau_f \subset \xi$, e ho la tesi. Se invece vale $\forall A \subset Y$ tali che $f^{-1}(A) \in \tau \Rightarrow A \in \xi$ allora se prendo $A \in \tau_f$ allora dev'essere che $f^{-1}(A) \in \tau$ e per ipotesi vale anche che $A \in \xi$ quindi $\tau_f \subset \xi$.
- (1 \Rightarrow 3) Fisso $U \in \tau$ tale da essere f -saturato, allora $f(U) \in \xi = \tau_f$, ma $\xi = \tau_f$ per ipotesi, ovvero si ottiene la tesi.
- (3 \Rightarrow 1) Se vale $f(U) \in \xi$ devo provare che $\xi = \tau_f$, ma $\xi \subset \tau_f$ è già dimostrata poiché τ_f è la topologia più fine per cui f sia continua. Per cui fisso un $A \in \tau_f$. $A \in \tau_f \iff \exists U \in \tau$ e f -saturato, ma per ipotesi $f(U) \in \xi$, quindi $\tau_f \subset \xi \subset \tau_f$.
- (3 \Leftrightarrow 4) Ovvio per teoremi precedenti.

□

Osservazione 4.45 (Studio delle identificazioni). Notare che le identificazioni non sono sempre applicazioni aperte, anche se sono aperte e chiuse rispetto a una classe di insiemi (ovvero quelli f -saturi).

Infatti possiamo definire una applicazione non aperta e non chiusa.

Sia data

$$f: (\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}}) \rightarrow (\{0, 1\})$$

con $f := \mathcal{X}_{[0,2]}$ dove la \mathcal{X} è la mappa caratteristica dell'insieme a pedice.

- **Riconoscere la topologia quoziente**
 τ_f in questo caso è la topologia banale, infatti 0 non può essere un aperto, in quanto se lo fosse $f^{-1}(0) = [0, 2)^c$ che non è né aperto né chiuso. Analogamente per il punto 1 che non può essere aperto (e neanche chiuso).
- **La mappa non è aperta**
 $f((0, 2)) = 1$, per cui non manda aperti in aperti.
- **La mappa non è chiusa**
 $f([0, 1]) = 1$ e dunque non manda neanche chiusi in chiusi, eppure f è una identificazione.

Teorema 4.46. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_f)$ identificazione, allora valgono le seguenti affermazioni.

1. f aperta se e solo se $\forall A \in \tau$ la sua f -saturazione $f^{-1}f(A) \in \tau$
2. f chiusa se e solo se $\forall C$ chiuso la sua f -saturazione $f^{-1}f(C)$ è un chiuso.

Dimostrazione. Dimostro solo il primo caso, il secondo è equivalente al primo dato quanto visto fino ad ora. Se f aperta allora $\forall A \in \tau$ risulta che $f(A)$ è aperta per ipotesi e $f^{-1}f(A)$ dev'essere ancora un aperto perché f continua. Se invece vale che la f -saturazione di un aperto è ancora aperta, fisso $A \in \tau$ e voglio vedere che $f(A)$ è un aperto in τ_f . Ma $f(A) \in \tau_f$ se e solo se esiste $S \in \tau$ e f -saturo tale che $f(S) = f(A)$. Basta scegliere $S = f^{-1}f(A)$, e sappiamo che appartiene a τ ; è f -saturo ed inoltre poiché f suriettiva $f(S) = f(f^{-1}f(A)) = f(A)$. Pertanto f è aperta. \square

4.2.6 Relazioni di equivalenza e spazi quozienti

La nostra ricetta più raffinata sarà quella degli **spazi quozienti**.

Spazi quozienti alla relazione di equivalenza

Tempo di preparazione: 10 minuti

Difficoltà: media

Per la preparazione si raccomanda di avere delle relazioni di equivalenza fresche a portata di mano.

Ingredienti:

1. Un insieme non vuoto, X .
2. Una relazione di equivalenza $R \subset X \times X$.

Si raccomandano ingredienti di provenienza topologica certificata.

Preparazione:

Raccolti gli ingredienti, è bene controllarne le date di scadenza. Da qui in avanti la procedura diventa semplice, si *passa a quoziente*. Ma come?

Si prenda X e lo si mappi in X/R , ovvero l'insieme delle classi di equivalenza di X in R .

Dopo aver cotto a fuoco lento per 2-3 minuti possiamo iniziare ad operare sui morfismi e costruire una mappa

$$\begin{aligned} \pi: \quad X &\longrightarrow X/R \\ x &\longmapsto [x]_R \end{aligned}$$

che è la **proiezione naturale** dell'insieme sul suo quoziente.

Consigli:

La proiezione naturale è sempre suriettiva e si “comporta bene” (come si può vedere dalla figura).⁸

Utilizzando il procedimento canonico per la costruzione di topologie quozienti indotte da applicazioni sulla proiezione naturale, si ottiene quella che è detta

⁸per questo si sono sempre studiate mappe suriettive nel capitolo precedente!

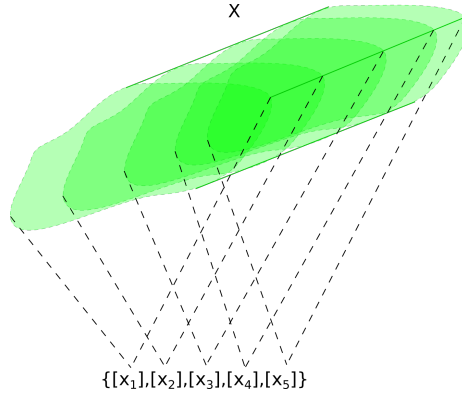


Figura 4.2: proiezione della partizione di X data dalla relazione R , oppure si possono vedere i sottoinsiemi verdi di X come tutte le fibre di f su un X' proiettate in un punto da π

topologia quoziente di τ modulo R e $(X/R, \tau_\pi)$ è detto lo spazio topologico quoziente di (X, τ) modulo R .

Lemma 4.47. Sia $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ un'applicazione continua tra spazi topologici e siano R, R' relazioni di equivalenza rispettivamente su X, X' . Vale $f([x]_R) \subset [f(x)]_{R'}$ (equivale alla condizione $xRy \Rightarrow f(x)R'f(y)$) se e solo se esiste ed è unica una g continua tale che il diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (X', \tau') \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ (X/R, \tau_{X/R}) & \xrightarrow{\exists! g} & (X'/R', \tau_{X'/R'}) \end{array}$$

Dimostrazione. Se esiste g per cui il diagramma commuta, stiamo praticamente dicendo

$$(\pi' \circ f)(x) = (g \circ \pi)(x) = (g \circ \pi)(y) = (\pi' \circ f)(y)$$

ma questa uguaglianza vale se e solo se $f(x)R'f(y)$, per cui ho la tesi.

Dimostro l'esistenza di g e la definisco come $g(\alpha) = (\pi' \circ f)(x_\alpha)$ dove $x_\alpha = \pi^{-1}\alpha$, ovvero x_α è un rappresentante della classe α . Devo far vedere che sia ben definita, altrimenti non *esiste*. Per cui considero anche un altro rappresentante della classe α e lo chiamo x'_α . Affinché sia ben definita dev'essere che $g(\alpha) = \pi' f(x_\alpha) = \pi' f(x'_\alpha) = g(\alpha')$, ma questa condizione è vera per l'ipotesi. La continuità di g è data dalla proprietà universale degli spazi quozienti, si consideri il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & & \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' \circ f & \\ (X/R, \tau_{X/R}) & \xrightarrow{g} & (X'/R', \tau_{X'/R'}) \end{array}$$

per cui g è continua dato che $\pi' \circ f$ è continua. \square

Teorema 4.48. Sia $f: X \rightarrow X'$ una applicazione continua e surgettiva, possiamo definire la relazione di equivalenza R_f sull'insieme X ponendo la relazione $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Allora

1. esiste ed è unica $g: X/R_f \rightarrow X'$ biettiva e continua.
2. g è un omeomorfismo se e solo se f è un identificazione.

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma 4.47 sul seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (X', \tau') \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' = \text{Id} \\ (X/R_f, \tau_{X/R_f}) & \xrightarrow{\exists! g} & (X'/U', \tau_{X'/U'}) \end{array}$$

dove la relazione U' su X' è definita come $xU'y \Leftrightarrow x = y$, per cui la proiezione π' non è nient'altro che l'identità.

Allora $(X'/U', \tau_{X'/U'}) = (X', \tau')$, inoltre il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (X', \tau') \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! g & \\ (X/R_f, \tau_{X/R_f}) & & \end{array}$$

Per la commutatività del diagramma si ottiene senza fatica che $f = g \circ \pi$, e quindi dev'essere che se f è suriettiva anche g lo è. Inoltre g è anche iniettiva: siano $[x] \neq [y]$, allora

$$f \circ \pi^{-1}([x]) = g([x]) \neq g([y]) = f \circ \pi^{-1}([y])$$

poiché ogni controimmagine di una classe $\pi^{-1}([x])$ sono tutti quegli $x_i \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_i)$. Dunque è anche iniettiva e risulta essere biettiva.

Dimostro il secondo punto del teorema, per cui separo i due casi

(\Leftarrow) Sia f identificazione. Notare che abbiamo già che g continua e biettiva, ci manca da dimostrare che g aperta.

Sia $A \in \tau_{X/R_f}$ allora $\pi^{-1}(A) \in \tau$ ed è f -saturato. Allora $f(\pi^{-1}(A)) \in \tau_f$ e poiché $f = g \circ \pi$ risulta

$$\tau_f \ni f(\pi^{-1}(A)) = g((\pi \circ \pi^{-1})(A)) = g(A)$$

quindi g è aperta e un omeomorfismo.

(\Rightarrow) Poniamo g omeomorfismo. Dobbiamo dimostrare che f è un identificazione; sappiamo già che f suriettiva e continua, quindi dobbiamo dimostrare l'uguaglianza delle topologie in arrivo.

Per questo possiamo scegliere una delle caratterizzazioni date dal Teorema 4.44. In particolare se riusciamo a dimostrare che per ogni $A' \in 2^X$ tale che $f^{-1}(A') \in \tau$ allora $A' \in \tau'$, abbiamo vinto. Fisso un A' tale che $f^{-1}(A') \in \tau$. Ma questo è π -saturato, quindi vale che $\pi f^{-1}(A') \in \tau_{X/R_f}$, inoltre grazie al fatto che g è un omeomorfismo possiamo portare in avanti l'aperto senza problemi

$$\tau' \ni g\pi(f^{-1}(A')) = f f^{-1}(A') \stackrel{f \text{ surg.}}{=} A'$$

che è quanto si voleva dimostrare.

□

I seguenti corollari sono decisamente simili ed indicano la stessa cosa, ma in modi distinti e di diversa utilità pratica.

Corollario 4.49. Se $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ è una identificazione, allora $(X/R_f, \tau_{R_f})$ è omeomorfo a (X', τ') .

Corollario 4.50. Sia (X, τ) spazio topologico, sia R relazione di equivalenza su X , $\pi: (X, \tau) \rightarrow (X/R, \tau_{X/R})$ sua proiezione naturale e (X', τ') un altro spazio topologico.

Supponiamo esista $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ identificazione tale che $f^{-1}f(x) = [x]_R$ per ogni $x \in X$, allora $X/R \simeq X'$.

A livello intuitivo la richiesta $f^{-1}f(x) = [x]_R$ richiede che la funzione “rispetti le fibre” della relazione di equivalenza.

4.3 Gruppi topologici

4.3.1 L'operatore di gruppo

Finalmente è giunto il momento di portare ad un livello superiore la nostra trattazione. I gruppi sono ubiquitari in matematica, e si presentano in varie forme in topologia i.e. gruppo fondamentale, gruppi di omologia, etc. In particolare l'argomento trattato ora, per quanto ‘fuori dal contesto’ generale, si ricollega a costruzioni utili nella teoria dei rivestimenti e rivestimenti universali (argomenti profondi che avranno collegamenti anche con la teoria di Galois, si veda etalé homology).

Definizione 4.51. Sia (X, τ) uno spazio topologico con $\cdot: X \times X \rightarrow X$ un operatore di gruppo su X .

Allora è un gruppo topologico se $x \cdot y^{-1}$ è una funzione continua.

Esempio 4.52.

1. \mathbb{R} con la topologia euclidea e l'addizione è un gruppo topologico.
2. \mathbb{Z}, \mathbb{Q} sono due sottogruppi normali di \mathbb{R} rispetto all'addizione.
3. $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ e i suoi sottogruppi sono gruppi topologici sconnessi rispetto al prodotto tra matrici.

Capitolo 5

Proprietà topologiche

Se esiste una categoria di proprietà che è fondamentale avere bene a mente in topologia, queste sono le proprietà topologiche. In sostanza diciamo **proprietà topologica** una caratteristica invariante per omeomorfismi; vedremo presto come applicarle allo studio della topologia generale che abbiamo appena completato.

5.1 Proprietà di Hausdorff T_2

5.1.1 La proprietà T_2

Definizione 5.1. Sia (X, τ) spazio topologico, è detto **di Hausdorff** (o T_2) se $\forall x, y, x \neq y$ esistono due intorni $U, V \in \mathcal{N}_\tau(x), \mathcal{N}_\tau(y)$ tali che $U \cap V = \emptyset$.

La proprietà di Hausdorff è detta T_2 , esistono anche T_0, T_1, T_3, T_4 , altre proprietà più deboli o più forti (a seconda della loro numerazione) di quella di Hausdorff.

La più forte, T_4 , richiede che in due insiemi chiusi disgiunti ogni intorno dei loro punti sia disgiunto e viene anche detta **normalità**. La più debole, T_1 , richiede che i sottoinsiemi singoletti di X siano chiusi.

Esistono interessanti relazioni tra le varie proprietà T_i , ad esempio T_2 implica T_1 ma l'inverso non vale.¹

Osservazione 5.2. La condizione di Hausdorff è topologica. Infatti è preservata dagli omeomorfismi:

(X, τ) è di Hausdorff se e solo se anche (Y, ξ) è di Hausdorff ed esiste $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ omeomorfismo tra i due spazi topologici

Se $x, y \in X$ e $x \neq y$, allora $f(x), f(y) \in Y$ e $f(x) \neq f(y)$ poiché f biettiva. Se esistono degli $U, V \in \mathcal{N}_\tau(x), \mathcal{N}_\tau(y)$ tali che $U \cap V = \emptyset$, esistono $A \subset U$ e $A' \subset V$ aperti tali che $A \cap A' = \emptyset$. Per cui $f(A) \cap f(A') = \emptyset$, dove $f(A), f(A')$ sono aperti ed intorni rispettivamente di $f(x), f(y)$. Quindi la proprietà vale. Inoltre applicando l'inversa si ottiene l'altra implicazione.

¹si veda un insieme X infinito con topologia cofinita, è immediato verificare che vale come controesempio.

Osservazione 5.3. Se (X, τ) è di Hausdorff, allora ogni topologia più fine $\tau \subset \xi$ è di Hausdorff su X .

Infatti a noi interessano soltanto gli aperti *più piccoli* e non quelli più grossi. Se ci sono aperti più piccoli e sappiamo che ce ne sono già di piccoli abbastanza affinché sia Hausdorff, non danno problema. Se ci sono aperti più grossi, non è interessante comunque, perché per la proprietà di Hausdorff ci servono solamente degli aperti “abbastanza piccoli”.

Se si volesse proprio fare una dimostrazione: sia $x \neq y$ allora $\tau \subset \xi$ per cui esistono in τ $U \cap V = \emptyset$ e quindi U, V sono ancora interni in ξ , pertanto anche ξ è di Hausdorff.

Osservazione 5.4. Sia (X, τ) spazio topologico, se per ogni $A, B \in \tau$ si ha che $A \cap B \neq \emptyset$ allora τ non è di Hausdorff.

Infatti per ogni coppia di interni U, V di x, y (rispettivamente) si ha che esistono $A \subset U, A' \subset V$ tali che $\emptyset \neq A \cap A' \subset U \cap V$

Esempio 5.5.

1. Le topologie metrizzabili sono *sempre* di Hausdorff, in particolare la topologia discreta lo è.
2. La topologia banale su un insieme X di cardinalità maggiore di 2 non è di Hausdorff (è elementare).
3. La topologia cofinita su un insieme infinito non è di Hausdorff. Per osservazione precedente, basta dimostrare che ogni aperto ha intersezione non vuota. Per cui siano

$$A \cap B = F^c \cap G^c = (F \cap G)^c$$

ma $F \cap G$ è finito quindi il complementare è non vuoto.

Teorema 5.6. Sia (X, τ) spazio topologico e sia $\emptyset \neq S \subset X$, allora se (X, τ) è di Hausdorff anche il sottospazio topologico $(S, \tau|_S)$ è di Hausdorff.

Dimostrazione. Fisso $x, y \in S \subset X$ qualsiasi, purché $x \neq y$. Allora prendendo un intorno per ciascun punto tale da soddisfare la condizione di Hausdorff; ho che $U \cap V = \emptyset$. Ma per caratterizzazione dei sottospazi di uno spazio topologico vale che esistono interni $U \cap S = U' \in \tau|_S$ e $V \cap S = V' \in \tau|_S$ e dunque se $U \cap V = \emptyset \implies U \cap V \cap S = U' \cap V' = \emptyset$. Ovvero anche la topologia $\tau|_S$ è di Hausdorff. \square

Teorema 5.7. Siano (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) spazio topologico e $(X_1 \times X_2, \tau)$ la topologia prodotto delle prime due.

Allora $(X_1 \times X_2, \tau)$ è di Hausdorff se e solo se (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) .

Dimostrazione.

1. Si fissino $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$. Allora $\{x_1\} \times X_2 \simeq X_2$ e sappiamo che è di Hausdorff per ipotesi, analogamente per $X_1 \times \{y_1\} \simeq X_1$ e quindi è di Hausdorff. Pertanto posso trovare un intorno $U \times \{y_1\} \cap U' \times \{y_1\} = \emptyset$

con $x_1 \in U$ e $x_2 \in U'$; analogamente $\{x_1\} \times V \cap \{x_1\} \times V' = \emptyset$ con $y_1 \in V$ e $y_2 \in V'$. Per la definizione di intorni ho degli aperti tali che

$$A \times B \cap A' \times B' \subset (U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V') = \emptyset$$

Ma $A \times B$ e $A' \times B'$ sono aperti di τ e dunque sono anche intorni dei due punti. Quindi ho trovato due intorni la cui intersezione è vuota. $X_1 \times X_2$ è di Hausdorff.

2. Fisso $\{x_1\} \subset X_1$, $\{x_2\} \subset X_2$ e considero $X_1 \times \{x_2\}$ e $\{x_1\} \times X_2$, per la proposizione precedente sono di Hausdorff e sono omeomorfi rispettivamente a X_1 e X_2 . Pertanto X_1 e X_2 sono di Hausdorff.

□

Osservazione 5.8. Se uno degli X_1 è di Hausdorff ed X_2 non è di Hausdorff, allora il loro prodotto non è di Hausdorff.

Per esempio si consideri il prodotto tra \mathbb{R} con la topologia euclidea e la topologia banale su \mathbb{R} . Allora il prodotto non è di Hausdorff perché $(1, 1)$ e $(1, 2)$ sono distinti ma stanno sempre nello stesso intorno.

Osservazione 5.9. In generale il passaggio a quoziente non è di Hausdorff anche se l'insieme di partenza è di Hausdorff.

Infatti si consideri il diagramma

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_{\text{euclidea}}) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_f) \\ \downarrow \pi & \nearrow \simeq & \\ (X/R, \tau_{X/R}) & & \end{array}$$

dove $f = \mathcal{X}_{[0,2]}$. La funzione induce (per quanto visto precedentemente) la topologia banale e quindi non è di Hausdorff malgrado la topologia euclidea sia Hausdorff.

Teorema 5.10. Sia $\{x_n\}$ una successione definita su (X, τ) spazio topologico di Hausdorff allora se converge lo può fare unicamente ad un solo punto.

Dimostrazione. È sempre la solita dimostrazione che in \mathbb{R} se il limite converge allora non può avere due valori distinti. Ma comunque la ripresento anche qui. Suppongo che una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \{k_1, k_2\}$, allora per definizione di convergenza in uno spazio topologico ho che per ogni intorno di k_1 c'è sempre almeno un punto della successione. Per cui prendo un intorno U di k_1 e uno V di k_2 tale che $U \cap V = \emptyset$ che esistono per la proprietà di Hausdorff. Se la successione converge in entrambi i punti allora deve valere definitivamente che $U \cap V \neq \emptyset$. Da questo assurdo si arriva a concludere che una successione, se converge, converge ad un solo punto in uno spazio di Hausdorff. □

5.1.2 La proprietà T_1

Definizione 5.11. Sia (X, τ) spazio topologico, allora si dice T_1 se i suoi singoletti sono chiusi.

Teorema 5.12. Se vale che (X, τ) soddisfa T_2 ovvero è di Hausdorff, allora è anche T_1 .

Dimostrazione. Devo dimostrare che per ogni $x \in X$, $\{x\}$ è un chiuso. Quindi mi basta dimostrare che $\{x\}^c$ è aperto. Per cui sia $y \in \{x\}^c$, per la proprietà di Hausdorff dev'essere che esiste $U \in \mathcal{N}_\tau(y)$ ho che $U \cap V = \emptyset$ dove V è un intorno di $\{x\}$. Per cui dev'essere che $U \subset \{x\}^c$ per qualche U intorno. Ovvero $\{x\}^c$ è intorno di tutti i suoi punti e quindi è un aperto e $\{x\}$ è un chiuso. \square

Osservazione 5.13 (T_1 proprietà topologica). Abbiamo appena dimostrato che la proprietà T_1 viene preservata dagli omeomorfismi. Questo è ovvio, l'omeomorfismo è una mappa aperta con inversa aperta.

Osservazione 5.14. Come visto la topologia cofinita su uno spazio X infinito induce una struttura di spazio T_1 ma non T_2 . L'implicazione inversa quindi in generale non è vera.

Teorema 5.15. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in (X, τ) spazio topologico di Hausdorff che soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora se $x \in X$ è un punto di accumulazione di $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esiste una sottosuccessione tale che $\{x_{n_k}\}_{n_k \in \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}} \rightarrow x$.

Osservazione 5.16. Sia (X, τ) spazio topologico che soddisfa T_1 , allora non vale che una successione converga ad un unico punto (in altre parole, la classe dei valori limite per successioni globalmente convergenti non è necessariamente costituita da un solo punto).

Teorema 5.17. Sia Δ_X l'insieme diagonale

$$\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X \text{ con } x = y\}$$

(il suo significato è ovvio, contiene quella che sarebbe la “diagonale” dell'insieme).

$$(X, \tau) \text{ è } T_2 \Leftrightarrow \Delta_X \text{ è chiuso in } X \times X$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che valga

$$U \cap V = \emptyset \Leftrightarrow \Delta_X \cap (U \times V) = \emptyset$$

(\Rightarrow) Poiché T_2 posso prendere $U, V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tali che $U \cap V = \emptyset$, allora $\Delta_X \cap (U \times V) = \emptyset$. Ovviamente otteniamo Δ_X^c è aperto in $X \times X$ e Δ_X è chiusa.

(\Leftarrow) Se Δ_X chiuso Δ_X^c è aperto, quindi posso prendere un intorno di un punto interno di Δ_X^c tale che $U \cap \Delta_X = \emptyset$. In particolare vale per un intorno nella forma $U = U' \times V'$ dove U', V' è in X , perciò $(U' \times V') \cap \Delta_X = \emptyset$. Per l'osservazione iniziale $U' \cap V' = \emptyset$.

\square

Teorema 5.18. Siano $f, g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \xi)$ continue, Y è T_2 allora $Z := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X .

Dimostrazione. Dimostriamo che il complementare di Z è aperto. Per cui sia $y \in Z^c$ allora dev'essere che $f(y) \neq g(y)$. Poiché quindi sono punti distinti e Y è di Hausdorff, esistono $U_{f(y)}, U_{g(y)}$ tali che $U_{f(y)} \cap U_{g(y)} = \emptyset$. Per la continuità delle funzioni f, g , esistono quindi degli intorno di y rispettivamente $V_{f,y}, V_{g,y}$ tali che $f(V_{f,y}) \subseteq U_{f(y)}$ e $g(V_{g,y}) \subseteq U_{g(y)}$. Per cui definiamo $V_y := V_{f,y} \cap V_{g,y}$. Per concludere dobbiamo osservare che V_y è un intorno di y e che effettivamente $V_y \cap Z = \emptyset$. Se esistesse $x \in V_y \cap Z$ allora $f(x) = g(x)$, ma sappiamo anche che $f(V_y) \cap g(V_y) = \emptyset$ da cui una contraddizione, dev'essere che l'intersezione è nulla. Pertanto Z^c è aperto e Z è chiuso. \square

5.2 Compattezza

5.2.1 Spazi e sottospazi compatti

Definizione 5.19. Sia (X, τ) spazio topologico, si dice **compatto** se da ogni ricoprimento aperto di X è possibile estrarre un sottoricoprimento aperto finito.

In altre parole, sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi aperti tali che

- $A_i \in \tau \ \forall i \in I$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = X$

allora posso estrarre un $J \subset I$ con $|J| < +\infty$ e $\bigcup_{i \in J} A_i = X$

Esempio 5.20. Spazi topologici compatti:

1. Ogni spazio con la topologia banale.
2. X finito con qualsiasi topologia è compatto.
3. (X, τ_{cof}) con $|X|$ infinita è compatto. Infatti da un qualsiasi ricoprimento si prenda uno degli aperti A_{i_0} , allora $X \setminus A_{i_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$ per qualche $n < +\infty$. Pertanto bastano al più $n + 1$ insiemi per ricoprire l'insieme.
4. $(X, \tau_{discreta})$ di cardinalità infinita non è compatto perché basta prendere il ricoprimento dei singoletti.
5. $(\mathbb{R}, \tau_{euclidea})$ non è compatto. Infatti basta prendere la famiglia $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ per vedere che non è compatto. Se si estraggono un numero finito di elementi da quella famiglia e si prendono gli indici in J tale che $|J| = d < +\infty$ allora $\bigcup_{j \in J} (-n_j, n_j) = (-\max_{j \in J} n_j, \max_{j \in J} n_j)$, una sottofamiglia che evidentemente non ricopre tutto \mathbb{R} .

Definizione 5.21. Sia (X, τ) spazio topologico e $S \in 2^X$ si dice che S è un **sottospazio compatto** in (X, τ) se lo è il corrispondente spazio $(S, \tau|_S)$.

Osservazione 5.22. S è compatto se e solo se ogni volta che prendo un ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$ in τ di S riesco a estrarre un sottoricoprimento finito tale che $\bigcup_{i \in J} A_i \supset S$

Dimostrazione. S è compatto se e solo se posso trovare un ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$ da cui estraggo un sotto ricoprimento finito $\{A_i\}_{i \in J}$, ma ciascuno di quegli

$A_i = A'_i \cap S$ per qualche $A'_i \in \tau$. Per cui ho che è anche un ricoprimento finito di S in τ , infatti sia $\{A'_i\}_{i \in J}$, vale

$$S = \bigcup_{i \in J} A_i = \bigcup_{i \in J} (A'_i \cap S) \subset \bigcup_{i \in J} A'_i$$

analogamente nell'altro verso si vede che si può prendere il ricoprimento aperto estrarre le parti significative e ottenere un nuovo ricoprimento nella sottotopologia. \square

5.2.2 Caratteristiche degli spazi compatti

Teorema 5.23 (Heine-Borel). Ogni intervallo chiuso e limitato in $[a, b]$ per ogni a, b tale che $a < b$ di \mathbb{R} con τ_{euclidea} è compatto.

Dimostrazione. Dato un ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$

$$Y := \left\{ x \in [a, b] \mid \exists J \subset I. \text{ t. c. } |J| < +\infty, \bigcup_{j \in J} A_j \supset [a, x] \right\}$$

È ovvio che $a \in Y$, per cui $Y \neq \emptyset$ ed essendo $Y \subset \mathbb{R}$ allora (siccome è raggiungibile per successioni) esiste $\sup Y =: z$.

Poiché $z \in [a, b]$ e l'intervallo è ricoperto dagli A_i , deve esistere un A_k tale che $z \in [z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subset A_k$ per qualche $\varepsilon > 0$, visto che A_i aperto. Inoltre per la definizione di estremo superiore so che per qualsiasi ε esiste un x tale che $x \in [z - \varepsilon, z] \cap Y$.

Sia J l'insieme finito che indicizza il ricoprimento di $[a, x]$, posso costruire il seguente ricoprimento:

$$[a, z + \varepsilon] \subset \bigcup_{j \in J \cup \{k\}} A_j$$

Segue ovviamente che $z = b$, infatti se non lo fosse allora non potrebbe essere l'estremo superiore di Y visto che ho appena ottenuto un sottoricoprimento finito. Inoltre il ricoprimento ottenuto contiene $z = b$. $[a, b]$ è compatto. \square

Osservazione 5.24. Esistono spazi topologici compatti che possiedono sottoinsiemi non compatti. Per esempio si prenda $([a, b], \tau_{\text{euclidea}})$; il sottoinsieme $[0, 1)$ è un insieme non compatto, si pensi al ricoprimento degli $[0, 1 - \frac{1}{n})$ per $n \geq 2$.

