Quaderno di Antonio Lorenzin del corso di

# Geometria II

Tenuto da Marco Andreatta

# SPAZIO AFFINE

## 1.1. Alcune definizioni

DEFINIZIONE 1.1.1. Sia $V$ spazio vettoriale su un campo $k$. Uno *spazio affine* $\boldsymbol{A}$ su $V$ è un insieme $\boldsymbol{A}$ ed un'applicazione

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\to V\,,\quad (P,Q)\to\overline{PQ}$$

tale che

1. Per ogni $P\in\boldsymbol{A}$ e per ogni $v\in V$ esiste unico $Q\in\boldsymbol{A}$ tale che $\overline{PQ}=v$
2. Per ogni $P,Q,R\in\boldsymbol{A}$, $\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR}$

La dimensione di $\boldsymbol{A}$ è definita come $dim\,\boldsymbol{A}:=dim\,V$.

OSSERVAZIONE 1.1.1. Segue dalla definizione che per ogni $P\in\boldsymbol{A}$ vale $\overline{PP}=0$, infatti

$$\overline{PP}+\overline{PP}=\overline{PP}$$

Da questo segue anche che $\overline{PQ}=-\overline{QP}$, dato che $\overline{PQ}+\overline{QP}=\overline{PP}=0$.

ESEMPIO 1.1.1. $V$ spazio vettoriale si può vedere come uno spazio affine su se stesso: posso prendere

$$V\times V\to V\,,\quad (v,w)\to\overline{vw}:=w-v$$

Verifichiamo che valgano le due proprietà di definizione 1.1.1.

1. Per ogni $v,w\in V$ prendiamo $v+w\in V$; $\overline{w\,v+w}=v+w-w=v$
2. Per $v,w,u\in V$, $\overline{vw}+\overline{wu}=w-v+u-w=u-v=\overline{vu}$

DEFINIZIONE 1.1.2. Il *sottospazio affine* $S$ di uno spazio affine $\boldsymbol{A}$ su $V$ è deto da un punto $P\in\boldsymbol{A}$ e un sottospazio vettoriale $W$ di $V$ (chiamato *giacitura*) ed è definito come

$$S:=\{Q\in\boldsymbol{A}\mid\overline{PQ}\in W\}$$

Come prima, definiamo $dim\,S:=dim\,W$. Inoltre, per indicare che $W$ è sottospazio vettoriale di $V$, useremo questa notazione: $W\prec V$.

Un sottospazio affine di dimensione 1 si dice *retta*, di dimensione 2 *piano*, di dimensione $dim\,\boldsymbol{A}-1$ *iperpiano*.

ESEMPIO 1.1.2. Prendiamo $\boldsymbol{A}=\mathbb{R}^3$. Sia $S$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ passante per $P=(1,0,1)$ con giacitura $W=\langle(0,1,1),(0,1,0)\rangle$. Allora $dim\,W=2$, quindi $S$ è il piano di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$S=\{Q=(x,y,z)\mid\overline{PQ}\in W\}=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)-(1,0,1)=t(0,1,0)+s(0,1,1)\}$$

Per i punti di $S$ soddisfano il sistema seguente per $t,s\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}x=1\\y=t+s\\z=1+s\end{cases}$$

DEFINIZIONE 1.1.3. Un *sistema di riferimento affine* su $\boldsymbol{A}$ spazio affine ($dim\,\boldsymbol{A}=n$) è dato da un punto $O\in\boldsymbol{A}$ e una base per $V$ $\{e_1,\dots,e_n\}$. Dato $P\in\boldsymbol{A}$, le coordinate di $P$ nel sistema di riferimento

$$(O;\{e_1,\dots,e_n\})$$

sono gli $n$ scalari $p_1,\dots,p_n$ tali che $\overline{OP}=p_1e_1+\dots+p_ne_n$.

ESEMPIO 1.1.3. Prendiamo $A=\mathbb{R}^2$, $O=(0,0)$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$. Allora $P=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$.

Se consideriamo $O'=(0,1)$, $f_1=(1,0)$, $f_2=(1,1)$, allora $\overline{O'P}=a(1,0)+b(1,1)$.

$$(p_1,p_2)-(0,1)=(a+b,b)$$

Da cui si ottiene che

$$\begin{cases} b=p_2-1 \\ a=p_1-p_2+1 \end{cases}$$

Dunque $(p_1-p_2+1, p_2-1)$ sono le coordinate di $P$ in $(O';\{f_1,f_2\})$.

OSSERVAZIONE 1.1.2. $S$ sottospazio affine non dipende dalla scelta di $P$. Infatti, preso $R\in S\subset \boldsymbol{A}$ diverso da $P$, allora

$$S:=\{Q\in \boldsymbol{A}:\overline{PQ}\in W\},\quad S':=\{T\in \boldsymbol{A}:\overline{RT}\in W\}$$

Soddisfano

1. Sia $Q\in \boldsymbol{A}:\overline{PQ}\in W$; $\overline{RQ}=\overline{RP}+\overline{PQ}\in W$, dunque $Q\in S'$
2. Sia $T\in \boldsymbol{A}:\overline{RT}\in W$; analogamente a prima, ottengo $\overline{PT}\in W$, dunque $T\in S$

Ne ricavo che $S=S'$.

