Analisi Complessa: extrema summa

Leonardo Errati

19 agosto 2020

Indice

Lo scopo di questo testo è fornire un supporto discorsivo allo studio del corso adorato da grandi e piccoli: analisi complessa!
Il qui presente testo non intende in alcun modo sostituire le lezioni. Infatti non ho inserito le dimostrazioni.

1 Da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$: analisi complessa

Cos'è $\mathbb{C}$, e cosa vuole da $\mathbb{R}^2$?
Trasferire l'analisi reale al campo complesso non è sempre immediato, nonostante $\mathbb{C}$ sia isomorfo ad $\mathbb{R}^2$ - come visto in topologia. Ad esempio la proprietà $i^2 = -1$ induce una nuova relazione tra le due componenti vettoriali che in $\mathbb{R}^2$ non avevamo.

1.1 Le funzioni olomorfe

Una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si può vedere come una $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

1.1.1 Continuità e differenziabilità in senso complesso

Definizione 1 (Funzione olomorfa)**.**

1. Per proprietà universale del prodotto f è **continua** se e solo se sono continue u e v, possiamo usare questa come definizione.

2. $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è **differenziabile in** z se esiste un $f'(z) \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(z + h) - f(z) = f'(z)h + o(\|h\|)$$

   Siccome è analogo al caso reale si mantengono le proprietà note. [1]
   In particolare si dice **olomorfa in** Ω se è differenziabile in ogni suo punto.

$$f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

3. Si dice **biolomorfismo** una funzione olomorfa e biettiva con inversa olomorfa; si dimostra che ogni aperto semplicemente connesso in $\mathbb{C}$ (che non sia l'intero spazio ambiente) è biolomorfo ad un disco aperto.
   Questo punto non fa parte del corso, è solo magnifico.

Continuità e derivabilità si possono trasferire da $\mathbb{R}$ (o più nello specifico da $\mathbb{R}^2$) a $\mathbb{C}$ in modo straordinariamente facile, ma scavando sotto la struttura analitica troviamo i primi segni di *nuove relazioni* che prima non erano presenti.

[1] ad esempio mantengono le formule di derivazione dato che questa definizione equivale a richiedere che esista finito il limite del conseguente rapporto incrementale per $h \to 0$.

Teorema 1 (Cauchy-Riemann)**.**

1. Condizioni di Cauchy-Riemann: f complessa da definizione e con u, v continue in Ω è differenziabile in z se e solo se
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
Definendo i nuovi operatori $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, si vede che f soddisfa le condizioni se e solo se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
Questi sono detti gli *operatori di Wirtinger*.

2. $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armonica su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, allora esiste una $v : \Omega \to \mathbb{R}$ armonica (unica a meno di costante) tale che la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa.

Dalle condizioni di Cauchy-Riemann possiamo notare che una f derivabile in senso complesso è necessariamente derivabile in senso reale (in $\mathbb{R}^2$), il contrario non vale perché *l'essere funzione olomorfa è una condizione più restrittiva.*
Inoltre notiamo anche che se u è una funzione reale posso estenderla in modo che sia parte reale di una funzione olomorfa $f = u + iv$: se in particolare la funzione reale u è analitica allora si estende in modo unico ad f (a meno di costante).

Definizione 2 (Funzione armonica)**.**
Diciamo **armonica** una funzione $g(x,y)$ tale che
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$
Dalle condizioni di Cauchy-Riemann segue che g è armonica se è parte reale di una f olomorfa.

1.2 Serie di potenze complesse

Definizione 3. Sia $\{f_n(z)\}$ una successione di funzioni in $\mathbb{C}$.

1. **Converge puntualmente ad f in** Ω se
$$\forall z \in \Omega \ \lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$$

2. **Converge uniformemente ad f in** Ω se
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \ \sup_{z\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
(oppure analogamente se $\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$)

Sia invece $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ una serie di funzioni in $\mathbb{C}$.

1. **Converge puntualmente in** Ω se $\forall z \in \Omega$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge.
2. **Converge assolutamente in** Ω se $\forall z \in \Omega$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)|$ converge.

3. **Converge uniformemente in** Ω se la successione delle forme parziali converge uniformemente in Ω.

Notiamo che non esistono implicazioni tra convergenza uniforme ed assoluta, in nessuno dei due sensi.

Teorema 2 (M test di Weierstrass)**.** Sia data una successione di funzioni in Ω, siamo $M_n \in \mathbb{R}$ maggiorazioni dei moduli delle $f_n(z)$ in tutto Ω (questa si dice **convergenza totale**), allora se la serie degli M_n converge la serie delle funzioni converge assolutamente ed uniformemente in Ω.

Teorema 3 (Teorema di Hadamard)**.** Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze, sia $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. Se $|z-z_0| < R$ la serie converge assolutamente, inoltre converge uniformemente per $|z-z_0| \le r < R$.

2. Se $|z-z_0| > R$ la serie diverge.

Si dimostra facilmente che una serie ha lo stesso raggio di convergenza R della sua serie derivata.

Teorema 4 (Teorema di Abel)**.** Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con R positivo, allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

è una funzione olomorfa in $|z-z_0| < R$ ed ha derivata

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

Ogni serie di potenze è olomorfa nel suo disco di convergenza.

Osservazione 1 (Estendere serie reali)**.** Banalmente una serie di potenze reale può essere estesa ad una serie complessa considerando x come una variabile complessa. Ci si aspetta che l'estensione di R reale sia R complesso, ma è bene valutare attentamente i nuovi bordi del dominio. Ad esempio la funzione

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$$

ha $R = 1$ ed in $\mathbb{R}$ converge per $[-1, 1]$, ma in $\mathbb{C}$ "estendere" l'intervallo ad una circonferenza porta a dei casi particolari: la serie **non converge** per $z = \pm i$.

1.3 Estensione in $\mathbb{C}$ di funzioni a variabili reali

Estendere a $\mathbb{C}$ alcune delle classiche funzioni reali può sembrare un passaggio ovvio ed immediato, ma preservare delle "buone proprietà" per alcune funzioni richiede uno studio preliminare.

Definizione 4.

1. Definiamo la funzione **esponenziale complessa** come

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

   (a) La funzione è olomorfa su $\mathbb{C}$ per teorema.

   (b) La derivata della serie (funzione) è la serie (funzione) stessa.

   (c) Sostituendo con le serie di $i \sin\theta$ e $\cos\theta$ si vede che rispetta la definizione di forma esponenziale di z.