Teorema 5.25.

1. Un sottoinsieme S chiuso in (X, τ) spazio topologico compatto S è compatto.
2. Un sottoinsieme compatto S in uno spazio topologico di Hausdorff (X, τ) è chiuso.

Dimostrazione.

1. Si noti che se S è chiuso allora S^c è aperto. Quindi prendo un ricoprimento di S^c aperto in $\tau|_S$ che denoto con $\{A_i\}_{i \in I}$ se aggiungo a questo ricoprimento S allora considero $\{A'_i \cup S^c\}_{i \in I}$ dove $A_i = A'_i \cap S$ e $A'_i \in \tau$. Per cui questo è un ricoprimento aperto di (X, τ) . Per la compattezza posso estrarre un sottoricoprimento finito tale da ricoprire tutto X che sarà costituito da elementi $\{A'_j \cup S^c\}_{j \in J}$ dove $|J| < +\infty$. Ovviamente vale

$$S \subset \bigcup_{j \in J} A'_j \cup S^c \implies S = S \cap S \subset \bigcup_{j \in J} (A'_j \cup S^c) \cap S = \bigcup_{j \in J} A'_j \cap S$$

dove gli $A'_j \cap S \in \tau|_S$ e quindi ho trovato un sottoricoprimento finito aperto di S .

2. Voglio far vedere che ogni $p \in S^c$ ha come intorno S^c e dunque affermare che S è chiuso in τ . Per cui fissato un $p \in S^c$, per ogni $x \in S$ esistono due intorni $U_x, V_x \in \mathcal{N}_\tau(x), \mathcal{N}_\tau(p)$ tali che $U_x \cap V_x = \emptyset$ (poiché X è di Hausdorff). Per cui dato un U_x posso scegliere $x \in A_x \subset U_x$ per definizione di intorno e, tale che $A_x \cap V_x = \emptyset$. Prendendo tutti questi A_x , una volta fissato un $p \in S^c$, si può ottenere un ricoprimento aperto di S , rappresentato dalla famiglia $\{A_x\}_{x \in S}$.

Essendo S compatto posso estrarre un sottoricoprimento aperto finito $\{A_{x_j}\}_{j \in J}$ dove $|J| < +\infty$, così da ottenere rispettivamente una famiglia di intorni di p finita (infatti per le osservazioni precedenti per ogni U_x esisteva un V_x). Prendendo il minimo tra questi intorni, ovvero la loro intersezione finita che denoto con V , si ottiene ancora un intorno con $p \in V \subset S^c$. Poiché vale per ogni $p \in S^c$ ho dimostrato che S^c è intorno di ogni suo punto e quindi $S^c \in \tau$.

□

Osservazione 5.26. Se siamo in uno spazio topologico compatto ma non T_2 , per esempio (\mathbb{R}, τ_{cof}) , allora un suo sottoinsieme compatto non è anche chiuso. Infatti se si prende $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ nella topologia cofinita questo è compatto, ma non è chiuso (se fosse chiuso allora $\# [0, 1] < +\infty$, che è falso)

Corollario 5.27. Sia $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ in $(\mathbb{R}, \tau_{euclidea})$. S è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione.

- (\implies) Poiché S compatto allora è chiuso perché siamo in \mathbb{R} che è T_2 . Inoltre supponiamo S illimitato, allora vale $(-n, n) \cap S \neq S$ per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$. Quindi posso prendere il ricoprimento $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ che ricopre tutto \mathbb{R} , ma per quanto osservato precedentemente non esiste un ricoprimento finito tale da ricoprire S .
- (\impliedby) Essendo limitato deve esistere $S \subset [a, b]$. Quindi $[a, b] \cap S$ è chiuso perché intersezione di chiusi. Ma $[a, b]$ è un compatto per Heine-Borel, e per il lemma precedente un chiuso in un compatto è ancora un compatto, ovvero S dev'essere compatto.

□

Teorema 5.28 (L'immagine di un compatto è compatta). Siano (X, τ) spazio topologico compatto, (Y, ξ) spazio topologico, $f: X \rightarrow Y$ continua. Allora $f(X)$ è un sottoinsieme compatto.

Dimostrazione. Si consideri un ricoprimento aperto di $f(X)$ indicato con $\{A_i\}_{i \in I}$. Allora visto che i suoi elementi sono tutti aperti segue che $f^{-1}(A_i) \in \tau$. Poiché $f(X)$ è l'immagine di X attraverso f , dev'essere che la controimmagine del ricoprimento sia proprio X . Ma X è un compatto, quindi dato un suo ricoprimento aperto, in questo caso sarà $\{f^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$, posso estrarne uno finito che dico $\{f^{-1}(A_j)\}_{j \in J}$ dove $J \subset I$ e $|J| < +\infty$. Rimandando in avanti le controimmagini (ricordando che l'immagine commuta con l'unione!) risulta che

$$X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j) \implies f(X) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(A_j)) \subset \bigcup_{j \in J} A_j$$

e quindi ho trovato un sottoricoprimento aperto e finito di $f(X)$. \square

Corollario 5.29 (Weierstrass). Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $f(X)$ ammette massimo e minimo in X .

Dimostrazione. $f(X)$ compatto, quindi $f(X)$ è un insieme chiuso e limitato per cui deve contenere massimo e minimo. \square

Teorema 5.30 (Tychonoff). Lo spazio topologico $X_1 \times X_2$ è compatto se e solo se X_1, X_2 sono compatti.

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Se $X_1 \times X_2$ è compatto e π_1, π_2 sono le proiezioni canoniche, allora per la continuità segue che $\pi_i(X_1 \times X_2)$ dev'essere compatto e per la surgettività $\pi_i(X_1 \times X_2) = X_i$; segue che X_i è compatto per $i \in \{1, 2\}$.

(\Leftarrow) Sia $\{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento di $X_1 \times X_2$, allora vale (per quanto visto in precedenza) che $U_j = \bigcup_{h \in H_j} V_h \times W_h$ (dove $V_h \in \tau_1$ e $W_h \in \tau_2$). Sapendo che $\{x\} \times X_2 \simeq X_2$ per ogni $x \in X_1$, dev'essere che anche $\{x\} \times X_2$ è compatto. In particolare ho che

$$\{x\} \times X_2 \subset \bigcup_{h \in h(x)} V_h \times W_h \quad (5.1)$$

dove $h(x) \subset H$, per cui vale la relazione sopra ed $h(x)$ è ovviamente finito (posso verificarlo per la compattezza di X_2). Si può osservare che (per costruzione) per ogni $h \in h(x)$ deve valere $x \in V_h$, e quindi definisco per ogni $x \in X_1$ il seguente intorno di x

$$V(x) = \bigcap_{h \in h(x)} V_h$$

con $V(x) \in \tau_1$ poiché intersezione finita di aperti. Inoltre essendo

$$\bigcup_{x \in X_1} V(x) = X_1$$

posso estrarre un sottoricoprimento di $V(x)$ finito. A maggior ragione allora dev'essere che

$$\bigcup_{x \in X_1} \bigcup_{h \in h(x)} V_h = X_1$$

quindi posso prendere $\{V_x\}_{x \in X_1}$ come ricoprimento e ottenere un sottoricoprimento finito aperto $V(x_1), \dots, V(x_n)$ di X_1 .

Per costruzione quindi posso estrarre un sottoricoprimento aperto finito

$$\bigcup_{x \in \{1, \dots, n\}} \bigcup_{h \in h(x)} V(x) \times W_h$$

□

Corollario 5.31. Un sottoinsieme di $S \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione. Si svolge esattamente come visto in precedenza: se è compatto allora è chiuso perché in uno spazio T_2 , inoltre se fosse illimitato non potrei estrarre un sottoricoprimento finito dal ricoprimento delle palle aperte di centro 0 e raggio n .

Inoltre se è chiuso e limitato vuol dire che è contenuto in un insieme del tipo $[-R, R]^n$ per $R > 0$, che è chiuso in un compatto quindi compatto (e lo stesso vale per S). □

Teorema 5.32. $f: X \rightarrow Y$ continua con (X, τ) compatto e (Y, ξ) di Hausdorff. Allora f è chiusa.

In particolare se f è biettiva allora è un omeomorfismo.

Dimostrazione. Se fisso C chiuso in (X, τ) , allora C è compatto, quindi $f|_C(C)$ è un compatto e siccome il codominio è di Hausdorff dev'essere che $f|_C(C)$ è anche chiuso. La seconda parte è banale per caratterizzazioni precedenti. □

Corollario 5.33. Sia (X, τ) spazio topologico compatto, (X', τ') di Hausdorff e R relazione di equivalenza su X . Se esiste $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ continua e surgettiva allora esiste una mappa g omeomorfismo tra $(X/R, \tau_{X/R})$ e (X', τ') .

Dimostrazione. È ovvio, ma volevo sembrare saccente, quindi ecco una dimostrazione. Riprendendo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (X', \tau') \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! g & \\ (X/R_f, \tau_{X/R_f}) & & \end{array}$$

sappiamo che esiste g biettiva. Ma dalle condizioni sopra sappiamo anche che (X, τ) è compatto e poiché π è continua anche X/R_f è compatto. Per cui g è da un compatto ad uno spazio di Hausdorff, e applicando il teorema sopra a g otteniamo un omeomorfismo. □

5.3 Connessione

5.3.1 Spazi topologici connessi

Definizione 5.34. Sia (X, τ) spazio topologico, si dice **connesso** se gli unici aperti e chiusi in τ sono \emptyset, X .

Si dice che (X, τ) è sconnesso se non è connesso.

Definizione 5.35. Sia $S \subset X$, diciamo che S è **connesso in** (X, τ) se $(S, \tau|_S)$ è un sottospazio topologico connesso.

Teorema 5.36. Dato (X, τ) spazio topologico, le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. (X, τ) è sconnesso.
2. $\exists A, B \in \tau$ tale che $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.
3. $\exists A, B$ chiusi tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$.

Dimostrazione. È facile vedere che la condizione 1 implica sia 2, 3 visto che esiste un insieme sia aperto che chiuso. Analogamente per le dimostrazioni $2, 3 \Rightarrow 1$ che sono praticamente uguali, basta cambiare la parola aperto con chiuso.

- (1 \Rightarrow 2, 3) Se vale che è sconnesso allora esiste A aperto e chiuso, allora posso prendere A^c che è ancora aperto; quindi $A \cup A^c = X$, analogamente per A chiusa.
- (2 \Rightarrow 1) Si prende $A \cup B = X$, allora $B = A^c$ con B ancora aperto, quindi esiste A aperto e chiuso.

□

Esempio 5.37.

1. $(X, \tau_{\text{discreta}})$ con $|X| \geq 2$ allora ogni suo sottoinsieme è sconnesso.
2. $(X, \tau_{\text{banale}})$ è sempre connesso.
3. $(\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}})$, $x \in \mathbb{R}$; vediamo che $(\mathbb{R}, \tau_{\text{euclidea}})$ meno un punto è sconnesso. Infatti $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ si può comporre con $(-\infty, x) \cup (x, +\infty)$ che sono sottoinsiemi disgiunti aperti e non vuoti.
4. Sia $|X| > +\infty$ allora (X, τ_{cof}) è connesso basta vedere che i chiusi sono tutti finiti quindi non si può ricoprire X con insiemi chiusi disgiunti.

Definizione 5.38. Sia $S \subset \mathbb{R}$, si dice **convesso** se per ogni $a, b \in S$ tali che $a \leq b$ vale che se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ allora $c \in S$.

Teorema 5.39. I sottoinsiemi convessi non vuoti della retta reale sono tutti e soli gli intervalli (di ogni tipo).

Dimostrazione. Studiamo il caso in cui gli intervalli abbiano forma $S = [a, b]$; si noti che i casi degli intervalli di altra forma sono perfettamente analoghi.

$$S \text{ connesso} \iff S = [a, b] \text{ (intervallo)}$$

Sia S un sottoinsieme convesso della retta reale, ammette un elemento massimo ed un elemento minimo, inoltre siccome è convesso contiene tutti gli elementi tra a e b , quindi è ovviamente un intervallo.

Sia invece S un generico intervallo $S = [a, b]$, allora rispetta palesemente la definizione di convesso.

Questa dimostrazione vale **solo nel caso di a e b non infiniti**, ma è facilmente generalizzabile: se uno dei due fosse infinito userei l'ipotesi di connessione in modo molto interessante, infatti dovrei dimostrare che "l'intervallo (I) vive nel connesso S " e viceversa, quindi che I intervallo è esattamente il connesso. \square

Teorema 5.40. I connessi di \mathbb{R} sono tutti e soli gli insiemi convessi.

Dimostrazione. Sia $J \subset \mathbb{R}$ convesso e supponiamo che sia sconnesso. Allora esistono A, B chiusi in τ , disgiunti e non banali, tali che $A \cap J \cup B \cap J = J$. Possiamo scegliere $a \in A \cap J$ e $b \in B \cap J$ con $a < b$ e per la convessità di J deve essere che $[a, b] \subset J \subset A \cup B$. Considero $\sup [a, b] \cap A = x_0$ che esiste perché l'intersezione è non vuota. Inoltre $x_0 \in A$ poiché A insieme chiuso. Quindi $x_0 \notin B$ e anche $x_0 \neq b$. Ma

$$(x_0, b] \subset [a, b] \setminus A \subset J \setminus A = J \setminus (A \cap J) = B$$

chiudendo $\overline{(x_0, b]} = [x_0, b] \subset \overline{B} = B$ poiché B è chiuso. Pertanto dev'essere che anche $x_0 \in B$. Allora non è vero che A, B disgiunti visto che $x_0 \in A \cap B$. Da questo assurdo si deriva che J è per forza connesso.

Sia S connesso, allora è anche convesso in \mathbb{R} . Se S non fosse convesso: esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $a < c < b$ con $a, b \in S$ e $c \notin S$. Allora basta prendere $((-\infty, c) \cap S), ((c, +\infty) \cap S)$ come ricoprimento aperto disgiunto e quindi S sarebbe sconnesso, che è un assurdo. \square

Teorema 5.41. Siano $f: X \rightarrow Y$ applicazione continua tra spazi topologici e C insieme connesso di X , allora $f(C)$ è connesso.

Dimostrazione. Se si restringe f a $f|_C: C \rightarrow f(C)$ questa è ancora continua, ma è anche suriettiva e C è connesso. Pertanto possiamo lavorare con le ulteriori condizioni che il dominio sia connesso e f suriettiva. Supponiamo che $f(C)$ sconnesso allora esistono due aperti $A, B \subset C$ disgiunti e non vuoti tali da ricoprire $f(C)$. Prendendo le controimmagini (ancora aperte perché continue), allora

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(C) = C$$

ma $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \neq \emptyset$ perché f suriettiva, le fibre non si toccano perché è una funzione e quindi $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Per cui C dev'essere sconnesso contro la nostra ipotesi. Dev'essere quindi che anche $f(C)$ sia connesso. \square

Corollario 5.42. La connessione è una proprietà topologica.

Infatti se $X \simeq Y$ allora X è connesso se e solo Y è connesso.

Corollario 5.43. Sia X spazio topologico con R relazione di equivalenza, X/R è connesso se X è connesso poiché $\pi: X \rightarrow X/R$

Definizione 5.44. Sia (X, τ) spazio topologico e siano $x, y \in X$, si dicono **connessi x, y in (X, τ)** se esiste $S \subset X$ tale che è connesso e $x, y \in S$.

Teorema 5.45. L'unione di due insiemi connessi che si intersecano è di nuovo un insieme connesso. Di conseguenza (per induzione) questo vale per l'unione numerabile.

Dimostrazione. Siano x, y connessi attraverso A (vuol dire che sono elementi dell'insieme connesso) e y, z connessi attraverso l'insieme B , in sostanza posso modificare l'enunciato in “ x e z sono connessi attraverso $A \cup B$ ”. Capiremo in seguito il motivo di questo cambio di enunciato.

Sia $Y \subset A \cup B$ aperto e chiuso tale che $Y \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} Y \subset A \cup B &\implies Y \cap (A \cup B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \neq \emptyset \\ &\implies Y \cap A \neq \emptyset \text{ oppure } Y \cap B \neq \emptyset \end{aligned}$$

Sia $Y \cap A \neq \emptyset$. Allora $Y \cap A$ è ancora aperto e chiuso poiché Y aperto e chiuso nella topologia superiore. Ma A è connesso, quindi dev'essere che $Y \cap A = A$ e dunque $A \subset Y$. Inoltre visto che $y \in A \cap B$, l'intersezione è non vuota e dev'essere che anche $Y \cap B \neq \emptyset$. Applicando un ragionamento analogo a quanto visto per A , segue che $B \subset Y$. Per cui $Y = A \cup B$, ovvero gli unici aperti e chiusi nella topologia indotta su $A \cup B$ sono o tutto l'insieme o l'insieme vuoto. $A \cup B$ è connesso. \square

Corollario 5.46 (Connessione come relazione di equivalenza). La relazione di connessione in (X, τ) è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che è riflessiva, simmetrica e transitiva.

1. L'insieme $\{x\}$ è sempre connesso quindi x è connesso con se stesso.
2. L'insieme che connette x, y connette anche y, x visto che agli insiemi non “importa” l'ordine.
3. La transitività è l'unica che richiede uno sforzo: siano x, y connessi attraverso A e y, z connessi attraverso l'insieme B ; se mostriamo che $A \cup B$ è connesso, x è connesso con z , ma questo è vero per il teorema.

\square

Definizione 5.47 (Componenti connesse). Dato (X, τ) con R relazione di equivalenza di connessione, le R -classi di equivalenza si dicono **componenti connesse di (X, τ)** .

Osservazione 5.48. A livello intuitivo la *componente connessa* di un $x \in X$ è il più grande connesso contenente x ; si potrebbe dire che quando un “clopen” (insieme sia aperto che chiuso) incontra un connesso “se lo mangia tutto”.

Teorema 5.49. (X, τ) spazio topologico è connesso se e solo se $\forall x, y \in X$, x è connesso con y .

Dimostrazione.

1. Se X connesso allora per ogni $x, y \in X$, X li contiene e sono quindi connessi.

2. Sia $\emptyset \neq A$ e tale che $A \subset X$. Se $A \neq X$, esiste $y \in A^c$ e siccome ogni x, y sono connessi allora deve esistere S tale che connette almeno un punto di A con y . Ma per quanto visto prima A deve per forza contenere anche S e quindi $y \in A$ contro l'ipotesi che $y \notin A$. Quindi $A = X$ e dunque X è connesso.

□

Teorema 5.50. Sia X spazio topologico, $Y, Z \subset X$ ed $Y \subset Z \subset \overline{Y}$. Allora se Y è connesso anche Z lo è.

In particolare \overline{Y} è connesso.

Dimostrazione. Sia $S \subset Z$ tale da essere aperto e chiuso in Z , diverso dal vuoto e da tutto l'insieme Z .

Devono esistere un aperto A ed un chiuso C (entrambi in \overline{Y}) con $A \cap Z = S$ ed anche $C \cap Z = S$. Siccome S è sia aperto che chiuso, per la teoria svolta sappiamo che $S \cap Y$ può essere solo il vuoto o tutto l'insieme Y .

Supponiamo che sia il vuoto, ma allora

$$S \cap Y = (Z \cap A) \cap Y = A \cap Y = A \cap \overline{Y} = \emptyset$$

e questo implica che $A \cap Z = \emptyset$.

Sia invece l'intersezione pari a tutto Y , allora

$$(Z \cap C) \cap Y = Y \cap C \implies Y \subset C \implies \overline{Y} \subset C$$

□

Teorema 5.51. Sia X spazio topologico e siano $X_i \subset X$ connessi tali che $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, allora $\bigcup_{i \in I} X_i$ è un connesso.

Dimostrazione. Poiché l'intersezione è non vuota, sia $x \in X_i$ per ogni $i \in I$. Quindi per ogni coppia di punti $x_i \in X_i$ esiste un connesso tra x e x_i e tra x e x_j per ogni i, j . Dato che è una relazione di equivalenza deve esistere un connesso tale per cui x_i e x_j sono connessi. Poiché ogni coppia di punti dell'insieme sono connessi, segue che $\bigcup_{i \in I} X_i$ è connesso. \square

Teorema 5.52. X ed Y spazi topologici sono connessi se e solo se il loro prodotto topologico $X \times Y$ è connesso.

Dimostrazione. Ovviamente se $X \times Y$ è connesso basta applicare la proiezione, che è una mappa continua.

Passiamo all'implicazione inversa, fisso due punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ in $X \times Y$. Allora noto che $X \times \{y_1\} \simeq X$ e quindi è connesso, pertanto (x_1, y_1) dev'essere connesso a (x_2, y_1) (in realtà si ottiene di più, ovvero che ogni (x_i, y_1) è connesso a un (x_j, y_1) per qualsiasi i, j). Facendo lo stesso ragionamento su Y si ottiene che (x_2, y_1) è connesso a (x_2, y_2) .

Pertanto si conclude che (x_1, y_1) è connesso a (x_2, y_2) per ogni coppia di punti di $X \times Y$, cioè che $X \times Y$ è connesso. \square

5.3.2 Connessione per archi

In generale è più comodo valutare la *connessione per archi* rispetto alla connessione, sotto un certo punto di vista è una proprietà più forte, ma è molto più facile verificarla nella pratica.

Definizione 5.53. Sia X spazio topologico. Si dice che è **connesso per archi** se per ogni $x, y \in X$ esiste un'applicazione continua $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Questa funzione si dice **arco**.

Teorema 5.54. Se X è connesso per archi, allora è connesso.

Dimostrazione. Sapendo che è connesso per archi, esiste per ogni $x, y \in X$ una funzione che connette x con y . In particolare $[0, 1]$ è connesso in \mathbb{R} , quindi $\text{Im } \alpha$ è un connesso per Teorema 5.41. Esiste sempre un connesso che connette qualsiasi $x, y \in X$ e per la caratterizzazione Teorema 5.49, segue che X è connesso. \square

Osservazione 5.55. In generale non vale che se uno spazio topologico (X, τ) è connesso allora è anche connesso per archi. Per mostrare che ciò non è valido in generale, possiamo controllare i seguenti controesempi:

Pettine del topologo

Si veda la Figura 5.1 che descrive lo spazio topologico D sotto composta da tre principali componenti.

$$D = \{0\} \times \{0, 1\} \cup [0, 1] \times \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1]$$

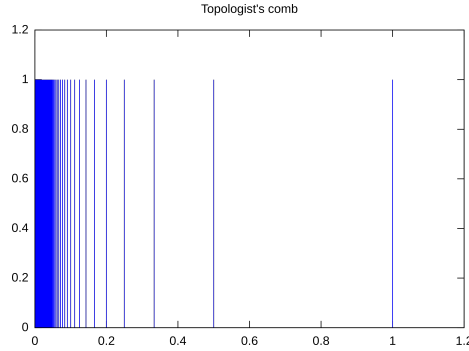


Figura 5.1: Visualizzazione del pettine del topologo

Possiamo osservare che questo spazio è connesso. È ovvio che $D \setminus \{(0, 1)\}$ è connesso per archi e quindi è connesso, pertanto se fosse sconnesso le componenti sarebbero $(0, 1)$ e $D \setminus \{(0, 1)\}$. Ma $\overline{D \setminus \{(0, 1)\}} \cap \{(0, 1)\} \neq \emptyset$ e quindi tutto D è connesso.

D'altro canto D non è connesso per archi. Consideriamo f funzione continua che connette $(0, 1)$ a $(0, 0)$, con $f(0) = (0, 1)$. Mostriamo che $f^{-1}(D)$ è sconnesso, da cui per assurdo si arriva che $[0, 1]$ è sconnesso. Allora vediamo che $f^{-1}(\{0\})$ è chiuso per definizione (un punto è chiuso e la controimmagine di un chiuso è chiuso se la mappa è continua). Per cui dobbiamo far vedere che $f^{-1}(\{(0, 1)\})$ è aperto. Prendiamo un intorno di $(0, 1)$ che chiameremo $U \subset D$ tale da non intersecare l'asse delle ascisse e lo supponiamo tale che $f^{-1}(U)$ è connesso. Allora poiché U non interseca l'asse delle ascisse, dev'essere che $x \in V$ tale da essere della forma $x = (1/n, k)$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e $k \in (0, 1]$. Osserviamo che ogni intorno contiene almeno un elemento di questa forma (perché sappiamo che si 'accumulano' su $(0, 1)$). Per cui sia $x \neq (0, 1)$ allora $x = (1/n, k) \in U$ per cui possiamo trovare $1/n + 1 < r < 1/n$ per cui possiamo vedere che la controimmagine di U si può separare nei seguenti insiemi disgiunti

$$f^{-1}(U) = f^{-1}((-\infty, r) \times [0, 1]) \cup f^{-1}((r, +\infty) \times [0, 1])$$

Pertanto possiamo dire che U è sconnesso contro la nostra ipotesi di connessione. Risulta quindi che $f^{-1}((0, 1))$ è aperto e chiuso, ma $[0, 1]$ è ovviamente connesso da cui dev'essere che $\{(0, 1)\}$ non è connesso per archi a $\{(0, 0)\}$.

Seno del topologo

Consideriamo la funzione reale

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

allora possiamo vedere in modo simile al pettine del topologo che l'immagine della funzione è connessa, ma il punto $(0, 0)$ non è connesso per archi a nessun altro punto del grafo. Infatti se esistesse una funzione continua che collega le due parti del grafico avrebbe limite $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = [-1, 1]$ e quindi non può essere continua in 0.

Capitolo 6

Esempi

6.1 Alcune varianti di topologie su \mathbb{R}

6.1.1 Caratteristiche degli spazi compatti

Definizione 6.1. D'ora in poi sia $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ una base tale da generare la topologia τ_j sull'insieme \mathbb{R} .

Teorema 6.2. La topologia τ_j generata dalla base $\mathcal{B} := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ è strettamente più fine della topologia euclidea.

Dimostrazione. Ogni aperto di τ_{euclidea} è contenuto in τ_j . Infatti sia $(a, b) \in \tau_{\text{euclidea}}$ allora prendo

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b \right)$$

Ma l'aperto della $[0, 1) \in \tau_j$ non appartiene a τ_{euclidea} poiché non è della forma (a, b) .

Segue che τ_j è strettamente più fine di τ_{euclidea} . \square

Allora valgono alcune proprietà già viste nei precedenti capitoli, tra cui il fatto di non avere basi numerabili, avere sistemi di intorno numerabili, essere più fine della topologia euclidea standard, ed altro come vedremo in questa sezione.

Teorema 6.3. Le seguenti affermazioni sono vere in τ_j .

1. L'intervallo $[0, 1]$ è un chiuso in τ_j .
2. La funzione $f: x \mapsto -x$ non è continua in τ_j .

Dimostrazione.

1. Per dimostrare la chiusura bisogna far vedere che $[0, 1]^c$ sia aperto. Ma questo è abbastanza facile. Infatti $[0, 1]^c = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, osserviamo

che

$$\begin{aligned}(-\infty, 0) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-n, \frac{1}{n+1} \right) \\ (1, +\infty) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 + \frac{1}{n+1}, n+2 \right)\end{aligned}$$

per cui risulta che $[0, 1]$ è un chiuso.

2. La funzione è ovviamente non continua, infatti si consideri l'aperto $[0, 1)$, la sua controimmagine attraverso f è $(-1, 0]$ che non è aperto.

□

Teorema 6.4. L'insieme $\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$ è una base su \mathbb{R} e la topologia generata è quella discreta.

Dimostrazione. Dimostro che \mathcal{B} è un ricoprimento di \mathbb{R} . Infatti basta prendere $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n]$. Inoltre se interseco due chiusi nella topologia euclidea è ancora un chiuso quindi ho la stessa cosa qui. Per cui \mathcal{B} è una base.

È ovvio che tutti i singoletti di \mathbb{R} sono contenuti in \mathcal{B} quindi $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ dove \mathcal{C} genera la topologia discreta e poiché è la più fine dev'essere che anche \mathcal{B} generi la topologia discreta su \mathbb{R} . □

6.1.2 Un breve esercizio

Esempio 6.5. Definito l'insieme

$$\mathcal{B} = \{A \in 2^{\mathbb{R}} \mid 0 \notin A\} \cup \{A \in 2^{\mathbb{R}} \mid 0 \in A, \mathbb{R} \setminus A \text{ finito}\}$$

calcolare la chiusura di $J = [1, 2] \times \{0\}$.

È ovvio dimostrare che l'insieme oltre ad essere una base è anche una topologia.

Inoltre vale $\overline{J} = \overline{\{0\}} \times \overline{[1, 2]}$, quindi posso separare i casi in una topologia \mathcal{B} . Vediamo che $\{0\} = \{0\}$ per la definizione della topologia, $[1, 2]$ è aperto e $[1, 2] \cup \{0\}$ è chiuso (perché il complementare è aperto).

Segue che $\overline{[1, 2]} = [1, 2] \cup \{0\}$. Quindi ho trovato \overline{J} .

6.2 Topologia di Zariski e gli insiemi algebrici

6.2.1 Una topologia aliena in un mondo noto

Definizione 6.6. Si definisce topologia di Zariski su \mathbb{R}^n la topologia generata dall'insieme dei chiusi

$$\mathcal{F} := \{C \in 2^{\mathbb{R}^n} \mid C \text{ insieme algebrico}\}$$

Teorema 6.7. Gli insiemi algebrici formano una famiglia di chiusi che generano una topologia per \mathbb{R} .

