16. Sia (X, d) uno spazio metrico, $a: I \to X$ un arco (v. esempio 3.3) di X tale che $a(0) \neq a(1)$; per ogni numero r tale che

$$0 < r < d(a(0),\ a(1))$$

esiste $t \in I$ tale che $d(a(0),\ a(t)) = r$.

17. Se A e B sono due sottoinsiemi connessi dello spazio topologico X, ed $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso.

18. Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali e τ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ che si ottengono dagli aperti della retta reale togliendo al piú un'infinità numerabile di punti. La famiglia τ è una topologia su $\mathbf{R}$ strettamente piú fine della topologia euclidea (l'assioma b) della definizione 1.1 del capitolo primo segue dal teorema di Lindelöff).

$(\mathbf{R}, \tau)$ è connesso, ma non è connesso per archi. (Ogni arco $a: I \to \mathbf{R}$ di $(\mathbf{R}, \tau)$ è costante; non esiste infatti nessun $\varepsilon > 0$ tale che $a([0, \varepsilon[)$ sia diverso da a (0) e sia contenuto in un intorno aperto di $a(0)$ in $\mathbf{R}$, ottenuto da un intorno U della topologia reale sopprimendo un'infinità numerabile di punti che sia densa in U.)

Capitolo quinto

Compattezza

1. *Spazi compatti*

Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi Y_i di un insieme X. Risulta

$$\bigcup_{i \in I} \complement Y_i = \complement \bigcap_{i \in I} Y_i. \tag{1}$$

Definizione 1.1. Si dice che la famiglia $\{Y_i\}_{i \in I}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* se per ogni sottoinsieme finito J di I l'intersezione $\bigcap_{j \in J} Y_j$ è non vuota.

Proposizione 1.2. *Sia X uno spazio topologico. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) *ogni ricoprimento di X mediante aperti contiene una famiglia finita che è ancora un ricoprimento di X;*

2) *ogni famiglia di chiusi di X la cui intersezione sia vuota contiene una famiglia finita, la cui intersezione è vuota;*

3) *ogni famiglia di chiusi di X che abbia la proprietà dell'intersezione finita ha un'intersezione non vuota.*

Dimostrazione. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Sia $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi di X. Consideriamo la famiglia $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ di aperti $A_i = \complement F_i$. In base alla (1), l'essere $\mathfrak{F}$ tale che

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$$

equivale alla

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X,$$

ossia equivale a dire che $\mathfrak{A}$ è un ricoprimento di X. Il fatto che esista un sottoinsieme finito J di I tale che

$$\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$$

equivale a dire che (esiste un sottoinsieme finito J di I per cui)

$$\bigcup_{j \in J} A_j = X,$$

cioè che $\{A_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento finito di X.

2) $\Rightarrow$ 3) Sia $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi di X. Se

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$$

esiste per 2) un sottoinsieme finito J di I tale che

$$\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset,$$

e quindi $\mathfrak{F}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita.

3) $\Rightarrow$ 2) Sia

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset.$$

Se fosse

$$\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$$

per ogni sottoinsieme finito J di I, si avrebbe, per 3),

$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset,$$

e questo è assurdo. Q.E.D.

Definizione 1.3. Si dice che uno spazio topologico X è *compatto* se soddisfa ad una delle tre condizioni equivalenti della proposizione 1.2.

Esempi

[1.1] Se X è compatto in una topologia τ, X resta compatto per ogni topologia meno fine di τ.

[1.2] Gli spazi topologici finiti sono compatti.

[1.3] Un insieme X con la topologia discreta è compatto se, e soltanto se, X è costituito da un numero finito di punti.

[1.4] La retta reale **R** non è compatta (i dischi di raggio eguale ad 1 e centro intero formano un ricoprimento aperto di **R** che non contiene un sottoricoprimento finito). Piú in generale, l'$\mathbf{R}^n$ euclideo non è compatto.

[1.5] L'insieme **R** dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli infiniti $]-\infty, a[$ non è compatto.

Definizione 1.4. Un sottoinsieme Y di X si dice *compatto* in X se esso è compatto per la topologia indotta. Y si dice *relativamente compatto* in X se la sua chiusura $\bar{Y}$ è compatta in X; si indica quest'ultimo fatto con la notazione

$$Y \subset\subset X.$$

Discende dalla condizione 1) della proposizione 1.2 che un sottoinsieme Y di X è compatto in X se, e soltanto se, ogni famiglia di aperti $\{A_i\}_{i \in I}$ di X tali che

$$Y \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

contiene una sottofamiglia finita $\{A_j\}_{j \in J}$ tale che

$$Y \subset \bigcup_{j \in J} A_j.$$

È immediata la formulazione di condizioni analoghe per la compattezza di Y in X, dedotte dalle 2) e 3) della proposizione 1.2.

Teorema 1.5. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto e sia F un sottoinsieme chiuso di X. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti tali che

$$F \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

L'insieme $\complement F$ è aperto, ed inoltre

$$X = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup \complement F.$$

Poiché X è compatto, esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ tale che

$$X = (\bigcup_{j \in J} A_j) \cup \complement F.$$

Ne segue che

$$F \subset \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Q.E.D.

Esempi

[1.6] Ogni sottoinsieme di uno spazio compatto X è relativamente compatto in X.

[1.7] Se X è uno spazio topologico ed Y è un compatto di X, non è detto che un sottoinsieme di Y sia relativamente compatto in X. In particolare, in **R** con la topologia dell'esempio 1.5, i punti, che sono compatti, non sono relativamente compatti in **R**.

[1.8] Un sottoinsieme compatto di uno spazio compatto X non è necessariamente chiuso. Basta considerare i punti di un insieme X che abbia almeno due punti e la topologia indiscreta; ogni punto è compatto, ma non è chiuso. Però anche uno spazio T_1 e compatto può avere sottoinsiemi compatti e non chiusi, come prova il successivo esempio 2.3.

I compatti di uno spazio di Hausdorff (anche non compatto) sono chiusi, come segue dal seguente

Teorema 1.6. *Se K è un insieme compatto di uno spazio di Hausdorff X, per ogni punto $x \notin K$ esiste un intorno U di x ed un intorno V di K, i quali sono disgiunti.*

Dimostrazione. Per ogni $y \in K$ esistono un intorno aperto V_y di y ed un intorno U_y di x i quali sono disgiunti. La famiglia $\{V_y\}_{y \in K}$ è una famiglia di aperti tali che

$$K \subset \bigcup_{y \in K} V_y.$$

Poiché K è compatto, esiste un insieme finito $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset K$ tale che

$$K \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \ldots \cup V_{y_n}.$$

L'aperto

$$V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$$

e l'intorno

$$U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$$

di x sono disgiunti.

Q.E.D.

Corollario 1.7. *Ogni insieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.*

Esempi

[1.9] I sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico sono chiusi e limitati (cioè esiste un disco contenente il compatto). (Si ricopra il compatto K con la famiglia di dischi di raggio 1 $\{S(x, 1)\}_{x \in K}$.)

[1.10] I sottoinsiemi compatti di uno spazio di Hausdorff X sono relativamente compatti in X.

[1.11] Se H e K sono due compatti disgiunti di uno spazio di Hausdorff X, esistono un intorno U di H ed uno V di K tra loro disgiunti. (Per ogni $x \in H$ si considera un intorno U_x di x e uno V_x di K tra loro disgiunti. Esistono $x_1, \ldots, x_n$ appartenenti ad H tali che $U = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} \supset H$, dopo di che U e

$$V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$$

sono gli intorni richiesti.)

Teorema 1.8. *Gli intervalli chiusi $[a, b]$ della retta reale sono compatti.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di **R**, tale che $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Indichiamo con Y il sottoinsieme dei punti x di $[a, b]$ per i quali esiste una sottofamiglia finita di $\mathfrak{A}$, la cui unione contiene $[a, x]$. Si deve dimostrare che $Y = [a, b]$.

Sia $z = \text{Sup. } Y$ ed A_{i_0}, un elemento di $\mathfrak{A}$ contenente z. Siccome A_{i_0} è aperto, e $z = \text{Sup. } Y$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $[z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subset A_{i_0}$ e $[z - \varepsilon, z + \varepsilon] \cap Y \neq \emptyset$. Sia $x \in Y$, tale che $z - x \leqslant \varepsilon$; esiste un sottoinsieme finito J di I per il quale

$$\bigcup_{j \in J} A_j \supset [a, x].$$

Ne segue che $[\bigcup_{j \in J} A_j] \cup A_{i_0} \supset [a, z + \varepsilon]$ e ciò prova che $z = b$, e che $[a, b]$ è compatto.

Q.E.D.

Tenuto conto dell'esempio 1.9, dai teoremi 1.5 e 1.8 segue il

Corollario 1.9. *I compatti della retta reale* **R** *sono tutti e soli i sottoinsiemi limitati e chiusi di* **R**.

Dai teoremi 1.5 e 1.6 discende il

Corollario 1.10. *Ogni spazio compatto e di Hausdorff è regolare.*

Tenuto conto dell'esempio 1.11, dal corollario 1.10 segue il:

Corollario 1.11. *Ogni spazio compatto e di Hausdorff è normale.*

Teorema 1.12. *In uno spazio compatto ogni insieme infinito ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia X compatto e sia L un sottoinsieme di X. Se un punto $x \in X$ non è punto di accumulazione di L, esiste un intorno aperto U_x di x tale che $U_x \cap L$ è vuoto oppure è il punto x.

Se nessun punto di X è punto di accumulazione di L, la famiglia degli aperti U_x, al variare di $x \in X$, è un ricoprimento aperto di X.

Poiché X è compatto, esiste una famiglia finita $\{x_1, ..., x_n\}$ di punti di X tale che $\{U_{x_i}\}_{i=1,...,n}$ è un ricoprimento aperto di X. Essendo $U_{x_i} \cap L$ vuoto, oppure il punto x_i, l'insieme L consta, al piú, dei punti $x_1, ..., x_n$, ossia è finito. Q.E.D.

Dai teoremi 1.8 e 1.12 discende il

Corollario 1.13. *Ogni sottoinsieme infinito di un intervallo* $[a, b]$ *della retta reale* **R** *ha almeno un punto di accumulazione.*

Esempi

[1.12] Sulla retta reale **R** gli intervalli aperti $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ sono relativamente compatti ma non compatti.

[1.13] Sia $[a, b]$ un intervallo della retta razionale **Q** con $a < b$. Esiste sempre qualche sottoinsieme infinito di $[a, b]$ privo di punti di accumulazione. Basta, ad esempio, considerare una successione di numeri razionali di $[a, b]$ convergenti ad un numero irrazionale. Segue pertanto dal teorema 1.12. che *un qualunque intervallo* $[a, b]$, *con* $a < b$, *della retta razionale* **Q**, *non è compatto.*

In conclusione:

Un qualunque intervallo (chiuso o aperto) della retta razionale, il quale contenga almeno due punti, non è nè compatto nè relativamente compatto.

2. *Spazi compatti ed applicazioni continue*

Lemma 2.1. *Sia* $f\colon X \to X'$ *un'applicazione continua di uno spazio topologico* X *sopra uno spazio topologico* X'. *Se* X *è compatto,* X' *è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{A}' = \{A'_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X'. La famiglia $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, con $A_i = f^{-1}(A'_i)$, è un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, esiste un sottoinsieme finito $I_1 \subset I$ tale che

$$\mathfrak{A}_1 = \{A_i\}_{i\in I_1}$$

è un ricoprimento (aperto) finito di X. La sottofamiglia

$$\mathfrak{A}'_1 = \{A'_i\}_{i\in I_1}$$

di $\mathfrak{A}'$ è un ricoprimento aperto finito di X'. Q.E.D.

Ne discende il

Corollario 2.2. *Sia* $f\colon X \to X'$ *un'applicazione continua di uno spazio topologico* X *in uno spazio topologico* X'. *L'immagine di ogni insieme compatto in* X *è un compatto di* X'.

Esempi

[2.1] Sia X la retta reale **R** e X' l'insieme dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]-\infty, a[$. L'applicazione identica $i\colon X \to X'$ è continua ma l'immagine di un sottoinsieme relativamente compatto non è, necessariamente, relativamente compatta. Ad esempio ogni $x \in X$ è compatto, e siccome è chiuso, è anche relativamente compatto, mentre $i(x)$, che è ancora compatto, non è relativamente compatto (v. esempio 1.7).

[2.2] Ogni spazio quoziente di uno spazio compatto è compatto.

[2.3] Sia $X = [-1, 1]$ ed $X/\mathfrak{R}$ lo spazio quoziente studiato nell'esempio 2.5 del capitolo terzo. Lo spazio $X/\mathfrak{R}$ è T_1 e compatto; se $\pi\colon X \to X/\mathfrak{R}$ è la proiezione naturale, $\pi([0, 1])$ è compatto. Però $\pi([0, 1])$ non è chiuso, perché $\pi(-1) = \complement\pi([0, 1])$ non è aperto in $X/\mathfrak{R}$.

Teorema 2.3. *Se X è compatto ed X' è di Hausdorff, ogni applicazione continua $f\colon X \to X'$ è chiusa (ossia trasforma chiusi in chiusi). Se f è continua e biunivoca, f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia F chiuso in X. Per il teorema 1.5 F è compatto in X. Pertanto per il teorema 2.2 $f(F)$ è compatto in X' e — siccome X' è di Hausdorff — per il corollario 1.7 $f(F)$ è chiuso in X'.

Sia f biunivoca e continua. Siccome f trasforma chiusi in chiusi, dalla proposizione 2.6 del capitolo primo segue che f^{-1} è continua, ossia che f è un omeomorfismo. Q.E.D.

Esempio

[2.4] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale ed Y lo spazio quoziente di $\mathbf{R}$ considerato nell'esempio 8.2 del capitolo secondo. Y è compatto perché immagine del compatto $[0, 1]$ di $\mathbf{R}$ nella proiezione naturale di $\mathbf{R}$ su Y. Dal teorema 2.3 segue una immediata dimostrazione che Y è omeomorfo al cerchio C del piano euclideo (v. esercizio 14 del capitolo secondo).

Sia X un insieme sul quale siano date una topologia di spazio compatto ed una topologia di spazio di Hausdorff, e sia $i\colon X \to X$ l'applicazione identica, intesa come applicazione di X, munito della prima topologia, in X munito della seconda. Se i è continua — cioè se la topologia di Hausdorff è meno fine della topologia di spazio compatto — per il teorema 2.3 i è un omeomorfismo.

Per conseguenza le due topologie coincidono. In altre parole:

Proposizione 2.4. *Ogni topologia di Hausdorff meno fine di una topologia di spazio compatto coincide con quest'ultima.*

Definizione 2.5. Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione continua di uno spazio topologico X in uno spazio topologico X'. Si dice che l'applicazione f è *propria* se f è chiusa e se, per ogni punto $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ è compatto in X.

Proposizione 2.6. *Se X è uno spazio compatto e Y è uno spazio topologico qualsiasi, la proiezione canonica $q\colon X \times Y \to Y$ dello spazio topologico prodotto su Y è propria.*

Dimostrazione. Per ogni $y \in Y$, $q^{-1}(y)$ è omeomorfo a X, e quindi è compatto. Sia F chiuso in $X \times Y$. Dobbiamo provare che $q(F)$

è chiuso. Sia $y \in \complement q(F)$. Per ogni $x \in X$, $(x, y) \in \complement F$. Poiché F è chiuso, esiste un intorno U_x di x in X ed un intorno U_y di y in Y tali che

$$(U_x \times U_y) \cap F = \emptyset.$$

Tenendo fisso y, ripetiamo questa costruzione per ogni $x \in X$.

Dalla compattezza di X segue che esiste un intorno U di y tale che

$$U \subset \complement q(F) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Proposizione 2.7. *Se X è uno spazio compatto e X' è di Hausdorff, ogni applicazione continua $f\colon X \to X'$ è propria.*

Dimostrazione. Dal teorema 2.3 segue che f è chiusa. Sia $x' \in X'$; x' è chiuso in X'. Poiché f è continua, $f^{-1}(x')$ è chiuso in X e quindi, per il teorema 1.5, è compatto. Q.E.D.

Lemma 2.8. *Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione chiusa di X in X', e sia $f^{-1}(x')$ l'immagine inversa di un punto x' di $f(X)$. Per ogni intorno aperto U di $f^{-1}(x')$ in X, esiste un intorno aperto U' di x' in X' tale che $f^{-1}(U') \subset U$.*

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che f sia surgettiva e sia $x' \in X'$, U un intorno aperto di $f^{-1}(x')$. Il sottoinsieme $f(\complement U)$ di X' è chiuso e non contiene x'.