   (d) Poiché $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$, ha periodo $2\pi i$.

   (e) Non assume mai il valore zero perché per $\alpha \neq 0$

$$e^z = \alpha \implies e^x e^{iy} = |\alpha| e^{i \arg\alpha} \implies \begin{cases} x = \ln|\alpha| \\ y = \arg\alpha + 2k\pi \end{cases}$$
$$\implies z_k = \ln|\alpha| + i(\arg\alpha + 2k\pi)$$

2. Definiamo **seno e coseno complessi** come

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2k!}$$

   (a) Si vede che $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ per parità e disparità delle funzioni.

   (b) Sono periodiche di periodo $2\pi i$ ed hanno zeri solo dove si annullano le corrispondenti reali.

$$\cos z = \alpha \implies e^{iz} + e^{-iz} = 2\alpha \implies e^{-iz}\left(e^{2iz} - 2\alpha e^{iz} + 1 = 0\right)$$
$$\implies e^{iz} = \begin{cases} \alpha_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \neq 0 \\ \alpha_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \neq 0 \end{cases} \implies \text{[esponenziale]}$$
$$\implies z_{jk} = \arg\alpha_j + 2k\pi - i \ln|\alpha_j| \quad j = 1, 2$$

   e per $\alpha = 0$ le soluzioni sono $z_k = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

   (c) Le due funzioni hanno come immagine tutto $\mathbb{C}$.

   (d) Possiamo trovare parte reale ed immaginaria delle due funzioni come

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$
$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

   dove $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$ sono le funzioni **iperboliche complesse**.

3. Le funzioni **tangente e cotangente complessa** non si estendono con la serie di potenze reale (R sarebbe finito!) ma come rapporto tra le funzioni esponenziali.

4. Proviamo a definire il logaritmo di α come il $z \in \mathbb{C}$ tale che $e^z = \alpha$.

(a) Ogni numero complesso (meno lo zero) ha infiniti logaritmi del tipo

$$z_k = \ln|\alpha| + i(\arg\alpha + 2k\pi)$$

Non si tratta di una infinità numerabile (come l'arcotangente reale), se $z \in \mathbb{R}^+$ ($\arg z \in [0, 2\pi)$)per $k = 0$ ho

$$\log z = \ln z \qquad \lim_{\theta\to 2\pi} \log(|z|e^{i\theta}) = \ln z + 2i\pi$$

e quindi non è continua nel semiasse reale positivo; questo problema nasce se l'insieme di definizione contiene una curva chiusa che circonda l'origine.

(b) Devo definirla in un Ω connesso che non contiene lo zero, posso farlo ed ottenere una funzione continua se e solo se (j inclusione di Ω in $\mathbb{C}$) $j_* : \pi(\Omega, z_0) \to \pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}), z_0)$ dato $z_0 \in \mathbb{C}$ è l'omeomorfismo nullo.

(c) Dico **logaritmo principale**[2] $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) \to \mathbb{C}$

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\arg z \qquad \arg z \in (-\pi, \pi]$$

(d) arg è la funzione *argomento principale*, ed è compresa tra $(-\pi, \pi]$.

(e) La funzione logaritmo principale è olomorfa nel suo dominio ed ha derivata

$$\big(\mathrm{Log}(z)\big)' = \frac{1}{z}$$

5. Dico **funzione potenza per** $a \in \mathbb{C}$ (fissato) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$$z^\alpha = e^{a\,\mathrm{Log}(z)}$$

e dico per $a \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ la **funzione esponenziale** come

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Log}(a)}$$

(a) La funzione potenza è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, la funzione esponenziale in $\mathbb{C}$.

(b) $(z^a)' = az^{a-1}$

(c) $(a^z)' = (\mathrm{Log}\, a)a^z$

[2]**non** preserva le proprietà del logaritmo reale, in generale $\mathrm{Log}(z^2) \neq 2\,\mathrm{Log}\, z$; inoltre per scelte diverse di k dalla formula $w_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ ottengo diverse ramificazioni (**branche**) $\mathrm{Log}_k\, z$ della funzione logaritmo principale.

2 Analisi in $\mathbb{C}$: introduzione

2.1 Integrazione lungo curve in $\mathbb{C}$

Cerchiamo di definire l'integrale di una funzione complessa lungo una curva contenuta nel dominio Ω di f.

Teorema 5. Se consideriamo un intervallo $\Omega = [a,b]$ di $\mathbb{R}$ possiamo sfruttare la scrittura $f = u + iv$ per ottenere le seguenti.

1. $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\ dt + \mu \int_a^b g(t)\ dt$
2. $\int_a^b \mathfrak{Re}\, f(t)\ dt = \mathfrak{Re}\left(\int_a^b f(t)\ dt\right)$, $\int_a^b \mathfrak{Im}\, f(t)\ dt = \mathfrak{Im}\left(\int_a^b f(t)\ dt\right)$
3. $|\int_a^b f(t)\ dt| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$
4. Se esiste una funzione F derivabile in $[a,b]$ tale che $f = F'$, allora
$$\int\limits_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$$
5. Se $g : [a,b] \to [c,d]$ è C^1 ed invertibile di inversa C^1, allora
$$\int\limits_c^d f(t)\ dt = \int\limits_a^b f\big(g(t)\big)g'(t)\ dt$$

2.1.1 Integrali su curve regolari

Definizione 5 (Curve regolari)**.**

1. Sia J un intervallo reale, una **curva regolare in** $\mathbb{C}$ è una $\gamma : J \to \mathbb{C}$ di classe C^1 tale che $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t \in J$.
   Si dice regolare a tratti se questo vale su J meno un numero finito di punti.
2. Dico **riparametrizzazione di** γ una curva regolare $\overline{\gamma}(t) = \gamma \circ \theta$ con $\overline{J}$ intervallo e $\theta : \overline{J} \to J$ di classe C^1 ed invertibile di inversa C^1.
3. Dico **lunghezza della curva regolare** γ **tra** $\gamma(a)$ **e** $\gamma(b)$
$$l(\gamma) = \sup_S l(\gamma, S)$$
   Abbiamo usato S una suddivisione di J del tipo $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, $l(\gamma, S) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ lunghezza della poligonale inscritta con vertici nei $\gamma(t_i)$.

Vediamo le proprietà dell'integrazione lungo curve regolari (si possono estendere facilmente alle curve regolari a tratti).

Teorema 6.