Dimostrazione.

1. I polinomi $f(x) = 0$ e $f(x) = 1$ danno come soluzioni rispettivamente gli insiemi \mathbb{R}, \emptyset .
2. Bisogna dimostrare che l'intersezione di insiemi algebrici è ancora un insieme algebrico. Poiché tutti gli insiemi algebrici in \mathbb{R} sono tutti finiti¹ tranne \mathbb{R} , l'intersezione di insiemi finiti sarà un insieme finito, per cui posso enumerare le soluzioni $\{x_1, \dots, x_n\}$ e quindi generare il polinomio $f(z) = (z - x_1) \cdots (z - x_n)$. Se l'intersezione è infinita è algebrico perché è \mathbb{R} .
3. L'unione agisce in modo più prevedibile. Infatti se F_1, \dots, F_n sono algebrici allora esistono f_1, \dots, f_n che li generano. Per cui $f = f_1 \cdots f_n$ è il polinomio che genera $F_1 \cup \dots \cup F_n$.

□

Teorema 6.8. Gli insiemi algebrici formano una topologia su \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Analogamente alla dimostrazione in \mathbb{R} si dimostra che

1. I polinomi $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ e $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ danno come soluzioni rispettivamente gli insiemi \mathbb{R}^n, \emptyset .
2. Siano F_1, \dots, F_n insiemi algebrici allora esistono f_1, \dots, f_n che li generano. Per cui $f = f_1 \cdots f_n$ è il polinomio che genera $F_1 \cup \dots \cup F_n$.
3. Questa parte è meno banale. Userò la notazione tratta dal libro W. Fulton, Algebraic Curves. Dimostro innanzitutto che se $\{I_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ dove I_i è un ideale di $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$ per ogni i , allora

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} I_i = I$$

dove I è un ideale di $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Poiché siamo in un anello Noetheriano I , questo è un ideale per qualsiasi insieme indicizzante \mathcal{I} . Per cui

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} V(I_i) = V\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} I_i\right) = V(I)$$

e poiché I è un ideale ho anche che $V(I)$ è un insieme algebrico per definizione.³

□

¹Supponi che $X \neq \mathbb{R}$ sia algebrico e infinito allora esiste un polinomio che ha $\deg(f) \geq |X|$ ma i polinomi non possono avere grado infinito, assurdo.

²questo anello è **Noetheriano** poiché \mathbb{R} è un campo.

³dal punto di vista della notazione $A_i = V(I_i)$ sta ad indicare che l'insieme algebrico A_i è l'insieme delle soluzioni dell'ideale I_i , visto che ogni insieme algebrico è generato da almeno un ideale di polinomi

6.3 Esempio di quoziente

6.3.1 Brevi esempi di quoziente topologico

Teorema 6.9. Si consideri $[0, 1]$ con topologia euclidea indotta, dimostrare che $([0, 1]/R, \tau_{\text{euclidea}}|_{[0, 1]/R}) \simeq (S^1, \tau_{\text{euclidea}}|_{S^1})$ dove R è la relazione che associa $xRy \Leftrightarrow x = y \vee |x - y| = 1$

Dimostrazione. Possiamo usare uno dei corollari (come il *primo teorema di omeomorfismo*) costruiti negli spazi quozienti. Per cui ci basta trovare un'identificazione $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ e la scelta più naturale ricade su

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

che è suriettiva, continua sulla topologia euclidea e vale $f^{-1}f(x) = [x]_R$. Meno banale è dimostrare che $\tau_f = \tau_{\text{euclidea}}|_{S^1}$. Usando il teorema 5.33 \square

Esempio 6.10. Nella retta euclidea (retta reale con topologia euclidea) trovare una relazione di equivalenza che renda la proiezione a quoziente non aperta e non chiusa.

Dimostrazione. Sia definita la seguente relazione di equivalenza:

$$xRy \iff x, y \in A = [0, 1) \text{ oppure } x = y$$

Studiamo le R -classi di equivalenza: queste sono l'insieme A e tutti i punti non contenuti in A .

Allora la mappa è aperta? No, scegliamo un aperto per dimostrarlo. Potremmo prenderlo in modo abbastanza vario, ma un metodo intelligente è sfruttare il modo in cui abbiamo definito A . Sappiamo che gli insiemi in arrivo devono essere π -saturati (con π proiezione a quoziente), in altre parole dato un insieme U dobbiamo considerare tutte le fibre che interseca per proiettarlo a quoziente. Sia $U = (0, 1)$, questo è ovviamente aperto nella topologia euclidea ed è contenuto in A . Quindi la sua saturazione è A , viene mandato in un insieme in arrivo non aperto e non chiuso.

Evidentemente possiamo ripetere il procedimento con un chiuso contenuto in A ed otteniamo lo stesso risultato.

Se l'insieme non fosse contenuto in A ? Sia ad esempio $(0, 3)$. La sua saturazione è palesemente $[0, 3)$ perché interseca A e tutti i singoletti non in A . A meno di non prendere insiemi "esagerati" del tipo $(-10, 10)$ questo ragionamento continua a valere.

Se proprio ci tenete altrimenti basta allargare A . \square

6.4 Discriminazione di topologie

6.4.1 Discriminare, ma in senso buono

Non è sempre facile dimostrare che due topologie sono la stessa a meno di omeomorfismi.

Per questo se si hanno degli strumenti per riuscire a discriminare quelle distinte *al volo*, si può ridurre il tempo perso a dimostrare che due topologie distinte siano la medesima.

A tal fine nei capitoli precedenti si sono sviluppate alcune proprietà che sono invarianti per omeomorfismi e dunque degli invarianti topologici. Vediamo una semplice carrellata di come possono essere utilizzati per discriminare le topologie distinte

Teorema 6.11. Le seguenti affermazioni sono vere:

1. $[0, 1] \not\cong (0, 1)$;
2. $[0, 1] \not\cong \mathbb{R}$;
3. $(0, 1] \not\cong (0, 1)$;
4. $[0, 1]^2 \not\cong [0, 1]$;
5. $\mathbb{R} \simeq (0, 1)$.

Dimostrazione.

1. La compattezza è un'invariante per omeomorfismi, quindi se le due topologie fossero la medesima avrei che $(0, 1)$ compatto se e solo se $[0, 1]$ lo è. Ma $[0, 1]$ è compatto, mentre $(0, 1)$ non lo è. Pertanto non possono essere omeomorfi.
2. Usando ancora una volta la compattezza come invariante topologico si vede che \mathbb{R} non è compatto mentre $[0, 1]$ lo è, pertanto non possono essere omeomorfi.
3. La connessione è un altro invariante topologico. Infatti supponiamo che $(0, 1]$ sia omeomorfo a $(0, 1)$. Allora esiste $f((0, 1]) = (0, 1)$ e $f(1) = x \in (0, 1)$. Quindi se si considera $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1) \setminus \{x\}$ di sicuro x è interno a $(0, 1)$, quindi dev'essere che $(0, 1) \setminus \{x\} = (0, x) \cup (x, 1)$. Bisogna far notare che f è ancora un omeomorfismo tra $(0, 1)$ e $(0, 1) \setminus \{x\}$ (è ovviamente bigettiva e manda aperti in aperti anche se manca un punto). Eppure $(0, 1)$ è connesso e quindi $f((0, 1))$ dovrebbe essere connesso, ma non lo è. Pertanto non può esistere f omeomorfismo.
4. Analogo al caso precedente. Infatti si prenda un punto interno di $x \in (0, 1)$, indipendentemente da dove verrà mappato su $[0, 1]^2$, $[0, 1]^2 \setminus \{f(x)\}$ sarà ancora connesso⁴, mentre $[0, 1] \setminus \{x\}$ non lo è.

⁴È ovvio che sarà ancora connesso: se x viene mappato sul bordo, allora essendo $(0, 1)^2$ connesso e $[0, 1]^2$ connesso segue che qualsiasi Z , tale che $(0, 1)^2 \subset Z \subset [0, 1]^2$ è ancora connesso; se x è interno invece posso sempre trovare una funzione continua che aggira x e collega ogni paio di punti di $[0, 1]^2 \setminus \{f(x)\}$, creando un arco.

5. Per vedere questa omeomorfismo basta prendere $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

che è una funzione continua e biettiva. Inoltre possiamo definire $f^{-1}(x)$ che è ancora continua e ha definizione

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

da cui la tesi di omeomorfismo tra i due insiemi.

□

Parte II

Topologia Algebrica

Capitolo 7

Omotopie: mappe tra cammini

Concluso lo studio della topologia generale, vogliamo applicarla in un campo molto importante della matematica: la *topologia algebrica*.

Studieremo la struttura degli spazi (in particolare le superfici topologiche compatte): perché una tazza è un toro? per quale ragione una palla non è un toro? e soprattutto, a chi è venuto in mente di chiamare “toro” una ciambella?

Conosciamo la risposta all’ultima - gli antichi romani, deriva dal nome di un cuscino a forma di ciambella - ma per tutte le altre e molte di più addentriamoci nel mondo della topologia algebrica!

In seguito riusciremo anche ad applicare le nuove strutture matematiche nella classificazione delle varietà.

7.1 Omotopie e retratti

Cosa pensereste se qualcuno vi dicesse che può schiacciare una lattina rendendola un disco? Giochi da bambini, vero?

Beh, ora faremo la stessa cosa ... ma con la matematica.

7.1.1 Omotopie e classi di omotopia

Vogliamo definire formalmente il concetto di “trasformare con continuità” due funzioni tra loro.

Definizione 7.1. Siano $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ mappe continue. Allora f_0 e f_1 si dicono **omotope** se esiste una funzione continua $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $F(t, 0) = f_0(t)$ per ogni $t \in X$ e $F(t, 1) = f_1(t)$ per ogni $t \in X$.

Osservazione 7.2 (Omotopia come relazione di equivalenza). L’omotopia è una relazione di equivalenza.

Le prime due proprietà sono immediate, per la proprietà transitiva basta comporre le omotopie.

Definizione 7.3. Siano $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ mappe continue e sia $A \subset X$. Allora f_0 e f_1 si dicono **omotope relativamente ad A** se esiste una funzione continua $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $F(t, 0) = f_0(t)$ per ogni $t \in X$ e $F(t, 1) = f_1(t)$ per ogni $t \in X$ e $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ per ogni $a \in A$.

Definizione 7.4. Due spazi topologici X, Y si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono le mappe continue $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ tali che $g \circ f \sim \text{Id}_X$ e $f \circ g \sim \text{Id}_Y$.

In particolare si dice che *sono nella stessa classe di omotopia* (o *hanno la stessa classe di omotopia*)

Osservazione 7.5 (Equivalenza omotopica). L’omotopia di spazi topologici è una relazione di equivalenza, si dimostra come in precedenza; non è difficile.

Osservazione 7.6 (Possibili fraintendimenti). Nonostante spesso e volentieri sia comodo pensare alla “deformazione continua” come una deformazione fisica dello spazio, è immediato verificare come **effettivamente non lo sia**. Notiamo che riferendoci agli spazi con *deformazione continua* reciproca si intende il passaggio tra rappresentanti diversi della stessa classe di omotopia.

Si prenda una circonferenza con un punto esterno (spazio A) ed una circonferenza con un punto interno (spazio B), ovviamente sono nella stessa classe di omotopia. Però è impossibile deformarli “manualmente” fino ad ottenerli a vicenda, perché qualunque deformazione si compia prima o poi il punto interseca la circonferenza: in questo modo otterremmo uno spazio diverso sia da A che da B , che non si trova neanche nella stessa classe di omotopia.

7.1.2 Retratti e retratti di deformazione

Definizione 7.7. Se $A \subset X$ dove X spazio topologico allora A è detto **retrato** di X se esiste $r: X \rightarrow A$ con r continua e che $r(a) = a$ per ogni $a \in A$. In particolare $r \circ i_A = \text{Id}_A$.

In particolare A è detto **retrato di deformazione** di X se è un retratto e $i_A \circ r \sim \text{Id}_X$.

Ovviamente se è retratto di deformazione vuol dire che si trovano nella stessa classe di omotopia.

Osservazione 7.8. Alcuni esempi

1. Dimostriamo che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$.

Definiamo come retratto $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ con $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Allora è ovvio che $r \circ i = \text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Prendiamo quindi il caso $i \circ r = \frac{x}{\|x\|}$ con $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dimostriamo che questa funzione è omotopa all'identità su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Usiamo l'omotopia

$$F(s, t) = (1 - t)(i \circ r) + tx$$

ed abbiamo concluso.

2. Definiamo ora la somma topologica di due spazi topologici $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ disgiunti. L'unione verrà definita come $(X \cup Y, \tau)$ dove τ è la topologia i cui aperti sono tali per cui $A \in \tau$ allora $A \cap X \in \tau_1$ e $A \cap Y \in \tau_2$. La somma topologica vera e propria $X \vee Y$ è definita come

$$X \vee Y := (X \cup Y, \tau) / \sim_{a_0, b_0}$$

dove $a \sim_{a_0, b_0} b \iff a = b \vee (a = a_0 \wedge b = b_0)$. Ovvero unisce gli spazi e fa coincidere un punto dei rispettivi nello stesso. In pratica consideriamo il bouquet di due circonferenze $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ rappresentato in figura.

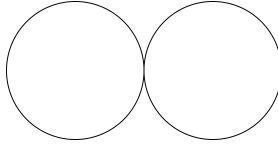


Figura 7.1:

Questo è ovviamente omotopo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ dove i punti scelti possono essere presi a piacere.

3. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ ed è un sottospazio stellato rispetto al centro x_0 allora $Y = \{x_0\}$ è un retratto di X . Infatti $X \sim \{p\}$ per qualsiasi $p \in \mathbb{R}^n$. Mostriamo intanto che $Y \sim X$. L'omotopia $F(x, t) = x - t(x - x_0)$ porta, in modo continuo, dalla funzione di $\text{id}: X \rightarrow X$ (ovvero $x \mapsto x$) a $i: X \rightarrow X$ (ovvero $x \mapsto x_0$). Ovvero $Y \sim X$.
4. Sia $X = T$ toro. Allora $r: T \rightarrow \mathbb{S}^1$ è un retratto su $\mathbb{S}^1 \subset T$, ma non è un retratto di deformazione. Infatti è impossibile trasformare (in modo continuo) un toro in una circonferenza.

5. Se si toglie un punto a il g -toro allora $T_g \setminus \{t\} \sim \underbrace{\mathbb{S}^1 \wedge \dots \wedge \mathbb{S}^1}_{2g\text{-volte}}$
6. Analogamente per il piano proiettivo U_h , una volta tolto un suo punto ed ottenuto $U_h \setminus \{p\} \sim \underbrace{\mathbb{S}^1 \wedge \dots \wedge \mathbb{S}^1}_{h\text{-volte}}$

7.2 CW-complessi

7.2.1 Una semplice classe di spazi complessi

Ora verranno introdotte delle classi di insiemi tali che possono essere suddivisi in parti *retratte* e parti irriducibilmente non retratte, si veda il Teorema 7.16.

Definizione 7.9. Uno spazio topologico X si dice **n-cella** se $X \simeq \mathbb{D}^n$.

Definizione 7.10 (Procedura di incollamento). L'incollamento di due spazi topologici X, Y tramite $A \subset X$ è rappresentato dal seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

- $f : A \rightarrow Y$ funzione “di incollamento”
- $i : A \rightarrow X$ inclusione

Lo spazio topologico risultante dall'incollamento è $X \sqcup Y / \sim$ dove usiamo la relazione $x \sim y \in Y \iff x \in A \wedge f(x) = y$.

Osservazione 7.11 (Algoritmo di costruzione di un CW-complesso finito). X è un CW-complesso se è possibile costruirlo secondo il seguente algoritmo:

1. Sia dato $X^0 \neq \emptyset$ insieme finito (detto anche 0-scheletro)
2. Sia $n \geq 1$, allora per ipotesi induttiva supponiamo di avere un X^{n-1} , ovvero un $(n-1)$ -scheletro. Allora si incollano a X^{n-1} delle n -celle attraverso il procedimento della Definizione 7.10 in cui vale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{D}^n & \longrightarrow & X^{n-1} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{D}^n & & \end{array}$$

con $X^n = X^{n-1} \sqcup \mathbb{D}^n / \sim$ con la relazione specificata nella procedura di incollamento.

3. Se il CW-complesso è di dimensione N , allora per $n = N$ il procedimento termina, con $X^N = X$.

Definizione 7.12. Sia X un CW-complesso allora una **n-cella chiusa** in X è l'immagine di $f: \mathbb{D}^n \rightarrow X$ dove f è definita come nella seguente successione

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D}^n & \hookrightarrow & \mathbb{D}^n \sqcup X^{n-1} / \sim & \hookrightarrow & X \\ & \searrow f & & \nearrow & \end{array}$$

Osservazione 7.13. In generale $\text{Im } f \neq \mathbb{D}^n$. Per esempio si prenda la costruzione di \mathbb{S}^2 come un CW-complesso con una 0-cella e una 2-cella che identifica tutto il suo bordo nel punto. Allora

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{D}^2 \sqcup \{p\} / \sim & \hookrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & \searrow f & & \nearrow & \end{array}$$

è ovvio che $\text{Im } f = \mathbb{S}^2 \neq \mathbb{D}^2$.

Definizione 7.14. Sia X un CW-complesso allora una n -cella aperta in X è l'immagine di $f: \mathbb{D}^n \rightarrow X$ dove f è definita come nella seguente successione

$$\begin{array}{ccc} \mathring{\mathbb{D}}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathring{\mathbb{D}}^n \sqcup X^{n-1} / \sim \xrightarrow{\quad} X \\ & \searrow f & \nearrow \\ & & \end{array} \quad (7.1)$$

Osservazione 7.15. Le n -celle aperte sono omeomorfe al disco aperto $\mathring{\mathbb{D}}^n$. Infatti

$$\mathring{\mathbb{D}}^n \sqcup X^{n-1} / \sim = \mathring{\mathbb{D}}^n \sqcup X^{n-1}$$

poiché il bordo non dev'essere identificato (non fa parte dell'insieme $\mathring{\mathbb{D}}^n$).

Teorema 7.16. Se X è un CW-complesso e $A \subset X$ è un sottocomplesso chiuso (ovvero un'unione di n -celle chiuse) vale che se A è contraibile allora X è omotopo a X/A .

Dimostrazione. Si può costruire la relazione di equivalenza utilizzando un po' di teoria dei grafi: sia data la foresta F del grafo, intuitivamente si tratta del risultato della costruzione del CW-complesso una volta "elencati" i passaggi svolti su un diagramma ad albero.

Allora posso quotizzare X con la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff \text{hanno un albero in comune in } F$$

La mappa quoziente $X \rightarrow X/\sim$ è una equivalenza omotopica.

Si noti inoltre che lo spazio quoziente eredita la struttura di CW-complesso.

Ovviamente questa è solo un'idea di dimostrazione, la vera dimostrazione può essere svolta usando molta più teoria di algebra e sfruttando l'ipotesi di contraibilità (il modo in cui si usa è ovvio). \square

I CW-complessi sono importanti poiché è possibile esprimere un invariante topologico. Infatti se due CW-complessi sono omeomorfi allora il valore della funzione caratteristica di Eulero è uguale.

Notiamo che usiamo i CW-complessi finiti perché sono compatti, e noi vogliamo classificare gli spazi compatti.

Definizione 7.17. Sia X un CW-complesso costituito da n_0 0-celle, \dots , n_N N -celle, allora

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^N (-1)^i n_i$$

è la **funzione caratteristica di Eulero** di X .

Osservazione 7.18. Alcuni esempi di CW-complessi

1. In generale un g -toro è composto da 1 0-cella, $2g$ 1-celle, 1 2-cella. Quindi ha numero caratteristico $\chi(T_g) = 2(1 - g)$.
2. In generale un piano proiettivo U_h è composto da 1 0-cella, h 1-celle, 1 2-cella. Quindi ha numero caratteristico $\chi(U_h) = 2 - h$.

3. Il disco \mathbb{D}^n è una n -cella quindi $\chi(\mathbb{D}^n) = (-1)^n$. In generale il disco n -esimo si può costruire con una 0-cella, una $(n-1)$ -cella e 1 n -cella.

Osservazione 7.19. Alcuni esempi del Teorema 7.16 possono essere i seguenti

1. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ come in figura

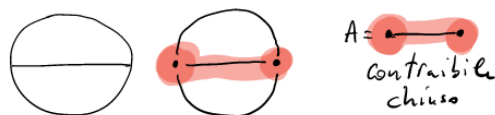


Figura 7.2:

allora è omotopicamente equivalente a un bouquet di due circonferenze se si identifica la 1-cella del diametro in un punto da cui

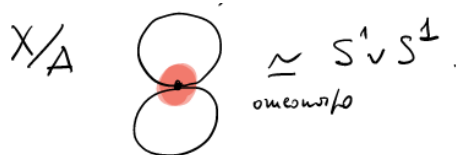


Figura 7.3:

2. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ come in figura

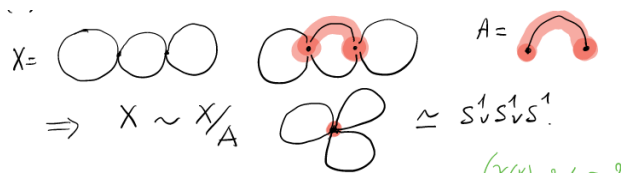


Figura 7.4:

identifichiamo una 1-cella della circonferenza centrale (l'insieme A) in un punto così da ottenere un bouquet di 3 circonferenze per il Teorema 7.16.

3. Sempre contraendo come in figura è abbastanza esplicito che il grafo sia omotopo a un bouquet di 4 circonferenze.

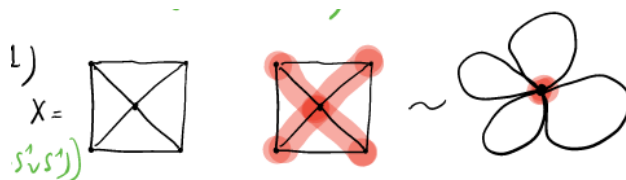


Figura 7.5:

4. Sia X un toro con un disco e una circonferenza

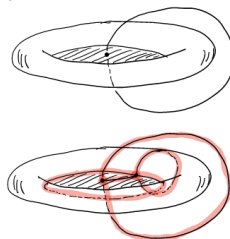


Figura 7.6:

Allora X è un CW-complesso composto da 2 0-celle, 4 1-celle, 2 2-celle. Posso contrarre il disco al centro del toro in un punto (perché possiamo è un retratto).

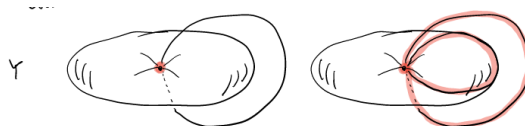


Figura 7.7:

Indichiamo con Y l'insieme con il disco retratto in un punto. Poi *allarghiamo* il toro in modo tale da ottenere una sfera con dentro parte della circonferenza identificata, otteniamo uno spazio omotopo allo spazio Z come in figura

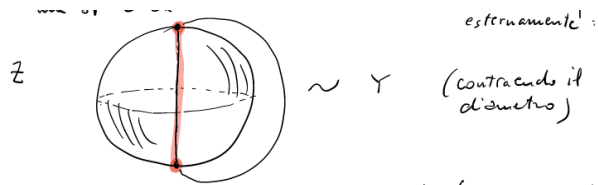


Figura 7.8:

e studiando Z si ottiene uno spazio omotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$



Figura 7.9:

7.3 Il gruppo fondamentale

Esiste un gruppo che possiamo “incollare”¹ ad uno spazio e che ne raccoglie le proprietà. In che senso *ne raccoglie le proprietà*?

E soprattutto, come si costruisce?

Avendo struttura di gruppo è bene vedere alcuni teoremi puramente algebrici prima di continuare.

7.3.1 Deformare cappi su una superficie

Definizione 7.20. Sia X spazio topologico, allora $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x_0 \in X$ e $\alpha(1) = x_0 \in X$ con α continua si dice **cappio** di punto base x_0 .

Definizione 7.21 (Gruppo fondamentale). Sia X uno spazio topologico, x_0 un punto appartenente ad X . Diciamo **gruppo fondamentale** di X rispetto ad x_0 l'insieme delle classi di equivalenza omotopica dei cappi contenuti in X con punto base x_0 .

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ è un cappio in } X \text{ di base } x_0\}$$

- Uno spazio topologico X si dice **semplicemente connesso** se $\pi_1(X, x_0) \simeq (\{1\}, +)$ ovvero il gruppo banale.

Definizione 7.22 (Concatenazione di cammini). Definiamo l'operatore $*$ come la composizione delle classi omotopiche di cappi α, β (aventi estremi congiungibili) come segue

$$\alpha * \beta := \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(2s - 1) & 1/2 < s \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 7.23. Siano α, β due cammini in X tali che sia definito il prodotto e analogamente per i cammini γ, δ . Allora se $\alpha \sim \gamma$ e $\beta \sim \delta$ vale $\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$

Dimostrazione. Basta scrivere l'omotopia: sia F la prima e G la seconda, l'omotopia cercata è

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

Teorema 7.24. $\pi_1(X, x_0)$ ha struttura di gruppo rispetto alla concatenazione di cammini.

$$(\pi_1(X, x_0), *) \text{ è un gruppo}$$

In particolare, indicando con x_k il cammino costante nel punto x_k con un lieve abuso di notazione (altra notazione classica è ε_{x_k}), valgono

1. $x_0 * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * x_1$
2. $\alpha * \bar{\alpha} \sim x_0 \sim \bar{\alpha} * \alpha$.
3. $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$

¹based

Dimostrazione. Verifichiamo intanto che riparametrizzando un cammino α non ne cambio la classe. Sia $\varphi : I \rightarrow I$ parametrizzazione continua, $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. La classe di omotopia non varia perché posso sempre scrivere l'omotopia

$$F(s, t) = \alpha((1 - t)s + t\varphi(s))$$

Allora posso dimostrare il teorema.

1. Basta trovare delle parametrizzazioni, la prima è

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 1 & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

e la seconda

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s & 1 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 1 & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

2. Trovare l'omotopia è banale, basta usare ε_{x_0} .
3. Basta riparametrizzare in modo che

$$(\alpha * \beta) * \gamma = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ \varphi \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

□

Teorema 7.25. Sia X spazio topologico tale che $x_0 \in X$ è connesso per archi ad $x_1 \in X$, allora $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$

Dimostrazione. Sia f l'arco congiungente i due punti, usiamo u_f funzione tra i due gruppi fondamentali tale che

$$u_f([\alpha]) = [(\bar{f} * \alpha) * f]$$

- **Ben definita**

Se $a \sim b$ allora $f * a \sim f * b$ e $(\bar{f} * a) * f = (\bar{f} * b) * f$ per quanto appena dimostrato.

- **Omomorfismo di gruppi**

$$u_f([a][b]) = u_f([a * b]) = [(\bar{f} * (a * b)) * f]$$

$$\begin{aligned} u_f([a]) \cdot u_f([b]) &= \dots \\ &= [(\bar{f} * a) * f] * [(\bar{f} * b) * f] \\ &= [(\bar{f} * ((a * f) * (\bar{f} * b))) * f] \\ &= [(\bar{f} * (a * b)) * f] \end{aligned}$$

- **Isomorfismo di gruppi**

Ovvio, basta usare $u_{\bar{f}}$.

□

Corollario 7.26. Se X è connesso per archi allora il suo gruppo fondamentale è unico al più per isomorfismi.

Dimostrazione. Particolarmente ovvio, inclusa solo per completezza; se lo spazio è connesso per archi vuol dire che la componente connessa per archi più grande è lo spazio stesso e per teorema esiste un arco tra ogni punto scelto a piacere verso ogni altro punto. \square

Teorema 7.27. Sia $\varphi: X \rightarrow Y$ una mappa continua tra spazi topologici, allora induce un omomorfismo tra i relativi gruppi fondamentali

$$\begin{aligned}\varphi_*: \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \\ [\alpha] &\rightarrow [\varphi \circ \alpha]\end{aligned}$$

Inoltre l'operatore $*$ gode delle *proprietà funtoriali*:

1. $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$
2. $(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$

Dimostrazione. Osserviamo che il morfismo indotto è ben definito.

$$a \sim b \implies \varphi \circ a \sim \varphi \circ b$$

infatti data F prima omotopia basta usare $G = \varphi \circ F$. Risulta immediato anche dimostrare che è effettivamente un morfismo di gruppi, basta notare che $\varphi \circ (a * b) = (\varphi \circ a) * (\varphi \circ b)$. \square

Corollario 7.28. Se $\varphi: X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo di spazi topologici allora φ_* è un isomorfismo di gruppi. In particolare il gruppo fondamentale è un *invariante topologico*.

Dimostrazione. Sia f funzione continua che induce il morfismo f_* . Allora per $x \in X$:

$$(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = \text{Id}_{\pi(X, x)}$$

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = \text{Id}_{\pi(Y, f(x))}$$

\square

Teorema 7.29. Se $A \subset X$ è un retratto di X con r come retrazione, allora vale che $\pi_1(A, x_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ ed è un sottogruppo. In particolare $r_* \circ i_* = \text{Id}_{\pi_{A, a}}$.

