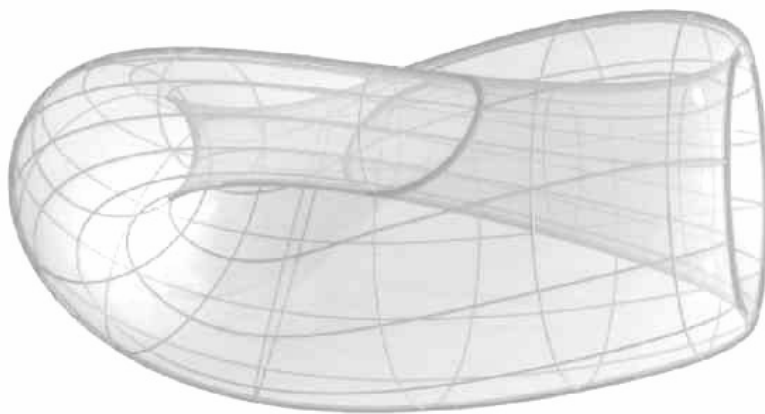

Gianluca Occhetta

Note di

TOPOLOGIA GENERALE

e primi elementi di topologia algebrica



Dipartimento di Matematica
Università di Trento
Via Sommarive 14
38050 - Povo (TN)

Nota per la lettura

Queste note raccolgono gli argomenti (alcuni variabili negli anni) svolti nel corso di Geometria IV unità didattica del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Trento dall'a.a. 2002-2003 all'a.a. 2008-2009.

In appendice sono invece contenuti approfondimenti sulle nozioni di compattezza proposti agli studenti del percorso di eccellenza.

Per alcune parti di queste note, nonché per suggerimenti e correzioni, sono debitore a Davide Panizzolo, Elisa Tasso, Roberto Pignatelli, Riccardo Ghiloni e Valentina Paterno. Sono anche grato agli studenti che mi hanno via via segnalato imprecisioni e proposto modifiche e mi assumo la responsabilità di tutti gli errori che possono essere rimasti.

Gianluca Occhetta

Indice

Nota per la lettura	iii
Indice	iv
I Topologia generale	1
1 Spazi topologici	3
1.1 Generalità	3
1.2 Confronto tra topologie	5
1.3 Base di una topologia	6
1.4 Applicazioni continue	8
2 Costruire nuovi spazi topologici	11
2.1 Sottospazi e topologia indotta	11
2.2 Prodotti e topologia prodotto	13
2.3 Quozienti e topologia quoziente	16
2.4 Lo spazio proiettivo reale \mathbb{RP}^n	23
3 Proprietà topologiche	33
3.1 Spazi compatti	33
3.2 Spazi di Hausdorff	38
3.3 Spazi connessi	40
3.4 Spazi connessi per archi	44
4 Superfici topologiche	49
4.1 Varietà topologiche	49
4.2 Somma connessa	51
4.3 Triangolazioni	53
4.4 Orientabilità	54
4.5 Teorema di classificazione delle superfici compatte - Prima parte . .	55

II Topologia algebrica	63
5 Omotopia	65
5.1 Omotopia di applicazioni continue	65
5.2 Tipo d'omotopia - Retratti	67
5.3 CW-complessi finiti	70
6 Il gruppo fondamentale	75
6.1 Il gruppo fondamentale	75
6.2 Omomorfismo indotto	78
6.3 Teorema di invarianza per omotopia	80
6.4 Il gruppo fondamentale di S^1	81
7 Teorema di Seifert-Van Kampen e applicazioni	85
7.1 Gruppi con presentazione	85
7.2 Il teorema di Seifert-Van Kampen	87
7.3 Il teorema di classificazione delle superfici compatte - Seconda parte	93
7.4 Gruppo fondamentale e retrazioni	95
A Varie nozioni di compattezza	99
A.1 Compattezza per ricoprimenti: origine	99
A.2 Varie definizioni di compattezza	100
A.3 Compattezza in spazi metrici	103
A.4 Spazi localmente compatti	104

Parte I

Topologia generale

Capitolo 1

Spazi topologici

1.1 GENERALITÀ

Definizione 1.1. Sia X un insieme e $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
2. La famiglia τ è chiusa rispetto all'unione: data una collezione $\{U_j\}_{j \in J}$ tale che $U_j \in \tau \forall j$ si ha che $\bigcup U_j \in \tau$.
3. La famiglia τ è chiusa rispetto alle intersezioni finite: se $U_1, U_2 \in \tau$ allora $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

La coppia (X, τ) è detta *spazio topologico*; la famiglia τ è detta *topologia*, mentre gli elementi di τ sono chiamati *aperti* della topologia.

Esempi 1.2.

- a) $(X, \mathcal{P}(X))$: *Topologia discreta*.
- b) $(X, \{\emptyset, X\})$: *Topologia grossolana (o banale)*.
- c) $(X, \tau_c), \tau_c = \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{U \mid U^c \text{ è un insieme finito}\}$: *Topologia cofinita*.

Se $\{U_j\}_{j \in J}$ sono elementi non banali di τ allora per ogni j si ha $|U_j^c| < +\infty$. Allora $(\bigcup U_j)^c = \bigcap U_j^c$, e quindi, per ogni j , $(\bigcup U_j)^c \subset U_j^c$; essendo $|U_j^c| < +\infty$ allora anche $|(\bigcup U_j)^c| < +\infty$ e quindi $\bigcup U_j \in \tau$.

Se U_1, U_2 sono elementi non banali di τ (e quindi $|U_1^c| < +\infty, |U_2^c| < +\infty$) allora $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$ è un insieme finito, in quanto unione finita di insiemi finiti, e pertanto $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

- d) $(X = \mathbb{R}^n, \tau_\varepsilon)$, $U \in \tau_\varepsilon$ se e solo se U è l'insieme vuoto, \mathbb{R}^n oppure è un'unione di sottoinsiemi della forma $B_r(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < r\}$, con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e r numero reale positivo : *Topologia euclidea*.

Verificheremo più avanti che questa è una topologia, utilizzando il concetto di base.

- e) $X = \mathbb{R}^n$, $\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^n\} \cup \{B_r(\mathbf{0})\}$: *Topologia dei dischi*.

$$\bigcup B_{r_i}(\mathbf{0}) = B_R(\mathbf{0}) \text{ con } R = \sup r_i \text{ e } B_{r_1}(\mathbf{0}) \cap B_{r_2}(\mathbf{0}) = B_r(\mathbf{0}) \text{ con } r = \min(r_1, r_2).$$

- f) $X = \mathbb{R}$, $\tau_s = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$: *Topologia delle semirette*.

$$\bigcup (-\infty, a_i) = (-\infty, A) \text{ con } A = \sup a_i \text{ e } (-\infty, a_1) \cap (-\infty, a_2) = (-\infty, a) \text{ con } a = \min(a_1, a_2).$$

- g) $X = [-1, 1]$, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{[-1, 1]\} \cup \{U \mid 0 \notin U\} \cup \{V \mid (-1, 1) \subseteq V\}$

Chiamiamo per comodità insiemi del primo tipo i sottoinsiemi $U \not\ni 0$ e insiemi del secondo tipo i sottoinsiemi $V \supseteq (-1, 1)$.

E' immediato osservare che l'unione (o l'intersezione) di insiemi del primo tipo è ancora un insieme del primo tipo, mentre l'unione (o l'intersezione) di insiemi del secondo tipo è ancora un insieme del secondo tipo, quindi basta verificare che $U \cup V \in \tau$ e $U \cap V \in \tau$ se U è un insieme del primo tipo e V è un insieme del secondo tipo.

L'insieme $U \cup V \in \tau$ perché contiene $(-1, 1)$, e l'insieme $U \cap V \in \tau$ perché non contiene 0.

- h) $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{[-a, a] \mid a \in \mathbb{R}^+\}$ non è una topologia, perché non è chiusa rispetto all'unione. Ad esempio

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1) \notin \tau.$$

Definizione 1.3. Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice *chiuso* nella topologia τ se C^c è un aperto di τ .

Proposizione 1.4. Sia (X, τ) uno spazio topologico.

1. \emptyset, X sono chiusi.
2. L'intersezione di chiusi è un chiuso.
3. L'unione finita di chiusi è un chiuso.

Dimostrazione. Esercizio.

Definizione 1.5. Sia $x \in X$; un *intorno* di x è un sottoinsieme $W \subset X$ che contiene un aperto U che contiene x : $x \in U \subset W$. Normalmente dicendo intorno sottintenderemo intorno aperto.

Definizione 1.6. Sia $Y \subset X$; un punto $y \in Y$ è *interno* a Y se esiste un intorno W di y tale che $W \subset Y$.

L'insieme di tutti i punti interni di Y si chiama *interno* di Y , e si denota con $\overset{\circ}{Y}$. Equivalentemente $\overset{\circ}{Y}$ è il più grande aperto di X contenuto in Y .

Osservazione 1.7. Y è aperto $\iff Y = \overset{\circ}{Y}$.

Dimostrazione. \Rightarrow) Se Y è aperto costituisce un intorno di ogni suo punto, quindi ogni punto di Y è punto interno.

\Leftarrow) Per ogni $y \in Y$ esiste un aperto U_y tale che $y \in U_y \subset Y$, quindi $Y = \bigcup U_y$ è aperto in quanto unione di aperti. \square

Definizione 1.8. Sia $Y \subset X$; un punto $x \in X$ è *di aderenza* per Y se per ogni intorno W_x di x si ha $W_x \cap Y \neq \emptyset$.

L'insieme di tutti i punti di aderenza di Y in X si chiama *chiusura* di Y in X , e si denota con \overline{Y} . Equivalentemente \overline{Y} è il più piccolo chiuso di X che contiene Y .

Osservazione 1.9. Y è chiuso $\iff Y = \overline{Y}$.

Dimostrazione. Esercizio.

Definizione 1.10. La *frontiera* di Y , denotata con ∂Y , è l'insieme $\overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}$.

Esempio 1.11. Se $Y = [0, 1)$ in $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ allora $\overset{\circ}{Y} = (0, 1)$, $\overline{Y} = [0, 1]$ e $\partial Y = \{0, 1\}$; considerando lo stesso insieme come sottospazio di \mathbb{R} con la topologia delle semirette si ha invece $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$, $\overline{Y} = [0, +\infty)$ e $\partial Y = [0, +\infty)$.

Esempio 1.12. Sia $X = [-1, 1]$ con la topologia dell'esempio ?? g) e sia $Y = [-1/4, 1]$.

Y non contiene aperti del secondo tipo, mentre qualsiasi sottoinsieme di Y che non contiene lo zero è aperto. Quindi $\overset{\circ}{Y} = Y \setminus \{0\}$.

I chiusi non banali di X sono i sottoinsiemi che contengono lo zero e quelli che hanno intersezione vuota con $(-1, 1)$, quindi Y è chiuso e $\overline{Y} = Y$.

La frontiera di Y è quindi costituita dal punto 0, $\partial Y = \{0\}$.

1.2 CONFRONTO TRA TOPOLOGIE

Sia X un insieme e τ_1 e τ_2 due topologie su X .

Definizione 1.13. Si dice che τ_1 è *più fine* di τ_2 ($\tau_1 \succeq \tau_2$) se ogni aperto di τ_2 è un aperto di τ_1 . Si dice che τ_1 è *strettamente più fine* di τ_2 ($\tau_1 \succ \tau_2$) se τ_1 è più fine di τ_2 ed esiste un aperto di τ_1 che non è aperto di τ_2 .

Questa è una relazione d'ordine parziale: due topologie diverse possono non essere confrontabili.

Esempio 1.14. Sia $X = \mathbb{R}$ e siano τ_1 la topologia discreta, τ_2 la topologia euclidea, τ_3 la topologia dei dischi, τ_4 la topologia delle semirette.

Si verifichi che $\tau_1 \succ \tau_2, \tau_3, \tau_4$ e che $\tau_2 \succ \tau_3, \tau_4$, mentre τ_3 e τ_4 non sono confrontabili.

1.3 BASE DI UNA TOPOLOGIA

Definizione 1.15. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \tau$ è una *base* per τ se ogni aperto non vuoto di τ è unione di elementi di \mathcal{B} .

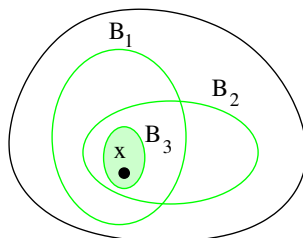
Proposizione 1.16. (*Caratterizzazione delle basi*) Se \mathcal{B} è una base per una topologia τ su X , allora

$$1) \forall x \in X \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x \in B.$$

$$2) \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ t.c. } B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} \text{ t.c. } B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Viceversa, dato un insieme X e una famiglia di sottoinsiemi \mathcal{B} che ha le proprietà 1) e 2) esiste un'unica topologia su X che ha \mathcal{B} come base.

La condizione 2).



Dimostrazione. Supponiamo che \mathcal{B} sia una base per una topologia.

Poiché X è un aperto, esso si può scrivere come unione di elementi della base: $X = \bigcup_{i \in I} B_i$, quindi ogni punto di X è contenuto in almeno uno dei B_i .

Dati B_1 e B_2 appartenenti a \mathcal{B} , tali insiemi appartengono anche a τ , quindi l'insieme $B_1 \cap B_2$ è un aperto e pertanto si può scrivere come unione di elementi della base: $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i$; ogni elemento dell'intersezione è contenuto in almeno uno di questi B_i .

Viceversa, supponiamo che una famiglia di sottoinsiemi \mathcal{B} verifichi 1) e 2) e costruiamo la topologia in questo modo: un sottoinsieme $Y \subset X$ appartiene a τ se e solo se si può scrivere come unione degli elementi di \mathcal{B} .

L'insieme vuoto appartiene banalmente a τ , e $X \in \tau$ per la proprietà 1). L'unione di elementi di τ è un'unione di elementi della base, quindi $\in \tau$ per come

abbiamo definito τ ; siano infine $U_1, U_2 \in \tau$ e verifichiamo che $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
Scriviamo $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$, $U_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$; allora

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j).$$

Per concludere è sufficiente osservare che, per la proprietà 2), $B_i \cap B_j$ si può scrivere come unione di elementi di \mathcal{B} .

L'unicità di τ segue immediatamente dalla definizione di base. \square

Esempi 1.17.

- a) In $X = \mathbb{R}^n$ i sottoinsiemi $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}$, al variare di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e di $r \in \mathbb{R}^+$, costituiscono una base per una topologia, detta *topologia euclidea* di \mathbb{R}^n .
- b) Analogamente, se (X, d) è uno spazio metrico, su di esso è possibile definire una topologia τ_d che ha come base i sottoinsiemi della forma $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$.
- c) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ è la base per una topologia su \mathbb{R} .
- d) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[-a, a]\}$ è la base per una topologia su \mathbb{R} .
- e) Sia $X = \mathbb{N}_{\geq 2}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a due, sia $U_n = \{x \in X \mid x \text{ divide } n\}$ e sia $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in X}$. Allora \mathcal{B} è la base per una topologia su X , detta *Topologia dei divisori*.

Infatti ogni $x \in X$ è contenuto in U_x e $U_{x_1} \cap U_{x_2} = U_{MCD(x_1, x_2)}$.

Esercizio 1.18. Sia X un insieme e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una collezione di suoi sottoinsiemi; \mathcal{U} si dice *sottobase* per una topologia τ se le intersezioni finite di elementi di \mathcal{U} sono una base per la topologia τ .

1. Provare che \mathcal{U} è una sottobase se e solo se $X \subset \bigcup U_i$.
2. Trovare una sottobase della topologia euclidea su \mathbb{R} .

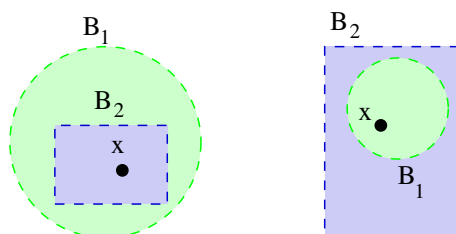
Definizione 1.19. Due basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 si dicono *equivalenti* se generano la stessa topologia.

Proposizione 1.20. (Criterio di equivalenza delle basi) Due basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 sono equivalenti se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall x \in B_1 \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \text{ t.c. } x \in B_2 \subset B_1$.
2. $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2, \forall x \in B_2 \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ t.c. } x \in B_1 \subset B_2$.

Dimostrazione. Esercizio.

Esempio 1.21. In \mathbb{R}^2 i dischi senza bordo e i rettangoli senza bordo sono basi per la stessa topologia (quella euclidea).



1.4 APPLICAZIONI CONTINUE

Definizione 1.22. Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *continua* se la controimmagine via f di ogni insieme aperto di Y è un aperto di X , cioè se $\forall U \in \sigma$ si ha che $f^{-1}(U) \in \tau$.

Osservazione 1.23. La continuità di una applicazione dipende non solo dagli insiemi X e Y , ma anche dalle topologie su di essi considerate.

Esempi 1.24.

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ è continua con la topologia euclidea, non lo è con la topologia delle semirette.
- b) $(X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2); f = \text{Id}_X$ è continua $\iff \tau_1 \succeq \tau_2$.
- c) X ha la topologia discreta $\iff \forall (Y, \sigma), \forall f : X \rightarrow (Y, \sigma)$ f è continua.
 \Rightarrow) Ovvio.
 \Leftarrow) Scegliamo $Y = X$, come σ la topologia discreta e $f = \text{Id}_X$.
- d) Y ha la topologia banale $\iff \forall (X, \tau), \forall f : (X, \tau) \rightarrow Y$ f è continua.
 \Rightarrow) Ovvio.
 \Leftarrow) Scegliamo $X = Y$, come σ la topologia banale e $f = \text{Id}_Y$.

La definizione di continuità si può dare anche utilizzando i sottoinsiemi chiusi.

Proposizione 1.25. $f : X \rightarrow Y$ è continua $\iff f^{-1}(C)$ è chiuso in X per ogni C chiuso in Y .

Dimostrazione. Esercizio.

Osservazione 1.26. Nel caso in cui $(X, \tau) = (Y, \sigma) = (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ la definizione (??) è equivalente all'usuale definizione di continuità dell'analisi.

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che se $\|x - x_0\| < \delta$ allora $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Vogliamo mostrare che questa funzione è continua nel senso della Definizione (??), cioè vogliamo mostrare che, se U è un aperto del codominio allora $f^{-1}(U)$ è aperto. Sia x_0 un punto di $f^{-1}(U)$; mostreremo che tale punto è punto interno. Sia $y_0 = f(x_0)$; y_0 è contenuto in U , che è aperto; pertanto esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset U$. In corrispondenza di tale ε esiste δ tale che se $\|x - x_0\| < \delta$ allora $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$; in particolare se $\|x - x_0\| < \delta$ allora $f(x) \in U$. Pertanto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è un intorno di x_0 contenuto in $f^{-1}(U)$.

Supponiamo ora che f soddisfi la Definizione (??), e sia x_0 un punto del dominio. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $U = f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$; essendo controimmagine di un aperto, U è aperto. Il punto x_0 è interno ad U , quindi esiste un intorno di x_0 , che possiamo assumere del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, contenuto in U . L'immagine di tale intorno è contenuta in $f(U) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ e l'asserto è provato. \square

Se si conosce una base per la topologia di Y è sufficiente verificare la continuità sugli elementi della base:

Proposizione 1.27. Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ un'applicazione tra spazi topologici, e sia \mathcal{B} una base per σ . Allora f è continua se e solo se $f^{-1}(B) \in \tau$ per ogni $B \in \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Se f è un'applicazione continua allora $f^{-1}(B) \in \tau$ per ogni $B \in \mathcal{B}$ perché gli elementi di \mathcal{B} sono particolari elementi di σ .

Viceversa, se $f^{-1}(B) \in \tau$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, poiché ogni $V \in \sigma$ si può scrivere come $V = \bigcup B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$, si ha $f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$ e $\bigcup f^{-1}(B_i) \in \tau$ in quanto unione di elementi di τ . \square

Esercizio 1.28. Sia (X, τ) l'insieme $\mathbb{N}_{\geq 2}$ con la topologia dei divisori.

Si provi che le applicazioni $f_k : X \rightarrow X$ definite ponendo $f_k(n) = kn$ sono continue, mentre l'applicazione $g : X \rightarrow X$ definita ponendo $g(n) = n + 1$ non lo è.

Definizione 1.29. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *aperta* se $f(U)$ è aperto in Y per ogni U aperto in X . Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *chiusa* se $f(C)$ è chiuso in Y per ogni C chiuso in X .

Osservazione 1.30. f può essere aperta, chiusa, aperta e chiusa senza essere continua. Verificare che

1. Se $(X, \tau) = (Y, \sigma) = (\mathbb{R}, \tau_s)$ e $f : X \rightarrow Y$ è definita ponendo $f(x) = x^2$ allora l'applicazione f è chiusa, non aperta e non continua.
2. Se $(X, \tau) = (\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$ e $(Y, \sigma) = (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ e $f : X \rightarrow Y$ è definita ponendo $f(x, y) = x$ allora l'applicazione f è aperta, non chiusa e continua (Cf. sezione (??)).

3. $f : (\mathbb{R}, \tau_s) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ definita ponendo $f(x) = 3x$ è aperta e chiusa, ma non continua.

Proposizione 1.31. *Siano (X, τ_X) , (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) tre spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ due applicazioni continue. Allora l'applicazione composta $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua.*

Dimostrazione. Bisogna verificare che $h^{-1}(V) \in \tau_X$ per ogni $V \in \tau_Z$.
L'insieme $g^{-1}(V) \in \tau_Y$ poiché g è continua, e l'insieme $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$ poiché f è continua, e quindi l'asserto segue dal fatto che

$$h^{-1}(V) = (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

□

Quando due spazi topologici sono “uguali”?

Definizione 1.32. Due spazi topologici X e Y si dicono *omeomorfi* se esistono due applicazioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$. f e g prendono il nome di *omeomorfismi*; un omeomorfismo è cioè un'applicazione continua, biunivoca e con inversa continua (biunivoca e bicontinua). Indicheremo l'omeomorfismo tra due spazi topologici con questo simbolo: \simeq .

Capitolo 2

Costruire nuovi spazi topologici

2.1 SOTTOSPAZI E TOPOLOGIA INDOTTA

Sia (X, τ) uno spazio topologico e $S \subset X$ un suo sottoinsieme non vuoto.

Definizione 2.1. $\tau_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$ è una topologia su S , detta *topologia indotta* da τ su S .

Osservazione 2.2. Consideriamo l'inclusione $i : S \hookrightarrow X$; per ogni sottoinsieme $A \subset X$ si ha $i^{-1}(A) = A \cap S$. Pertanto la topologia indotta rende continua l'inclusione, anzi è la topologia meno fine che rende continua tale applicazione.

Osservazione 2.3. Gli aperti di τ_S non sono necessariamente aperti di τ : ad esempio se $(X, \tau) = (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ e $S = [0, 1]$ allora $[0, 1/2)$ è un aperto di τ_S , ma non è un aperto di τ_ε .

Esempi 2.4. Alcuni esempi di sottospazi di $(\mathbb{R}^n, \tau_\varepsilon)$ di importanza notevole:

- a) $X = \mathbb{R}, S = I := [0, 1]$, l'intervallo unitario.
- b) $X = \mathbb{R}^{n+1}, S = \mathbf{S}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$, la sfera di dimensione n .
- c) $X = \mathbb{R}^n, S = \mathbf{D}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$, il disco (chiuso) di dimensione n .

Esempi 2.5. Vediamo ora alcuni esempi di omeomorfismi.

- a) Due intervalli di \mathbb{R} che includono gli estremi, con la topologia indotta dalla topologia euclidea, sono tra loro omeomorfi.

Infatti l'intervallo $[a, b]$ è omeomorfo all'intervallo I mediante l'applicazione $f : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ definita da $y = (x - a)/(b - a)$, che ha come inversa $g : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definita da $x = y(b - a) + a$. La tesi segue ora dal fatto che la composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo.

b) Allo stesso modo due intervalli di \mathbb{R} che non includono gli estremi, con la topologia indotta dalla topologia euclidea, sono tra loro omeomorfi.

c) Due semirette $(-\infty, a)$ e $(-\infty, b)$ con la topologia indotta da quella euclidea sono omeomorfe.

Per mostrare questo fatto è sufficiente considerare l'omeomorfismo $f : (-\infty, a) \rightarrow (-\infty, b)$ definito ponendo $f(x) = x + (b - a)$.

d) Due semirette $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ con la topologia indotta da quella euclidea sono omeomorfe.

In questo caso un possibile omeomorfismo è dato da $f : (-\infty, a) \rightarrow (b, +\infty)$ definita ponendo $f(x) = -x + (b + a)$.

e) Gli intervalli di \mathbb{R} che non includono gli estremi, con la topologia indotta da quella euclidea, sono omeomorfi alle semirette prive dell'estremo con la topologia indotta da quella euclidea.

In virtù degli esempi precedenti basta mostrare che l'intervallo $(0, 1)$ è omeomorfo alla semiretta $(1, +\infty)$, e ciò si ottiene considerando l'omeomorfismo $f : (0, 1) \rightarrow (1, +\infty)$ definito da $f(x) = 1/x$.

f) Gli intervalli di \mathbb{R} che non includono gli estremi, con la topologia indotta da quella euclidea, sono omeomorfi a \mathbb{R} con la topologia euclidea.

Basta mostrare che l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ è omeomorfo a \mathbb{R} , e ciò si ottiene considerando l'omeomorfismo $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ dato da $f(x) = \tan(x)$.

g) Gli intervalli di \mathbb{R} che non includono gli estremi, con la topologia indotta da quella euclidea, non sono omeomorfi agli intervalli di \mathbb{R} che includono gli estremi, con la topologia indotta da quella euclidea. Lo dimostreremo più avanti, utilizzando la nozione di connessione (Cf. Esempio (??)).

h) La sfera n -dimensionale meno un punto con la topologia indotta da quella euclidea è omeomorfa a \mathbb{R}^n con la topologia euclidea.

Scegliamo come punto il polo nord $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$ e definiamo un'applicazione $p : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, detta *proiezione stereografica*.

Tale applicazione associa a un punto P di $\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il punto dell'iperpiano di equazione $x_{n+1} = 0$ ottenuto intersecando la retta per N e P con tale iperpiano.

Le equazioni di p sono le seguenti:

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

L'inversa di $p, p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ è data da

$$p^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \sum y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum y_i^2}, \frac{\sum y_i^2 - 1}{1 + \sum y_i^2} \right)$$

E' semplice verificare che p e la sua inversa sono applicazioni continue che danno quindi l'omeomorfismo cercato.

Esercizio 2.6. Sia X l'insieme $[0, 1] \cup \{2\}$ con la topologia che ha come base gli aperti della topologia indotta da quella euclidea su $[0, 1]$ e gli insiemi della forma $(a, 1) \cup \{2\}$ con $a \in [0, 1)$. Si consideri l'applicazione $f : [-1, 1] \rightarrow X$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Si stabilisca se tale applicazione è continua quando $[-1, 1]$ ha rispettivamente la topologia grossolana, la topologia cofinita, la topologia euclidea o la topologia discreta.

2.2 PRODOTTI E TOPOLOGIA PRODOTTO

Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici.

Definizione 2.7. La *topologia prodotto* $\tau_{X \times Y}$ su $X \times Y$ è la topologia su $X \times Y$ che ha come base $\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U_X \times V_Y \mid U_X \in \tau_X, V_Y \in \tau_Y\}$. Un aperto della base viene detto *aperto elementare* della topologia prodotto.

Esempio 2.8. Siano $(X, \tau_X) = (Y, \tau_Y) = (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$; allora per il criterio di equivalenza delle basi, la topologia prodotto su \mathbb{R}^2 è la topologia euclidea.

Dato uno spazio prodotto $X \times Y$, sono naturalmente definite due applicazioni, $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$, tale che $\pi_X(x, y) = x$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$, tale che $\pi_Y(x, y) = y$, dette *proiezioni sui fattori*.

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y \end{array}$$

Le proiezioni sui fattori sono applicazioni continue, anzi, la topologia prodotto è la topologia meno fine che rende continue le proiezioni.

Osservazione 2.9. Le proiezioni sono applicazioni aperte.

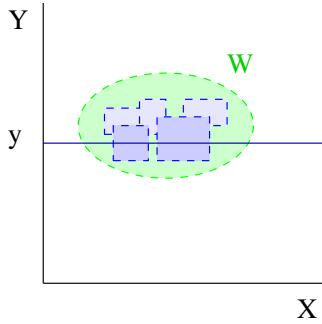
Dimostrazione. Sia A un aperto di $X \times Y$; tale insieme si può scrivere come unione di aperti elementari:

$$A = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i),$$

ove gli U_i sono aperti di X e i V_i sono aperti di Y ; si ha pertanto $\pi_X(A) = \cup_{i \in I} U_i$ e $\pi_Y(A) = \cup_{i \in I} V_i$. \square

Esempio 2.10. In generale le proiezioni non sono applicazioni chiuse: in \mathbb{R}^2 con la topologia euclidea si consideri l'insieme C costituito dai punti dell'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$; tale insieme è chiuso in quanto immagine inversa dell'insieme chiuso costituito dal punto 1 tramite l'applicazione continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x, y) = xy$. L'immagine di C tramite la proiezione π_X è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è un insieme chiuso di $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$.

Proposizione 2.11. Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e sia $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$ lo spazio prodotto. Allora $\forall y \in Y$ lo spazio topologico $X \times \{y\}$, con la topologia indotta, è omeomorfo ad X .



Dimostrazione. Sia $i : X \times \{y\} \rightarrow X \times Y$ l'inclusione, e sia $f : X \times \{y\} \rightarrow X$ definita ponendo $f(x, y) = x$; è immediato verificare che $f = \pi_X \circ i$ e che f è biunivoca. Inoltre f è continua perché composizione di applicazioni continue; per provare quindi che f è un omeomorfismo resta da mostrare che f è aperta.

Un aperto W' di $X \times \{y\}$ è intersezione di un aperto W di $X \times Y$ con $X \times \{y\}$ quindi, essendo un aperto del prodotto unione di aperti elementari, possiamo scrivere

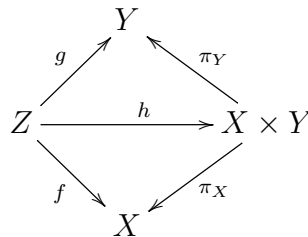
$$W' = \left(\bigcup_{j \in J} (U_j \times V_j) \right) \cap (X \times \{y\});$$

quindi $W' = \bigcup_{j \in J'} (U_j \times \{y\})$ dove $J' = \{j \in J \mid y \in V_j\}$. Si ha pertanto che $f(W') = \bigcup_{j \in J'} U_j$ e quindi f è aperta. \square

La seguente proposizione fornisce un criterio per stabilire se un'applicazione a valori in uno spazio prodotto è continua

Proposizione 2.12. (Proprietà universale dei prodotti) Sia Z uno spazio topologico e $f : Z \rightarrow X, g : Z \rightarrow Y$ due applicazioni. Sia $h : Z \rightarrow X \times Y$ l'applicazione definita da $h(z) = (f(z), g(z))$. Allora h è continua se e solo se f e g sono continue.

Dimostrazione. \Rightarrow) Possiamo rappresentare la situazione col seguente diagramma commutativo:



Dal fatto che $f = \pi_X \circ h$ e $g = \pi_Y \circ h$ segue la tesi, perché le proiezioni sono applicazioni continue.