DEFINIZIONE 1.1.4. Siano $\boldsymbol{A}$ spazio affine su $V$, spazio vettoriale su $k$, $(O;\{e_1,\dots,e_n\})$ un sistema di riferimento affine (coordinate affini), $P\in \boldsymbol{A}$ con $(p_1,\dots,p_n)\in k^n$ tale che $\overline{OP}=p_1e_1+\dots+p_ne_n$, ovvero $P=(p_1,\dots,p_n)$. Sia $S$ sottospazio affine $\boldsymbol{A}$ passante per $P$ con giacitura $W\prec V$. Considero

$$X=(x_1,\dots,x_n)\in S,\quad W=\langle w_1,\dots,w_k\rangle$$

ove $w_i=\sum_{j=1}^n w_{ji}e_j$ per $i=1,\dots,k$ $(w_{ji}\in k)$. Allora

$$S=\{X\in \boldsymbol{A}:\overline{PX}=\sum_{l=1}^k t_l w_l\}=\left\{(x_1,\dots,x_n): \begin{matrix} x_1=p_1+\sum_{l=1}^k t_l w_{1l} \\ \vdots \\ x_n=p_1+\sum_{l=1}^k t_l w_{nl}\end{matrix}\right\}$$

Queste ultime equazioni sono dette *parametriche* di $S$.

ESEMPIO 1.1.4. Prendo $\boldsymbol{A}=\mathbb{R}^3$, $(O=(0,0,0);\{e_1,e_2,e_3\})$. $S$ passante per $(3,1,0)$ con $\langle(0,1,2)\rangle$ ha come equazioni parametriche $x=3, y=1+t, z=2t$.

DEFINIZIONE 1.1.5. Sia $S\subset \boldsymbol{A}$ sottospazio affine passante per $P$ con giacitura $W\prec V$. Considero il sistema di riferimento affine $(O;\{e_1,\dots,e_n\})$. $P=(p_1,\dots,p_n)$, $X=(x_1,\dots,x_n)\in \boldsymbol{A}$. $W$ può essere descritto come soluzione di un sistema omogeneo di $r$ equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

A questo punto, $X=(x_1,\dots,x_n)\in S$ se risolve il sistema associato a questo omogeneo con termine noto $B=(b_i)$, ove $b_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}p_j$ per $i=1,\dots,r$. Le equazioni *cartesiane* di $S$ sono quindi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 1.1.1. Con le notazioni di definizione 1.1.5, $X\in S$ se e solo se è soluzione delle equazioni cartesiane di $S$.

DIMOSTRAZIONE. $X=(x_1,\dots,x_n)\in S$ se e solo se $\overline{PX}\in W$, quindi $(x_1-p_1,\dots,x_n-p_n)$ è soluzione del sistema omogeneo di definizione 1.1.5. Mettendo i termini ove appare $p_i$ a destra dell'uguale, si ha

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=a_{11}p_1+\dots+a_{1n}p_n=:b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rn}x_n=a_{r1}p_1+\dots+a_{rn}p_n=:b_r \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1.1.3. Viceversa, dati uno spazio affine $\boldsymbol{A}$, un sistema di riferimento $(O;\{e_1,\dots,e_n\})$ e un sistema lineare, allora le sue soluzioni sono le coordinate di un sottospazio affine $S$ di $\boldsymbol{A}$ con giacitura $W$ data dal sistema lineare omogeneo associato e passante per $P=(p_1,\dots,p_n)$ soluzione del sistema con le equazioni cartesiane.

DEFINIZIONE 1.1.6. Siano $\boldsymbol{A}$ uno spazio affine, $P_1,\dots,P_k\in\boldsymbol{A}$ punti. Il *sottospazio affine S generato da $P_1,\dots,P_k$*, in simboli $S=\langle P_1,\dots,P_k\rangle$, è il sottospazio affine passante per $P_1$ con giacitura

$$\langle\overline{P_1P_2},\dots,\overline{P_1P_k}\rangle$$

Si noti che, ovviamente, $dim\,S\le k-1$. Se $dim\,S=1$, allora $P_1,\dots,P_k$ sono su una retta; se $dim\,S=2$, allora $P_1,\dots,P_k$ sono planari.

ESEMPIO 1.1.5. $\boldsymbol{A}=\mathbb{R}^3$, $P_1=(1,1,1), P_2=(1,2,0), P_3=(0,1,2)$. Allora

$$W=\langle\overline{P_1P_2},\overline{P_1P_3}\rangle=\langle(0,1,-1),(-1,0,1)\rangle$$

Le equazioni parametriche saranno

$$x=1-s,\ y=1+t,\ z=1-t+s$$

Mentre l'equazione cartesiana è

$$x+y+z-3=0$$

DEFINIZIONE 1.1.7. Siano $\boldsymbol{A}$ su $V$, $S,T\subset\boldsymbol{A}$ sottospazi affini passanti rispettivamente per $P,Q\in\boldsymbol{A}$ con giacitura $W,U\prec V$. $S$ e $T$ sono *paralleli* se $W\prec U$ o $U\prec W$.

PROPOSIZIONE 1.1.2: Quinto postulato di Euclide generalizzato. Dati $S\subset\boldsymbol{A}$ sottospazio affine (passante per $P$ con giacitura $W$) e $Q\in\boldsymbol{A}$, allora esiste unico $T\subset\boldsymbol{A}$ sottospazio affine passante per $Q$ parallelo a $S$ con $dim\,S=dim\,T$.

DIMOSTRAZIONE. $T$ è il sottospazio affine passante per $Q$ con giacitura $W$.