Dimostrazione. Particolarmente ovvio, basta scrivere:

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\text{Id}_A)_* = \text{Id}_{\pi(A, a)}$$

Per ogni retratto A inoltre i_* è un isomorfismo del suo gruppo fondamentale con immagine un sottogruppo di $\pi(X, a)$. \square

7.3.2 Il teorema di invarianza omotopica

Vogliamo dimostrare un risultato potente: il gruppo fondamentale è invariante omotopico. Per farlo dobbiamo sviluppare ulteriormente la teoria.

Lemma 7.30. Siano Φ e Ψ funzioni continue ed omotope tra X ed Y , F loro omotopia. Sia $f(t) = F(x_0, t)$ cammino tra $\Phi(x_0)$ e $\Psi(x_0)$ per il punto $x_0 \in X$. Allora il seguente diagramma commuta (questo vuol dire che $\Psi_* = u_f \circ \Phi_*$).

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_*} & \pi(Y, \Phi(x_0)) \\ & \searrow \Psi_* & \swarrow u_f \\ & \pi(Y, \Psi(x_0)) & \end{array}$$

Dimostrazione. Devo mostrare che per ogni $A = [a] \in \pi(X, x_0)$ vale

$$\begin{aligned} (u_f \circ \Phi_*)(A) &= [(\bar{f} * (\Phi \circ a)) * f] \\ &= [\Psi \circ a] = \Psi_*(A) \end{aligned}$$

(cioè che $(\bar{f} * (\Phi \circ a)) * f \sim \Psi \circ a$)

Sia $y_0 = \Phi(x_0)$, so che $\Psi \circ a \sim (\varepsilon_{y_0} * (\Psi \circ a)) * \varepsilon_{y_0}$. Ho ridotto la tesi a

$$(\bar{f} * (\Phi \circ a)) * f \sim (\varepsilon_{y_0} * (\Psi \circ a)) * \varepsilon_{y_0}$$

Ricordo che f è un cammino da $\Phi(x_0)$ ad y_0 , allora

1. $\bar{f} \sim \varepsilon_{y_0}$ tramite $\bar{G}(s, t) = f((1-t)s)$
2. $f \sim \varepsilon_{y_0}$ tramite $\bar{G}(s, t) = f((1-t)s + t)$
3. $\Phi * a \sim \Psi * a$ tramite $K(s, t) = F(a(s), t)$

Allora posso dimostrare la tesi riparametrizzando.

$$H(s, t) = \begin{cases} \bar{G}(4s, t) = \bar{f}((1-t)4s) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ K(4s-1, t) = F(a(4s-1), t) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1, t) = f((1-t)(2s-1) + t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ed ovviamente è continua perché per ogni $t \in [0, 1]$ le definizioni coincidono. \square

Corollario 7.31 (Teorema di invarianza omotopica). Siano X ed Y spazi con φ omotopia data dall'equivalenza omotopica. Allora il suo morfismo indotto tra i gruppi fondamentali è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $y = \varphi(x)$, sia ψ l'altra equivalenza omotopica. Allora sappiamo che

1. $\psi \circ \varphi \sim \text{id}_X$
2. $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_Y$

Inoltre dico Ψ l'identità in X e $\Phi = \psi \circ \varphi$.

$$\begin{array}{c} \pi(X, x) \xrightarrow{\varphi_*} \pi(Y, y) \xrightarrow{\psi_*} \pi(X, \Phi(y)) \\ \searrow \text{id}_{\pi(X, x)} \quad \swarrow u_f \\ \pi(X, x) \end{array}$$

u_f è l'isomorfismo relativo al cambio di punto base, siccome vale che

$$u_f \circ \psi_* \circ \phi_* = \text{id}_{\pi(X, x)}$$

allora abbiamo che $\psi_* \circ \phi_*$ è un isomorfismo, quindi ψ_* è suriettiva e ϕ_* iniettiva. Posso applicare il lemma alla funzione $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_Y$, ottengo il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{array}{c} \pi(Y, y) \xrightarrow{\psi_*} \pi(X, \psi(y)) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} \pi(Y, \phi(\psi(y))) \\ \searrow \text{id}_{\pi(Y, y)} \quad \swarrow u_g \\ \pi(Y, y) \end{array}$$

$(\tilde{\phi} \circ \psi)_*$

Siccome u_g è un isomorfismo, $\tilde{\varphi}_*$ è un isomorfismo indotto da φ (in generale diverso da φ_* perché dipende dal punto base scelto, qui il punto base è $\phi(y)$ generalmente diverso da x). Allo stesso modo di prima ottengo che $\tilde{\varphi}_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo di gruppi, quindi ψ_* è iniettiva. \square

7.4 Il teorema di Seifert-van Kampen

7.4.1 Enunciato e conseguenze

Teorema 7.32 (Teorema di Seifert-van Kampen). Dati due aperti U, V tali che $U \cap V \neq \emptyset$ e tutti gli insiemi sono connessi per archi, allora se $X = V \cup U$ e $x_0 \in U \cap V$ segue che

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(H, h_0)$$

dove

$$\begin{aligned} \pi_1(H, h_0) &= \langle U \cup V \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle \\ R_S &:= \{s \in \pi_1(U \cap V, x_0) \mid (i_V^{-1} \circ i_U)[s] = [s]\} \end{aligned}$$

Teorema 7.33. Sia x_0 il punto $(1, 0) \in S^1$ allora $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.

7.4.2 Applicazioni di Seifert-van Kampen

Presento alcuni corollari utili allo svolgimento degli esempi successivi.

Corollario 7.34. Siano U, V aperti e semplicemente connessi, allora se $U \cap V$ è connesso per archi vale $\pi_1(U \cup V, x_0) \simeq \mathbb{Z}_1$

Corollario 7.35. Siano U, V aperti tali e tali che $U \cap V$ è connesso per archi e contraibile, allora $\pi_1(U \cup V, x_0) \simeq \langle U \cup V \mid R_U \cup R_V \rangle$.

Esercizio 7.36. Per $n \geq 2$ le n -sfere hanno gruppo fondamentale banale. Ovvero $\pi_1(S^n, x_0) \simeq \mathbb{Z}_1$

Dimostrazione. Considero U, V rispettivamente come l'emisfero nord e l'emisfero sud. Allora questi sono aperti e hanno $U \cap V \simeq S^{n-1}$. Siccome U, V sono semplicemente connessi (sono omeomorfi a un disco), vale il corollario precedente e dunque S^n è semplicemente connesso. \square

Esercizio 7.37. Sia $\mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1$ il bouquet di n -circonferenze. Allora $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Dimostriamo nel caso $n = 2$ poiché la dimostrazione è la medesima per ogni $n \geq 2$. Prendiamo come U, V le due circonferenze più un po' dell'altra aventi come intersezione $U \cap V$ che contiene il punto di incollamento e un po' delle due circonferenze (si veda figura). In questo modo $U, V, U \cap V$ sono aperti e connessi per archi. Possiamo usare il teorema dei CW-complessi per

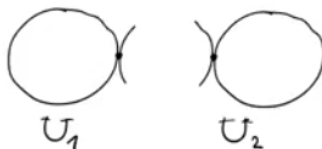


Figura 7.10:

retrarre $U \sim \mathbb{S}^1$ e $V \sim \mathbb{S}^1$, mentre l'intersezione è retraibile in un punto. Quindi diventa che

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \simeq \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

\square

Esercizio 7.38. Dimostriamo il seguente isomorfismo $\pi_1(T_1, x_0) \simeq \mathbb{Z}^2$

Dimostrazione. Prendiamo come suddivisione del toro gli aperti U_1, U_2 dove U_1 è il toro tolto un punto Q , mentre U_2 è il toro tolto i lati perimetrali che vengono incollati per costruire il toro (si veda la figura) Allora sappiamo che

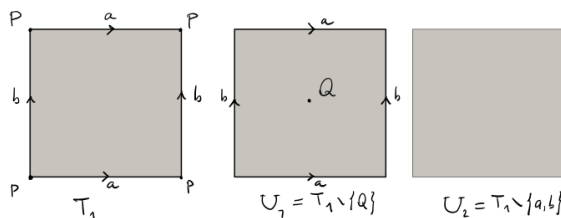


Figura 7.11:

$\pi_1(U_1, x_0) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, mentre U_2 è contraibile (è essenzialmente un disco aperto). L'intersezione $U_1 \cap U_2$ invece è omotopicamente equivalente

a \mathbb{S}^1 , infatti se il buco si può allargare fino ad ottenere \mathbb{S}^1 . Per cui otteniamo i seguenti risultati

$$\begin{aligned}\pi_1(U_1) &\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ \pi_1(U_2) &\simeq \mathbb{Z}_1 \\ \pi_1(U_1 \cap U_2) &\simeq \mathbb{Z}\end{aligned}$$

poiché $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ non è banale dobbiamo vedere quale è la relazione $R_{U_1 \cap U_2}$. Per vedere come interagisce sui cappi, dobbiamo osservare che ogni cappio $c \in \pi_1(U_1 \cap U_2)$ può essere portato sul bordo di U_1 e, ciascuno dei cappi c percorre i lati del toro in senso $aba^{-1}b^{-1}$, questo coincide alla relazione sui cappi di $\pi_1(U_1)$: $a * b * a^{-1} * b^{-1} = 1$ (si veda figura) per cui diventa

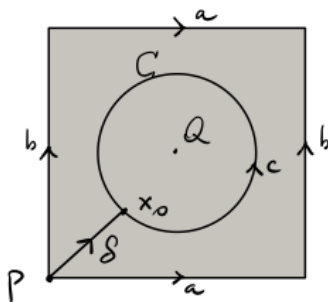


Figura 7.12:

$$\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0) \simeq \langle \{\alpha, \beta\} \cup \emptyset \mid R_{U_1 \cap U_2} \rangle \simeq \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$$

□

Esercizio 7.39. Dimostrare per ragionamento analogo a quello del toro che

$$\pi_1(U_h, x_0) \simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle$$

.

Dimostrazione. Versione breve:

Lo spazio proiettivo reale U_1 si costruisce come disco chiuso con due archi di circonferenza identificati. Prendo V_1 e V_2 esattamente come nel toro:

- V_1 è un bouquet di una circonferenza, di generatore α
- V_2 è contraibile
- L'intersezione si retrae con deformazione su una circonferenza, dico δ il generatore di questa circonferenza

Siccome sono connessi per archi posso ragionare come sempre con il teorema di van Kampen ed ottengo (dato *sigma* il solito cammino):

$$[\delta] = \begin{cases} [\sigma\alpha^2\sigma^{-1}] = [\sigma\alpha\sigma^{-1}]^2 = A^2 & \text{in } V_1 \\ 1 & \text{in } V_2 \end{cases}$$

Quindi si vede che il gruppo fondamentale dello spazio proiettivo reale ha forma

$$\pi(U_1, x) = \langle A \mid A^2 = 1 \rangle$$

□

Capitolo 8

Varietà

Ora abbiamo completato uno studio fondamentale, che ci permetterà di lavorare su superfici topologiche “brutte a piacere”; quindi perché non farlo?

Studieremo le varietà topologiche più interessanti dopo una breve introduzione generale, e vedremo di persona il *teorema di classificazione delle superfici topologiche compatte*.

8.1 Le varietà topologiche

8.1.1 Introduzione allo studio delle varietà

Definizione 8.1. Un (X, τ) spazio topologico, è detto **localmente euclideo** se per ogni $x \in X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ e $U_x \subset X$ intorno aperto di x tale che esiste un omeomorfismo $\varphi_x: U_x \rightarrow \mathbb{D}^n$.

Definizione 8.2. Dato uno spazio topologico localmente euclideo, la coppia omeomorfismo intorno (U_x, φ_x) è detta **carta locale**.

Osservazione 8.3. Dati due intorni distinti di x per cui esiste una carta locale (V_x, φ_x) e (U_x, ψ_x) , allora entrambi gli omeomorfismi avranno come codominio uno stesso \mathbb{D}^n dove n è uguale per entrambe le carte. (È un teorema profondo come un pozzo che non verrà trattato in queste note)

Teorema 8.4. Il disco nella topologia euclidea \mathbb{D}^n è connesso per archi.

Dimostrazione. Dimostro che il disco è convesso e quindi connesso per segmenti (e in particolare per archi). Infatti sia

$$\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \quad (8.1)$$

allora basta far vedere che presi due punti vale che l'intero segmento sta nel disco. Siano $x, y \in \mathbb{D}^n$ allora

$$|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y| \leq 1-t+t=1 \quad (8.2)$$

per cui stanno tutti nel disco, segue immediatamente la tesi. \square

Osservazione 8.5. Dal teorema precedente si può notare perché si è scelto in particolare \mathbb{D}^n come insieme di riferimento per le carte locali. Infatti questo insieme è abbastanza semplice, con una topologia abbastanza conosciuta, e ha proprietà che non tutti i sottospazi di \mathbb{R}^n hanno (per esempio $[0, 1] \cup (2, 3)$ non è omeomorfo al disco, non è compatto, non è neanche connesso).

Definizione 8.6. Se X è una varietà topologica n è detta la sua dimensione locale in x e viene indicata dalla funzione

$$\begin{aligned} \dim_x: X &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto n \end{aligned} \quad (8.3)$$

Definizione 8.7. La funzione \dim_x è continua in \mathbb{N} dotato della topologia discreta in quanto localmente costante. Inoltre se X è compatto $\dim_x(X)$ dev'essere connesso e nella topologia discreta gli unici connessi sono i singoletti. Pertanto \dim_x è costante se X connesso.

Corollario 8.8. Se X localmente euclideo e connesso, allora $\dim_x = k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. k viene detta dimensione reale di X .

Teorema 8.9. Sia X localmente euclideo, allora X è connesso per archi.

Dimostrazione. Fisso un $x \in X$ e definisco

$$W_x := \{z \in X \mid z \sim x\} \quad (8.4)$$

dove \sim è la relazione di essere connessi per archi. Innanzitutto notiamo che: se $z \in W_x$ allora anche l'intorno U_z è connesso per archi poiché localmente euclideo (basta passare per l'omeomorfismo locale).

Per cui supponiamo che $W_x \neq X$ allora deve esistere almeno un $y \in X$ tale che non è in W_x . Distinguiamo due casi:

1. Se $U_y \cap W_x \neq \emptyset$ allora posso usare la seconda osservazione per concludere che anche $y \in W_x$ contro l'ipotesi originaria, quindi $W_x = X$.
2. Se $U_y \cap W_x = \emptyset$ allora dev'essere che $U_y \subset W_x^c$. Poiché per ogni punto di W_x^c vale che il suo intorno sta in W_x^c (se no avrei la possibilità di collegarli per archi con x) e quindi W_x^c è aperto e W_x chiuso. Inoltre sempre per l'osservazione iniziale W_x dev'essere aperto. Poiché X connesso dev'essere che $W_x = \emptyset$ (ma è impossibile perché $x \in W_x$) o $W_x = X$, ovvero la tesi.

□

Teorema 8.10. Se X localmente euclideo allora le sue componenti connesse sono aperte e chiuse.

Dimostrazione. Se X è connesso allora ha una sola componente connessa e quindi è sia chiusa che aperta. Sia X sconnesso allora prendo una componente connessa $[x]_\sim$. Osservo che $\pi^{-1}([x]_\sim)$ è un aperto: prendo un intorno $U_x \simeq \mathbb{D}^n$ per qualche n e questo è connesso, per cui per ogni punto $x \in U_x \subset \pi^{-1}([x]_\sim)$. Inoltre $\pi(\pi^{-1}([x]_\sim)) = [x]_\sim$ per suriettività. Inoltre anche $\pi^{-1}([x]_\sim^c)$ è aperto, infatti se fosse chiuso avrei che per ogni y sulla frontiera questo sarebbe connesso con x , il che sarebbe assurdo. Quindi $[x]_\sim$ è sia aperto che chiuso in τ_\sim . □

Osservazione 8.11. In generale se uno spazio topologico è localmente euclideo non è di Hausdorff. Infatti si consideri $\{a, b\} \times \mathbb{R}$ con la relazione di equivalenza $(x, y) \sim (z, w) \leftrightarrow y = w \wedge y > 0 \vee (x, y) = (z, w)$. Allora il disegno diventa una sorta di Y, in cui le due rette si congiungono nello 0 (che non viene identificato! ci sono due zeri: $\{0\} \times \{a\}, \{0\} \times \{b\}$).

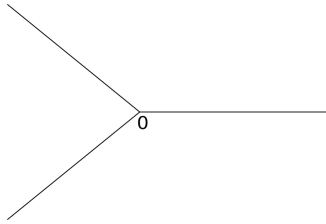


Figura 8.1:

Questo spazio è localmente euclideo (ricopri una retta alla volta e la parte unita la metti in entrambe le carte), ma non è di Hausdorff. Infatti prendiamo un intorno di $(0, a)$ denominiamlo U e poi un intorno V di $(0, b)$, questi si intersecheranno sempre sulla parte identificata delle due rette, per cui i due punti non rispettano la condizione di Hausdorff.

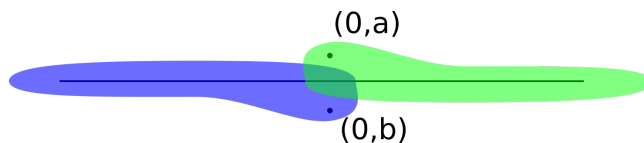


Figura 8.2: L'esempio della retta con due origini, con un possibile ricoprimento con due carte locali

Un altro esempio è dato dalla linea con due origini che è molto simile all'esempio precedente, l'unica differenza è che si identificano tutte le rette tranne l'origine al posto che solo la parte positiva come avveniva sopra. Si prenda $\mathbb{R} \times \{a, b\}$ come spazio e si quozienti con la relazione $(x, a) \sim (y, b) \iff x = y \wedge x, y \neq 0$. Allora lo spazio quoziente sarà dato da due rette distinte, ma con due origini $\{0\} \times \{a\}, \{0\} \times \{b\}$. Se si prende un qualsiasi intorno di $\{0\} \times \{a\}$ si avrà un'intersezione per qualsiasi intorno di $\{0\} \times \{b\}$ per ovvie ragioni, per cui non è Hausdorff, malgrado sia localmente euclideo. Infatti basta prendere una carta locale di due mappe che cartografano $(-\infty, a) \cup \{0\} \times \{a\}$ e una che prende $(-a, +\infty) \cup \{0\} \times \{b\}$.

8.1.2 Struttura delle varietà topologiche

Definizione 8.12. Uno spazio topologico (X, τ) è detto **varietà topologica** di dimensione n se è localmente euclideo, connesso, di Hausdorff e a base numerabile.

Alcuni esempi

1. Per $n = 1$ le uniche varietà topologiche sono \mathbb{S}^1 e \mathbb{R} .
2. Per $n = 2$ le varietà topologiche si chiamano superfici topologiche e sono *troppe*.
3. Il toro si può costruire come $[0, 1]^2 / \mathbb{Z}^2$ si vede che è localmente euclideo, di Hausdorff, connesso e a base numerabile ed è anche compatto. Il toro è anche un esempio di superficie non orientabile e questo è di grande importanza nella teoria dei modelli minimali. Infatti grazie al toro è possibile generare tutte le superfici topologiche non orientabili. In generale il toro si indica con T_g dove g indica quante volte è stato aggiunto a se stesso. Ad esempio un toro semplice si indica con T_1 , mentre un bitoro T_2 , mentre T_0 equivale alla sfera (più che altro per semplificare la notazione dei teoremi, visto che è un caso limite).
4. Anche il piano proiettivo si può esprimere come \mathbb{S}^2 / \sim dove $a \sim b \iff a = rb$ per qualche $r \in \mathbb{R}$. Ma quest'ultimo si può vedere che è omeomorfo a \mathbb{D}^2 . Pertanto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{D}^2$. Il piano proiettivo viene denominato anche U_n dove n rappresenta il numero di volte che viene sommato a se stesso, ovvero $U_1 + \dots + U_1 = U_n$.

Definizione 8.13 (Somma connessa). Date due varietà topologiche V_1, V_2 è possibile trovare un intorno di V_1 e V_2 tali che sono omeomorfi (passando per la proiezione sul disco euclideo), per cui collegando le rispettive frontiere è possibile *attaccare* V_1 con V_2 . In particolare questa operazione si indica con $V_1 + V_2$ ed è indipendente dalla scelta dell'intorno a meno di omeomorfismi.

Teorema 8.14 (Teorema di classificazione). Ogni superficie topologica compatta è omeomorfa a un T_g per qualche $g \geq 0$ e U_h per qualche $h \geq 1$, inoltre i due modelli non sono omeomorfi e sono minimali.

L'intuizione di ciò è data dal fatto che il toro può essere rappresentato dalla stringa $aba^{-1}b^{-1}$ e il piano proiettivo da aa , mentre la sfera da aa^{-1} , per cui tutte le possibili stringhe sono di questo tipo visto che la somma connessa risulta essere, in questo caso, una semplice concatenazione di queste stringhe. La dimostrazione della minimalità verrà data nella prossima sezione.

8.2 Classificazione delle superfici compatte

8.2.1 Alcuni cenni di teoria dei gruppi

Per poter classificare le superfici abbiamo bisogno di alcuni strumenti algebrici sui gruppi. In particolar modo il calcolo degli abelianizzati e dei gruppi dei nostri modelli fondamentali: il toro e il piano proiettivo.

Lemma 8.15. Valgono i seguenti isomorfismi di gruppi

$$\begin{aligned} Ab(\pi_1(U_h, x_0)) &\simeq \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2 \\ Ab(\pi_1(T_g, x_0)) &\simeq \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Dimostrazione. Prima formula:

Sappiamo che $\pi_1(U_h) \simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle$, quindi abelianizzando il gruppo si ottiene (utilizzando le trasformate di Tietze)

$$\begin{aligned} &Ab(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle) \\ &\simeq \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \cdots \alpha_h^2 = 1, \alpha_0 = \alpha_1 \dots \alpha_h, [\alpha_i, \alpha_j], \forall i, j \rangle \\ &\simeq \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_0^2 = 1, [\alpha_i, \alpha_j], \forall i, j \rangle \\ &\simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid [\alpha_i, \alpha_j], \forall i, j \rangle \times \langle \alpha_0 \mid \alpha_0^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned} \quad (8.6)$$

□

Dimostrazione. Seconda formula:

Sappiamo che $\pi_1(T_g) \simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \mid \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1 \rangle$. Quindi la relazione sui generatori coincide al prodotto di tutti i commutatori, per cui

$$\begin{aligned} &Ab(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \mid \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1 \rangle) \\ &\simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] = \dots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle \\ &\simeq \langle \alpha_1 \mid \emptyset \rangle \times \dots \times \langle \beta_g \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned} \quad (8.7)$$

□

Definizione 8.16. Sia G un gruppo abeliano; un elemento $g \in G$ si dice di torsione se per qualche $n \in \mathbb{N}$ vale $ng = 0$. L'insieme degli elementi di torsione forma il sottogruppo $T(G) \subset G$.

Lemma 8.17. Siano G, G' gruppi abeliani. Allora valgono i seguenti fatti

1. Se $\varphi: G \rightarrow G'$ è un morfismo tra gruppi, allora vale $\varphi(T(G)) \subseteq T(G')$.
2. Se φ come definito sopra è un isomorfismo, allora $\varphi|_{T(G)}$ un isomorfismo sui sottogruppi di torsione.
3. Inoltre se φ è un isomorfismo di gruppi, allora induce un isomorfismo $\bar{\varphi}: G/T(G) \rightarrow G'/T(G')$.

Proposizione 8.1. $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m$ se e solo se $m = n$.

8.2.2 Il teorema di classificazione per le superfici compatte

Teorema 8.18. Sia S una superficie compatta. Allora essa è omeomorfa a T_g con $g \geq 0$ oppure ad una superficie U_h per $h > 0$. Inoltre $T_g \not\simeq U_h$ per ogni g, h , $U_h \not\simeq U_{h'}$ per $h \neq h'$ e $T_{g'} \not\simeq T_g$ per $g \neq g'$.

Dimostrazione. Il fatto che S sia omeomorfa ad una delle due superfici è già stato dimostrato. Non resta che dimostrare la minimalità dei modelli presi.

$$T_g \not\simeq U_h$$

Consideriamo gli abelianizzati dei gruppi fondamentali rispettivi. Per il Lemma 8.15 vale che

$$\begin{aligned} Ab(\pi_1(U_h, x_0)) &\simeq \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2 \\ Ab(\pi_1(T_g, x_0)) &\simeq \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned} \quad (8.8)$$

che hanno rispettivamente come sottogruppo di torsione \mathbb{Z}_2 e $\{0\}$, quindi non possono essere isomorfi ed in particolare non $T_g \not\simeq U_h$ (inoltre non sono neanche omotopicamente equivalenti).

$$U_h \not\simeq U_{h'}$$

Se fossero isomorfi allora gli abelianizzati sarebbero isomorfi e inoltre il quoziente dell'abelianizzato per il sottogruppo di torsione sarebbe isomorfo. In particolare

$$\mathbb{Z}^{h-1} \simeq \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}^{h'-1} \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}^{h'-1} \quad (8.9)$$

che funziona se e solo se $h = h'$.

$$T_g \not\simeq T_{g'}$$

Se fossero isomorfi allora gli abelianizzati sarebbero isomorfi quindi valrebbe $\mathbb{Z}^{2g} \simeq \mathbb{Z}^{2g'}$ che è valido solo se $g = g'$. \square

Osservazione 8.19. Ricordiamo che affinché un retrato $i: A \rightarrow X$ sia tale è necessario che $i_*: \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, x)$ sia un omomorfismo iniettivo; se vogliamo che sia un retrato di deformazione allora i_* dev'essere un isomorfismo.

Esempio 8.20.

1. Siano \mathbb{S}^1 e \mathbb{D}^2 è ovvio che \mathbb{S}^1 non è un retrato di \mathbb{D}^2 dato che

$$\pi(\mathbb{S}^1, x_0) \simeq \mathbb{Z} \not\simeq \{1\} \simeq \pi(\mathbb{D}^2, x_0)$$

e quindi non può esistere una mappa iniettiva tra i due gruppi.

2. Si consideri T_1 come in figura.

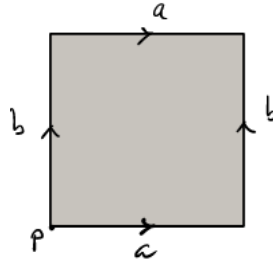


Figura 8.3:

Allora se si prende $A = \{a\}$, questo sarà un retratto di T_1 , e vale

$$\pi(A) \simeq \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^2 \simeq \pi(T_1)$$

analogamente vale per $A = \{b\}$.

3. Sia K una bottiglia di Klein con il poligono fondamentale come in figura. Osserviamo che a, b hanno ruoli differenti.

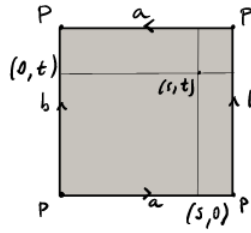


Figura 8.4:

Infatti $B = \{b\}$ è un retratto della bottiglia di Klein, mentre $A = \{a\}$ non lo è. Possiamo costruire un retratto per B :

$$r([s, t]) = [0, t]$$

e osserviamo che è continua e ben definita e tale che $K \xrightarrow{r} B$.

Mostriamo che A non è un retratto. Prendiamo i gruppi fondamentale di A e K

$$\pi(K, P) \simeq \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 \rangle \quad \pi(A, P) \simeq \langle \alpha \mid \emptyset \rangle$$

supponiamo per assurdo che esista una retrazione $r: K \rightarrow A$. Allora consideriamo le mappe indotte sui rispettivi gruppi fondamentali. Per cui

$$r_*(\beta) \in \pi(A, P) \implies \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } r_*(\beta) = \alpha^k$$

per cui osserviamo che

$$1 = r_*(1) = r_*(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = \alpha\alpha^k\alpha\alpha^{-k} = \alpha^2$$

che contraddice le relazioni $\pi(A, P)$ quindi A non è una retrazione di K .

Parte III

Analisi Complessa

Capitolo 9

Calcolo differenziale

Il calcolo differenziale è alla base dell'analisi in ogni campo, quindi è solamente giusto iniziare dalla nozione di *funzioni differenziabili in senso complesso*. Dato che la struttura sui complessi è 'più forte' di quella di \mathbb{R}^2 , anche se la topologia dei complessi viene indotta da quella di \mathbb{R}^2 , si avranno teoremi più forti e generali partendo da ipotesi più deboli rispetto a quelli dell'analisi reale. Per esempio una funzione $C^1(\mathbb{R})$ non è detto che sia $C^2(\mathbb{R})$, mentre nei complessi se è differenziabile è anche analitica.

9.1 Differenziabilità in senso complesso

9.1.1 Da \mathbb{R} a \mathbb{C} : funzioni differenziabili

Partiamo dal presupposto che possiamo identificare \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 dato che hanno la stessa topologia - e noi siamo interessati principalmente a questa struttura, dato che vogliamo definirne continuità e differenziabilità in senso complesso. Allora ogni funzione di una variabile complessa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sarà essenzialmente trattata come se fosse una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ovvero ponendo $z = x + iy$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (9.1)$$

ma bisogna ricordare che le proprietà di i ci daranno delle condizioni ulteriori sui criteri per cui possiamo definire u, v e quindi ciò che diremo sui complessi non si potrà estendere direttamente sulle funzioni del tipo $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Possiamo comunque notare che f è continua se e solo se u, v lo sono (per proprietà universale del prodotto topologico).