\Leftarrow) Poiché gli aperti elementari costituiscono una base per la topologia prodotto è sufficiente mostrare che l'immagine inversa di un aperto elementare è un aperto di Z .

$$\begin{aligned} h^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z \mid h(z) = (f(z), g(z)) \in U \times V\} = \\ &= \{z \in Z \mid f(z) \in U, g(z) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V), \end{aligned}$$

e la tesi segue perciò dalla continuità di f e g . \square

Esercizio 2.13. Siano $(X, \tau_X) = (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ e $(Y, \tau_Y) = (\mathbb{R}, \tau_c)$ e sia $X \times Y$ lo spazio prodotto. Si determinino l'interno, la chiusura e la frontiera del sottoinsieme $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset X \times Y$.

Esercizio 2.14. Sia (X, τ_X) lo spazio topologico \mathbb{R} con la topologia che ha per base i sottoinsiemi del tipo $[a, b)$ con $a < b \in \mathbb{R}$ e sia Z lo spazio prodotto $(X, \tau_X) \times (X, \tau_X)$. Qual è la topologia indotta dalla topologia prodotto sui sottoinsiemi $T_1 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $T_2 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$?

Definizione 2.15. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione; il grafico di f è l'insieme $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.

Esercizio 2.16. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua. Dimostrare che il grafico Γ_f è omeomorfo a X .

2.3 QUOZIENTI E TOPOLOGIA QUOZIENTE

Definizione 2.17. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva da uno spazio topologico X su un insieme Y . La topologia più fine su Y che rende f continua è detta *topologia quoziente*. E' costituita dai sottoinsiemi

$$\tau_f = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ è aperto in } X\}$$

Osservazione 2.18. Avere un'applicazione suriettiva tra insiemi $f : X \rightarrow Y$ è equivalente ad avere una relazione di equivalenza \sim_f nell'insieme X così definita: $x \sim_f x'$ se e solo se $f(x) = f(x')$. L'insieme Y è l'insieme quoziente rispetto a tale relazione, e f è la proiezione sul quoziente.

Definizione 2.19. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva di insiemi. L'insieme $f^{-1}(f(A))$ è detto *saturazione* di A . Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice *saturo* se coincide con la sua saturazione.

Se X è uno spazio topologico e Y ha la topologia quoziente per trovare gli aperti di Y è sufficiente trovare gli aperti saturi di X :

Proposizione 2.20. Sia (X, τ_X) uno spazio topologico, $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva e si doti Y della topologia quoziente τ_f . Allora gli aperti di τ_f sono tutte e sole le immagini degli aperti saturi di X .

Dimostrazione. Sia \mathcal{S} l'insieme degli aperti saturi di X . Possiamo definire un'applicazione tra insiemi $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \tau_f$ che ad ogni aperto saturo A di X associa $f(A)$; infatti $f^{-1}(f(A)) = A$ e quindi $f(A)$ è un aperto di Y .

Viceversa possiamo definire un'applicazione $\psi : \tau_f \rightarrow \mathcal{S}$ che associa ad un aperto B di τ_f la sua controimmagine $f^{-1}(B)$. Tale sottoinsieme è aperto perché B lo è ed è saturo perché $f(f^{-1}(B)) = B$ e quindi $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

E' immediato verificare che le due applicazioni sopra definite sono l'inversa l'una dell'altra e quindi stabiliscono la corrispondenza biunivoca cercata. \square

Corollario 2.21. Sia (X, τ_X) uno spazio topologico, $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva e si doti Y della topologia quoziente τ_f .

L'applicazione f è aperta (rispettivamente chiusa) se e solo se la saturazione di ogni sottoinsieme aperto (risp. chiuso) è un sottoinsieme aperto (risp. chiuso).

Dimostrazione. \Rightarrow Se f è aperta, allora per ogni $U \in \tau_X$ si ha che $f(U) \in \tau_f$, e quindi $f^{-1}(f(U)) \in \tau_X$ per definizione di topologia quoziente.

\Leftarrow Per ipotesi per ogni $U \in \tau_X$ si ha che $f^{-1}(f(U)) \in \tau_X$. Quindi $f(U) \in \tau_f$ per definizione di topologia quoziente. \square

Esempi 2.22. Una particolare tipologia di spazi quoziente si ottiene mediante contrazione ad un punto di un sottoinsieme: dato un sottoinsieme $A \subset X$ si definisce la relazione di equivalenza \sim_A in questo modo:

$$x \sim_A x' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ x, x' \in A \end{cases}$$

Denoteremo solitamente lo spazio quoziente X/\sim_A con X/A .

In questo caso la saturazione di un sottoinsieme $U \subset X$ è di due tipi possibili:

$$f^{-1}(f(U)) = \begin{cases} U & U \cap A = \emptyset \\ U \cup A & U \cap A \neq \emptyset \end{cases}$$

In particolare, per il corollario precedente, se A è un insieme aperto allora f è un'applicazione aperta, mentre, se A è un insieme chiuso allora f è un'applicazione chiusa. I sottoinsiemi saturi sono quelli che non tagliano il sottoinsieme A e quelli che lo contengono.

Nei due esempi successivi vediamo la contrazione a un punto di un sottoinsieme chiuso e di un sottoinsieme aperto. Notiamo che nel primo caso il punto $f(A)$ non è un aperto, mentre nel secondo caso lo è.

a) $X = \mathbb{R}, A = [-1, 1]$.

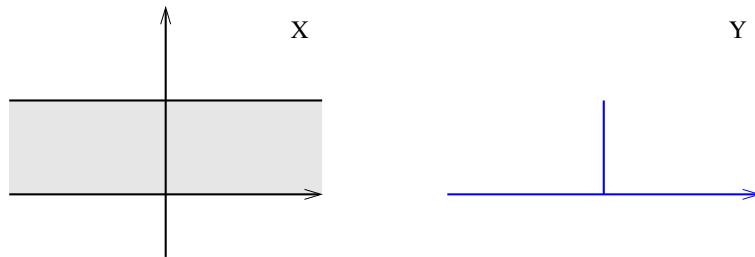


b) $X = \mathbb{R}, A = (-1, 1)$.



Notiamo anche, perché sarà utile in seguito, che, nel secondo caso, ogni aperto del quoziente che contiene il punto $f(-1)$ - essendo immagine di un aperto saturo che contiene A perché ogni aperto che contiene -1 ha intersezione non vuota con A - contiene anche $f(A)$.

Esempio 2.23. Sia $X = \mathbb{R} \times [0, 1]$ lo spazio prodotto tra \mathbb{R} con la topologia euclidea e $[0, 1]$ con la topologia euclidea. Si consideri su X la relazione di equivalenza \sim così definita: $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $y = y' \neq 0$ e sia Y lo spazio quoziente X/\sim .



Sia $f : X \rightarrow Y$ la proiezione naturale, e sia $A \subset X$ un sottoinsieme.

Per tener conto del diverso comportamento della relazione di equivalenza su $\mathbb{R} \times \{0\}$ e su $\mathbb{R} \times (0, 1]$ scriviamo

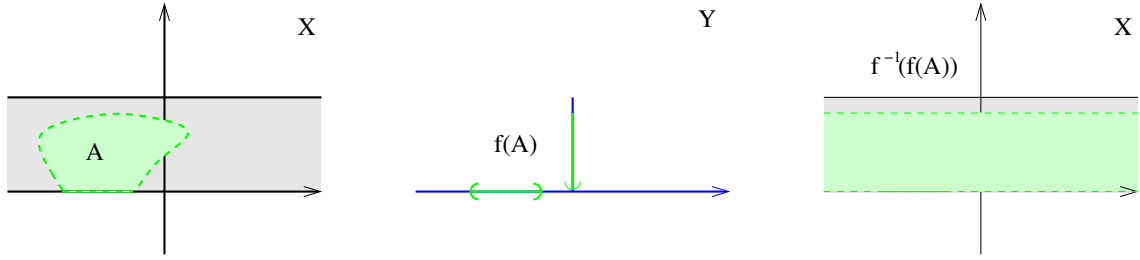
$$f(A) = (f(A) \cap f(\mathbb{R} \times \{0\})) \cup (f(A) \cap f(\mathbb{R} \times (0, 1]));$$

pertanto

$$f^{-1}(f(A)) = (A \cap (\mathbb{R} \times \{0\})) \cup (\mathbb{R} \times (\pi(A) \cap (0, 1])),$$

dove $\pi : X \rightarrow [0, 1]$ è la proiezione sul secondo fattore.

2. COSTRUIRE NUOVI SPAZI TOPOLOGICI



I sottoinsiemi saturi sono quindi quelli della forma $A = A_1 \cup A_2$ dove $A_1 \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ e $A_2 = \mathbb{R} \times B_2$ con $B_2 \subset (0, 1]$.

Se A è un insieme aperto, allora A_1 dev'essere un aperto di $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Se $A_1 = \emptyset$ allora, poiché π è una mappa aperta, $\pi(A) = B_2$ dev'essere un aperto di $[0, 1]$.

Se invece $A_1 \neq \emptyset$, allora, $\pi(A) = \{0\} \cup B_2$ dev'essere un aperto di $[0, 1]$ e questo implica che B_2 è un aperto di $[0, 1]$ e che $\{0\} \in \overline{B_2}$.

La condizione è anche sufficiente, poiché, se A_1 è un aperto non vuoto di $\mathbb{R} \times \{0\}$ e $\{0\} \cup B_2$ è un aperto di $[0, 1]$ allora

$$A = A_1 \cup B_2 \times \mathbb{R} = (A_1 \times (\{0\} \cup B_2)) \cup (\mathbb{R} \times B_2)$$

è aperto perché unione di aperti.

Gli aperti di Y sono immagini degli aperti saturi di X , e quindi sono del tipo $f(A_1) \cup f(\mathbb{R} \times B_2)$, con A_1 aperto di $\mathbb{R} \times \{0\}$ e B_2 aperto di $[0, 1]$ tale che $\{0\} \in \overline{B_2}$ oppure del tipo $f(\mathbb{R} \times B_2)$, con B_2 aperto di $(0, 1]$.

Proposizione 2.24. (Proprietà universale del quoziente) Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva di spazi topologici tale che Y abbia la topologia quoziente rispetto ad f ; sia poi $g : Y \rightarrow Z$ un'applicazione tra spazi topologici.

Allora $g \circ f$ è continua se e solo se g è continua.

Dimostrazione. Se g è continua allora $g \circ f$ è continua perché composizione di applicazioni continue.

Viceversa supponiamo che $g \circ f$ sia continua. Sia V un aperto di Z ; dobbiamo dimostrare che $g^{-1}(V)$ è aperto in Y ; sappiamo che $f^{-1}(g^{-1}(V))$ è aperto in X per la continuità di $g \circ f$; ricordando che un sottoinsieme di Y è un aperto della topologia quoziente se e solo se la sua controimmagine tramite f è un aperto otteniamo la tesi. \square

Proposizione 2.25. (Omeomorfismi di quozienti) Sia $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo; siano \sim_X e \sim_Y relazioni di equivalenza in X e in Y . Se $\forall x, x' \in X \ x \sim_X x' \iff f(x) \sim_Y f(x')$ allora $X/\sim_X \simeq Y/\sim_Y$.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X/\sim_X & \xrightarrow{F} & Y/\sim_Y \end{array}$$

e definiamo $F : X/\sim_X \rightarrow Y/\sim_Y$ in questo modo: $F([x]) = [f(x)]$.

L'applicazione F è ben definita: se $x' \sim_X x$ si ha che $f(x) \sim_Y f(x')$ e quindi $F([x']) = [f(x')] = [f(x)]$.

L'applicazione F è continua per la proprietà universale del quoziente; infatti $F \circ \pi_X$ è continua, essendo $F \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$ e quest'ultima applicazione è continua in quanto composizione di applicazioni continue.

L'applicazione F è iniettiva; infatti $F([x]) = F([x']) \Leftrightarrow [f(x)] = [f(x')] \Leftrightarrow f(x) \sim_Y f(x') \Leftrightarrow x \sim_X x' \Leftrightarrow [x] = [x']$.

L'applicazione F è suriettiva perché f lo è: preso $[y] \in Y/\sim_Y$ sappiamo che esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ per la suriettività di f , e abbiamo $F([x]) = [f(x)] = [y]$.

L'applicazione inversa F^{-1} è continua per la proprietà universale del quoziente ($F^{-1} \circ \pi_Y = \pi_X \circ f^{-1}$ è continua). \square

Osservazione 2.26. Questa proposizione giustifica il procedimento di “taglia e incolla” che vedremo più avanti.

Definizione 2.27. Sia X un insieme e \sim una relazione d'equivalenza su X .

Sia poi $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Si dice che l'applicazione f *passa al quoziente* se $\forall x, x' \in X \ x \sim_X x' \Rightarrow f(x) \sim_Y f(x')$.

Definizione 2.28. Siano (X, x_0) e (Y, y_0) due spazi topologici in cui è stato scelto un punto, detto *punto base*; l'unione a un punto di questi due spazi è lo spazio topologico $(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \sqcup Y)/\sim$ dove \sim è la relazione d'equivalenza che identifica ogni punto con se stesso e x_0 con y_0 .

Esempi 2.29.

- a) $X = I$, $A = \{0, 1\}$; allora $I/A \simeq S^1$; per provarlo, consideriamo l'applicazione $e : I \rightarrow S^1$, che manda t in $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$; tale applicazione passa al quoziente, e pertanto risulta definita un'applicazione $g : I/A \rightarrow S^1$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{e} & S^1 \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ I/A & & \end{array}$$

E' immediato verificare che g è biunivoca; g è continua per la proprietà universale del quoziente; la continuità di g^{-1} seguirà dal Corollario (??).

quozes1-eps-converted-to.pdf

- b) $X = I$, $A = \{0, 1/2, 1\}$; allora $I/A \simeq S^1 \vee S^1$.
 Sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ il sottospazio di \mathbb{R}^2 omeomorfo a $S^1 \vee S^1$ costituito dalle circonferenze di raggio uno e centro $(0, 1)$ e $(0, -1)$:

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ oppure } x^2 + (y + 1)^2 = 1\}.$$

Consideriamo l'applicazione $e : I \rightarrow Y$ così definita:

$$e(t) = \begin{cases} (\sin(4\pi t), -\cos(4\pi t) + 1) & t \in [0, 1/2] \\ (\sin(4\pi t), \cos(4\pi t) - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Tale applicazione è ben definita e passa al quoziente perché tutti i punti di A sono mandati nell'origine di \mathbb{R}^2 e pertanto risulta definita un'applicazione $g : I/A \rightarrow S^1 \vee S^1$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{e} & S^1 \vee S^1 \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ I/A & & \end{array}$$

E' immediato verificare che g è biunivoca; g è continua per la proprietà universale del quoziente; la continuità di g^{-1} seguirà dal Corollario (??).

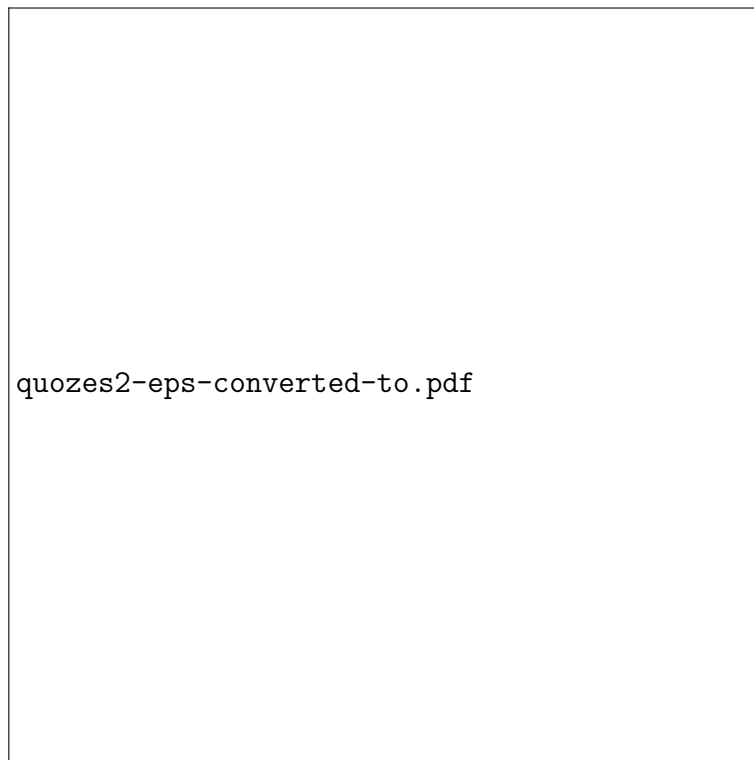
quozes3-eps-converted-to.pdf

c) $X = \mathbf{S}^1 \times I, A = \mathbf{S}^1 \times \{1\}; X/A \simeq \mathbf{D}^2$.

Consideriamo l'applicazione $p : \mathbf{S}^1 \times I \rightarrow \mathbf{D}^2$, che manda (x, t) in $(1 - t)x$; tale applicazione passa al quoziente perché tutti i punti di A sono mandati nello stesso punto di \mathbf{D}^2 e pertanto risulta definita un'applicazione $g : (\mathbf{S}^1 \times I)/A \rightarrow \mathbf{D}^2$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1 \times I & \xrightarrow{p} & \mathbf{D}^2 \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ (\mathbf{S}^1 \times I)/A & & \end{array}$$

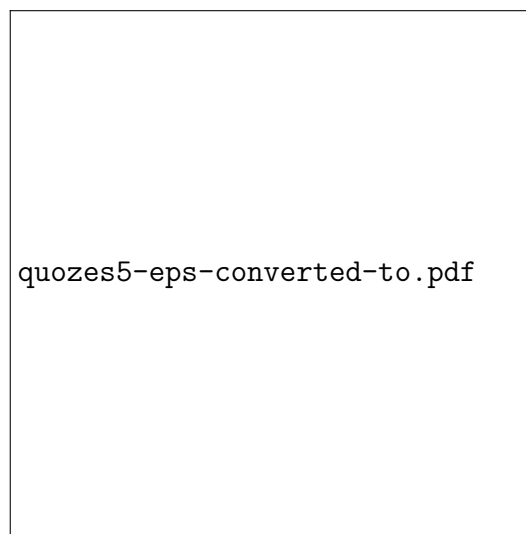
E' immediato verificare che g è biunivoca; g è continua per la proprietà universale del quoziente; la continuità di g^{-1} seguirà dal Corollario (??).



- d) Sia $X = \mathbf{S}^1 \times I$ e consideriamo la relazione di equivalenza \sim tale che $(x, 0) \sim (x', 0)$ e $(x, 1) \sim (x', 1)$. Lo spazio quoziente X/\sim è omeomorfo a \mathbf{S}^2 .

La mappa da considerare in questo caso è: $p : \mathbf{S}^1 \times I \rightarrow \mathbf{S}^2$ così definita

$$p(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} (2t\mathbf{x}, -\sqrt{1-4t^2}) & t \in [0, 1/2] \\ (2(1-t)\mathbf{x}, \sqrt{1-4(1-t)^2}) & t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$



Si noti che in questo esempio il passaggio al quoziente non è la contrazione a un punto di un sottoinsieme.

Esempi 2.30. Relazioni d'equivalenza in $X = I \times I \subset \mathbb{R}^2$

a) Consideriamo la relazione di equivalenza \sim in $I \times I$ tale che

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = y' \end{cases} ;$$

si può dimostrare che lo spazio quoziente è omeomorfo a $S^1 \times I \subset \mathbb{R}^3$ con la topologia indotta da quella euclidea. Si tratta cioè di un *cilindro*.

b) Consideriamo la relazione di equivalenza \sim in $I \times I$ tale che

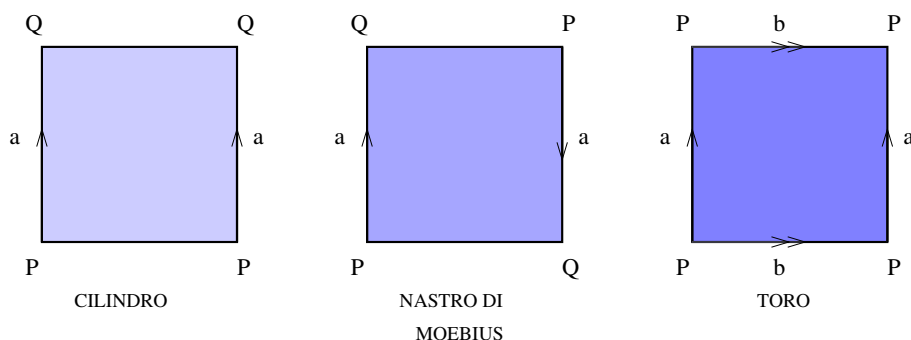
$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = 1 - y' \end{cases} ;$$

lo spazio quoziente rispetto a tale relazione di equivalenza è detto *Nastro di Moebius*.

c) Consideriamo la relazione di equivalenza \sim in $I \times I$ tale che

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = y' \\ \{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ e } x = x' \end{cases} ;$$

lo spazio quoziente rispetto a tale relazione di equivalenza è detto *Toro*; si può dimostrare che tale spazio è omeomorfo al prodotto $S^1 \times S^1$.



d) Consideriamo la relazione di equivalenza \sim in $I \times I$ tale che

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = 1 - y' \\ \{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ e } x = x' \end{cases} ;$$

lo spazio quoziente rispetto a tale relazione di equivalenza è detto *Bottiglia di Klein*.

e) Consideriamo la relazione di equivalenza \sim in $I \times I$ tale che

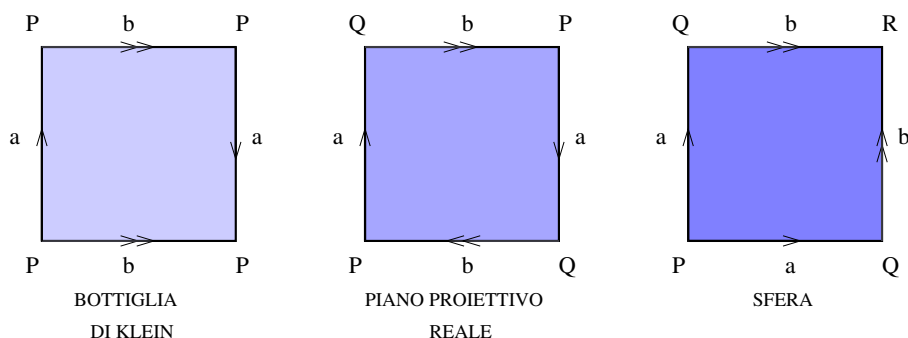
$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = 1 - y' \\ \{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ e } x = 1 - x' \end{cases} ;$$

vedremo che lo spazio quoziente rispetto a tale relazione di equivalenza è omeomorfo al *piano proiettivo reale* \mathbb{RP}^2 .

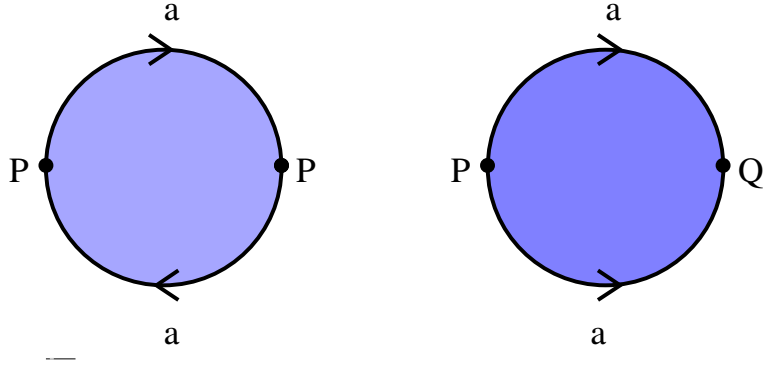
f) Consideriamo la relazione di equivalenza \sim in $I \times I$ tale che

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ (x, y) = (y', x') \text{ e } (x, y) \in \partial(I \times I) \end{cases} ;$$

si può dimostrare che lo spazio quoziente è omeomorfo alla sfera S^2 .



Osservazione 2.31. Gli ultimi due spazi (il piano proiettivo reale e la sfera) possono essere visti anche come quozienti di D^2 (anzi, questo è il modo con cui solitamente vengono rappresentati come quozienti):



2.4 LO SPAZIO PROIETTIVO REALE \mathbb{RP}^N

Consideriamo lo spazio topologico dato da $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con la topologia indotta da quella euclidea e in tale spazio consideriamo la relazione d'equivalenza \sim definita in questo modo: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}, \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda w_1 \\ \lambda w_2 \\ \dots \\ \lambda w_{n+1} \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

L'insieme quoziente viene denotato con

$$\mathbb{RP}^n := \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim};$$

denotiamo con π la proiezione naturale

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n.$$

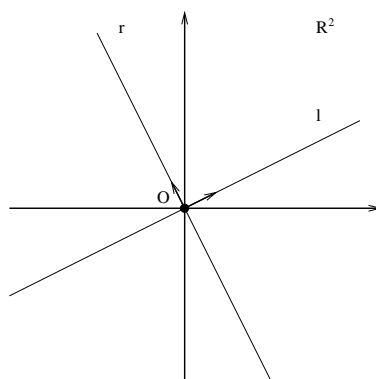
Definizione 2.32. L'insieme \mathbb{RP}^n dotato della topologia quoziente rispetto alla proiezione naturale π è detto *spazio proiettivo reale n -dimensionale*.

Vediamo nel dettaglio alcuni casi particolari di spazio proiettivo reale: la retta proiettiva reale e il piano proiettivo reale.

Consideriamo il caso $n = 1$; lo spazio vettoriale da quozientare è \mathbb{R}^2 ; in questo caso avremo la *retta proiettiva reale*.

Vogliamo costruire un *modello* di \mathbb{RP}^1 , ossia uno spazio topologico che sia omeomorfo a \mathbb{RP}^1 ; in pratica costruiremo un insieme che sia in corrispondenza biunivoca con \mathbb{RP}^1 e lo doteremo della topologia indotta dalla biiezione (gli aperti del modello saranno i sottoinsiemi che corrispondono agli aperti di \mathbb{RP}^1) in modo che la biiezione sia l'omeomorfismo cercato.

Ad ogni punto di \mathbb{R}^2 diverso da 0 associamo la retta che passa per quel punto e per 0 . Tutti i punti di una di queste rette appartengono a un'unica classe di equivalenza della relazione \sim e viceversa una classe di equivalenza individua un'unica retta per l'origine di \mathbb{R}^2 .



C'è una corrispondenza biunivoca tra

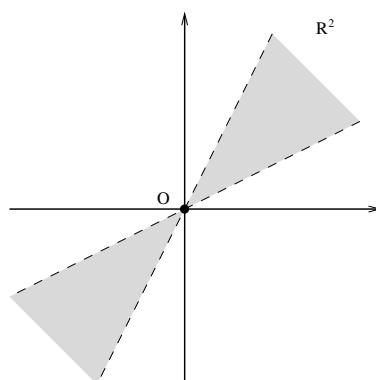
$$\{\text{punti di } \mathbb{RP}^1\} \longleftrightarrow \{\text{rette di } \mathbb{R}^2 \text{ passanti per } \mathbf{0}\};$$

inoltre la proiezione naturale π associa ad ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ la retta di \mathbb{R}^2 che passa per $\mathbf{0}$ e per quel punto.

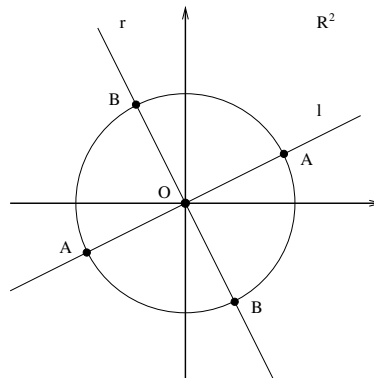
A cosa corrispondono gli aperti di \mathbb{RP}^1 ? Per definizione di topologia quoziente, un aperto di \mathbb{RP}^1 è un sottoinsieme di \mathbb{RP}^1 formato da classi di equivalenza di \sim la cui controimmagine tramite π è aperto in \mathbb{R}^2 rispetto alla topologia euclidea:

$$U \subset \mathbb{RP}^1 \text{ è aperto} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ è aperto.}$$

Usando la biiezione sopra citata, abbiamo che un aperto di \mathbb{RP}^1 è un insieme di rette di \mathbb{R}^2 per $\mathbf{0}$ i cui punti formano un aperto di \mathbb{R}^2 con la topologia euclidea.



Consideriamo ora la circonferenza S^1 . Ogni retta di \mathbb{R}^2 per $\mathbf{0}$ taglia la circonferenza in due punti diametralmente opposti (antipodali) e viceversa, data una coppia di punti diametralmente opposti sulla circonferenza, essa individua un'unica retta di \mathbb{R}^2 per $\mathbf{0}$.

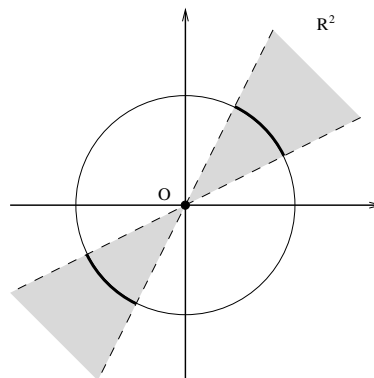


C'è dunque una corrispondenza biunivoca

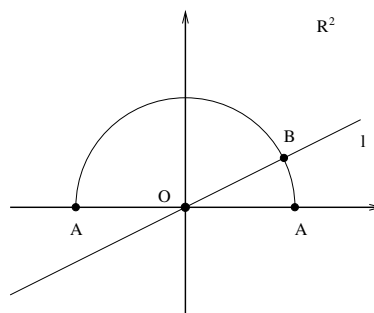
$$\{\text{punti di } \mathbb{RP}^1\} \longleftrightarrow \{\text{coppie di punti diametralmente opposti su } S^1\}$$

e quindi abbiamo un altro modello di \mathbb{RP}^1 .

A cosa corrispondono gli aperti di \mathbb{RP}^1 in questo modello? Essi sono intersezioni di aperti del modello di \mathbb{RP}^1 dato dal fascio di rette con S^1 ; vediamo in figura un elemento della base degli aperti di questo modello di \mathbb{RP}^1 .

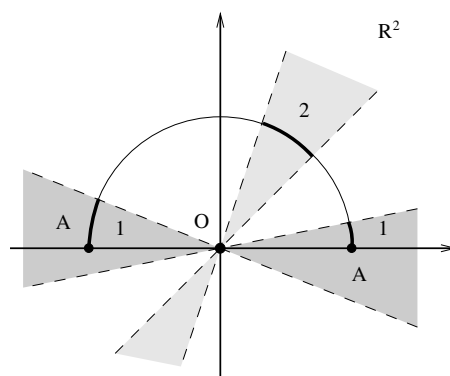


Consideriamo ora solo la semicirconferenza nel semipiano $\{y \geq 0\}$; tutte le rette di \mathbb{R}^2 per 0 tranne la retta orizzontale tagliano la semicirconferenza in un solo punto, mentre la retta orizzontale la taglia nei due punti con ordinata nulla.