Esiste quindi un intorno aperto U' di x' tale che

$$U' \cap f(\complement U) = \emptyset.$$

Ne segue

$$f^{-1}(U') \cap f^{-1}(f(\complement U)) = \emptyset$$

e quindi, essendo $\complement U \subset f^{-1}(f(\complement U))$,

$$f^{-1}(U') \cap \complement U = \emptyset.$$

Ciò prova l'asserto quando f è surgettiva.

Togliamo ora l'ipotesi che f sia surgettiva e chiamiamo g l'applicazione surgettiva $g\colon X \to f(X)$ indotta da f. L'applicazione g è chiusa. Per ogni $x' \in f(X)$, e per ogni intorno aperto U di $f^{-1}(x')$ in X, esiste un intorno aperto T di x' in $f(X)$, tale che

$$g^{-1}(T) \subset U.$$

Sia U' un intorno aperto di x' in X' tale che $U' \cap f(X) = T$. Risulta

$$f^{-1}(U') = g^{-1}(T) \subset U \qquad \text{Q.E.D.}$$

Esempi

[2.5] Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione surgettiva e propria di uno spazio di Hausdorff X su uno spazio topologico X'. X' è di Hausdorff. (Siano x', y' due punti distinti di X'; $H = f^{-1}(x')$ e $K = f^{-1}(y')$ sono due compatti disgiunti di X. Se (v. esempio 1.11) U e V sono intorni aperti e disgiunti di H e K rispettivamente, i due intorni aperti U' di x' e V' di y' tali che $f^{-1}(U') \subset U$ ed $f^{-1}(V') \subset V$ sono disgiunti.)

[2.6] Il prodotto $g \circ f$ di due applicazioni proprie $f\colon X \to X'$ e $g\colon X' \to X''$ è un'applicazione propria.

[2.7] Siano $X =]0, 1[$, $X' = [0, 1]$ con la topologia euclidea. L'applicazione identica $i\colon X \to X'$ è continua e non è propria.

Proposizione 2.9. *Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione propria di X in X'. L'immagine inversa $f^{-1}(K)$ di ogni compatto K di X' è compatta in X.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di aperti di X tale che

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Dobbiamo provare che esiste un insieme finito $J \subset I$ tale che

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Per ogni $x' \in K$, $f^{-1}(x')$ è un compatto di X contenuto in $f^{-1}(K)$. Quindi esiste un insieme finito $I(x') \subset I$ tale che

$$f^{-1}(x') \subset \bigcup_{i\in I(x')} A_i.$$

Per il lemma precedente, esiste un aperto di X', $V_{x'} \ni x'$, tale che

$$f^{-1}(V_{x'}) \subset \bigcup_{i\in I(x')} A_i.$$

La famiglia di aperti $\{V_{x'}\}_{x'\in K}$ è tale che $K \subset \bigcup_{x'\in K} V_{x'}$.

Poiché K è compatto, esiste un insieme finito $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\} \subset K$ tale che

$$K \subset V_{x'_1} \cup V_{x'_2} \cup \ldots \cup V_{x'_n}.$$

Pertanto

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{r=1}^{n} f^{-1}(V'_r) \subset \Big(\bigcup_{i\in I(x'_1)} A_i\Big) \cup \ldots \cup \Big(\bigcup_{i\in I(x'_n)} A_i\Big).$$

Poiché la famiglia $\{A_i\}_{i\in I(x'_1)\cup\ldots\cup I(x'_n)}$ è finita, la proposizione è dimostrata. Q.E.D.

Nel paragrafo 4 considereremo una famiglia di spazi topologici per i quali la condizione enunciata nella proposizione 2.9 è altresí sufficiente perché un'applicazione continua f sia propria (v. proposizione 4.10).

3. *Prodotto di spazi compatti*

Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici.

Teorema 3.1 (di Tychonoff). *Se tutti gli X_i sono compatti, lo spazio topologico prodotto $X = \prod_{i\in I} X_i$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di insiemi chiusi di X che abbia la proprietà dell'intersezione finita. Proveremo che l'intersezione $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ è non vuota.

Consideriamo la collezione $\{\mathfrak{D}\}$ di tutte le famiglie $\mathfrak{D}$ di sottoinsiemi di X aventi le proprietà seguenti:

1) $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$

2) $\mathfrak{D}$ ha la proprietà dell'intersezione finita.

La collezione $\{\mathfrak{D}\}$ è un insieme ordinato (rispetto all'inclusione) ossia $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ è una relazione d'ordine in $\{\mathfrak{D}\}$, per la quale $\mathfrak{C}$ è il minimo.

Per l'insieme ordinato $(\{\mathfrak{D}\}, \subset)$ è soddisfatta la proprietà seguente: sia $\{\mathfrak{D}'\}$ una sottocollezione di $\{\mathfrak{D}\}$, totalmente ordinata rispetto all'inclusione $\subset$; esiste in $\{\mathfrak{D}\}$ un elemento $\mathfrak{D}''$ che è maggiorante per $\{\mathfrak{D}'\}$: basta infatti prendere per $\mathfrak{D}''$ la famiglia di sottoinsiemi di X unione di tutte le famiglie $\mathfrak{D}'$.

Il lemma di Zorn assicura, in tali ipotesi, l'esistenza in $\{\mathfrak{D}\}$ di un elemento massimale $\mathfrak{D}_0$. Concludendo, $\mathfrak{D}_0$ contiene la famiglia di chiusi $\mathfrak{C}$ e ha la proprietà dell'intersezione finita. Siccome

$$\mathfrak{D}_0 = \{D^0_\mu\}_{\mu \in M}$$

è massimale, è subito visto che:

a) se $D = D^0_{\mu_1} \cap \dots \cap D^0_{\mu_n} \neq \emptyset$, allora $D \in \mathfrak{D}_0$;
b) se U è un sottoinsieme di X tale che $U \cap D^0_\mu \neq \emptyset$ per ogni $\mu \in M$, allora $U \in \mathfrak{D}_0$.

Dimostreremo che esiste $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ aderente ad ogni $D^0_\mu \in \mathfrak{D}_0$. Siccome $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}_0$, x è aderente ad ogni $C_\lambda \in \mathfrak{C}$. Siccome C_λ è chiuso per ogni $\lambda \in \Lambda$, risulta $x \in C_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, e quindi $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.

Sia $p_i\colon X \to X_i$ la proiezione canonica di $X = \prod_{i \in I} X_i$ su X_i e sia $\mathfrak{D}^{(i)}_0$ la famiglia dei sottoinsiemi $p_i(D^0_\mu)$ $(\mu \in M)$. La famiglia $\mathfrak{D}^{(i)}_0$ ha la proprietà dell'intersezione finita; quindi la famiglia

$$\overline{\mathfrak{D}}^{(i)}_0 = \{\overline{p_i(D^0_\mu)}\}$$

delle chiusure dei sottoinsiemi $p_i(D^0_\mu)$ è una famiglia di chiusi dello spazio compatto X_i che ha la proprietà dell'intersezione finita. Ne segue che $\bigcap_{\mu \in M} \overline{p_i(D^0_\mu)}$ non è vuoto; ossia esiste $x_i \in X_i$, che è aderente ad ogni elemento $p_i(D^0_\mu)$ della famiglia $\mathfrak{D}^{(i)}_0$.

Dimostriamo che $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ è aderente ad ogni elemento D^0_μ di $\mathfrak{D}_0$. Per definizione di topologia prodotto si deve dimostrare che per ogni sottoinsieme finito J di I ed ogni scelta di un intorno U_j, di x_j, in X_j, $(j \in J)$ si ha

$$(1) \qquad \left[\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j)\right] \cap D^0_\mu \neq \emptyset \quad \text{per ogni} \quad \mu \in M.$$

Siccome $U_j \cap p_j(D^0_\mu) \neq \emptyset$ e $p_j^{-1}(p_j(D^0_\mu)) \supset D^0_\mu$, ne segue che

$$p_j^{-1}(U_j) \cap D^0_\mu \neq \emptyset.$$

Per b), $p_j^{-1}(U_j) \in \mathfrak{D}_0$. Ne segue, per a) che $\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j) \in \mathfrak{D}_0$. La (1) è conseguenza immediata del fatto che $\mathfrak{D}^0$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Q.E.D.

Dai teoremi 1.8 e 3.1 segue il

Corollario 3.2 (Teorema di Heine-Borel). *Date n coppie di numeri reali (a_i, b_i) con $a_i \leqslant b_i$, $(i = 1, \dots, n)$ il sottoinsieme dello spazio $\mathbf{R}^n$ munito della topologia euclidea*

$$(2) \qquad P = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \text{ per } i = 1, 2, \dots, n\},$$

è compatto in $\mathbf{R}^n$.

Dai teoremi 1.12 e 3.1 segue il

Corollario 3.3 (Teorema di Bolzano-Weierstrass). *Ogni sottoinsieme infinito del sottoinsieme P definito dalla* (2) *possiede almeno un punto di accumulazione contenuto in P.*

Esempi

[3.1] Ogni chiuso contenuto in P è compatto in $\mathbf{R}^n$.

[3.2] I dischi di $\mathbf{R}^n$ sono relativamente compatti in $\mathbf{R}^n$.

[3.3] I compatti di $\mathbf{R}^n$ sono tutti e soli i sottoinsiemi limitati e chiusi (v. esempio 1.9 e corollario 1.9).

[3.4] La sfera di $\mathbf{R}^n$ $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ è compatta. (È un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ limitato e chiuso.)

[3.5] Sia $I = [0, 1]$ con la topologia euclidea. Gli spazi prodotto $I^{\mathbf{N}^*}$ dell'esempio 7.1 del capitolo secondo ed I^I dell'esempio 7.3 del capitolo secondo sono compatti, e quindi anche normali. Però $I^{\mathbf{N}^*}$, come sappiamo, è metrizzabile, mentre non lo è I^I.

Il teorema 3.1 può essere invertito, come segue subito dal lemma 2.1.

Proposizione 3.4. *Se il prodotto topologico $X = \prod_{i \in I} X_i$ di una famiglia di spazi topologici è compatto, ogni spazio X_i è compatto.*

4. *Spazi localmente compatti*

Definizione 4.1. Uno spazio X si dice *localmente compatto* in un punto x, se x ha un intorno compatto in X. Lo spazio X si dice *localmente compatto*, se esso è localmente compatto in ogni suo punto. Un sottoinsieme Y di X si dice localmente compatto in X se esso è localmente compatto per la topologia indotta.

Ogni spazio compatto è localmente compatto. Viceversa, esistono spazi localmente compatti i quali non sono compatti.

Esempi

[4.1] Un insieme X, con la topologia discreta, è localmente compatto. Se X è infinito, X non è compatto.

[4.2] $\mathbf{R}^n$ con la topologia euclidea non è compatto (v. esempio 1.4), ma è localmente compatto. (Ogni disco (v. esempio 3.2) è relativamente compatto.)

[4.3] La retta razionale $\mathbf{Q}$ non è localmente compatta.

Dalla proposizione 4.9 del capitolo secondo e dal corollario 1.10 segue la

Proposizione 4.2. *Ogni spazio X di Hausdorff localmente compatto è regolare.*

Dimostrazione. Ogni punto x di X ha un intorno U_x compatto, e quindi regolare nella topologia indotta. Dalla proposizione 4.9 del capitolo terzo segue l'asserto. Q.E.D.

Dalla proposizione precedente e dalla proposizione 4.7, b) del capitolo terzo segue che:

Proposizione 4.3. *In uno spazio di Hausdorff localmente compatto gli intorni compatti di un punto costituiscono un sistema fondamentale di intorni.*

La proprietà suddetta può non esser piú vera, anche se lo spazio è compatto, ma non è di Hausdorff, come prova l'esempio seguente.

Esempio

[4.4] Sia $X = \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ dove $\mathbf{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali ed ∞ è un punto fuori di $\mathbf{Q}$. La famiglia $\mathfrak{B}$ dei sottoinsiemi di X che sono intervalli $]p, q[$, con $p < q$ elementi di $\mathbf{Q}$, oppure complementari in X di sottoinsiemi finiti di $\mathbf{Q}$, è base di una topologia su X, rispetto alla quale X è compatto e T_1. (Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di X ed $\infty \in A_{i_0}$, allora $\complement A_{i_0}$ è finito, e quindi può essere ricoperto da un numero finito di A_i.)

L'intorno $]-p, p[$ di 0 non contiene nessun intorno compatto di 0.

Dalla proposizione 4.3 segue il

Teorema 4.4. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, e*

sia K un compatto di X. Per ogni intorno U di K, esiste un intorno compatto V di K tale che $V \subset U$.

Dimostrazione. Per ogni $x \in K$ esiste un intorno compatto V_x di x contenuto in U. $\{\mathring{V}_x\}_{x\in K}$ è un ricoprimento aperto di K. Siccome K è compatto, esistono $x_1, \ldots, x_n$ appartenenti a K, tali che

$$K \subset \bigcup_{h=1}^{n} \mathring{V}_{x_h}.$$

$V = \bigcup_{h=1}^{n} V_{x_h}$ è un intorno compatto di K, contenuto in U. Q.E.D.

Proposizione 4.5. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Un sottoinsieme F di X è chiuso se, e soltanto se, l'intersezione di F con ogni compatto di X è compatta.*

Dimostrazione. Sia F chiuso, e sia K un compatto di X. L'intersezione $F \cap K$ è chiusa in K; quindi è compatta in K ed anche in X. Supponiamo ora che l'insieme F sia tale che, per ogni compatto K di X, $F \cap K$ sia compatto, e proviamo che F è chiuso. Poiché X è localmente compatto, per ogni $x \in X$ possiamo costruire un intorno compatto U_x. La famiglia $\{U_x\}_{x\in X}$ è tale che $\{\mathring{U}_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento di X.

Poiché U_x è compatto, l'intersezione $U_x \cap F$ è compatta, per ipotesi, e quindi chiusa in U_x, in quanto U_x è di Hausdorff. Segue dalla proposizione 2.3 del capitolo secondo che F è chiuso. Q.E.D.

Proposizione 4.6. *In uno spazio di Hausdorff X localmente compatto ogni sottospazio localmente chiuso è localmente compatto.*

Dimostrazione. Sia S un sottoinsieme localmente chiuso di X. Per la proposizione 2.6 del capitolo secondo, $S = F \cap A$, con F chiuso ed A aperto in X.

Sia $x \in S$; dalla proposizione 4.3 segue che esiste un intorno compatto U di x, contenuto in A.

$U \cap S = U \cap F$ è un intorno di x in S, che è un chiuso del compatto U. Dunque $U \cap S$ è un intorno compatto di x in S. Q.E.D.

Sappiamo (v. corollario 2.2), che l'immagine continua di un compatto è un compatto. Tuttavia l'immagine continua di uno spazio localmente compatto non è necessariamente uno spazio localmente compatto, come prova l'esempio seguente.

in S^n che ha come classi di $\mathfrak{S}$-equivalenza le coppie di punti di S^n diametralmente opposte.

Sia B^{n+1} il disco chiuso di $\mathbf{R}^{n+1}$: $\sum_{1}^{n+1} {}_i\, x_i^2 \leqslant 1$, d la distanza euclidea su B^{n+1}, $\mathfrak{K}_{B^{n+1}}$ la famiglia dei compatti I_x di B^{n+1} della forma

$$I_x = \{y \in B^{n+1} \mid y = \lambda x \text{ con } \lambda \neq 0\} \quad \text{dove } x \in S^n$$

e d' la distanza su $\mathfrak{K}_{B^{n+1}}$ definita nell'esercizio 21.

L'applicazione

$$f\colon\; S^n \to \mathfrak{K}_{B^{n+1}}$$

induce, per passaggio al quoziente, un omeomorfismo $S^n/\mathfrak{S} \to \mathfrak{K}_{B^{n+1}}$, rispetto alla topologia indotta su $\mathfrak{K}_{B^{n+1}}$ da d'. Quindi d' definisce su $P^n_{\mathbf{R}}$ una struttura di spazio metrico compatibile con la sua topologia.

24. Sulla retta reale $\mathbf{R}$ il sottoinsieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, ed il sottoinsieme

$$F = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left\{ n + \frac{1}{n+1} \right\}$$

sono due chiusi disgiunti che hanno distanza eguale a zero.

Nel piano euclideo $\mathbf{R}^2$ i sottoinsiemi $y = 0$ ed $xy = 1$ sono due chiusi disgiunti che hanno distanza eguale a zero.

In uno spazio metrico X, un chiuso F ed un compatto K disgiunti hanno distanza maggiore di zero.

25. Sia X uno spazio localmente compatto e paracompatto e sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Esiste un raffinamento aperto $\{V_j\}_{j\in J}$ di $\{U_i\}_{i\in I}$ tale che ogni V_j intersechi solo un numero finito di $\overline{V}_{j'}$ $(j' \in J)$.

