GEOMETRIA III

VI Foglio di Esercizi - 19 Maggio 2014

Singolarità e calcolo dei residui

Esercizio 1. Classificare, mediante lo sviluppo in serie di Laurent, la singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}.$$

Esercizio 2. Classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

$$f(z) = \frac{\cos z \cosh z}{z^3\left(z^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2\left(z^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)} \qquad g(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{z}.$$

Esercizio 3. Classificare le singolarità delle seguenti funzioni e stabilire il comportamento delle funzioni all'infinito:

a) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ **b)** $h(z) = \frac{1}{z(z^2+4)^2}$

c) $g(z) = \frac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}$ **d)** $v(z) = \sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$.

Esercizio 4. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo di ordine n per $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e un polo di ordine m per $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dimostrare che z_0 è un polo di ordine n+m per fg ed inoltre classificare la singolarità z_0 per f/g al variare di n ed m.

Esercizio 5. Determinare le singolarità e calcolare i residui delle seguenti funzioni:

a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$ **b)** $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$

c) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ **d)** $f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$

e) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ **f)** $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$

Esercizio 6. Verificare che $z_0 = 0$ è singolarità essenziale per $f(z) = \cosh\frac{1}{z}$.

Esercizio 7. Calcolare i seguenti integrali

a) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z}{z^2-1}dz$ **b)** $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}dz$

c) $\displaystyle\int_{\partial[-1,1]\times[-1,1]} e^{\frac{1}{z}}dz$ **d)** $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z^2}}dz$

e) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$

f) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1}dz$

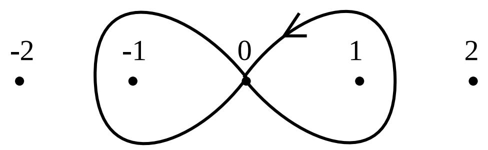
g) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\sin(z+1)}{z(z+1)}dz$

h) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(5+z)(z+i)}dz$

Esercizio 8. Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$.
Si provi che, se f è pari allora $Res_a(f) = -Res_{-a}(f)$, mentre, se f è dispari, allora $Res_a(f) = Res_{-a}(f)$.
Calcolare

$$\int_\Gamma \frac{z^4}{(z^2-1)^2}dz$$

ove Γ è il circuito mostrato il figura, percorso una sola volta nel senso della freccia.



Esercizio 9. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{3z^2-2}{(z-4)(z^2+9)}dz,$$

dove γ è la circonferenza di raggio 5 centrata nell'origine.

Esercizio 10. Calcolare l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin^2\frac{1}{z}dz,$$

dove C è la circonferenza di raggio 2 centrata nell'origine.

Esercizio 11. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{|z|=2} \frac{nz^{n-1}}{z^n-1}dz$$

calcolando i residui nei poli della funzione integranda.

Esercizio 12. Calcolare con il teorema dei residui i seguenti integrali indefiniti:

Sia $Q(x,y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ una funzione razionale tale che $h(x,y) \neq 0$ nei punti della circonferenza unitaria $x^2+y^2=1$, e sia $f(z) = \frac{Q\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)}{iz}$.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} Q(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = 2\pi i\sum_{z_j} Res_{z_j}(f)$$

dove gli z_j sono i poli di f all'interno di $x^2+y^2=1$.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin\theta} d\theta \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},\ a > 1 \qquad \left[\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\sin\theta} \qquad \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 - \cos\theta)^2} \qquad \left[\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\right]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos\theta + 5} d\theta \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},\ a > 1 \qquad \left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta)^2}{2 + \sin\theta} d\theta \qquad \left[2\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)\right]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13 + 12\cos\theta} d\theta \qquad \left[\frac{-4\pi}{15}\right]$$

SVILUPPI IN SERIE

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$