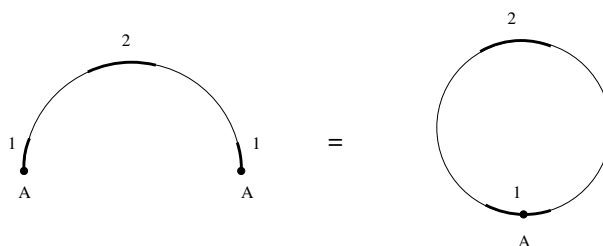


Un altro modello di \mathbb{RP}^1 è dunque dato dalla semicirconferenza con i due estremi A identificati.

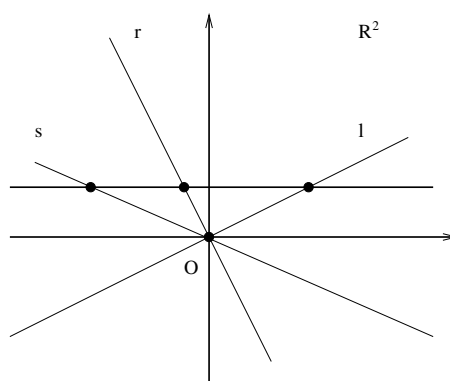
A cosa corrispondono gli aperti di \mathbb{RP}^1 in questo nuovo modello? Ci sono due tipi diversi di elementi della base della topologia: quelli che contengono il punto A e quelli che non lo contengono. Entrambi i tipi di aperti sono, come nel caso precedente, intersezioni di aperti di \mathbb{RP}^1 con la semicirconfenza; li vediamo rappresentati entrambi in figura.



Questo modello di \mathbb{RP}^1 è dunque omeomorfo allo spazio quoziente dato da I con gli estremi identificati e quindi è omeomorfo a S^1 .



Torniamo al modello della retta proiettiva dato dal fascio di rette di \mathbb{R}^2 per O e consideriamo la retta $y = 1$ (omeomorfa a \mathbb{R}^1)



Ogni retta del fascio, tranne quella orizzontale, interseca la retta $y = 1$ in un punto; la retta orizzontale invece non ha intersezione con la retta $y = 1$. Dal punto di vista insiemistico, abbiamo che \mathbb{RP}^1 si ottiene da \mathbb{R} aggiungendo

un punto, che è detto *punto all'infinito*: $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

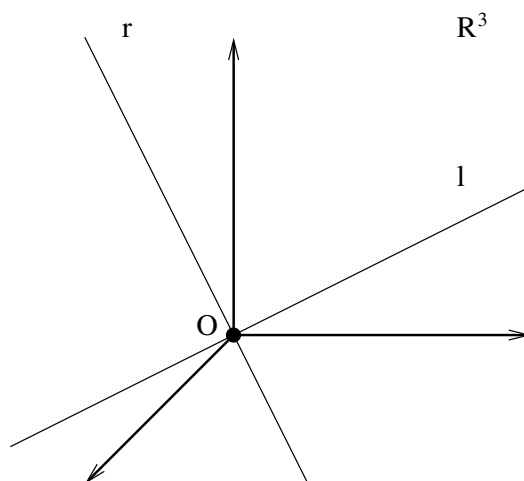
Inoltre, dal punto di vista topologico $\mathbb{RP}^1 \setminus \{\infty\}$ è omeomorfo a \mathbb{R} .

Consideriamo ora il caso $n = 2$; lo spazio vettoriale da quotizzare è dunque \mathbb{R}^3 ; in questo caso otterremo il *piano proiettivo reale*. Anche per \mathbb{RP}^2 vogliamo costruire un modello.

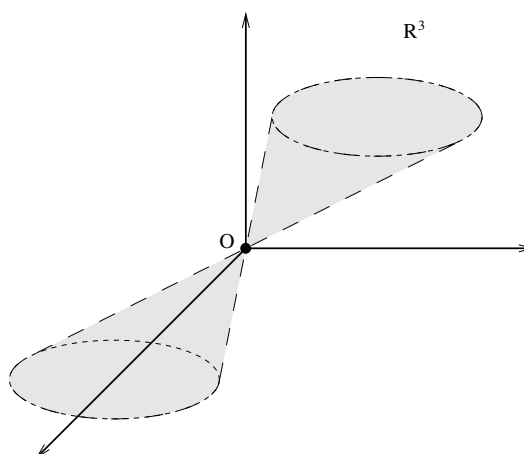
Come nel caso della retta proiettiva, c'è una biiezione

$$\mathbb{RP}^2 \longleftrightarrow \{\text{rette di } \mathbb{R}^3 \text{ passanti per } \mathbf{0}\};$$

inoltre la proiezione naturale π associa ad ogni punto di $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ la retta di \mathbb{R}^3 per $\mathbf{0}$ che passa per quel punto.



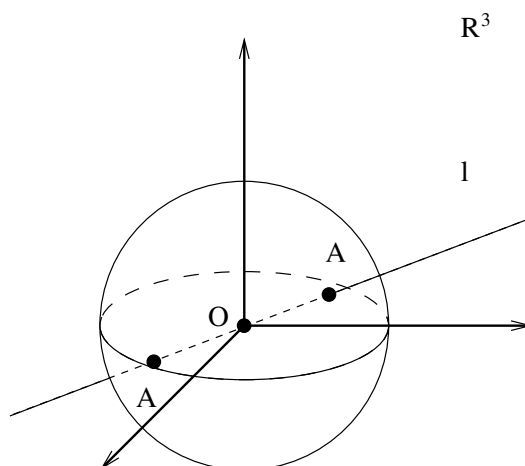
Gli aperti di \mathbb{RP}^2 sono gli insiemi di rette di \mathbb{R}^3 per $\mathbf{0}$ i cui punti formano un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^3 nella topologia euclidea.



Scegliamo in \mathbb{R}^3 la sfera S^2 di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1

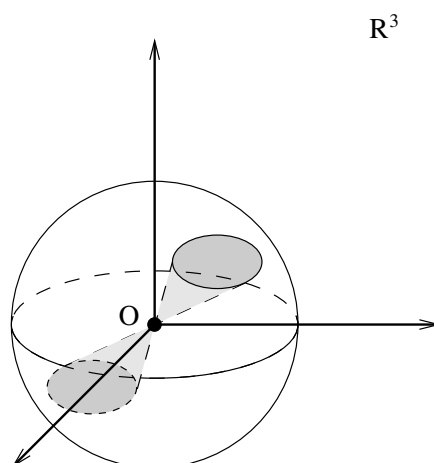
$$S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ogni retta per 0 taglia la sfera in due punti antipodali e viceversa, data una coppia di punti antipodali sulla sfera, essa individua un'unica retta di \mathbb{R}^3 per 0 .

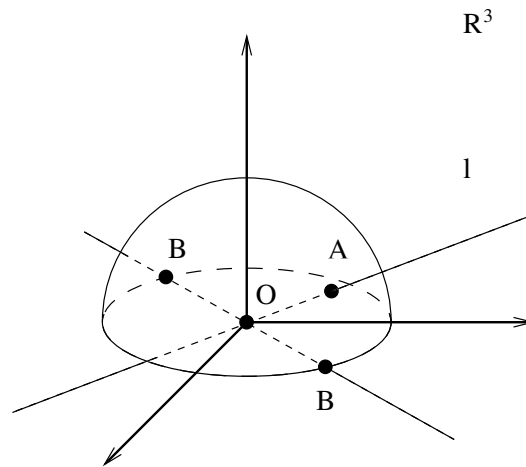


Quindi un'altro modello di \mathbb{RP}^2 è dato dalle *coppie di punti antipodali* su una superficie sferica.

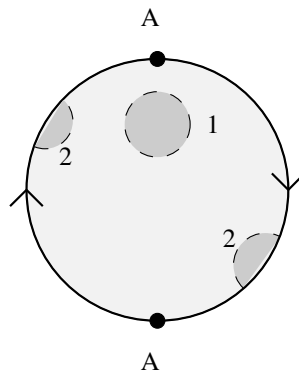
Una base per gli aperti in questo modello di \mathbb{RP}^2 è formata dalle coppie di *calotte sferiche aperte antipodali*, che sono intersezioni degli aperti nel modello precedente con la sfera S^2 .



Consideriamo ora solo l'emisfero Nord, equatore compreso: le rette di \mathbb{R}^3 per 0 , tranne quelle che passano per la circonferenza equatoriale, tagliano l'emisfero in un solo punto, mentre quelle che passano per l'equatore lo tagliano in una coppia di punti diametralmente opposti.

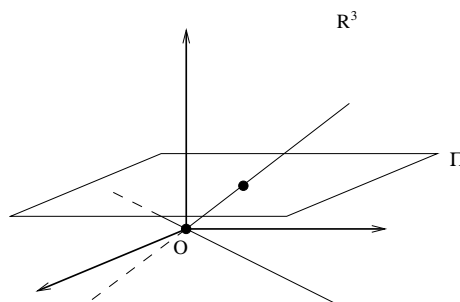


Proiettando l'emisfero sul piano $z = 0$, otteniamo il disco centrato nell'origine e di raggio uno. Assumendo che i punti diametralmente opposti della circonferenza che costituisce il bordo di tale disco individuino lo stesso punto, abbiamo un nuovo modello di \mathbb{RP}^2 , come disco con una opportuna identificazione sul bordo.



Gli aperti che non intersecano il bordo del disco sono gli stessi della topologia euclidea, mentre quelli che intersecano il bordo sono come in figura.

Torniamo al modello di piano proiettivo come stella di rette di \mathbb{R}^3 per O , e consideriamo il piano Π di equazione $z = 1$ (che è omeomorfo a \mathbb{R}^2).



Ogni retta della stella, che non giace sul piano $z = 0$, taglia Π in un punto, mentre le rette sul piano $z = 0$ non hanno intersezione con Π .

Quindi \mathbb{RP}^2 meno un fascio di rette è in corrispondenza biunivoca con \mathbb{R}^2 (in realtà questa corrispondenza biunivoca è un omeomorfismo, se su \mathbb{R}^2 prendiamo la topologia euclidea).

Dunque, insiemisticamente \mathbb{RP}^2 è un \mathbb{R}^2 a cui sono stati aggiunti dei punti che corrispondono alle rette di un fascio di rette, e cioè un \mathbb{RP}^1 .

Capitolo 3

Proprietà topologiche

Definizione 3.1. Una proprietà \mathcal{P} è invariante per omeomorfismi se ogniqualvolta uno spazio topologico X ha la proprietà \mathcal{P} , allora ogni spazio topologico omeomorfo a X ha la proprietà \mathcal{P} . Una proprietà invariante per omeomorfismi è detta *proprietà topologica*.

3.1 SPAZI COMPATTI

Definizione 3.2. Sia X uno spazio topologico; un *ricoprimento aperto* di X è una famiglia di aperti $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ tale che $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definizione 3.3. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X ; $\mathcal{V} = \{U_j\}_{j \in J}$ con $J \subseteq I$ è un *sottoricoprimento* di \mathcal{U} se \mathcal{V} è ancora un ricoprimento di X .

Definizione 3.4. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se e solo se per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} è possibile trovare un sottoricoprimento \mathcal{V} costituito da un numero finito di elementi.

Esempi 3.5.

- a) Uno spazio topologico in cui l'insieme degli aperti è finito è compatto.

L'asserto segue dal fatto che ogni ricoprimento aperto è finito.

In particolare un insieme finito è compatto con qualsiasi topologia e un insieme qualsiasi con la topologia grossolana è compatto.

- b) Un insieme infinito con la topologia discreta non è compatto.

Per dimostrarlo è sufficiente prendere come ricoprimento aperto di X quello formato dai suoi punti. Per tale ricoprimento è evidentemente impossibile trovare un sottoricoprimento finito.

c) X qualsiasi con la topologia cofinita è compatto.

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X , e sia U_0 un aperto del ricoprimento. Il complementare di U_0 è costituito da un numero finito di punti x_1, \dots, x_n . Si scelgano ora n aperti del ricoprimento, U_1, \dots, U_n tali che $x_i \in U_i$. Gli aperti U_0, U_1, \dots, U_n costituiscono un ricoprimento finito di X che è un sottoricoprimento finito di \mathcal{U} .

d) \mathbb{R}^n con la topologia dei dischi non è compatto.

Sia $\mathcal{U} = B_n(\mathbf{0})_{n \in \mathbb{N}}$; se tale ricoprimento possedesse un sottoricoprimento finito $B_{n_1}(\mathbf{0}), \dots, B_{n_k}(\mathbf{0})$, allora, denotato con M il massimo degli n_i si dovrebbe avere $\mathbb{R}^n \subset \cup_i B_{n_i}(\mathbf{0}) = B_M(\mathbf{0})$, un'evidente contraddizione.

e) Lo spazio topologico $X = [-1, 1]$, con la topologia dell'esempio (??) g) è compatto.

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X . In tale ricoprimento deve esistere un aperto U_0 che contiene il punto 0. Gli unici aperti che contengono il punto 0 contengono l'intervallo $(-1, 1)$, quindi, denotati con U_{-1} e U_1 due aperti del ricoprimento che contengono il punto -1 e il punto 1 rispettivamente, gli aperti U_0, U_{-1} e U_1 costituiscono il sottoricoprimento finito cercato.

Proposizione 3.6. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, e sia X uno spazio compatto. Allora $f(X)$ è uno spazio compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$; allora $\mathcal{U} = \{U_j := f^{-1}(V_j)\}_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto di X , poiché f è continua. Essendo X compatto, esiste un sottoricoprimento finito

$$\{U_1 = f^{-1}(V_1), \dots, U_n = f^{-1}(V_n)\};$$

allora $\{V_1, \dots, V_n\}$ è un sottoricoprimento finito di \mathcal{V} ; infatti, preso $y \in f(X)$, esiste x tale che $y = f(x)$ e $x \in U_k$ per qualche k . Ne segue che $y \in V_k$, poiché $f(f^{-1}(V_k)) \subset V_k$. \square

Corollario 3.7. Siano τ e σ due topologie su X tali che $\tau \succeq \sigma$.

Se (X, τ) è compatto allora (X, σ) è compatto (equivalentemente se (X, σ) non è compatto allora (X, τ) non è compatto).

Dimostrazione. Basta considerare l'applicazione identica $\text{Id} : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$, che è continua in quanto $\tau \succeq \sigma$. \square

Corollario 3.8.

1. Il quoziente di uno spazio compatto è compatto.

2. La compattezza è una proprietà invariante per omeomorfismi.

Teorema 3.9. *L'intervallo $I = [0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea è uno spazio topologico compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$. Denotiamo con S l'insieme dei $k \in [0, 1]$ tali che esiste un sottoricoprimento finito di \mathcal{U} che copre $[0, k]$. Tale insieme è non vuoto perché $0 \in S$.

Sia $M := \sup S$; sia U_M un aperto del ricoprimento che contiene M . Tale aperto contiene un intervallo $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$, per un opportuno $\varepsilon > 0$. Poiché $M = \sup S$ si ha che esiste un elemento k_ε di S contenuto in $(M - \varepsilon, M)$.

Lo spazio topologico $[0, k_\varepsilon]$ è coperto da un numero finito di aperti di \mathcal{U} . Aggiungendo U_M a tali aperti, si prova che anche $\min\{1, M + \frac{\varepsilon}{2}\} \in S$. Essendo $M = \sup S$ segue necessariamente che $M = 1$, quindi esiste un sottoricoprimento finito di \mathcal{U} che copre $[0, 1]$. \square

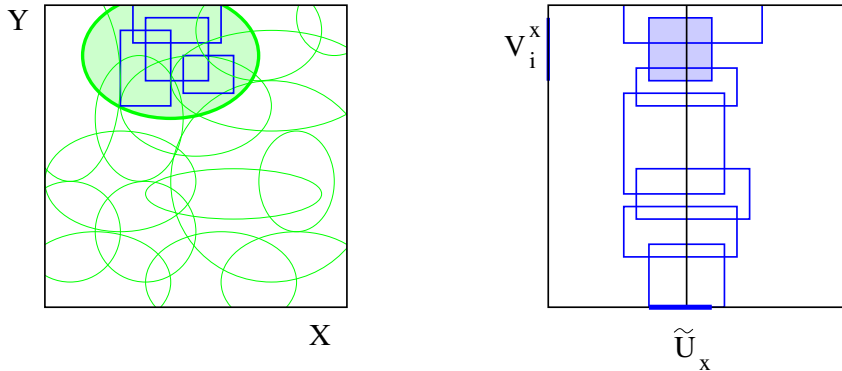
Corollario 3.10.

1. Gli intervalli chiusi $[a, b]$ sono compatti in quanto omeomorfi ad I .
2. S^1 è compatto in quanto quoziente di I .

Teorema 3.11. *X, Y sono spazi topologici compatti se e solo se $X \times Y$ è uno spazio topologico compatto.*

Dimostrazione. \Leftarrow) Segue dal fatto che le proiezioni sui fattori sono applicazioni continue.

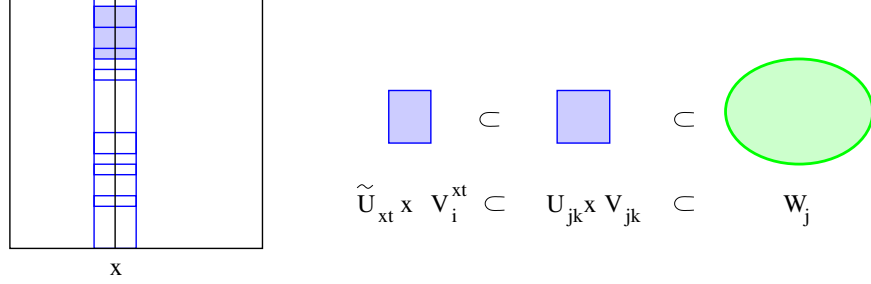
\Rightarrow) Sia $\mathcal{U} = \{W_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$; ricordando che ogni W_j è unione di aperti elementari $U_{jk} \times V_{jk}$; otteniamo così un nuovo ricoprimento aperto di $X \times Y$, $\mathcal{V} = \{U_{jk} \times V_{jk}\}_{j \in J, k \in K}$.



Per ogni $x \in X$ il sottospazio $\{x\} \times Y \simeq Y$ è compatto, quindi esiste un sottoricoprimento finito di \mathcal{V} che copre $\{x\} \times Y$; denotiamo gli aperti di tale sottoricoprimento con $\{U_i^x \times V_i^x\}_{i=1, \dots, n}$, ricordando che U_i^x, V_i^x sono particolari U_{jk} e V_{jk} .

3. PROPRIETÀ TOPOLOGICHE

Sia $\tilde{U}_x = \bigcap_{i=1}^n U_i^x$; al variare di $x \in X$ gli \tilde{U}_x costituiscono un ricoprimento aperto di X , dal quale, per la compattezza di X è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $\{\tilde{U}_{x_t}\}_{t=1,\dots,m}$.



La famiglia $\{\tilde{U}_{x_t} \times V_i^{x_t}\}_{i=1,\dots,n, t=1,\dots,m}$ è un ricoprimento finito di $X \times Y$; per un'opportuna scelta di j e di k si ha che

$$\tilde{U}_{x_t} \times V_i^{x_t} \subset U_{jk} \times V_{jk} \subset W_j,$$

e quindi anche dal ricoprimento iniziale si può estrarre un sottoricoprimento finito. \square

Corollario 3.12. I^n è compatto, \mathbb{R}^n non è compatto.

Proposizione 3.13. (Chiuso di Compatto) Un sottoinsieme chiuso C di uno spazio compatto X è uno spazio compatto (con la topologia indotta).

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di C ; poiché C ha la topologia indotta, $U_i = V_i \cap C$, con V_i aperto di X .

$\mathcal{V} = \{\{V_i\}_{i \in I}, C^c\}$ è un ricoprimento aperto di X ; poiché X è compatto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $\{V_1, \dots, V_n, C^c\}$; allora $\{U_1, \dots, U_n\}$ è un sottoricoprimento finito di \mathcal{U} . \square

Corollario 3.14.

1. Sia C chiuso e limitato in \mathbb{R}^n con la topologia euclidea. Allora C è compatto.
2. S^n, D^n sono compatti. \mathbb{RP}^n è compatto.

Dimostrazione. Se C è limitato, allora, per un $a \in \mathbb{R}$ opportuno C è contenuto in $[-a, a]^n$, che è compatto perché omeomorfo a I^n , e si può dunque applicare la Proposizione (??).

Gli spazi S^n e D^n sono quindi compatti perché chiusi e limitati di \mathbb{R}^{n+1} e di \mathbb{R}^n , e \mathbb{RP}^n è compatto in quanto quoziente di S^n . \square

Esercizio 3.15. Sia \mathbb{R} la retta reale con la topologia euclidea, e sia $A = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti con la topologia banale. Sia infine $Y = \mathbb{R} \times A$ lo spazio prodotto.

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di Y :

$$Z = ((-1, 1) \times \{a\}) \cup ([-2, 2] \times \{b\}),$$

$$W = ((-1, 1) \times \{a\}) \cup ((-2, 2) \times \{b\}),$$

e si stabilisca se Z e W sono compatti.

Esercizio 3.16. Sia $I = [0, 1]$ l'intervallo unitario e sia $X = I \cup \{*\}$; si consideri la topologia τ su X la cui base è formata dai sottoinsiemi $U \subset I$ tali che U è un aperto della topologia indotta su I dalla topologia euclidea e dai sottoinsiemi V del tipo $(a, 1) \cup \{*\}$. Si stabilisca se (X, τ) è uno spazio topologico compatto.

Esistono altre nozioni di compattezza, oltre a quella da noi considerata, detta anche *compattezza per ricoprimenti*; particolarmente importante è la *compattezza per successioni*.

Definizione 3.17. Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *convergente* al punto $x \in X$ se per ogni intorno U di x esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$.

Definizione 3.18. Uno spazio topologico X si dice *compatto per successioni* se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

Definizione 3.19. Uno spazio topologico X verifica il *Primo assioma di numerabilità* se per ogni punto $x \in X$ esiste una famiglia di intorni $\{U_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la proprietà che per ogni intorno V di x esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $U_{\bar{n}}^x \subset V$. Una tale famiglia è detta *sistema fondamentale di intorni per il punto x* .

Definizione 3.20. Uno spazio topologico X verifica il *Secondo assioma di numerabilità* se ammette una base numerabile per la topologia.

Esercizio 3.21. Mostrare che se uno spazio topologico verifica il secondo assioma di numerabilità, allora verifica anche il primo.

Le due nozioni di compattezza non sono equivalenti: abbiamo che se X è compatto per ricoprimenti e verifica il primo assioma di numerabilità allora X è compatto per successioni, mentre il viceversa è vero se X verifica il secondo assioma di numerabilità.

Un esempio di spazio che verifica i due assiomi è dato da \mathbb{R}^n : preso $x \in \mathbb{R}^n$ un sistema fondamentale di intorni di x è dato dai dischi aperti centrati in x di raggio $1/n$, mentre una base numerabile è data dai dischi aperti a centro razionale e raggio razionale.

Per un approfondimento a riguardo delle diverse nozioni di compattezza si veda l'Appendice.

3.2 SPAZI DI HAUSDORFF

Definizione 3.22. Uno spazio topologico X si dice *di Hausdorff* (o T_2) se per ogni coppia di punti diversi $x, y \in X$ esistono intorni $U_x \ni x, U_y \ni y$ t.c. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Esempi 3.23.

- a) Uno spazio topologico con la topologia discreta è di Hausdorff.

Dati $x \neq y$ è sufficiente prendere $U_x = x$ e $U_y = y$.

- b) $(\mathbb{R}^n, \tau_\varepsilon)$ è di Hausdorff.

Dati $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, denotata con δ la distanza dei due punti $\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ basta prendere $U_{\mathbf{x}} = B_{\delta/3}(\mathbf{x})$ e $U_{\mathbf{y}} = B_{\delta/3}(\mathbf{y})$.

- c) Analogamente ogni spazio metrico, con la topologia indotta dalla metrica, è uno spazio di Hausdorff.

- d) Uno spazio topologico con almeno due punti in cui non esistono due aperti disgiunti non è evidentemente di Hausdorff.

Di conseguenza uno spazio topologico con almeno due punti e la topologia grossolana, uno spazio infinito con la topologia cofinita, \mathbb{R}^n con la topologia dei dischi e \mathbb{R} con la topologia delle semirette non sono spazi di Hausdorff.

- e) Un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

Sia $A \subset X$ il sottospazio; dati $x \neq y$ in A esistono in X due intorni disgiunti $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$ tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$. Gli insiemi $U_x \cap A$ e $U_y \cap A$ sono due intorni aperti e disgiunti di x e y in A .

Esercizio 3.24. Stabilire se sono o meno di Hausdorff gli spazi topologici g) e h) degli esempi (??) e lo spazio topologico dell'esempio (??).

Proposizione 3.25. (Compatto di Hausdorff) Un sottoinsieme compatto K di uno spazio di Hausdorff X è un sottoinsieme chiuso.

Dimostrazione. Dimostriamo che K^c è aperto. Sia x un punto di K^c ; per ogni punto y di K esistono un intorno U_y di x e un intorno V_y di y disgiunti.

Al variare di y in K gli aperti V_y costituiscono un ricoprimento aperto di K , che è compatto, quindi esiste un sottoricoprimento finito V_{y_1}, \dots, V_{y_n} .

Sia $U = \bigcap_{i=1, \dots, n} U_{y_i}$; U è un aperto e $U \cap K = \emptyset$, quindi x è contenuto in un aperto contenuto in K^c , ed è quindi un punto interno a K^c . \square

Corollario 3.26. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e biunivoca. Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora f è un omeomorfismo.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che f^{-1} è continua, e ciò è equivalente a mostrare che f è un'applicazione chiusa.

Sia dunque C un chiuso di X ; C è chiuso in X compatto, e quindi C è compatto, per la proposizione (??).

L'applicazione f è continua, e quindi $f(C)$ è compatto in Y . Poiché Y è uno spazio di Hausdorff, per la proposizione (??), $f(C)$ è chiuso. \square

Corollario 3.27. (Confronta esempi (??) a), b), c)).

X	A	X/A
I	$0, 1$	S^1
I	$0, 1/2, 1$	$S^1 \vee S^1$
$S^1 \times I$	$S^1 \times \{1\}$	D^2

Utilizzando la proposizione sui sottospazi compatti di spazi di Hausdorff siamo ora in grado di dare la caratterizzazione dei sottospazi compatti di \mathbb{R}^n .

Teorema 3.28. Un sottospazio K di \mathbb{R}^n con la topologia euclidea è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che i sottoinsiemi chiusi e limitati di \mathbb{R}^n sono compatti (Corollario (??)).

La proposizione (??) ci dice che un sottospazio compatto di \mathbb{R}^n è chiuso, in quanto \mathbb{R}^n è di Hausdorff.

Resta dunque da mostrare che un sottospazio K , compatto di \mathbb{R}^n è limitato. Consideriamo il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_n = B_0(n) \cap K\}_{n \in \mathbb{N}}$ di K costituito dai dischi aperti di centro l'origine e di raggio naturale.

poiché K è compatto, tale ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_m}\}$; sia M il massimo dei raggi di U_{i_1}, \dots, U_{i_m} .

Il sottospazio K è quindi contenuto in $B_0(M)$, ed è pertanto limitato. \square

Corollario 3.29. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua definita su uno spazio compatto X ; allora f ammette massimo e minimo.

Dimostrazione. Poiché f è continua, $f(X)$ è compatto in \mathbb{R} , e quindi chiuso e limitato. Essendo $f(X)$ limitato, esistono $M = \sup(f(X))$ e $m = \inf(f(X))$, ed essendo $f(X)$ chiuso M ed m sono massimo e minimo. \square

Osservazione 3.30. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, con X spazio di Hausdorff; $f(X)$ non è necessariamente uno spazio di Hausdorff. Ad esempio siano $(X, A) = (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon, (-1, 1))$ (esempio (??) b)) e sia $f : X \rightarrow X/A$ la proiezione sul quoziente.

Abbiamo già osservato che ogni aperto del quoziente che contiene il punto $f(-1)$, essendo immagine di un aperto che contiene A , contiene anche $f(A)$. Quindi X/A non è uno spazio di Hausdorff.

Diamo ora una condizione sufficiente perché un quoziente di uno spazio di Hausdorff sia uno spazio di Hausdorff:

Proposizione 3.31. *Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff, sia X/\sim un suo quoziente e $p : X \rightarrow X/\sim$ la proiezione sul quoziente. Se p è un'applicazione chiusa, allora X/\sim è uno spazio (compatto) di Hausdorff.*

Osservazione 3.32. Se X è uno spazio di Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo allora Y è uno spazio di Hausdorff.

Dimostrazione. Siano y_1 e y_2 due punti distinti di Y e siano $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Poiché X è uno spazio di Hausdorff esistono intorni aperti disgiunti $U_1 \ni x_1$ e $U_2 \ni x_2$. Siano $V_1 = f(U_1)$ e $V_2 = f(U_2)$; V_1 e V_2 sono aperti e disgiunti perché f è un omeomorfismo, e sono gli intorni cercati di y_1 e y_2 . \square

Proposizione 3.33. *X, Y sono spazi topologici di Hausdorff se e solo se $X \times Y$ è uno spazio topologico di Hausdorff.*

Dimostrazione. \Leftarrow) Lo spazio $X \times \{y\}$ è di Hausdorff perché sottospazio di uno spazio di Hausdorff, e quindi X è di Hausdorff perché omeomorfo a $X \times \{y\}$.
 \Rightarrow) Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti di $X \times Y$; se $x_1 \neq x_2$ allora esistono in X intorni disgiunti $U_1 \ni x_1$ e $U_2 \ni x_2$, quindi $U_1 \times Y$ e $U_2 \times Y$ sono intorni disgiunti di (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ; se $x_1 = x_2$ si deve necessariamente avere $y_1 \neq y_2$, e si ripete lo stesso ragionamento. \square

3.3 SPAZI CONNESSI

Definizione 3.34. Uno spazio topologico X è *connesso* se e solo se non esistono due aperti disgiunti e non vuoti $A, B \subset X$ tali che $A \cup B = X$.

Osservazione 3.35. X è connesso \iff i soli sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi di X sono \emptyset, X .

Dimostrazione. Esercizio.

Esempi 3.36.

- a) Uno spazio topologico X con la topologia discreta è connesso \iff ha un solo elemento.

Sia $x \in X$; poiché X ha la topologia discreta, $\{x\}$ e $\{x\}^c$ sono aperti disgiunti la cui unione è X , quindi X è connesso se e solo se $\{x\}^c = \emptyset$.

Viceversa, se X ha un solo elemento x , allora gli unici aperti sono \emptyset e X , e quindi X è connesso.

- b) Uno spazio topologico in cui non esistono due aperti disgiunti è evidentemente connesso.

Di conseguenza uno spazio topologico con la topologia grossolana, uno spazio infinito con la topologia cofinita, \mathbb{R}^n con la topologia dei dischi e \mathbb{R} con la topologia delle semirette sono spazi connessi.

- c) \mathbb{Q} con la topologia indotta da $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ non è connesso.

Infatti possiamo scrivere $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty))$.

Esercizio 3.37. Stabilire se sono o meno connessi gli spazi topologici g) e h) degli esempi (??).

Proposizione 3.38. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, con X connesso. Allora $f(X)$ è connesso.