(Esiste $\{V_j\}_{j\in J}$ raffinamento aperto localmente finito di $\{U_i\}_{i\in I}$ tale che $\overline{V}_j$ sia compatto per ogni $j \in J$; si tenga conto del lemma 6.7.)

26. Sia X una varietà topologica (v. esempio 3.10 del capitolo quarto). X è uno spazio localmente compatto ed ogni $x \in X$ possiede un intorno metrizzabile a base numerabile.

27. Sia $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ y \in \mathbf{N}\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea. Consideriamo su T la relazione d'equivalenza

$$(x, y)\, \mathfrak{R}\, (x', y') \Leftrightarrow x = x' \neq 1/2, \text{ oppure } x = x' = 1/2,\ y = y'.$$

Lo spazio quoziente $X = T/\mathfrak{R}$ è una varietà topologica di dimensione 1 che non è di Hausdorff. Se π è la proiezione naturale, ogni intorno di $\pi(1/2, y)$ non è relativamente compatto.

28. Se X è uno spazio localmente compatto, paracompatto e connesso, X è unione di una infinità numerabile di compatti i cui interni ricoprono X (Si tenga conto della proposizione 6.8 e del teorema 4.4.)

29. Sia X una varietà topologica connessa e di Hausdorff. Le seguenti condizioni sono equivalenti per X:

a) X è paracompatta;
b) X è a base numerabile.

[(a) $\Rightarrow$ b) è conseguenza dell'esercizio precedente e del fatto che ogni compatto di X è a base numerabile; b) $\Rightarrow$ a) segue dalla proposizione 6.5).]

29. Si consideri nel sottospazio $[0, +\infty[$ della retta reale $\mathbf{R}$ la relazione di equivalenza

$$x\,\mathfrak{R}\,y \Leftrightarrow \begin{cases} y = x & \text{se } x \notin \mathbf{N} \\ y \in \mathbf{N} & \text{se } x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Sia X lo spazio quoziente, π la proiezione naturale, $\omega = \pi(\mathbf{N})$. Dimostrare che:

a) ω non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile;
b) ω non ha intorni compatti;
c) esistono sottoinsiemi numerabili di X che non contengono ω, ma la cui chiusura contiene ω;
d) X è uno spazio normale non metrizzabile;
e) $X - \{\omega\}$ è uno spazio metrizzabile.

(Sia, per assurdo, $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di ω e, per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $\delta_n = \text{Sup.}\ \delta$ con δ tale che $S(n, \delta) \subset \pi^{-1}(U_n)$.

Sia $V = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S\left(n, \frac{2}{d_n}\right)$ e sia $W = \pi(V)$. W è un intorno aperto di ω tale che $W \not\supset U_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e ciò prova a).

Se U è un intorno di ω, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $x_n \notin \mathbf{N}$, $x_n \in \pi^{-1}(U)$ tale che $|x_n - n| < 1/2$. La successione $\{\pi(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ di elementi di U ha gli elementi tutti distinti e non ha punti di accumulazione. Ciò prova b).

$S = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ è numerabile ed ha ω come punto di accumulazione e ciò prova c).

Segue dalla proposizione 4.4 del capitolo terzo che X è T_1. Se E ed F sono due chiusi disgiunti, è immediata la costruzione di due aperti disgiunti di $[0, +\infty[$, contenenti $\pi^{-1}(E)$, $\pi^{-1}(F)$ rispettivamente, i quali siano unioni di classi di equivalenza e ciò prova d), tenuto conto di a).

Si osservi infine che $X - \{\omega\}$ è omeomorfo a $[0, +\infty[- \mathbf{N}$ e ciò prova e).)

30. Si rappresentino i numeri reali in base 3 (ossia con le cifre 0, 1, 2) e sia C il sottoinsieme dei punti di $[0, 1]$ la cui parte decimale contiene solo le cifre 0, 1. Lo spazio C con la topologia indotta (spazio di Cantor) ha le seguenti proprietà:

a) è compatto, ed ha la cardinalità di $\mathbf{R}$;
b) è perfetto e totalmente sconnesso;
c) ogni intervallo contenuto in $[0, 1]$ contiene un intervallo che non interseca C. $\Leftrightarrow$ $\mathring{C} = \emptyset$

Capitolo sesto

Spazi metrici

1. *Successioni*

Sia X uno spazio topologico, e sia data una successione di punti di X, cioè un'applicazione $f\colon \mathbf{N}^* \to X$. Posto $x_n = f(n)$, indicheremo la successione con $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$, oppure, piú semplicemente, con $\{x_n\}$.

Definizione 1.1. Diremo che la successione $f\colon \mathbf{N}^* \to X$ ammette un *limite*, $x \in X$, per $n \to +\infty$, o che tale successione *converge* ad x, e scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

o, piú semplicemente, $x_n \to x$, se per ogni intorno U di x esiste un numero naturale n_0 tale che

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in U.$$

Se X è di Hausdorff, una successione non può convergere a due punti distinti di X.

Sia $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}^*}$ una successione di interi positivi strettamente crescente, ossia tale che $n_1 < n_2 < \ldots$. Consideriamo la successione

$$\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}^*}.$$

Essa si chiama una *sottosuccessione* della successione $\{x_n\}$.

Definizione 1.2. Si dice che un punto $x \in X$ è un *valore limite* della successione $\{x_n\}$, se esiste qualche sottosuccessione di $\{x_n\}$ convergente a x.

Lemma 1.3. *Sia X uno spazio topologico soddisfacente al primo assioma di numerabilità e sia $\{x_n\}$ una successione di punti di X. Il punto $x \in X$ è valore limite della successione $\{x_n\}$ se, e soltanto se, per ogni intorno U di x ed ogni $n \in N$ esiste $x_m \in U$ con $m > n$.*

Dimostrazione. È chiaro che la condizione è soddisfatta quando x è un valore limite di $\{x_n\}$.

Supponiamo inversamente che x sia un punto di X per cui sia verificata la condizione suddetta. Si può trovare un sistema fondamentale di intorni di x, $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$, tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Siccome per ogni $m \in \mathbf{N}^*$ esiste qualche elemento della successione $\{x_n\}$ contenuto in U_m, possiamo costruire una sottosuccessione $\{x_{i_n}\}$ di $\{x_n\}$ tale che $x_{i_n} \in U_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Poiché $\{x_{i_n}\}$ converge ad x, il lemma è provato. Q.E.D.

Vale la seguente:

Proposizione 1.4. *Sia X uno spazio topologico che soddisfa al primo assioma di numerabilità. Sia A un sottoinsieme di X. Un punto $x \in X$ è aderente ad A se, e soltanto se, esiste una successione $\{x_n\}$ di punti di A che converge ad x.*

Dimostrazione. È ovvio anzitutto che, se $x_n \to x$, è $x \in \bar{A}$. Supponiamo, viceversa, che $x \in \bar{A}$ e sia $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ un sistema fondamentale di intorni di x, tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}^*$.

Scegliamo $x_n \in A \cap U_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Si ottiene una successione $\{x_n\}$ di punti di A che converge ovviamente ad x. Q.E.D.

Poiché in uno spazio metrico ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni il quale è numerabile, le successioni convergenti bastano, per la proposizione 1.4, a caratterizzare le chiusure.

Esempio

[1.1] L'insieme $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (v. esempio 5.8 del capitolo primo e 7.3 del capitolo secondo) delle funzioni su $\mathbf{R}$ a valori reali con la topologia prodotto non soddisfa al primo assioma di numerabilità. Il sottoinsieme F_0 delle funzioni che sono diverse da zero soltanto in un numero finito di punti di $\mathbf{R}$ è denso in $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. D'altra parte $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$ se, e solo se, per ogni $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ (nel senso della topologia della retta reale). Sia $\{f_n\}$ una successione di elementi di F_0. L'insieme dei numeri t per i quali esiste $n \in \mathbf{N}^*$ tale che $f_n(t) \neq 0$ è

numerabile. Non esiste quindi una successione $\{f_n\}$ di F_0 che converga alla funzione f definita da $f(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Da ora in poi *supporremo che X sia uno spazio metrico con distanza d.*

Tenuto conto che $f\colon X \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = d(x_0, x)$ è continua (v. esempio 5.7 del capitolo primo), dalla definizione 1.1 e dal lemma 1.3 segue la:

Proposizione 1.5. *La successione $\{x_n\}$ converge ad x se, e soltanto se, la successione di numeri reali $\{d(x, x_n)\}$ converge a zero. Il punto x è un valore limite della successione $\{x_n\}$ se, e soltanto se, lo zero è un valore limite della successione $\{d(x, x_n)\}$.*

Dati due spazi metrici X e X', sia $f\colon A \to X'$ un'applicazione di un sottoinsieme $A \subset X$ in X'. Sia $a \in \bar{A}$ e sia $a' \in X'$.

Proposizione 1.6. *Risulta*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = a'$$

se, e soltanto se, per ogni successione $\{a_n\}$ di punti $a_n \in A$, la quale converga ad a, la successione $\{f(a_n)\}$ converge ad a'.

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = a'.$$

In virtú della proposizione 3.2 del capitolo terzo, per ogni intorno U' di a' esiste un intorno U di a tale che

$$f(U \cap A) \subset U'.$$

Data una successione $\{a_n\}$ di punti $a_n \in A$, convergente ad a, per il lemma 1.3 esiste un indice n_0 tale che, per ogni $n > n_0$,

$$a_n \in U.$$

Dunque, fissato ad arbitrio l'intorno U' di a' esiste un indice n_0 tale che, per ogni $n > n_0$,

$$f(a_n) \in U'.$$

Ciò prova che

$$f(a_n) \to a'.$$

Inversamente, se $f(x)$ non ha limite a' per x che tende ad a in A, esistono un intorno U' di a' e, in ogni intorno U di a, qualche punto $x \in U \cap A$ tale che

$$f(x) \notin U'.$$

Consideriamo i dischi $S(a, \frac{1}{n})$ per $n = 1, 2, \ldots$ Sia

$$a_n \in S\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A$$

un punto tale che

$$f(a_n) \notin U'.$$

La successione $\{a_n\}$ converge ad a, mentre la successione $\{f(a_n)\}$ non converge ad a'.

Q.E.D.

Esempio

[1.2] Un'applicazione $f\colon X \to X'$ di uno spazio metrico X in uno spazio metrico X' è continua in $x \in X$ se, e soltanto se, per ogni successione $\{x_n\}$ che converge ad x, la successione $\{f(x_n)\}$ converge ad $f(x)$ (v. esempio 3.1 del capitolo terzo).

2. *Successioni di Cauchy*

Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di X convergente ad un punto $x \in X$. Fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un indice n_0 tale che

$$d(x, x_n) < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > n_0.$$

Ne segue che per tutti gli m, $n > n_0$ risulta

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x, x_n) + d(x, x_m) < 2\varepsilon.$$

Definizione 2.1. Una successione $\{x_n\}$ di punti di X si chiama una *successione di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice n_0 tale che per tutti gli indici n, $m > n_0$ risulti $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Possiamo intanto enunciare il

Lemma 2.2. *Ogni successione convergente è una successione di Cauchy.*

Lemma 2.3. *Se una successione di Cauchy ha un valore limite, la successione converge ad esso.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ un valore limite della successione di Cauchy $\{x_n\}$.

Fissato arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 tale che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ per tutti gli indici } n, m > n_0.$$

D'altra parte, essendo x un valore limite di $\{x_n\}$, esiste qualche indice $m > n_0$ tale che

$$d(x, x_m) < \varepsilon.$$

Ne segue che, per ogni $n > n_0$ risulta

$$d(x, x_n) \leqslant d(x, x_m) + d(x_m, x_n) < 2\varepsilon,$$

onde si trae che $x_n \to x$. Q.E.D.

Definizione 2.4. Lo spazio metrico X si dice *completo* se ogni successione di Cauchy di X è convergente.

Esempi

[2.1] La retta reale $\mathbf{R}$ è uno spazio metrico completo; un intervallo $]a, b[$ di $\mathbf{R}$ con la distanza euclidea, e la retta razionale $\mathbf{Q}$ non sono spazi metrici completi.

[2.2] Il prodotto $X \times Y$ di due spazi metrici completi con una qualunque delle tre distanze introdotte nel paragrafo 4 del capitolo secondo è uno spazio metrico completo.

[2.3] In $\mathbf{R}^n$ la distanza euclidea e la distanza d definita da

$$d(x,y) = \operatorname*{Sup.}_{i=1,\ldots,n} |y_i - x_i| \quad (x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n))$$

definiscono una struttura di spazio metrico completo.

[2.4] Sia X uno spazio metrico con distanza d, $\{x_n\}$ una successione di Cauchy; allora per ogni $x \in X$ esiste $\delta_x > 0$ tale che $S(x, \delta_x) \supset \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} x_n$.

[2.5] Sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali la distanza euclidea $d(x, y) =$

$= |x-y|$ e la distanza $d'(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ sono topologicamente equivalenti (v. esempio 4.7 del capitolo primo). La successione $\{n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ è una successione di Cauchy nello spazio metrico $(\mathbf{R}, d')$ e non è una successione di Cauchy nello spazio metrico $(\mathbf{R}, d)$. Siccome $\{n\}$ non è convergente, lo spazio metrico $(\mathbf{R}, d')$ non è completo.

Proposizione 2.5. *Un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo è completo (per la metrica indotta).*

Dimostrazione. Sia Y un sottospazio chiuso dello spazio metrico completo X e sia $\{y_n\}$ $(y_n \in Y)$, una successione di Cauchy in Y. Essa è una successione di Cauchy anche in X, e pertanto — siccome X è completo — converge ad un punto $y \in X$. Per la proposizione 1.4, $y \in \bar{Y} = Y$. Q.E.D.

Osservazione. L'ipotesi che lo spazio metrico X sia completo è essenziale per la validità della proposizione precedente. Per convincersene basta considerare uno spazio metrico non completo X e il sottospazio chiuso $Y = X$.

Proposizione 2.6. *Un sottospazio completo di uno spazio metrico è chiuso.*

Dimostrazione. Sia Y un sottospazio completo dello spazio metrico X, e sia $y \in \bar{Y}$. Per la proposizione 1.4 esiste una successione $\{y_n\}$ di punti $y_n \in Y$ tale che $y_n \to y$. La successione $\{y_n\}$ è di Cauchy. Quindi — essendo Y completo — essa converge ad un punto di Y che, per l'unicità del limite, coincide con y. Dunque $y \in Y$. Q.E.D.

Teorema 2.7 (Teorema di Baire). *Se uno spazio metrico completo è unione di una successione di insiemi chiusi, almeno uno di questi ha la sua parte interna non vuota.*

Dimostrazione. Sia $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ una successione di insiemi chiusi dello spazio metrico completo X, tali che $X = \bigcup_n F_n$. Supponiamo che tutti abbiano la parte interna vuota. Per conseguenza, si ha anzitutto che $F_1 \neq X$, cioè l'aperto $\complement F_1$ non è vuoto. Sia $x_1 \in \complement F_1$ e sia σ_1 tale che $0 < \sigma_1 < \frac{1}{2}$ e che

$$S(x_1, \sigma_1) \subset \complement F_1.$$

Poiché $\mathring{F}_2 \neq \emptyset$, risulta

$$S\left(x_1, \frac{\sigma_1}{2}\right) \not\subset F_2$$

cioè

$$S\left(x_1, \frac{\sigma_1}{2}\right) \cap \complement F_2 \neq \emptyset.$$

Sia $x_2 \in S\left(x_1, \frac{\sigma_1}{2}\right) \cap \complement F_2$ e sia σ_2 tale che $0 < \sigma_2 < \frac{1}{2^2}$

e che

$$S(x_2, \sigma_2) \subset S\left(x_1, \frac{\sigma_1}{2}\right) \cap \complement F_2.$$

Procedendo in tal guisa si ottiene una successione $\{S(x_n, \sigma_n)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ tale che

$$S(x_{n+1}, \sigma_{n+1}) \subset S\left(x_n, \frac{\sigma_n}{2}\right), \; S(x_n, \sigma_n) \cap F_n = \emptyset, \; 0 < \sigma_n < \frac{1}{2^n}.$$

Per $n < m$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) <$$

$$< \frac{\sigma_n}{2} + \frac{\sigma_{n+1}}{2} + \dots + \frac{\sigma_{m-1}}{2} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^m} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^n}.$$

Dunque la successione $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy. Poiché X è completo, essa converge ad un punto $x \in X$. Fissiamo un indice positivo n. Per ogni $m > n$ risulta

$$d(x, x_n) \leqslant d(x, x_m) + d(x_m, x_n) < d(x, x_m) + \frac{\sigma_n}{2}.$$

Passando al limite per $m \to +\infty$, si ottiene

$$d(x, x_n) < \sigma_n$$

ossia $x \in S(x_n, \sigma_n)$. Poiché, per costruzione, $S(x_n, \sigma_n) \cap F_n = \emptyset$, il punto x non è contenuto in alcun F_n per $n = 1, 2, \ldots$; il che è assurdo, in quanto $x \in X = \bigcup_n F_n$.

