Topologia Algebrica: extrema summa

Leonardo Errati

5 agosto 2020

Indice

Lo scopo di questo testo è fornire un supporto discorsivo allo studio di topologia algebrica, se avrò abbastanza voglia e tempo di scrivere quel mare di integrali mi dedicherò anche ad analisi complessa.
Non prometto nulla!

1 Deformare in modo continuo

In che senso una sfera ed un toro sono "diversi"?
Intuitivamente è ovvio, su una sfera ogni *cammino* può essere *deformato con continuità* al *cammino costante* mentre sul toro no. Possiamo costruire una struttura formale intorno a quest'idea.

1.1 Le omotopie

1.1.1 Cammini e classi di equivalenza omotopica

Definizione 1 (Cammino)**.** Ricordiamo che si dice **cammino** una funzione continua $f : I \to X$, dove $I \coloneqq [0, 1]$.

Definizione 2 (Equivalenza omotopica)**.**

1. Siano $f_1, f_2 : X \to Y$ continue tra spazi topologici, si dicono **omotope** se esiste una $F : X \times I \to Y$ continua tale che

$$F(x, 0) = f_0(x) \;\; \forall x \in X$$
$$F(x, 1) = f_1(x) \;\; \forall x \in X$$

   Indichiamo questa relazione con $f \sim_F g$, a volte omettendo F.

2. In particolare dato A sottoinsieme di X le mappe si dicono **omotope relativamente ad** A se vale anche

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \;\; \forall a \in A, \;\; \forall t \in I$$

   L'omotopia relativa è una relazione di equivalenza.

3. Dati X, Y spazi topologici diciamo che **hanno lo stesso tipo di omotopia** se esistono $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tali che

$$g \circ f \sim id_X$$
$$f \circ g \sim id_Y$$

   e queste si dicono **equivalenze omotopiche**. L'essere omotopicamente equivalente è una relazione di equivalenza.
   In particolare uno spazio è **contraibile** se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

Questa struttura matematica ci permette non solo di deformare in modo continuo una mappa in un'altra, ma addirittura di semplificare il nostro studio prendendo una superficie topologica omotopicamente equivalente e più semplice! [1]

Ci viene naturale allora tentare di "schiacciare" un oggetto, ad esempio un cilindro, per renderlo un disco chiuso: in questo modo otteniamo una superficie più semplice da studiare.
Possiamo farlo sempre? E quanto senso ha farlo sempre?

Definizione 3 (Retratti)**.** A sottoinsieme di X si dice **retratto di** X se esiste una $r : X \to A$ tale che, detta $i : A \to X$ l'inclusione di ha, valga

$$r \circ i = id_A$$

Inoltre se vale anche $i \circ r \sim id_X$ si dice **retratto di deformazione di** X.

1.1.2 I CW-complessi

Siamo arrivati a voler sfruttare personalmente questi strumenti; intuitivamente potremmo ad esempio considerare in X un sottospazio A contraibile e contrarre A in un punto (ottenendo ciò che si indica con X/A per ovvi motivi, è uno spazio quoziente). Purtroppo non possiamo farlo sempre, ma per fortuna i controesempi sono spazi patologici. Gli spazi in cui invece vale hanno la struttura di CW-complesso finito. [2]

Celle chiuse: le celle chiuse n-dimensionali sono immagine del disco chiuso n-dimensionale tramite la mappa $\Phi^n : D^n \to X^{n-1} \sqcup D^n \to X^n \to X$ che è composizione rispettivamente di: un'inclusione, incollamento (in stile di somma connessa), un'inclusione.
Analogamente potrei avere delle celle aperte, ma noi ci occuperemo delle celle chiuse.

Definizione 4. Diciamo **CW-complesso finito** X **di dimensione** n uno spazio topologico costruito secondo la seguente procedura:

1. (inizio) X^0 è uno spazio finito e discreto qualunque
2. (incollamento) Per $j \leq n$ incollo a X^{j-1} delle j-celle chiuse tramite applicazioni continue, ottengo il j-scheletro X^j
3. (fine) Al passo finale ottengo $X = X^n$

In particolare un **sottocomplesso di** X è un suo sottoinsieme costituito da un'unione di celle chiuse.

Teorema 1. Siano X un CW-complesso finito ed A un suo sottocomplesso contraibile, allora

$$X \sim X/A$$

[1] ad esempio studiare una sfera o una palla schiacciata è equivalente nel nostro campo: ricordiamo che questa è la forma del pianeta Terra, nevvero *flat earth society*?

[2] è importante che sia finito, i CW-complessi di dimensione finita sono compatti (perché sono costituiti da celle compatte): ricordiamo che vogliamo appunto lavorare sui compatti.

2 Studiare la struttura

Ora conosciamo le classi di equivalenza omotopica e sappiamo come scegliere un buon rappresentante della classe che stiamo studiando.

Se potessimo esprimere un desiderio, non sarebbe magnifico poter costruire una struttura "abbastanza invariante" sotto omotopia che descriva le proprietà della nostra classe?
Beh, è il vostro giorno fortunato.