Dimostrazione. Sia $U \subset f(X)$ un sottoinsieme di $f(X)$ che sia aperto, chiuso e non vuoto; poiché $f(X)$ ha la topologia indotta da quella di Y possiamo scrivere $U = A \cap f(X)$ e $U = C \cap f(X)$ per opportuni sottoinsiemi A aperto di Y e C chiuso di Y .

Per tali insiemi si avrà $f^{-1}(A) = f^{-1}(C)$ e quindi, essendo f un'applicazione continua, $W = f^{-1}(A) = f^{-1}(C)$ è aperto, chiuso e non vuoto in X , e quindi, essendo X connesso $W = X$ e pertanto $U = f(X)$. \square

Corollario 3.39.

1. La connessione è una proprietà invariante per omeomorfismi.
2. I quozienti di uno spazio topologico connesso sono spazi topologici connessi.

Teorema 3.40. L'intervallo $[0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea è connesso.

Dimostrazione. Per assurdo, siano A e B aperti non vuoti e disgiunti di I . Supponiamo, senza perdita di generalità, che $0 \in A$ e consideriamo

$$m = \sup \{a \in A \mid a < b \forall b \in B\}.$$

I sottoinsiemi A e B sono anche chiusi, quindi $m \in A$; ma, per ogni $\varepsilon > 0$, in $(m - \varepsilon, m + \varepsilon)$ cadono punti di B , altrimenti m non potrebbe essere l'estremo superiore. Segue che $m \in \overline{B}$, e quindi $m \in B$, giungendo all'assurdo $m \in A \cap B = \emptyset$. \square

Corollario 3.41. Un sottospazio X di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ è connesso se e solo se, comunque presi due punti a, b di X con $a < b$ si ha che $[a, b] \subset X$.

Dimostrazione. La condizione è chiaramente necessaria: se esistessero a, b con $a < b$ che non verificano la condizione, basterebbe prendere $c \in [a, b] \cap X^c$ e considerare $A = (-\infty, c) \cap X$ e $B = (c, +\infty) \cap X$. Tali sottoinsiemi sarebbero aperti di X non vuoti e disgiunti.

Supponiamo ora che X verifichi la proprietà nell'enunciato e supponiamo, per assurdo, che non sia connesso. Siano A e B due aperti di X che lo sconnettono, e siano $a \in A, b \in B$. Allora $A \cap [a, b]$ e $B \cap [a, b]$ sono aperti, disgiunti e non vuoti in $[a, b]$, ma $[a, b]$ è connesso, in quanto omeomorfo a I . \square

Corollario 3.42. *Tutti e soli i connessi di $(\mathbb{R}, \tau_\epsilon)$ sono i punti, gli intervalli, le semirette e \mathbb{R} stesso.*

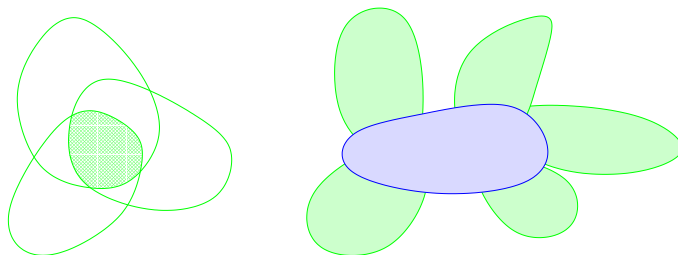
Esempio 3.43. Possiamo ora mostrare che l'intervallo $[0, 1]$, con la topologia indotta da quella euclidea, non è omeomorfo all'intervallo $(0, 1)$, con la topologia indotta da quella euclidea.

Per assurdo, supponiamo che $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ sia un omeomorfismo; allora la restrizione di f a $[0, 1] \setminus \{0\}$ sarebbe un omeomorfismo tra $(0, 1]$ e $(0, 1) \setminus \{f(0)\}$, ma $(0, 1]$ è connesso, mentre $(0, 1) \setminus \{f(0)\}$ non lo è.

L'unione di due insiemi connessi non è necessariamente connessa (si prendano due intervalli aperti e disgiunti in \mathbb{R} con la topologia euclidea); la prossima proposizione fornisce delle condizioni sufficienti affinché l'unione di connessi sia connessa:

Proposizione 3.44. *Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X , con la topologia indotta, tale che Y_i è connesso per ogni $i \in I$.*

1. *Se $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ allora $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.*
2. *Se esiste $j \in I$ tale che $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset \forall i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.*



Dimostrazione. Mostriamo la parte 1). Sia $U \subset Y$ un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto; tale sottoinsieme deve avere intersezione non vuota con Y_k per qualche $k \in I$, e quindi $U \cap Y_k$ è non vuoto, aperto e chiuso in Y_k . Poiché Y_k è connesso si ha $U \cap Y_k = Y_k$.

Essendo l'intersezione degli Y_i non vuota, si ha che $U \cap Y_k \neq \emptyset$ per ogni $k \in I$, e si ripete la dimostrazione precedente.

Per provare la seconda parte dell'asserto consideriamo i sottoinsiemi $Z_i = Y_i \cup$

Y_j , che sono connessi per il punto 1).

Possiamo scrivere $Y = \bigcup_{i \in I} Z_i$ e, poiché $\bigcap Z_i \supseteq Y_j \neq \emptyset$ è possibile applicare la parte 1) e ottenere la tesi. \square

Corollario 3.45. D^n è connesso $\forall n \geq 0$; S^n e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sono connessi per $n \geq 1$.

Dimostrazione. Il disco può essere visto come unione dei suoi diametri, omeomorfi ad intervalli di \mathbb{R} e quindi connessi, la sfera S^n come unione di due emisferi, omeomorfi a D^n e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ come unione di S^n e delle rette per l'origine. Si applica quindi la proposizione sull'unione di connessi. \square

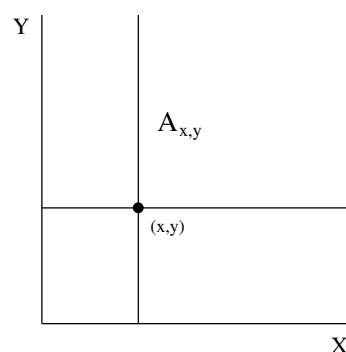
Corollario 3.46. $\mathbb{R}P^n$ è connesso.

Proposizione 3.47. X, Y sono connessi $\iff X \times Y$ è connesso.

Dimostrazione. \Leftarrow) Segue dal fatto che le proiezioni sono applicazioni continue.

\Rightarrow) Sia $A_{x,y} = (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$. I sottospazi $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ sono connessi in quanto omeomorfi a X e Y rispettivamente e la loro intersezione non è vuota. Quindi $A_{x,y}$ è connesso per la parte 1) della Proposizione (??).

Possiamo vedere lo spazio prodotto come unione di sottospazi di questo tipo a intersezione non vuota: fissato $\bar{y} \in Y$ si ha $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_{x,\bar{y}}$; $X \times Y$ è dunque connesso, ancora per la parte 1) della proposizione precedente. \square



Corollario 3.48. \mathbb{R}^n e I^n sono spazi topologici connessi, i quozienti di I^2 sono connessi.

Un utile strumento per stabilire se un sottoinsieme è connesso è dato dalla seguente

Proposizione 3.49. (Chiusura di connessi) Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$ un sottoinsieme connesso e Y un sottoinsieme di X tale che $A \subset Y \subset \bar{A}$. Allora Y è connesso.

Dimostrazione. Sia $U \subset Y$ un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto e sia $y \in U$ un suo punto. Tale punto appartiene ad \bar{A} ed U è un suo intorno, quindi $U \cap A \neq \emptyset$.

L'insieme $U \cap A$ è dunque non vuoto, aperto e chiuso in A ; quindi, essendo A connesso, $U \cap A = A$, cioè $A \subset U$.

Il complementare di U in Y è aperto e chiuso; se fosse non vuoto, con ragionamento analogo al precedente si potrebbe provare che $A \subset U^c$, un'evidente contraddizione. Segue quindi che $U^c = \emptyset$ e $U = Y$. \square

Definizione 3.50. Sia X uno spazio topologico e $x, y \in X$; diciamo che x è *connesso ad* y se esiste un sottospazio connesso $D \subset X$ che contiene x e y . Questa relazione è una relazione di equivalenza, e le classi di equivalenza sono dette *componenti connesse* di X .

Esercizio 3.51. Nel piano \mathbb{R}^2 , dotato della topologia euclidea, si considerino i seguenti sottospazi: $D_1 = \{(x, y) | (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$, $\Gamma_1 = \partial D_1$, $\Gamma_2 = \partial D_2$, $A = (-1, 0)$. Siano $X = D_1 \cup D_2$, $Y = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e sia $X^* = X/Y$; si denoti con $\pi : X \rightarrow X^*$ la proiezione sul quoziente. Si stabilisca se X^* e $X^* \setminus \pi(A)$ sono spazi connessi.

Esercizio 3.52. Sia X la retta reale con la topologia euclidea, sia Y la retta reale con la topologia dei dischi e sia $Z = X \times Y$ con la topologia prodotto. In Z si considerino i seguenti sottospazi con la topologia indotta:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in Z \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \\ D_2 &= \{(x, y) \in Z \mid x^2 + (y-2)^2 < 1\} \\ D_3 &= \{(x, y) \in Z \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

Si stabilisca se qualcuno dei sottospazi $U_1 = D_1 \cup D_2$, $U_2 = D_1 \cup D_3$, $U_3 = D_2 \cup D_3$ è connesso.

3.4 SPAZI CONNESSI PER ARCHI

Definizione 3.53. Sia X uno spazio topologico. Un *arco* o *cammino* in X è un'applicazione continua $f : I \rightarrow X$; $x_0 = f(0)$ è detto *punto iniziale* del cammino, $x_1 = f(1)$ è detto *punto finale*. Se $x_0 = x_1$ allora il cammino è detto *cammino chiuso* o *cappio*.

Definizione 3.54. Il *cammino costante* di punto base x_0 è l'applicazione costante $\varepsilon_{x_0} : I \rightarrow x_0 \in X$. Dato un cammino $f : I \rightarrow X$ il *cammino inverso* $\bar{f} : I \rightarrow X$ è il cammino $\bar{f}(t) = f(1-t)$.

Definizione 3.55. Dati due cammini f, g tali che $f(1) = g(0)$, è possibile definire il *cammino prodotto*:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, 1/2] \\ g(2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

l'applicazione $f * g$ è continua per il seguente

Lemma 3.56. (*Lemma d'incollamento*) Sia X uno spazio topologico e A, B due sottoinsiemi chiusi di X tali che $X = A \cup B$; siano $f : A \rightarrow Z$ e $g : B \rightarrow Z$ due applicazioni continue tali che $f(x) = g(x)$ se $x \in A \cap B$; allora l'applicazione $h : X \rightarrow Z$ definita ponendo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

è continua.

Dimostrazione. Esercizio.

Definizione 3.57. Uno spazio topologico X è *connesso per archi* se $\forall x, y \in X$ esiste un cammino che ha x come punto iniziale e y come punto finale.

Esempi 3.58.

a) $(\mathbb{R}^n, \tau_\varepsilon)$ è connesso per archi.

Infatti, se x e y sono due punti di \mathbb{R}^n , il cammino $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definito ponendo $\alpha(t) = (1 - t)x + ty$ congiunge x e y .

b) Un aperto convesso di \mathbb{R}^n è connesso per archi. In particolare I^n e D^n sono connessi per archi.

Esercizio 3.59. Stabilire se sono o meno connessi per archi gli spazi topologici $g)$ e $h)$ degli esempi (??).

Proposizione 3.60. Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n ; allora A è connesso per archi.

Dimostrazione. Sia x_0 un punto di A , e consideriamo il sottoinsieme $W = \{x \in A \mid \exists \text{ arco che congiunge } x_0 \text{ e } x\}$.

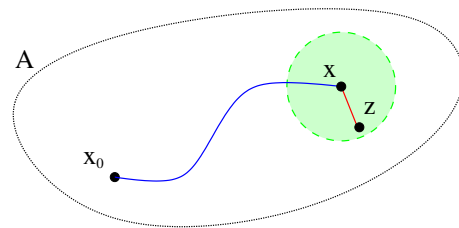
Vogliamo dimostrare che W è aperto; a tal fine mostreremo che ogni suo punto è punto interno.

Sia $x \in W$ e sia $\alpha : I \rightarrow A$ un cammino che congiunge x_0 a x ; poiché A è aperto x è un punto interno di A , perciò A contiene un disco aperto $B_r(x)$, centrato in x e di raggio opportuno.

Ogni punto z in $B_r(x)$ è contenuto in W , perché può essere congiunto a x dal cammino $\beta : I \rightarrow A$ definito ponendo

$$\beta(t) = (1 - t)z + tx,$$

e quindi può essere congiunto a x_0 per mezzo del cammino prodotto $\beta * \bar{\alpha}$. Allo stesso modo si mostra che il complementare di W in A è aperto.



Per concludere basta ora osservare che $W \neq \emptyset$ poiché $x_0 \in W$. □

Corollario 3.61. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è connesso per archi.

Proposizione 3.62. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, e X sia connesso per archi. Allora $f(X)$ è connesso per archi.

Dimostrazione. Siano x, y due punti di $f(X)$, e siano \tilde{x}, \tilde{y} due controimmagini di x e di y ; poiché X è connesso per archi esiste un arco $\alpha : I \rightarrow X$ che congiunge \tilde{x} e \tilde{y} . L'arco $\beta : I \rightarrow Y$ definito ponendo $\beta(t) = f(\alpha(t))$ congiunge x e y . \square

Corollario 3.63.

1. I quozienti di connessi per archi sono connessi per archi.
2. La connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.

Corollario 3.64. $\mathbb{R}P^n$ è connesso per archi; i quozienti di I^2 sono connessi per archi, S^n è connesso per archi in quanto immagine di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tramite l'applicazione continua $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ che manda x in $\frac{x}{\|x\|}$.

Corollario 3.65. Siano τ e σ due topologie su X tali che $\tau \succeq \sigma$. Se (X, τ) è connesso (per archi) allora (X, σ) è connesso (per archi).
In particolare \mathbb{R}^n con la topologia dei dischi e \mathbb{R} con la topologia delle semirette sono connessi per archi.

Dimostrazione. Basta osservare che $\text{Id} : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ è continua. \square

Proposizione 3.66. X, Y sono connessi per archi $\iff X \times Y$ è connesso per archi.

Dimostrazione. \Leftarrow) Segue dal fatto che le proiezioni sono applicazioni continue e dalla Proposizione (??).

\Rightarrow) Siano (x_0, y_0) e (x_1, y_1) due punti di $X \times Y$.

Il sottospazio $X \times \{y_0\}$ è connesso per archi perché omeomorfo a X ; consideriamo un cammino $\alpha : I \rightarrow X \times \{y_0\}$ che unisce (x_0, y_0) ad (x_1, y_0) .

Il sottospazio $\{x_1\} \times Y$ è connesso per archi perché omeomorfo a Y ; consideriamo un cammino $\beta : I \rightarrow \{x_1\} \times Y$ che unisce (x_1, y_0) ad (x_1, y_1) .

Siano $i : X \times \{y_0\} \rightarrow X \times Y$ e $j : \{x_1\} \times Y \rightarrow X \times Y$ le inclusioni; l'applicazione $\gamma : I \rightarrow X \times Y$ definita ponendo $\gamma = (i \circ \alpha) * (j \circ \beta)$ è il cammino cercato che unisce (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . \square

Proposizione 3.67. Se X è connesso per archi, allora è anche connesso.

Dimostrazione. Sia $x \in X$ un punto; per ogni $y \in X$ esiste un arco $\gamma_y : I \rightarrow X$ che congiunge x a y ; sia $\Gamma_y = \gamma_y([0, 1])$.

Lo spazio X si può scrivere come unione di connessi a intersezione non vuota $X = \bigcup_{y \in X} \Gamma_y$; infatti Γ_y è connesso in quanto immagine del connesso I tramite l'applicazione continua γ_y , e $\bigcap_{y \in Y} \Gamma_y \neq \emptyset$ poiché $x \in \bigcap_{y \in Y} \Gamma_y$.

Si applica quindi la proposizione (??). \square

Osservazione 3.68. Non vale il viceversa: in \mathbb{R}^2 consideriamo il sottoinsieme $A = \{(0, 1)\}$ (la pulce) e il sottoinsieme $B = \{(I \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times I\}$ (il pettine). Si può dimostrare che il sottoinsieme $A \cup B$ è connesso (si usa la proposizione sulla chiusura di connessi), ma non è connesso per archi.

Esercizio 3.69. *Sia I l'intervallo $[0, 1]$ con la topologia euclidea, e sia J l'intervallo $[0, 1]$ con la topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli $[0, k)$ con $0 < k \leq 1$. Sia $X = J \times I$ con la topologia prodotto. Dimostrare che $Z = \{0, 1\} \times I$ è connesso per archi.*

Capitolo 4

Superfici topologiche

4.1 VARIETÀ TOPOLOGICHE

Definizione 4.1. Uno spazio topologico X si dice *localmente euclideo* se ogni suo punto x ha un intorno aperto U omeomorfo a $\mathring{\mathbb{D}}^n$ (o, equivalentemente, a \mathbb{R}^n). Sia $\varphi : U \rightarrow \mathring{\mathbb{D}}^n$ l'omeomorfismo; la coppia (U, φ) è detta *carta locale*, U è detto *dominio* della carta locale.

Diamo senza dimostrazione il seguente:

Teorema 4.2. *Se x appartiene ai domini di due diverse carte locali, n non cambia. (Teorema di invarianza della dimensione).*

Proposizione 4.3. *Se X è connesso, allora n è lo stesso per tutti i punti, e viene detto dimensione di X .*

Dimostrazione. Sia $p_0 \in X$ un punto con un intorno aperto omeomorfo a $\mathring{\mathbb{D}}^n$, e consideriamo il sottoinsieme $W = \{p \in X \mid p \text{ ha un intorno omeomorfo a } \mathring{\mathbb{D}}^n\}$. Sia $q \in W$ e sia U un intorno di q omeomorfo a $\mathring{\mathbb{D}}^n$; ogni punto di U ha U come intorno, e quindi $U \subset W$ e W è aperto.

Analogamente, se $q \notin W$, allora q possiede un intorno V omeomorfo ad un disco aperto $\mathring{\mathbb{D}}^m$, con $m \neq n$, e lo stesso è vero per ogni punto di V , quindi $V \subset W^c$ e W^c è aperto. Poiché W è non vuoto, aperto e chiuso nel connesso X segue che $W = X$. \square

Definizione 4.4. Uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, localmente euclideo a base numerabile si dice *varietà topologica*.

Osservazione 4.5. Poiché una varietà topologica è connessa, la sua dimensione è ben definita.

Osservazione 4.6. E' necessario richiedere che una varietà topologica sia uno spazio di Hausdorff, in quanto tale condizione non è conseguenza dell'essere

localmente euclideo.

Si consideri lo spazio X ottenuto come prodotto di \mathbb{R} con la topologia euclidea e di uno spazio formato da due punti a, b con la topologia discreta, e sia Y il quoziente di X ottenuto identificando i punti (x, a) e (x, b) se $x > 0$.

Si può dimostrare (esercizio!) che Y è localmente euclideo, ma non di Hausdorff.

Esempio 4.7. Alcuni esempi di varietà topologiche

a) \mathbb{R}^n .

b) \mathbb{C}^n (è omeomorfo a \mathbb{R}^{2n}).

c) \mathbb{S}^n . La sfera di dimensione n è coperta da due aperti omeomorfi a \mathbb{R}^n : $U_\alpha = \mathbb{S}^n \setminus \{N = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ e $U_\beta = \mathbb{S}^n \setminus \{S = (0, 0, \dots, 0, -1)\}$ e \mathbf{x}_α e \mathbf{x}_β sono così definite

$$\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\mathbf{x}_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

d) Un aperto connesso di una varietà topologica è una varietà topologica.

e) Il toro è una varietà topologica.

Sia $L = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, e consideriamo il gruppo quoziente \mathbb{R}^2/L , con proiezione sul quoziente $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/L$. Due punti \mathbf{x} e \mathbf{y} di \mathbb{R}^2 hanno la stessa immagine se e solo se $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in L$.

Dotiamo \mathbb{R}^2/L della topologia quoziente; allora la proiezione π è un'applicazione aperta. Infatti

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\omega \in L} (\omega + U).$$

Ogni punto di \mathbb{R}^2 è equivalente modulo L ad un punto contenuto nel quadrato $Q := [0, 1] \times [0, 1]$. Due punti di Q non appartenenti al bordo individuano classi distinte, mentre i punti di ∂Q sono equivalenti se hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata. Ritroviamo così la rappresentazione del toro come quoziente del quadrato.

Sia ora $\varepsilon < \frac{1}{2}$, e, per ogni \mathbf{x} in \mathbb{R}^2 sia

$$B_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon\}.$$

Per ogni \mathbf{x} , in $B_{\mathbf{x}}$ non cadono due punti equivalenti, e perciò la restrizione $\pi|_{B_{\mathbf{x}}} : B_{\mathbf{x}} \rightarrow \pi(B_{\mathbf{x}})$ è un omeomorfismo.

Consideriamo l'insieme $\{(U_{\mathbf{x}}, \varphi_{\mathbf{x}})\}$, ove $U_{\mathbf{x}} = \pi(B_{\mathbf{x}})$ e $\varphi_{\mathbf{x}} = (\pi|_{B_{\mathbf{x}}})^{-1}$. Tale insieme costituisce una famiglia di carte locali i cui domini coprono il toro.

- f) In modo analogo all'esempio precedente si mostra che la bottiglia di Klein è una superficie topologica.
- g) \mathbb{RP}^n . Lo spazio proiettivo reale di dimensione n è coperto da $n + 1$ aperti U_i omeomorfi a \mathbb{R}^n .

$$U_i = \{p \in \mathbb{RP}^n \mid x_i(p) \neq 0\}$$

e $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ è definita ponendo

$$\mathbf{x}_i(x_0 : \cdots : x_i : \cdots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

- h) Il prodotto di varietà topologiche è una varietà topologica.

Proposizione 4.8. *Uno spazio topologico connesso e localmente euclideo è connesso per archi.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $p \in X$ e consideriamo il sottoinsieme $W = \{q \in X \mid \text{esiste un arco congiungente } p \text{ a } q\}$.

Sia U un intorno di q omeomorfo a $\mathring{\mathbf{D}}^n$ e sia $\varphi : U \rightarrow \mathring{\mathbf{D}}^n$ l'omeomorfismo; ogni punto r di U può essere congiunto a q usando il cammino ottenuto come immagine inversa via φ del segmento che congiunge $\varphi(r)$ a $\varphi(q)$, quindi $U \subset W$ e W è aperto.

Analogamente, se $q \notin W$, allora nessun punto di un intorno V omeomorfo ad un disco aperto $\mathring{\mathbf{D}}^n$ può essere congiunto a p ; pertanto W^c è aperto.

Poiché W è non vuoto, aperto e chiuso nel connesso X segue che $W = X$. \square

In dimensione 1 la classificazione delle varietà topologiche è molto semplice:

Teorema 4.9. *Una varietà topologica di dimensione 1 è omeomorfa a \mathbf{S}^1 o a \mathbb{R} .*

La situazione è molto più complessa già per $n = 2$, e questo è il caso che studieremo, aggiungendo l'ipotesi della compattezza. Da ora in poi ci occuperemo cioè solo di superfici topologiche compatte, cioè di varietà topologiche compatte di dimensione 2.

4.2 SOMMA CONNESSA

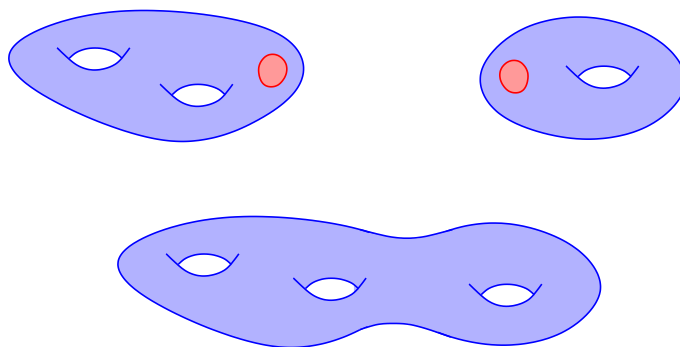
Siano S_1 e S_2 due superfici compatte; fissiamo due punti $x \in S_1, y \in S_2$ e due intorni U_x e U_y omeomorfi a \mathbf{D}^2 , e sia h un omeomorfismo $h : \partial U_x \rightarrow \partial U_y$.

Sia $Y = (S_1 \setminus \mathring{U}_x) \amalg (S_2 \setminus \mathring{U}_y)$ e sia \sim la relazione d'equivalenza le cui identificazioni non banali sono

$$x' \sim y' \iff x' \in \partial U_x, y' \in \partial U_y \quad \text{e} \quad y' = h(x')$$

Lo spazio topologico quoziente $S = Y/\sim$ è uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, localmente euclideo di dimensione 2 e compatto; S è una superficie compatta, detta *somma connessa* di S_1 ed S_2 :

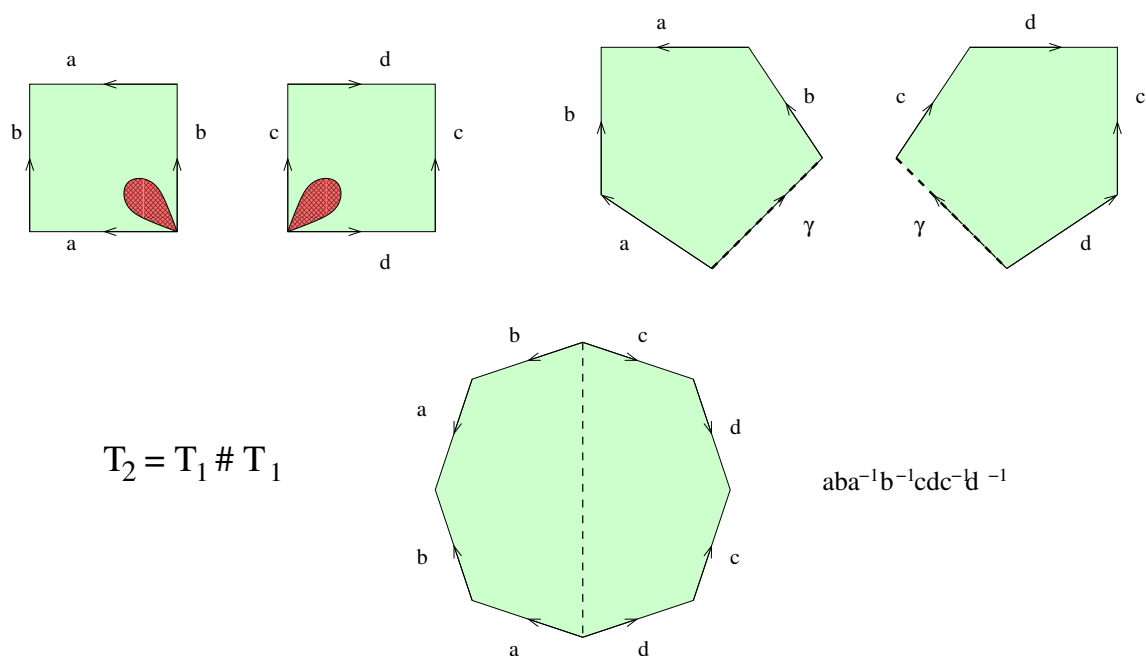
$$S = S_1 \# S_2.$$



Osservazione 4.10. Si può dimostrare che la somma connessa è definita a meno di classi di omeomorfismo, e che non dipende dal punto scelto.

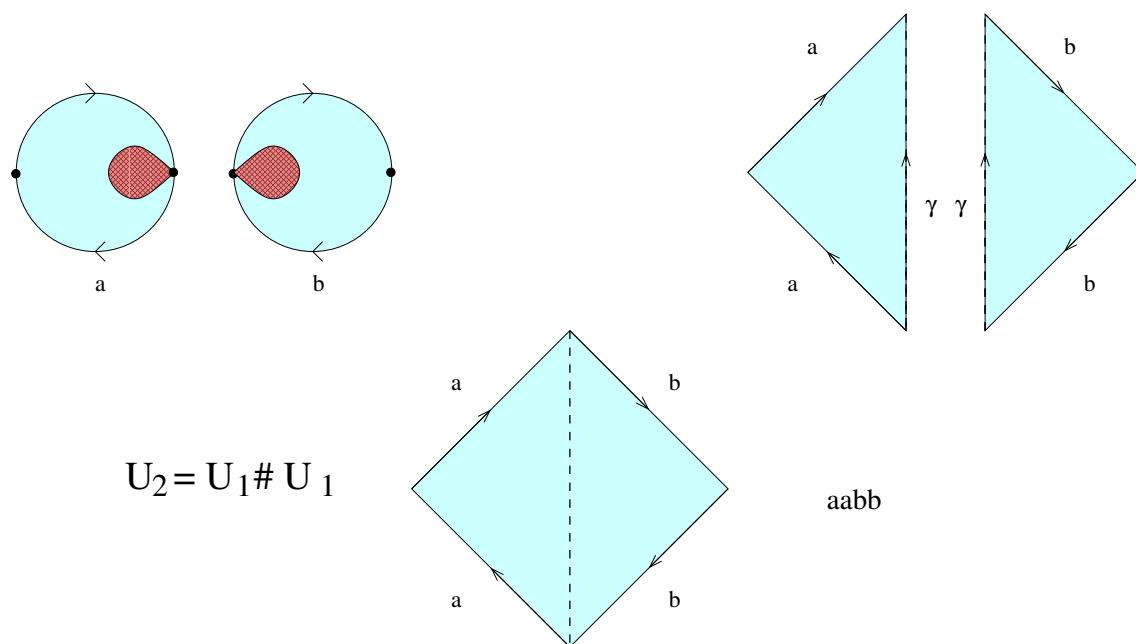
Definizione 4.11. Indichiamo con T_g la superficie che si ottiene facendo la somma connessa di g tori, e con T_0 la sfera.

Vediamo in figura come rappresentare la somma connessa di due tori come quoziente di un poligono.



Definizione 4.12. Indichiamo con U_h la superficie che si ottiene facendo la somma connessa di h piani proiettivi reali.

Vediamo in figura come rappresentare la somma connessa di due piani proiettivi reali come quoziente di un poligono.



4.3 TRIANGOLAZIONI

Definizione 4.13. Un *triangolo geometrico* in X è un'applicazione $\tau : T' \rightarrow X$ che sia un omeomorfismo sull'immagine, dove T' è un triangolo (non degenere) di \mathbb{R}^2 . Con abuso di linguaggio chiameremo triangolo geometrico anche l'immagine di τ .

Definizione 4.14. Una triangolazione di una superficie topologica X è una collezione di triangoli geometrici tale che ogni punto di X appartiene a un triangolo geometrico e nella quale le possibili intersezioni di due diversi triangoli geometrici sono

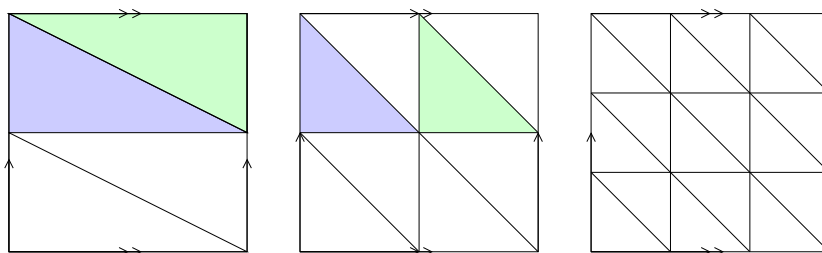
- L'insieme vuoto;
- Un punto, che sia vertice di entrambi;
- L'immagine omeomorfa di un segmento, che sia lato di entrambi.