Q.E.D.

Il teorema di Baire può enunciarsi equivalentemente anche cosí:

In uno spazio metrico completo una famiglia numerabile di aperti densi ha intersezione non vuota.

Definizione 2.8. Un sottoinsieme F di X si dice *raro* se la chiusura di F non ha punti interni, cioè se $\mathring{\bar{F}} = \emptyset$. Si dice che F è *magro* (o *di prima categoria*) se esso è unione di una famiglia numerabile di insiemi rari. Se F non è magro, esso si dice *di seconda categoria*. Qualora ogni sottoinsieme aperto non vuoto di X sia di seconda categoria, lo spazio X si chiama uno *spazio di Baire*.

Il teorema di Baire può allora enunciarsi nella forma seguente:

Ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire.

Esempi

[2.6] La retta razionale $\mathbf{Q}$ non è uno spazio di Baire. (I punti di $\mathbf{Q}$ costituiscono un ricoprimento numerabile di $\mathbf{Q}$ con chiusi privi di parte interna.)

[2.7] Sia X uno spazio di Baire, N un sottoinsieme numerabile di X. Il sottospazio di X, $\complement N$, è uno spazio di Baire. (Se esistesse un aperto A di $\complement N$ che fosse magro, allora $A \cup N$ conterrebbe un aperto magro di X; il che è assurdo.)

In particolare, se $\mathbf{Q}^n$ è l'insieme dei punti di $\mathbf{R}^n$ con coordinate razionali, allora $\complement \mathbf{Q}^n$ è uno spazio di Baire.

[2.8] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale, N un sottoinsieme numerabile di $\mathbf{R}$, $f\colon \complement N \to \mathbf{R}^+$ (dove $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$) un'applicazione qualunque. Se poniamo

$$A_n = \{x \in \complement N \mid f(x) > \frac{1}{n}\} \quad \text{per } n \in \mathbf{N}^*,$$

si ha:

$$\complement N = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} (\bar{A}_n \cap \complement N).$$

La retta reale $\mathbf{R}$ è uno spazio di Baire; dall'esempio 2.7 segue che $\complement N$ è uno spazio di Baire. Ne segue che uno almeno dei sottoinsiemi $\bar{A}_n \cap \complement N$ ha punti interni.

[2.9] L'esempio precedente consente di provare l'esistenza di uno spazio T_3 che non è T_4. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$ il semipiano chiuso delle y positive; per ogni $(x, y) \in X$ sia $S[(x, y), \varepsilon]$ il disco di centro (x, y) e raggio ε del piano euclideo $\mathbf{R}^2$.

Ciò posto, per ogni $(x, y) \in X$, consideriamo la famiglia $\mathfrak{B}_{(x,y)}$ dei sottoinsiemi $B[(x, y), \varepsilon]$ di X cosí definiti:

$$B[(x, y), \varepsilon] = \begin{cases} S[(x, y), \varepsilon] & \text{con } 0 < \varepsilon < y, \text{ se } y > 0 \\ S[(x, \varepsilon), \varepsilon] \cup \{(x, 0)\} & \text{con } \varepsilon > 0, \text{ se } y = 0. \end{cases}$$

$\mathfrak{B}_{(x,y)}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di una topologia su X, la quale è T_3, ma non T_4. Precisamente i sottoinsiemi

$$E = \{(p, 0) \in X \mid p \in \mathbf{Q}\}, \qquad F = \{(t, 0) \in X \mid t \notin \mathbf{Q}\}$$

sono chiusi disgiunti di X, che non posseggono intorni disgiunti.

La famiglia $\mathfrak{B}$ unione delle famiglie $\mathfrak{B}_{(x,y)}$ soddisfa alle condizioni del teorema 3.3 del capitolo primo, e quindi è base di una topologia su X che manifestamente è T_1. Si dimostra che è soddisfatta la b) della proposizione 4.7 del capitolo terzo, e quindi che X è uno spazio T_3, osservando che $\overline{B[(x, y), \frac{\varepsilon}{2}]} \subset B[(x, y), \varepsilon]$.

Supponiamo, per assurdo, che esistano due aperti disgiunti U, V di X tali che $E \subset U$, $F \subset V$.

Per ogni $t \notin \mathbf{Q}$ sia $B_t = B[(t, 0), \varepsilon(t)]$ tale che $B_t \subset V$. Poniamo, come nell'esempio 2.8, $A_n = \{t \notin \mathbf{Q} \mid \varepsilon(t) > \frac{1}{n}\}$ per $n \in \mathbf{N}^*$. Esiste $n \in \mathbf{N}^*$ tale che $\bar{A}_n \cap \complement \mathbf{Q}$ ha punti interni (in $\complement \mathbf{Q}$) ed esiste quindi $]a, b[$ tale che $]a, b[\subset \bar{A}_n$. Sia $p \in]a, b[\cap \mathbf{Q}$ e sia $B_p = B[(p, 0), \varepsilon(p)]$ tale che $B_p \subset U$. Ne segue $B_p \cap B_t = \emptyset$ per ogni $t \notin \mathbf{Q}$.

D'altra parte $B_p \cap B_t = \emptyset$ se, e soltanto se,

$$[\varepsilon(p) + \varepsilon(t)]^2 \leqslant (t - p)^2 + [\varepsilon(t) - \varepsilon(p)]^2,$$

ossia se, e soltanto se,

$$4\varepsilon(p)\,\varepsilon(t) \leqslant (t - p)^2.$$

Siccome $p \in \bar{A}_n$, esiste $t \in A_n$ tale che $(t - p)^2 < \dfrac{4\varepsilon(p)}{n}$ e ciò è assurdo.

3. *Completamento di uno spazio metrico*

Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni di Cauchy dello spazio metrico X.

Lemma 3.1. *La successione di numeri reali* $\{d(x_n, y_n)\}$ *è convergente.*

Dimostrazione. Risulta infatti

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$
$$d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m),$$

onde

$$| d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) | \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Fissato arbitrariamente un $\varepsilon > 0$ esiste un indice n_0 tale che per $n > n_0$, $m > n_0$, si ha

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi

$$| d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) | < \varepsilon.$$

La successione di numeri reali $\{d(x_n, y_n)\}$ è dunque una successione di Cauchy.

Poiché la retta reale **R** è completa, tale successione converge.

Q.E.D.

Date due successioni di Cauchy $\tilde{x} = \{x_n\}$ e $\tilde{y} = \{y_n\}$, poniamo

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n).$$

Osservazione. Siano $\tilde{x} = \{x_n\}$, $\tilde{y} = \{y_n\}$ due successioni di Cauchy convergenti rispettivamente ad x ed y. Tenuto conto dell'esercizio 13 del capitolo secondo e dell'esempio 1.2, si ha $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(x, y)$.

Si ha inoltre:

$$d(x_n, y_m) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m),$$
$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, y_m) + d(y_m, y_n),$$

onde

$$| d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m) | \leqslant d(y_n, y_m).$$

Ne segue che può scriversi anche

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} d(x_n, y_m). \tag{1}$$

Lemma 3.2. *Siano* $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ *tre successioni di Cauchy di* X. *Valgono le proprietà seguenti*

a) $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \geqslant 0$,
b) $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$,
c) $d(\tilde{x}, \tilde{z}) \leqslant d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, \tilde{z})$.

Dimostrazione. Le proprietà a) e b) sono ovvie. Resta da provare la c). Posto $\tilde{x} = \{x_n\}$, $\tilde{y} = \{y_n\}$ e $\tilde{z} = \{z_n\}$, si ha

$$d(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \{d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)\} =$$
$$= d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}).$$

Q.E.D.

Assegnato lo spazio metrico X, sia $C(X)$ l'insieme delle successioni di Cauchy di X. Chiamiamo equivalenti due elementi $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, di $C(X)$ se e solo se $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. È subito visto che la relazione ora posta è di equivalenza.

Sia X^* l'insieme delle classi di equivalenza delle successioni di Cauchy di X. Se $\tilde{x} = \{x_n\}$ e $\tilde{x}' = \{x_n'\}$ sono due successioni di Cauchy equivalenti, e se $\tilde{y} = \{y_n\}$ è una successione di Cauchy qualsiasi, si ha

$$| d(\tilde{x}, \tilde{y}) - d(\tilde{x}', \tilde{y}) | = \lim_{n \to +\infty} | d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n) |.$$

Poiché

$$| d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n) | \leqslant d(x_n, x_n') \text{ e } d(x_n, x_n') \to 0$$

risulta

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{x}', \tilde{y});$$

cioè $d(\tilde{x}, \tilde{y})$ dipende soltanto dalle classi di equivalenza di $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$. Indicando queste classi di equivalenza con x^* e y^*, poniamo

$$d^*(x^*, y^*) = d(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Dal lemma 3.2 segue pertanto che d^* è una distanza in X^*, ossia che

Lemma 3.3. *X^* è uno spazio metrico con funzione distanza d^*.*

Ad ogni punto $x \in X$ possiamo associare una successione di Cauchy: la successione $\{x_n\}$ con $x_n = x$ per $n \in \mathbf{N}^*$.

Sia i: $X \to X^*$ l'applicazione che ad ogni $x \in X$ associa la classe di equivalenza della successione di Cauchy $\{x_n\} = \{x, x, \ldots\}$.

Risulta per ogni coppia di punti $x, y \in X$

$$d^*(i(x), \ i(y)) = d(x, y).$$

In altre parole l'applicazione i: $X \to X^*$ è isometrica, e — come tale — è iniettiva.

Lemma 3.4. *$i(X)$ è denso in X^*.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x^* \in X^*$ esiste qualche $y \in X$ tale che

$$d^*(x^*, i(y)) < \varepsilon.$$

Sia x^* la classe di equivalenza di una successione di Cauchy $\{x_n\}$. Qualunque sia $y \in X$, si ha per definizione

$$d^*(x^*, i(y)) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y).$$

Poiché $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, esiste un indice n_0 tale che per ogni n, $m > n_0$ risulta

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Basta allora fissare un qualsiasi $m > n_0$ e assumere $y = x_m$, perché si abbia

$$d^*(x^*, i(y)) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_m) < \cdot\,.$$

Q.E.D.

Proposizione 3.5. *Lo spazio X^* è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n^*\}$ una successione di Cauchy in X^*. Poiché $i(X)$ è denso in X^*, per ogni x_n^* esiste qualche $x_n \in X$ tale che

$$d^*(x_n^*, i(x_n)) < \frac{1}{n}.$$

Consideriamo la successione $\{x_n\}$ di punti di X. Poiché

$$d(x_n, x_m) = d^*(i(x_n), i(x_m)) \leqslant d^*(i(x_n), x_n^*) + d^*(x_n^*, x_m^*) + \\ + d^*(x_m^*, i(x_m)) < \frac{1}{n} + d^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m},$$

si ha

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ quando } n, m \to +\infty,$$

cioè $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X. Sia $x^* \in X^*$ la sua classe di equivalenza. Risulta

$$d^*(x^*, x_n^*) \leqslant d^*(x^*, i(x_n)) + d^*(i(x_n), x_n^*) < \\ < d^*(x^*, i(x_n)) + \frac{1}{n} = \lim_{m\to+\infty} d(x_m, x_n) + \frac{1}{n},$$

e quindi, tenuto conto della *osservazione* precedente

$$\lim_{n\to+\infty} d(x^*, x_n^*) \leqslant \lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} d(x_m, x_n) + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ciò prova che la successione di Cauchy $\{x_n^*\}$ converge ad x^*.

Q.E.D.

Proposizione 3.6. *Sia X' uno spazio metrico completo e sia g: $X \to X'$ una isometria di X in X'. Esiste una ed una sola applicazione isometrica h: $X^* \to X'$ per la quale risulti*

$$h \circ i = g.$$

Dimostrazione. Stabiliamo anzitutto l'esistenza costruendo h nel modo seguente. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X. Poiché g è una isometria, la successione $\{g(x_n)\}$ è di Cauchy in X'. Siccome X' è completo, quest'ultima successione converge ad un punto $x' \in X'$. Se $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy di X equivalente a $\{x_n\}$, indicando con d' la distanza in X', risulta

$$\lim_{n\to+\infty} d'(g(x_n), g(y_n)) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

onde

$$g(y_n) \to x'.$$

Dunque il punto x' dipende soltanto dalla classe di equivalenza,

$x^* \in X^*$, della successione di Cauchy $\{x_n\}$. Posto $h(x^*) = x'$, risulta così definita un'applicazione $h\colon X^* \to X'$ che soddisfa per costruzione alla condizione $h \circ i = g$. Inoltre h è un'isometria. Infatti preso un altro punto $z^* \in X^*$, sia $\{z_n\}$ una successione di Cauchy appartenente alla classe di equivalenza z^*, e sia

$$z' = \lim_{n \to +\infty} g(z_n).$$

Si ha

$$d'(h(x^*), h(z^*)) = d'(x', z') = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} d'(g(x_n), g(z_m)) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} d(x_n, z_m),$$

e quindi

$$d'(h(x^*),\ h(z^*)) = d^*(x^*,\ z^*).$$

Sia ora h_1 un'isometria di X^* in X' soddisfacente la condizione $h_1 \circ i = g$.

Le due isometrie h e h_1 coincidono su $i(X)$. Poiché $i(X)$ è denso in X^*, esse coincidono su tutto X^* (v. corollario 2.2 del capitolo terzo). Ciò prova l'unicità. Q.E.D.

Qualora X sia completo, assumendo nella proposizione precedente come X' lo stesso X e come g l'applicazione identica si vede che i è surgettiva, cioè che X e X^* sono isometrici.

Identificando per semplicità lo spazio X con la sua immagine $i(X)$ possiamo riassumere i risultati conseguiti nel modo seguente:

Ogni spazio metrico X può immergersi isometricamente in uno spazio metrico completo X^* in guisa tale che ogni isometria di X in uno spazio metrico completo X' può estendersi, in uno ed in un solo modo, a una isometria di X^* in X'.

Definizione 3.7. *Lo spazio metrico X^* si dice il completamento di X.*

Esempi

[3.1] Siano X, X' due spazi metrici e sia X' completo. Sia A un sottospazio di X e $g\colon A \to X'$ una isometria. g si estende in uno ed un sol modo ad una isometria $\tilde{g}\colon \bar{A} \to X'$.

[3.2] Sia X uno spazio metrico completo, A un sottospazio di X. Sia $i\colon A \to A^*$ l'isometria di A nel suo completamento, $j\colon A \to \bar{A}$ l'applicazione identica di A nella sua chiusura. Esiste una ed una sola

isometria g di A^* su $\bar{A}$ tale che $g \circ i = j$. Mediante g si può identificare A^* con $\bar{A}$.

In particolare $[0, 1]$ è il completamento di $]0, 1[$, la retta reale $\mathbf{R}$ è il completamento della retta razionale $\mathbf{Q}$.

[3.3] Siano X, Y due spazi metrici, X^*, Y^* i loro completamenti. Nel senso indicato nell'esempio 3.2, lo spazio metrico $X^* \times Y^*$ (con una delle tre distanze citate nell'esempio 2.2) è il completamento dello spazio metrico $X \times Y$, dotato dell'analoga distanza.

4. *Spazi metrici compatti*

Lemma 4.1. *In uno spazio compatto X che soddisfa al primo assioma di numerabilità ogni successione ha un valore limite.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di X. Se l'insieme S dei suoi punti è finito, esiste una sottosuccessione costante il cui valore è un valore limite della successione $\{x_n\}$.

Se l'insieme S dei punti di $\{x_n\}$ è infinito, dimostriamo che esiste un punto $x \in X$, ogni intorno del quale contiene infiniti punti di S. Supponiamo, per assurdo, che ciò non accada. Esiste allora un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che $U_i \cap S$ è finito per ogni $i \in I$. Siccome S è infinito, non può esistere un sottoricoprimento finito di X mediante aperti U_i, e ciò è assurdo, perché X è compatto.

Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ un sistema fondamentale di intorni di x, tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. In ogni U_n cadono infiniti punti di S. Sia $x_{i_1} \in S \cap U_1$; per induzione su n si può scegliere $x_{i_{n+1}} \in S \cap U_{n+1}$ tale che $i_{n+1} > i_n$. $\{x_{i_n}\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ è una sottosuccessione di $\{x_n\}$ che converge ad x. Q.E.D.

Definizione 4.2. Uno spazio topologico X si dice *compatto per successioni* se ogni successione di X ha qualche valore limite.