Siano $S,T\subset\boldsymbol{A}$ sottospazi affini con sistema di riferimento $(O;\{e_1,\dots,e_n\})$. $S,T$ sono i sottoinsiemi di punti le cui coordinate soddisfano rispettivamente i sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n=b_k \end{cases},\quad \begin{cases} d_{11}x_1+\dots+d_{1n}x_n=c_1 \\ \vdots \\ d_{h1}x_1+\dots+d_{hn}x_n=c_h \end{cases}$$

Da questi sistemi, è facile ricavare che $dim\,S=n-k, dim\,T=n-h$. L'intersezione $S\cap T$ è data da

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n=b_k \\ d_{11}x_1+\dots+d_{1n}x_n=c_1 \\ \vdots \\ d_{h1}x_1+\dots+d_{hn}x_n=c_h \end{cases}$$

Abbiamo due casi. Se questo sistema non ha soluzione, ovvero è incompatibile, si ottiene $S\cap T=\emptyset$.
L'altro caso è che invece il sistema sia compatibile e dunque $S\cap T\neq\emptyset$ ed è sottospazio affine (osservazione 1.1.3). Perciò, $dim(S\cap T)=n-r$ per $r\leq h+k$. Da ciò,

$$dim(S\cap T)\geq n-(h+k)=n-h-k=(n-h)+(n-k)-n$$

Per cui vale

$$dim(S\cap T)\geq dim S+dim T-n$$

Per gli spazi vettoriali si avrà $dim(W\cap U)\geq dim W+dim U-dim V$.

OSSERVAZIONE 1.1.4. Per Grassmann (si veda Geometria I),

$$dim(W\cap U)=dim W+dim U-dim(W+U)$$

Perciò nella formula precedente vale l'uguaglianza se e solo se $dim V=dim(W+U)$, che implica

$$V=W+U$$

## 1.2. Accenni sulle matrici

TEOREMA 1.2.1. Il rango di una matrice $A$ è uguale all'ordine massimo di un minore con determinante diverso da $0$; con minore si intende una matrice quadrata all'interno di $A$.

TEOREMA 1.2.2: Di Kronecker. Se della matrice $A$ esiste un minore di ordine $k$ diverso da $0$ e se tutti i minori di ordine $k+1$ che si ottengono orlando il minore di partenza sono nulli, allora il rango di $A$ è uguale a $k$. In simboli, $rk(A)=k$.

TEOREMA 1.2.3: Regola di Cramer. Sia $A\in k^{n,n}$ una matrice quadrata invertibile, $X\in k^{n,1}$ vettore di incognite e $C\in k^{n,1}$ vettore dei termini noti, ovvero $AX=C$. Considerando $X=(x_1,\dots,x_n)$, allora

$$x_i=\frac{det(A_i)}{det(A)}$$

ove $A_i$ è la matrice formata sostituendo la $i$-esima colonna di $A$ con il vettore $C$.

## 1.3. I casi generali $k^2, k^3$

Vediamo anzitutto il caso di $k^2$, su cui costruiamo $\boldsymbol{A}^2$, spazio affine di dimensione $2$. Sia $(0;\{e_1,e_2\})$ il sistema di riferimento affine su $\boldsymbol{A}^2$. Siano

$$r: a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$s: a_2x+b_2y+c_2=0$$

Studiamo l'intersezione.

$$r\,||\,s\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$$

In particolare, se $r=s$, allora il rango della matrice

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}$$

vale 1. Se invece l'intersezione è vuota e $r\neq s$, allora il determinante della matrice quadrata dei coefficienti è diverso da zero e l'intersezione è un punto.
La scrittura

$$\mu(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

con $\mu, \lambda \in k$ indica il *fascio di rette* passanti per $r \cap s$, eventualmente fascio *improprio* se $r$ ed $s$ sono parallele.

Consideriamo ora $\boldsymbol{A}^3$, spazio affine di dimensione 3 con sistema di riferimento $(0; \{e_1, e_2, e_3\})$. Siano

$$H: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$L: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Chiaramente, $H$ ed $L$ sono paralleli se il rango di

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

vale 1; se vale 2, i due piani si incontrano in una retta che ha come equazioni quelle dei due piani. Chiamiamo $r$ questa possibile intersezione e consideriamo $M: ax + by + cz + d = 0$. Affinché una retta ed un piano siano paralleli, deve accadere che

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

di modo che $(a, b, c)$ sia combinazione lineare delle prime due righe; affinché $r \subset M$, il rango della matrice che considera anche i termini noti deve valere 2. Quando il determinante della matrice scritta qui sopra è diversa da zero, allora $r \cap H$ è un punto.

DEFINIZIONE 1.3.1. In $\boldsymbol{A}^3$, due rette si dicono *complanari* se stanno sullo stesso piano e *sghembe* altrimenti.

OSSERVAZIONE 1.3.1. Due rette sono complanari se e solo se sono parallele o incidenti. Infatti, prese due rette $r$ ed $s$ con giacitura $W$ ed $U$ rispettivamente, se sono parallele stanno sul piano passante per un punto $P \in r$ con giacitura $W$ e $\overline{PQ}$ con $Q \in s$; se sono incidenti, stanno sul piano passante per $r \cap s$ con giacitura $\langle W, U \rangle$. Viceversa, se due rette sono su uno stesso piano, o sono parallele o sono incidenti.