Le superfici topologiche sono tutte triangolabili. La dimostrazione di questo fatto è al di là della portata di queste note.

Teorema 4.15. (*Teorema di Radò*) Ogni superficie è triangolabile e ogni superficie compatta ammette una triangolazione finita.

Osservazione 4.16. Per la validità del teorema precedente la condizione che una superficie sia uno spazio topologico a base numerabile è essenziale.

Esempio 4.17. Consideriamo il toro. Le prime due suddivisioni in figura non sono triangolazioni (ci sono triangoli con due lati in comune o con due vertici in comune senza il lato corrispondente in comune), la terza sì.

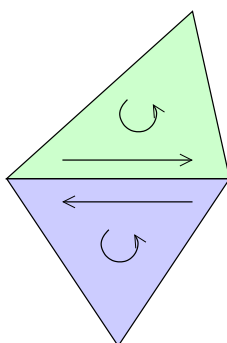


4.4 ORIENTABILITÀ

Una trattazione rigorosa del concetto di orientabilità per varietà topologiche è al di fuori della portata di queste note; utilizzeremo una definizione intuitiva applicabile solo al caso delle superfici, ed enunceremo diversi fatti senza dimostrarli.

Definizione 4.18. Un'orientazione di un triangolo geometrico τ è uno dei (due) versi di percorrenza dei suoi vertici. Un'orientazione di τ induce un'orientazione dei suoi spigoli.

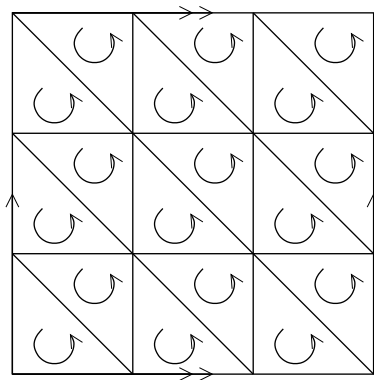
Due triangoli adiacenti di una triangolazione si dicono *coerentemente orientati* se le loro orientazioni inducono orientazioni opposte sullo spigolo comune.



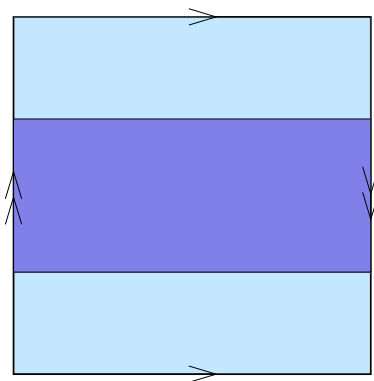
Definizione 4.19. Una superficie compatta X si dice *orientabile* se ammette una triangolazione (finita) coerentemente orientata.

Proposizione 4.20. *Sia X una superficie triangolabile. Allora X è orientabile se e solo se X non contiene nastri di Moebius.*

Esempio 4.21. Il toro è orientabile. La figura mostra una triangolazione coerentemente orientata.



Esempio 4.22. La bottiglia di Klein non è orientabile. infatti, come mostrato in figura, la bottiglia di Klein contiene un nastro di Moebius.



Osservazione 4.23. Si può verificare che la somma connessa S di due superfici S_1 e S_2 è orientabile se e solo se S_1 ed S_2 sono orientabili.

4.5 TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE - PRIMA PARTE

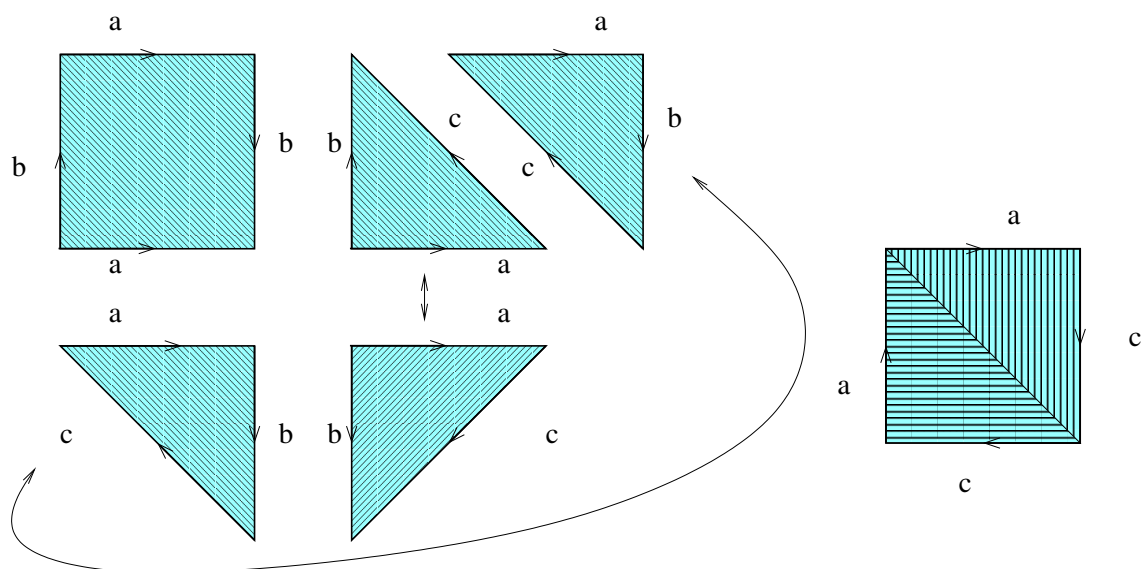
Siamo ora in grado di enunciare il teorema di classificazione delle superfici compatte:

Teorema 4.24. *(Teorema di classificazione) Sia S una superficie compatta.*

$$\begin{aligned} S \text{ orientabile} &\Rightarrow S \simeq T_g & g \geq 0. \\ S \text{ non orientabile} &\Rightarrow S \simeq U_h & h \geq 1. \end{aligned}$$

Inoltre se $g \neq g'$ allora $T_g \not\simeq T_{g'}$ e se $h \neq h'$ allora $U_h \not\simeq U_{h'}$.

Esempio 4.25. La bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma connessa di due piani proiettivi. Per mostrarlo si utilizza il procedimento di “taglia e incolla” come in figura.

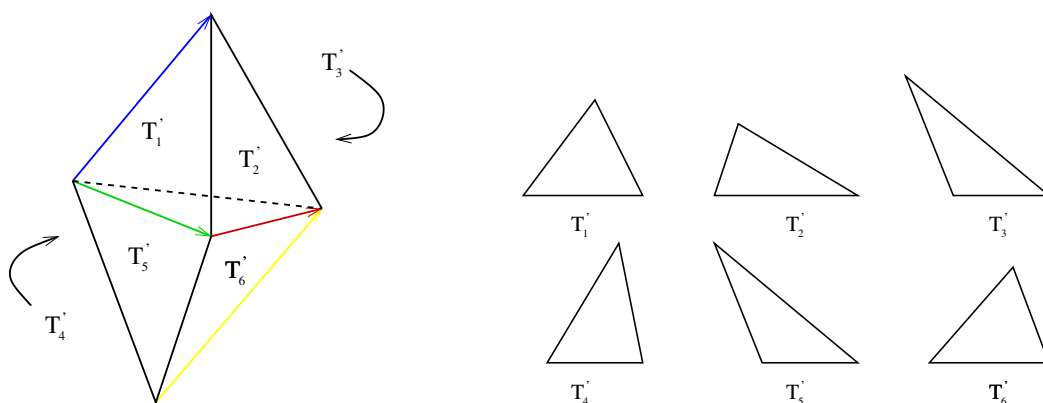


Dimostrazione della prima parte.

Passo 1: Ogni superficie compatta è quoziente di un poligono piano:

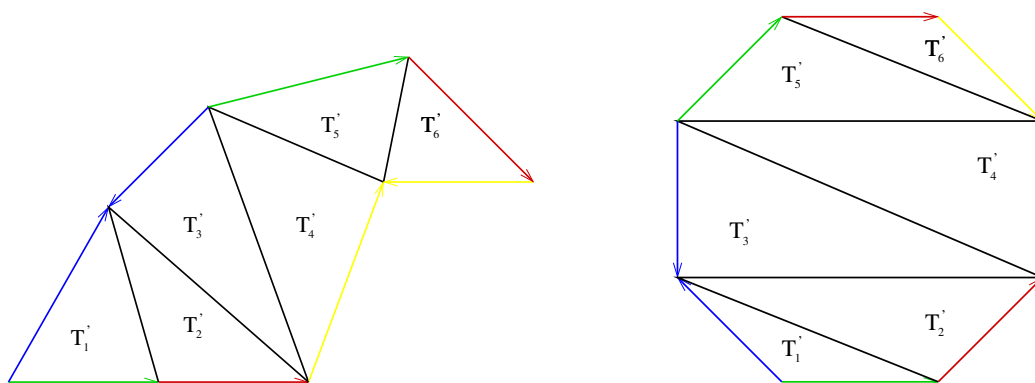
Lemma 4.26. Sia S una superficie compatta. Allora S è omeomorfa a un poligono di \mathbb{R}^2 con i lati identificati a coppie.

Dimostrazione. Una superficie compatta ammette una triangolazione finita. Siano T_1, \dots, T_n i triangoli di tale triangolazione, ordinati in modo che il triangolo T_i abbia uno spigolo in comune con uno dei triangoli precedenti T_1, T_2, \dots, T_{i-1} . Siano T'_1, \dots, T'_n i triangoli di \mathbb{R}^2 che vengono mappati su T_1, \dots, T_n ; senza perdita di generalità supponiamo che T'_1, \dots, T'_n siano a coppie disgiunti, e denotiamo con $T' = \bigcup_{i=1}^n T'_i$ la loro unione.



Introduciamo ora una relazione di equivalenza in T' in questo modo: T_2 ha uno spigolo in comune con T_1 , per cui incolliamo T'_1 e T'_2 lungo lo spigolo corrispondente; T_3 ha uno spigolo in comune con $T_1 \cup T_2$, quindi incolliamo T'_3 a $T'_1 \cup T'_2$ lungo lo spigolo corrispondente, e così via.

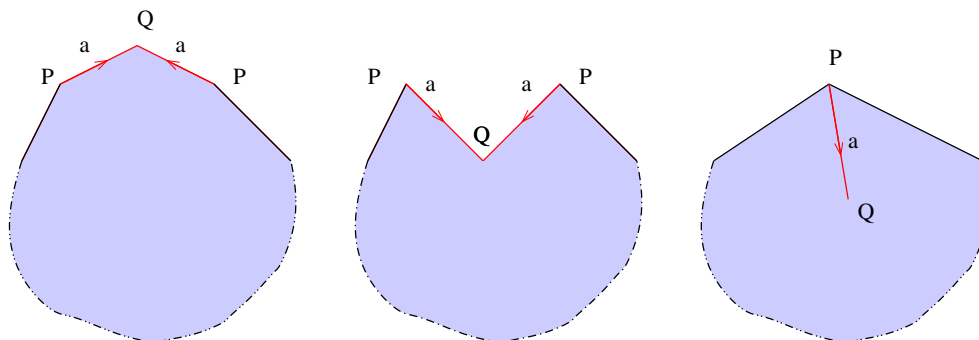
otteniamo così un poligono i cui lati al bordo devono essere identificati a coppie.



□

Passo 2: Eliminazione delle coppie adiacenti del primo tipo.

Abbiamo visto che una superficie compatta è omeomorfa ad un poligono di \mathbb{R}^2 con i lati identificati a coppie. Diremo che una coppia è del *primo tipo* se i lati che la compongono compaiono con l'orientazione opposta, del *secondo tipo* altrimenti.

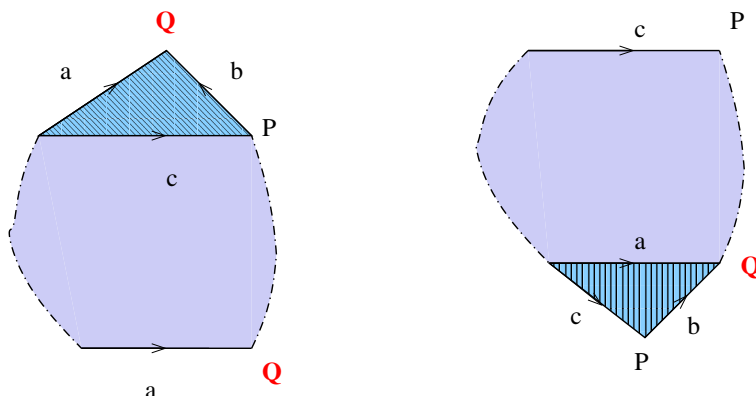


In figura vediamo come sia possibile eliminare coppie adiacenti del primo tipo se il poligono ha almeno quattro lati. Se il poligono ha solamente due lati ci sono due possibilità: o è del tipo aa^{-1} e quindi la superficie è una sfera, o è del tipo aa e quindi la superficie è un piano proiettivo reale.

Passo 3: Riduzione dei vertici ad un unico nome.

Supponiamo di aver ripetuto il secondo passo finché è stato possibile; i vertici del poligono non sono necessariamente tutti identificati tra di loro, ma possono appartenere a diverse classi di equivalenza. Mostriamo ora come, con una serie

di operazioni successive, sia possibile arrivare ad un nuovo poligono in cui tutti i vertici appartengono ad un'unica classe di equivalenza.

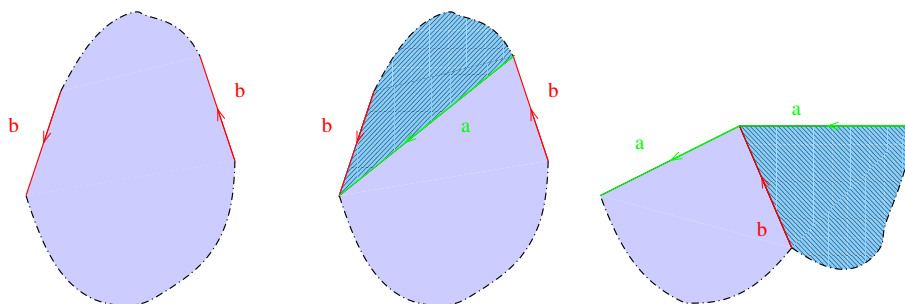


Le operazioni mostrate in figura fanno diminuire i vertici nella classe di equivalenza di Q di un'unità e fanno aumentare i vertici nella classe di equivalenza di P di un'unità.

Alternando il passo 2 ed il passo 3 (perché è necessario il passo 2?) arriviamo ad un poligono in cui tutti i vertici devono essere identificati e in cui non sono presenti coppie adiacenti del primo tipo.

Passo 4: Rendere adiacenti le coppie del secondo tipo.

Vogliamo mostrare che è possibile rendere adiacenti tutte le coppie del secondo tipo. Per far ciò, per ogni coppia non adiacente del secondo tipo operiamo un taglio tra gli estremi finali della coppia scelta, come in figura, ed incolliamo in corrispondenza della coppia medesima.

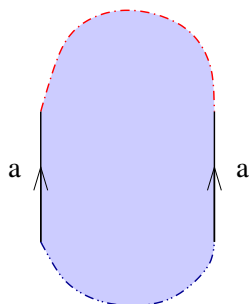


Se nel poligono ci sono solo coppie del secondo tipo, dopo un numero finito di applicazioni del passo 4 otteniamo una superficie il cui poligono è del tipo $a_1 a_1 \dots a_h a_h$, cioè una superficie U_h , e abbiamo finito. Nel caso che ci siano coppie del primo tipo continuiamo con il

Passo 5: Raggruppare le coppie del primo tipo.

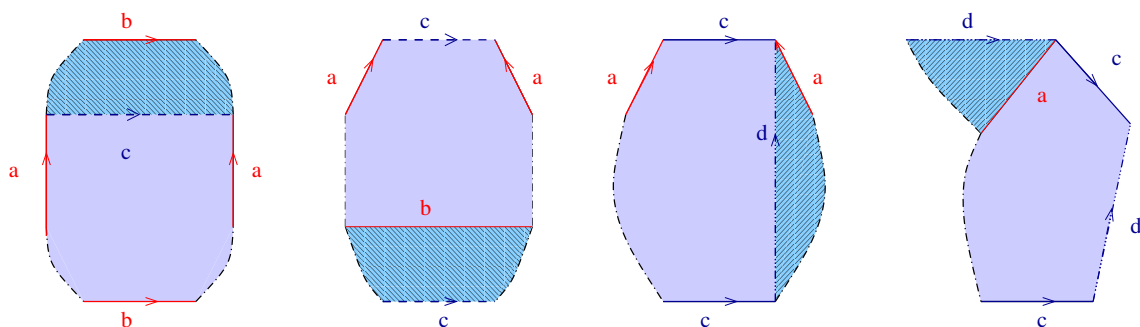
Supponiamo quindi che ci sia almeno una coppia del primo tipo. In tal caso ne deve esistere un'altra tale che queste due coppie si separano a vicenda.

Infatti, se così non fosse, ci troveremmo in una situazione come quella in figura, in cui tutti i lati nella parte rossa si identificano con lati nella parte rossa (in alto) e tutti i lati nella parte blu si identificano con lati nella parte blu (in basso).



Questa situazione non è possibile, perché in tal caso i due estremi di a non vengono identificati, in contraddizione con il passo 3.

Pertanto esistono due coppie del primo tipo che si separano a vicenda come in figura, e tali coppie possono essere raggruppate tagliando due volte in corrispondenza degli estremi finali dei lati.



Se nel poligono compaiono solo coppie del primo tipo, dopo un numero finito di applicazioni del passo 5 otteniamo una superficie il cui poligono è del tipo $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, cioè una superficie T_g , e abbiamo finito. Resta aperto il caso in cui nel poligono compaiono coppie del primo e del secondo tipo, cioè che il poligono sia del tipo $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots c_1 c_1 \dots$.

Tale caso viene risolto dal seguente lemma

Lemma 4.27. *La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.*

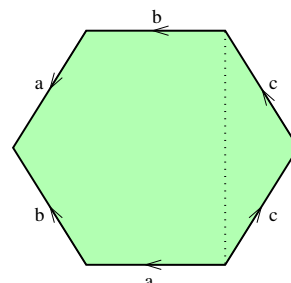
Dimostrazione. Abbiamo già visto che la bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma di due piani proiettivi, quindi basta mostrare che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di una bottiglia di Klein e di un piano proiettivo.

4. SUPERFICI TOPOLOGICHE

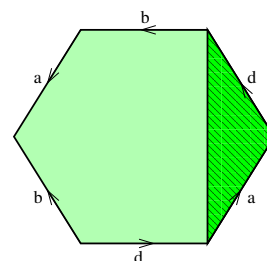
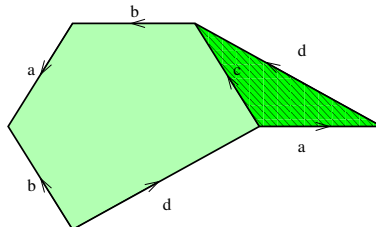
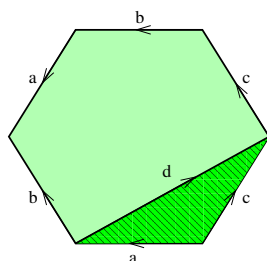
Mostreremo che entrambe sono omeomorfe alla superficie quoziente del poligono

$$dadbab^{-1}.$$

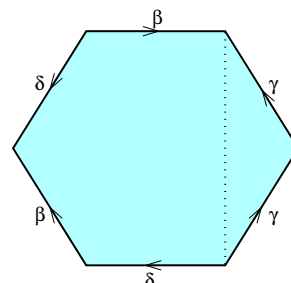
La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla superficie quoziente del poligono in figura:



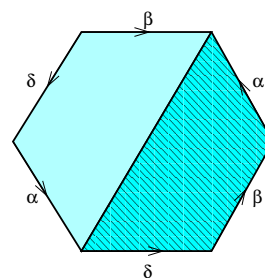
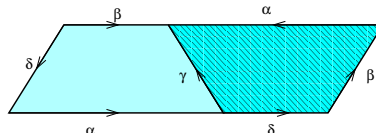
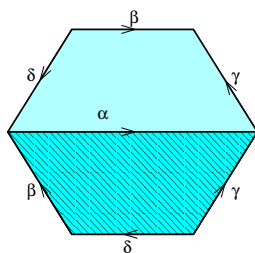
Attraverso un taglio e un incollamento otteniamo un nuovo poligono:



La somma connessa di di una bottiglia di Klein e di un piano proiettivo è omeomorfa alla superficie quoziente del poligono in figura:

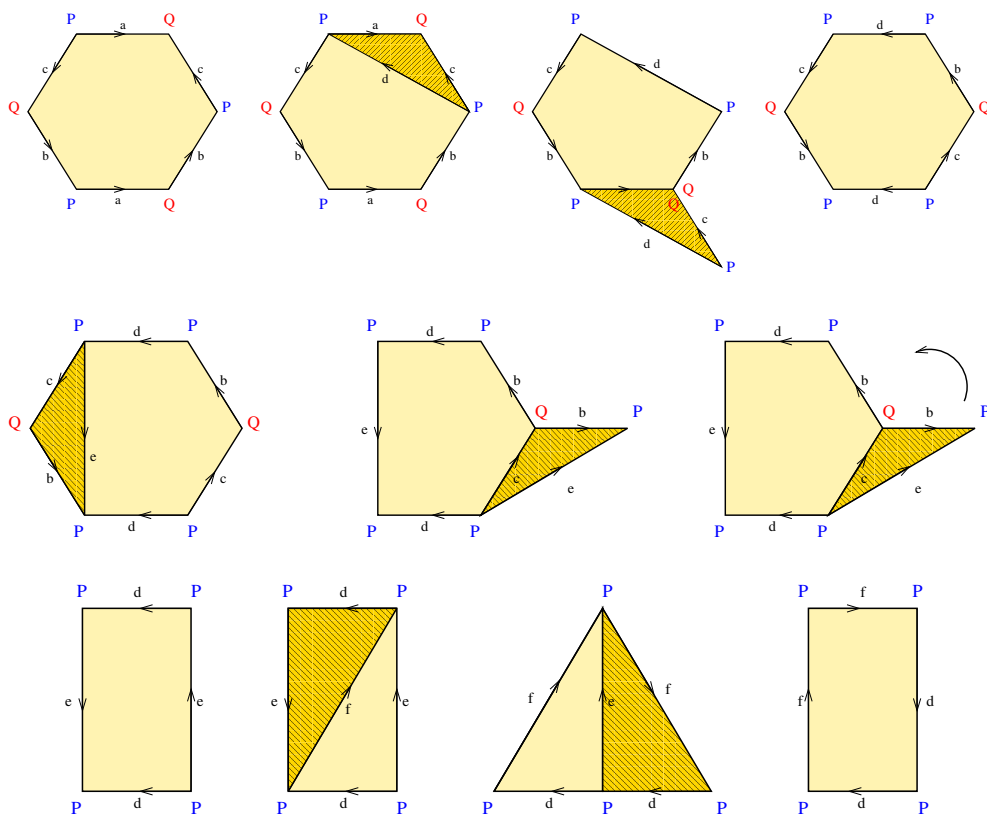


Attraverso un taglio e un incollamento otteniamo il poligono cercato:



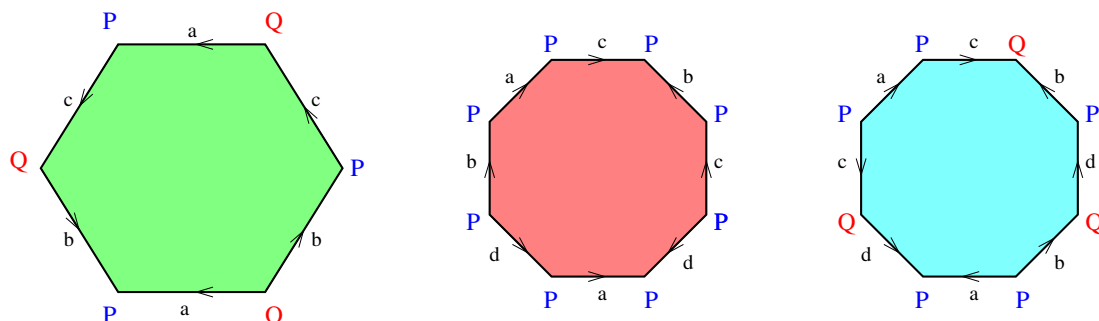
Esempio 4.28. Concludiamo con un esempio di applicazione dei passi della dimostrazione del teorema: classificare la superficie il cui poligono rappresentativo è il seguente:

$$abca^{-1}cb.$$



La superficie in esame è omeomorfa alla superficie U_2 .

Esercizio 4.29. Classificare le superfici ottenute come quozienti di poligoni nel modo seguente:



Parte II

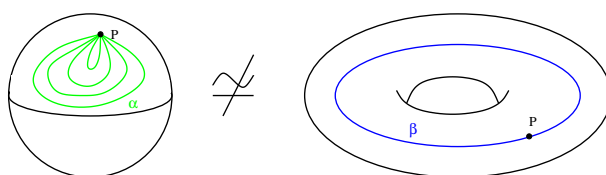
Topologia algebrica

Capitolo 5

Omotopia

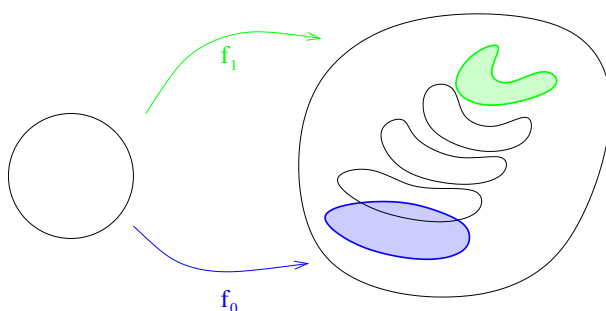
5.1 OMOTOPIA DI APPLICAZIONI CONTINUE

Il toro e la sfera non sono omeomorfi. Come si può dimostrare? Intuitivamente la sfera ha la proprietà che ogni cammino chiuso può essere deformato con continuità al cammino costante, mentre nel toro questo non è vero. Vedremo ora come si può formalizzare questo concetto.



Problema: Date $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ applicazioni continue si vuole formalizzare l'idea seguente:

f_0 si ottiene per deformazione continua da f_1 .



Definizione 5.1. Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ si dicono *omotope* se esiste un'applicazione continua $F : X \times I \rightarrow Y$, tale che $\forall x \in X$ si ha

$$F(x, 0) = f_0(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = f_1(x).$$

In tal caso scriveremo $f_0 \sim f_1$; poniamo poi $f_t(x) = F(x, t)$. Abbiamo cioè una famiglia di funzioni continue che varia con continuità.

Esempi 5.2.

- a) Sia $X = Y = \mathbf{D}^n$; l'applicazione identica $f_0 = \text{Id}_{\mathbf{D}^n}$ e l'applicazione costante che manda ogni elemento di \mathbf{D}^n in $\mathbf{0}$, $f_1 = \mathbf{0}$ sono omotope. Un'omotopia tra di esse è data da $F(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{x}$.
- b) Sia $X = Y = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$; l'applicazione identica $f_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}}$ e l'applicazione $f_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ sono omotope. Un'omotopia tra di esse è data da $F(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{x} + t \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.
- c) Sia X uno spazio topologico qualsiasi; ogni arco $f : I \rightarrow X$ di punto iniziale x_0 è omotopo all'arco costante di base x_0 tramite l'omotopia $F(s, t) = f((1 - t)s)$.

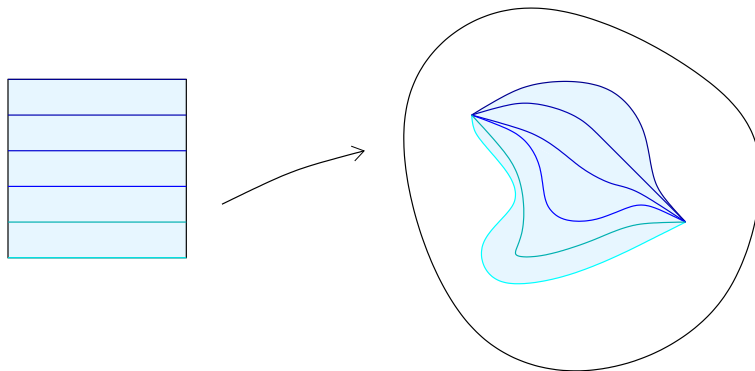
Come mostra il terzo esempio l'omotopia non è ancora la nozione adeguata per formalizzare l'esempio dei cammini sulla sfera e sul toro. In quel caso, infatti, tutti i cammini intermedi devono avere lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Introduciamo quindi una nuova definizione:

Definizione 5.3. Siano $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ applicazioni continue e $A \subset X$ un sottospazio. Le applicazioni f_0 e f_1 si dicono *omotope relativamente ad A* se esiste un'omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tra f_0 ed f_1 tale che

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \quad \forall a \in A, \forall t \in I.$$

In particolare, nel caso dei cammini, avremo la seguente

Definizione 5.4. Due cammini che abbiano lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale si dicono *omotopi* se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$.



Quindi due cammini $\alpha : I \rightarrow X$ e $\beta : I \rightarrow X$ sono omotopi se esiste un'applicazione $F : I \times I \rightarrow X$ continua tale che

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \alpha(s); \\ F(s, 1) &= \beta(s); \\ F(0, t) &= \alpha(0) = \beta(0) = x_0; \\ F(1, t) &= \alpha(1) = \beta(1) = x_1. \end{aligned}$$

Osservazione 5.5. L'omotopia (relativa) è una relazione d'equivalenza.

5.2 TIPO D'OMOTOPIA - RETRATTI

Sospendiamo momentaneamente il discorso sui cammini e utilizziamo le nozioni sull'omotopia per introdurre un nuovo concetto di equivalenza per spazi topologici.

Definizione 5.6. Si dice che due spazi topologici X e Y hanno lo stesso *tipo d'omotopia* (o che sono *omotopicamente equivalenti*) se esistono due applicazioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che $g \circ f \sim \text{Id}_X$ e $f \circ g \sim \text{Id}_Y$. Scriveremo $X \sim Y$ per indicare che X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Osservazione 5.7. L'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza tra spazi topologici (Esercizio!).

Definizione 5.8. Uno spazio topologico si dice *contraibile* se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

Esempi 5.9.

- a) Due spazi omeomorfi hanno lo stesso tipo di omotopia.
- b) D^n è contraibile.

Siano $f : D^n \rightarrow \{0\}$ l'applicazione costante e $g : \{0\} \rightarrow D^n$ l'inclusione. Dobbiamo verificare che $g \circ f \sim \text{Id}_{D^n}$ e che $f \circ g \sim \text{Id}_{\{0\}}$.

La prima affermazione segue dall'esempio (??) a), mentre la seconda è immediata, essendo $f \circ g = \text{Id}_{\{0\}}$.

- c) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$.

Siano $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ la funzione $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ e $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'inclusione.

Dobbiamo verificare che $g \circ f \sim \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ e che $f \circ g \sim \text{Id}_{S^{n-1}}$.