Come nel caso reale in una variabile, possiamo esprimere la differenziabilità in funzione del limite del rapporto incrementale

Definizione 9.1. Sia $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$. La funzione f si dice **differenziabile** se esiste un numero complesso $f'(z)$ tale che per $h \rightarrow 0$ vale la seguente relazione

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|) \quad (9.2)$$

Definizione 9.2. Sia $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$. Se f è differenziabile, la **derivata direzionale** di f lungo $v \in \mathbb{C}$ (con $|v| = 1$) si definisce come

$$D_v f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+rv) - f(z)}{r} = f'(z)v \quad (9.3)$$

Inoltre, per come è stata definita la derivata, possiamo sfruttare tutte le proprietà che valgono nel caso reale di una variabile. Mostriamo alcuni esempi, come la derivata delle seguenti funzioni (se sono differenziabili ...).

$$\begin{aligned} f(z) &= \log(|z|) && \text{non diff.} \\ f(z) &= e^{iz-|z|} && \text{non diff.} \\ f(z) &= (1+i-z)z^2 && f'(z) = 2(1+i)z - 3z^2 \end{aligned}$$

Occupiamoci della derivabilità in senso complesso: la seguente definizione è fondamentale.

Definizione 9.3. Una funzione $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è detta **olomorfa** se è differenziabile in ogni $z \in \Omega$. In generale indicheremo l'insieme delle funzioni olomorfe su Ω con $\mathcal{O}(\Omega)$.

Osservazione 9.4. Ogni funzione olomorfa è continua. Per dimostrarlo basta rispolverare la dimostrazione fatta nel caso dell'analisi reale.

In virtù della relazione stabilità precedentemente, ovvero che $f = u + iv$ per delle funzioni $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, otteniamo una condizione che ci eravamo limitati solo a ipotizzare.

Teorema 9.5 (Equazioni di Cauchy-Riemann). Sia data una funzione complessa su $\Omega \subset \mathbb{C}$ del tipo $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Allora f è differenziabile in $z \in \Omega$ se e solo se u, v sono differenziabili e $u_x = v_y, u_y = -v_x$ (in $z \in \mathbb{C}$).

Dimostrazione. Supponiamo f differenziabile in $z = x + iy$. Allora consideriamo le derivate direzionali lungo l'asse reale e quello immaginario.

$$\begin{aligned} D_1 f &= f'(z) = f_x(z) \\ D_i f &= f'(z)i = f_y(z) \end{aligned}$$

dove $f_x(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$ e $f_y(z) = u_y(x, y) + iv_y(x, y)$. Da questo noto che vale la relazione

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = -i(u_y(z) + iv_y(z))$$

ovvero $u_x(x, y) = v_y(x, y), v_x(x, y) = -u_y(x, y)$. Inoltre ci serve osservare che u, v sono differenziabili in z : infatti poiché f è differenziabile, allora anche la sua parte reale è differenziabile, come anche la sua parte immaginaria, e per $h = a + ib$ vale dunque

$$\begin{aligned} u(z + h) - u(z) &= u_x a - v_y b + o(\sqrt{a^2 + b^2}) \\ v(z + h) - v(z) &= u_y a + v_x b + o(\sqrt{a^2 + b^2}) \end{aligned}$$

ovvero u, v sono differenziabili in z , che era quanto si voleva dimostrare. Supponiamo quindi che u, v siano differenziabili in z e valgano le relazioni sopra descritte. Allora con qualche calcolo si ottiene, sempre per $h = a + ib$

$$\begin{aligned} u(z + h) - u(z) &= au_x(z) + bu_y(z) + o(|h|) = au_x(z) - bv_x(z) + o(|h|) \\ v(z + h) - v(z) &= av_x(z) + bv_y(z) + o(|h|) = av_x(z) + bu_x(z) + o(|h|) \end{aligned}$$

da cui - ricordando la definizione di f - si ottiene direttamente che questa è derivabile in senso complesso. \square

Corollario 9.6. La matrice delle funzioni reali $(u, v): \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tali da descrivere una funzione complessa f , sono tali che

$$J_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

In particolare il determinante è $\det J_{(u,v)} = u_x^2 + v_x^2 \geq 0$.

Corollario 9.7. Se $f'(z) = 0$, f è una funzione costante.

Corollario 9.8. Se $f = u + iv$ con $u(x, y) = r \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora

$$\begin{aligned} 0 &= u_x = v_y \\ 0 &= u_y = -v_x \end{aligned}$$

E quindi risulta essere una funzione costante. Analogamente se $v(x, y) = p \in \mathbb{R}$ allora f è una funzione costante.

9.1.2 Funzioni armoniche ed operatori di Wirtinger

Definizione 9.9 (Operatori di Wirtinger). Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funzione di classe $C^1(\Omega)$. Allora possiamo definire i seguenti operatori

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

Osservazione 9.10. Si dimostra che una funzione soddisfa il teorema di Cauchy-Riemann sse vale

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

In particolare se f olomorfa

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = f'(z)$$

Osservazione 9.11. Se $f \in C^1(\Omega)$, allora soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann. In particolare se supponiamo $f = u + iv$ ulteriormente derivabile - cosa che non è necessario supporre, dato che le funzioni olomorfe, come vedremo in seguito, sono C^∞ - possiamo costruire una relazione sulle funzione u, v :

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = u_{yy} \\ v_{xx} &= (-u_y)_x = -(u_x)_y = -(v_y)_y = -v_{yy} \end{aligned}$$

ovvero le due funzioni reali sono **armoniche**, dato che hanno operatore laplaciano nullo. In generale vale il seguente enunciato (che verrà dimostrato in seguito):

Sia $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica su un dominio semplicemente connesso Ω . Allora esiste una funzione armonica $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - unica a meno di una costante - tale che $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia una funzione olomorfa.

9.2 Funzioni analitiche o funzioni olomorfe?

9.2.1 Serie e successioni in senso complesso

Il termine *analitico* si perde nel contesto delle funzioni complesse dato che, come vedremo, l'insieme delle funzioni olomorfe coincide con quello delle funzioni analitiche.

Pertanto si preferisce descrivere le funzioni analitiche come olomorfe - una condizione facilmente accertabile, data anche l'equivalenza stabilita delle equazioni di Cauchy-Riemann.

In questa sezione ci limiteremo a sviluppare la teoria strettamente necessaria per stabilire la convergenza di serie complesse, arrivando infine a dimostrare quanto detto sfruttando il teorema di Abel.

Definizione 9.12. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funzione, allora $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice **successione di funzioni complesse**.

Definizione 9.13. Data una successione di funzioni complesse $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definite su $\Omega \subset \mathbb{C}$, allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

si dice **serie di funzioni complesse**.

Definizione 9.14. Data una successione di funzioni complesse definite su Ω , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se per ogni $z \in \Omega$ vale

$$f_n(z) \rightarrow f(z) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

per una qualche $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, allora si dice che la successione **converge puntualmente** a f .

Definizione 9.15. Data una successione di funzioni complesse definite su Ω , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se per ogni $z \in \Omega$ vale

$$\sum_{k=0}^n f_k(z) \rightarrow f(z) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

per una qualche $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, allora si dice che la serie **converge puntualmente** a f .

Definizione 9.16. Data una successione di funzioni complesse definite su Ω , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se vale

$$\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

per una qualche $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, allora si dice che la successione **converge uniformemente** a f .

Definizione 9.17. Data una successione di funzioni complesse definite su Ω , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se vale

$$\sup_{z \in \Omega} \left| \sum_{n=0}^N f_n(z) - f(z) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty$$

per una qualche $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, allora si dice che la serie **converge uniformemente** a f .

Definizione 9.18. Data una successione di funzioni complesse definite su Ω , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se per ogni $z \in \Omega$ vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| < +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

allora si dice che la serie **converge assolutamente**.

Osservazione 9.19. Osserviamo infine che se una serie $\{\sum_{k=0}^n f_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ è assolutamente convergente, allora è anche puntualmente convergente, infatti

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| \leq \sum_{k=0}^n |f_k(z)| = l < +\infty$$

per cui $\sum_{k=0}^n \Re(f_k(z)) < +\infty$, $\sum_{k=0}^n \Im(f_k(z)) < +\infty$. Per cui tutta la serie converge a qualche funzione f in ogni punto.

Teorema 9.20 (M-test di Weierstrass). Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni complesse e $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi per cui vale $|f_n(z)| \leq M_n \forall z \in \Omega$. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty$$

allora anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

converge assolutamente ed uniformemente in Ω .

Dimostrazione. Ovviamente che la serie converge in modo assoluto su tutto Ω per ipotesi. Allora qui definiamo $s_n(z) := \sum_{k=0}^n f_k(z)$ e s la funzione a cui converge la serie. Allora

$$|s - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

Dato che la serie degli M_k converge, fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$ possiamo sempre trovare N tale per cui $\sum_{k>N} M_k < \varepsilon$. Per l'assoluta generalità con cui è stato scelto $z \in \Omega$ ottengo la tesi di uniforme convergenza. \square

9.2.2 Le serie di potenze

Definizione 9.21. Siano dati $z_0 \in \mathbb{C}$ e una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di valori in \mathbb{C} , allora si definisce **serie di potenze** la serie della seguente forma

$$S(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Teorema 9.22 (Criterio di Hadamard). Data una serie di potenze S con notazione come in Definizione 9.21, definiamo il suo **raggio di convergenza** come $R := (\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} \in [0, +\infty]$. Allora

1. La serie di potenze S converge assolutamente nel disco $B_{z_0}(R)$ e non converge per $z \notin \overline{B_{z_0}(R)}$.
2. La serie di potenze converge su ogni disco chiuso $\overline{B_{z_0}(r)}$ con $r < R$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $z_0 = 0$ - senza perdita di generalità, dato che basta effettuare una sostituzione per riportarci nel caso $z_0 = 0$ dato un qualsiasi $z_0 \in \mathbb{C}$.

Dimostro che la serie di potenze converge uniformemente e assolutamente per ogni $0 < r < R$. Essendo $R < t^{-1}$ allora esiste un N per cui

$$\sqrt[n]{|a_n|} < t^{-1} \quad \text{per ogni } n \geq N$$

dunque $|a_n| < t^{-n}$ per ogni $n \geq N$.

Se $|z| \leq r$ vale

$$|a_n z^n| < \left(\frac{r}{t}\right)^n$$

Per il Teorema 9.20 la serie di potenze converge $\forall z \in B_0(r)$ e siccome vale per ogni $r < R$ segue anche per $B_0(R)$.

Dimostriamo ora che non converge da nessuna parte al di fuori della chiusura del disco aperto $\overline{B_{z_0}(R)}$. Infatti se supponessimo la convergenza in qualche punto $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{z_0}(R)}$ allora $|z| > R$ e $|z|^{-1} < R$. Per cui $\forall n \geq N$ con $N \in \mathbb{N}$ vale che

$$|z|^{-1} < \sqrt[n]{|a_n|}$$

per cui otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^{-n} |z|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |\sqrt[n]{|a_n|}|^n |z|^n < \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n$$

e la prima serie è ovviamente non assolutamente convergente per ogni $|z| > R$. \square

Teorema 9.23. Data una serie di potenze definiamo la sua derivata come

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad (9.4)$$

e dunque i raggi di convergenza di S' ed S sono gli stessi.

Dimostrazione. È un'ovvia applicazione del calcolo dei limiti; definiamo con $b_n = (n+1)a_{n+1}$ i coefficienti della serie di potenze derivata.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(n+1)a_{n+1}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(n+1)} \sqrt[n]{a_{n+1}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \end{aligned}$$

che è appunto lo stesso raggio di convergenza. \square

Teorema 9.24 (Teorema di Abel). Sia S una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora $S(z)$ è una funzione olomorfa in $|z - z_0| < R$ e S' è la sua derivata.

Dimostrazione. Assumiamo ancora una volta che z_0 della serie di potenze sia $z_0 = 0$. Prendiamo quindi $z \in B_0(R)$ e sia $\delta > 0$ tale che $\overline{B_0(\delta)} \subset B_0(R)$. Prendiamo quindi un $h \in B_0(\delta)$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{z+h-z} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n-1} \frac{\left(\frac{z+h}{z}\right)^n - 1}{\left(\frac{z+h}{z}\right) - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j \end{aligned}$$

Vogliamo mostrare che la serie sopra descritta converge uniformemente.

$$|z + h| \leq |z| + |h| \leq |z| + \delta$$

Quindi possiamo scrivere

$$\left| a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z + h)^j \right| \leq n |a_n| (|z| + \delta)^{n-1}$$

Utilizzando il Teorema 9.20 con $M_n = n |a_n| (|z| + \delta)^{n-1}$ sappiamo che converge per ogni $|z| + \delta < R$, dato che dal Teorema 9.23 vale che la derivata di una funzione ha lo stesso raggio di convergenza della funzione stessa. Per cui converge uniformemente in ogni $|z| < R$. Possiamo quindi calcolare il limite del rapporto incrementale, da cui si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

□

Capitolo 10

Integrali di linea

Il corso si fonderà sul calcolo degli integrali di funzioni in variabile complessa su un dominio - o una curva - complesso: vedremo alcune definizioni ed alcuni teoremi per il calcolo integrale e noteremo come le curve abbiano un ruolo fondamentale. Presto scopriremo anche come “scegliere” le curve per semplificare i calcoli.

Ci inoltreremo nel teorema più importante di questa sezione del corso: il *teorema integrale di Cauchy*.

10.1 Integrare su una curva

10.1.1 Integrare su una curva

Vogliamo definire l'integrale di funzioni complesse su curve nel piano complesso. Per fare ciò parametrizziamo le curve complesse su un intervallo reale.

Definizione 10.1. Sia $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua, siccome possiamo scrivere $f(t) = u(t) + iv(t)$ allora vale che

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

Proposizione 10.1. Valgono le seguenti proprietà per l'integrale definito in Definizione 10.1

1. è lineare, infatti, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ vale

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

2. commuta con l'operazione \Re, \Im .

$$\Re \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \Re(f(t)) dt \quad \Im \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \Im(f(t)) dt$$

3. vale la seguente disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

4. Se $\theta: [c, d] \rightarrow [a, b]$ è di classe C^1 e ha un inversa di classe C^1 allora

$$\int_{\theta(c)}^{\theta(d)} f(t) dt = \int_a^b f(\theta(t)) \theta'(t) dt$$

Dimostrazione di (1). Il primo punto deriva dalla linearità dell'integrale di Riemann. Basta dividere in parte reale e immaginaria della funzione $f = u + iv$. \square

Dimostrazione di (2). Segue dalla linearità dividendo la funzione in parte reale e immaginaria. \square

Dimostrazione di (3). Poniamo $\omega := \int_a^b f(t) dt$, allora se $\omega = 0$ è dimostrata. Se $\omega \neq 0$ allora poniamo $u = \bar{\omega}/|\omega|$, osserviamo che $|u| = 1$. Da cui

$$|w| = uw = \int_a^b \Re(uf(t)) dt \leq \int_a^b |uf(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt$$

\square

Dimostrazione di (4). Questo si può vedere come la Formula dell'area

$$\begin{aligned}\int_{\theta(a,b)} f(z) dz &= \int_{\theta(a,b)} u(x, y) \mathcal{L}^2(x, y) + i \int_{\theta(a,b)} v(x, y) \mathcal{L}^2(x, y) \\ &= \int_a^b u(\theta(t)) \theta'(t) \mathcal{L}^1(t) + i \int_a^b v(\theta(t)) \theta'(t) \mathcal{L}^2(t) \\ &= \int_a^b f(\theta(t)) \theta'(t) dt\end{aligned}$$

□

Definizione 10.2. Una **curva di classe C^1** nel piano complesso è una funzione $\gamma: J = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1 . L'immagine $\gamma(J) \subset \mathbb{C}$ è detta **traccia o sostegno della curva**. Una curva di classe C^1 a tratti è una funzione continua $\gamma: J \rightarrow \mathbb{C}$, di classe C^1 su J meno un numero finito di punti.

Definizione 10.3. Sia $\theta: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione di classe C^1 , con inversa di classe C^1 . Supponiamo che $\theta' > 0$ su $[c, d]$. Dunque θ è monotona crescente, con $\theta(c) = a$, $\theta(d) = b$. La curva di classe C^1 definita da $\bar{\gamma}(s) = \gamma(\theta(s)): [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ è detta **riparametrizzazione di γ** .

Definizione 10.4. La **lunghezza** della curva di classe C^1 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è definita come l'integrale

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Definizione 10.5. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva di classe C^1 con sostegno contenuto in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Osservazione 10.6. La definizione 10.5 è dipendente dalla parametrizzazione utilizzata, ma ciò non toglie che dia, per parametrizzazioni che non cambiano l'orientazione della curva, lo stesso risultato (come si può riparametrizzando avanti e indietro la curva).

Proposizione 10.2. L'integrale in Definizione 10.5 ha le seguenti proprietà

1. è lineare, ovvero date $f, g: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vale

$$\int_{\gamma} \lambda f(z) + \mu g(z) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz$$

2. vale la seguente disequazione per ogni $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma} |f(z)| \mathcal{H}^1(\gamma)$$

3. sia $-\gamma(t) := \gamma(a + b - t)$ la curva percorsa in senso opposto a quello di γ , allora

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

4. Se esiste F olomorfa tale che $F' = f$ su tutto Ω allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

In particolare, se γ è chiusa, vale $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

1. Deriva immediatamente dal punto 1 della Proposizione 10.1. \square

2. Segue dal punto 3 della Proposizione 10.1:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \max_{\gamma} |f(z)| \mathcal{H}^1(\gamma([a, b]))$$

\square

3. È conseguenza della formula 4 della Proposizione 10.1. Ponendo $s = \theta(t) = a + b - t$ si ottiene

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma(\theta)} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

\square

4. Osserviamo che $\frac{dF \circ \gamma}{dt} = (f \circ \gamma) \gamma'$. Per cui dal teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

\square

Osservazione 10.7. Le stesse proprietà valgono con opportuni accorgimenti anche per curve C^1 quasi ovunque. Infatti basta togliere i punti in cui non è definita la curva e considerare i tratti C^1 .

Teorema 10.8. Non esiste una funzione logaritmo olomorfa su tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Osserviamo che se $\gamma(t) = e^{it}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ allora $\gamma'(t) = ie^{it}$. Per cui

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2i\pi$$

Supponiamo esista $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ funzione logaritmo olomorfa su tutto il suo dominio. Allora $e^{f(z)} = z$ e quindi si avrebbe

$$1 = z' = (e^{f(z)})' = e^{f(z)} f'(z)$$

ovvero $f'(z) = 1/z$. Quindi f sarebbe una primitiva olomorfa di $1/z$. Quindi per il punto 4 della Proposizione 10.2 si avrebbe che $\int_{\gamma} 1/z dz = 0$, contraddicendo l'osservazione fatta all'inizio. \square

Teorema 10.9 (di Goursat). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e sia R un rettangolo tale che $R \subset \Omega$. Allora

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

ove ∂R è il bordo del rettangolo (il perimetro) percorso in senso anti-orario.

Geometria B

Dimostrazione. Per ogni rettangolo $R' \subset \Omega$ definiamo

$$\eta(R') := \left| \int_{\partial R'} f(z) dz \right|$$

Per cui suddividiamo R in quattro sottorettangoli, R_1, \dots, R_4 . La somma dell'integrale sul bordo dei 4 rettangoli dà l'integrale di f lungo R dato che i lati interni vengono percorsi in senso opposto e quindi valgono 0.

In particolare ci sarà un rettangolo R_{i_0} tale che

$$\eta(R_{i_0}) \geq \frac{\eta(R)}{4}$$

Suddividiamo ancora una volta R_{i_0} in altri 4 rettangoli, da cui si ottiene che esiste un rettangolo $R_{i_1} \subset R_{i_0}$ tale che

$$\eta(R_{i_1}) \geq \frac{\eta(R_{i_0})}{4} \geq \frac{\eta(R)}{16}$$

e procedendo iterativamente si ottiene una successione di rettangoli mano a mano più piccoli e tali che

$$\eta(R_{i_n}) \geq \frac{\eta(R)}{4^n}$$

Sia $\{z_n\}$ una successione di punti tale che $z_n \in R_{i_n}$. Allora questa successione è di Cauchy dato che $|z_n - z_m| \leq \text{diam}(R_{i_n}) \leq \text{diam}(R)/2^m$ dove $m < n$. In particolare la successione converge a un certo z^* .

Inoltre $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e quindi è olomorfa anche in z^* . Quindi essendo differenziabile in z^* si ottiene che

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \varepsilon |z - z^*|$$

vale per ogni $\varepsilon > 0$ e $|z - z^*| < \delta$ per qualche $\delta > 0$. Osserviamo che in particolare possiamo prendere come intorno in cui vale un rettangolo R_{i_n} per n "abbastanza grande". Osserviamo inoltre che, per le proprietà dei polinomi, il seguente integrale è nullo (ha primitiva)

$$\left| \int_{\partial R_{i_n}} -f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*) dz \right| = 0$$

Ritornando al calcolo di $\eta(R_{i_n})$ si ottiene questa stima

$$\begin{aligned} \eta(R_{i_n}) &= \left| \int_{\partial R_{i_n}} f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*) dz \right| \\ &< \varepsilon \text{diam}(R_{i_n}) \mathcal{H}^1(\partial R_{i_n}) \leq \varepsilon \frac{K}{4^n} \end{aligned}$$

ed essendo

$$\frac{\eta(R)}{4^n} \leq \eta(R_{i_n}) \leq \varepsilon \frac{K}{4^n}$$

allora $\eta(R) \leq \varepsilon K$ e per l'arbitrarietà di ε si ottiene la tesi. \square

Teorema 10.10 (Teorema di Cauchy). Sia $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ un disco aperto e f olomorfa sul disco e γ una curva chiusa con supporto $\gamma(I) \subset D$, allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Dimostrazione. Essenzialmente grazie al teorema di Goursat se si lavora su un convesso puoi e f olomorfa, allora f ha una primitiva F . Per concludere basta vedere che essendo una curva chiusa $F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = 0$. \square

Corollario 10.11. Sia D un disco aperto e sia f olomorfa in D . Siano γ_1, γ_2 curve con gli stessi estremi aventi entrambe supporto in D . Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Teorema 10.12. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ tale che

$$\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i) f(z) = 0$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ allora se R è un rettangolo con bordo in $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ vale

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Dimostrazione. A meno di suddividere il rettangolo iniziale in più sotto rettangoli, possiamo supporre che R contenga un solo punto di non derivabilità di f . Dividiamo il rettangolo in 8 sottorettangoli e un quadrato Q come in figura. Applicando il teorema di Goursat 10.9 agli otto rettangoli si ottiene che l'integrale sul bordo coincide con l'integrale sul bordo di Q .

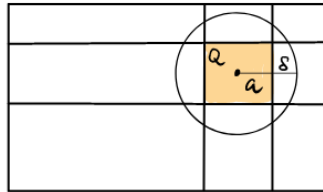


Figura 10.1:

Per ipotesi di f tale che $(z - a_i)f(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow a_i$, equivale a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che se $|z - a| < \delta$ allora $f(z)(z - a) < \varepsilon$. In particolare poiché la suddivisione fatta può essere arbitraria, ovvero il lato del quadrato Q possiamo sceglierlo in modo tale che per ogni $q \in Q$ vale $|q - a_i| < \delta$, per cui ¹

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \leq 4\mathcal{H}^1(\partial Q) \max_{|z - a_i|} \frac{\varepsilon}{|z - a_i|} = 8\varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε segue la tesi. \square

¹Osserviamo che

$$\max_{z \in \partial Q} \frac{1}{|z - a_i|} = \left(\frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\partial Q) \right)^{-1}$$

Corollario 10.13. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ tale che

$$\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i)f(z) = 0$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Sia γ una curva chiusa con supporto contenuto in $\mathbb{D} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ vale

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

Dimostrazione. Si procede in maniera analoga a quanto visto per il Teorema di Cauchy 10.10 per costruire una primitiva di f , denotiamola F (questo è possibile grazie al Teorema 10.12). Utilizzando le curve opportune (ovvero quelle soddisfacenti le ipotesi), si ottiene la tesi. \square

10.2 L'indice e la formula integrale di Cauchy

10.2.1 Indice di un punto rispetto ad una curva

Definizione 10.14. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. Allora si dice **indice** di $z \in \Omega$ rispetto a γ il numero

$$\text{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}$$

Lemma 10.15. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. Dato $\text{Ind}_\gamma(z)$ l'indice di $z \in \Omega$ rispetto a γ . Allora $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Definiamo

$$g(s) := \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

per cui $g(b) = 2i\pi \text{Ind}_\gamma(z)$ da cui vale che $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ sse $e^{g(b)} = 1$.

Diamo un nome a questa funzione $\varphi(s) = e^{g(s)}$. Allora vediamo che derivando $\varphi'(s) = \varphi(s) \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}$. Da cui si ottiene facilmente che la seguente funzione è costante

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma - z} \right)' = 0$$

Poiché $\varphi/(\gamma - z)$ è costante e $\gamma(b) = \gamma(a)$ vale

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} \iff \varphi(b) = \varphi(a)$$

per cui essendo che $\varphi(a) = e^0 = 1$ vale la tesi. \square

Lemma 10.16. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, e γ una curva chiusa tale che $\text{Im}(\gamma) \subset \Omega$ e sia $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua sul supporto di γ . Allora la funzione

$$f(z) := \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} dw$$

è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.

Dimostrazione. Dimostro che f è continua. Per cui provo a fare una stima puntuale per determinare la continuità. Allora sia $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ e sia $\delta = \text{dist}(z_0, \text{Im}(\gamma))$. Sia $z \in B_{z_0}(\delta/2)$ allora $|z - \gamma(t)| > \delta/2$ per ogni t . Quindi

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} - \frac{g(w)}{w - z_0} \right| \\ &\leq \max_t \left| \frac{g(\gamma(t))}{(\gamma(t) - z)(\gamma(t) - z_0)} \right| |z - z_0| \mathcal{H}^1(\gamma) \\ &\leq \frac{2}{\delta} \frac{1}{\delta} |z - z_0| \mathcal{H}^1(\gamma) \max_\gamma |g(w)| \end{aligned}$$

e quindi questa quantità converge a 0 per $z \rightarrow z_0$.

Dimostro che f è olomorfa. Fisso un $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ e definisco il rapporto incrementale

$$r(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z)(w - z_0)} dw$$

per quanto dimostrato prima $g(w)/(w - z)$ è una funzione su continua γ e $1/(w - z_0)$ pure (dato che $z_0 \notin \text{Im}(\gamma)$). Pertanto sappiamo che l'integrale di una funzione continua è continua, da cui esiste il limite di $r(z) \rightarrow r(z_0)$ per $z \rightarrow z_0$. Da cui segue che f è olomorfa. \square

Corollario 10.17. La funzione $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ è costante su $\Omega \setminus \text{Im}(\gamma)$.

Dimostrazione. Poiché assume solo valori discreti e dev'essere continua per i lemmi precedenti, segue che dev'essere costante. \square

Corollario 10.18. Vale $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ per ogni z nella componente illimitata di $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.

Dimostrazione. Sia $\text{Im}(\gamma) \subset B(0, R)$ ovvero è limitato da una palla di raggio R . Dato $\varepsilon > 0$ allora possiamo trovare una z tale da avere modulo $|z|$ abbastanza grande per cui valga

$$\frac{1}{|w - z|} \leq \frac{1}{|z| - |w|} \leq \frac{1}{|z| - R} < \varepsilon$$

per ogni $w \in \text{Im}(\gamma)$. Per cui possiamo stimare l'indice di γ in un punto z esterno alla palla. Per cui

$$|\text{Ind}_{\gamma}(z)| < \frac{1}{2\pi} \varepsilon \mathcal{H}^1(\gamma)$$

Ma essendo $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ una funzione costante sulle componenti connesse segue che dev'essere 0 dato che per ogni $\varepsilon > 0$ può essere scelto z tale che valga la relazione. \square

Osservazione 10.19. Questa osservazione è dettata dal fatto che abbiamo definito un'entità astratta senza argomentare nemmeno per un attimo il suo significato geometrico. Infatti l'indice di una curva chiusa γ ha un significato molto interessante. L'indice rappresenta quante volte la curva si *arrotola attorno a una delle componenti connesse che involge* (infatti in inglese si usa il termine *winding-numbers*). Cioè un cerchio rappresentato dalla curva

$$f(t) = e^{2i\pi t}$$

con $t \in [0, 1]$ avvolge la sua *parte interna* una sola volta. Infatti $\text{Ind}_f(z) = 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \mathbb{S}^1$.

10.2.2 La formula integrale di Cauchy

Teorema 10.20 (Formula integrale di Cauchy). Sia D un disco aperto e $f \in \mathcal{O}(D)$ e γ una curva chiusa con $\text{Im}(\gamma) \subset D$. Allora

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

per ogni $z \in D \setminus \text{Im}(\gamma)$.