Dal lemma 4.1 segue che ogni spazio metrico compatto è compatto per successioni. Esistono spazi compatti che non sono compatti per successioni (v. esempio 4.6 del capitolo settimo) e spazi compatti per successioni che non sono compatti (v. esercizio 14 del capitolo settimo). Ci proponiamo di far vedere che negli spazi metrici i concetti di compattezza e compattezza per successioni coincidono.

Lemma 4.3. *Uno spazio metrico X compatto per successioni è separabile.*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia $\mathfrak{D}^n$ la famiglia dei sottoinsiemi A di X tali che

$$(1) \qquad d(x, y) \geq \frac{1}{n} \quad \text{per ogni } x, y \in A \text{ con } x \neq y.$$

Siccome X è compatto per successioni, ogni $A \in \mathfrak{D}^n$ è finito. Infatti se A fosse infinito, conterrebbe una successione di elementi tutti distinti, che, per la (1), non può avere alcun valore limite.

Esiste $n \in \mathbf{N}^*$ tale che $\mathfrak{D}^n \neq \emptyset$; inoltre $\mathfrak{D}^n \subset \mathfrak{D}^{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Dimostriamo che esiste $A^n \in \mathfrak{D}^n$ tale che

$$(2) \qquad A^n \cup \{x\} \in \mathfrak{D}^n \Rightarrow x \in A^n.$$

Sia A un elemento di $\mathfrak{D}^n$. Se A non ha la proprietà (2), esiste $x_1 \notin A$ tale che $A_1 = A \cup \{x_1\} \in \mathfrak{D}^n$. Se neppure A_1 ha la proprietà (2), esiste $x_2 \notin A_1$ tale che $A_1 \cup \{x_2\} \in \mathfrak{D}^n$. Questo processo può essere ripetuto soltanto un numero finito di volte, dopo di che si perviene ad un elemento di $\mathfrak{D}^n$ che ha la proprietà (2). Infatti, in caso contrario, la successione di elementi di $\mathfrak{D}^n$

$$A_m = A_{m-1} \cup \{x_m\} \text{ con } x_m \notin A_{m-1}$$

avrebbe la proprietà seguente: $\bigcup_{m \in \mathbf{N}^*} A_m \in \mathfrak{D}^n$ ed è infinito.

Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia dunque A^n un elemento di $\mathfrak{D}^n$ che ha la proprietà (2).

Il sottoinsieme $B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A^n$ di X è numerabile. Dimostriamo che B è denso in X. Sia $x \in X$; se $x \notin \bar{B}$, esiste $m \in \mathbf{N}^*$ tale che $d(x, y) \geq \frac{1}{m}$ per ogni $y \in B$. Ne segue che $A^m \cup \{x\} \in \mathfrak{D}^m$ e quindi $x \in A^m \subset B$, contro l'ipotesi.

Q.E.D.

Proposizione 4.4. *Uno spazio metrico X è compatto se, e soltanto se, esso è compatto per successioni.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che, se X è compatto, esso è compatto per successioni. Supponiamo inversamente che X sia compatto per successioni, e proviamo che esso è compatto. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Per il lemma precedente X è separabile, e quindi, essendo uno spazio metrico, è a base numerabile (v. proposizione 6.7 del capitolo terzo). Pertanto, per il teorema

di Lindelöff, esiste una successione

$$\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ di aperti di } \{A_i\}_{i \in I}$$

tali che

$$(1) \qquad X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n.$$

Supponiamo che per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si abbia

$$X \neq \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Sia

$$(2) \qquad x_n \in \complement\left[\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right].$$

Poiché X è compatto per successioni, la successione $\{x_n\}$ ha almeno un valore limite $x \in X$. Sia $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$ una sottosuccessione convergente a x. Risulta

$$x \in \complement \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}^*.$$

Sia, per assurdo, $x \in \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j$, che pertanto è un intorno aperto di x. Siccome x è valore limite di $\{x_n\}$, esiste $m > n_0$ tale che $x_m \in \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ e ciò contraddice la (2).

Dunque risulta

$$x \in \complement \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n$$

che contraddice la (1). Si conclude che esiste $n \in \mathbf{N}^*$ tale che

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Q.E.D.

Sia Y un sottoinsieme di uno spazio topologico X.

Definizione 4.5. Y si dice *compatto per successioni*, se è compatto per successioni nella topologia indotta da X. Y si dice *relativamente compatto per successioni* se ogni successione di punti di Y ha qualche valore limite in X.

Lemma 4.6. *Se il sottoinsieme Y dello spazio metrico X è relativamente compatto per successioni, $\bar{Y}$ è compatto per successioni.*

Dimostrazione. Sia $\{z_n\}$ una successione di punti di $\bar{Y}$. Per ogni intero positivo n sia y_n un punto di Y tale che

$$d(z_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Poiché Y è compatto per successioni, la successione $\{y_n\}$ ha almeno un valore limite.

Sia esso y, e sia $\{y_{n_i}\}$ una sottosuccessione di $\{y_n\}$ convergente a y. Risulta

$$\lim_{i\to+\infty} d(y_{n_i}, y) = 0.$$

Poiché

$$d(z_{n_i}, y) \leqslant d(z_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y) < \frac{1}{n_i} + d(y_{n_i}, y)$$

si ha

$$\lim_{i\to+\infty} z_{n_i} = y,$$

cioè $\{z_n\}$ ha almeno un valore limite in $\bar{Y}$. Dunque $\bar{Y}$ è compatto per successioni.

Q.E.D.

Definizione 4.7. Un sottoinsieme Y dello spazio metrico X si dice *totalmente limitato* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme finito $\{y_1, \dots, y_n\}$, di punti di Y, tali che

$$Y \subset S(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup S(y_n, \varepsilon).$$

Sia Y un sottoinsieme dello spazio metrico X.

Teorema 4.8. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) Y *è relativamente compatto per successioni in* X;
2) Y *è relativamente compatto in* X;
3) Y *è totalmente limitato e* $\bar{Y}$ *è completo.*

Dimostrazione. L'implicazione 1) $\Rightarrow$ 2) segue dal lemma 4.6 e dalla proposizione 4.4.

Mostriamo ora che 2) $\Rightarrow$ 3). Fissato un $\varepsilon > 0$, per ogni punto

$z \in \bar{Y}$ esiste qualche $y \in Y$ tale che

$$d(y, z) < \varepsilon.$$

Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, la famiglia di dischi $\{S(y, \varepsilon)\}_{y\in Y}$ è un ricoprimento aperto di $\bar{Y}$. Poiché $\bar{Y}$ è compatto, esiste un insieme finito, $\{y_1, \dots, y_n\}$, di punti di Y tale che

$$\bar{Y} \subset S(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup S(y_n, \varepsilon).$$

Poiché $Y \subset \bar{Y}$, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si conclude che Y è totalmente limitato.

Proviamo che $\bar{Y}$ è completo. Sia $\{z_n\}$ una successione di Cauchy di punti di $\bar{Y}$. Poiché $\bar{Y}$ è compatto, tale successione ha un valore limite $z \in \bar{Y}$. Quindi, per il lemma 2.3, la successione $\{z_n\}$ converge a z.

Mostriamo infine che 3) $\Rightarrow$ 1). Sia $\{y_n\}$ una successione di punti di Y. Poiché per ipotesi Y è totalmente limitato, per ogni intero positivo ν, esiste un insieme finito, $\{y_1^{(\nu)}, \dots, y_{m(\nu)}^{(\nu)}\}$, di punti di Y tale che

$$Y \subset S\left(y_1^{(\nu)}, \frac{1}{\nu}\right) \cup \dots \cup S\left(y_{m(\nu)}^{(\nu)}, \frac{1}{\nu}\right).$$

Per conseguenza, almeno uno dei dischi $S(y_1^{(1)}, 1), \dots, S(y_{m(1)}^{(1)}, 1)$ contiene una sottosuccessione, $\{y_k^{(1)}\}_{k\in\mathbf{N}^*}$ di $\{y_n\}$. Analogamente, almeno uno dei dischi $S(y_1^{(2)}, 1/2), \dots, S(y_{m(2)}^{(2)}, 1/2)$ contiene una sottosuccessione, $\{y_k^{(2)}\}_{k\in\mathbf{N}^*}$ di $\{y_k^{(1)}\}_{k\in\mathbf{N}^*}$; ecc. Iterando questo procedimento si ottiene una successione $\{\{y_h^{(1)}\}, \{y_k^{(2)}\}, \dots\}$ di sottosuccessioni di $\{y_n\}$ tali che

$$\{y_k^{(1)}\} \supset \{y_k^{(2)}\} \supset \dots$$

e che per ogni coppia di punti $y_h^{(\mu)}, y_k^{(\nu)}$ con $\mu < \nu$, risulti

$$d(y_h^{(\mu)}, y_k^{(\nu)}) < \frac{2}{\mu}.$$

Consideriamo la sottosuccessione $\{y'_n\}$ di $\{y_n\}$, definita da

$$y'_n = y_n^{(n)}.$$

Poiché per $\mu < \nu$

$$d(y'_\mu, y'_\nu) < \frac{2}{\mu}$$

$\{y'_n\}$ è una successione di Cauchy. Essendo $\bar{Y}$ completo, essa converge ad un punto $y \in \bar{Y}$. Dunque $\{y_n\}$ ha almeno un valore limite in $\bar{Y}$. Ciò prova che Y è relativamente compatto per successioni.

Q.E.D.

Sia X uno spazio metrico compatto. Per il teorema precedente, e precisamente per l'equivalenza di 2) e 3), X è completo. Inoltre, per la proposizione 4.4 ed il lemma 4.3, X è separabile. Possiamo intanto enunciare il seguente

Corollario 4.9. *Uno spazio metrico compatto è completo e separabile.*

Esempi

[4.1] La retta reale **R** è completa e separabile, ma non è compatta.

[4.2] Un sottoinsieme A di uno spazio metrico (X, d) si dice *limitato* se esiste un disco di X che contiene A, ossia se è superiormente limitato l'insieme delle distanze $d(x, y)$ per $x \in A$, $y \in A$. Se A è limitato, il numero $\delta(A) = \operatorname{Sup}_{x, y \in A} d(x, y)$ si chiama il *diametro* di A.

In particolare lo spazio metrico (X, d) è limitato se esiste $r > 0$ tale che $d(x, y) < r$ per ogni $x, y \in X$.

Un sottoinsieme Y relativamente compatto dello spazio metrico X è limitato. Una successione di Cauchy di X è limitata.

Un insieme infinito X con la distanza dell'esempio 4.2 del capitolo primo è limitato, completo, localmente compatto, ma non è compatto.

Uno spazio metrico totalmente limitato è limitato. Infatti X, essendo totalmente limitato, ha un ricoprimento aperto finito $\{S(y_1, 1), S(y_2, 1), ..., S(y_n, 1)\}$. Posto $k = \max_{i, j = 1, ..., n} d(y_i, y_j)$, risulta

$$d(x, y) < nk + 2$$

per tutti gli $x, y \in X$.

Un insieme infinito X con la distanza dell'esempio 4.2 del capitolo primo è limitato, ma non totalmente limitato.

Sull'insieme **R** dei numeri reali $d(x, y) = \min(1, |y - x|)$ è una distanza rispetto alla quale **R** è completo, limitato, ma non totalmente limitato. Infatti la distanza d non solo è topologicamente equivalente alla distanza euclidea, ma le successioni di Cauchy rispetto a d coincidono con quelle rispetto alla distanza euclidea.

5. *Spazi metrici compatti ed applicazioni continue*

Siano X e X' due spazi metrici, con distanze d e d', e sia $f: X \to X'$ un'applicazione continua. L'immagine di ogni compatto di X è compatta in X' (v. corollario 2.2 del capitolo quinto) e quindi è chiusa; per il teorema 4.8, è totalmente limitata in X'. In particolare

Proposizione 5.1. *Se X è compatto, $f(X)$ è chiuso e totalmente limitato in X'.*

Sia $\mathfrak{A}$ un insieme di applicazioni continue dello spazio metrico X nello spazio metrico X'.

Definizione 5.2. Si dice che la famiglia $\mathfrak{A}$ è *equicontinua* in un punto $x \in X$, o che le *applicazioni* $f \in \mathfrak{A}$ sono *equicontinue* in x, se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(x) > 0$ tale che

$$y \in S(x, \delta(x)) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ per ogni } f \in \mathfrak{A}.$$

Si dice che $\mathfrak{A}$ è una famiglia di applicazioni *equicontinue* su X o che le applicazioni $f \in \mathfrak{A}$ sono equicontinue su X se $\mathfrak{A}$ è equicontinua per ogni $x \in X$.

Teorema 5.3. *Se X è compatto, e se le applicazioni $f \in \mathfrak{A}$ sono equicontinue su X, esse sono uniformemente equicontinue su X, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ per ogni } f \in \mathfrak{A}.$$

Dimostrazione. Per ogni punto $x \in X$ esiste un $\delta(x) > 0$ tale che

$$y \in S(x, \delta(x)) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ per ogni } f \in \mathfrak{A}.$$

Consideriamo il ricoprimento aperto $\left\{S\left(x, \frac{\delta(x)}{2}\right)\right\}_{x \in X}$ di X.

Poiché X è compatto, esiste un insieme finito $\{x_1, ..., x_n\}$ di punti di X, tale che

$$X = S\left(x_1, \frac{\delta(x_1)}{2}\right) \cup ... \cup S\left(x_n, \frac{\delta(x_n)}{2}\right).$$

Sia δ il piú piccolo dei numeri positivi $\frac{\delta(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\delta(x_n)}{2}$. Siano x e y due punti qualsiansi di X tali che

$$d(x, y) < \delta.$$

Il punto x è contenuto in almeno uno, $S\left(x_p, \frac{\delta(x_p)}{2}\right)$, dei dischi $S\left(x_1, \frac{\delta(x_1)}{2}\right), \ldots, S\left(x_n, \frac{\delta(x_n)}{2}\right)$, onde

$$d'(f(x), f(x_p)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ per ogni } f \in \mathfrak{A}.$$

Si ha inoltre

$$d(x_p, y) \leqslant d(x_p, x) + d(x, y) < \frac{\delta(x_p)}{2} + \delta \leqslant \frac{\delta(x_p)}{2} + \frac{\delta(x_p)}{2} = \delta(x_p),$$

cioè

$$y \in S(x_p, \delta(x_p)),$$

e quindi

$$d'(f(x_p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ per ogni } f \in \mathfrak{A}.$$

Pertanto

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant d'(f(x), f(x_p)) + d'(f(x_p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per ogni $f \in \mathfrak{A}$.

Q.E.D.

Sia f: $X \to X'$ un'applicazione dello spazio metrico X nello spazio metrico X'.

Definizione 5.4. L'applicazione f si dice *uniformemente continua* se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, tale che

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

È ovvia la

Proposizione 5.5. *Un'applicazione uniformemente continua f: $X \to X'$ è continua.*

Esempio

[5.1] Sia $X =]0, 1[$ con la distanza euclidea. L'applicazione f: $X \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$ per ogni $x \in X$, è continua ma non è uniformemente continua.

Qualora la famiglia $\mathfrak{A}$ di cui al teorema 5.3 contenga un solo elemento, segue dal teorema 5.3 il

Corollario 5.6. *Se X è compatto, ogni applicazione continua f: $X \to X'$ è uniformemente continua.*

Esempi

[5.2] Sia $X =]0, 1[$ con la distanza euclidea. L'applicazione f: $X \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \text{sen}\, 1/x$ per ogni $x \in X$ è continua ma non è uniformemente continua.

[5.3] Siano (X, d), (X', d') due spazi metrici. Un'applicazione f: $X \to X'$ tale che $d'(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ (in particolare una isometria f di X in X') è un'applicazione uniformemente continua.

Siano X, X' due spazi metrici, ed X' sia completo. Sia inoltre Y un sottospazio di X denso in X e sia f: $Y \to X'$ un'applicazione uniformemente continua.

Teorema 5.7. *L'applicazione f si estende in uno ed un sol modo ad un'applicazione continua $\hat{f}$: $X \to X'$. Inoltre $\hat{f}$ è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Premettiamo le osservazioni seguenti:

1) siccome f è uniformemente continua, se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy di Y, $\{f(x_n)\}$ è una successione di Cauchy, e quindi è una successione convergente dello spazio metrico completo X';

2) siccome f è uniformenente continua, se $\{x_n\}$ ed $\{y_n\}$ sono due successioni di Cauchy di Y, tra loro equivalenti, le successioni di Cauchy $\{f(x_n)\}$ ed $\{f(y_n)\}$ di X' convergono ad uno stesso limite.