1. Se γ è una curva regolare $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt$, non dipende dalla parametrizzazione della curva.
2. Definendo $\int_\gamma f(z)\ dz$ come $\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\ dt$ **l'integrale di una funzione lungo una curva regolare**, questo gode delle seguenti proprietà.
   (a) $\int_\gamma \lambda f(t) + \mu g(t)\ dt = \lambda \int_\gamma f(t)\ dt + \mu \int_\gamma g(t)\ dt$
   (b) $\int_\gamma \mathfrak{Re}\, f(t)\ dt = \mathfrak{Re}\Big(\int_\gamma f(t)\ dt\Big)$, $\int_\gamma \mathfrak{Im}\, f(t)\ dt = \mathfrak{Im}\Big(\int_\gamma f(t)\ dt\Big)$
   (c) $|\int_\gamma f(t)\ dt| \le \max_\gamma |f(z)| l(\gamma)$
   (d) Se il supporto di γ è contenuto in Ω aperto ed esiste una funzione F olomorfa in Ω tale che $f = F'$ (è sua primitiva olomorfa) allora
   $$\int_\gamma f(t)\ dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Da questo vediamo che gli integrali nella regione Ω di funzioni olomorfe di primitiva olomorfa su Ω lungo qualsiasi curva chiusa sono nulli.

2.1.2 Teorema di Cauchy: versione locale

Vediamo una formulazione iniziale del teorema di Cauchy, detta "locale". In seguito

Teorema 7 (Teorema di Goursat)**.** Sia f olomorfa su Ω aperto, R rettangolo contenuto in Ω. Allora parametrizzando il bordo del rettangolo in senso antiorario

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$$

Corollario 1 (Teorema di Cauchy locale)**.** Siano D un disco aperto, f olomorfa in D, γ curva chiusa il cui supporto è contenuto in D. Allora

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

Corollario 2. Siano D un disco aperto, f olomorfa in D, γ_1 e γ_2 curve con lo stesso punto iniziale e finale (il cui supporto è contenuto in D). Allora l'integrale di f non dipende dalla curva scelta.

Possiamo anche indebolire le ipotesi dei teoremi e dei corollari: si noti che se f è continua o limitata allora l'ipotesi sostitutiva (quella di limite) è valida.

Teorema 8. Sia f olomorfa in Ω meno un insieme di punti $a_1, \dots, a_n$ tale che $\lim_{z\to a_i}(z - a_i)f(z) = 0\ \forall i$. Sia R un rettangolo contenuto in Ω il cuo bordo è contenuto in Ω meno gli a_i. Allora

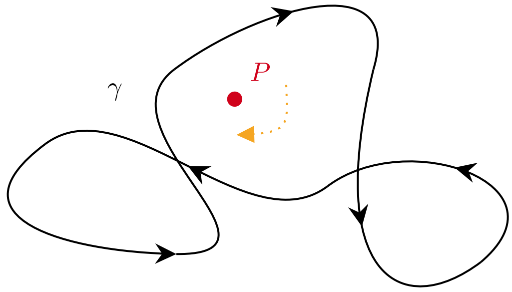
$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$$

Corollario 3. Sia f olomorfa in Ω meno un insieme di punti $a_1, \dots, a_n$ tale che $\lim_{z\to a_i}(z - a_i)f(z) = 0\ \forall i$. Sia γ una curva chiusa il cui supporto è contenuto in Ω meno gli a_i. Allora

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$$

2.1.3 L'indice di un punto

Parleremo brevemente dell'indice di un punto rispetto ad una curva, che indicherà intuitivamente il numero di avvolgimenti compiuti dalla curva intorno al punto.
Si dice spesso anche *indice di avvolgimento*.
Sempre parlando in maniera intuitiva, il "valore" di un avvolgimento in senso antiorario è +1, in senso orario è −1.



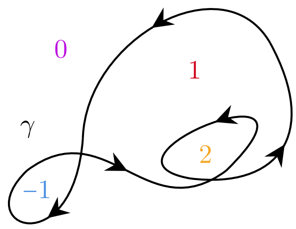
Sarà importante nel nostro studio in quanto invariante topologico ed omotopico, ma anche nella trattazione del *teorema dei residui* per il calcolo degli integrali di funzioni olomorfe e meromorfe.

Definizione 6 (Indice)**.** Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$. Diciamo **indice del punto** $z \in \Omega$ **rispetto alla curva** γ il numero

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\omega - z} d\omega$$

Teorema 9.

1. L'indice è un numero intero.
2. Sia Ω un aperto, γ una curva il cui supporto è in Ω e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione tale che la sua restrizione a $\mathrm{supp}(\gamma)$ sia continua, allora la seguente funzione è olomorfa in $\Omega \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$.
$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} dw$$
3. La funzione indice è continua su Ω per γ curva chiusa ed $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$.
4. L'indice è una funzione costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$. In particolare sulla componente connessa illimitata (non compresa tra i punti del supporto) l'indice vale 0.



Inoltre possiamo osservare che se esiste un numero finito di punti $a_1, \ldots, a_n \in D$ tali che f è olomorfa in D meno gli a_i, se vale che

$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i) f(z) = 0 \quad \forall i$$

allora la tesi vale per $z \neq a_i$.

2.1.4 La formula integrale di Cauchy: applicazioni

Dopo il teorema rivedremo alcuni risultati classici dell'analisi ma dal punto di vista dell'analisi complessa.

Teorema 10 (Formula integrale di Cauchy locale)**.** Sia D un disco aperto, sia f olomorfa in D, sia γ una curva chiusa con supporto in D. Allora

$$\forall z \notin \operatorname{supp}(\gamma) \quad f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\omega - z} d\omega$$

Curve di Jordan e media integrale

Definizione 7 (Curve di Jordan)**.** Una curva si dice **di Jordan** se è semplice, chiusa e di classe C^1 a tratti.

Teorema 11 (Teorema della curva di Jordan)**.** Se $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\gamma)$ ha una componente limitata (l'interno della curva) ed una illimitata (l'esterno della curva), se γ è orientata positivamente, l'indice vale 1 nella componente limitata. [1]

Corollario 4. Se γ è una curva di Jordan in D ed f è una funzione olomorfa in D, allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad \forall x \in \operatorname{interno}(\gamma)$$

Corollario 5 (Teorema della media integrale)**.** Sia f olomorfa in D e B un disco aperto di raggio r centrato in $a \in D$, allora

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$$

Le singolarità eliminabili

Teorema 12. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto contenente a ed f olomorfa in $\Omega \setminus \{a\}$ con

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$$

Allora esiste un'unica funzione g olomorfa in Ω tale che la sua restrizione al dominio di f è proprio f.

