GEOMETRIA III

V Foglio di Esercizi - 12 Maggio 2014

Funzioni olomorfe ed integrazione lungo curve

Esercizio 1. Calcolare le radici seste dell'unitá.

Esercizio 2. Risolvere le seguenti equazioni:

a) $i\bar{z}z^3 - 2\bar{z}\Im m(z) - i = 0$

b) $z^6 - z^3 + 1 = 0$

c) $|z|\, z^3 + z^3 - 8i\,|z| - 8i = 0$

d) $3\cosh(z) + 4\sinh(z) = 3i$

e) $\tan(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

f) $z^2 - 2z + 2 = 0$

g) $z\,|z| - 2z + i = 0$

h) $z^3 = |z|^4$

i) $\left|z^2\right| z^2 = i$

l) $z^2 + i\bar{z} = 1$

m) $(1+2i)z = 2 + 5i$

n) $|z|^2 + z^2 - iz - 1 = 0$

Esercizio 3. Determinare per quali costanti $a, b, c \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono olomorfe in tutto il piano complesso:

a) $f(x, y) = x + ay + i(bx + cy)$;

b) $g(x, y) = x^2 + ay^2 + i(bxy + c)$.

Esercizio 4. Dimostrare che se f é olomorfa su $\mathbb{C}$ allora $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}$$

é olomorfa in $\mathbb{C}$.

Esercizio 5. Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x, y) := \sin x(e^{-\alpha y} + e^y)$$

puó essere considerata parte reale di una funzione olomorfa.

Esercizio 6. Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa non costante in un aperto Ω. La funzione $u^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ puó essere parte reale o parte immaginaria di una funzione olomorfa in Ω?

Esercizio 7. Calcolare l'integrale di f lungo γ

$$\int_\gamma f(z)dz$$

utilizzando la definizione generale nei seguenti casi:

a) $f(z) = z^n$ $\qquad \gamma:$ circonferenza centrata in 0 di raggio 1;

b) $f(z) = \frac{z+2}{z}$ $\qquad \gamma:$ semicirconferenza superiore centrata in 0 di raggio 2;

c) $f(z) = \frac{1}{(z+2+i)^2}$ $\qquad \gamma:$ circonferenza centrata in $-2-i$ di raggio 4;

d) $f(z) = \overline{z}^2$ $\qquad \gamma:$ circonferenza centrata in 0 di raggio 1;

e) $f(z) = \overline{z}^2$ $\qquad \gamma:$ circonferenza centrata in 1 di raggio 1;

f) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ $\qquad \gamma:$ semicirconferenza superiore $|z| = 1$ e segmento asse reale $[-1; 1]$;

g) $f(z) = (z - \bar{z})^2$ $\qquad \gamma:$ triangolo di vertici $0, 1, i$ percorso in senso antiorario;

h) $f(z) = (\bar{z} - i)$ $\qquad \gamma:$ curva di estremi $z_0 = 0$ e $z_1 = 2(1-i)$ ed equazione cartesiana $y^2 = 2x$.

Esercizio 8. Calcolare i seguenti integrali di linea lungo i cammini γ (percorsi in senso antiorario, se chiusi):

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ $\qquad [\frac{\pi}{5}]$

b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{ze^z}{(z-2)^3}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ $\qquad [2e^2]$

c) $\displaystyle\int_\gamma ze^{-z}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ $\qquad [0]$

d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ $\qquad [\frac{\pi i}{4}]$

e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z^2+4)^2}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 2\}$ $\qquad [\frac{\pi}{16}]$

f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^4-1}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 1\}$ $\qquad [\frac{\pi}{2}]$

g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{1-2z}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ $\qquad [-\pi i\sqrt[4]{e}]$

h) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}dz$ $\qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ $\qquad [i\pi e^2]$

i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^4}dz \qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-\pi| = 1\} \qquad [0]$

l) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z(z^2-3)}{2z^2+3}dz \qquad \gamma = \{z = x+iy : x^2 + \tfrac{2}{3}\left(y - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2 = 1\} \qquad [-\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\pi e^{i\sqrt{\frac{3}{2}}}]$

m) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^n}dz \qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \qquad [\tfrac{2\pi i}{(n-1)!}]$

Esercizio 9. Sia γ la circonferenza centrata nell'origine di raggio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{2[\sin(z)+\cos(z)]}{z^2-4}dz.$$