Ciò posto, sia $x \in X$. Siccome Y è denso in X esiste una successione $\{x_n\}$ di Y tale che $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Segue da 1) e 2) che $\{f(x_n)\}$ converge ad un punto x' di X' che non dipende dalla scelta della successione $\{x_n\}$ di Y convergente ad x. Poniamo $x' = \hat{f}(x)$.

L'applicazione $\hat{f}$: $X \to X'$ cosí definita estende f perché per $x \in Y$ si può prendere la successione $\{x_n\}$ costantemente eguale ad x. Dimostriamo che $\hat{f}$ è uniformemente continua (e quindi continua, per la proposizione 5.5).

Siccome f è uniformemente continua, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(1) \qquad d(x, y) < \delta;\ x, y \in Y \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ con $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ successioni di Y e sia $d(x, y) < \delta$. Siccome d: $X \times X \to \mathbf{R}$ è continua, risulta

$$d(x, y) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) < \delta.$$

Sia n_0 tale che per $n > n_0$ si abbia $d(x_n, y_n) < \delta$. Segue da (1) che

$$d'(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ per ogni } n > n_0.$$

Siccome d': $X' \times X' \to \mathbf{R}$ è continua, segue di qui che

$$d'(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ per ogni } x, y \in X \text{ tali che } d(x, y) < \delta$$

e ciò prova che $\hat{f}$ è uniformemente continua.

Resta da dimostrare che se g è un'estensione continua di f ad X, $g = \hat{f}$. Ciò è immediato: sia $x \in X$, $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ed $\{x_n\} \subset Y$. Deve essere $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \hat{f}(x)$.

Q.E.D.

Esempio

[5.4] *L'applicazione esponenziale*. Sia $Y = [0, +\infty[$ con la distanza euclidea. Sia $n \in \mathbf{N}^*$: l'applicazione f: $Y \to Y$ definita da $f(x) = x^n$ è continua, crescente, e non limitata. Dunque f è un omeomorfismo; l'omeomorfismo inverso f^{-1} si indica scrivendo $f^{-1}(x) = x^{1/n}$, ed $x^{1/n}$ si dice la radice n-ma di x.

Sia a un numero reale > 1. Per ogni $m/n \in \mathbf{Q}$ con $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$, si pone $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$. Se p, $q \in \mathbf{Q}$, si ha $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

L'applicazione h: $\mathbf{Q} \to Y$ definita da $h(p) = a^p$ per ogni $p \in \mathbf{Q}$ è uniformemente continua su ogni intervallo limitato di $\mathbf{Q}$ e quindi

si estende in uno ed un sol modo ad una applicazione continua $\hat{h}$: $\mathbf{R} \to Y$ che si indica scrivendo $\hat{h}(x) = a^x$.

Siano X, X' due spazi metrici e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ una successione di applicazioni di X in X'.

Definizione 5.8. Diremo che la successione $\{f_n\}$ *converge* nel punto x di X se è convergente la successione $\{f_n(x)\}$ di punti di X'.

Se $\{f_n\}$ converge in ogni punto $x \in X$ ed $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, la successione $\{f_n\}$ si dice *convergente* all'applicazione f: $X \to X'$ definita da

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ per ogni } x \in X,$$

ed f si indica scrivendo $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

Sia $\{f_n\}$ una successione di applicazioni che converge all'applicazione f. Diremo che $\{f_n\}$ è una successione *uniformemente convergente* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tale che per ogni $n > n_0$, $x \in X$ si abbia

$$d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Esempio

[5.5] Sia $X = [0, 1[$, $X' = \mathbf{R}$, e sia f_n: $X \to X'$ definita da $f_n(x) = x^n$ per ogni $x \in [0, 1[$. La successione $\{f_n\}$ converge alla funzione nulla $f(x) = 0$ ma non è uniformemente convergente.

Teorema 5.9 (Teorema di Ascoli). *Siano X e X' due spazi metrici compatti, e sia $\mathfrak{A}$ una famiglia di applicazioni equicontinue di X in X'. Ogni successione di elementi di $\mathfrak{A}$ contiene una sottosuccessione uniformemente convergente ad una applicazione f: $X \to X'$ continua.*

Dimostrazione. Poiché X è compatto, esso è separabile (v. lemma 4.3 e proposizione 4.4). Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ una successione di punti di X densa in X.

Sia $\{f_n\}$ una successione di elementi di $\mathfrak{A}$. Consideriamo la successione $\{f_n(x_1)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ di punti di X'. Poiché X' è compatto, questa successione ha almeno un valore limite. Sia $\{f_n^1\}$ una sottosuccessione di $\{f_n\}$ tale che $\{f_n^1(x_1)\}$ converga a tale valore limite. Consideriamo la successione $\{f_n^1(x_2)\}$ di punti di X'. Ripetendo il ragionamento precedente otteniamo una sottosuccessione $\{f_n^2\}$ di $\{f_n^1\}$ tale che $\{f_n^2(x_2)\}$ converga in X'. Iterando quest'argomentazione, otteniamo una successione $\{f_n^1\}$, $\{f_n^2\}$, ... di sottosuccessioni di $\{f_n\}$ la quale è decrescente rispetto all'inclusione, ossia

$$\{f_n^1\} \supset \{f_n^2\} \supset \dots,$$

ed inoltre è tale che ogni successione $\{f_n^m(x_\nu)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ con $m > \nu$ converge in X'. Consideriamo la successione $\{f_n^n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$. Per un qualunque $\nu \in \mathbf{N}^*$ la successione $\{f_n^n(x_\nu)\}_{n=\nu,\nu+1,\dots}$ è una sottosuccessione della successione convergente $\{f_n^\nu(x_\nu)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$, e quindi è anch'essa convergente. Anche la successione $\{f_n^n(x_\nu)\}_{n=1,2,\dots}$, che differisce dalla $\{f_n^n(x_\nu)\}_{n=\nu,\nu+1,\dots}$ per un numero finito di termini, è convergente.

Proveremo ora che la successione $\{f_n^n(x)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge per ogni $x \in X$. Fissiamo anzitutto un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Poiché tutte le applicazioni f_n^n sono equicontinue e quindi uniformemente equicontinue, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(y, z) < \delta \Rightarrow d'(f_n^n(y), f_n^n(z)) < \varepsilon \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}^*.$$

Siccome la successione $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}^*}$ è densa in X, esiste un x_ν tale che $d(x, x_\nu) < \delta$. Risulta

$$d'(f_n^n(x), f_m^m(x)) \leqslant d'(f_n^n(x), f_n^n(x_\nu)) + d'(f_n^n(x_\nu), f_m^m(x_\nu)) + \\ + d'(f_m^m(x_\nu), f_m^m(x)) < \varepsilon + d'(f_n^n(x_\nu), f_m^m(x_\nu)) + \varepsilon.$$

Poiché la successione $\{f_n^n(x_\nu)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ è, come abbiamo visto, convergente, esiste un indice n_0 tale che, per n, $m > n_0$, risulta

$$d'(f_n^n(x_\nu), f_m^m(x_\nu)) < \varepsilon,$$

e quindi

(1) $$d'(f_n^n(x), f_m^m(x)) < 3\,\varepsilon.$$

Ciò prova che la successione $\{f_n^n(x)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ è di Cauchy, e perciò — essendo X' completo — converge. Indicando con $f(x)$ il limite, si ottiene un'applicazione $f\colon X \to X'$. Inoltre fissato x_ν, per ogni $x \in S(x_\nu, \delta)$ e per ogni $n > n_0$ risulta

(2) $$d'(f(x), f_n^n(x)) < 4\,\varepsilon.$$

Infatti, se per qualche $n > n_0$ e per qualche $x \in S(x_\nu, \delta)$ fosse

$$d'(f(x), f_n^n(x)) \geqslant 4\,\varepsilon$$

si avrebbe dalla (1), per ogni $m > n$,

$$d'(f(x), f_m^m(x)) \geqslant |\, d'(f(x), f_n^n(x)) - d'(f_n^n(x), f_m^m(x)) \,| > \\ > 4\,\varepsilon - 3\,\varepsilon = \varepsilon,$$

onde la successione $\{f_m^m(x)\}$ non convergerebbe a $f(x)$.

Dunque vale la (2) per ogni $x \in S(x_\nu, \delta)$ e per ogni $n > n_0$; cioè per ogni $\nu \in \mathbf{N}^*$ la successione $\{f_n^n\}$ converge uniformemente a f in $S(x_\nu, \delta)$. Consideriamo il ricoprimento aperto $\{S(x_\nu, \delta)\}_{\nu\in\mathbf{N}^*}$ di X. Poiché X è compatto, esiste un insieme finito $\{x_1, \dots, x_{\nu_0}\}$ di punti di $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}^*}$ tali che

$$X = S(x_1, \delta) \cup \dots \cup S(x_{\nu_0}, \delta).$$

Pertanto la successione $\{f_n^n\}$, che converge uniformemente a f su ogni disco $S(x_\nu, \delta)$, converge uniformemente a f su X.

Proviamo infine che f è continua. Con le notazioni precedenti, siano x e y due qualsiansi punti di X tali che $d(x, y) < \delta$. Risulta

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant d'(f(x), f_n^n(x)) + d'(f_n^n(x), f_n^n(y)) + \\ + d'(f_n^n(y), f(y)) < d'(f(x), f_n^n(x)) + \varepsilon + d'(f_n^n(y), f(y)).$$

Poiché la successione $\{f_n^n\}$ converge a f uniformemente, esiste un indice n_0 tale che per $n > n_0$

$$d'(f(z), f_n^n(z)) < \varepsilon \quad \text{per ogni } z \in X.$$

Assumendo $n > n_0$, si ha pertanto

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < 3\,\varepsilon.$$

Ciò prova che f è uniformemente continua su X. Q.E.D.

6. *Topologia della convergenza uniforme*

Alla definizione 5.8 può esser dato un maggior contenuto topologico nel modo seguente. Sia X un insieme, X' uno spazio topologico. L'insieme X'^X delle applicazioni di X in X' non è altro che il prodotto cartesiano $\prod_{x\in X} X'_x$ di tante copie X'_x di X' quanti sono gli elementi di X (v. introduzione, par. 4; v. altresí l'esempio 7.3 del capitolo secondo).

Pertanto si può considerare in $X'^X = \prod_{x \in X} X'_x$ la topologia prodotto degli spazi X'_x. Una successione $\{f_n\}$ di applicazioni di X in X' è una successione di elementi dello spazio prodotto X'^X. Si possono quindi introdurre per $\{f_n\}$ i concetti di successione convergente, di limite, di valore limite (v. definizioni 1.1 e 1.2). Tenuto conto che le proiezioni canoniche p_x: $X'^X \to X'_x$ sono, oltre che continue, aperte, è subito visto che una successione $\{f_n\}$ di applicazioni di X in X' converge all'applicazione f nel senso della topologia prodotto di X'^X se, e soltanto se, $\{f_n\}$ converge ad f nel senso della definizione 5.8; ossia se, per ogni $x \in X$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. Però, anche se X' è uno spazio metrico, la topologia prodotto di X'^X non soddisfa al primo assioma di numerabilità, non appena X ha una potenza superiore al numerabile, come si vede subito ripetendo il ragionamento fatto nell'esempio 7.3 del capitolo secondo. Non sono quindi applicabili i metodi che si appoggiano al lemma 1.3 e sue conseguenze.

Sia X' uno spazio metrico. Definiremo ora su X'^X una topologia τ_u che è strettamente piú fine della topologia prodotto non appena X è infinito. Sia $f_0 \in X'^X$ e, per ogni $x \in X$, sia $S(f_0(x), \varepsilon)$ il disco di centro $f_0(x)$ e raggio ε in $X'_x = X'$. Per ogni $\varepsilon > 0$ il sottoinsieme di X'^X

$$U_{f_0}(\varepsilon) = \prod_{x \in X} S(f_0(x), \varepsilon)$$

è l'insieme delle applicazioni f: $X \to X'$ tali che

$$(1) \qquad d'(f(x), f_0(x)) < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad x \in X.$$

Sia $\mathfrak{A}(f_0)$ la famiglia dei sottoinsiemi $U_{f_0}(\varepsilon)$ al variare di $\varepsilon > 0$. $\mathfrak{A}(f_0)$ ha le proprietà a), b), c), enunciate nel teorema 5.11 del capitolo primo, che caratterizzano un sistema fondamentale di intorni di f_0 in una topologia di X'^X. La cosa è ovvia per a) e b). Per verificare c), si consideri, insieme ad $U_{f_0}(\varepsilon)$, l'elemento $V = U_{f_0}(\varepsilon/2)$ di $\mathfrak{A}(f_0)$. Per ogni $f_1 \in V$ si consideri $W = U_{f_1}(\varepsilon/2)$. Dimostriamo che $W \subset U_{f_0}(\varepsilon)$.

Per ogni $f \in W$ risulta

$$d'(f(x), f_0(x)) \leqslant d'(f(x), f_1(x)) + d'(f_1(x), f_0(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per ogni $x \in X$ e quindi $f \in U_{f_0}(\varepsilon)$, sicché è verificata la c).

Per il teorema 5.11 del capitolo primo esiste una ed una sola topologia τ_u su X'^X, avente $\mathfrak{A}(f_0)$ come sistema fondamentale di intorni di $f_0 \in X'^X$. Questa topologia è piú fine della topologia dell'esempio 6.1 del capitolo secondo e quindi è strettamente piú fine della topologia prodotto quando X è infinito. Si osservi però che gli intorni $U_{f_0}(\varepsilon)$ non sono in generale intorni aperti (non si può prendere, nella c) del teorema 5.11 del capitolo primo, $V = U_{f_0}(\varepsilon)$). Un sistema fondamentale di intorni aperti di f_0 nella topologia τ_u è costituito, al variare di $\varepsilon > 0$, dagli insiemi

$$V_{f_0}(\varepsilon) = \{f \in X'^X \mid \text{esiste } \delta_f > 0,\ \delta_f < \varepsilon, \text{ tale che } d'(f(x), f_0(x)) < \delta_f \text{ per ogni } x \in X\}.$$

Definizione 6.1. Sia X'^X l'insieme delle applicazioni f di un insieme X in uno spazio metrico X'. La topologia τ_u sopra descritta si dice la *topologia della convergenza uniforme* (su X). Un sottospazio A di X'^X si dirà pure dotato della topologia della convergenza uniforme. La chiusura in X'^X di A si dirà la *chiusura uniforme* di A. Se $A = \bar{A}$, si dirà che A è *uniformemente chiuso*.

La (1) dice che una successione $\{f_n\}$ di applicazioni di X in X' converge uniformemente su X nel senso della definizione 5.8, quando $\{f_n\}$ è convergente nella topologia della convergenza uniforme.

Siccome la famiglia $\{U_{f_0}\left(\frac{1}{n}\right)\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile di f_0 nella topologia della convergenza uniforme, si ha il

Lemma 6.2. *Lo spazio X'^X con la topologia della convergenza uniforme soddisfa il primo assioma di numerabilità.*

Esempio

[6.1] Sia $L(X, X')$ l'insieme delle applicazioni f di un insieme X in uno spazio metrico X', tali che $f(X)$ sia limitato in X' (v. esempio 4.2). Se $f, g \in L(X, X')$, poniamo

$$d(f, g) = \operatorname{Sup}_{x \in X} d'(f(x), g(x)).$$

d è una distanza su $L(X, X')$ che induce la topologia della convergenza uniforme.

Siano:

X uno spazio topologico, X' uno spazio metrico, $C(X, X')$ l'insieme delle applicazioni continue di X in X'.

Proposizione 6.3. *$C(X, X')$ è uniformemente chiuso.*

Dimostrazione. Sia f_0 aderente a $C(X, X')$. Dobbiamo dimostrare che f_0: $X \to X'$ è continua in ogni punto $x_0 \in X$.

Siccome $f_0 \in \overline{C(X, X')}$, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$U_{f_0}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \cap C(X, X') \neq \emptyset.$$

Esiste quindi un'applicazione continua g: $X \to X'$ tale che

$$d'(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ per ogni } x \in X.$$

Siccome g è continua in x_0, esiste un intorno V di x_0 in X tale che

$$d'(g(x), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ per ogni } x \in V.$$

Per ogni $x \in V$ si ha

$$d'(f_0(x), f_0(x_0)) \leqslant d'(f_0(x), g(x)) + d'(g(x), g(x_0)) +$$

$$+ d'(g(x_0), f_0(x_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dunque f_0 è continua in x_0. Q.E.D.