2.1 Il gruppo fondamentale

2.1.1 Definizione e proprietà

Definizione 5 (Gruppo fondamentale)**.** Sia $x \in X$, diciamo **cappio di punto base** x_0 un cammino α tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.
Allora diciamo **gruppo fondamentale di X rispetto al punto x_0**

$$\pi(X, x_0) = \{\text{classi di equivalenza omotopica dei cappi con punto base } x_0\}$$

Teorema 2.

1. Posso definire il prodotto di classi di cammini come

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$$

   e si dimostra facilmente che è ben definito.

2. Se α e β sono cammini in X tali che sia definito il loro prodotto, γ e δ altri due cammini tali che $\alpha \sim \gamma$ e $\beta \sim \delta$ allora $\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$.

3. Sia $\alpha : I \to X$ un cammino, $\varphi : I \to I$ continua tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$, allora $\alpha \sim \alpha \circ \varphi$.

4. Siano α, β, γ cammini tali che

$$\alpha(1) = \beta(0)$$
$$\beta(1) = \gamma(0)$$

   Siano inoltre $\overline{\alpha}$ il cammino inverso di α e $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$, $\varepsilon_{x_1}(s) = x_1$ i cammini costanti per $x_0 \coloneqq \alpha(0)$, $x_1 \coloneqq \alpha(1)$.

Allora vale:

(a) $\varepsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \varepsilon_{x_1}$

(b) $\alpha * \overline{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0}$

(c) $\overline{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{x_1}$

(d) $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$

Corollario 1. Il gruppo fondamentale è un gruppo sotto il prodotto delle classi di cammini. In generale non è commutativo.

Teorema 3. Se tra due punti $x, y \in X$ esiste un arco $f : I \to X$, allora i due gruppi fondamentali sono isomorfi.
In particolare se uno spazio è connesso per archi la classe di isomorfismo del gruppo fondamentale è unica.

2.1.2 L'omomorfismo indotto

Per arrivare al risultato sperato ci servono alcune proprietà delle funzioni tra gruppi fondamentali (le *proprietà funtoriali* dei morfismi).

Definizione 6. L'applicazione seguente si dice **morfismo indotto**, associa le classi di equivalenza $[\alpha]$ e $[\varphi(\alpha)]$.

$$\varphi_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, \varphi(x_0))$$

Teorema 4.

1. φ_* è un morfismo di gruppi.

2. Dati X, Y, Z spazi topologici e $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ continue, allora vale che $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

3. $(id_X)_* = id_{\pi(X,x_0)}$

Corollario 2. Allora se X ed Y sono omeomorfe tramite $g : X \to Y$ omeomoerfismo, questo induce un isomorfismo g_* tra i due gruppi fondamentali.

$$g_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, g(x_0))$$

Corollario 3. Sia A retratto di X, r la retrazione ed i l'inclusione. Allora usando i loro morfismi indotti si ha che $r_* \circ i_* = id_{\pi(X,x_0)}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id_A"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & X \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(A,a) \arrow[rr, "(id_A)_*"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi(A,a) \\ & \pi(X,a) \arrow[ur, "r_*"'] & \end{tikzcd}$$

In particolare i_* è iniettivo ed r_* è suriettivo.

2.1.3 Il teorema di invarianza per omotopia

Abbiamo studiato la struttura del gruppo fondamentale, ora possiamo dimostrare che possiede la proprietà desiderata: se due spazi sono omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi.
Ovviamente possono essere isomorfi anche sotto altre condizioni, questa è una condizione sufficiente.

Teorema 5. Siano $\Phi, \Psi : X \to Y$ continue ed omotope tramite omotopia $F : X \times I \to Y$. Sia $f(s) = F(x_0, s)$ cammino che congiunge le due omotopie tra $\Phi(x_0)$ e $\Psi(x_0)$. Allora $\Psi_* = u_f \circ \Phi_*$ per $u_f([\alpha]) = [\overline{f} * \alpha * f]$.

$$\begin{tikzcd}
\pi(X, x_0) \arrow[rr, "\Phi_*"] \arrow[dr, "\Psi_*"'] & & \pi(Y, \Phi(x_0)) \arrow[dl, "u_f"] \\
& \pi(Y, \Psi(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Teorema 6 (Teorema di invarianza per omotopia)**.** Siano X ed Y spazi topologici omotopicamente equivalenti con equivalenza omotopica $\varphi : X \to Y$. Allora $\forall x \in X$ il morfismo che essa induce è un isomorfismo.

Corollario 4.

1. Se X è contraibile allora il suo gruppo fondamentale è quello banale per ogni $x \in X$.

2. Se A è retratto di deformazione di X ed $a \in A$ allora i morfismi

$$i_* : \pi(A, a) \to \pi(X, a)$$
$$r_* : \pi(X, a) \to \pi(A, a)$$

sono isomorfismi.

2.2 Il teorema di Seifert - Van Kampen