PROPOSIZIONE 1.3.1. Sia $\boldsymbol{A}^3$ uno spazio affine su $k^3$ con sistema di riferimento $(0; \{e_1, e_2, e_3\})$. Siano

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A$ è nullo se e solo se $r$ ed $s$ sono complanari.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo siano complanari. Se $r$ e $s$ sono incidenti il sistema intero deve avere soluzioni; dunque $rk(A) \leq 3$, da cui $det(A) = 0$. Se invece sono parallele, allora la matrice $B$, ottenuta da $A$ togliendo l'ultima colonna, ha rango 2 e perciò $rk(A) \leq 3$ e quindi $det(A) = 0$. Viceversa, se il determinante è nullo, allora $rk(A) \leq 3$ e perciò o il sistema ha soluzioni , quindi le rette sono incidenti, o non ha soluzioni, quindi $rk(B) \leq 2$ e le rette sono parallele.

PROPOSIZIONE 1.3.2. Consideriamo lo stesso spazio della proposizione 1.3.1. Siano $r$ passante per $P$ con giacitura $v$ ed $s$ passante per $Q$ con giacitura $w$. $r$ ed $s$ sono complanari se e solo se

$$det\begin{pmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}=0$$

ove $p_i, q_i, v_i, w_i$ indicano rispettivamente le componenti $i$-esime di $P, Q, v, w$ per $i=1,2,3$.

DIMOSTRAZIONE. Il determinante della precedente matrice è nulla se e solo se

$$(q_1-p_1, q_2-p_2, q_3-p_3)$$

è una combinazione lineare delle altre due righe oppure $(v_1, v_2, v_3)$ è un multiplo di $(w_1, w_2, w_3)$. La prima possibiltà indica che $r$ ed $s$ sono incidenti, mentre la seconda asserisce che le due rette siano parallele.

DEFINIZIONE 1.3.2. Consideriamo $\boldsymbol{A}^3$. Siano

$$H_1: a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1=0, \quad H_2: a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2=0$$

due piani. Il *fascio di piani* passante per la retta $r=H_1 \cap H_2$ è dato da

$$\lambda(a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1)+\mu(a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2)=0$$

ove $\mu, \lambda \in k$. Se $H_1 || H_2$, il fascio si dice *improprio* ed è formato da tutti i piani paralleli a $H_1$ ed $H_2$.

## 1.4. Oggetti ed applicazioni

DEFINIZIONE 1.4.1. Sia $\boldsymbol{A}^n$ spazio affine su $V$, campo $\mathbb{R}$.

1. Si considerino $P, Q \in \boldsymbol{A}^n$. Si definisce il *segmento* nel seguente modo
$$PQ := \{R \in \boldsymbol{A}^n : \overline{PR} = t\,\overline{PQ},\ 0 \le t \le 1\}$$
2. Il *punto medio del segmento* $PQ$ è $M \in \boldsymbol{A}^n$ tale che $\overline{PM} = \overline{PQ}/2$.
3. Il *simplesso di dimensione* $k$ *di vertici* $A_0, A_1, \dots, A_k \in \boldsymbol{A}^n$ (punti non allineati) è
$$A_0 A_1 \dots A_k := \{P \in \boldsymbol{A}^n : A_0 P = t_1 \overline{A_0 A_1} + \dots + t_k \overline{A_0 A_k} \text{ con } 0 \le t_1 + \dots + t_k \le 1\}$$
Con $k=1$ abbiamo il segmento, $k=2$ il triangolo e $k=3$ il tetraedro.
4. Il *parallelepipedo di dimensione* $k$ *di vertici* $A_0, A_1, \dots, A_k \in \boldsymbol{A}^n$ (punti non allineati) è
$$A_0 A_1 \dots A_k := \{P \in \boldsymbol{A}^n : \overline{A_0 P} = t_1 \overline{A_0 A_1} + \dots + t_k \overline{A_0 A_k} \text{ con } 0 \le t_i \le 1 \text{ e } i=1,\dots,k\}$$
Con $k=2$ abbiamo il parallelogramma.

DEFINIZIONE 1.4.2. Siano $\boldsymbol{A}$ affine su $V$ ed $\boldsymbol{A}'$ affine su $V'$ con $dim\,\boldsymbol{A} = dim\,\boldsymbol{A}' = n$. $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ si dice *trasformazione affine* (o isomorfismo affine) se:

1. $f$ è biiettiva
2. Esiste $\varphi: V \to V'$ isomorfismo lineare tale che per ogni $P, Q \in \boldsymbol{A}$,
$$\overline{f(P) f(Q)} = \varphi(\overline{PQ})$$

Se $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$, $f$ è detta anche *affinità*.

ESEMPIO 1.4.1. Dato $\boldsymbol{A}$ su $V$, con $v \in V$, si definisce *traslazione di un vettore* $v$ l'affinità $t_v: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ tale che $\overline{P t_v(P)} = v$ per ogni $P \in \boldsymbol{A}$. La funzione $\varphi$ si ricava così:

$$\overline{t_v(P) t_v(Q)} = \overline{t_v(P) P} + \overline{PQ} + \overline{Q t_v(Q)} = -v + \overline{PQ} + v = \overline{PQ}$$

Dunque $\varphi$ è la funzione identità.

ESEMPIO 1.4.2. Sia $\boldsymbol{A}$ su $V$ con $P\in\boldsymbol{A}$ e $c\in k$ (campo). Si definisce *omotetia di centro* $P$ *e ragione* $c$ l'affinità $\sigma_{P,c}:\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A}$ tale che $\overline{P\sigma_{P,c}(Q)}=c\overline{PQ}$ (ovviamente, $\sigma_{P,c}(P)=P$).