Definizione 8. Se una funzione rispetta le ipotesi del teorema diciamo che ha **una singolarità eliminabile in** a.

Teorema di Weierstrass: f olomorfa $\iff$ f analitica

Teorema 13 (Teorema di Weierstrass)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto in cui f è olomorfa, sia $z_o \in \Omega$. Allora esiste un intorno circolare B di raggio r di z_0 in cui $f(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n$, dove abbiamo usato γ bordo della chiusura di B e

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Corollario 6. Una funzione olomorfa è C^∞.

[1] le componenti connesse "interne" sono finite perché il supporto di gamma è compatto per le curve di Jordan.

Formula delle derivate

Corollario 7 (Formula delle derivate)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto in cui f è olomorfa, sia $z_o \in \Omega$; allora se la chiusura di $B_{z_0}(r)$ (di bordo γ) si trova in Ω si ha che

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Maggiorazione di Cauchy

Corollario 8 (Maggiorazione di Cauchy)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto in cui f è olomorfa, sia $z_o \in \Omega$; sia γ il bordo di un disco chiuso centrato in z_0 di raggio r e contenuto in Ω.

$$M = \max_\gamma |f| \implies |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

Teorema di Liouville

Corollario 9 (Teorema di Liouville)**.** Se una funziole olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ è limitata, allora questa è la funzione costante.

Corollario 10. Sia f olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, se una tra $\mathfrak{Re}(f)$ ed $\mathfrak{Im}(f)$ è limitata allora f è la funzione costante.

Teorema fondamentale dell'algebra

Corollario 11 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** Sia $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado positivo, allora esiste un $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_0) = 0$.

Teorema di Morera

Teorema 14 (Teorema di Morera)**.** Sia D un disco aperto, sia $f \in C(D)$ tale che per ogni R rettangolo contenuto in D si abbia

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$$

Allora f è olomorfa in D.

Corollario 12. Sia Ω un disco aperto ed $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in Ω, allora se f_n converge uniformemente ad f sui compatti di Ω anche f è olomorfa in Ω.

2.2 I teoremi integrali generali di Cauchy

Li diciamo "generali" perché sono una versione generalizzata di quelli che abbiamo visto; ad esempio il dominio di integrazione non è più un disco ma un qualunque aperto e le curve di integrazione possono assumere forme ben peggiori.

2.2.1 Catene omologhe

Definizione 9 (Catene omologhe)**.**

1. Siano le $\gamma_i : J \to \mathbb{C}$ curve chiuse regolari a tratti, una somma formale finita a coefficienti interi $\gamma = \sum_{=1}^{n} m_i \gamma_i$ si dice **catena**. [2]

2. Possiamo definire l'integrale sulla catena γ come
$$\int_\gamma f(z)\ dz = \sum_i m_i \int_{\gamma_i} f(z)\ dz$$
ed analogamente l'indice sulla catena come
$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \sum_i m_i \operatorname{Ind}_{\gamma_i}(z)$$

3. Sia Ω un aperto e γ una catena il cui supporto è contenuto in Ω, la catena γ si dice omologa a zero in Ω se
$$\forall z \notin \Omega \quad \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$$
   (a) In simboli $\gamma \sim_\Omega 0$.
   (b) Due catene η, ν sono omologhe in Ω se $\eta - \nu \sim_\Omega 0$.
   (c) Le catene possono essere sommate ottenendo una catena.

Teorema 15.

1. Se Γ è una curva di Jordan, allora è omologa a zero in Ω se e solo se il suo interno è contenuto in Ω.

2. Sia Ω un aperto e γ una catena omologa a zero in Ω, siano $z_1, \ldots, z_n$ punti di Ω e D_i dischi disgiunti due a due centrati nei z_i con chiusura contenuta in Ω. Detti γ_i i bordi delle chiusure dei dischi, se $m_i = \operatorname{Ind}_\gamma(z_i)$ ed $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, allora
$$\gamma \sim_{\Omega'} \sum_i m_i \gamma_i$$

3. Sia Ω aperto in cui f è olomorfa, allora $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definita come segue è continua.
$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

2.2.2 La formula generale di Cauchy

La formula generale di Cauchy è una formula integrale fondamentale per l'analisi complessa, è interessante notare che non ha controparte in $\mathbb{R}^2$.

[2]intuitivamente moltiplicare per un coefficiente k una curva fa percorrere la curva k volte nella catena; se k è negativo però devo invertire la direzione di percorrenza originale.

Teorema 16 (Formula generale di Cauchy)**.**

1. (Formula integrale di Cauchy) Siano Ω un aperto, γ una catena omologa a zero in Ω, f olomorfa in Ω e $z \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\gamma)$, allora

$$f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)w - zdw$$

2. (Teorema dell'integrale nullo) Siano Ω un aperto, γ una catena omologa a zero in Ω, f olomorfa in Ω e $z \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\gamma)$, allora

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

Corollario 13. Se due catene Γ e Γ' sono omologhe tra loro in Ω, allora

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\gamma'} f(z)\ dz$$

2.3 Studio delle curve: applicazioni

Teorema 17.

1. Siano γ_1 e γ_2 curve chiuse di classe C^1 a tratti definite su $[a, b]$ e tali che z non appartiene al loro supposto. Gli indici di z rispetto alle due curve sono uguali se vale che

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_2(t) - z| \quad \forall t \in [a, b]$$

2. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa, z non appartenente al suo supporto. Allora

$$\exists\ \delta > 0 \mid \text{tale che } \forall \gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}\ C^1 \text{ a tratti}$$
$$\text{con } \|\gamma - \gamma_i\| < \delta \text{ si ha } \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z)$$

dove utilizzo come distanza $\sup_{[a,b]}|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)$, la **norma del massimo**.

Questo ci permette di definire l'indice di un punto rispetto ad una curva continua chiusa non necessariamente C^1 a tratti, infatti posso approssimare uniformemente la curva con una serie di curve poligonali: *in questo modo estendo la teoria delle curve C^1 a tratti ad ogni curva continua* (chiusa).

Teorema 18.

1. Sia Ω aperto, se due curve sono continue, chiuse ed omotope in Ω allora hanno lo stesso indice per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$: questo vuol dire che sono omologhe in Ω.