La prima affermazione segue dall'esempio (??) b), mentre la seconda è immediata, essendo $f \circ g = \text{Id}_{S^{n-1}}$.

Definizione 5.10. Una *proprietà omotopica* è una proprietà invariante per equivalenze omotopiche.

Definizione 5.11. Sia $A \subset X$ un sottospazio, e $i : A \rightarrow X$ l'inclusione.

1. A si dice *retrato* di X se esiste un'applicazione continua $r : X \rightarrow A$ tale che $r \circ i = \text{Id}_A$.
2. A si dice *retrato di deformazione* se esiste un'applicazione continua $r : X \rightarrow A$ tale che $r \circ i = \text{Id}_A$ e $i \circ r \sim \text{Id}_X$.

Intuitivamente un sottospazio A è un retratto di deformazione di X se X può essere deformato con continuità fino a farlo coincidere con A .

Osservazione 5.12. Se A è retratto di deformazione di X , allora A ha lo stesso tipo di omotopia di X .

Osservazione 5.13. Sia X un sottospazio di $(\mathbb{R}^n, \tau_\epsilon)$ e sia A un sottospazio di X . Se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che per ogni $x \in X$ il segmento che unisce il punto x al punto $r(x)$ è tutto contenuto in X , allora l'applicazione

$$F : X \times I \rightarrow X$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t)x + t(i \circ r(x))$$

è un'omotopia relativa ad A tra Id_X e $i \circ r$.

Pertanto se esiste r siffatta, A è retratto di deformazione di X .

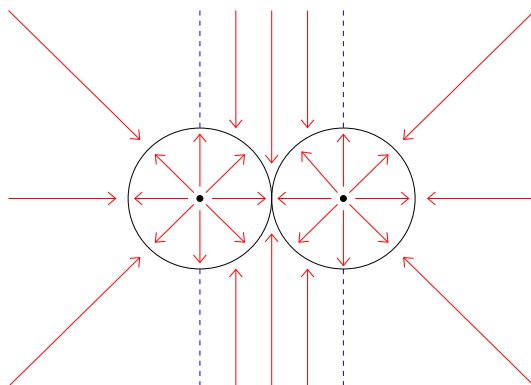
Esempi 5.14.

- a) Un sottospazio stellato di \mathbb{R}^n è contraibile.
- b) Sia T il toro ottenuto da $I \times I$ come quoziente rispetto alla relazione di equivalenza \sim tale che $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \{x, x'\} = \{0, 1\}$ e $y = y'$ oppure $\{y, y'\} = \{0, 1\}$ e $x = x'$, e sia A la circonferenza quoziente del segmento $\{0\} \times I$ rispetto alla relazione indotta da \sim ; allora A è retratto di T , ma non è retratto di deformazione.

Per mostrare che A è un retratto di T basta considerare l'applicazione $R : T \rightarrow A$ indotta dall'applicazione $r : I \times I \rightarrow \{0\} \times I$ che manda (x, y) in $(0, y)$.

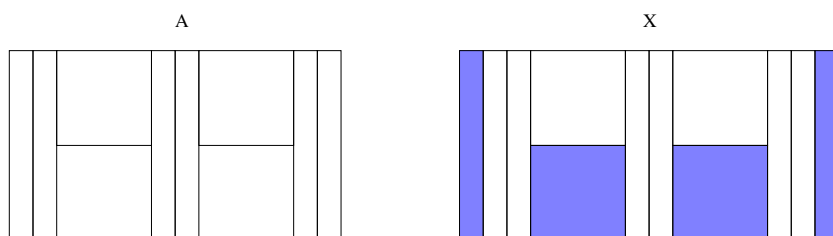
Per mostrare che A non è un retratto di deformazione di X è necessario utilizzare il gruppo fondamentale (Cf. Proposizione (??)).

- c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ ha $\bigvee_{1, \dots, k} S^1$ come retratto di deformazione. La retrazione è definita diversamente in regioni diverse di $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$, come in figura:



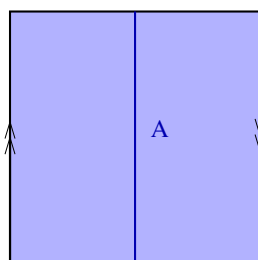
- d) $\mathbb{R}^3 \setminus r$ ha S^1 come retratto forte di deformazione. La retrazione è data componendo la proiezione sul piano perpendicolare alla retta con la retrazione di \mathbb{R}^2 meno un punto su S^1 .
- e) Se X è un poligono di \mathbb{R}^2 con $2k$ lati identificati a coppie, allora $X \setminus \{P\}$, dove P è un punto interno al poligono, ha un bouquet di k circonferenze come retratto di deformazione. Infatti il poligono meno il punto ha il bordo come retratto di deformazione, e la retrazione e l'omotopia $i \circ r \sim_A \text{Id}_X$ passano al quoziente (esercizio!). In particolare $\mathbb{RP}^2 \setminus \{P\} \sim S^1$ e $T_1 \setminus \{P\} \sim S^1 \vee S^1$.

Esercizio 5.15. Si consideri $X \subset (\mathbb{R}^2, \tau_\epsilon)$ e $A \subset X$ come in figura:



Si mostri che A è un retratto di deformazione di X .

Esercizio 5.16. Si consideri il nastro di Moebius X e $A \subset X$ come in figura:



Si mostri che A è un retratto di deformazione di X .

5.3 CW-COMPLESSI FINITI

Spesso nelle applicazioni e negli esercizi è utile trovare spazi omotopicamente equivalenti ad uno spazio dato che siano più “semplici”. Un’operazione che può essere utile in tal senso è quella di sostituire uno spazio topologico X con il quoziente rispetto ad un sottospazio contraibile $A \subset X$.

Non è però sempre vero che, dati uno spazio topologico X e un sottospazio contraibile A gli spazi X e X/A sono omotopicamente equivalenti.

Vedremo ora un modo particolare di costruire spazi topologici, che ci darà una condizione sufficiente per poter contrarre sottospazi contraibili senza alterare il tipo di omotopia dello spazio topologico.

Consideriamo il diagramma seguente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

in cui A , X e Y sono spazi topologici, $i : A \rightarrow X$ è l’inclusione e f è un’applicazione continua. Vogliamo costruire un nuovo spazio topologico incollando X e Y tramite f , identificando cioè i punti di A con le loro immagini.

Per far ciò consideriamo lo spazio topologico $X \amalg Y$ e in esso consideriamo la relazione di equivalenza \sim generata dall’identificazione $x \sim f(x)$ per ogni $x \in A$. Si dice *spazio di agguinzione* di (X, Y, A, f) lo spazio topologico $Z = (X \amalg Y)/\sim$.

Definizione 5.17. Un CW-complesso finito X di dimensione N è uno spazio topologico costruito nel modo seguente:

1. X^0 è uno spazio finito e discreto;
2. Per $0 < n \leq N$ lo spazio topologico X^n è ottenuto da X^{n-1} attaccando un numero finito J_n di coppie $(X, A) = (\mathbf{D}_i^n, \mathbf{S}_i^{n-1})$ mediante applicazioni continue $\varphi_i^n : \mathbf{S}_i^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$;
3. $X = X^N$.

Il sottospazio $X^n \subset X$ è detto n -scheletro di X . Ogni coppia $(\mathbf{D}_i^n, \mathbf{S}_i^{n-1})$ ha una *mappa caratteristica* Φ_i^n , che è la composizione

$$\mathbf{D}_i^n \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_i \mathbf{D}_i^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X.$$

L’immagine di $\Phi_i^n(\mathbf{D}_i^n \setminus \mathbf{S}_i^{n-1})$ è denotata con e_i^n ed è detta n -cella; si noti che $\Phi_i^n|_{\mathbf{D}_i^n \setminus \mathbf{S}_i^{n-1}}$ è un omeomorfismo.

Definizione 5.18. Un *sottocomplesso* di un CW-complesso finito X è un sottoinsieme chiuso A costituito da un’unione di celle di X .

Esempi 5.19.

a) La sfera S^n .

Una sua possibile struttura di CW-complesso è data prendendo come X^0 un punto, e attaccando una coppia (D^n, S^{n-1}) mediante l'applicazione costante $f : S^{n-1} \rightarrow X^0$.

Alternativamente è possibile prendere come X^0 un punto, costruire la sfera S^{n-1} mediante l'attaccamento di una $n - 1$ cella come sopra, ottenendo X^{n-1} e quindi attaccare due n -celle (D^n, S^{n-1}) mediante l'applicazione identica $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$.

b) Il disco D^n .

Una sua possibile struttura di CW-complesso è data prendendo come X^0 un punto, attaccando una coppia (D^{n-1}, S^{n-2}) mediante l'applicazione costante $f : S^{n-2} \rightarrow X^0$ e ottenendo perciò $X^{n-1} = S^{n-1}$ e attaccando quindi una coppia (D^n, S^{n-1}) mediante l'applicazione identica $f : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$.

c) L'unione a un punto di k circonferenze.

Sia X^0 un punto, e ad esso si attacchino k coppie (D^1, S^0) mediante le applicazioni costanti $f_i : S^0 \rightarrow X^0$.

d) Il toro.

Sia X^0 un punto. Ad esso si attacchino due coppie (D^1, S^0) mediante le applicazioni costanti $f_i : S^0 \rightarrow X^0$, ottenendo così come X^1 l'unione ad un punto di due circonferenze.

Si attacchi ora una coppia (D^2, S^1) mediante l'applicazione $f : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ definita ponendo

$$f(t) = \begin{cases} (1 + \cos(\pi + 8\pi t), \sin(8\pi t)) & t \in [0, 1/4] \\ (-1 + \cos(8\pi t), \sin(8\pi t)) & t \in [1/4, 1/2] \\ (1 + \cos(\pi + 8\pi t), -\sin(8\pi t)) & t \in [1/2, 3/4] \\ (-1 + \cos(8\pi t), -\sin(8\pi t)) & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

Analogamente si può dare una struttura di CW-complesso finito a tutte le superfici compatte.

e) Lo spazio proiettivo reale di dimensione n .

Lo spazio proiettivo di dimensione zero è un punto.

Sia $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ il quoziente rispetto all'identificazione dei punti antipodali; lo spazio proiettivo di dimensione n è ottenuto dallo spazio proiettivo di dimensione $n - 1$ mediante attaccamento di una n -cella via f .

Diamo senza dimostrazione il seguente importante risultato

Teorema 5.20. *Se X è un CW-complesso finito e $A \subset X$ è un sottocomplesso contraibile, allora $X \sim X/A$.*

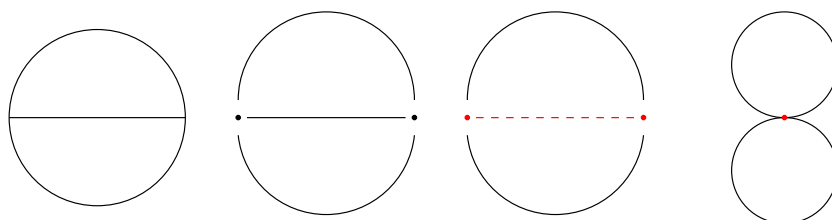
Vediamo ora alcune applicazioni

Esempi 5.21.

- a) Sia X il sottospazio di \mathbb{R}^2 costituito dall'unione di S^1 e di $[-1, 1] \times \{0\}$. Allora X ha lo stesso tipo di omotopia dell'unione a un punto di due circonferenze.

Possiamo considerare la struttura di CW-complesso di X ottenuta ponendo $X^0 = (-1, 0) \cup (1, 0)$ e attaccando tre coppie (D^1, S^0) mediante l'applicazione identica $\text{Id}_{S^0} : S^0 \rightarrow X^0$.

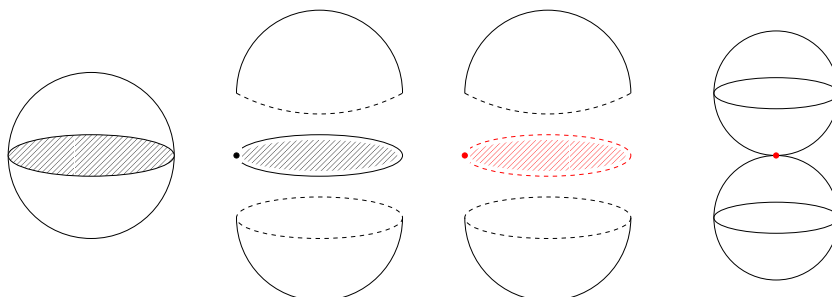
Il sottospazio $A = [-1, 1] \times \{0\}$ è un sottocomplesso contraibile, e quindi, in virtù della proposizione precedente $X \sim X/A \simeq S^1 \vee S^1$.



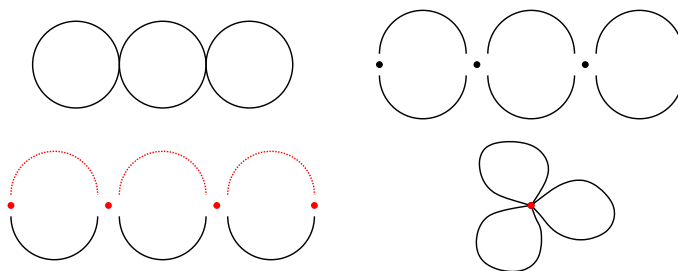
- b) Sia X l'unione di $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con il disco $D^2 \times \{0\}$. Allora X è omotopicamente equivalente all'unione a un punto di due sfere.

Possiamo considerare la struttura di CW-complesso di X ottenuta ponendo $X^0 = (-1, 0, 0)$, attaccando una coppia (D^1, S^0) mediante l'applicazione identica $\text{Id}_{S^0} : S^0 \rightarrow X^0$ e tre coppie (D^2, S^1) come in figura.

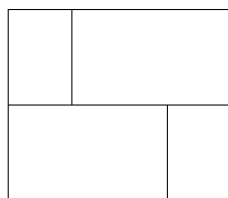
Il sottocomplesso costituito da X^1 e da una delle celle due dimensionali è un sottocomplesso contraibile.



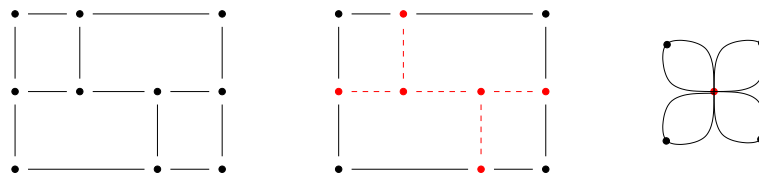
- c) Lo spazio topologico costituito da tre circonferenze in $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$ come in figura è omotopicamente equivalente a un bouquet di 3 circonferenze. Vediamo in figura la struttura di CW-complesso e il sottocomplesso contraibile.



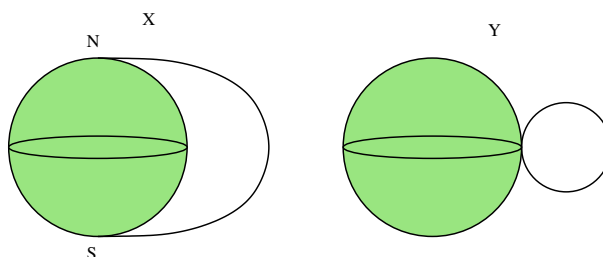
- d) Lo spazio topologico in figura (sottospazio di $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$) è omotopicamente equivalente a un bouquet di 4 circonferenze.



Vediamo in figura la struttura di CW-complesso e il sottocomplesso contraibile.



Esercizio 5.22. Si considerino i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^3, \tau_\varepsilon)$: $X = S^2 \amalg I / \sim$ dove \sim è così definita: $N \sim 0$, $S \sim 1$, con N, S rispettivamente polo nord e polo sud della sfera; $Y = S^2 \vee S^1$.



Si mostri che X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Capitolo 6

Il gruppo fondamentale

6.1 IL GRUPPO FONDAMENTALE

Sia X uno spazio topologico e x_0 un suo punto.

Definizione 6.1. Un cammino $\alpha : I \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ è detto *cappio* di punto base x_0 .

Consideriamo il seguente insieme

$$\pi(X, x_0) = \{\text{Classi di equivalenza di cappi omotopi con punto base } x_0\}.$$

Per dimostrare che la sfera non è omeomorfa al toro dovremmo dimostrare che

- A spazi topologici omeomorfi corrisponde lo stesso insieme.
- $\pi(\mathbb{S}^2, x_0)$ e $\pi(T, y_0)$ sono insiemi diversi.

In realtà quello che faremo sarà di più: mostreremo innanzitutto che l'insieme $\pi(X, x_0)$ possiede una struttura di gruppo, e dimostreremo quindi che

- A spazi topologici omeomorfi corrispondono gruppi isomorfi.
- $\pi(\mathbb{S}^2, x_0)$ e $\pi(T, y_0)$ sono gruppi non isomorfi.

Definizione 6.2. Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto; sia $\pi(X, x_0) =$ definito come sopra e siano $[\alpha], [\beta] \in \pi(X, x_0)$.

Si definisce il prodotto di $[\alpha]$ e $[\beta]$ nel seguente modo:

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

Il fatto che tale operazione sia ben definita segue dalla seguente

Proposizione 6.3. Siano α e β due cammini in X tali che sia definito il prodotto $\alpha * \beta$, e siano γ e δ altri due cammini tali che $\alpha \sim \gamma$ e $\beta \sim \delta$; allora $\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$.

Dimostrazione. Siano F e G le omotopie; allora l'omotopia tra i prodotti è data da

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & s \in [0, 1/2] \\ G(2s - 1, t) & s \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

□

Teorema 6.4. $\pi(X, x_0)$ è un gruppo (in generale non abeliano) rispetto al prodotto di classi di equivalenza di cappi appena definito.

Il risultato discende dai tre lemmi seguenti.

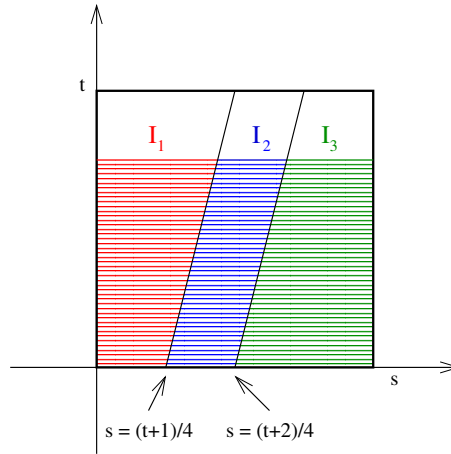
Lemma 6.5. Siano α, β e γ cammini tali che siano definiti i prodotti $\alpha * \beta$ e $\beta * \gamma$. Allora

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma).$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ sono omotopi; questi due cammini si scrivono in questo modo

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(4s) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4s - 1) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (\alpha * (\beta * \gamma))(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4s - 2) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4s - 3) & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

La figura mostra un modo di deformare i cammini uno nell'altro



Per scrivere le equazioni consideriamo omeomorfismi $f_i : I_i \rightarrow I$ e componiamo con α, β e γ ; come omeomorfismi possiamo considerare quelli della forma

$$f_i(s) = \frac{s - a_i}{b_i - a_i};$$

quindi

$$f_1(s) = \frac{s}{\frac{t+1}{4}} = \frac{4s}{t+1} \quad f_2(s) = \frac{s - \frac{t+1}{4}}{\frac{t+2}{4} - \frac{t+1}{4}} = \frac{\frac{4s-t-1}{4}}{\frac{1}{4}} = 4s - t - 1$$

$$f_3(s) = \frac{s - \frac{t+2}{4}}{1 - \frac{t+2}{4}} = \frac{\frac{4s-t-2}{4}}{\frac{4-t-2}{4}} = \frac{4s-t-2}{2-t}.$$

L'omotopia cercata è dunque

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{t+1}\right) & s \in [0, \frac{t+1}{4}] \\ \beta(4s-t-1) & s \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}] \\ \gamma\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & s \in [\frac{t+2}{4}, 1] \end{cases}$$

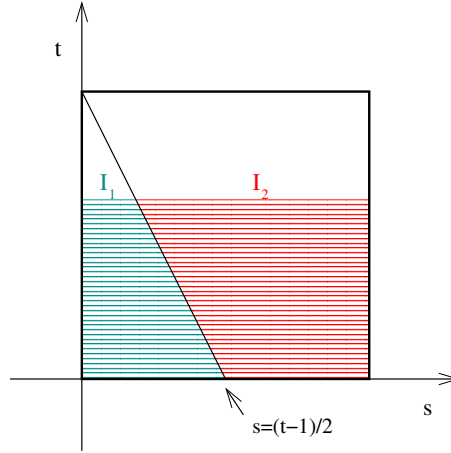
□

Lemma 6.6. Sia α un cammino con punto iniziale x_0 e punto finale x_1 e siano ε_{x_0} e ε_{x_1} i cammini costanti $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$ e $\varepsilon_{x_1}(s) = x_1$. Allora

$$\varepsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \varepsilon_{x_1}.$$

Dimostrazione. Mostriamo che $\varepsilon_{x_0} * \alpha$ e α sono omotopi;

La figura mostra un modo di deformare i cammini uno nell'altro (il primo intervallo è quello del cammino costante, il secondo quello di α):



In modo analogo all'esempio precedente (ma più semplice) otteniamo la seguente omotopia:

$$F(s, t) = \begin{cases} x_0 & s \in [0, \frac{1-t}{2}] \\ \alpha\left(\frac{2s+t-1}{t+1}\right) & s \in [\frac{1-t}{2}, 1] \end{cases}$$

□

Lemma 6.7. Sia α un cammino con punto iniziale x_0 e punto finale x_1 ; siano ε_{x_0} e ε_{x_1} i cammini costanti $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$ e $\varepsilon_{x_1}(s) = x_1$ e sia $\bar{\alpha}$ il cammino inverso. Allora

$$\alpha * \bar{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0} \quad \bar{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{x_1}.$$

Dimostrazione. Per mostrare che $\alpha * \bar{\alpha}$ e ε_{x_0} sono omotopi utilizziamo la seguente applicazione:

$$F(s, t) = \begin{cases} x_0 & s \in [0, \frac{t}{2}] \\ \alpha(2s - t) & s \in [\frac{t}{2}, \frac{1}{2}] \\ \bar{\alpha}(2s + t - 1) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{2-t}{2}] \\ x_0 & s \in [\frac{2-t}{2}, 1] \end{cases}$$

Il procedimento con cui tale applicazione è ottenuta è lievemente differente da quello utilizzato nei lemmi precedenti. Non ne vediamo i dettagli. \square

Definizione 6.8. Il gruppo $\pi(X, x_0)$ è detto *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di X con punto base x_0 .

Esempio 6.9. Se $X = \{*\}$, allora $\pi(X, *) = \{1\}$, in quanto esiste un unico cammino, quello costante.

Proposizione 6.10. Siano x, y due punti di X ; se esiste un arco $f : I \rightarrow X$ che congiunge x a y allora $\pi(X, x) \simeq \pi(X, y)$.

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione $u_f : \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$ in questo modo:

$$u_f([\alpha]) = [\bar{f} * \alpha * f].$$

L'applicazione è ben definita: poiché ovviamente $\bar{f} \sim \bar{f}$ e $f \sim f$, applicando due volte la Proposizione (??), otteniamo che, se $\alpha \sim \beta$, allora $\bar{f} * \alpha * f \sim \bar{f} * \beta * f$. Mostriamo ora che u_f è un omomorfismo di gruppi.

$$\begin{aligned} u_f([\alpha][\beta]) &= u_f([\alpha * \beta]) = [\bar{f} * \alpha * \beta * f] = \\ &= [\bar{f} * \alpha * f * \bar{f} * \beta * f] = [\bar{f} * \alpha * f][\bar{f} * \beta * f] = u_f([\alpha])u_f([\beta]). \end{aligned}$$

La biunivocità di u_f segue dal fatto che $u_{\bar{f}} \circ u_f = \text{Id}_{\pi(X, x)}$ e $u_f \circ u_{\bar{f}} = \text{Id}_{\pi(X, y)}$. \square

Corollario 6.11. Se uno spazio X è connesso per archi, allora $\pi(X, x) \simeq \pi(X, y) \forall x, y \in X$.

6.2 OMOMORFISMO INDOTTO

Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, e sia α un cappio di punto base x ; l'applicazione $(\varphi \circ \alpha) : I \rightarrow Y$ è un cappio in Y con punto base $\varphi(x)$.

Si può verificare che, se $\alpha \sim \beta$ allora $\varphi \circ \alpha \sim \varphi \circ \beta$; infatti, se $F : I \times I \rightarrow X$ è un'omotopia tra α e β , allora $G = \varphi \circ F$ è un'omotopia tra $\varphi \circ \alpha$ e $\varphi \circ \beta$. Risulta quindi ben definita l'applicazione

$$\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$$

che associa ad una classe di equivalenza $[\alpha]$ la classe di equivalenza $[\varphi \circ \alpha]$; poiché $\varphi \circ (\alpha * \beta) = (\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)$, φ_* è un omomorfismo di gruppi, infatti

$$\varphi_*([\alpha * \beta]) = [\varphi \circ (\alpha * \beta)] = [(\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)] = [(\varphi \circ \alpha)][(\varphi \circ \beta)] = \varphi_*([\alpha])\varphi_*([\beta]).$$

Per come abbiamo definito φ_* è immediato verificare che, se abbiamo tre spazi topologici X, Y, Z e due applicazioni continue $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$, allora

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*;$$

Inoltre, se consideriamo $\text{Id}_X : X \rightarrow X$, si ha che $\text{Id}_{X*} = \text{Id}_{\pi(X,x)}$.

Corollario 6.12. *Un omeomorfismo induce un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Esercizio.

Possiamo riassumere quello che abbiamo detto dicendo che abbiamo costruito un *funtore* dalla categoria degli spazi topologici e applicazioni continue alla categoria dei gruppi e omomorfismi di gruppi.

$Top.$	Gr
(X, x)	$\pi(X, x)$
$\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$	$\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, y)$
$\psi \circ \varphi$	$\psi_* \circ \varphi_*$
Id_X	$\text{Id}_{\pi(X,x)}$
$(X, x) \simeq (Y, y)$	$\pi(X, x) \simeq \pi(Y, y)$

Di grande importanza nelle applicazioni è la seguente

Proposizione 6.13. *Condizione necessaria affinché un sottospazio A di X sia un retrato è che, per ogni $a \in A$, denotati con $i_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ e $r_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ gli omomorfismi indotti dall'inclusione $i : A \rightarrow X$ e dalla retrazione $r : X \rightarrow A$ si abbia*

$$r_* \circ i_* = \text{Id}_{\pi(A,a)};$$

in particolare i_ è iniettivo e r_* è suriettivo.*

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ un retrato e $a \in A$, e consideriamo il diagramma

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A$$

e il diagramma indotto sui gruppi fondamentali

$$\pi(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi(X, a_0) \xrightarrow{r_*} \pi(A, a_0)$$

Poiché $r \circ i = \text{Id}_A$, si ha che

$$r_* \circ i_* = \text{Id}_{\pi(A,a_0)}.$$

In particolare i_* è iniettivo e r_* è suriettivo. □

6.3 TEOREMA DI INVARIANZA PER OMOTOPIA

Vogliamo ora mostrare che spazi che hanno lo stesso tipo di omotopia hanno gruppi fondamentali isomorfi; useremo il seguente lemma, che diamo senza dimostrazione:

Lemma 6.14. *Siano $\Phi, \Psi : X \rightarrow Y$ continue e omotope, sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra Φ e Ψ e sia $f(t) = F(x_0, t)$ (è un cammino che congiunge $\varphi(x_0)$ e $\psi(x_0)$). Allora il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_*} & \pi(Y, \Phi(x_0)) \\ & \searrow \Psi_* & \swarrow u_f \\ & \pi(Y, \Psi(x_0)) & \end{array}$$

commuta, cioè $\Psi_* = u_f \circ \Phi_*$.

Teorema 6.15. (Teorema d'invarianza per omotopia) *Siano X e Y spazi topologici, e sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti, quindi esistono $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow X$ tali che $\psi \circ \varphi \sim \text{Id}_X$ e $\varphi \circ \psi \sim \text{Id}_Y$. Sia F un'omotopia tra $\psi \circ \varphi$ e Id_X , e sia $f(t) = F(x, t)$; f è un arco che congiunge $\psi(\varphi(x))$ a x . Applicando il Lemma (??) a $\psi \circ \varphi$ e Id_X otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \pi(X, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, \varphi(x)) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi(X, \psi(\varphi(x))) \\ & \searrow \text{Id}_{\pi(X, x)} & & \swarrow u_f & \\ & \pi(X, x) & & & \end{array}$$

Poiché u_f è un isomorfismo, allora $\psi_* \circ \varphi_*$ è un isomorfismo; in particolare ciò implica che ψ_* è suriettiva.

Applicando ora il Lemma (??) all'omotopia G tra $\varphi \circ \psi$ e Id_Y e otteniamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi(Y, \varphi(x)) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi(X, \psi(\varphi(x))) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & \pi(Y, \varphi(\psi(\varphi(x)))) \\ & \searrow \text{Id}_{\pi(Y, \varphi(x))} & & \swarrow u_g & \\ & \pi(Y, \varphi(x)) & & & \end{array}$$

Abbiamo indicato con $\tilde{\varphi}_*$ l'omomorfismo indotto da φ tra i gruppi $\pi(X, \psi(\varphi(x)))$ e $\pi(Y, \varphi(\psi(\varphi(x))))$, poiché, essendo i punti base diversi, tale omomorfismo non è quello precedentemente indicato con φ_* .

Poiché u_g è un isomorfismo, allora $\tilde{\varphi}_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo; in particolare ψ_* è iniettiva. Quindi ψ_* e φ_* sono isomorfismi. \square

Corollario 6.16. Se X è contraibile, allora $\pi(X, x) \simeq \{1\}$ per ogni $x \in X$.

Corollario 6.17. Se $A \subset X$ è un retratto di deformazione e $a \in A$, allora l'omomorfismo $i_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ è un isomorfismo.

6.4 IL GRUPPO FONDAMENTALE DI S^1

In questa sezione andremo a calcolare il gruppo fondamentale della circonferenza. Per far questo introdurremo alcune nozioni della teoria dei rivestimenti; per trovare i gruppi fondamentali di altri spazi topologici utilizzeremo successivamente un altro metodo, non applicabile in questo caso.

Siano \tilde{X} e X spazi topologici connessi per archi.

Definizione 6.18. Un'applicazione continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un *rivestimento* se ogni punto $x \in X$ ha un intorno aperto U uniformemente rivestito da p , cioè se esistono aperti disgiunti $\{U_j\}_{j \in J}$ in \tilde{X} tali che

1. $p^{-1}(U) = \bigcup U_j$
2. $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ omeomorfismo $\forall j$

Definizione 6.19. L'applicazione p è detta *applicazione di rivestimento* mentre l'insieme $p^{-1}(x) \subset \tilde{X}$ è detto *fibra* di x .

Osservazione 6.20. Per ogni $x \in X$ la topologia indotta dalla topologia di \tilde{X} sulla fibra $p^{-1}(x)$ è la topologia discreta.

Esempi 6.21.