Dimostrazione. Sia $z \in D \setminus \text{Im}(\gamma)$ fissato e sia $g(w) = (f(w) - f(z))/(w - z)$ per ogni $w \in D \setminus \{z\}$. Allora g è olomorfa su $D \setminus \{z\}$ e inoltre vale

$$\lim_{w \rightarrow z} g(w)(w - z) = 0$$

per la continuità di f . Per il Teorema dell'integrale nullo 10.12 (in particolare il corollario al teorema) applicato a g si ha

$$0 = \int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} dw$$

da cui segue la tesi. \square

Osservazione 10.21. Data una **curva di Jordan** ovvero una curva regolare a tratti, chiusa e semplice (ovvero è iniettiva), allora per il **teorema della curva di Jordan** vale che divide \mathbb{C} in due componenti connesse, una illimitata e una limitata. In particolare se γ è orientata positivamente avrà $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$ per ogni z nella componente connessa limitata, altrimenti sarà orientata negativamente e allora $\text{Ind}_{\gamma}(z) = -1$.

Corollario 10.22. Se γ è una curva chiusa di Jordan e f una funzione olomorfa, allora per ogni punto interno z vale

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Corollario 10.23. Sia $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia $B_a(r) \subset \mathbb{D}$ un disco aperto, allora

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

Dimostrazione. Ovvio per definizione di circonferenza $\gamma(t) = a + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. \square

Osservazione 10.24. Si può osservare che ponendo $f = u + iv$ il Corollario 10.23 dà la media integrale delle funzioni u, v sulla circonferenza.

10.2.3 Conseguenze della formula integrale

Definizione 10.25. Data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funzione olomorfa su $\Omega \setminus \{a\}$, si dice che a è una **signolarità eliminabile** se $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$.

Teorema 10.26 (Distruzione delle singolarità eliminabili). Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su $\Omega \setminus \{a\}$ tale da avere una singolarità eliminabile in a . Allora esiste $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\tilde{f}|_{\Omega \setminus \{a\}} = f$ e \tilde{f} è olomorfa su tutto Ω .

Dimostrazione. Fissiamo una palla attorno alla singolarità eliminabile a di raggio r , $B_a(r)$. Allora definiamo $\gamma = \partial B_a(r)$. Per il Teorema integrale di Cauchy 10.20 allora vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

che vale ovunque per ogni $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Definiamo l'equazione

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

su ogni $z \in B_a(r)$ la funzione è olomorfa per Lemma 10.16. Quindi posso definire la seguente funzione che sarà olomorfa ovunque su Ω :

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ g(z) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Teorema 10.27 (Teorema di Weierstrass). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $z_0 \in \Omega$ se $\overline{B_{z_0}(r)} \subset \Omega$ allora per ogni $z \in B_{z_0}(r)$ vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

dove $\gamma = \partial B_{z_0}(r)$

Dimostrazione. La dimostrazione è un semplice calcolo con un twist. Prendiamo $z_0 \in \Omega$ e vogliamo calcolare $f(z)$ dove $z \in \Omega$. Per la formula integrale di Cauchy vale (ponendo $\gamma = \partial B_{z_0}(r)$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw \end{aligned}$$

ma osserviamo che il secondo termine della moltiplicazione non è nient'altro che la serie geometrica per cui

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{f(w)}{(w - z_0)} \right)^{n+1} dw \right) (z - z_0)^n \end{aligned}$$

poiché la serie converge (si usi ad esempio l'M-test di Weierstrass) possiamo spostare la sommatoria dentro e fuori dall'integrale. Da cui la tesi. □

Corollario 10.28. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ allora $f \in C^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 10.27, infatti sapendo che derivando la serie si ottiene ancora una serie convergente uniformemente, deve essere convergente su tutto Ω per il Teorema di Abel e quindi qualsiasi derivata è convergente uniformemente su tutto Ω . \square

Corollario 10.29. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ esistono le derivate complesse n -esime $f^n(z)$ per ogni $z \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$. Inoltre se $\overline{B_{z_0}(r)} \subset \Omega$ e $\gamma = \partial B_{z_0}(r)$ allora

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Dimostrazione. Essendo f localmente analitica e derivando la serie in z_0 si ottiene

$$f^n(z) = n!a_n$$

da cui la tesi. \square

Corollario 10.30 (Stime di Cauchy). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funzione olomorfa in Ω . Prendiamo $z_0 \in \Omega$, $\overline{B_{z_0}(r)} \subset \Omega$, $\gamma = \partial B_{z_0}(r)$ e $M = \max_{\gamma} |f|$ allora vale la seguente stima

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} \mathcal{H}^1(\gamma) = \frac{Mn!}{r^n}$$

\square

Definizione 10.31. Una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **intera** se è analitica su tutto Ω , con $\Omega = \mathbb{C}$.

Teorema 10.32 (Liouville). Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, ovvero è una funzione intera. Se f è limitata, allora f è costante.

Dimostrazione. Sia $K = \sup_{\mathbb{C}} |f|$, allora $K < +\infty$ poiché f limitata. Dal Corollario 10.30 in $z_0 = 0$ si ha

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!K}{r^n}$$

per ogni $r > 0$. Quindi portando al limite $r \rightarrow 0$ si ottiene $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0)$$

poiché vale per ogni $z \in \mathbb{C}$, segue che f dev'essere costante. \square

Osservazione 10.33. Cosa succede se si prova ad usare il Teorema di Liouville in \mathbb{R} ? Non funziona. Infatti basta considerare la funzione $\sin(x)$ che è analitica ovunque e limitata (su \mathbb{R}), ma non è una funzione costante.

Corollario 10.34. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ e $f = u + iv$. Se u oppure v è limitata allora f è costante.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(z) = e^{f(z)}$. Allora $|g(z)| = e^{u(z)}$ ed essendo $u(z)$ limitata anche $|g(z)|$ lo è. Possiamo applicare quindi il teorema di Liouville 10.32 e ottenere che $g(z)$ è una costante. Per cui $0 = g'(z) = (e^f)' = e^f f'$ poiché $e^f \neq 0$, segue che $f' = 0$, per cui f è costante.

Se fosse v limitata allora avrei che la funzione $h(z) = e^{-if(z)}$ avrebbe modulo limitato e per Liouville h sarebbe costante. Per cui $-ie^{-if(z)} f'(z) = 0$ per cui $f'(z) = 0$ per ogni z e f sarebbe ancora una volta una funzione costante. \square

Teorema 10.35 (Teorema fondamentale dell'algebra). Ogni polinomio non costante $p(z)$ ha una radice z_0 tale che $p(z_0) = 0$.

Dimostrazione. Se $p(z)$ non avesse radici allora $f(z) := \frac{1}{p(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. In particolare f sarebbe una funzione con modulo limitato (infatti l'unico modo perché possa essere non limitata è che $p(z) \rightarrow 0$ per qualche z). In particolare possiamo usare il Teorema di Liouville 10.32 e ottenere che f è una funzione costante su \mathbb{C} , ovvero $p(z)$ è un polinomio costante. \square

Dimostrazione. Consideriamo il polinomio $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$. Allora la funzione

$$\left\| \frac{p(z)}{z^d} \right\| \rightarrow 1$$

per $|z| \rightarrow +\infty$. Per cui per un certo $M > 0$ tale che $|z| > M$ abbiamo che

$$\left\| \frac{p(z)}{z^d} - 1 \right\| < 1$$

in particolare quindi se $\gamma = \partial B_M(0)$ allora possiamo vedere che vale

$$\|p(z) - z^d\| < \|z^d\|$$

quindi per il Teorema di Rouché 13.10 dev'essere che $p(z)$ ha d radici in \mathbb{C} . \square

Teorema 10.36 (Morera). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in C^0(\Omega)$ e tale che

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

per ogni rettangolo $R \subset \Omega$ allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. Per costruzione analoga a quanto fatto nel Teorema 10.10 si può creare F primitiva di f . Ma poiché $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ allora è anche $C^\infty(\Omega)$ e in particolare $f \in C^\infty(\Omega)$ ovvero è olomorfa. \square

Corollario 10.37. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su Ω . Se $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente sui compatti di Ω (una condizione leggermente più debole che richiedere che sia convergente uniformemente su tutto Ω) allora f è olomorfa su Ω .

Dimostrazione. Poiché ogni rettangolo $R \subset \Omega$ è un compatto su Ω , allora $\{f_n\} \rightarrow f$ converge in modo uniforme. Per cui vale

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial R} f_n(z) dz = 0$$

per il teorema di Morera 10.36 risulta che f è olomorfa. \square

10.3 Teoremi integrali di Cauchy

10.3.1 Teoremi integrali in forma generale

L'essenza di questo capitolo è generalizzare il teorema della formula integrale di Cauchy in forma locale.

Definizione 10.38. Una **catena** è una somma finita formale

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$$

dove γ_i sono curve chiuse distinte e C^1 a tratti con i coefficienti $m_i \in \mathbb{Z}$. Inoltre il **supporto di Γ** è tale che

$$\text{Im}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^n \text{Im}(\gamma_i)$$

Osservazione 10.39. Per come è stata definita la catena di curve chiuse (o meglio per come vogliamo che agisca), valgono le seguenti proprietà:

1. Date due catene di curve chiuse $\Gamma_1 = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i^1$ e $\Gamma_2 = \sum_{j=1}^m n_j \gamma_j^2$ allora la loro somma consiste in $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i^1 + \sum_{j=1}^m n_j \gamma_j^2$ e i coefficienti m_i e n_j vengono raccolti se le curve $\gamma_i^1 = \gamma_j^2$.
2. L'integrale lungo una catena si può calcolare come la somma pesata degli integrali lungo le rispettive curve chiuse da cui è composta, quindi vale

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

data una catena $\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$.

3. Inoltre si può definire l'indice di una catena come la combinazione lineare degli indici delle curve chiuse da cui è composta, ovvero

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum_{i=1}^n m_i \text{Ind}_{\gamma_i}(z)$$

Definizione 10.40. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e Γ una catena di curve chiuse tale che $\text{Im}(\Gamma) \subset \Omega$. Allora si dice che Γ è **omologa a zero in Ω** se $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Definizione 10.41. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e Γ_1, Γ_2 catene di curve chiuse tale che $\text{Im} \Gamma_1, \text{Im} \Gamma_2 \subset \Omega$. Allora si dice che Γ_1 e Γ_2 sono **olomoghe in Ω** se $\Gamma_1 - \Gamma_2 \sim_{\Omega} 0$, ovvero vale per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ che $\text{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\Gamma_2}(z)$.

Osservazione 10.42. Useremo per indicare l'omologia tra due curve la notazione $\Gamma_1 \sim_{\Omega} \Gamma_2$.

Proposizione 10.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia γ una catena tale che $\gamma \sim_{\Omega} 0$. Siano z_1, \dots, z_n punti di Ω e siano D_i dei cerchi a due a due disgiunti centrati in z_i e tali che $D_i \subset \Omega$. Allora se indichiamo con $\gamma_i = \partial D_i$ vale su $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ la seguente omologia

$$\gamma \sim \sum_{i=1}^m \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \gamma_i$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $\mathbb{C} \setminus \Omega' = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{z_1, \dots, z_n\}$. Per cui prendiamo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ allora vale $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ poiché sappiamo che è omologa alla curva 0. Inoltre vale lo stesso per ogni $i = 1, \dots, n$ il seguente $\text{Ind}_{\gamma_i}(z) = 0$.

Se invece $z = z_j$ per $j \in \{1, \dots, n\}$ allora $\text{Ind}_{\gamma}(z_j) = m_j$ poiché è possibile che siano nella parte interna di $\text{Im}(\gamma)$, mentre $\text{Ind}_{\gamma_i}(z_j) = \delta_{i,j}$ ovvero il delta di Kronecker. Per cui

$$\text{Ind}_{\sum_{i=1}^n m_i \gamma_i}(z_j) = m_j = \text{Ind}_{\gamma}(z_j)$$

da cui la tesi. \square

Lemma 10.43. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $g: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

è una funzione continua. Inoltre per ogni $w_0 \in \Omega$ fissato vale $g(z, w_0) \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dimostrazione. **Dimostrazione che g è continua**

Se $(z_0, w_0) \in \Omega \times \Omega$ con $z_0 \neq w_0$ la continuità di g discende dalla definizione dato che il denominatore $w_0 - z_0 \neq 0$ e f è olomorfa. Per cui sia $(z_0, z_0) \in \Omega \times \Omega$. Sappiamo che f' è continua dato che f olomorfa. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f'(\alpha) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$ se $\alpha \in B_{z_0}(\delta) \subset \Omega$. Quindi fissiamo due punti all'interno della palla di raggio δ e centro z_0 , ovvero $z, w \in B_{z_0}(\delta)$. Allora se $z = w$ si ha

$$|g(z, z) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$$

e quindi è continua. Se $z \neq w$ allora

$$\begin{aligned} g(z, w) - g(z_0, z_0) &= \frac{1}{w - z} (f(w) - f(z)) - f'(z_0) \\ &= \frac{1}{w - z} (f(w) - f(z) - f'(z_0)(w - z)) \end{aligned}$$

possiamo definire quindi una retta $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ che unisce i due punti w e z tale che $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$. Quindi $\gamma(t) = (1 - t)z + tw$ e inoltre $\gamma'(t) = w - z$. Allora possiamo esprimere la formula di prima come

$$\begin{aligned} g(z, w) - g(z_0, z_0) &= \frac{1}{w - z} (f(w) - f(z) - f'(z_0)(w - z)) \\ &= \frac{1}{w - z} \int_{\gamma} f'(\alpha) - f'(z_0) d\alpha \\ &= \frac{1}{w - z} \int_0^1 (f'(\gamma(t)) - f'(z_0)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 f'(\gamma(t)) - f'(z_0) dt \end{aligned}$$

da cui si può maggiorare in valore assoluto l'espressione, sapendo che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato un $\delta > 0$ e $z, w \in B_{z_0}(\delta)$, con la seguente

$$|g(z, w) - g(z_0, z)| \leq \int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(z_0)| dt \leq \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon$$

ovvero g è continua.

Dimostrazione che g è olomorfa dato un w_0

Se $w_0 \in \Omega$ viene fissato, allora $g(z, w_0) \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_0\})$. Inoltre se $z = w_0$ è una singolarità eliminabile per $g(z, w_0)$. Per la continuità $g(z, w_0)$ coincide con la sua estensione olomorfa su tutto Ω (teorema di Distruzione della singolarità eliminabile 10.26). \square

Teorema 10.44. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e Γ una catena in Ω con $\Gamma \sim_\Omega 0$. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora

1. Vale la formula integrale di Cauchy per ogni $z \in \Omega \setminus \text{Im}(\Gamma)$

$$f(z) \text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

2. Vale il teorema dell'integrale nullo di Cauchy

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0$$

Dimostrazione parte 1.

Definizioni preliminari

Sia $g: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definita come nel Lemma 10.43. Poniamo quindi

$$\Omega' := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\Gamma) \mid \text{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$$

ovvero Ω' rappresenta la componente connessa esterna alla catena Γ e quindi è un aperto. Essendo inoltre $\Gamma \sim_\Omega 0$, dev'essere che $\Omega' \supset \mathbb{C} \setminus \Omega$. Per cui $\Omega \cup \Omega' = \mathbb{C}$. Poniamo

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z, w) dw & \text{per } z \in \Omega \\ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw & \text{per } z \in \Omega' \end{cases}$$

osserviamo che la definizione è ben posta dato che se $z \in \Omega \cap \Omega'$ allora la definizione coincide

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z, w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{f(z)}{2\pi i} \text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

poiché essendo in Ω' , sappiamo che $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$.

Dimostriamo che h è intera

Osserviamo che $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, infatti $h \in \mathcal{O}(\Omega')$ per il Lemma 10.16 e inoltre possiamo dimostrare che $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ come conseguenza del Teorema di Morera

10.36. Bisogna quindi verificare che per ogni disco aperto D tale che anche $\overline{D} \subset \Omega$ e $R \subset D$ è un rettangolo questo si annulli. Calcoliamo l'integrale di h lungo ∂R ovvero

$$\int_{\partial R} h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \int_{\Gamma} g(z, w) dw dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_{\partial R} g(z, w) dz dw$$

per il Teorema di Fubini grazie alla proprietà che g è continua (Lemma 10.43). Ma sappiamo che

$$\int_{\partial R} g(z, w) dz = 0$$

per ogni w dato che $z \mapsto g(z, w)$ è una funzione olomorfa. Per cui segue che $h \in \mathcal{O}(D)$ per ogni disco aperto $D \subset \Omega$, per cui è olomorfa su tutto Ω .

Conclusionione

Dobbiamo far vedere che h sia limitata. Prendiamo z abbastanza grande e tale che $|z| - |w| > 0$ per ogni $w \in \text{Im}(\Gamma)$ e $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$. Allora $z \in \Omega'$ e vale la seguente disuguaglianza

$$2\pi|h(z)| = \left| \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dz \right| \leq \left(\sup_{w \in \text{Im}(\Gamma)} \frac{|f(w)|}{|z| - |w|} \right) \mathcal{H}^1(\Gamma) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$$

Se $|h(z)| \leq 1$ per $|z| \geq M$ allora

$$|h(z)| \leq \max \left\{ 1, \max_{|w| \leq M} |h(w)| \right\}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Quindi per il teorema di Liouville 10.32 e poiché il limite a infinito tende a 0 dev'essere che $h(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Per cui segue la tesi, per ogni $z \in \Omega \setminus \text{Im}(\Gamma)$ vale

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z)$$

□

Dimostrazione parte 2: Sia $z_0 \in \Omega \setminus \text{Im}(\Gamma)$. Per il punto precedente applicato alla funzione $F(z) = f(z)(z - z_0)$ vale

$$0 = F(z_0) \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w) dw$$

□

Corollario 10.45. Se $\Gamma_1 \sim_{\Omega} \Gamma_2$ allora vale

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

10.4 L'indice rispetto alle curve continue

10.4.1 Ridefinire l'indice per curve non C^1

Lemma 10.46. Siano γ_1, γ_2 curve chiuse di classe C^1 a tratti definite su $[a, b]$ tali che $z \notin \text{Im } \gamma_1 \cup \text{Im } \gamma_2$. Se vale inoltre che

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_2(t) - z| \quad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

allora $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z)$

Dimostrazione. Dalla definizione segue che $\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_{\gamma-z}(o)$. Assumiamo quindi $z = 0$. Sia

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}$$

allora vale che $|\gamma(t) - 1| \leq 1$ per ogni t , inoltre segue dalle ipotesi che $z = 0 \notin \text{Im}(\gamma)$. Dunque $\text{Im}(\gamma) \subset B_1(1)$ e dunque l'origine appartiene alla componente illimitata di $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, da cui segue per Corollario 10.18 che $\text{Ind}_\gamma(0) = 0$. Ma

$$2\pi i \text{Ind}_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{dw}{w} = \int_a^b \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} - \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} \right) dt = 2\pi i (\text{Ind}_{\gamma_1}(0) - \text{Ind}_{\gamma_2}(0))$$

ovvero la tesi. \square

Corollario 10.47. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva continua chiusa con $z \notin \text{Im}(\gamma)$. Esiste $\delta > 0$ tale che pper ogni coppia di curve (di classe C^1 a tratti) $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z\}$ tali che $\|\gamma - \gamma_1\|_\infty < \delta$ e $\|\gamma - \gamma_2\|_\infty < \delta$ si ha $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z)$

Dimostrazione. Assumiamo ancora $z = 0$. Sia $\delta = \inf |\gamma(t)|$. Allora per ogni $t \in [a, b]$ vale

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_1(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma_2(t)| < 2\delta$$

e inoltre vale

$$|\gamma_2(t)| \geq |\gamma(t)| - |\gamma(t) - \gamma_2(t)| \geq 2\delta$$

e per il Lemma 10.46, si ottiene la tesi. \square

Osservazione 10.48. Osserviamo che il corollario ci permette di definire $\text{Ind}_\gamma(z)$ per una curva $\gamma \in C^0(\Omega)$ e non per forza C^1 a tratti. Dato che si può approssimare qualsiasi funzione continua in modo uniforme attraverso delle poligoni C^1 a tratti.

Teorema 10.49. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Se $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ sono curve continue chiuse e omotope in Ω allora vale $\gamma_0 \sim_\Omega \gamma_1$.

Dimostrazione. Indichiamo con $F: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ l'omotopia tra le curve γ_1 e γ_2 . Allora sia $t_0 \in I$ fissato e sia $\delta > 0$ associamo $\gamma_{t_0}(s) = F(s, 0)$. Inoltre sappiamo che F è uniformemente continua poiché continua e definita su un compatto. Quindi esiste $\delta' > 0$ tale che

$$|t - t_0| < \delta' \implies \|\gamma_t - \gamma_{t_0}\| < \frac{\delta}{2}$$

Fissiamo ora un t_1 per cui vale $|t_1 - t_0| < \delta'$ e denominiamo con $\hat{\gamma}_{t_0}, \hat{\gamma}_{t_1}$ curve di classe C^1 a tratti tali che $\|\gamma_{t_i} - \hat{\gamma}_{t_i}\| < \delta/2$ per $i = 0, 1$. Allora vale

$$\|\gamma_{t_0} - \hat{\gamma}_{t_1}\| \leq \|\gamma_{t_0} - \gamma_{t_1}\| + \|\gamma_{t_1} - \hat{\gamma}_{t_1}\| < \delta$$

per il Corollario 10.47 vale che $\text{Ind}_{\gamma_{t_0}}(z) = \text{Ind}_{\gamma_{t_1}}(z)$. Per cui segue che la funzione $t \mapsto \text{Ind}_{\gamma_t}(z)$ è localmente costante e quindi continua e a valori interi sull'insieme connesso $[0, 1]$. In particolare è costante e quindi vale $\text{Ind}_{\gamma_0}(z) = \text{Ind}_{\gamma_1}(z)$ che era quanto si voleva dimostrare. \square

Corollario 10.50. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se γ_0, γ_1 sono curve chiuse di classe C^1 a tratti e omotope in Ω allora

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Dimostrazione. Omotopia implica l'omologia delle curve, da cui il teorema per formula integrale di Cauchy. \square

Corollario 10.51. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se γ_0, γ_1 sono curve chiuse di classe C^1 a tratti e omotope relativamente a $\{0, 1\}$ allora

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Dimostrazione. Possiamo definire la curva chiusa C^1 a tratti $\gamma = \gamma_0 \circ \gamma_1^{-1}$ è omotopa in Ω al cammino costante $c_{\gamma(0)}$ e dunque si ottiene

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

da cui la tesi. \square

10.4.2 Applicazioni dell'indice

Teorema 10.52. La mappa $\Psi: \pi(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come $\Psi([\gamma]) = \text{Ind}_{\gamma}(0)$ è un isomorfismo di gruppi e in particolare $\pi(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Osserviamo che se indichiamo con \circ la composizione di due cappi α, β allora vale che

$$\text{Ind}_{\alpha \circ \beta}(z) = \text{Ind}_{\alpha}(z) + \text{Ind}_{\beta}(z)$$

quindi vale che Ψ sia un omomorfismo tra i due gruppi.

Inoltre Ψ è suriettivo poiché vale, definito $\alpha(t) = e^{in\pi}$ vale $\text{Ind}_{\alpha}(z) = n \in \mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Dobbiamo infine dimostrare che sia anche iniettiva. Quindi dobbiamo mostrare che $\ker(\Psi) = \{[c]\}$. Per cui prendiamo una classe $[\alpha] \in \ker(\Psi)$ e un suo rappresentante $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Poniamo $t \in I$ allora definiamo

$$g(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds \quad f(t) := e^{2\pi i g(t)}$$

la funzione g soddisfa le condizioni $g(0) = g(t) = \text{Ind}_\gamma(z) = 0$. Inoltre $g' = \gamma'/(2\pi i\gamma)$ e quindi si può riscrivere $f' = f\gamma'/\gamma$. Da questa osservazione si può dedurre che f/γ è una funzione costante dato che

$$\left(\frac{f}{\gamma}\right)' = \frac{f'}{\gamma} - \frac{f\gamma'}{\gamma^2} = 0$$

ed essendo che $f(0)/\gamma(0) = 1$ allora vale per ogni t . In particolare vuol dire che $f = \gamma$ per ogni t . Per cui $\gamma(t) = e^{2\pi i g(t)}$ e dunque $|\gamma| = 1$ per ogni t . Sapendo che quindi $\gamma(t)$ può solo *girare* nella circonferenza di raggio 1 dato che ha modulo costante, dev'essere che $g(t) \in \mathbb{R}$ per ogni t , allora è un cappio in $(\mathbb{R}, 0)$. Ma essendo \mathbb{R} semplicemente connesso, segue che g è omotopo al cappio costante in 0. Pertanto γ è omotopo a $e^{2\pi i 0} = 1$. Ovvero per qualsiasi rappresentante scelto della classe $\alpha \in \ker(\Psi)$, si ha che la classe $\alpha = [c]$ ovvero la classe costante.

Osserviamo infine che la classe di cappi usate sono di curve regolari, mentre noi vogliamo descrivere l'isomorfismo per tutti i cappi continui. Per generalizzare l'enunciato ai cappi continui osserviamo che possiamo sempre portare una curva continua a una curva differenziabile attraverso un omotopia². Da cui vale effettivamente l'isomorfismo su tutto il gruppo fondamentale. \square

Teorema 10.53. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso. Sia $u \in C^2(\Omega)$ funzione armonica. Allora esiste $v \in C^2(\Omega)$ tale che $f = u + iv$ è olomorfa su Ω .

Dimostrazione. Osserviamo che $\pi_1(\Omega, z_0) = \{1\}$ dato che è connesso e dato che u è armonica abbiamo che definendo $g = u_x - iu_y$ allora g soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann, pertanto $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Per il Corollario 10.51 segue che indipendentemente dalla curva γ scelta che unisce z a z_0 vale

$$h(z) := \int_\gamma g(w) dw$$

ovviamente $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $h' = g$. Quindi descrivendo $h(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ vale che $u_x = \Re(g) = \alpha_x$ e $u_y = -\Im(g) = \beta_x = -\alpha_y$. Quindi possiamo osservare che $u_x - \alpha_x = 0 = u_y - \alpha_y$ da cui si può concludere che la funzione $(u - \alpha)(z) = c \in \mathbb{C}$ è costante e in particolare è una costante reale per come è stata definita u , infatti vale $c \in \mathbb{R}$. Per concludere basta osservare che definendo $f = (u - \alpha) + h = u + i\beta$ allora $\Re(f) = u$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. \square

²N.d.R. basta osservare gli enunciati che precedono.

Capitolo 11

Serie di Laurent

In modo analogo alle serie di potenze usate per descrivere una funzione olomorfa su una palla aperta, è possibile descrivere una funzione olomorfa in una corona circolare attraverso una sorta di “serie di potenze”. Quest’ultime vengono chiamate serie di Laurent.

11.1 Serie di Laurent e singolarità solate

11.1.1 Funzioni olomorfe come serie di potenze

Definizione 11.1. Una *serie di Laurent* è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

con $a_n \in \mathbb{C}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ fissato e $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Proposizione 11.1. Esistono $r, R \in [0, +\infty]$ tali che la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

converge assolutamente su una corona circolare

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

e converge uniformemente su ogni corona chiusa

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid r' \leq |z - z_0| \leq R'\}$$

con $r' > r$ e $R' < R$.

Dimostrazione. Osserviamo che la serie di Laurent si può scrivere come sommatoria di due serie di potenze

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \\ & \sum_{m=-\infty}^0 a_m \frac{1}{(z - z_0)^m} \end{aligned} \tag{11.1}$$

la seconda basta fare una sostituzione $w = 1/(z - z_0)$ e diventa una serie di potenze. Per il Teorema di Hadamard 9.22 le serie di potenze hanno un raggio di convergenza, quindi denotiamo con $R, R_1 \in [0, +\infty]$ rispettivamente il raggio di convergenza della serie di potenze positiva e della serie di potenze negativa. Ponendo $r = 1/R_1$ si ottiene il raggio di convergenza della parte della serie di potenze negativa (ovvero formula 11.1) in funzione di z . Pertanto la serie di Laurent converge (la parte a indici negativi) assolutamente in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ e uniformemente in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \geq r'\}$ per ogni $r' > r$. Analogamente la parte a indici positivi converge assolutamente in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ e uniformemente per ogni $R' < R$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R'\}$. Intersecando gli insiemi di convergenza per la serie a indici positivi e quella a indici negativi, otteniamo la tesi. \square

Osservazione 11.2. Se $r < R$ la corona $C_{z_0}(r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ è non vuota e la serie di Laurent ha somma $f \in \mathcal{O}(C_{z_0}(r, R))$. Viceversa se f è olomorfa su una corona si ottiene lo sviluppo di Laurent della funzione.

Teorema 11.3. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto contenente la corona circolare chiusa

$$\overline{C_{z_0}(r, R)} := \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$$

allora si può scrivere f come somma di una serie di Laurent, ovvero

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dove $z \in C_{z_0}(r, R)$. Vale la convergenza assoluta su $C_{z_0}(r, R)$ e la convergenza uniforme su $\overline{C_{z_0}(r', R')}$ con $r < r' < R' < R$. I coefficienti a_n sono della seguente forma

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r''}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

dove $\gamma_{r''} = \partial B_{z_0}(r'')$ percorso in senso antiorario con $r \leq r'' \leq R$.