PROPOSIZIONE 1.4.1. Sia $f:k^n\rightarrow k^n$ affinità. Allora esistono $A\in GL(n,k)$, $\underline{C}=(c_1,\dots,c_n)$ tali che

$$f(X)=AX^t+\underline{C}$$

Vale la seguente definizione: $GL(n,k):=\{A\in M_{n\times n}(k):det(A)\neq 0\}$, ove $M_{n\times n}(k)$ è l'insieme delle matrici $n\times n$ nel campo $k$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di affinità, esiste $A\in GL(n,k)$ tale che $\overline{f(\underline{0})f(X)}=AX^t$, dato che ogni funzione lineare ha una matrice associata. Sia $f(\underline{0})=\underline{C}$. Allora $f(X)=AX^t+\underline{C}$.

DEFINIZIONE 1.4.3. Un *gruppo* è un insieme $G$ con una certa operazione

$$\cdot:G\times G\rightarrow G,\quad (g_1,g_2)\rightarrow g_1\cdot g_2$$

tale che

1. Per ogni $g_1,g_2,g_3\in G$, $g_1\cdot(g_2\cdot g_3)=(g_1\cdot g_2)\cdot g_3$ *associativa*
2. Esiste $e\in G$ tale che $e\cdot g=g\cdot e=g$ *identità*
3. Per ogni $g\in G$ esiste $g^{-1}\in G$ tale che $g\cdot g^{-1}=e$ *inverso*

$G$ si dice *commutativo* se per ogni $g_1,g_2\in G$, $g_1\cdot g_2=g_2\cdot g_1$.

DEFINIZIONE 1.4.4. Un *campo* $k$ è un insieme con due operazioni

$$+,\cdot:k\times k\rightarrow k$$

con due elementi $\{0,1\}\subset k$ e tale che

1. $(k,+,0)$ è un gruppo
2. $(k^*,\cdot,1)$ è un gruppo ($k^*=k\setminus\{0\}$)
3. $a(b+c)=ab+ac$ per ogni $a,b,c\in k$

DEFINIZIONE 1.4.5. $Aff(\boldsymbol{A}):=\{f:\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A}$ affinità$\}$. Date $f,g\in Aff(\boldsymbol{A})$ con isomorfismi $\varphi,\psi$, definiamo un'operazione attraverso la *composizione di mappe*:

$$f\circ g(P):=f(g(P))$$

Si ha $f\circ g\in Aff(\boldsymbol{A})$ con isomorfismo lineare associato $\varphi\circ\psi$. L'insieme delle affinità, con operazione la composizione, di elemento neutro l'identità, diventa un gruppo.

DEFINIZIONE 1.4.6. Sia $(G,\cdot,e)$ un gruppo. $H\subset G$ si dice *sottogruppo* se

1. $e\in H$
2. $h,k\in H\Rightarrow h\cdot k\in H$
3. $h\in H\Rightarrow h^{-1}\in H$

Si osservi che un sottogruppo è un gruppo; un esempio di sottogruppo di $Aff(\boldsymbol{A})$ è l'insieme delle traslazioni.

PROPOSIZIONE 1.4.2. Dati $O,O'\in\boldsymbol{A}$ affine e un isomorfismo lineare $\varphi:V\rightarrow V$, allora esiste un'unica affinità $f:\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A}$ con isomorfismo associato $\varphi$ tale che $f(O)=O'$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $P\in \boldsymbol{A}$; definisco $f(P)\in \boldsymbol{A}$ tale che $\overline{O'f(P)}=\varphi(\overline{OP})$. Controlliamo che sia un'affinità: dati $P,Q\in \boldsymbol{A}$, devo dimostrare che $\overline{f(P)f(Q)}=\varphi(\overline{PQ})$.

$$\overline{f(P)f(Q)}=\overline{f(P)O'}+\overline{O'f(Q)}=\varphi(\overline{PO})+\varphi(\overline{OQ})=\varphi(\overline{PQ})$$

Inoltre, $\overline{O'f(O)}=\varphi(\overline{OO})=\underline{0}$, quindi $f(O)=O'$.

TEOREMA 1.4.1. Siano $\{P_0,\dots,P_n\},\{Q_0,\dots,Q_n\}\subset \boldsymbol{A}^n$ due famiglie di punti indipendenti. Allora esiste unica $f:\boldsymbol{A}^n\to \boldsymbol{A}^n$ affine tale che $f(P_i)=Q_i$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, $\overline{P_0P_1},\dots,\overline{P_0P_n}$ sono linearmente indipendenti ed analogamente anche $\overline{Q_0Q_1},\dots,\overline{Q_0Q_n}$; quindi sono due basi ($n$ vettori indipendenti in uno spazio di dimensione $n$). Per il Teorema di Cambiamento di Base, esiste un unico isomorfismo lineare $\varphi:V\to V$ tale che

$$\varphi(\overline{P_0P_i})=\overline{Q_0Q_i}$$

ove $i=1,\dots,n$. Sia $f:\boldsymbol{A}^n\to \boldsymbol{A}^n$ l'affinità con isomorfismo $\varphi$ e tale che $f(P_0)=Q_0$, che esiste grazie a proposizione 1.4.2. Abbiamo quindi concluso:

$$\overline{f(P_0)f(P_i)}=\varphi(\overline{P_0P_i})=\overline{Q_0Q_i}\Rightarrow \overline{Q_0f(P_i)}=\overline{Q_0Q_i}\Rightarrow f(P_i)=Q_i$$