2. Sia Ω aperto ed f olomorfa in Ω, se γ_1 e γ_2 sono curve chiuse di classe C^1 a tratti omotope in Ω allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2} f(z)$$

3. Sia Ω aperto ed f olomorfa in Ω, se due curve γ_1 e γ_2 sono omotope di classe C^1 a tratti omotope relativamente a $\{0,1\}$, allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2} f(z)$$

Osservazione 2 (Applicazioni)**.**

1. (Gruppo fondamentale di S^1) Definiamo $\Phi : \pi(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ con $\Phi([\gamma]) = \mathrm{Ind}_\gamma(0)$, vediamo che Φ è isomorfismo di gruppi quindi posso calcolare il gruppo fondamentale di S^1.

2. (Armoniche coniugate) Se Ω è aperto e semplicemente connesso con $u \in C^2(\Omega)$ armonica, allora esiste una $v \in C^2(\Omega)$ tale che la funzione $f = u + iv$ è olomorfa in Ω; si dice **armonica coniugata di** u.

3 Analisi in $\mathbb{C}$: le singolarità

3.1 Serie di Laurent e singolarità isolate

A volte le funzioni olomorfe hanno singolarità isolate: ad esempio $f(z) = \frac{1}{z}$ in $z = 0$. Le serie di Laurent possono essere usate per descrivere questo tipo di funzioni, olomorfe su tutto $\mathbb{C}$ meno alcuni punti. A differenza delle serie di Taylor quelle di Laurent includono anche termini per indici negativi, quindi l'insieme di convergenza sarà un anello (e non un disco).

3.1.1 Le serie di Laurent

Definizione 10 (Serie di Laurent)**.** Diciamo **serie di Laurent** una serie di potenze nella forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i(z-z_0)^i + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j}(z-z_0)^{-j}$$

con $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ fissato e $z \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$.

1. Si dimostra che esistono R ed r positivi (al più nulli) tali che la serie converge assolutamente in una corona circolare del tipo

   $$C_{z_0}(r,R) = \{z \in \mathbb{C} \, | r \leq |z-z_0| < R\}$$

   e converge uniformemente sulla chiusura di ogni corona circolare $C_{z_0}(r', R')$ ma con $R' < R$, $r' > r$.
   In ogni altro punto non converge.

2. Se $r < R$ questa corona è non vuota e la serie di Laurent ha somma f olomorfa in $C_{z_0}(r,R)$.

3. Se ho f olomorfa su una corona del tipo $C_{z_0}(r,R)$, allora posso esprimerla come serie di Laurent (**sviluppo di Laurent**).

4. Si dice **intera** una funzione che in ogni punto ha una rappresentazione come serie di potenze con raggio di convergenza infinito, ed è facile dimostrare che una funzione olomorfa su Ω è intera solo se $\Omega = \mathbb{C}$.

Teorema 19. Sia f olomorfa in un dominio Ω aperto contenente la corona circolare chiusa

$$\overline{C_{z_0}(r,R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z-z_0| \leq R\}$$

con $r < R$. Allora $\forall z \in C_{z_0}(r,R)$ posso scrivere f come

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$$

1. La convergenza è assoluta in $C_{z_0}(r,R)$ ed uniforme su ogni $\overline{C_{z_0}(r',R')}$ con $r' > r$, $R' < R$.

2. I coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

   dove $\gamma_{r'}$ è il bordo della circonferenza $B_{z_0}(r')$ percorsa in senso anriorario e $r \leq r' \leq R$.

   (a) Posso integrare lungo una qualsiasi curva di Jordan $\gamma \sim_\Omega \gamma_{r'}$.

   (b) Se f è olomorfa in $B_{z_0}(R)$ i coefficienti a_n per $n < 0$ sono nulli, la serie di Laurent diventa lo sviluppo in serie di potenze.

   (c) Il coefficiente a_{-1} si dice **residuo di** f **in** z_0 ed è definito per ogni curva di Jordan γ in Ω e z_0 appartenente all'interno di γ.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\ dw$$

3.1.2 Singolarità isolate di funzioni olomorfe

Definizione 11 (Singolarità isolate)**.** Sia D il disco aperto centrato in z_0, se f è olomorfa in tutto D meno z_0 si dice che z_0 **è singolarità isolata di** f. Posso classificare le singolarità isolate.

classe	*condizione necessaria sufficiente*
z_0 è **eliminabile**[1]	$a_n = 0\ \forall n > 0$ nello sviluppo di Laurent
z_0 è **polo di ordine** $m > 0$	$a_{-m} \neq 0$, inoltre $\forall n < -m$ vale $a_n = 0$
z_0 è **singolarità essenziale**	esistono infiniti a_n non nulli per $n < 0$

Teorema 20.

1. f ha un polo di ordine m in z_0 se e solo se la funzione $g = \frac{1}{f}$ è olomorfa in un intorno di z_0 ed ha uno zero di ordine m in z_0 (cioè $g^{(k)}(z_0) = 0$ per $k = 0, \ldots, m-1$ ed è non nulla per $k = m$).

2. (Casorati - Weierstrass) Se f è olomorfa in $D \setminus \{z_0\}$ e z_0 è una singolarità essenziale di f, allora $f(D \setminus \{z_0\})$ è un sottoinsieme denso di $\mathbb{C}$.

Il teorema di Casorati-Weierstrass mostra che le funzioni olomorfe hanno un comportamento selvaggio intorno alle singolarità essenziali. Queste - al contrario delle altre due singolarità - non possono essere trattate in alcun modo.

[1] una singolarità è eliminabile se $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = 0$, ovviamente la singolarità eliminabile è un tipo di singolarità isolata.

Definizione 12 (Funzioni meromorfe)**.** Sia $S \subset \Omega$ sottoinsieme discreto di Ω aperto, se f è olomorfa in $\Omega \setminus S$ ed ha poli o singolarità eliminabili nei punti di S allora è detta **meromorfa su** Ω.

$$f \in \mathcal{M}(\Omega)$$

Osservazione 3 (Funzioni meromorfe)**.**

1. Una funzione meromorfa f si può esprimere come frazione di funzioni olomorfe g ed h (quindi $f = g/h$), i suoi poli sono gli zeri della funzione al denominatore (h).
2. Una funzione meromorfa si comporta localmente come funzione olomorfa.
3. Data una funzione olomorfa f con singolarità nel punto z_0, posso porre formalmente $f(z_0) = +\infty$ ottenendo una funzione meromorfa; in particolare si potrebbe dire che le funzioni meromorfe sono funzioni

$$f : \Omega \to \mathbb{P}\big(\mathbb{C}\big)$$

quindi dal piano proiettivo di $\mathbb{C}$ al piano proiettivo stesso. Questo ha radici nella costruzione di Riemann dell'analisi complessa.