- a) Ogni omeomorfismo è un rivestimento.
- b) $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ così definita: $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
- c) Ponendo coordinate polari nel piano \mathbb{R}^2 possiamo definire $p_n : S^1 \rightarrow S^1$ in questo modo: $p_n(1, \theta) = (1, n\theta)$.
- d) Sia $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ la proiezione sul quoziente rispetto all'identificazione dei punti antipodali di S^n . Allora p è un rivestimento.

Definizione 6.22. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Un'applicazione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ che fa commutare il diagramma seguente, se esiste, è detta *sollevamento* di f .

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Vedremo ora alcuni risultati riguardo l'esistenza e l'unicità di sollevamenti.

Lemma 6.23. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, Y uno spazio connesso, $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua e $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ sollevamenti di f . Allora, se esiste un punto $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ si ha $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Dimostrazione. Sia $W \subset Y$ l'insieme dei punti su cui \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 coincidono. Mostriamo che tale insieme è aperto e chiuso in Y ; poiché $W \neq \emptyset$, in quanto contiene y_0 , si avrà $W = Y$.

Sia $y \in Y$, e sia U un intorno di $f(y)$ uniformemente rivestito da p . La controimmagine di U si può quindi scrivere come unione disgiunta di aperti V_j ; siano V_1 e V_2 i due aperti che contengono rispettivamente $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{f}_2(y)$.

Per continuità esiste un intorno N di y tale che $\tilde{f}_1(N) \subset V_1$ e $\tilde{f}_2(N) \subset V_2$.

Se $y \notin W$, allora $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e N è un intorno di y contenuto in W^c , che è quindi aperto. Se $y \in W$, allora necessariamente $V_1 = V_2$; dal fatto che $p\tilde{f}_1(y) = p\tilde{f}_2(y)$ e che p è un omeomorfismo su V_1 , quindi iniettiva, deduciamo che $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ su N . Segue che W è aperto. \square

Lemma 6.24. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $\alpha : I \rightarrow X$ un cammino di punto iniziale $\alpha(0) = x_0$. Allora, fissato $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, esiste un unico sollevamento di α , $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.*

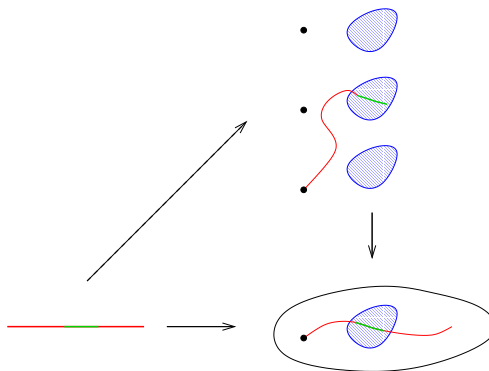
Dimostrazione. Poiché X è coperto da aperti uniformemente rivestiti da p , esiste una famiglia di aperti $\{U_j\}_{j \in J}$ uniformemente rivestiti da p tali che la famiglia $\{\alpha^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$ costituisce un ricoprimento di I .

Esprimendo $\alpha^{-1}(U_j)$ come unione di intervalli: $\alpha^{-1}(U_j) = \cup(a_{ij}, b_{ij})$ si ottiene un nuovo ricoprimento aperto di I .

Poiché I è compatto è possibile trovare un numero finito di tali intervalli lo coprono, e quindi una successione di punti $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ con la proprietà che per ogni k esiste $j_k \in J$ tale che $\alpha([t_k, t_{k+1}])$ è contenuto in U_{j_k} .

Costruiamo ora il sollevamento induttivamente su $[0, t_k]$.

Per $k = 0$ poniamo $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$; supponiamo di aver definito $\tilde{\alpha}_k : [0, t_k] \rightarrow \tilde{X}$ con $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ e che tale sollevamento sia unico.



Per costruzione $\alpha([t_k, t_{k+1}])$ è contenuto in U_{j_k} , la cui controimmagine $p^{-1}(U_{j_k})$ è costituita da un'unione disgiunta di aperti W_j omeomorfi a U_{j_k} mediante p .

Sia W l'aperto tra i W_j che contiene $\tilde{\alpha}_k(t_k)$; possiamo definire $\tilde{\alpha}_{k+1}$ nel seguente modo

$$\tilde{\alpha}_{k+1}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_k(t) & t \in [0, t_k] \\ (p|_W)^{-1}\alpha(t) & t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

La continuità di $\tilde{\alpha}_{k+1}$ segue dal Lemma (??), e l'unicità dal Lemma (??). \square

Diamo senza dimostrazione il seguente fondamentale

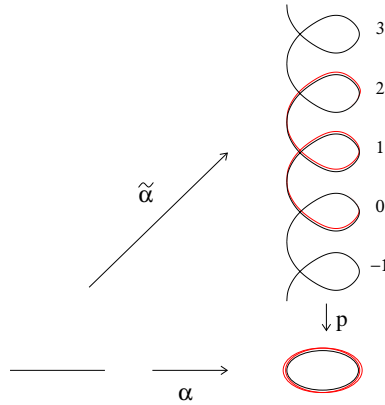
Teorema 6.25. (Teorema di Monodromia) Siano α e β cammini omotopi in X , tali che $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$; sia $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, e siano $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ gli unici sollevamenti di α e β con punto iniziale \tilde{x}_0 . Allora $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

Possiamo ora trovare il gruppo fondamentale della circonferenza

Teorema 6.26. Sia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria, e sia $x_0 = (1, 0)$.

Allora $\pi(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$, e un generatore è dato dalla classe del cammino $\alpha : I \rightarrow S^1$ così definito: $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definita ponendo $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Scegliamo come punto base il punto $x_0 = (1, 0)$ e sia α un cammino di punto base x_0 ; per il Lemma (??) esiste un unico sollevamento $\tilde{\alpha}$ tale che $\tilde{\alpha}(0) = 0$.



Chiamiamo *grado* di α il numero intero $\tilde{\alpha}(1)$; osserviamo che, per il Teorema (??), il grado è ben definito sulle classi di omotopia di cammini. Abbiamo quindi un'applicazione (di insiemi)

$$\pi(S^1, (1, 0)) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}$$

$$[\alpha] \longrightarrow \tilde{\alpha}(1)$$

Vogliamo mostrare che d è un isomorfismo di gruppi.

Osserviamo innanzitutto che, se $\tilde{\alpha}_k(t)$ è l'unico sollevamento di α con punto iniziale k , allora, in virtù dell'unicità del sollevamento, $\tilde{\alpha}_k(t) = \tilde{\alpha}_0(t) + k$.

Possiamo ora osservare che, se α e β sono cappi in S^1 con punto base $(1, 0)$ allora

$$\widetilde{(\alpha * \beta)}_0 = \tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}.$$

Infatti il secondo membro è un sollevamento di $\alpha * \beta$ con punto iniziale 0 e tale sollevamento è unico. Possiamo ora mostrare che d è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} d([\alpha][\beta]) &= \widetilde{(\alpha * \beta)}_0(1) = \tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)} = \\ &= \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)} = \tilde{\beta}_0(1) + \tilde{\alpha}_0(1) = d([\alpha]) + d([\beta]). \end{aligned}$$

Verifichiamo che d è un omomorfismo suriettivo: sia $n \in \mathbb{Z}$; allora il cammino $\alpha(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$ è un cammino in S^1 tale che $\tilde{\alpha}(1) = n$.

Infine mostriamo che d è iniettivo: se $d[\alpha] = 0$, allora $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) = 0$; poiché \mathbb{R} è contraibile, allora $\tilde{\alpha} \sim \varepsilon_0$. Sia F un'omotopia tra α e ε_0 . La composizione $p \circ F$ è un'omotopia tra α e $\varepsilon_{(1,0)}$. \square

Corollario 6.27. *Il disco chiuso D^2 non è omeomorfo al disco aperto \mathring{D}^2 .*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che tra i due spazi esista un omeomorfismo $f : D^2 \rightarrow \mathring{D}^2$. Sia $x \in D^2$ un punto del bordo, e sia $y = f(x)$.

La restrizione di f darebbe un omeomorfismo tra $D^2 \setminus x$ e $\mathring{D}^2 \setminus y$, ma ciò è assurdo, in quanto $D^2 \setminus x$ è contraibile, e ha quindi gruppo fondamentale banale, mentre $\mathring{D}^2 \setminus y$ ha una circonferenza come retrato di deformazione, e quindi il suo gruppo fondamentale è isomorfo a \mathbb{Z} . \square

Capitolo 7

Teorema di Seifert-Van Kampen e applicazioni

7.1 GRUPPI CON PRESENTAZIONE

Gruppi liberi

Sia S un insieme: $S = \{x_i\}_{i \in I}$.

Definizione 7.1. Chiamiamo *alfabeto* l'insieme $\{x_i, x_i^{-1}\}_{i \in I}$ dove x_i^{-1} è inteso solamente come un'espressione formale.

Definizione 7.2. Sia W l'insieme delle espressioni del tipo

$$x_{i_1}^{\varepsilon(i_1)} x_{i_2}^{\varepsilon(i_2)} \dots x_{i_n}^{\varepsilon(i_n)}$$

con $x_i \in S$ e $\varepsilon(i) = \pm 1$. Tali espressioni sono dette *parole*. W comprende anche la *parola vuota*, che non contiene nessun simbolo.

Introduciamo ora una relazione d'equivalenza \sim in W in questo modo.

Diremo che due parole w_1 e w_2 sono equivalenti se si possono ottenere l'una dall'altra introducendo o cancellando un numero finito di espressioni del tipo $x_i x_i^{-1}$ o $x_i^{-1} x_i$.

L'insieme quoziente $G = W/\sim$ risulta essere un gruppo rispetto alla giustapposizione; è detto *gruppo libero generato da S* .

L'elemento neutro è dato dalla classe della parola vuota, che indicheremo con il simbolo 1, mentre l'inverso della classe della parola $x_{i_1}^{\varepsilon(i_1)} x_{i_2}^{\varepsilon(i_2)} \dots x_{i_n}^{\varepsilon(i_n)}$ è dato dalla classe della parola $x_{i_n}^{-\varepsilon(i_n)} \dots x_{i_2}^{-\varepsilon(i_2)} x_{i_1}^{-\varepsilon(i_1)}$.

Esempi 7.3.

a) $S = \emptyset \quad G = \{1\}.$

- b) $S = \{x\} \quad G = \{1, x, x^{-1}, xx, x^{-1}x^{-1}, \dots\} \simeq \mathbb{Z}$.
- c) $S = \{a, b\} \quad G = \{1, a, b, a^{-1}, b^{-1}, ab, ba, \dots\} =: \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (Prodotto libero).
Non è abeliano.
- d) In generale, se $\text{card}(S) = n$, allora $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ è detto gruppo libero a n generatori. La sua struttura dipende solo dalla cardinalità di S , non dalla natura degli elementi di S .

Relazioni

Nell'insieme W delle parole, oltre alla relazione \sim , definita sopra, possiamo introdurre altre relazioni di equivalenza. Fissato un sottoinsieme $R \subset W$, diciamo che due elementi di W sono R -equivalenti

$$w_1 \sim_R w_2$$

se si ottengono uno dall'altro mediante un numero finito di operazioni del tipo

- i) Inserire o cancellare xx^{-1} o $x^{-1}x$ con $x \in S$.
- ii) Inserire o cancellare r o r^{-1} con $r \in R$.

L'insieme W/\sim_R è un gruppo rispetto alla giustapposizione

$$[w_1]_R [w_2]_R = [w_1 w_2]_R,$$

detto gruppo con presentazione $\langle S \mid R \rangle$; l'insieme S è chiamato insieme dei *generatori*, mentre l'insieme R è l'insieme dei *relatori* (o delle *relazioni*).

Osservazione 7.4. Il gruppo $\langle S \mid R \rangle$ è il quoziente del gruppo libero $\langle S \mid \emptyset \rangle$ rispetto al sottogruppo generato dalle classi di equivalenza degli elementi di R .

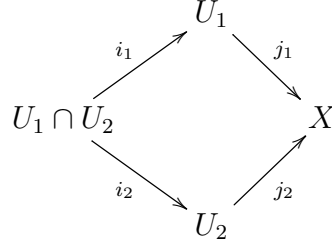
Esempi 7.5.

- a) $\langle \emptyset \mid \emptyset \rangle = \{1\}$ Gruppo banale.
- b) $\langle x \mid x^n \rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}_n$ Classi di resti modulo n .
- c) $\langle x, y \mid xy = yx \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- d) Ogni gruppo (G, \cdot) è un gruppo con presentazione. Una presentazione è data da $\langle S_G \mid R_G \rangle$, con $S_G = G$ e $R_G = \{(x \cdot y)y^{-1}x^{-1}\}$.

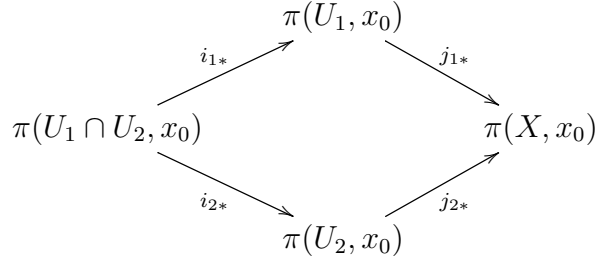
Osservazione 7.6. Lo stesso gruppo può avere diverse presentazioni.

7.2 IL TEOREMA DI SEIFERT-VAN KAMPEN

Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ sia non vuoto e connesso per archi; sia infine x_0 un punto di $U_1 \cap U_2$. Le inclusioni danno luogo al seguente diagramma commutativo



che induce un diagramma commutativo sui gruppi fondamentali



Consideriamo delle presentazioni per $\pi(U_1, x_0)$, $\pi(U_2, x_0)$ e $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$

$$\begin{aligned}
 \pi(U_1, x_0) &= \langle S_1 \mid R_1 \rangle \\
 \pi(U_2, x_0) &= \langle S_2 \mid R_2 \rangle \\
 \pi(U_1 \cap U_2, x_0) &= \langle S \mid R \rangle
 \end{aligned}$$

Il Teorema di Seifert-Van Kampen ci permette di trovare il gruppo fondamentale di X conoscendo quello di U_1 , quello di U_2 e quello di $U_1 \cap U_2$. In particolare

I generatori di $\pi(X, x_0)$ sono l'unione dei generatori di $\pi(U_1, x_0)$ e dei generatori di $\pi(U_2, x_0)$.

Le relazioni di $\pi(X, x_0)$ sono l'unione delle relazioni di $\pi(U_1, x_0)$, delle relazioni di $\pi(U_2, x_0)$ e di un insieme di relazioni R_S costruito a partire dai generatori di $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$.

Vediamo ora come si costruisce l'insieme R_S .

Preso un elemento $s \in \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$, possiamo considerare le sue immagini $i_{1*}s \in \pi(U_1, x_0)$ e $i_{2*}s \in \pi(U_2, x_0)$ e denotiamo con " $i_{1*}s$ " e " $i_{2*}s$ " le parole corrispondenti.

Ciò significa che “ $i_{1*}s$ ” è la parola che si ottiene scrivendo $i_{1*}s$ utilizzando gli elementi di S_1 , cioè i generatori di $\pi(U_1, x_0)$ e analogamente “ $i_{2*}s$ ” è la parola che si ottiene scrivendo $i_{2*}s$ utilizzando gli elementi di S_2 , cioè i generatori di $\pi(U_2, x_0)$.

Siamo ora in grado di descrivere l'insieme R_S :

$$R_S = \{“i_{1*}s”(“i_{2*}s”)^{-1} \mid s \in S\}.$$

Riassumendo quanto detto finora:

Teorema 7.7. (Seifert-Van Kampen) Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ sia non vuoto e connesso per archi e $x_0 \in U_1 \cap U_2$.

Siano $\pi(U_1, x_0) = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $\pi(U_2, x_0) = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, $\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle S \mid R \rangle$ e sia $R_S = \{“i_{1*}s”(“i_{2*}s”)^{-1} \mid s \in S\}$. Allora

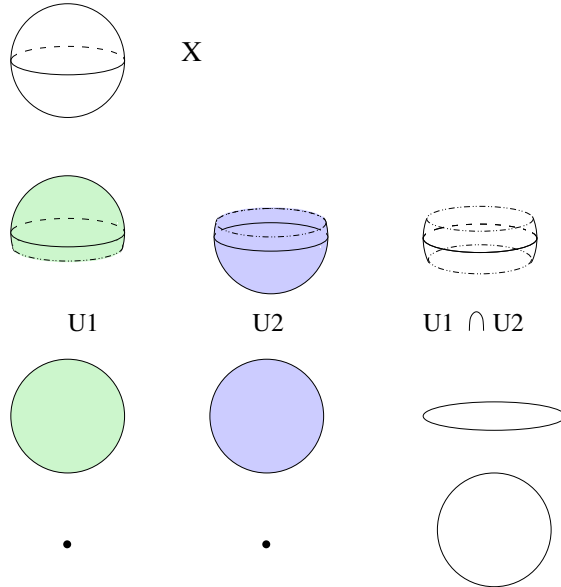
$$\pi(X, x_0) \simeq \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle.$$

Esempi 7.8.

a) $X = \mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$; sia x_0 un punto sull'equatore, sia $0 < \varepsilon < 1$ e siano

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \mid z > -\varepsilon\},$$

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \mid z < \varepsilon\}.$$



Gli insiemi U_i sono omeomorfi a dischi di dimensione due, e perciò contraibili, quindi i loro gruppi fondamentali sono banali:

$$\pi(U_i, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle.$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha l'equatore come retratto di deformazione, quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \alpha \mid \emptyset \rangle,$$

dove α è un cammino che fa un giro sull'equatore. Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen otteniamo quindi

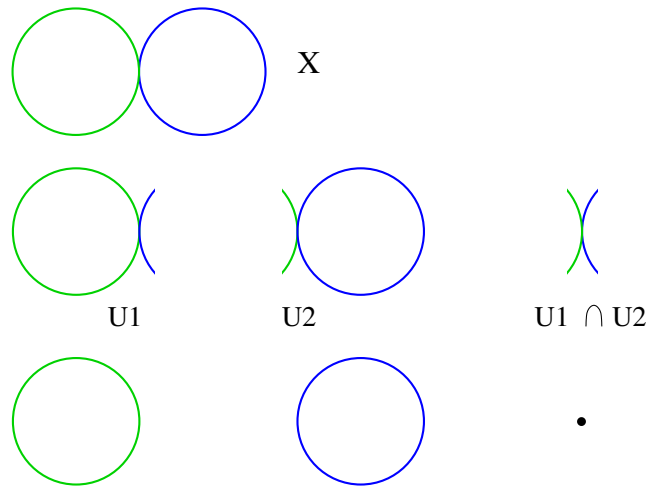
$$\pi(\mathbf{S}^2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$$

Possiamo, più in generale, osservare che, qualora i gruppi fondamentali $\pi(U_i, X_0)$ siano banali, allora anche il gruppo fondamentale di X è banale.

- b) $X = \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1 = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \vee \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$; sia $x_0 = (0, 0)$ e sia $0 < \varepsilon \ll 1$. Siano

$$U_1 = \{(x, y) \in X \mid x < \varepsilon\},$$

$$U_2 = \{(x, y) \in X \mid x > -\varepsilon\}.$$



Il gruppo fondamentale della circonferenza $\{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ è ciclico infinito generato dalla classe del cammino $\alpha(t) = (\cos(2\pi t) - 1, \sin(2\pi t))$; l'aperto U_1 ha tale circonferenza come retratto di deformazione, quindi abbiamo un isomorfismo

$$\pi(\mathbf{S}^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi(U_1, x_0)$$

$$[\alpha] \longrightarrow [i_*\alpha]$$

Denotando con abuso di linguaggio ancora con α il cammino $i \circ \alpha$ possiamo quindi concludere che

$$\pi(U_1, x_0) = \langle \alpha \mid \emptyset \rangle.$$

Analogamente, denotato con β il cammino $\beta(t) = (\cos(2\pi t) + 1, \sin(2\pi t))$ avremo che

$$\pi(U_2, x_0) = \langle \beta \mid \emptyset \rangle.$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ è contraibile, quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle.$$

Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen otteniamo

$$\pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Possiamo in generale osservare che, dati due spazi topologici (X, x_0) e (Y, y_0) , con gruppi fondamentali $\pi(X, x_0) = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ e $\pi(Y, y_0) = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ e tali che x_0 e y_0 hanno un intorno contraibile in X e in Y rispettivamente, allora il gruppo fondamentale dello spazio topologico Z , unione a un punto di (X, x_0) e (Y, y_0) è dato da

$$\pi(Z, z_0) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle.$$

c) $X = K$, la bottiglia di Klein; sia x_0 un punto interno al poligono e sia δ un cammino che congiunge il punto P , vertice del poligono, con x_0 .

Sia $U_1 = K \setminus D$, ove D è un disco chiuso contenuto in K e che non contiene x_0 , e sia $U_2 = K \setminus \{a, b\}$.

L'aperto U_1 ha come retrato di deformazione il bordo di K , $\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$; abbiamo dunque isomorfismi

$$\pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, P) \xrightarrow{i_*} \pi(U_1, P) \xrightarrow{u_\delta} \pi(U_1, x_0)$$

$$[\gamma] \longrightarrow [i_* \gamma] \longrightarrow [\bar{\delta} i_* \gamma \delta]$$

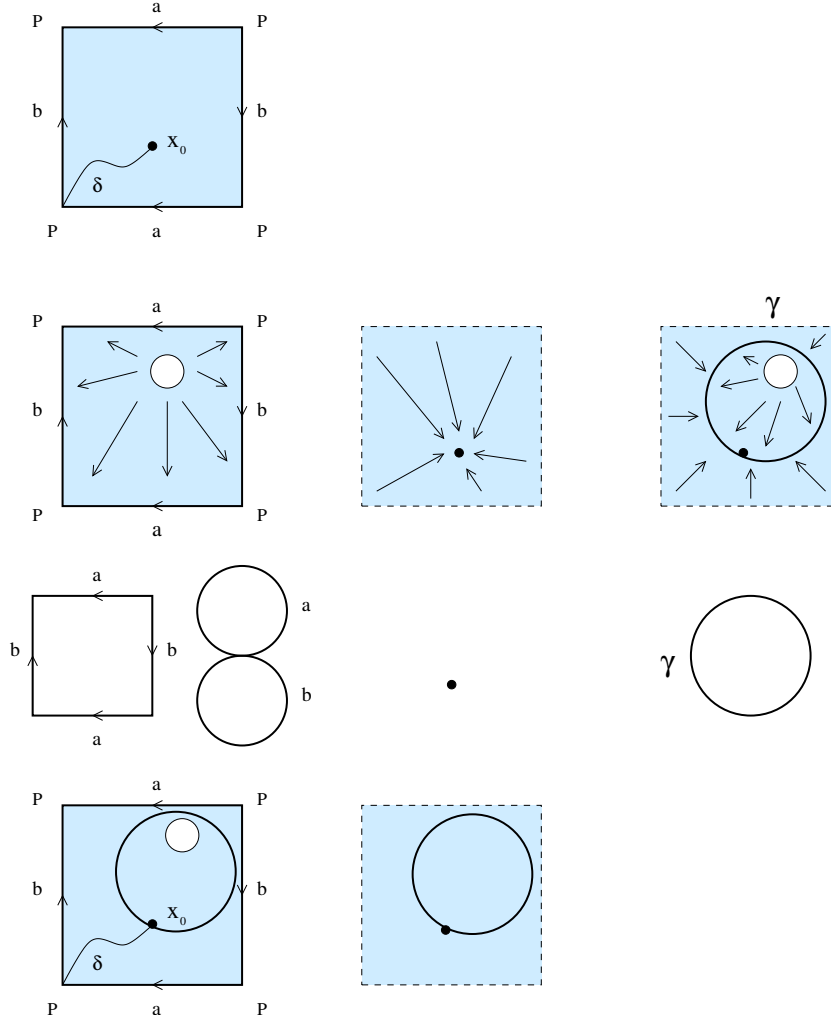
Ricordando che $\pi(\partial K, P) = \langle a, b \mid \emptyset \rangle$, e detti $\alpha = \bar{\delta} i_* a \delta$ e $\beta = \bar{\delta} i_* b \delta$ abbiamo che

$$\pi(U_1, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle.$$

L'aperto U_2 è contraibile, e perciò $\pi(U_2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$.

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha una circonferenza γ passante per x_0 come retrato di deformazione, e perciò, confondendo γ con $i_* \gamma$ possiamo scrivere

$$\pi(U_1 \cap U_2) = \langle \gamma \mid \emptyset \rangle.$$



Vediamo ora di costruire l'insieme $R_S = \{ "i_{1*}\gamma" ("i_{2*}\gamma")^{-1} \}$.

Dobbiamo considerare la classe dell'immagine di γ in $\pi(U_1, x_0)$ e scriverla utilizzando i generatori di tale gruppo. Osserviamo che la retrazione $r : U_1 \rightarrow \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$ manda il cammino $i_{1*}\gamma$ nel cammino $ba^{-1}ba$, e quindi

$$\pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, P) \xrightarrow{i_*} \pi(U_1, P) \xrightarrow{u_\delta} \pi(U_1, x_0)$$

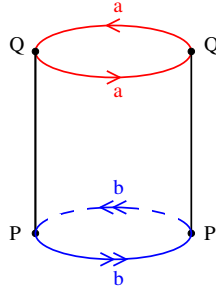
$$[ba^{-1}ba] \longrightarrow [i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a] \longrightarrow [\bar{\delta}i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a\delta]$$

Pertanto $\bar{\delta}i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a\delta = \bar{\delta}i_*b\delta\bar{\delta}i_*a^{-1}\delta\bar{\delta}i_*b\delta\bar{\delta}i_*a\delta = \beta\alpha^{-1}\beta\alpha$.

Ripetiamo il procedimento con la classe dell'immagine di γ in $\pi(U_2, x_0)$. poiché tale gruppo è banale, avremo che anche $i_{2*}\gamma$ sarà banale: $i_{2*}\gamma = 1$. Possiamo quindi concludere che

$$\pi(K, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \beta\alpha^{-1}\beta\alpha = 1 \rangle.$$

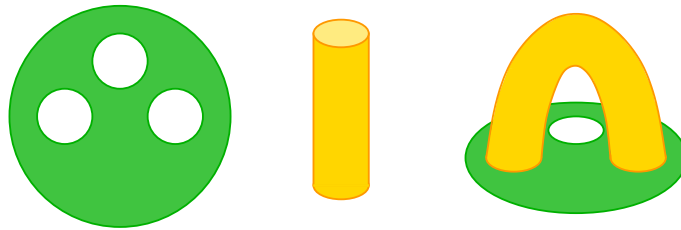
Esercizio 7.9. Sia X lo spazio topologico quoziente di un cilindro rispetto alle identificazioni in figura:



Si calcoli il gruppo fondamentale di X .

Esercizio 7.10. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso centrato nell'origine e di raggio 4 e siano D_1 , D_2 e D_3 i dischi aperti di raggio uno centrati rispettivamente in $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ di raggio 1.

Siano $Y = D \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$, Z il cilindro $\mathbf{S}^1 \times [0, 4]$ e X lo spazio topologico ottenuto dall'unione di Y e Z identificando il bordo inferiore del cilindro con il bordo di D_1 e il bordo superiore con il bordo di D_3 , come in figura.

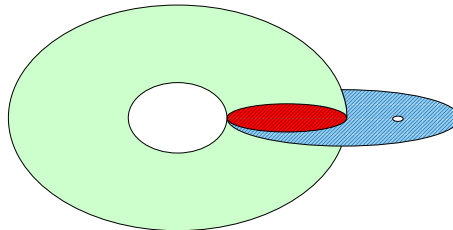


Si calcoli il gruppo fondamentale di X .

Esercizio 7.11. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 si considerino il toro T ottenuto ruotando intorno all'asse z la circonferenza del piano (x, z) di centro $(2, 0)$ e raggio 1 e il piano π di equazione $y = 0$. Sia X l'unione di T e π .

Si calcoli il gruppo fondamentale di X .

Esercizio 7.12. Sia T il toro ottenuto facendo ruotare la circonferenza di centro $(2, 0)$ e raggio uno nel piano $y = 0$ attorno all'asse z ; sia D il disco chiuso di centro $(3, 0)$ e raggio 2 nel piano $y = 0$, e sia Q il punto $(4, 0)$ nel piano $y = 0$. Si calcoli il gruppo fondamentale di $X = (T \cup D) \setminus \{Q\}$.



7.3 IL TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE - SECONDA PARTE

Definizione 7.13. Dato un gruppo con presentazione $G = \langle S \mid R \rangle$, il suo abelianizzato, $\text{Ab}(G)$ è il gruppo con presentazione

$$\text{Ab}(G) = \langle S \mid R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S\} \rangle$$

Osservazione 7.14. Se G e G' sono gruppi isomorfi, allora $\text{Ab}(G)$ e $\text{Ab}(G')$ sono gruppi isomorfi.

Esempi 7.15.

- a) $G = \langle S \mid \emptyset \rangle, S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Allora $\text{Ab}(G) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\oplus n}$
- b) Nel caso $G_R = \langle S \mid R \rangle$ con $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, allora $\text{Ab}(G_R)$ è un quoziente di $\text{Ab}(G_S) = \mathbb{Z}^{\oplus n}$, ove $G_S = \langle S \mid \emptyset \rangle$
- c) Sia $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$;

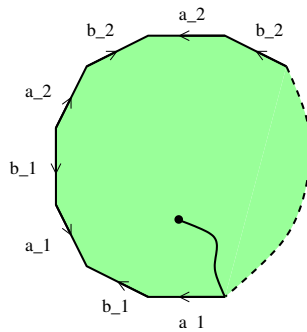
$$\text{Ab}(G) = \langle a, b \mid b^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Teorema 7.16. (Teorema di classificazione) Sia S una superficie compatta.

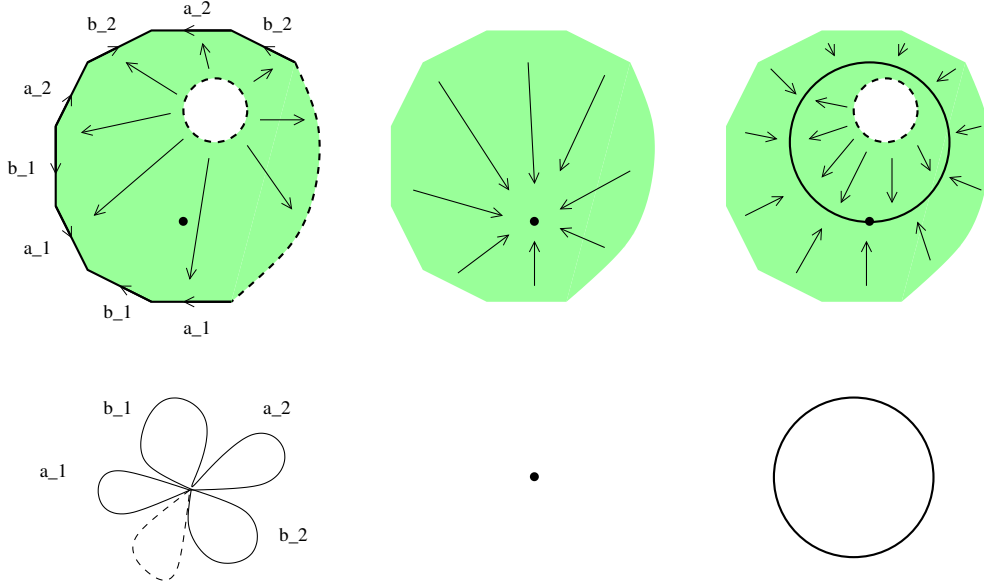
$$\begin{aligned} S \text{ orientabile} &\Rightarrow S \simeq T_g & g \geq 0. \\ S \text{ non orientabile} &\Rightarrow S \simeq U_h & h \geq 1. \end{aligned}$$

Inoltre se $g \neq g'$ allora $T_g \not\simeq T_{g'}$ e se $h \neq h'$ allora $U_h \not\simeq U_{h'}$.