Dimostrazione. Siano R, r i raggi di convergenza della corona della serie di Laurent. Allora definiamo $\Gamma = \gamma_R - \gamma_r \sim_{\Omega} 0$. Sappiamo per omologia quindi che $z \in C_{z_0}(r, R)$ allora $1 = \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \text{Ind}_{\gamma_R}(z) - \text{Ind}_{\gamma_r}(z)$ e per definizione dell'indice sappiamo che $\text{Ind}_{\gamma_R} = 1$ e quindi $\text{Ind}_{\gamma_r} = 0$. Per cui per il Teorema delle Formule Integrale di Cauchy 10.44 si ottiene che

$$f(z) = f(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

e il primo integrale, in modo analogo a quanto fatto nel Teorema di Weierstrass 10.27 diventano i termini positivi della serie di Laurent, ovvero

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Il secondo integrale si sviluppa in modo analogo solo che essendoci il meno cambia il segno

$$- \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} dw$$

possiamo vedere il secondo membro della moltiplicazione come una serie geometrica e quindi si ottiene che

$$- \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \sum_{n=-\infty}^0 \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw (z - z_0)^n$$

Per concludere basta osservare che per ogni $\partial B_{z_0}(r')$ con $r \leq r' \leq R$ si ha che $\gamma_r \sim_{\Omega} \gamma_{r'} \sim_{\Omega} \gamma_R$ e quindi si ottiene che ogni a_n si può scrivere come

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

□

Osservazione 11.4. Al posto di $\gamma_{r'}$ nella forma di a_n può essere presa una qualsiasi curva omotopa al disco. In particolare basta che sia una curva di Jordan.

Osservazione 11.5. Se f è olomorfa sul disco $B_{z_0}(R)$ i coefficienti a_n con $n < 0$ sono tutti nulli, infatti la funzione $f(w)/(w-z_0)^{n+1}$ è olomorfa sul disco e quindi ammette primitiva ed essendo che il disco è una curva chiusa si ha che tutti i coefficienti a indice negativo della serie di Laurent si annullino.

Definizione 11.6. Il coefficiente della serie di Laurent centrata in z_0 , a_{-1} è detto *residuo* di f

$$\text{Res}_{z_0}(f) = a_{-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw$$

per ogni curva di Jordan γ in Ω e $z_0 \in \text{interno}(\gamma)$.

11.1.2 Le singolarità di funzioni olomorfe

Definizione 11.7. Sia D un disco aperto centrato in z_0 . Se $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$ si dice che z_0 è una *singolarità isolata* di f .

Esempio 11.8. 1. Se una singolarità è eliminabile allora è anche isolata, dato che f è olomorfa ovunque tranne nel punto dove ha una singolarità.

Definizione 11.9 (Classificazione singolarità isolate). Sia z_0 singolarità isolata di $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ e siano $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ i coefficienti della rispettiva serie di Laurent. Allora

1. z_0 è *eliminabile* sse $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.
2. z_0 è un *polo di ordine* $m > 0$ di f sse $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < -m$.
3. z_0 è una *singolarità essenziale* sse esistono infiniti coefficienti $a_n \neq 0$ con $n < 0$.

Osservazione 11.10. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ tale che ha serie di Laurent $a_n = 0$ per ogni $n < 0$ allora f può essere estesa come una funzione olomorfa su tutto Ω (teorema di distruzione della singolarità). Quindi il suo sviluppo di Laurent equivale a quello della sua estensione.

Se f invece ha una singolarità eliminabile, allora posso *eliminare* la singolarità e definire \tilde{f} tale che è uguale f ovunque e olomorfa su tutto Ω . Quindi

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{\tilde{f}(w)}{w - z_0} dw$$

ma poiché $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ segue che $a_n = 0$ per il teorema della forma integrale di Cauchy.

Esempio 11.11.

1. Sia $f(z) = 1/z$ allora proviamo a vedere che tipo di singolarità ha in $z = 0$, il residuo è

$$\text{Res}_f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw = 1$$

Per ogni $n < 1$ i coefficienti si azzerano.

Quindi ha un polo di ordine 1.

2. Sia invece

$$f(z) = \frac{z}{(\cos(z) - 1)^2}$$

allora stimando $\cos(z) - 1 = -z^2/2 + o(z^3) = z^2 h(z)$ con $h(0) = -1/2$ e $h \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora

$$f(z) = \frac{z}{z^4 h(z)^2} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{h(z)^2}$$

con $1/h^2$ olomorfa su un intorno di $z = 0$. Quindi possiamo osservare che $1/h^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ per qualche $b_n \in \mathbb{C}$. Infine si ottiene che

$$f(z) = \frac{b_0}{z^3} + \frac{b_1}{z^2} + \dots$$

ovvero f ha un polo di ordine 3 nell'origine.

Proposizione 11.2. Una funzione $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$ definita su un disco aperto D ha un polo di ordine m in z_0 se e solo se $g := 1/f$ è olomorfa in un intorno di z_0 e ha uno zero di ordine m in z_0 .

Dimostrazione. Dimostriamo che se f ha un polo di ordine m in z_0 allora g è olomorfa in un intorno di z_0 e ha uno zero di ordine m . Essendo olomorfa allora per la decomposizione in serie di Laurent possiamo osservare che $h(z) := f(z)(z - z_0)^m$ (è olomorfa su tutto D questa), allora ha sviluppo solo in serie di potenze. In particolare

$$h(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = a_{-m}$$

Quindi $g(z) = 1/f(z) = (z - z_0)^m 1/h(z)$ è olomorfa in un intorno I di z_0 . E ovviamente ha sviluppo in serie di potenze in I , ovvero ha forma

$$g(z) = \frac{1}{a_{-m}} (z - z_0)^m + \dots$$

ovvero ha uno zero di ordine m in z_0 .

Dimostriamo l'implicazione nel senso contrario, anche se è del tutto analogo a quanto fatto precedentemente. Allora è ovvio che

$$g(z) = (z - z_0)^m \tilde{h}(z)$$

con $\tilde{h}(z_0) \neq 0$ (altrimenti avrei uno zero di ordine maggiore di m). Per definizione di g si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\tilde{h}(z)}$$

poiché g era olomorfa in un intorno di z_0 , dev'essere che \tilde{h} abbia come sviluppo di Laurent uno sviluppo in serie di potenze, per cui

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots$$

e poiché $a_{-m} \neq 0$ segue che f ha un polo di ordine m in z_0 . \square

Osservazione 11.12. Se z_0 è un polo di ordine $m > 0$ di f e $f(z)(z - z_0)^m = h(z)$, allora $h \in \mathcal{O}(D)$ poiché la sua espansione di Laurent è una serie di potenze

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{h(z)}{(z - z_0)^m} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$$

quindi segue che $h(z) = f(z)(z - z_0)^m = c \in \mathbb{C}$ finito per $z \rightarrow z_0$.

Definizione 11.13. Sia $S \subset \Omega$ sottoinsieme discreto dell'aperto Ω . Se $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$ e f ha poli o singolarità eliminabili nei punti di S , allora f è detta *meromorfa* su Ω . Lo indicheremo con $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Esempio 11.14.

1. Se ho una funzione razionale $f = p/q$ dove p, q sono polinomi complessi e ovviamente $q \neq 0$ allora $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Infatti se z_0 è uno zero di q di ordine k allora possiamo supporre che al massimo per $l \geq 0$ vale

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - z_0)^l \tilde{p}(z) \\ q(z) &= (z - z_0)^k \tilde{q}(z) \\ \therefore f(z) &= (z - z_0)^{l-k} \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)} \end{aligned}$$

e quindi al massimo z_0 è un polo di ordine $l - k$ (se $k > l$) altrimenti è una singolarità eliminabile.

2. Sia $f(z) = e^{1/z}$ allora possiamo vedere che ha una singolarità essenziale all'origine

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{m=-\infty}^0 \frac{1}{(-m)!} z^m$$

Teorema 11.15. Se $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$ e z_0 è una singolarità essenziale di f allora $f(D \setminus \{z_0\})$ è denso in \mathbb{C} .

Dimostrazione. Supponiamo che $\overline{f(D \setminus \{z_0\})} \neq \mathbb{C}$ allora esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$ tale che $B_\alpha(\delta) \cap f(D \setminus \{z_0\}) = \emptyset$ cioè $|f(z) - \alpha| \geq \delta$ per ogni $z \in D \setminus \{z_0\}$. Sia quindi

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha} \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$$

allora $g \leq 1/\delta$, ovvero è limitata. Pertanto g ha una singolarità eliminabile in z_0 e questo indica che $f - \alpha$ può avere al massimo una discontinuità eliminabile o un polo. Ma f ha una singolarità essenziale, da cui l'assurdo. \square

Osservazione 11.16. Le singolarità isolate possono essere quindi caratterizzate dal *comportamento locale* di f in z_0 :

1. z_0 è una singolarità eliminabile sse esiste il limite e $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| < +\infty$.
2. z_0 è polo di f sse esiste il limite e vale $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$
3. z_0 è singolarità essenziale sse non esiste il limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Capitolo 12

Lo studio dei residui

L'ultima importante parte dello studio dell'analisi complessa è imparare ad analizzare i residui; come abbiamo visto possono essere molto utili nella risoluzione di integrali complessi.

12.1 Residuo e residuo a infinito

12.1.1 Funzioni olomorfe come serie di potenze

Teorema 12.1 (Teorema dei Residui). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto con $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega')$ con $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Sia γ una catena di curve chiuse in Ω tale che $\text{Im}(\gamma) \cap \{z_1, \dots, z_n\} = \emptyset$ e $\gamma \sim_\Omega 0$. Allora vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{Res}_{z_i}(f)$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\gamma = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \gamma_i$, allora per il Teorema di Cauchy 10.44 vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{Res}_{z_i}(f)$$

□

Definizione 12.2. Si dice che $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un **intorno aperto di ∞** se è un aperto contenente il complemente di un insieme limitato di \mathbb{C} . Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si dice che f ha una **singolarità isolata all'infinito** se la funzione $g(w) = f(1/w)$ ha una singolarità isolata a $w = 0$. Il tipo di singolarità per f in ∞ è lo stesso per g in 0. Se 0 è eliminabile per g allora si dice che f è **olomorfa all'infinito**. Il **residuo all'infinito** di f è

$$\text{Res}_{\infty}(f) = \text{Res}_0 \left(-\frac{g(w)}{w^2} \right)$$

Lemma 12.3. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $\mathbb{C} \setminus B_0(R) \subset \Omega$. Allora

$$\text{Res}_{\infty}(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

Dimostrazione. Sia $g(w) = f(1/w)$. Allora il residuo a infinito di f è uguale a

$$\text{Res}_{\infty}(f) = \text{Res}_0 \left(-\frac{g(w)}{w^2} \right) = \int_{\gamma} -\frac{g(w)}{w^2} dw$$

dove con $\gamma := e^{-it}/R$. Percorrendola in senso antiorario, indichiamo questa curva con $-\gamma$, allora

$$\int_{\gamma} -\frac{g(w)}{w^2} dw = - \int_0^{2\pi} \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)^2} \gamma'(t) dt$$

osservando che $-1/\gamma_R = \gamma$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} -\frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)^2} \gamma'(t) dt &= \int_0^{\pi} f(\gamma_R(t)) \gamma_R'(t) dt \\ &= \int_{\gamma_R} f(z) dz \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Corollario 12.4. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$. Allora

$$\operatorname{Res}_\infty(f) + \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z_i}(f) = 0$$

Dimostrazione. Basta integrare lungo una circonferenza γ con z_1, \dots, z_n punti interni e applicare il Teorema dei residui 12.1. \square

12.1.2 Calcolare i residui

Lemma 12.5. Sia f una un polo semplice in z_0 , ovvero di ordine 1, e g funzione olomorfa in un intorno di z_0 , allora $\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0}(f)$.

Dimostrazione. Sia $f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + h(z)$ con h olomorfa vicino a z_0 . Sia $g(z) = b_0 + h_1(z)(z - z_0)$ con h_1 olomorfa vicino a z_0 . Allora

$$f(z)g(z) = \frac{a_{-1}b_0}{z - z_0} + (a_{-1}h_1(z) + b_0h(z) + h(z)h_1(z)(z - z_0))$$

Notiamo che dal secondo membro in poi è una funzione olomorfa in un intorno di z_0 , vale quindi che la sua serie di Laurent è una serie di potenze. Pertanto il residuo in z_0 dev'essere

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = a_{-1}b_0 = a_{-1}g(z_0)$$

\square

Corollario 12.6. Se f ha uno zero semplice all'infinito allora

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = - \lim_{z \rightarrow +\infty} zf(z)$$

Dimostrazione. Sia $g(w) = f(1/w)$. Allora sia $\hat{g}(w) = wh(w)$ l'estensione olomorfa di g (infatti g ha un polo semplice in $w = 0$ per ipotesi), con $h(0) \neq 0$. Quindi $g(w)/w^2 = h(w)/w$ per ogni $w \neq 0$ allora $g(w)/w^2$ ha un polo semplice in 0. Per il Lemma 12.5 vale

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_\infty(f) &= \operatorname{Res}_0 \left(-\frac{g(w)}{w^2} \right) = \operatorname{Res}_0 \left(-\frac{1}{w} h(w) \right) \\ &= h(0) \operatorname{Res}_0 \left(-\frac{1}{w} \right) \\ &= - \lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} = - \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) \end{aligned}$$

\square

Lemma 12.7. Se f è olomorfa nell'intorno di z_0 e in z_0 ha uno zero semplice allora $1/f$ ha un polo semplice in z_0 e vale

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Dimostrazione. Poiché f ha uno zero semplice, vale $f(z) = (z - z_0)g(z)$ con g olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. Quindi

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{g(z)}$$

con $1/g$ olomorfa vicino a z_0 . Per il Lemma 12.5 vale

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{f} \right) = \operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{z - z_0} \right) \frac{1}{g(z_0)}$$

poiché $\operatorname{Res}_{z_0} 1/(z - z_0) = 1$ vale la tesi, ovvero

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

□

Lemma 12.8. Se f ha un polo di ordine m in z_0 allora

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}$$

Dimostrazione. Sia $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ allora questa è l'estensione olomorfa della funzione f che avrà serie di Laurent della forma

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Per cui la serie di Laurent di f diventa

$$f(z) = b_0 (z - z_0)^{-m} + \cdots + b_{m-1} (z - z_0)^{-1} + \cdots$$

allora

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0}(f) = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

da cui la tesi. □

Esempio 12.9.

1. Calcoliamo i residui della funzione $h(z) = z^2/(z^2-1)$, allora $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\})$ e vale la seguente decomposizione

$$h(z) = \frac{1}{z-1} \frac{z^2}{z+1} = f(z)g(z)$$

Quindi

- (a) In $z = 1$, la funzione f ha un polo semplice con residuo 1 e g è olomorfa in un intorno di 1 quindi

$$\operatorname{Res}_1(h) = g(1) \operatorname{Res}_1(f) = \frac{1}{2}$$

- (b) In $z = -1$, la funzione g ha un polo semplice con residuo 1 mentre f è olomorfa in un intorno di -1 quindi

$$\operatorname{Res}_{-1}(h) = f(-1) \operatorname{Res}_{-1}(g) = -\frac{1}{2}$$

- (c) All'infinito vale

$$\operatorname{Res}_{\infty}(h) = -\operatorname{Res}_1(h) - \operatorname{Res}_{-1}(h) = 0$$

2. Calcoliamo i residui di $h(z) = 1/\sin(z)$. La funzione si annulla solo in $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e vale $\sin(z)' = \cos(z) \neq 0$ per $z \in k\pi$. Quindi sono poli semplici e per il Lemma 12.7 allora vale

$$\operatorname{Res}_{k\pi}(h) = \frac{1}{\cos(k\pi)} = \pm 1$$

con 1 se k pari e -1 se k dispari.

3. Consideriamo la funzione

$$h(z) = \frac{z^2}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)}$$

allora $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\})$ e

- (a) Se $z = 1$ il polo è doppio quindi

$$\operatorname{Res}_1(h) = \left(\frac{z^2}{z+1} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

- (b) Se $z = -1$ il polo di ordine 1 quindi

$$\operatorname{Res}_{-1}(h) = \frac{(-1)^2}{(-1-1)^2} = \frac{1}{4}$$

- (c) Invece a infinito diventa

$$\operatorname{Res}_{\infty}(h) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1$$

12.1.3 Applicazioni agli integrali reali

Dividiamo l'argomento in due casi. Il primo caso è quello in cui $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ristretto all'asse reale non presenta singolarità. Il secondo caso è quello in cui $f|_{\mathbb{R}}$ ha delle singolarità di qualche tipo.

Proposizione 12.1 (Caso I). Consideriamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua, intesa come restrizione di $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ e con $\Im(z_1), \dots, \Im(z_n) > 0$ e $\Omega \supset \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$. Se esistono $K, M > 0$ e $a > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^{1+a}}$$

per $|z| \geq M$, allora vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z_i}(f) \quad (12.1)$$

Dimostrazione. Per $x \in \mathbb{R}$ vale $|f(x)| \leq K/|x|^{1+a}$ che è integrabile su $(-\infty, \alpha)$ e su $(\beta, +\infty)$ per ogni $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. Quindi esistono i limiti

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{\alpha} f(x) dx = L^+ \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\beta}^R f(x) dx = L^- \in \mathbb{R}$$

e quindi esiste il limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Per dimostrare la formula applichiamo il Teorema dei Residui a f lungo la catena Γ ottenuta come in Figura 12.1. Quindi otteniamo

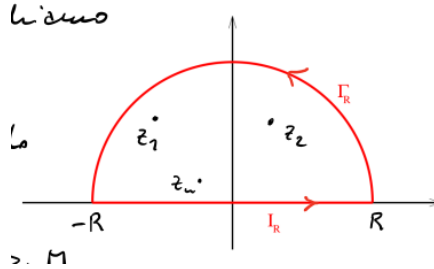


Figura 12.1: Integrazione lungo curva

$$2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i}(f) = \int_{I_R} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$

il secondo integrale osserviamo che

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{K}{R^{1+a}} \mathcal{H}^1(\Gamma_R) = \frac{\pi K}{R^a}$$

e quindi tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$. Mentre il primo integrale corrisponde all'integrale improprio che volevamo calcolare. Da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i}(f)$$

□

Proposizione 12.2 (Caso II). Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua, restrizione di una funzione complessa $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ e con $\Omega \supset \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$ e $z_1, \dots, z_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. Se esistono $K, M > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|}$$

allora vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i}(f(z)e^{iz})$$

Dimostrazione. Essenzialmente ci ritroviamo a usare il Teorema dei Residui in modo analogo al caso I, solo che questa volta considereremo un quadrato dato che abbiamo anche la parte complessa della funzione f . Infatti possiamo riscrivere l'integrale come segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(x) dx$$

Integriamo lungo il quadrato $\Gamma_{A,B}$ descritto in Figura 12.2

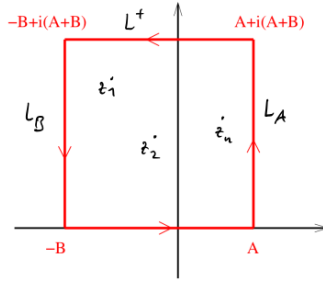


Figura 12.2: Visualizzazione delle curve di integrazione

Spezziamo quindi l'integrazione sul quadrato nei suoi quattro lati, e mostriamo che l'integrale su L_B, L_A, L^+ tendono a 0 per $A, B \rightarrow +\infty$. Scegliamo $A, B \geq M$, in maniera tale da poter poi limitare la funzione f . Prendiamo quindi il caso di L^+ che parametrizziamo con la curva $\gamma^+(x) = -x + i(A+B)$. Allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma^+} f(z)e^{iz} dz \right| &= \left| \int_{-A}^B f(-x + i(A+B))(-e^{-ix-(A+B)}) dx \right| \\ &\leq \frac{K}{T} e^{-(A+B)} \mathcal{H}^1(\gamma^+) = K e^{-(A+B)} \end{aligned}$$

l'ultima disuguaglianza dipende dal fatto che $|f(z)| \leq K/(A+B)$ per $|z| \geq (A+B) \geq M$.

Consideriamo ora il caso del lato L_A , parametrizzato dalla curva $\gamma_A(y) = A + iy$, allora

$$\left| \int_{\gamma_A} f(z)e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^{A+B} f(A + iy)e^{-y+iA} i dy \right| \leq \frac{K}{A} \int_0^{A+B} e^{-y} dy$$

e questo ovviamente tende a 0 per $A+B \rightarrow +\infty$.

Quindi per il Teorema dei Residui

$$2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i}(f) = \int_{\Gamma_{A,B}} f(z)e^{iz} dz$$

e il membro di destra ha come solo sopravvissuto

$$\int_{\Gamma_{A,B}} f(z)e^{iz} dz = \int_A^B f(x)e^{ix} dx \quad \text{per } A+B \rightarrow 0$$

da cui vale la tesi. \square

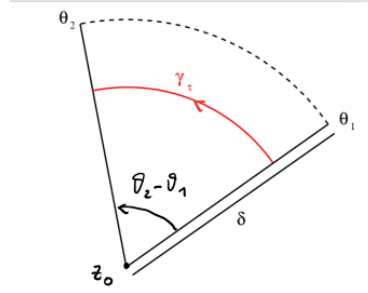


Figura 12.3: Descrizione delle ipotesi della Proposizione 12.3

Proposizione 12.3 (Caso III). Sia Ω aperto e $z_0 \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Sia $\overline{B_{z_0}}(\delta) \subset \Omega$ e sia γ_τ l'arco di raggio τ con $\theta_1 \leq \arg(\gamma_\tau) \leq \theta_2$ e $\tau \leq \delta$. Se f ha un polo semplice o una singolarità eliminabile in z_0 allora vale

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\gamma_\tau} f(z) dz = ib(\theta_2 - \theta_1)$$

Dimostrazione. Possiamo riscrivere

$$f(z) = \frac{b}{z - z_0} + h(z)$$

con h olomorfa in un intorno di z_0 . Quindi

$$\int_{\gamma_\tau} f(z) dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{b}{\tau e^{i\theta}} i\tau e^{i\theta} d\theta + \int_{\gamma_\tau} h(z) dz$$

per cui mostriamo che il secondo integrale converge a 0 in modulo, ovvero

$$\left| \int_{\gamma_\tau} h(z) dz \right| \leq \max_{\gamma_\tau} |h| \mathcal{H}^1(\gamma_\tau)$$

ma la lunghezza di $\gamma_\tau \rightarrow 0$ per $\tau \rightarrow 0$, quindi tutto l'integrale tende a 0. Per cui

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\gamma_\tau} f(z) dz = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{b}{\tau e^{i\theta}} i\tau e^{i\theta} d\theta \rightarrow ib(\theta_2 - \theta_1)$$

□

Proposizione 12.4 (Caso IV - Funzioni razionali). Siano g, h polinomi reali in x, y con $h \neq 0$ per $x^2 + y^2 = 1$. Allora possiamo definire la funzione razionale

$$Q(x, y) := \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

e vale la seguente formula

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i}(f)$$

dove

$$f(z) := \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)$$

Dimostrazione. Consideriamo il cerchio centrato nell'origine e di raggio 1, parametrizzato dalla curva $\gamma = \partial B_0(1) = e^{i\theta}$ (con $\theta \in [0, 2\pi]$). Allora

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{ie^{i\theta}} Q(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

e quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} Q(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

e infine per il Teorema dei Residui si ottiene la tesi. \square

Esempio 12.10.

1. Calcoliamo

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

possiamo vedere che la funzione è pari, quindi

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

inoltre mostriamo che $f(z)$ è limitata. Quindi

$$|f(z)| = \left| \frac{z^{-4}}{(z^{-2} + 1)^2} \right| = \frac{|z|^{-4}}{|z^{-2} + 1|^2} \leq \frac{1}{z^4(1 - M^2)^2}$$

con $|z| \geq M > 1$. Quindi la funzione è limitata a infinito. Calcoliamo infine i residui di f in $\pm i$, ma solo uno dei poli sta nel semispazio $\Im(i) > 0$. Quindi dalla formula (12.1) risulta

$$2I = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f) = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

2. Proviamo a calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

definiamo $f(z) = 1/(1+z^2)$ allora questa risulta limitata in modulo a infinito. Inoltre possiamo vedere che l'integrale I è

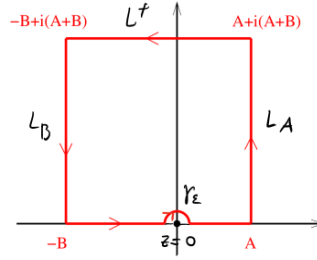
$$I = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \right)$$

ovvero possiamo riscrivere per quanto visto nella Proposizione 12.2 che

$$I = \Re \left(2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{iz}}{1+z^2} \right) \right)$$

e poiché il residuo è $e^{-1}/2i$ si ottiene

$$I = \Re (\pi e^{-1}) = \frac{\pi}{e}$$


 Figura 12.4: Visualizzazione della curva Γ

3. Calcoliamo l'integrale seguente

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Allora possiamo vedere che ha una singolarità in 0, definiamo $f(z) = 1/z$ e la curva Γ come in figura Allora possiamo risolvere come nel caso II ma dobbiamo spezzare l'integrale in 3 curve:

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \stackrel{\text{Thr. Cauchy}}{=} 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$, ma preso sufficientemente piccolo. Per la Proposizione 12.3 prendiamo $\theta_1 = \pi$ e $\theta_2 = 0$ e $b = \text{Res}_0(e^{iz}f(z)) = 1$. Allora abbiamo che per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i$$

e di conseguenza abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$. Quindi

$$I = \Im \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \Im(\pi i) = \pi$$

4. Proviamo a calcolare invece l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \cos(\theta)}$$

Possiamo vederlo come un integrale di un polinomio composto con \cos, \sin , quindi $Q(x, y) = 1/(3 - x)$. Allora per la Proposizione 12.4

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{3 - \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{1}{z - 3 + 2\sqrt{2}} \frac{2i}{z - 3 - 2\sqrt{2}}$$

Quindi calcoliamo solo il residuo in $z_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, dato che è l'unica singolarità che è all'interno di $B_0(1)$. Per cui

$$\operatorname{Res}_{z_1}(f) = \frac{i}{2\sqrt{2}}$$

e quindi si ottiene

$$I = 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Capitolo 13

Zeri di funzioni olomorfe

13.1 Alcuni teoremi utili

13.1.1 Principi e teoremi per funzioni olomorfe e meromorfe

Lo scopo principale di questo capitolo è di dimostrare il *Principio di indentità*, ovvero se due funzioni olomorfe coincidono in un qualche intorno di un punto, allora sono identiche.

Teorema 13.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla e sia $Z(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$. Allora $Z(f)$ non ha punti di accumulazione in Ω . (Gli zeri di una funzione olomorfa sono isolati).

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi a livello locale. Per cui prendiamo $z_0 \in Z(f)$. Se f non è identicamente nulla in un intorno di z_0 , segue che z_0 è uno zero di molteplicità $m > 0$ quindi in un intorno di z_0 la serie di Laurent di f prende forma

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con g olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Restringendo opportunamente l'intorno si può trovare un nuovo intorno tale per cui $g \neq 0$. Segue che anche $f(z) \neq 0$ se $z \neq z_0$, per cui lo zero z_0 è uno zero isolato di f .

Per ottenere il risultato globale usiamo la proprietà di connessione di Ω . Infatti sia $A \subset \Omega$ l'insieme dei punti di accumulazione di $Z(f)$ in Ω . Noi sappiamo che f è continua, quindi dev'essere che $A \subset Z(f)$ poiché $Z(f)$ è chiuso dato che $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$.

1. Se $z_0 \in A$ vuol dire che è uno zero non isolato di f e per quanto visto sopra possiamo trovare un intorno in cui $f = 0$ per tutto un intorno escluso z_0 . Quindi tutto un suo intorno è contenuto in A , ed essendo intorno di ogni suo punto A è aperto.
2. Sia data una successione di z_n contenuta in A e convergente ad un certo z_0 , allora z_0 appartiene a $Z(f)$ e non è isolato, quindi appartiene ad A : per quanto sappiamo dalla topologia A è chiuso.

Abbiamo scoperto che A è aperto e chiuso, ma per connessione (e perché f non è costantemente nulla, $A \neq \Omega$) dev'essere che $A = \Omega$. \square

Corollario 13.2 (Principio di Identità). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se esiste $S \subset \Omega$ tale che $f|_S = g|_S$ e S ha punti di accumulazione in Ω allora $f = g$ in Ω .

Dimostrazione. Sia $h = f - g$, osserviamo che la differenza di funzioni olomorfe su Ω sarà ancora olomorfa. Allora per il Teorema 13.1, sapendo che $S \subseteq Z(h)$, abbiamo che l'insieme $Z(h)$ ha almeno un punto di accumulazione in Ω , pertanto si conclude che h è la funzione identicamente nulla su tutto Ω . \square

Corollario 13.3. Sia $\Omega \supset \mathbb{C}$ connesso e $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $f \neq 0$ allora $g/f \in \mathcal{M}(\Omega)$

Dimostrazione. Sia S l'insieme degli zeri di f . Questi sono punti isolati e sono poli di $1/f$. Quindi g/f è olomorfa in $\Omega \setminus S$ con S insieme discreto di Ω da cui dalla definizione di funzione meromorfa si ottiene la tesi. \square

Definizione 13.4. Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Se a_m è il primo coefficiente non nullo della serie di Laurent di f centrata in z_0 , allora

$$\text{ord}_{z_0}(f) := m$$

si dice **ordine di f in z_0** .