Osservazione 4 (Caratterizzazione locale)**.** Posso caratterizzare in modo locale il tipo delle singolarità isolate, quindi in base al comportamento di f (olomorfa in $D \setminus \{z_0\}$) in z_0.

classe	*condizione necessaria sufficiente*
z_0 è **eliminabile**[2]	$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) < +\infty$
z_0 è **polo di ordine** $m > 0$	$\exists \lim_{z\to z_0} \lvert f(z)\rvert = +\infty$
z_0 è **singolarità essenziale**	$\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$

La caratterizzazione delle singolarità tramite limiti è utile nel caso di serie di Laurent non facile da scrivere: ovviamente se avessi la serie di Laurent potrei utilizzare la definizione.

Osservazione 5 (Manipolazione delle singolarità)**.** Posso moltiplicare una serie di Laurent per $(z - z_0)^k$ per modificare l'ordine della singolarità in z_0 di k volte. Ad esempio posso rendere i poli singolarità eliminabili.

3.2 Studio dei residui: applicazioni

Abbiamo visto che se z_0 è una singolarità isolata di f (olomorfa in $D \setminus \{z_0\}$) il **residuo di** f **in** z_0 è

$$\text{Res}_{z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\,dw$$

con γ curva di Jordan centrata in z_0 e supporto contenuto in Ω, percorsa in senso antiorario.

Intuitivamente il residuo determina il valore dell'integrale di f lungo una curva che abbia indice di avvolgimento 1 intorno alla singolarità.

1. Descrive il comportamento delle funzioni olomorfe intorno ai punti di singolarità.
2. Non dipende dalla curva su cui viene svolto (sotto certe condizioni), ma dal comportamento della funzione intorno alla singolarità in z_0.

3.2.1 Lo studio dei residui

Teorema 21 (Teorema dei residui)**.** Sia Ω aperto, $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ ed f olomorfa in $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Sia γ catena in Ω tale che $\operatorname{supp}(\gamma) \cap \{z_1, \dots, z_n\} = \varnothing$ e $\gamma \sim_\Omega 0$. Allora vale che

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) \operatorname{Res}_{z_i}(f)$$

Definizione 13 (Residuo all'infinito)**.**

1. Sia Ω intorno aperto dell'infinito (aperto contenente il complementare di un insieme limitato di $\mathbb{C}$), se f è olomorfa in Ω si dice che f ha una singolarità isolata all'infinito.
   (a) Questo significa che la funzione $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ ha una singolarità isolata in $w = 0$.
   (b) Il tipo di singolarità di f all'infinito è lo stesso di g in 0, e se 0 è eliminabile per g allora si dice che f **è olomorfa all'infinito**.
2. Il residuo all'infinito di f è
   $$\operatorname{Res}_\infty(f) = \operatorname{Res}_0\left(-\frac{g(w)}{w^2}\right)$$
   (a) Si dimostra che se f è olomorfa in Ω (con Ω contenente $\mathbb{C} \setminus B_0(R)$) allora
   $$\operatorname{Res}_\infty(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)\ dz$$
   (b) Se f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, allora
   $$\operatorname{Res}_\infty(f) + \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z_i}(f) = 0$$

Possiamo formulare una serie di risultati che semplificano il calcolo dei residui per una funzione olomorfa con singolarità isolate.

Teorema 22.

1. Se f ha un polo semplice (di ordine 1) in z_0 e g è olomorfa in un intorno di z_0, allora
   $$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0)\operatorname{Res}_{z_0}(f)$$
2. Se f ha uno zero semplice all'infinito ($g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ ha una singolarità eliminabile in $w = 0$ e $w = 0$ è semplice per l'estensione olomorfa di g), allora
   $$\operatorname{Res}_\infty(f) = -\lim_{z\to\infty}\big(z\ f(z)\big)$$

3. Se f è olomorfa in un intorno di z_0 ed ha uno zero semplice in z_0, allora $1/f$ ha un polo semplice in z_0. Inoltre
$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(1/f\right) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

4. Se f ha un polo di ordine m in z_0, allora
$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}\right]$$
   (a) Se è polo semplice ($m = 1$)
$$g(z) = (z-z_0)f(z) \implies \mathrm{Res}_{z_0}(f) = g(z_0)$$
   (b) Se è polo doppio ($m = 2$)
$$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) \implies \mathrm{Res}_{z_0}(f) = g'(z_0)$$

3.2.2 Applicazioni dei residui agli integrali in $\mathbb{R}$

Caso I Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua, restrizione di una f olomorfa in $\Omega \smallsetminus \{z_1, \dots, z_n\}$ (dove Ω è un dominio contenente $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) \le 0\}$), gli elementi $z_i \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0\}$).
Se esistono $M, K > 0$ ed $a > 0$ tali che
$$|f(z)| \le \frac{K}{|z|^{1+a}} \quad \text{per } |z| \ge M$$
allora vale
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_i}(f)$$

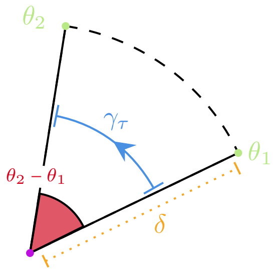
1. Per $x \in \mathbb{R}$ vale $|f(x)| \le \frac{K}{|x|^{1+a}}$, integrabile sulle semirette $(-\infty, \alpha)$ e $(\beta, +\infty)$ per ogni $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Allora esistono finiti i limiti
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{(-R,\alpha)} f(x)\ dx \qquad \lim_{R\to+\infty}\int_{(\beta,R)} f(x)\ dx$$
2. Di conseguenza esiste anche l'integrale su $\mathbb{R}$ in quanto limite (finito) dell'integrale su $(-R, R)$.