TEOREMA 1.4.2. Sia $f:\boldsymbol{A}\to \boldsymbol{A}$ affinità (con isomorfismo associato $\varphi$); sia $S\subset \boldsymbol{A}$ sottospazio affine passante per $P$ con giacitura $W$. Allora $f(S)$ è il sottospazio affine passante per $f(P)$ con giacitura $\varphi(W)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $Q\in f(S)$, esiste $R\in S$ tale che $Q=f(R)$. Allora

$$\overline{f(P)Q}=\overline{f(P)f(R)}=\varphi(\overline{PR})\in\varphi(W)$$

## 1.5. Spazi Euclidei

DEFINIZIONE 1.5.1. Sia $\boldsymbol{A}$ spazio affine su $V$. Se $V$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare $\langle,\rangle$ (bilineare simmetrico definito positivo, i.e. $\langle v,v\rangle\geq 0$ se $v\neq 0$), allora lo spazio $\boldsymbol{A}$ si dice *spazio euclideo* e si denota con $\boldsymbol{E}$.

DEFINIZIONE 1.5.2. Sia $\boldsymbol{E}$ uno spazio euclideo. Possiamo allora definire una *funzione distanza*

$$d:\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\mathbb{R},\quad d(P,Q)=\|\overline{PQ}\|:=\sqrt{\langle\overline{PQ},\overline{PQ}\rangle}$$

Si tenga presente che per ogni $v,w\in V\setminus\{0\}$, esiste $\hat{vw}:=\theta$ tale che $\cos\theta=\langle v,w\rangle/\|v\|\|w\|$. $\theta$ è definito come l'angolo fra i due vettori.

PROPOSIZIONE 1.5.1. Siano $0\neq v,w\in V$ spazio vettoriale con prodotto scalare $\langle,\rangle$. Allora

$$|\langle v,w\rangle|\leq\|w\|\|v\|$$

DIMOSTRAZIONE. $0\leq\langle av+bw,av+bw\rangle$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Allora

$$a^2\langle v,v\rangle+2ab\langle v,w\rangle+b^2\langle w,w\rangle\geq 0$$

per cui, presi $a=\langle w,w\rangle$ e $b=-\langle v,w\rangle$, si ottiene

$$\langle w,w\rangle^2\langle v,v\rangle-2\langle v,w\rangle^2\langle w,w\rangle+\langle v,w\rangle^2\langle w,w\rangle\geq 0$$

Dato che $w\neq 0$, $\langle w,w\rangle\langle v,v\rangle-\langle v,w\rangle^2\geq 0$, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 1.5.3. Siano $v,w\in V$: $v\perp w$, ovvero sono *ortogonali*, se e solo se $\langle v,w\rangle=0$.

DEFINIZIONE 1.5.4. Sia $\boldsymbol{E}$ uno spazio euclideo; un *riferimento euclideo* è un riferimento affine tale che gli elementi della base siano tutti ortogonali fra loro ed abbiano norma 1.

Consideriamo il caso in cui $\boldsymbol{E}=\mathbb{R}^2$. La retta $s$ passante per $P$ e perpendicolare a $r: ax+by+c=0$ è la retta con direzione $w$ tale che $w\perp v$, dove $v$ è la direzione di $r$.

$$w:\langle(-b,a),(x,y)\rangle=-bx+ay=0$$

Da cui $s:-bx+ay+c'=0$, con $c'=bp_1-ap_2$, avendo preso $P=(p_1,p_2)$.
Questo procedimento non serve solo per la retta perpendicolare, ma anche per calcolare la distanza fra un punto ed una retta. Con le stesse notazioni appena viste, $d(P,r)=d(P,Q)$ ove $Q=r\cap s$.

DEFINIZIONE 1.5.5. Sia $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con $\langle,\rangle$. Per ogni $v\in V$, posso scrivere che

$$v=\sum_{i=1}^{n}\langle v,e_i\rangle e_i$$

La *proiezione di* $v$ *sullo spazio vettoriale* $W=\langle e_1,\dots,e_h\rangle$ è

$$w=\sum_{i=1}^{h}\langle v,e_i\rangle e_i$$

Preso poi $u=\sum_{i=h+1}^{n}\langle v,e_i\rangle e_i$, allora $v=w+u$, per cui $\|v\|=\sqrt{\|w\|^2+\|u\|^2}$.

TEOREMA 1.5.1. Sia $H: a_1x_1+\dots+a_nx_n+b=0$ iperpiano in $\boldsymbol{E}$ con $(0;\{e_1,\dots,e_n\})$ sistema di riferimento. Preso $P=(p_1,\dots,p_n)\in\boldsymbol{E}$, allora

$$d(P,H)=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}|a_1p_1+\dots+a_np_n+b|$$

DIMOSTRAZIONE. Si noti che $d(P,H)=d(P,Q_0)$ ove $Q_0=H\cap r$, con $r$ passante per $P$ e giacitura $\perp H$; ovvero la retta per $P$ con direzione $(a_1,\dots,a_n)$. Sia $Q\in H$; $\overline{PQ_0}$ è la proiezione di $\overline{PQ}$ sul sottospazio generato da

$$w=\left\langle\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}(a_1,\dots,a_n)\right\rangle$$

Da cui $\overline{PQ_0}=\langle\overline{PQ},w\rangle w$, perciò

$$\begin{aligned}d(P,H)&=d(P,Q_0)=\|\overline{PQ_0}\|=|\langle\overline{PQ},w\rangle|=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}|(q_1-p_1)a_1+\dots+(q_n-p_n)a_n|=\\&=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}|a_1p_1+\dots+a_np_n-a_1q_1-\dots-a_nq_n|\end{aligned}$$

Poiché $Q\in H$, dall'equazione che descrive $H$ ricaviamo che $-a_1q_1-\dots-a_nq_n=b$. Da qui la tesi.