Esempio

[6.2] Se X è uno spazio compatto, ed X' è uno spazio metrico completo, $C(X, X')$ è un sottoinsieme di $L(X, X')$ (v. esempio 6.1). Con la distanza d dell'esempio 6.1, $C(X, X')$ è uno spazio metrico completo. (Per ogni $f \in C(X, X')$, $f(X)$ è un compatto dello spazio metrico X' e quindi è limitato in X' (v. esempio 1.9 del capitolo quinto). Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy di $C(X, X')$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un intero n_0 tale che, per n, $m > n_0$, si ha

$$\operatorname*{Sup.}_{x \in X} d'(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siccome X' è completo, $\{f_n(x)\}$ è convergente per ogni $x \in X$

e, posto $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, si ha per $n > n_0$

$$\operatorname*{Sup.}_{x \in X} d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Dunque $d(f_n, f) \to 0$, ossia $f = \lim_{n \to +\infty} f_n \in \overline{C(X, X')}$. Segue dalla proposizione 6.3 che f è continua e quindi $\{f_n\}$ converge ad un elemento di $C(X, X')$.)

7. *Funzioni a valori complessi*

Sia X' il corpo complesso **C**, con la distanza euclidea $d(z, z') = |z' - z|$, e la topologia indotta da d. Il corpo **C** si identifica al piano euclideo $\mathbf{R}^2$ ed è pertanto uno spazio metrico completo.

Sia X un insieme qualunque. Indicheremo nel seguito con $A_{\mathbf{C}}(X)$ o semplicemente con $A_{\mathbf{C}}$ l'insieme $\mathbf{C}^X$ delle funzioni a valori complessi su X, con la topologia della convergenza uniforme e con la struttura di algebra su **C** definita mediante la somma ed il prodotto in **C**. Se X è uno spazio topologico, indicheremo con $C_{\mathbf{C}}(X)$, o semplicemente con $C_{\mathbf{C}}$, l'insieme delle funzioni a valori in **C**, che sono continue su X (v. esempio 6.3).

È immediato constatare che $C_{\mathbf{C}}$ è una sottoalgebra di A.

Dalla proposizione 6.3 segue che:

Proposizione 7.1. *$C_{\mathbf{C}}$ è uniformemente chiuso.*

Esempio

[7.1] Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue sullo spazio topologico X, a valori in **C**. Se $\{f_n\}$ converge uniformemente ad una funzione f, f è continua.

Sia x_0 un punto di X e sia $C_{\mathbf{C}, x_0}(X)$, o piú semplicemente $C_{\mathbf{C}, x_0}$, l'ideale di $C_{\mathbf{C}}$, costituito dalle funzioni continue su X a valori in **C** che si annullano in x_0.

È evidente che $C_{\mathbf{C}, x_0}$ è uniformemente chiuso in $C_{\mathbf{C}}$. Ne segue:

Proposizione 7.2. *$C_{\mathbf{C}, x_0}$ è uniformemente chiuso.*

Sia B un sottoalgebra di $A_{\mathbf{C}}$. È immediato constatare che la chiusura uniforme $\overline{B}$ di B è una sottoalgebra di $A_{\mathbf{C}}$.

Definizione 7.3. Si dice che una funzione continua $f\colon X \to \mathbf{C}$ *si annulla all'infinito* se, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

è compatto in X.

Sia $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ lo spazio compatto ottenuto da X con aggiunta del punto all'infinito (se X è localmente compatto e di Hausdorff, $\tilde{X}$ è la compattificazione di Alexandroff di X). Una funzione continua $f\colon X \to \mathbf{C}$ si annulla all'infinito se, e soltanto se, è continuo il prolungamento $f^*\colon \tilde{X} \to \mathbf{C}$ di f a $\tilde{X}$, definito ponendo $f^*(\infty) = 0$ (e, naturalmente, $f^*(x) = f(x)$, per ogni $x \in X$).

Sia X un insieme, $\mathfrak{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni su X, a valori in $\mathbf{C}$. La topologia $\tau_{\mathfrak{F}}$ su X meno fine tra le topologie per le quali è continua f_i per ogni $i \in I$, ha come base la famiglia $\mathfrak{B}$ dei sottoinsiemi di X del tipo

$$B = \bigcap_{j \in I'} f_j^{-1}(A_j), \tag{1}$$

dove I' è un sottoinsieme finito di I, e A_j è un aperto di $\mathbf{C}$ per $j \in I'$ (v. teorema 6.1 del capitolo secondo).

Si dice anche che $\tau_{\mathfrak{F}}$ è la *topologia debole* su X definita dalla famiglia $\mathfrak{F}$.

Lemma 7.4. *Sia $Y \subset X$. La topologia indotta in Y da $\tau_{\mathfrak{F}}$ è la topologia debole di Y definita dalla famiglia $\mathfrak{F}'$ delle restrizioni ad Y delle applicazioni di $\mathfrak{F}$.*

Dimostrazione. Sia $i\colon Y \to X$ l'applicazione identica e $\mathfrak{B}$ la base di $\tau_{\mathfrak{F}}$ data dalla (1). La famiglia $\mathfrak{B}' = i^{-1}(\mathfrak{B})$ dei sottoinsiemi $i^{-1}(B)$ di Y è una base della topologia indotta in Y da X. Si ha

$$i^{-1}(B) = \bigcap_{j \in I'} (f_j \circ i)^{-1}(A_j).$$

Siccome $f_j' = f_j \circ i$ è la restrizione ad Y della funzione $f_j\colon X \to \mathbf{C}$, Y ha la topologia debole definita dalla famiglia $\mathfrak{F}' = \{f_i'\}_{i \in I}$. Q.E.D.

Sia X un insieme, $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni su X a valori in $\mathbf{C}$ (oppure in $\mathbf{R}$).

Definizione 7.5. Si dice che $\mathfrak{F}$ *separa* i punti di X se, fissati ad arbitrio x e y in X, con $x \neq y$, esiste $f \in \mathfrak{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

Teorema 7.6. *Sia X uno spazio localmente compatto e sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni continue su X, a valori in $\mathbf{C}$, tali che:*

a) *ogni $f \in \mathfrak{F}$ si annulli all'infinito;*

b) *$\mathfrak{F}$ separi i punti di X;*

c) *non esista alcun punto di X nel quale si annulli ogni $f \in \mathfrak{F}$.*

In tale ipotesi X ha la topologia debole $\tau_{\mathfrak{F}}$ definita dalla famiglia $\mathfrak{F}$.

Dimostrazione. Per la proposizione 2.4 del capitolo terzo segue da b) che X è uno spazio di Hausdorff. Sia $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandroff di X e sia, per ogni $f \in \mathfrak{F}$, $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbf{C}$ la funzione a valori in $\mathbf{C}$, che prolunga f a $\tilde{X}$ ponendo $\tilde{f}(\infty) = 0$ (e $\tilde{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$). Sia $\tilde{\mathfrak{F}}$ la famiglia delle funzioni $\tilde{f}$ e $\tau_{\tilde{\mathfrak{F}}}$ la topologia debole su $\tilde{X}$ definita dalla famiglia $\tilde{\mathfrak{F}}$.

Segue da c) che $\tilde{\mathfrak{F}}$ separa i punti di $\tilde{X}$. Quindi la topologia $\tau_{\tilde{\mathfrak{F}}}$ di $\tilde{X}$, è una topologia di Hausdorff; per l'osservazione fatta sopra, segue da a) che ogni $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ è continua nella topologia della compattificazione di Alexandroff e quindi la topologia $\tau_{\tilde{\mathfrak{F}}}$ è meno fine della topologia della compattificazione di Alexandroff. Per la proposizione 2.4 del capitolo quinto queste due topologie coincidono.

Siccome le restrizioni ad X delle funzioni $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbf{C}$ sono le funzioni della famiglia $\mathfrak{F}$, dal lemma 7.4 segue che la topologia di X, che è indotta dalla topologia di $\tilde{X}$, coincide con la topologia debole definita da $\mathfrak{F}$. Q.E.D.

8. *Funzioni a valori reali*

In modo del tutto analogo a quanto fatto all'inizio del paragrafo 7, indichiamo con $A_{\mathbf{R}}(X)$ o piú semplicemente con $A_{\mathbf{R}}$, l'algebra su $\mathbf{R}$ dell'insieme delle funzioni definite sull'insieme X, a valori in $\mathbf{R}$.

Siccome $\mathbf{R}$ è sottocorpo di $\mathbf{C}$, $A_{\mathbf{R}}$ è sotto-$\mathbf{R}$-algebra di $A_{\mathbf{C}}$.

Anche in $A_{\mathbf{R}}$ (come in $A_{\mathbf{C}}$), consideriamo la topologia della convergenza uniforme (indotta dalla distanza euclidea di $\mathbf{R}$). Siccome $\mathbf{R}$ è sottospazio metrico di $\mathbf{C}$, la topologia della convergenza uniforme su $A_{\mathbf{R}}$ coincide con la topologia indotta in $A_{\mathbf{R}}$ dalla topologia della convergenza uniforme di $A_{\mathbf{C}}$.

Proposizione 8.1. *$A_{\mathbf{R}}$ è un sottospazio chiuso di $A_{\mathbf{C}}$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \complement A_{\mathbf{R}}$. Esiste $x_0 \in X$ tale che il coefficiente dell'immaginario di $f(x_0)$ sia diverso da zero. Sia $\varepsilon < |Im f(x_0)|$.
Basta dimostrare che

$$U_f(\varepsilon) \cap A_{\mathbf{R}} = \emptyset. \tag{1}$$

Per ogni $g \in A_{\mathbf{R}}$ risulta

$$|f(x_0) - g(x_0)|^2 = [Re(f(x_0) - g(x_0))]^2 + [Im f(x_0)]^2 \geqslant \geqslant |Im f(x_0)|^2 > \varepsilon^2$$

e quindi $|f(x_0) - g(x_0)| > \varepsilon$. D'altra parte, se $g \in U_f(\varepsilon)$, risulta $|f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon$ e ciò prova la (1). Q.E.D.

Se X è uno spazio topologico, possiamo considerare l'insieme $C_{\mathbf{R}}(X)$ o piú semplicemente $C_{\mathbf{R}}$, delle funzioni continue su X a valori in $\mathbf{R}$, ed il sottoinsieme $C_{\mathbf{R}, x_0}(X)$, o piú semplicemente $C_{\mathbf{R}, x_0}$, delle funzioni continue su X a valori in $\mathbf{R}$ che si annullano in x_0.

In modo analogo a quello seguito per $C_{\mathbf{C}}$ si può dimostrare che $C_{\mathbf{R}}$ è una sotto-$\mathbf{R}$-algebra di $A_{\mathbf{R}}$ e che $C_{\mathbf{R}, x_0}$ ne è un ideale. Inoltre $C_{\mathbf{R}}$ è uniformemente chiuso in $A_{\mathbf{R}}$ e $C_{\mathbf{R}, x_0}$ è uniformemente chiuso in $C_{\mathbf{R}}$ e quindi in $A_{\mathbf{R}}$.

Infine, se B è una sottoalgebra di $A_{\mathbf{R}}$, la sua chiusura uniforme $\bar{B}$ è una sottoalgebra di $A_{\mathbf{R}}$.

Esempi

[8.1] L'applicazione di $A_{\mathbf{C}}$ in $A_{\mathbf{R}}$ che ad ogni $f \in A_{\mathbf{C}}$ associa $|f| \in A_{\mathbf{R}}$ è continua. (Se $f, g \in A_{\mathbf{C}}$, risulta

$$||f(x)| - |g(x)|| \leqslant |f(x) - g(x)| \text{ per ogni } x \in X.)$$

[8.2] Sia X compatto. Ogni $f \in C_{\mathbf{R}}$ è limitata ($f(X)$ è limitato in $\mathbf{R}$) ed assume in X il suo valore massimo ed il suo valore minimo ($f(X)$ è un compatto di $\mathbf{R}$, ossia è limitato e chiuso in $\mathbf{R}$; esistono quindi il minimo ed il massimo di $f(X)$).

[8.3] Sia X compatto e connesso. Ogni $f \in C_{\mathbf{R}}$ assume in X tutti i valori reali compresi tra il minimo e il massimo ($f(X)$ è un intervallo chiuso di $\mathbf{R}$).

[8.4] Se X è uno spazio metrico compatto, ogni $f \in C_{\mathbf{R}}$ è uniformemente continua (è il corollario 5.6).

Per semplificare le notazioni, scriveremo nel seguito brevemente A, C, C_{x_0} per $A_{\mathbf{R}}$, $C_{\mathbf{R}}$, $C_{\mathbf{R}, x_0}$ rispettivamente.

Date due funzioni $f, g \in A$, indichiamo con $f \vee g$ l'elemento di A definito da

$$f \vee g(x) = \max [f(x), g(x)].$$

Indichiamo con $f \wedge g$ l'elemento di A definito da

$$f \wedge g(x) = \min [f(x), g(x)].$$

Le due applicazioni $A \times A \to A$ cosí definite sono evidentemente associative e commutative, sicché è possibile definire senza ambiguità $f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n$ e $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$.

Definizione 8.2. Un sottoinsieme B di A tale che

$$f, g \in B \Rightarrow f \vee g \in B, \quad f \wedge g \in B$$

si chiama un *reticolo*.

Lemma 8.3. *Siano f, g elementi di A. Si ha*

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

Dimostrazione. Siano a, b due numeri reali. Sono ovvie le relazioni seguenti:

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Q.E.D.

Ne segue:

Corollario 8.4. *Se B è un sottospazio vettoriale di A tale che*

$$f \in B \Rightarrow |f| \in B,$$

B è un reticolo. In particolare C e C_{x_0} sono reticoli.

Esempio

[8.5] L'insieme $\mathbf{R}[x_1, .., x_n]$ dei polinomi di $\mathbf{R}^n$, o piú in generale, l'insieme delle loro restrizioni a un sottoinsieme X di $\mathbf{R}^n$ (funzioni polinomie su X) è una sottoalgebra di A, ma non è necessariamente un reticolo. Ad esempio, per $n = 1$, si considerino i polinomi $P(x) = x$ e $Q(x) = 0$; $P \vee Q$ e $P \wedge Q$ non sono polinomi.

Lemma 8.5. *Sia* $\mathbf{R}[t]$ *l'anello dei polinomi a coefficienti reali in una variabile* t. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $Q(t)$ *tale che*:

a) $Q(0) = 0$;

b) $|\,Q(s^2) - |s|\,| < \varepsilon$ per $|s| \leqslant 1$.

Dimostrazione. Consideriamo lo sviluppo in serie di potenze di $t - 1/2$ di $(t + \varepsilon^2)^{1/2}$ per $\varepsilon > 0$ prefissato. Può scriversi

$$(t + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

onde la serie è convergente per $1 - \varepsilon^2 < t < 1 + \varepsilon^2$, e quindi è uniformemente convergente per $t \in [0, 1]$. Ponendo $t = s^2$, la serie $(s^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ è uniformemente convergente per $s \in [-1, 1]$. Ne segue che, per ogni $\sigma > 0$ esiste un polinomio in s^2 a coefficienti reali, $P_\sigma(s^2)$, tale che

$$|\,P_\sigma(s^2) - (s^2 + \varepsilon^2)\,|^{\frac{1}{2}} < \sigma.$$

Osserviamo che

$$(s^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - |s| \leqslant |s| + \varepsilon - |s| = \varepsilon,$$

e poniamo $\sigma = \varepsilon$. Risulta, per il polinomio corrispondente $P_\varepsilon(s^2)$

$$|\,P_\varepsilon(s^2) - |s|\,| \leqslant |\,P_\varepsilon(s^2) - (s^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\,| + \\ + |\,(s^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - |s|\,| < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon.$$

Poniamo

$$Q_\varepsilon(s^2) = P_\varepsilon(s^2) - P_\varepsilon(0).$$

Poiché

$$|\,P_\varepsilon(0)\,| < 2\,\varepsilon,$$

si ha:

$$|\,Q_\varepsilon(s^2) - |s|\,| \leqslant |\,P_\varepsilon(s^2) - |s|\,| + |\,P_\varepsilon(0)\,| < 2\,\varepsilon + 2\,\varepsilon = 4\,\varepsilon.$$

Q.E.D.

Proposizione 8.6. *Ogni sottoalgebra uniformemente chiusa* B *di funzioni limitate di* A *è un reticolo.*

Dimostrazione. Per il corollario 8.4 basta dimostrare che

$$f \in B \Rightarrow |f| \in \bar{B}.$$

Siccome B è una sottoalgebra su $\mathbf{R}$ di A, essendo

$$Q(t) = a_1\,t + \ldots + a_n\,t^n$$

un polinomio a coefficienti reali, con $Q(0) = 0$, la funzione

$$Q(f^2) = Q \circ f^2\colon\ X \to \mathbf{R},$$

è un elemento di B.

Sia $f \in B$. Siccome f è limitata, esiste $m > 0$ tale che $|f(x)| < m$ per ogni $x \in X$. La funzione $g = \dfrac{1}{m} f$ è ancora un elemento di B ed è tale che $|g(x)| \leqslant 1$. Da $|g| \in \bar{B} \Rightarrow |f| \in \bar{B}$.