Osservazione 13.5. Osserviamo per prima cosa che $\text{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$. Se l'ordine è positivo allora coincide con l'ordine dello zero in z_0 di f ; se l'ordine è negativo, invece corrisponde all'ordine cambiato di segno dell'ordine del polo in z_0 .

Teorema 13.6 (Principio dell'argomento). Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ con un numero finito di zeri e poli $z_1, \dots, z_n \in \Omega$. Sia γ catena in Ω e $\gamma \sim_{\Omega} 0$ con $\text{Im}(\gamma) \cap \{z_1, \dots, z_n\} = \emptyset$. Allora

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{ord}_{z_i}(f)$$

Dimostrazione. Mostriamo che $f'/f \in \mathcal{O}(\Omega')$ dove $\Omega' := \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ e $f'/f \in \mathcal{M}(\Omega)$ e con ordine $\text{ord}_{z_i}(f) = \text{Res}_{z_i}(f'/f)$. Infatti $f(z) \neq 0$ su Ω' e allora segue che è olomorfa su tutto Ω' . Inoltre visto che ha un numero finito di singolarità isolate è meromorfa su Ω . Nell'intorno di z_i possiamo decomporre f secondo la serie di Laurent

$$f(z) = (z - z_i)^{m_i} h(z)$$

con $m_i = \text{ord}_{z_i}(f)$ per definizione e h funzione olomorfa tale che $h(z_i) \neq 0$. Quindi derivando f si ottiene

$$f'(z) = m_i(z - z_i)^{m_i-1} h(z) + (z - z_i)^{m_i} h'(z)$$

per ogni $z \neq z_i$ vicino a z_i . Segue quindi che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_i}{z - z_i} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

con h'/h funzione olomorfa in un intorno di z_i . Si può concludere che $m_i = \text{Res}_{z_i}(f'/f)$. La formula segue quindi dal Teorema dei Residui 12.1. \square

Corollario 13.7. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Sia γ una curva di Jordan in Ω e la parte interna deve stare in Ω e l'immagine di γ non si intersechi con zeri o poli di f . Indicando con N_0 il numero di zeri di f contenuti all'interno di γ , contati con la loro molteplicità; N_∞ il numero di poli di f contenuti all'interno di γ , contati con il loro ordine. Allora vale la seguente formula

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_\infty$$

Dimostrazione. Dato che $\gamma \sim_{\Omega} 0$ per deduzione dalle ipotesi e $\text{Ind}_{\gamma}(z_i) = 1$ per ogni zero o polo (visto che si trova nella parte interna di una curva di Jordan), allora se indichiamo con S_1 l'insieme degli zeri di f nell'interno di γ e con S_2 l'insieme dei poli all'interno di γ , allora

$$N_0 = \sum_{z_i \in S_1} \text{ord}_{z_i}(f) \quad N_\infty = - \sum_{z_i \in S_2} \text{ord}_{z_i}(f)$$

allora dal Teorema del Principio dell'Argomento 13.6 segue la tesi. \square

Corollario 13.8. Se $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ e l'interno di una curva di Jordan γ contiene tutti gli zeri e i poli di f allora

$$N_0 - N_\infty = -\text{Res}_{\infty} \left(\frac{f'}{f} \right)$$

Dimostrazione. Segue dalla definizione di $\text{Res}_{\infty}(f'/f)$ e dal Corollario 13.7. \square

Osservazione 13.9. Il *Principio dell'argomento* deriva dall'interpretazione geometrica dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

come *variazione dell'argomento* dei punti della curva $f \circ \gamma$. Ad esempio si consideri

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \quad \gamma(t) = e^{it}$$

allora $f \circ \gamma(t) = e^{-2it}$ ovvero percorre una circonferenza in senso orario due volte. Si ha quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-2}{z} dz = -2$$

e la variazione $\Delta_{f \circ \gamma} \arg(w)$ dell'argomento di $w = f \circ \gamma(t)$ lungo la curva $f \circ \gamma$ è -4π (ovvero la lunghezza della curva, orientata). Quindi vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{f \circ \gamma} \arg(w)$$

In generale se g è una funzione logaritmo di f , cioè $e^g = f$ con f, g funzioni olomorfe, si ha

$$f' = (e^g)' = e^g g' = f g'$$

ovvero $g' = f'/f$. Osserviamo infine che la derivata logaritmica di f non dipende dalla branca del logaritmo di g , infatti si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz &= \int_{\gamma} (\log(f))' dz = \log(f(\gamma(b))) - \log(f(\gamma(a))) \\ &= \ln |f(\gamma(b))| - \ln |f(\gamma(a))| + i(\arg(f(\gamma(b))) - \arg(f(\gamma(a)))) \\ &= i\Delta_{f \circ \gamma} \arg(w) \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{f \circ \gamma} \arg(w) = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

Teorema 13.10 (Teorema di Rouché). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ e γ curva di Jordan in Ω con interno contenuto in Ω . Se vale

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad (13.1)$$

allora f e g non hanno zeri in $\text{Im}(\gamma)$ e hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) nell'interno di γ .

Dimostrazione. Per ipotesi f, g non si annullano su γ : Supponiamo che esiste $z \in \gamma$ tale che $f(z) = 0$ allora per (13.1) valrebbe che

$$|g(z)| < 0$$

che è impossibile. Se $g(z) = 0$ allora si avrebbe ancora per (13.1)

$$|f(z)| < |f(z)|$$

da cui è ancora assurdo. Segue che f, g non si annullino su γ .

Sia $h = g/f$, questa è una funzione meromorfa su Ω . Osserviamo che $h \circ \gamma$ ha supporto all'interno della palla in 1 di raggio 1, ovvero $\text{Im}(h \circ \gamma) \subset B_1(1)$, poiché

$$|h(z) - 1| = \frac{|f(z) - g(z)|}{|f(z)|} < 1$$

dove $z = \gamma(t)$ per qualche t . In particolare osserviamo che $\text{Ind}_{h \circ \gamma}(0) = 0$ poiché $0 \notin B_1(1)$. Ovvero appartiene all'esterno del supporto della curva $h \circ \gamma$. Quindi

$$0 = 2\pi i \text{Ind}_{h \circ \gamma}(0) = \int_{h \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{h'(\gamma(t))\gamma'(t)}{h(\gamma(t))} dt = \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

Infine osservando che

$$\frac{h'}{h} = \frac{g'f - gf'}{f^2} \frac{f}{g} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$$

allora segue che

$$\int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Per il Corollario 13.8 i due integrali sono uguali, così come i residui e quindi anche lo stesso numero di zeri contati con molteplicità. \square

Esempio 13.11. Presentiamo qui alcuni esempi per trovare, per confronto (e utilizzo del Teorema di Rouché 13.10), gli zeri di una funzione. In questo caso particolare nel caso di funzioni polinomiale. Ma per le proprietà locali ogni funzione olomorfa può essere approssimata ad una serie di Laurent e quindi è equivalente a trovare gli zeri di un polinomio.

1. Prendiamo $p(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ e $f(z) = -5z^3$. Sulla circonferenza $|z| = 1$ vale

$$|p(z) - f(z)| = |z^8 + z - 2| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4 < 5|z|^3 = |f(z)|$$

quindi p ha 3 zeri tanti quanti come f nel disco unitario $|z| < 1$ e non si annulla per $|z| = 1$. Scegliamo ora $g(z) = z^8$ si controlliamo nella circonferenza $|z| = 2$,

$$|p(z) - g(z)| \leq 5|z|^3 + |z| + 2 \leq 44 < |g(z)|$$

quindi si può concludere che p ha tutti i suoi 8 zeri in $|z| < 2$, in particolare ne ha 5 nella corona circolare di raggi 1 e 2.

2. Consideriamo $q(z) = 4z^5 - z^3 + z^2 - 2$, analogamente a quanto fatto nell'esempio precedente per controllare dove sono locati tutti gli zeri possiamo confrontarlo con la funzione $f(z) = 4z^5$ sulla circonferenza di raggio $B_0(1 + \varepsilon)$. Allora

$$|q(z) - f(z)| \leq |z|^3 + |z|^2 - 2 < |f(z)|$$

dunque per ogni $\varepsilon > 0$ q ha 5 zeri in $B_0(1 + \varepsilon)$. Per cui possiamo concludere per l'arbitrarietà di ε che tutti gli zeri di $q(z)$ si trovano in $\overline{B_0(1)}$.

13.1.2 Il principio del massimo modulo

Per ottenere i seguenti teoremi: *Principio del Massimo*; il *Teorema della mappa aperta*; il *Teorema della mappa inversa*. Ci serve un risultato sul comportamento locale delle funzioni olomorfe, che vedremo essere analogo a quello di una funzione z^n per qualche $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 13.12. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ uno zero di ordine m di f . Esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $w_0 \in \mathbb{C}$ con $|w_0| < \delta$ l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\varepsilon)$ distinte se $w_0 \neq 0$ (nel caso $m > 1$).

Dimostrazione. Sia z_0 uno zero isolato di f allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $B_{z_0}(\varepsilon_0) \subset \Omega$ e $f(z) \neq 0$ per $z \in B_{z_0}(\varepsilon_0) \setminus \{z_0\}$. Sia $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e sia $\gamma = \partial B_{z_0}(\varepsilon)$ e poniamo $\delta = \min_{z \in \gamma} |f(z)| > 0$. Se $|w_0| < \delta$ allora $g = f - w_0$ è una funzione olomorfa su tutto Ω e vale

$$|f(z) - g(z)| = |w_0| < \delta \leq |f(z)| \quad \forall z \in \text{Im}(\gamma)$$

Utilizziamo il Teorema di Rouché 13.10 su g . Allora g ha m zeri in $B_{z_0}(\varepsilon)$ che equivale a dire che $f(z) = w_0$ ha m soluzioni (con molteplicità) nella palla $B_{z_0}(\varepsilon)$. Se $m = 1$ si ha la tesi. Se $m > 1$ allora z_0 è uno zero anche di f' che avrà uno zero di ordine $m - 1$. Se ε_0 viene scelto sufficientemente piccolo in modo che $Z(f') \cap B_{z_0}(\varepsilon_0) = \{z_0\}$ si ha che $g' \neq 0$ su $B_{z_0}(\varepsilon) \setminus \{z_0\}$ ovvero gli zeri di g sono tutti semplici. Ovvero le soluzioni di $f(z) = w_0$ sono tutte distinte per $w_0 \neq 0$. \square

Corollario 13.13. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante e $z_0 \in \Omega$. Sia $f(z_0) = \alpha$ e $\text{ord}_{z_0}(f - \alpha) = m$. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni w_0 con $|w_0 - \alpha| < \delta$, l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\varepsilon)$ distinte se $w_0 \neq \alpha$.

Dimostrazione. Si usa il Teorema precedente 13.12 a $f - \alpha \in \mathcal{O}(\Omega)$. □

Teorema 13.14 (Teorema Della Mappa Aperta). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante. Allora f è una mappa aperta.

Dimostrazione. Sia $A \subset \Omega$ aperto e $\alpha = f(z_0)$ per qualche $z_0 \in A$. Allora esiste $B_{z_0}(\varepsilon) \subset A$ tale che $f - \alpha \neq 0$ in $B_{z_0}(\varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Se $\varepsilon < \varepsilon_0$ come nel Corollario precedente, allora esiste $\delta > 0$ tale che $|w_0 - \alpha| < \delta$ e allora $w_0 \in f(B_{z_0}(\varepsilon)) \subset f(A)$. Cioè $B_\alpha(\delta) \subset f(A)$ per ogni $\alpha \in f(A)$ dato che non abbiamo imposto alcuna ipotesi su α . Pertanto $f(A)$ è intorno di ogni suo punto ed è aperto. □

Teorema 13.15 (Principio Del Massimo). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante. Allora $|f|$ non ha massimi locali in Ω .

Dimostrazione. Sappiamo che f è aperta per Teorema della Mappa Aperta 13.14. Allora per ogni $\alpha = f(z_0) \in \text{Im}(f)$ e per ogni intorno $B_{z_0}(\varepsilon)$ di z_0 essendo $f(B_{z_0}(\varepsilon))$ aperto contenente α allora esiste un'altra palla aperta $B_\alpha(\delta) \subset f(B_{z_0}(\varepsilon))$. In particolare esistono degli $f(z) \in f(B_{z_0}(\varepsilon)) \setminus B_\alpha(\delta)$, per cui dev'essere che

$$|f(z)| > |\alpha| = |f(z_0)|$$

con $|z - z_0| < \varepsilon$. Quindi segue che z_0 non può essere un punto di massimo locale. Poiché z_0 è stato scelto in modo arbitrario questa conclusione vale per ogni punto $z_0 \in \Omega$. □

Corollario 13.16. Sia Ω aperto connesso con chiusura $\overline{\Omega}$ compatto. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ allora

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

Dimostrazione. Dato che sussiste il Principio del massimo 13.15, allora dev'essere che f non ha un massimo nella parte interna, dev'essere sul bordo, poiché $|f|$ è continua e per Weierstrass deve avere massimo. □

Teorema 13.17 (Teorema della mappa inversa). Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$. Esiste un intorno aperto V di z_0 e un intorno aperto W di $f(z_0)$ tali che $f: V \rightarrow W$ è invertibile con inversa $f^{-1}: W \rightarrow V$ olomorfa. Vale inoltre la formula

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

per ogni $w \in W$.

Dimostrazione. Poniamo $\alpha = f(z_0)$. La funzione $g(z) = f(z) - \alpha$ è una funzione olomorfa con uno zero di molteplicità 1 in z_0 . Infatti $g'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. Per il Corollario 13.13 esistono $\varepsilon, \delta > 0$ tali che l'equazione $f(z) = w_0$ per ogni $w_0 \in B_\alpha(\delta)$ ha un'unica soluzione in $B_{z_0}(\varepsilon)$. Per cui basta porre $V = B_{z_0}(\varepsilon)$ e $W = B_\alpha(\delta)$ e si vede che $f: V \rightarrow W$ è una mappa biunivoca e olomorfa; in più risulta essere una mappa aperta per il Teorema della mappa Aperta 13.14.

Quindi f^{-1} dev'essere una funzione continua. Osserviamo anche che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in V$, dato che se no la funzione non sarebbe biunivoca.

Mostriamo che f^{-1} è olomorfa su W . Siano $z_1 = f^{-1}(w_1)$ e $z_2 = f^{-1}(w_2)$. Si ha per continuità che

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_1))}$$

e il limite esiste per ogni punto $w_1 \in W$. \square

Osservazione 13.18. Se $f'(z_0) = 0$, la funzione f non è iniettiva, in quanto z_0 è uno zero di $g = f - f(z_0)$ di ordine $m > 1$. Nell'intorno di z_0 l'equazione $f(z) = w_0$ ha $m > 1$ soluzioni, quindi f non è invertibile. Sui reali invece questo non è vero, per esempio $f(x) = x^3$.

Capitolo 14

Mappe conformi

Un importante risultato dell'analisi complessa è dimostrare che le mappe olomorfe si comportano localmente come omotopie composte con rotazioni e dunque preservano gli angoli. Questa proprietà dà una nozione geometrica di come le mappe olomorfe si comportano.

14.1 Una mappa che preserva gli angoli

14.1.1 Il significato geometrico delle mappe conformi

Come abbiamo visto, una conseguenza delle equazioni di Cauchy-Riemann soddisfatte dalle componenti reali di una funzione olomorfa è

Corollario 14.1. La matrice Jacobiana della funzione reale $(u, v): \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è

$$J_f = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

se inoltre $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e tale che $f = u + iv$ è una funzione olomorfa allora vale che

$$\det J_f = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$$

Osservazione 14.2. La proprietà descritta nel Corollario precedente descrive mappe che hanno un senso geometrico molto importante. Infatti se $f'(z_0) \neq 0$, vuol dire che la mappa preserva gli angoli. Se vale questa proprietà, si dice che una mappa è **conforme** in z_0 .

14.1.2 Le mappe conformi come funzioni olomorfe

Teorema 14.3. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Sia $f = u + iv$ con u, v differenziabili in z_0 . Allora f è conforme in z_0 se e solo se esiste la derivata complessa di $f'(z_0)$ e vale che $f'(z_0) \neq 0$.

Dimostrazione.

\Rightarrow Se f è differenziabile in z_0 allora $J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2 > 0$ per ipotesi. Sia quindi $(u_x, v_x) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ con

$$r = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} = |f'(z_0)|^2 > 0$$

allora la matrice Jacobiana di f in z_0 diventa

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

corrisponde alla composizione di una rotazione con una omotetia, ma sono entrambe trasformazioni che preservano gli angoli, da cui la tesi.

\Leftarrow Sia f conforme in z_0 . Sia θ l'angolo tra i vettori $(1, 0)$ e $J(1, 0)$ con $J = J_f(z_0)$. Per cui costruiamo una rotazione R_θ tale che $R_\theta^{-1}(J(1, 0)) = (r, 0)$ con $r > 0$ dato che se no f non preserverebbe gli angoli. In particolare chiediamo R_θ^{-1} una rotazione che rende l'angolo tra $(1, 0)$ e $R_\theta^{-1}(J(1, 0))$ sia nullo. Segue che la trasformazione $G = R_\theta^{-1}J$ preserva gli angoli. Quindi segue che anche $G(0, 1) = (0, s)$ con $s > 0$. Per cui $G(1, 1) = (r, s)$ e dev'essere che $r = s$ dato che se non preserverebbe gli angoli. Per cui consideriamo (a, b) vettore qualsiasi, vale che $G(a, b) = r(a, b)$. Because algebra:

$$R_\theta^{-1}J = I_r \implies J = J_f(z_0) = R_\theta I_r$$

scritto in termini matriciali diventa

$$J_f(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

da cui segue subito che $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, ovvero soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann. Pertanto f è differenziabile e inoltre vale che $f'(z_0) \neq 0$ dato che $J \neq 0$.

□

Corollario 14.4. Una funzione f complessa è conforme in Ω se e solo se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$.

Definizione 14.5. Si dice che $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione **antioleomorfa** se esiste $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funzione olomorfa su Ω tale che $\bar{g} = f$.

Osservazione 14.6. Se si richiede che f conservi solo l'ampiezza dell'angolo e non l'orientazione, allora anche le funzioni antioleomorfe giocano un ruolo. Infatti se una funzione g è antioleomorfa si ha che $J_g \leq 0$ e chiedendo che $J_g \neq 0$ si ottiene una mappa che non modifica l'ampiezza degli angoli, ma ne inverte l'orientazione.

Osservazione 14.7. La mappa f è conforme in z_0 se e solo se per ogni coppia di vettori non nulli $a, b \in \mathbb{R}^2$, l'angolo in z_0 tra due curve γ_a, γ_b con $\gamma_a(0) = \gamma_b(0) = z_0$ e $\gamma'_a(0) = a, \gamma'_b(0) = b$ è uguale all'angolo in $f(z_0)$ e le curve $f \circ \gamma_a, f \circ \gamma_b$.

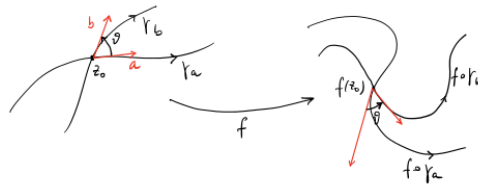


Figura 14.1: Rappresentazione della condizione di mantenimento dell'angolo tra due curve

Infatti se $f = u + iv$ e $\gamma_a(t) = (x(t), y(t))$, si ha

$$(f \circ \gamma_a)' = (u_x x' + u_y y') + i(v_x x' + v_y y')$$

e quindi vale

$$(f \circ \gamma_a)'(0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = J_f(z_0)a \quad (14.1)$$

$(f \circ \gamma_a)'(0) = J_f(z_0)a$ e analogamente vale $(f \circ \gamma_b)'(0) = J_f(z_0)b$. Per cui dato che l'angolo viene preservato, segue che $J_f(z_0) > 0$ e f risulta essere conforme in z_0 .

Analogamente se f è conforme abbiamo che $J_f(z_0) \neq 0$ e vale comunque l'identità (14.1), da cui si ha che

$$\begin{aligned}\gamma'_a(0) = a & \parallel (f \circ \gamma_a)'(0) = J_f(z_0)a \\ \gamma'_b(0) = b & \parallel (f \circ \gamma_b)'(0) = J_f(z_0)b\end{aligned}$$

Esempio 14.8.

1. Sia $f(z) = z^2$ allora possiamo osservare che $f'(z) \neq 0$ per $z \neq 0$. Quindi f risulta essere conforme in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

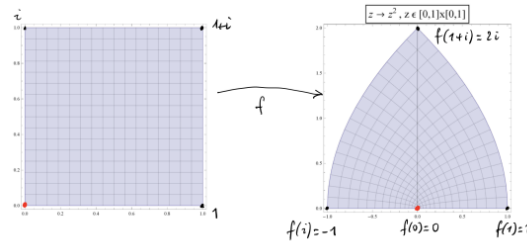


Figura 14.2: Visualizzazione di come vengono mantenuti gli angoli al di fuori del punto 0

2. Sia $f(z) = z^3$ anche questa è tale che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \neq 0$.
3. Sia $f(z) = e^z$, questa risulta essere conforme su tutto \mathbb{C} dato che $f'(z) = e^z$ e ha modulo sempre positivo.

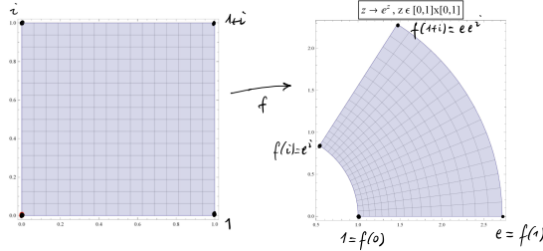


Figura 14.3: Visualizzazione della mappa e^z conforme su tutto \mathbb{C}

4. Sia invece

$$f(z) = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$$

questa risulta essere conforme su

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ 0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}$$

In particolare è conforme su tutto il primo e terzo quadrante.

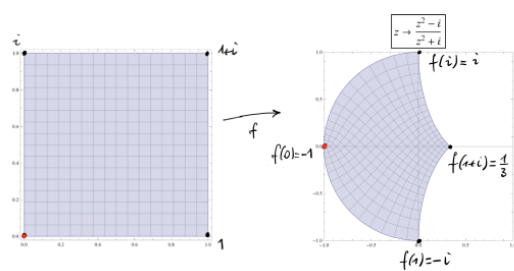


Figura 14.4: Visualizzazione di f sul primo quadrante

Capitolo 15

Estensione di funzioni in \mathbb{C}

Come ci si può aspettare, alcune funzioni notevoli dell'analisi reale avranno uno spazio dedicato alla costruzione delle rispettive estensioni complesse. Non sempre sarà facile come ci si potrebbe aspettare, e faremo del nostro meglio per far capire come sia importante soffermarsi a ragionare su alcuni dettagli che spesso trascuriamo essendo abituati a “ragionare in \mathbb{R} ”.

15.1 Funzione esponenziale

15.1.1 La funzione esponenziale

Definizione 15.1. Definiamo l'esponenziale in \mathbb{C} come la serie di potenze

$$e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Possiamo osservarne alcune caratteristiche fondamentali.

Teorema 15.2. La funzione esponenziale gode delle seguenti proprietà:

1. è olomorfa in \mathbb{C}
2. $(e^z)' = e^z$
3. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ per $\theta \in \mathbb{R}$
4. è periodica di periodo $2\pi i$
5. $e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ (in particolare non è biunivoca)

Dimostrazione.

1. Per definizione e per il Teorema 9.24.
2. Dal calcolo esplicito della derivata della serie di potenze:

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!} = e^z \end{aligned}$$

3. Anche per questo basta un calcolo esplicito:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{2k+1!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2k!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1!} \\ &= \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

4. Basta osservare che $e^{a+2\pi i} = e^a e^{2\pi i} = e^a$, il fatto che $e^{2\pi i} = 1$ è naturale dal punto precedente.
5. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, allora $e^z = \alpha$ vuol dire che se $z = x + iy$ allora

$$\begin{cases} x = \ln |\alpha| \\ y = \arg \alpha \end{cases}$$

per cui se $\alpha = 0$, x non sarebbe ben definito. Mentre per tutti gli altri valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ è definita.

□

15.1.2 Le funzioni trigonometriche

Definizione 15.3. Definiamo le funzioni trigonometriche in funzione delle serie di potenze come segue:

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cos(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Teorema 15.4. Valgono le seguenti proprietà delle funzioni trigonometriche:

1.

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

2. sono 2π periodiche

3. non sono limitate

4. l'immagine di \sin e \cos coincide con \mathbb{C}

5. le seguenti funzioni sono olomorfe dovunque nel piano complesso meno che nei loro rispettivi poli

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\})$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\})$$

Dimostrazione.

1. Per algebra:

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(iz)^j}{j!} - \frac{(-iz)^j}{j!} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(iz)^j - (-iz)^j}{j!} \end{aligned}$$

Dobbiamo vedere i diversi casi per cui $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$. A questo punto abbiamo tre sommatorie rispettivamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{4j} - (-iz)^{4j}}{4j!} &= 0 \\ \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{4j+1} - (-iz)^{4j+1}}{(4j+1)!} &= \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} i \frac{z^{4j+1}}{(4j+1)!} \\ \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{4j+2} - (-iz)^{4j+2}}{(4j+2)!} &= 0 \\ \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{4j+3} - (-iz)^{4j+3}}{(4j+3)!} &= \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{+\infty} -i \frac{z^{4j+3}}{(4j+3)!} \end{aligned}$$

da cui si trova la stessa definizione di $\sin(z)$ con $z \in \mathbb{C}$.

2. Osserviamo che l'esponenziale complesso e^{iz} con $z \in \mathbb{C}$, allora se $z = a + ib$ vale che e^{ia-b} che è 2π periodico in funzione della parte reale di z . Analogamente per e^{-iz} , questo dà la ben conosciuta proprietà di 2π periodicità sull'asse reale delle funzioni trigonometriche.
3. Supponiamo per assurdo che siano limitate. Sappiamo che $\sin(z), \cos(z)$ sono funzioni intere, ovvero sono olomorfe su tutto \mathbb{C} (deriva dal fatto che si possono scrivere come combinazione lineare di funzioni intere). Allora per il Teorema di Liouville dev'essere che $\sin(z), \cos(z)$ siano costanti. Ma è ovvio che non lo sono, infatti basta calcolarsi due valori e vedere che non lo sono i.e. si prenda $z = \pi$ e $z = \pi/2$. Pertanto abbiamo una contraddizione. Segue che $\sin(z), \cos(z)$ non possono essere limitate.
4. Sia $y \in \mathbb{C}$ allora vale che $y = \sin(z)$ sse esiste una soluzione a

$$2cw = w^2 + 1 \quad \text{con } w = e^{iz}$$

e questa esiste per ogni c da cui la tesi.

5. Basta osservare che il coseno ha zeri in $\pi/2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, per vederlo si può usare Rouché o più banalmente basta far vedere che se la parte immaginaria > 0 allora $\cos(z) > 0$.

□

15.1.3 Il logaritmo ed il logaritmo principale

Definizione 15.5. Il logaritmo principale è la funzione definita come:

$$\begin{aligned} \log: \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \log(z) &= \ln(|z|) + i \arg z \quad \text{con } \arg z \in (-\pi, \pi] \end{aligned}$$

Osservazione 15.6. In generale si perdono molte delle proprietà del logaritmo che valevano in \mathbb{R} . Per esempio $\log(xy) \neq \log(x) + \log(y)$.

Teorema 15.7. La funzione logaritmo principale è olomorfa e la sua derivata è

$$\log'(z) = 1/z$$

Dimostrazione. Dimostriamo che è olomorfa grazie alle equazioni di Cauchy-Riemann, per cui ponendo

$$\log(x + iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan(y/x) = u(x, y) + iv(x, y)$$

da cui le derivate ci danno le relazioni cercate.

Sempre utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann otteniamo al tesi, cioè che $\log'(z) = u_x + iv_x = 1/z$. □

Osservazione 15.8. Osserviamo infine che la funzione argomento può prendere valori con periodicità di 2π , perciò abbiamo effettivamente infinite definizioni della funzione logaritmo.

Questo può presentare alcuni vantaggi. Infatti la funzione radice quadrata principalmente è $f_0(z) = e^{\log(z)/2} = \sqrt{|z|}e^{i(\arg z)/2}$, ma se si usa un'altra definizione di logaritmo, ovvero consideriamo una diversa possibile branca (o determinazione) della radice quadrata, otteniamo $f_1(z) = e^{\log'(z)/2} = \sqrt{|z|}e^{i\arg(z)/2+i\pi}$, che rappresenta la *radice "negativa"*.

Bibliografia

- [1] Topology formalisation via Filters in Lean, <https://leanprover-community.github.io/theories/topology.html>
- [2] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>