Consideriamo $\boldsymbol{E}=\mathbb{R}^3$; la distanza fra due punti $P=(p_1,p_2,p_3)$ e $Q=(q_1,q_2,q_3)$ vale

$$d(P,Q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2}$$

Vogliamo studiare la distanza fra due iperpiani $H_i: a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$ per $i=1,2$. Ovviamente, se la loro intersezione non è vuota, data distanza varrà $0$; se invece sono paralleli, $d(H_1,H_2)=d(H_1,P)$ ove $P\in H_2$ qualsiasi; dunque possiamo applicare teorema 1.5.1 e concludere.

DEFINIZIONE 1.5.6. Siano $v=(a_1,a_2,a_3)$ e $w=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$. Definiamo $v$ *esterno a* $w$ come il vettore

$$v \wedge w := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Questo vettore è molto particolare, infatti $v \wedge w \perp v$:

$$\langle v, v \wedge w \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Analogamente, $w \perp v \wedge w$. Inoltre, vale che $\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle$.

Studiamo ora la distanza fra due rette in $\mathbb{R}^3$. Siano $r, s$ due rette di giacitura rispettivamente

$$v = (a_1, a_2, a_3),\ w = (b_1, b_2, b_3)$$

passanti (sempre rispettivamente) per $Q = (q_1, q_2, q_3)$ e $P = (p_1, p_2, p_3)$. La distanza fra esse sarà ovviamente nulla se la loro intersezione è non vuota. Se sono parallele, $d(r, s) = d(r, S)$ con $S \in s$ qualsiasi. Si ricordi che la distanza fra un punto e una retta scritta vale $d(S, T)$, ove $T$ è l'intersezione fra il piano per $P$ ortogonale a $r$ e $r$. Se invece le rette sono sghembe,

$$d(r, s) = d(R, S)$$

dove $R$ e $S$ sono rispettivamente punti di $r, s$ passanti per la retta $\perp r$ ed $\perp s$. Verifichiamo che data retta esiste.

LEMMA 1.5.1. Se $r$ ed $s$ (con le ipotesi sopra) sono sghembe, allora esiste un'unica retta ortogonale a $r$ ed a $s$ intersecante $r$ ed $s$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $R \in r$ ed $S \in s$ tali che $\overline{RS} \perp r, s$. Allora $\langle \overline{RS}, v \rangle = 0$ se $\overline{OR} = \overline{OQ} + t_1 v$ e $\langle \overline{RS}, w \rangle = 0$ se $\overline{OS} = \overline{OP} + t_2 w$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Dunque $\overline{RS} = \overline{QP} + t_2 w - t_1 v$. Perciò, considerando che

$$0 = \langle \overline{RS}, v \rangle = \langle \overline{QP}, v \rangle + t_2 \langle w, v \rangle - t_1 \langle v, v \rangle$$
$$0 = \langle \overline{RS}, w \rangle = \langle \overline{QP}, w \rangle + t_2 \langle w, w \rangle - t_1 \langle v, w \rangle$$

Possiamo costruire un sistema lineare in $t_1, t_2$ con matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} \langle w, v \rangle & -\langle v, v \rangle \\ \langle w, w \rangle & -\langle v, w \rangle \end{pmatrix} = -\langle w, v \rangle^2 + \|v\|^2 \|w\|^2 = \|v \wedge w\|^2 \neq 0$$

perché $v$ e $w$ sono indipendenti. Quindi esiste un'unica soluzione del sistema omogeneo in $t_1, t_2$: esistono $R$ ed $S$.

L'equazione cartesiana della retta $t$ ortogonale a $r$ ed a $s$ e intersecante $r$ e $s$ è data da

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - q_1 & y - q_2 & z - q_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

dove $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = v \wedge w$.

Avendo ora verificato l'esistenza di questa retta $t$ ortogonale sia ad $r$ che ad $s$, diciamo che

$$d(r, s) = d(N_1, N_2)$$

dove $N_1 = t \cap r$ e $N_2 = t \cap s$. Da ciò possiamo anche considerare che, definendo

$$n := \frac{v \wedge w}{\|v \wedge w\|} = (n_1, n_2, n_3)$$

vale $d(r,s) = d(N_1, N_2) = |\langle \overline{QN_2}, n\rangle|$, grazie a quanto visto sulla proiezione; inoltre

$$\langle \overline{QP}, n\rangle = \langle \overline{QN_2} + \overline{N_2 P}, n\rangle = \langle \overline{QN_2}, n\rangle + \langle \overline{N_2 P}, n\rangle = \langle \overline{QN_2}, n\rangle$$

dato che $N_2, P \in s$. Possiamo quindi concludere che

$$d(r,s) = |\langle \overline{QP}, n\rangle|$$

DEFINIZIONE 1.5.7. Sia $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\langle,\rangle$. $T: V \to V$ isomorfismo lineare si dice *unitario* se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