Possiamo dunque supporre $|f(x)| \leqslant 1$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste un polinomio $Q(t)$ che soddisfa alle a), b) del lemma 8.5. La funzione $Q(f^2)$ è un elemento di B e si ha

$$|\,Q(f^2)\,(x) - |f(x)|\,| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in X.$$

Dunque $|f| \in \bar{B} = B$. Q.E.D.

Proposizione 8.7. *Sia* X *compatto e sia* B *un reticolo di funzioni continue a valori reali su* X *soddisfacente alla seguente condizione.*

Per ogni coppia di punti distinti x *e* y *di* X *e per ogni coppia di numeri reali* a *e* b *(distinti o coincidenti), esiste una funzione* $f_{xy} \in B$ *tale che* $f_{xy}(x) = a$, $f_{xy}(y) = b$.

In questa ipotesi B *è denso in* $C(X)$ *per la topologia della convergenza uniforme.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che, data una qualsiasi funzione $f \in C(X)$, ed $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste una funzione $h \in B$ tale che

$$(1) \qquad |f(x) - h(x)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Dati due punti distinti, x e y, di X, esiste una funzione $f_{xy} \in B$ tale che

$$f_{xy}(x) = f(x), \quad f_{xy}(y) = f(y).$$

Poiché f_{xy} e f sono funzioni continue, esistono un intorno aperto U_{xy} di x ed un intorno aperto V_{xy} di y tali che

$$f_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon \quad \text{per ogni } z \in U_{xy},$$
$$f_{xy}(t) > f(t) - \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in V_{xy}.$$

Tenendo fisso y, costruiamo per ogni punto $x \in X$ una funzione $f_{xy} \in B$, un intorno aperto U_{xy} di x ed un intorno aperto V_{xy} di y in guisa che siano soddisfatte le condizioni precedenti. La famiglia $\{U_{xy}\}_{x \in X}$ ottenuta al variare di x in X, fermo restando y, è un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, esiste un numero finito di punti $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di X tali che $\{U_{x_i y}\}_{i=1,\ldots,n}$ sia un ricoprimento aperto di X. Poniamo

$$g_y = f_{x_1 y} \wedge f_{x_2 y} \wedge \ldots \wedge f_{x_n y}.$$

Poiché B è un reticolo, $g_y \in B$. Per ogni $z \in X$ esiste almeno un indice p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ tale che $z \in U_{x_p y}$. Ne segue $f_{x_p y}(z) < f(z) + \varepsilon$ ed a maggior ragione

$$g_y(z) = \min\,(f_{x_1 y}(z), f_{x_2 y}(z), \ldots, f_{x_n y}(z)) < f(z) + \varepsilon$$

in ogni punto $z \in X$. Consideriamo altresí l'intorno aperto di y

$$V_y = V_{x_1 y} \cap V_{x_2 y} \cap \ldots \cap V_{x_n y}.$$

Per ogni punto $t \in V_y$ si ha $f_{x_i y}(t) > f(t) - \varepsilon$ per $i = 1, \ldots, n$, e quindi

$$g_y(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Facciamo variare y in X. La famiglia $\{V_y\}_{y \in X}$ è un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, esiste un numero finito di punti $y_1, \ldots, y_m$ di X tali che $\{V_{y_i}\}_{i=1,\ldots,m}$ sia un ricoprimento finito. Poiché

B è un reticolo, la funzione

$$h = g_{y_1} \vee g_{y_2} \vee \ldots \vee g_{y_m}$$

appartiene a B. Risulta anzitutto

$$(2) \qquad h(t) = \max\,(g_{y_1}(t), \ldots, g_{y_m}(t)) < f(t) + \varepsilon$$

in ogni punto $t \in X$. Inoltre, fissato un $t \in X$, esiste almeno un indice q $(1 \leqslant q \leqslant m)$ tale che $t \in V_{y_q}$. Ne segue che $g_{y_q}(t) > f(t) - \varepsilon$ ed a maggior ragione

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in X.$$

Siccome, come abbiamo già osservato, vale anche la (2), la (1) è stabilita. Q.E.D.

Teorema 8.8 (di M. Stone). *Sia X uno spazio compatto, e sia B un'algebra (su* $\mathbf{R}$ *di funzioni continue $X \to \mathbf{R}$) che separa i punti. La chiusura uniforme di B è l'algebra $C(X)$ oppure è l'algebra $C_{x_0}(X)$ con x_0 scelto opportunamente in X.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che, per ogni $x_0 \in X$ esista una funzione $f \in B$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Mostriamo che, per conseguenza, fissati comunque due punti distinti x_1 e x_2 in X, e due numeri reali a e b ad arbitrio, esiste una funzione $f \in B$ tale che

$$f(x_1) = a, \qquad f(x_2) = b.$$

Poiché $C(X)$ è uniformemente chiuso in $A(X)$ e $B \subset C(X)$, la chiusura uniforme $\bar{B}$ di B è una sottoalgebra di $C(X)$. Per la proposizione 8.6, $\bar{B}$ è un reticolo.

Dimostriamo che il reticolo $\bar{B}$ soddisfa alla condizione della proposizione 8.7. Ne seguirà che $\bar{B}$ è denso in $C(X)$, e quindi che $\bar{B} = C(X)$.

Siano x_1, x_2 due punti distinti di X. Ci proponiamo di costruire una funzione $p \in B$ tale che $p(x_1) = 1$, $p(x_2) = 0$.

Per ipotesi esiste una funzione $k \in B$ tale che $k(x_1) \neq k(x_2)$, ed esiste una funzione $g \in B$ per la quale $g(x_1) \neq 0$. Poniamo

$$h(x) = \begin{cases} k(x) & \text{se } k(x_1) \neq 0 \\ g(x) & \text{se } k(x_1) = 0 \text{ e } g(x_1) \neq g(x_2) \\ k(x) + g(x) & \text{se } k(x_1) = 0 \text{ e } g(x_1) = g(x_2). \end{cases}$$

La funzione h cosí definita è un elemento di B, tale che $h(x_1) \neq 0$

Se $h(x_2) = 0$, la funzione p definita da $p(x) = \dfrac{1}{h(x_1)} \cdot h(x)$ è un elemento di B che ha la proprietà richiesta.

Se $h(x_2) \neq 0$, si consideri la funzione l definita da

$$l(x) = \frac{1}{h(x_2)}\, h(x) - \left[\frac{1}{h(x_2)}\, h(x)\right]^2$$

La funzione l è un elemento di B, tale che $l(x_1) \neq 0$ (perché

$$h(x_1) \neq h(x_2))$$

ed $l(x_2) = 0$.

In questo caso la funzione p definita da $p(x) = \dfrac{1}{l(x_1)}\, l(x)$ è un elemento di B tale che $p(x_1) = 1$, $p(x_2) = 0$. Con procedimento analogo costruiamo una funzione $q \in B$ tale che $q(x_1) = 0$, $q(x_2) = 1$. La funzione $f = ap + bq$ appartiene a B ed è tale che $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$.

È dunque verificata la condizione della proposizione 8.7. Come abbiamo già osservato, $\bar{B} = C(X)$, nell'ipotesi che per ogni $x_0 \in X$ esista $f \in B$ tale che $f(x_0) \neq 0$.

In caso contrario, c'è almeno un punto $x_0 \in X$ nel quale si annullano tutti gli elementi di B. Sia B' l'algebra di tutte le funzioni $f'(x) = c + f(x)$, con $f \in B$ e $c \in \mathbf{R}$. B' soddisfa a tutte le ipotesi del teorema, ed inoltre è tale che, per ogni $x \in X$ esiste una $f' \in B'$ per cui $f'(x) \neq 0$. Ne segue che la chiusura uniforme di B' è $C(X)$. In particolare, presa una $g \in C_{x_0}(X)$ ed un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste una $f' \in B'$, cioè una $f' = c + f$, con $f \in B$ e $c \in \mathbf{R}$, tale che

$$|g(x) - (c + f(x))| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in X.$$

In particolare per $x = x_0$ risulta $|c| < \varepsilon$. Ne discende che, per ogni $x \in X$,

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &= |g(x) - (f(x) + c) + c| \leqslant \\ &\leqslant |g(x) - (f(x) + c)| + |c| < 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Ciò prova che

$$g \in \bar{B}.$$

Q.E.D.

Sia $X \subset \mathbf{R}^n$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea; l'algebra delle funzioni polinomie (a coefficienti reali) su X separa i punti di X. Supponiamo che X sia un compatto di $\mathbf{R}^n$, ossia sia

limitato e chiuso. Per ogni $x_0 \in X$, esiste una funzione polinomia su X, che non si annulla in x_0. Per conseguenza, non esiste alcun $x_0 \in X$ per il quale $C_{x_0}(X)$ contenga tutte le funzioni polinomie su X. Segue dal teorema 8.8 l'importante

Teorema 8.9 (di Weierstrass). *Sia X un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$, con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}^n$. L'insieme delle funzioni polinomie (a coefficienti reali) su X è denso in $C(X)$ per la topologia della convergenza uniforme.*

Esempi

[8.6] Se $X = \mathbf{R}$, la funzione $y = \text{sen}\, x$ non può essere approssimata uniformemente mediante polinomi, in quanto polinomi siffatti dovrebbero annullarsi infinite volte su $\mathbf{R}$, e quindi sarebbero identicamente nulli.

[8.7] Sia $I = [0, 1]$ ed $X = I^\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ dove I_λ è una copia di I per ogni $\lambda \in \Lambda$; se X ha la topologia prodotto e $p_\lambda \colon X \to I_\lambda$ è la proiezione canonica su I_λ, l'algebra di funzioni su $\mathbf{R}$ generata dalla famiglia $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è densa in $C_0(X)$ dove 0 è il punto di X tale che $p_\lambda(0) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$.

L'algebra di funzioni su $\mathbf{R}$ generata dalla funzione $u(x) = 1$ per ogni $x \in X$ e dalla famiglia $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è densa in $C(X)$.

Esercizi

1. Siano Y e Z due sottospazi completi di uno spazio metrico (X, d). $Y \cup Z$ è un sottospazio completo di X.

2. Sia Y un sottospazio completo e Z un sottospazio chiuso dello spazio metrico (X, d). $Y \cap Z$ è un sottospazio completo di X.

3. Sia $x = (x^1, \ldots, x^n)$ un punto di $\mathbf{R}^n$. Una successione $\{x_m\}_{m \in \mathbf{N}^*}$ di $\mathbf{R}^n$ è una successione di Cauchy (in una delle due distanze dell'esempio 2.3) se, e soltanto se, per ogni $k = 1, \ldots, n$ la successione $\{x_m^k\}_{m \in \mathbf{N}^*}$ è una successione di Cauchy della retta reale.

4. Un insieme X con la distanza d dell'esempio 4.2 del capitolo primo è uno spazio metrico completo.

5. Siano d e d' due distanze sullo stesso insieme X, e siano a, b, c tre numeri maggiori di zero tali che

$$d(x, y) \leqslant ad'(x, y) \leqslant bd(x, y)$$

per ogni $x, y \in X$ tali che $d(x, y) \leqslant c$ oppure $d'(x, y) \leqslant c$. In queste ipotesi d e d' sono topologicamente equivalenti ed X è completo rispetto a d se, e soltanto se, X è completo rispetto a d'.

6. Sia $\mathbf{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali maggiori di zero, con la topologia discreta, $\tilde{\mathbf{N}}^* = \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandroff di $\mathbf{N}^*$. Una successione f: $\mathbf{N}^* \to X$ di uno spazio topologico X converge ad $x \in X$ se, e soltanto se, è continua l'estensione $\tilde{f}$ di f ad $\tilde{\mathbf{N}}^*$ definita ponendo $\tilde{f}(\infty) = x$.

7. Sia $\{x_n\}$ una successione di uno spazio topologico X, convergente ad x. $Y = (\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \{x_n\}) \cup \{x\}$ è un compatto di X.

8. X è uno spazio topologico, $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ è la compattificazione di X con l'aggiunta del punto all'infinito. Se $\tilde{X}$ è metrizzabile, allora X è separabile.

9. Ogni spazio metrico totalmente limitato è separabile.

10. Uno spazio metrico X è compatto se, e soltanto se, ogni funzione continua a valori reali su X è limitata.

11. Sia (X, d) uno spazio metrico e si metrizzi $X \times X$ con una delle tre distanze introdotte nel paragrafo 4 del capitolo secondo. L'applicazione d: $X \times X \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua.

12. Sia (X, d) uno spazio metrico completo ed Y un aperto di X. Consideriamo la funzione f su Y a valori reali definita da

$$f(y) = \frac{1}{d(y, \complement Y)} \quad \text{per ogni } y \in Y.$$

L'applicazione d': $Y \times Y \to \mathbf{R}$ definita ponendo

$$d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

è una distanza su Y topologicamente equivalente alla distanza indotta da d su Y. Lo spazio metrico (Y, d') è completo. (Risulta $d'(x, y) \geqslant d(x, y)$ per ogni $x, y \in Y$; se $\{x_n\}$ è una successione di Y convergente ad $x \notin Y$, $\{x_n\}$ non è di Cauchy per d'.)

13. Sia X l'insieme dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli aperti, privati al piú di un'infinità numerabile

di punti (v. esercizio 18 del capitolo quarto). Lo spazio X (che è di Hausdorff, ma non ha la topologia discreta) ha le seguenti proprietà:

a) non soddisfa al 1º assioma di numerabilità;

b) non è uno spazio regolare ($\sqrt{2}$ e $\mathbf{Q}$ non hanno intorni disgiunti);

c) le successioni convergenti di X sono quelle costanti da un certo indice in poi (i sottoinsiemi numerabili hanno derivato vuoto).

14. Ogni spazio metrico localmente compatto è uno spazio di Baire (v. la dimostrazione del teorema 2.7).

15. Uno spazio metrico completo X, privo di punti isolati, ha cardinalità superiore al numerabile (X è uno spazio di Baire, ed è assurdo che $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (X - \{x_n\}) = \emptyset$).

16. Siano $I = [0, 1]$, $A(I, I) = I^I$ l'insieme delle applicazioni di I in I con la distanza d dell'esempio 6.1, e $C(I, I)$ il sottoinsieme delle applicazioni continue.

Gli spazi metrici $A(I, I)$ e $C(I, I)$ sono completi, ma non compatti. (Si può costruire $f_n \in C(I, I)$ tale che $f_n(1/n) = 1, f_n(1/m) = 0$ per $n \neq m$.)

17. Lo spazio metrico $C(I, I)$ dell'esercizio 16 è separabile, e lo spazio metrico $A(I, I)$ non è separabile.

(È numerabile e denso in $C(I, I)$ l'insieme delle funzioni ottenute prolungando linearmente le applicazioni in I dei sottoinsiemi finiti di $I \cap \mathbf{Q}$. $A(I, I)$ non è a base numerabile, perché non è numerabile ed ha derivato vuoto in $A(I, I)$ l'insieme delle applicazioni $\{f_t\colon I \to I\}_{t \in I}$ cosí definite: $f_t(t) = 1$, $f_t(x) = 0$ per $x \neq t$.)

18. Sia $H(I, I)$ l'insieme delle applicazioni continue f: $I \to I$ tali che $|f(t) - f(s)| \leqslant |t - s|$ per ogni $t, s \in I$. $H(I, I)$ con la distanza d dell'esempio 6.1 è uno spazio metrico compatto. (Segue dal teorema di Ascoli.)

19. Siano X, Y due spazi metrici compatti e sia $f \in C_{\mathbf{R}}(X \times Y)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito $u_1, u_2, \ldots, u_n$ di elementi di $C_{\mathbf{R}}(X)$ ed un egual numero $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di elementi di $C_{\mathbf{R}}(Y)$, tali che

$$\left| f(x, y) - \sum_{1}^{n} {}_i\, u_i(x)\, v_i(y) \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X, y \in Y.$$

20. Sia X uno spazio compatto di Hausdorff, $\mathfrak{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sottoinsieme di $C_{\mathbf{R}}(X)$, ed F: $X \to \mathbf{R}^\Lambda$ l'applicazione definita da

$$F(x) = \{f_\lambda(x)\}_{\lambda \in \Lambda} \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Le condizioni seguenti sono equivalenti:

a) F è iniettiva;

b) esiste $x_0 \in X$ tale che l'algebra su $\mathbf{R}$ generata da $\mathfrak{F}$ è densa in $C_{\mathbf{R}, x_0}(X)$;

c) la topologia di X è la topologia debole definita da $\mathfrak{F}$ (F: $X \to F(X)$ è un omeomorfismo).