Caso II Consideriamo una stima diversa per il modulo della funzione.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua, restrizione di una f olomorfa in $\Omega \smallsetminus \{z_1, \dots, z_n\}$ (dove Ω è un dominio contenente $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) \le 0\}$), gli elementi $z_i \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0\}$). Se esistono $M, K > 0$ ed $a > 0$ tali che
$$|f(z)| \le \frac{K}{|z|^{1+a}} \quad \text{per } |z| \ge M$$
allora vale
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix}\ dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_i}\left(f(z)e^{iz}\right)$$

1. Si può scomporre la funzione e^{ix} come $\cos(x) + i\sin(x)$ e sfruttare il risultato precedente.

Caso III Consideriamo anche funzioni che hanno poli sull'asse reale, l'esistenza dell'integrale improprio deve essere valutata caso per caso e non vedremo un risultato generale: esiste un modo per applicare i residui calcolandoli su un arco di circonferenza.

Sia Ω aperto contenente z_0, f olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sia $B_{z_0}(\delta)$ presa in modo che la sua chiusura sia contenuta in Ω, γ_τ l'arco di raggio τ con $\theta_1 \le \arg(\gamma_\tau) \le \theta_2$, $\tau \le \delta$.



Se f ha un polo semplice o una singolarità eliminabile in z_0 (quindi esiste il limite di $(z - z_0)f(z)$ per $z \to z_0$, che dirò b), allora b è il residuo di f in z_0 e

$$\lim_{\tau \to 0} \int_{\gamma_\tau} f(z)\, dz = i\, b(\theta_2 - \theta_1)$$

Notiamo che se γ_τ è la circonferenza si ottiene $2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f)$.

Caso IV Siano g ed h polinomi reali in x, y con $h \neq 0$ per $x^2 + y^2 = 1$. Sia

$$Q(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)})$$

una funzione razionale, allora

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_i}(f)$$

dove $f(z) = \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2}\right)$ e z_i sono i poli di f in $B_0(1)$.

3.3 Proprietà delle funzioni in $\mathbb{C}$

3.3.1 Zeri di funzioni olomorfe

Principio di identità

Teorema 23. Sia Ω aperto connesso, f olomorfa in Ω (non la funzione identicamente nulla) e sia

$$Z(f) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$$

Allora $Z(f)$ non ha punti di accumulazione in Ω (cioè gli zeri di f sono isolati).

Corollario 14 (Il principio d'identità)**.** Sia Ω aperto connesso e siano f e g olomorfe in Ω. Se esiste un S contenuto in Ω tale che $f|_S = g|_S$ ed S ha punti di accumulazione in Ω, allora f coincide con g in Ω.

Questo mostra che se due funzioni olomorfe coincidono su un disco piccolo a piacere, coincidono dovunque.

Corollario 15. Sia Ω connesso, f e g olomorfe in Ω (f non identicamente nulla). Allora

$$\frac{g}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$$

Definizione 14. Sia f meromorfa in Ω e $z_0 \in \Omega$. Se a_m è il primo coefficiente non nullo della serie di Laurent di f centrata in z_0, allora diciamo che m è **l'ordine di f in x_0**.

$$m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$$

L'ordine è un $m \in \mathbb{Z}$, è *positivo negli zeri di* f (dove coincide con l'ordine di zero) e *negativo nei poli di* f (dove è l'opposto dell'ordine di polo).

Principio dell'argomento

Teorema 24. Sia f meromorfa in Ω con un numero finito di zeri, siano $z_1, \dots, z_n$ suoi poli in Ω. Sia γ una catena in Ω con $\gamma \sim_\Omega 0$ e $\operatorname{supp}(\gamma) \cap \{z_1, \dots, z_n\} = \varnothing$. Allora

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) \operatorname{ord}_{z_i}(f)$$

Corollario 16. Sia Ω aperto, f meromorfa in Ω. Sia γ una catena di Jordan in Ω con interno contenuto in Ω e tale che $\operatorname{supp}(\gamma)$ non contenga zeri o poli di f. Se N_0 è il numero di zeri di f (contati con la loro molteplicità) ed N_∞ il numero di poli di f (contati con il loro ordine) contenuti nell'interno di γ, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_\infty$$

Corollario 17. Se f è meromorfa in tutto $\mathbb{C}$ e l'interno di γ contiene tutti gli zeri ed i poli di f, allora

$$N_0 - N_\infty = -\operatorname{Res}_\infty \left(\frac{f'}{f} \right)$$

Osservazione 6 (Principio dell'argomento)**.** Il nome deriva dall'interpretazione geometrica di

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

come *variazione dell'argomento dei punti della curva* $f \circ \gamma$.

Teorema di Rouché

Teorema 25 (Teorema di Rouché)**.** Sia Ω aperto, f e g funzioni olomorfe in Ω e γ curva di Jordan in γ. Se vale

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \operatorname{supp}(\gamma)$$

allora f e g non hanno zeri nel supporto di γ ed hanno lo stesso numero di zeri (contati con la loro molteplicità) nell'interno di γ.

Principio del massimo modulo e teorema della mappa aperta

Osservazione 7. Per ottenere il principio del massimo, il teorema della mappa aperta ed il teorema della mappa inversa serve un risultato sul comportamento locale delle funzioni olomorfe.

Teorema 26. Sia Ω un aperto in cui f è olomorfa, sia $z_0 \in \Omega$ uno zero di ordine m di f.

Allora esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni ε con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni w_0 di $\mathbb{C}$ con $|w_0| < \delta$ l'equazione

$$f(z) = w_0$$

ha m soluzioni in $B_{z_0}(\varepsilon)$.
In particolare le soluzioni sono distinte se $w_0 \neq 0$ (nel caso $m > 1$).

Corollario 18. Sia f olomorfa non costante e $z_0 \in \Omega$, sia $f(z_0) = \alpha$ e

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f - \alpha) = m$$

Allora esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni ε con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni w_0 di $\mathbb{C}$ con $|w_0 - \alpha| < \delta$ l'equazione

$$f(z) = w_0$$

ha m soluzioni in $B_{z_0}(\varepsilon)$.
In particolare le soluzioni sono distinte se $w_0 \neq \alpha$.

Teorema 27 (Teorema della mappa aperta)**.** Sia Ω aperto connesso ed f olomorfa in Ω non costante. Allora f è una mappa aperta.

Teorema 28 (Principio del massimo modulo)**.** Sua Ω connesso ed f olomorfa in Ω non costante. Allora la funzione $|f|$ non ha massimi locali in Ω.

Il principio del massimo mostra che le funzioni armoniche non ammettono massimi e minimi locali.