Dimostrazione. (Seconda parte) Calcoliamo i gruppi fondamentali delle superfici T_g e U_h . Già sappiamo che $\pi(\mathbb{S}^2, x) \simeq \{1\}$; consideriamo dunque la superficie T_g con $g \geq 1$.



Per applicare il teorema di Seifert-Van Kampen scegliamo un punto x_0 interno al poligono e un cammino δ che congiunge il punto P , vertice del poligono, con x_0 . Scegliamo poi come aperto U_1 la superficie T_g privata di un disco, e come aperto U_2 la superficie T_g meno il bordo del poligono.



L'aperto U_1 ha il bordo del poligono, che è un bouquet di $2g$ circonferenze, come retratto di deformazione; detti $\alpha_i = \bar{\delta}a_i\delta$ e $\beta_i = \bar{\delta}b_i\delta$ e procedendo come nel caso della bottiglia di Klein abbiamo che

$$\pi(U_1, x_0) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \emptyset \rangle.$$

L'aperto U_2 è contraibile, quindi

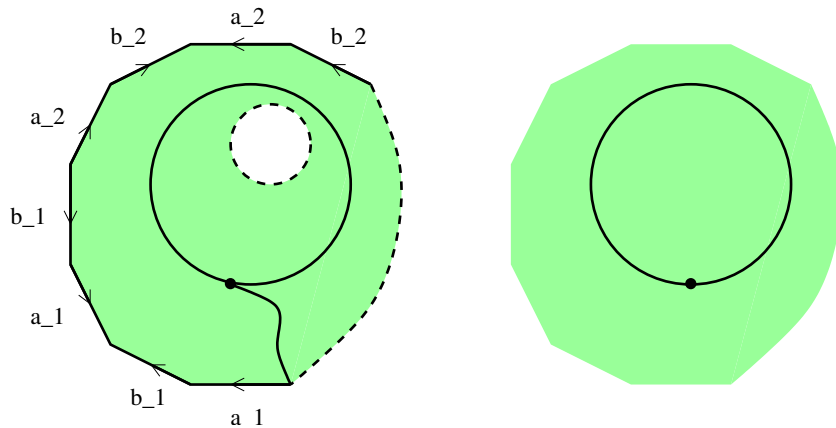
$$\pi(U_2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle.$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ si retrae su una circonferenza γ passante per x_0 , quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \gamma \mid \emptyset \rangle.$$

Vediamo ora di calcolare R_S ; γ , in U_1 , è omotopicamente equivalente a $\bar{\delta}a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\delta$ e quindi a $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$.

Invece, in U_2 , γ è omotopicamente equivalente al cammino banale, e quindi $R_S = \{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1\}$;



Pertanto si ha che

$$\pi(T_g, x_0) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

Del tutto analoga (e lasciata come esercizio) è la procedura per calcolare il gruppo fondamentale delle superfici U_h , che porta alla seguente conclusione:

$$\pi(U_h, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \dots \alpha_h^2 = 1 \rangle.$$

Per mostrare che i gruppi fondamentali che abbiamo calcolato non sono tra loro isomorfi, calcoliamo i loro abelianizzati; innanzitutto scriviamo il gruppo fondamentale di U_h con una presentazione diversa: ponendo $\tilde{\alpha} = \alpha_1 \dots \alpha_h$ scriviamo

$$\pi(U_h, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha}^2 = 1 \rangle$$

Quindi si ha

$$\text{Ab}(\pi(T_g, x_0)) = \mathbb{Z}^{\oplus 2g}$$

$$\text{Ab}(\pi(U_h, x_0)) = \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

Come prima cosa osserviamo che gli abelianizzati dei gruppi delle superfici orientabili non hanno torsione, mentre in quelli delle superfici non orientabili la torsione è presente. Tali gruppi non sono perciò isomorfi.

Inoltre $\text{Ab}(\pi(T_g, x_0)) \not\cong \text{Ab}(\pi(T_{g'}, x_0))$ se $g \neq g'$, quindi avremo che $\pi(T_g, x_0)$ e $\pi(T_{g'}, x_0)$ sono gruppi non isomorfi se $g \neq g'$, e quindi T_g e $T_{g'}$ sono superfici non omeomorfe se $g \neq g'$. Analogamente si conclude che U_h e $U_{h'}$ sono superfici non omeomorfe se $h \neq h'$. \square

7.4 GRUPPO FONDAMENTALE E RETRAZIONI

Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$ un sottospazio e $a \in A$. Riassumiamo le condizioni necessarie sui gruppi fondamentali e sull'omomorfismo indotto dall'inclusione tra i gruppi fondamentali perché A possa essere un retratto o un retratto di deformazione di X .

Proposizione 7.17. *Condizione necessaria affinché un sottospazio A di X sia un retratto è che, per ogni $a \in A$, denotati con $i_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ e $r_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ gli omomorfismi indotti dall'inclusione $i : A \rightarrow X$ e dalla retrazione $r : X \rightarrow A$ si abbia*

$$r_* \circ i_* = \text{Id}_{\pi(A, a)};$$

in particolare i_ è iniettivo e r_* è suriettivo.*

Condizione necessaria affinché un sottospazio A di X sia un retratto di deformazione è che, per ogni $a \in A$ si abbia $\pi(X, a) \simeq \pi(A, a)$.

Dimostrazione. La prima parte è il contenuto della Proposizione (??), mentre la seconda è una conseguenza del Teorema (??). \square

Esempi 7.18. a) S^1 non è un retrato di D^2 .

Se S^1 fosse un retrato di D^2 la mappa

$$i_* : \pi(S^1, a) \rightarrow \pi(D^2, a)$$

sarebbe iniettiva, ma ciò è impossibile, in quanto il secondo gruppo è banale, mentre il primo è isomorfo a \mathbb{Z} .

b) S^1 non è un retrato di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$.

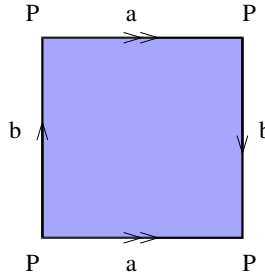
Dobbiamo studiare l'omomorfismo

$$i_* : \pi(S^1, a) \rightarrow \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}, a)$$

Entrambi i gruppi sono isomorfi a \mathbb{Z} , ma un generatore del gruppo $\pi(S^1, a)$ è la classe del cammino $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, mentre un generatore del gruppo $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}, a)$ è la classe del cammino $\gamma(t) = (1 + \cos(2\pi t), 1 + \sin(2\pi t))$.

L'immagine della classe $[\alpha]$ in $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}, a)$ è la classe di un cammino che non gira attorno al punto $(1, 1)$, ed è quindi omotopo al cammino banale. Pertanto i_* non è iniettiva e S^1 non è un retrato di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$.

c) Sia X la bottiglia di Klein, ottenuta come quoziente del quadrato, come in figura:



e sia A la circonferenza b . Mostriamo che A non è un retrato di X . Consideriamo il diagramma

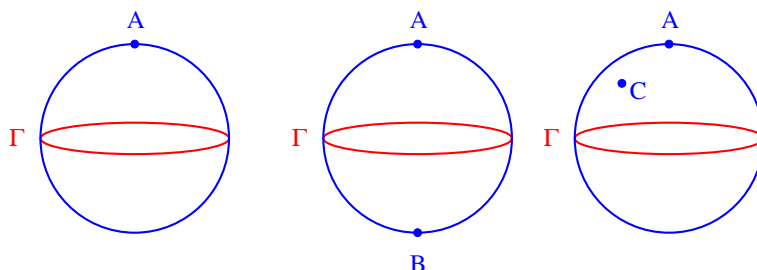
$$\pi(A, P) \xrightarrow{i_*} \pi(X, P) \xrightarrow{r_*} \pi(A, P)$$

$$\langle b \mid \emptyset \rangle \xrightarrow{i_*} \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle \xrightarrow{r_*} \langle b \mid \emptyset \rangle$$

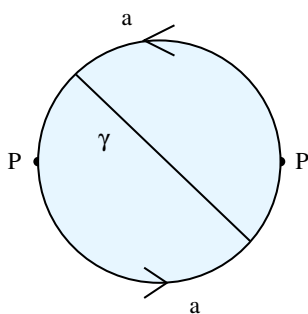
Poiché $i_*(b) = b$ e $r_* \circ i_* = \text{Id}$ si ha $r_*(b) = b$.

Sia $r_*(a) = b^k$; poiché in $\pi(X, P)$ si ha $aba^{-1}b = 1$ allora $r_*(aba^{-1}b) = 1$. Da ciò segue $1 = r_*(a)r_*(b)r_*(a^{-1})r_*(b) = b^k b b^{-k} b = b^2$, raggiungendo la contraddizione che in $\pi(A, P) = \langle b \mid \emptyset \rangle$ si dovrebbe avere $b^2 = 1$.

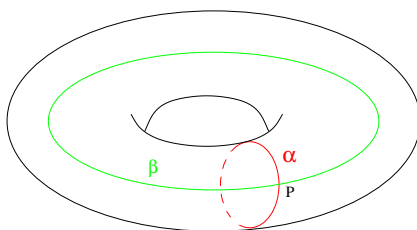
Esercizio 7.19. Siano S la sfera unitaria di \mathbb{R}^3 , Γ l'equatore di S e A, B e C punti di S come in figura. Si stabilisca se Γ è un retratto e/o un retratto di deformazione di $S \setminus A$, $S \setminus \{A, B\}$, $S \setminus \{A, C\}$.



Esercizio 7.20. Sia \mathbb{RP}^2 il disco unitario con i punti antipodali del bordo identificati, e sia γ l'immagine in \mathbb{RP}^2 di un diametro del disco. γ è un retratto e/o un retratto di deformazione di \mathbb{RP}^2 ?



Esercizio 7.21. Sia T il toro pieno $S^1 \times D^2$, α e β cammini come in figura e D il disco piano chiuso il cui bordo è α .



Si stabilisca se i seguenti sottospazi sono retratti e/o retratti di deformazione di T

- La circonferenza α .
- La circonferenza β .
- Il disco D .

Appendice A

Varie nozioni di compattezza

A.1 COMPATTEZZA PER RICOPRIMENTI: ORIGINE

La definizione di compattezza per ricoprimenti nasce dal seguente

Problema: Determinare una classe di spazi topologici \mathcal{H} tale che ogni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ con f continua e $X \in \mathcal{H}$ ammetta massimo e minimo.

Osservazione A.1. Una funzione continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente limitata, cioè per ogni punto $x_0 \in X$ esiste un intorno U_{x_0} tale che $f|_{U_{x_0}}$ è limitata.

Dimostrazione. Dalla definizione di continuità, dato $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x_0 tale che, se $x \in U$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, cioè

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

□

Definizione A.2. X si dice *pseudocompatto* se ogni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua è globalmente limitata.

Osservazione A.3. Se X è pseudocompatto allora ogni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua ammette massimo e minimo.

Dimostrazione. L'ipotesi sulla limitatezza globale di f implica l'esistenza di un $m \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in X$ si ha $f(x) \leq m$. In particolare l'insieme $\{f(x)\}$ è limitato superiormente; sia $M = \sup\{f(x)\}$.

Vogliamo mostrare che esiste $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) = M$.

Supponiamo per assurdo che ciò non accada, cioè che $f(x) < M$ per ogni $x \in X$. Consideriamo la funzione continua

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - M}.$$

Per le nostre ipotesi su X g è una funzione globalmente limitata, quindi esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) \leq k$ per ogni $x \in X$, cioè

$$\frac{1}{k} \leq M - f(x),$$

che porta a $f(x) \leq M - \frac{1}{k}$, contro l'ipotesi che M fosse il sup di f . □

Presa f continua nasce un ricoprimento di X fatto da intorni su cui f è limitata. Perché f sia globalmente limitata un numero finito di tali intorni deve essere sufficiente per coprire X . Questo deve valere per ogni funzione continua. Nasce così la definizione di compattezza per ricoprimenti.

A.2 VARIE DEFINIZIONI DI COMPATTEZZA

Definizione A.4. Sia $S \subset X$. Un punto di accumulazione per S è un punto $x \in X$ tale che in ogni suo intorno esistono infiniti punti di S .

Consideriamo le seguenti proprietà di un sottospazio X di \mathbb{R}^n ;

- (A) X è chiuso e limitato.
- (B) Ogni successione di punti di X ammette una sottosuccessione convergente a un punto di X .
- (C) Un sottoinsieme infinito $S \subset X$ ammette un punto di accumulazione in X .
- (D) Da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Sappiamo già che la proprietà (A) e la proprietà (D) sono equivalenti. Vedremo più avanti che anche le altre proprietà sono ad esse equivalenti.

Se X è uno spazio topologico qualsiasi la proprietà (A) è priva di senso. Le altre proprietà hanno senso, ma non sono, in generale, equivalenti.

Osservazione A.5. La proprietà (C) è equivalente alla seguente:

- (C1) Ogni ricoprimento numerabile di X ammette un sottoricoprimento finito.

Dimostrazione. Dimostriamo che $(C) \Rightarrow (C1)$. Sia per assurdo $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento numerabile di X che non ammette un sottoricoprimento finito. Sia x_1 un punto di $X \setminus U_1$, $x_2 \neq x_1$ un punto di $X \setminus (U_1 \cup U_2)$, e, per ogni n sia $x_n \in X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$ e x_n diverso dai punti precedenti.

I punti $\{x_n\}$ costituiscono un sottoinsieme infinito S di X , che ha quindi un punto di accumulazione x . Tale punto appartiene ad uno degli aperti del ricoprimento numerabile: sia U_N tale aperto. Per costruzione, i punti x_n con $n > N$ non appartengono ad U_N . Pertanto U_N è un intorno di x che non contiene infiniti punti di S , e questo è assurdo.

Dimostriamo ora che $(C1) \Rightarrow (C)$. Supponiamo per assurdo che $S \subset X$ sia un sottoinsieme infinito che non ammette punti di accumulazione in X . Senza perdita di generalità possiamo assumere che S sia numerabile.

Le ipotesi su S implicano che, per ogni $x \in X$ esiste un intorno $U_x \ni x$ tale che $U \cap S$ contiene un numero finito di punti di S .

Per ogni sottoinsieme finito $F \subset S$ sia U_F l'unione degli intorni U_x tali che $U_x \cap S = F$; gli aperti U_F costituiscono un ricoprimento aperto numerabile (vedi Osservazione (??)) di X , che quindi ammette un sottoricoprimento finito.

Ma ogni aperto del sottoricoprimento contiene al più un numero finito di punti di S , e giungiamo perciò ad una contraddizione. \square

Osservazione A.6. I sottoinsiemi di \mathbb{N} di cardinalità finita fissata sono numerabili, in quanto possono essere visti come sottoinsiemi del prodotto cartesiano di un numero finito di copie di \mathbb{N} .

Quindi i sottoinsiemi di cardinalità finita sono unione numerabile dei sottoinsiemi di cardinalità finita fissata.

Definizione A.7. Diciamo che X è *compatto per ricoprimenti* se vale (D), *compatto per successioni* se vale (B), *numerabilmente compatto* se vale (C).

Proposizione A.8. X compatto per ricoprimenti $\Rightarrow X$ numerabilmente compatto.

Dimostrazione. Immediata. \square

Proposizione A.9. X compatto per successioni $\Rightarrow X$ numerabilmente compatto.

Dimostrazione. Sia S un sottoinsieme infinito di X ; da S estraiamo un sottoinsieme numerabile S' : scegliamo un punto $x_1 \in S$, un punto $x_2 \in S \setminus x_1$, e così via. Per ipotesi esiste una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}$ convergente a $x \in X$.

Il punto x è un punto di accumulazione per S ; infatti ogni suo intorno contiene definitivamente la sottosuccessione, e quindi infiniti punti di S . \square

Proposizione A.10. X numerabilmente compatto $\Rightarrow X$ pseudocompatto.

Dimostrazione. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $U_n \subset X$ il sottoinsieme così definito: $U_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\}$. I sottoinsiemi U_n costituiscono un ricoprimento numerabile di X , dal quale è quindi possibile estrarre un sottoricoprimento finito. \square

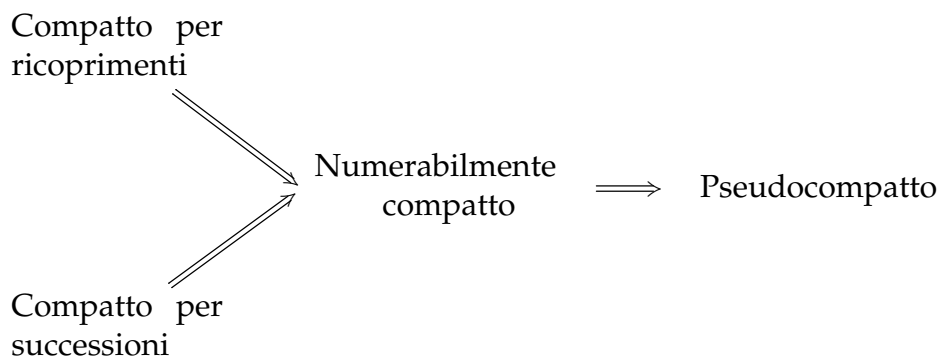
Esempio A.11. Sia X l'intervallo $[0, 1]$ con la topologia τ i cui aperti non vuoti sono i sottoinsiemi il cui complementare è numerabile.

Tale spazio non è numerabilmente compatto: per mostrarlo si consideri il ricoprimento costruito nel seguente modo: sia $x_n = \frac{1}{n}$, sia $U = X \setminus \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e siano $U_n = U \cup \{x_1, \dots, x_n\}$. Da tale ricoprimento aperto (numerabile) non è possibile estrarre un sotto ricoprimento finito.

X è pseudocompatto perché è iperconnesso (cioè non esistono due aperti a intersezione vuota). Infatti ogni funzione continua su uno spazio iperconnesso

è costante (infatti se l'immagine di f contenesse due punti a, b con $a \neq b$ sarebbe possibile prendere aperti disgiunti in \mathbb{R} che contengono a e b , e le loro controimmagini darebbero aperti disgiunti in X , contro l'ipotesi).

Riassumiamo quanto visto fino ad ora col seguente diagramma



Definizione A.12. Uno spazio topologico si dice di Lindelöf se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile.

Proposizione A.13. Se X è di Lindelöf e numerabilmente compatto $\Rightarrow X$ compatto per ricoprimenti.

Dimostrazione. Immediata.

Definizione A.14. Si dice che X verifica il *Secondo assioma di numerabilità* se la sua topologia ammette una base numerabile.

Teorema A.15. (Lindelöf) Se (X, τ) ammette una base numerabile allora (X, τ) è di Lindelöf.

Dimostrazione. Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di X . Ogni elemento U_α del ricoprimento si scrive come unione di elementi della base.

E' possibile perciò costruire un nuovo ricoprimento costituito da elementi della base (e quindi numerabile). Per ogni aperto di questo nuovo ricoprimento si scelga un aperto del ricoprimento iniziale che lo contiene; si trova così un sottoricoprimento numerabile. \square

Esempio A.16. Sia X un insieme non numerabile, p un suo punto e τ la topologia i cui aperti non banali sono i sottoinsiemi che non contengono p . Allora X è di Lindelöf, ma non ammette una base numerabile.

Definizione A.17. Un sistema fondamentale di intorni per un punto $x \in X$ è una famiglia di intorni $\{U_i^x\}_{i \in I}$ con la proprietà che per ogni intorno V di x esiste $i \in I$ tale che $U_i^x \subset V$.

Definizione A.18. Uno spazio topologico X verifica il *Primo assioma di numerabilità* se ogni punto $x \in X$ possiede un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Proposizione A.19. Se X verifica il primo assioma di numerabilità e X è numerabilmente compatto $\Rightarrow X$ compatto per successioni.

Dimostrazione. Sia $S = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di X . Se l'insieme S è costituito da un numero finito di punti, allora almeno uno si ripete infinite volte e troviamo la sottosuccessione convergente.

Possiamo dunque assumere S sia un insieme infinito. Tale insieme ammette quindi un punto di accumulazione $x \in S$.

Sia $\{U_n^x\}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di x ; per ogni m si consideri $\cap_{i=1}^m U_i^x$ e si prenda un punto della successione appartenente a U_m^x .

Ogni intorno V di x contiene U_n^x per qualche n , e quindi contiene definitivamente la sottosuccessione così costruita. \square

A.3 COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI

Definizione A.20. Uno spazio topologico X si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme Y denso e numerabile.

Osservazione A.21. Uno spazio metrico è separabile se e solo se verifica il secondo assioma di numerabilità.

Dimostrazione. Se Y è denso e numerabile possiamo considerare le bolle di centro nei punti di Y e raggio razionale. Tali aperti costituiscono una base numerabile per la topologia indotta dalla metrica.

Viceversa, denotata con $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la base numerabile, per ogni elemento B_n della base si scelga un punto $x_n \in B_n$, e sia $Y = \cup x_n$. Tale insieme è chiaramente numerabile; mostriamo ora che è denso.

Sia $x \in X$ qualsiasi, e sia U un suo intorno aperto. L'aperto U contiene almeno un elemento della base, e quindi $U \cap Y \neq \emptyset$; pertanto Y è denso in X . \square

Corollario A.22. Per uno spazio metrico separabile la compattezza per ricoprimenti, la compattezza per successioni e la numerabile compattezza sono proprietà equivalenti.

Osservazione A.23. Uno spazio topologico che verifica il secondo assioma di numerabilità è separabile. Infatti la seconda parte della dimostrazione precedente non fa uso della metrica.

Esempio A.24. Sia X un insieme non numerabile con la topologia i cui aperti non vuoti sono i sottoinsiemi che contengono un punto p fissato. Con tale topologia X è separabile, in quanto il sottoinsieme $\{p\}$ è denso, ma non verifica il secondo assioma di numerabilità.

Quindi, per spazi topologici non metrici la separabilità e il II assioma di numerabilità non sono equivalenti.

Il risultato principale di questa sezione è mostrare che, per spazi metrici, varie nozioni di compattezza sono equivalenti:

Teorema A.25. *Se X è uno spazio metrico sono equivalenti*

- X è compatto per ricoprimenti;
- X è compatto per successioni;
- X è numerabilmente compatto.

Dimostrazione. Il Teorema segue dal Corollario (??), una volta provato che uno spazio metrico (X, d) numerabilmente compatto è separabile.

Osserviamo innanzitutto che in uno spazio metrico ogni sottoinsieme chiuso è intersezione numerabile di aperti. Infatti, se C è chiuso sia $U_n = \cup B_c(1/n)$ al variare di $c \in C$; allora $C = \cap U_n$. Dualmente ogni insieme aperto è unione numerabile di chiusi.

Se X è numerabilmente compatto, allora ogni suo chiuso discreto C è finito; infatti se fosse infinito avrebbe un punto di accumulazione, che sarebbe anche punto limite, e quindi contenuto in C . Sia ora A un sottoinsieme discreto qualsiasi. Tale sottoinsieme è aperto nella sua chiusura \overline{A} (perché è discreto), e quindi è unione numerabile di chiusi (discreti) di \overline{A} che sono anche chiusi (discreti) di X . Essendo i chiusi discreti di X insieme finiti segue che A è numerabile.

Da ciò segue che ogni famiglia di aperti disgiunti di X è al più numerabile (altrimenti, scegliendo un punto per ogni aperto costruiremmo un sottoinsieme discreto più che numerabile).

Ora consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme D_n come un insieme massimale tale che ogni coppia di suoi punti abbia distanza $\geq \frac{1}{n}$. L'insieme D_n è numerabile, perché le bolle di raggio $\frac{1}{2n}$ centrate nei suoi punti sono disgiunte.

Sia D l'unione dei D_n . D è numerabile. Mostriamo che è anche denso.

Se così non fosse, esisterebbe un m tale che un punto x non contenuto nella chiusura di D avrebbe distanza $> \frac{1}{m}$ da tutti i punti di D , contraddicendo la massimalità di D_m . \square

A.4 SPAZI LOCALMENTE COMPATTI

Definizione A.26. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *localmente compatto* se ogni suo punto ha un intorno compatto.

Esempio A.27.

- a) Uno spazio topologico compatto è localmente compatto.
- b) Uno spazio topologico con la topologia discreta è localmente compatto.
- c) \mathbb{Q} non è localmente compatto.

Sia $x \in \mathbb{Q}$, sia $U \cap \mathbb{Q}$ un suo intorno, con U aperto di \mathbb{R} e sia $r \in U$ un irrazionale. Dal ricoprimento aperto di \overline{U} costituito dagli aperti $((-\infty, r -$

$1/n) \cup (r + 1/n, +\infty)) \cap \overline{U}$ non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

- d) In uno spazio localmente compatto non è vero che ogni punto ha un intorno a chiusura compatta. Per mostrarlo consideriamo un insieme infinito X e $p \in X$ un suo punto; poniamo su X la topologia τ_p , i cui aperti non banali sono i sottoinsiemi che contengono p .

Sia x un punto di X ; il sottoinsieme $U_x = \{x, p\}$ è un aperto che contiene x ed è compatto, quindi ogni punto di X ha un intorno compatto.

L'unico chiuso di X che contiene p è tutto lo spazio, pertanto la chiusura di qualsiasi intorno di x è X , che non è compatto: per mostrarlo si consideri come ricoprimento quello formato dagli aperti $U_x = \{x, p\}$.

Osservazione A.28. Se X è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto allora ogni punto ha un intorno a chiusura compatta. Infatti un sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Proposizione A.29. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e aperta, e sia X uno spazio localmente compatto. Allora $f(X)$ è uno spazio localmente compatto.

Dimostrazione. Sia $y \in f(X)$ e sia x tale che $f(x) = y$; sia $x \in A \subset K$, con A aperto e K compatto. Allora $y \in f(A) \subset f(K)$, dove $f(A)$ è aperto perché f è aperta e $f(K)$ è compatto perché f è continua. \square

Esempio A.30. L'immagine per un'applicazione continua di uno spazio localmente compatto non è localmente compatta: sia (X, τ) uno spazio non localmente compatto, e sia (X, τ_d) lo stesso spazio con la topologia discreta. L'applicazione identica $\text{Id} : (X, \tau_d) \rightarrow (X, \tau)$ è continua.

Proposizione A.31. Un sottospazio chiuso C di uno spazio localmente compatto X è localmente compatto.

Dimostrazione. Sia $x \in C$, sia U_x un intorno compatto di x in X e sia $V_x = C \cap U_x$. L'insieme V_x è chiuso nel compatto U_x ; e quindi è compatto. \square

Definizione A.32. Sia X uno spazio topologico e sia X^* l'insieme ottenuto aggiungendo a X un punto $*$; su tale insieme definiamo una topologia τ^* in questo modo: U è un aperto non banale di τ^* se e solo se

- i) $U \not\ni *$ e $U \in \tau$.
- ii) $U \ni *$ e U^c è chiuso e compatto in τ .

Lo spazio X^* si dice *compattificazione ad un punto* di X .

Proposizione A.33. (X^*, τ^*) è uno spazio topologico compatto; la topologia indotta su X da τ^* è la topologia τ .

Dimostrazione. Poiché τ è una topologia, unioni e intersezioni finite di insiemi del primo tipo sono ancora insiemi del primo tipo.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una collezione di insiemi del secondo tipo. Il complementare dell'unione $(\cup U_i)^c$ è un chiuso in quanto intersezione di chiusi, ed è compatto in quanto

$$(\cup U_i)^c \subset U_1^c \subset X$$

e U_1^c è compatto.

Il complementare dell'intersezione finita di insiemi del secondo tipo $(\cap U_i)^c = (\cup U_i^c)^c$ è unione finita di chiusi e compatti di τ , e quindi è chiuso e compatto.

Siano ora V un insieme di tipo i) e U un insieme di tipo ii). L'insieme $V \cap U$ è un insieme del primo tipo, in quanto $V \cap U = V \cap (U \setminus *)$, mentre $V \cup U$ è un insieme del secondo tipo, in quanto $(V \cup U)^c = V^c \cap U^c = (V^c \setminus *) \cap U^c$ è chiuso di τ come intersezione finita di elementi di τ e compatto perché contenuto in U^c che è compatto.

Ogni aperto di τ si ottiene evidentemente come un aperto di τ^* intersecato con X ; inoltre ogni aperto di τ^* intersecato con X è un aperto di X (per gli aperti di tipo ii) prendere il complementare in X o in X^* è lo stesso).

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X^* ; uno degli aperti del ricoprimento, sia esso U_0 , contiene $*$, quindi il suo complementare è compatto in X .

L'insieme $\mathcal{U} \setminus U_0$ costituisce un ricoprimento aperto del compatto U_0^c , pertanto esistono U_1, \dots, U_n aperti di \mathcal{U} che coprono U_0^c ; gli aperti U_0, U_1, \dots, U_n costituiscono il sottoricoprimento cercato. \square

Proposizione A.34. X è uno spazio di Hausdorff e localmente compatto $\Leftrightarrow X^*$ è uno spazio di Hausdorff.

Dimostrazione. \Rightarrow) Siano x, y due punti diversi di X^* ; se $x, y \in X$ esistono U_x e U_y disgiunti in τ ; sono intorni aperti anche in τ^* . Sia ora $x \in X$ e $y = *$; poiché X è localmente compatto, esiste U_x tale che $\overline{U_x}$ è compatto; perciò $U_y = X^* \setminus \overline{U_x}$ è aperto in τ_* , ed è disgiunto da U_x .

\Leftarrow) X è di Hausdorff perché sottospazio di X^* ; sia $x \in X$; siano U_x e U_* intorni disgiunti di x e $*$ in X^* ; la chiusura di U_x è contenuta nel compatto $(U_*)^c$, ed è quindi compatta. \square

Esempio A.35. $(\mathbb{R}^2)^* \simeq \mathbb{S}^2$.

Sappiamo che esiste un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus N$, dato dall'inverso della proiezione stereografica. Estendiamolo a $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2)^* \rightarrow \mathbb{S}^2$ definendo $\tilde{f}(*) = N$, e $\tilde{f} = f$ su $\mathbb{S}^2 \setminus N$.

L'applicazione \tilde{f} è chiaramente biunivoca; essendo $(\mathbb{R}^2)^*$ compatto e \mathbb{S}^2 di Hausdorff, per mostrare che \tilde{f} è un omeomorfismo, in virtù del Corollario (??) basta mostrare che \tilde{f} è continua.

Sia $U \subset \mathbb{S}^2$ un aperto; se $U \not\ni N$ allora $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ è aperto di \mathbb{R}^2 ; sia

ora $U \ni N$; U^c è compatto in S^2 , e quindi anche in $S^2 \setminus N$, pertanto $f^{-1}(U^c) = (f^{-1}(U))^c$ è compatto in \mathbb{R}^2 , quindi $f^{-1}(U)$ è aperto.