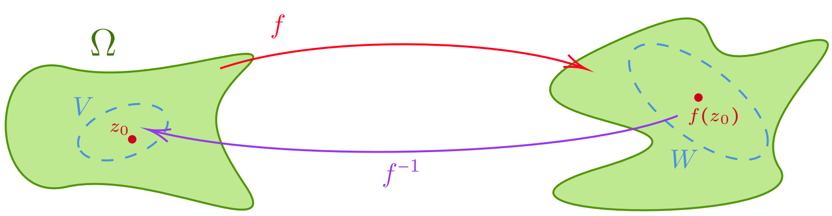
Corollario 19. Sia Ω aperto connesso con chiusura $\overline{\Omega}$ compatta.

$$f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \implies \max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega} |f|$$

Teorema della mappa inversa

Teorema 29. Sia f olomorfa in Ω, $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$.
Allora esistono V intorno aperto di z_0 e W intorno aperto di $f(z_0)$ tali che la doppia restrizione $f : V \to W$ è invertibile.
In particolare $f^{-1} : W \to V$ è olomorfa e vale la formula

$$\left(f^{-1}\right)(w) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w)\right)}$$



Osservazione 8. Se $f'(z_0) = 0$ la funzione f *non è iniettiva.*
Questo perché z_0 è uno zero di $g = f - f(z_0)$ di ordine $m > 1$ ($g'(z_0) = 0$), quindi nell'intorno di z_0 l'equazione $f(z) = w_0$ ma $m > 1$ soluzioni e non è invertibile.
Questa implicazione **non è necessariamente vera sui reali** (vedi $f(x) = x^3$).

3.4 Mappe conformi

Le mappe conformi sono una classe interessante di funzioni a variabile complessa che preservano gli angoli, e possono essere viste come *il "significato geometrico" delle funzioni olomorfe.*
In generale sono utilizzate per trasformare domini connessi di natura contorta in domini più semplici; ad esempio la funzione olomorfa

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + i}$$

è conforme (proprio perché è olomorfa, lo vedremo) e mappa il primo quadrante del piano complesso in un disco chiuso di raggio unitario centrato nell'origine.

Definizione 15 (Mappa conforme)**.** Questo risultato ha significato geometrico: se $f'(z_0) \neq 0$ allora la mappa (u, v) *preserva gli angoli in* z_0. Dati due vettori a e b non nulli in z_0, il loro angolo è uguale a quello tra $J_f(z_0)a$ e $J_f(z_0)b$.
Una mappa f che rispetta questa proprietà si dice **mappa conforme in** z_0.

Posso ricavare una conseguenza delle equazioni di Cauchy-Riemann.

Corollario 20. La matrice Jacobiana della funzione olomorfa in Ω

$$(u, v) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ha forma

$$J_f = \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix}$$

(e quindi ha determinante $u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)| \geq 0$)

Il risultato vale anche puntualmente (valutando in modo puntuale la matrice Jacobiana su $x = x_0$ se f è differenziabile in x_0).

Teorema 30. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Sia $f = u + iv$ con u e v differenziabili in z_0. Allora f è conforme in z_0 se e solo se esiste la derivata in senso complesso $f'(z_0)$ ed è non nulla.

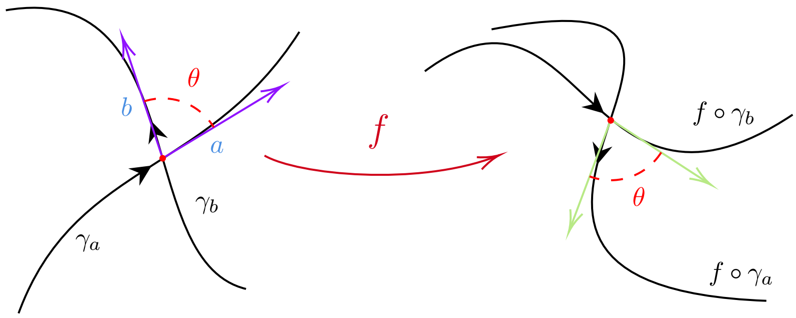
Corollario 21. f è conforme in Ω se e solo se è olomorfa in Ω ed ha derivata complessa non nulla.

Osservazione 9 (Funzioni altiolomorfe)**.** Se si richiede che f conservi solo l'ampiezza dell'angolo tra due vettori e non l'orientazione, oltre alle funzioni olomorfe devo considerare anche quelle **antiolomorfe**: sono le funzioni del tipo $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tali che la funzione complementare è olomorfa su Ω.
In tal caso $\det J_g \leq 0$, quindi la moltiplicazione per vettori inverte l'orientazione.

Osservazione 10. Una mappa f è conforme in z_0 se e solo se per ogni coppia di vettori a e b non nulli di $\mathbb{R}^2$ l'angolo in z_0 tra due curve γ_a e γ_b con

$$\gamma_a(0) = \gamma_b(0) = z_0,\ \ \gamma_a'(0) = a,\ \ \gamma_b'(0) = b$$

è uguale all'angolo in $f(z_0)$ tra le curve $f \circ \gamma_a$ e $f \circ \gamma_b$.



Infatti per $f = u + iv$ e $\gamma_a(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ si ha

$$\begin{aligned}\big(f \circ \gamma_a\big)' &= \frac{d}{dt}\big((u \circ \gamma_a(t)) + i(v \circ \gamma_a(t))\big) \\ &= (u_x x' + u_y y') + i(v_x x' + v_y y')\end{aligned}$$

e quindi $\big(f \circ \gamma_a\big)'(0)$ come vettore di $\mathbb{R}^2$ ha componenti determinate dal seguente prodotto.

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{z=z_0} \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = J_f(z_0) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = J_f(z_0)a$$

Otteniamo una forma equivalente per le componenti di b, quindi per quanto visto nel teorema precedente la moltiplicazione per $J_f(z_0)$ preserva gli angoli se e solo se $J_f(z_0)$ ha forma

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

e questo equivale alle condizioni di Cauchy-Riemann nel punto z_0.

Abbiamo visto che una funzione olomorfa con derivata diversa da zero in Ω è conforme in Ω, questo perché una f olomorfa è sempre localmente approssimabile tramite una funzione lineare (come in $\mathbb{R}^2$): la funzione di approssimazione locale è una composizione di omotetie ed isometrie, mappe che localmente conservano i rapporti tra le distanze.
Da questo vediamo intuitivamente che non tutte le mappe conformi sono olomorfe, ma possono essere antiolomorfe, perché l'operazione di coniugio complesso equivale all'applicazione di un'isometria.