1. Per ogni $v, w \in V$, $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$
2. Per ogni $v \in V$, $\|T(v)\| = \|v\|$
3. Per ogni base ortogonale $\{e_1, \dots, e_n\}$, anche $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è una base ortogonale

PROPOSIZIONE 1.5.2. Le tre proprietà di definizione 1.5.7 sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione $1 \Rightarrow 2$ è ovvia. Per mostrare il contrario, si noti che

$$\begin{aligned} 4\langle v, w\rangle &= \langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle = \langle T(v+w), T(v+w)\rangle - \langle T(v-w), T(v-w)\rangle = \\ &= 4\langle T(v), T(w)\rangle \end{aligned}$$

Dunque $\langle v, w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle$.
Occupiamoci dell'implicazione $1 \Rightarrow 3$, per poi concludere con il viceversa. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortogonale, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$; allora $\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \delta_{ij}$, ovvero $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$. Al contrario, presa la base ortogonale $\{e_1, \dots, e_n\}$, so che $v = \sum a_i e_i$ e $w = \sum b_i e_i$. Allora $\langle v, w\rangle = \sum a_i b_i$. Siccome

$$T(v) = \sum a_i T(e_i),\ T(w) = \sum b_i T(e_i)$$

ed inoltre $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ ortogonale, si ha $\langle T(v), T(w)\rangle = \sum a_i b_i = \langle v, w\rangle$.

PROPOSIZIONE 1.5.3. Sia $T: V \to V$ applicazione. Supponiamo che $T(0) = 0$ e che per ogni $v, w \in V$ si abbia $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$. Allora $T$ è lineare ed unitaria.

DIMOSTRAZIONE. Da queste premesse, $\|T(v)\| = \|T(v) - 0\| = \|T(v) - T(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$. Poiché non ho nelle ipotesi la linearità, ciò non basta per concludere;

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle - 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v-w, v-w\rangle = \\ = \langle T(v) - T(w), T(v) - T(w)\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle - 2\langle T(v), T(w)\rangle + \langle T(w), T(w)\rangle \end{aligned}$$

Da cui $\langle v, w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle$ per ogni $v, w \in V$. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortogonale; per proposizione 1.5.2, $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è anch'essa una base ortogonale. Quindi, dato $v = \sum a_i e_i$, si ha $T(v) = \sum a_i T(e_i)$. Dunque $T$ è lineare (vale la somma ed il prodotto per scalare).

DEFINIZIONE 1.5.8. Sia $\boldsymbol{E}^n$ uno spazio euclideo di dimensione $n$ su $(V, \langle,\rangle)$ con $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. $f: \boldsymbol{E}^n \to \boldsymbol{E}^n$ è una *isometria* (o congruenza o moto rigido) se $f$ è un'affinità con isomorfismo lineare associato unitario.

OSSERVAZIONE 1.5.1. Se $f: \boldsymbol{E}^n \to \boldsymbol{E}^n$ è un'isometria, allora per ogni $P, Q \in \boldsymbol{E}^n$ si ha che

$$d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$$

infatti $d(f(P), f(Q)) = \|\overline{f(P)f(Q)}\| = \|\varphi(\overline{PQ})\| = \|\overline{PQ}\| = d(P,Q)$.

TEOREMA 1.5.2. Sia $f:\boldsymbol{E}^n \to \boldsymbol{E}^n$ applicazione tale che $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$ per ogni $P,Q\in\boldsymbol{E}^n$. Allora $f$ è un'isometria.

DIMOSTRAZIONE. $f$ è biiettiva poichè $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$. Sia $0\in\boldsymbol{E}^n$ un punto. Definiamo $\varphi:V\to V$ tale che per ogni $v\in V$, dato che esiste un unico $P\in\boldsymbol{E}^n$ per cui $v=\overline{OP}$, $\varphi(v)=\overline{f(P)f(Q)}$
Anzitutto,

$$\varphi(0)=\varphi(\overline{OO})=\overline{f(O)f(O)}=0$$

dunque $\varphi(0)=0$. Sia $w=\overline{OQ}$; allora

$$\begin{aligned}\|\varphi(v)-\varphi(w)\| &=\|\varphi(\overline{OP})-\varphi(\overline{OQ})\|=\|\overline{f(O)f(P)}-\overline{f(O)f(Q)}\|=\|\overline{f(Q)f(P)}\|=\\ &=\|\overline{QP}\|=\|\overline{OP}-\overline{OQ}\|=\|v-w\|\end{aligned}$$

Per la proposizione 1.5.3, $\varphi$ è unitaria. Inoltre,

$$\overline{f(P)f(Q)}=\overline{f(P)f(O)}+\overline{f(O)f(Q)}=\varphi(\overline{PO})+\varphi(\overline{OQ})=\varphi(\overline{PO}+\overline{OQ})=\varphi(\overline{PQ})$$

Dunque $f$ è un'affinità. Poiché, come appena detto, $\varphi$ unitaria, possiamo concludere.

LEMMA 1.5.2. Sia $\varphi:V\to V$ unitaria e sia $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ ortogonale. Sia $A:=M_{B,B}(\varphi)$ $(=(a_{ij}))$. Allora $A$ è unitaria, ovvero $A^t A=Id$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè unitaria, si ha $\varphi(e_h)=\sum_{j=1}^n a_{jh}e_j$, perciò

$$\delta_{hk}=\langle\varphi(e_h),\varphi(e_k)\rangle=\langle\sum_{j=1}^n a_{jh}e_j,\sum_{i=1}^n a_{ik}e_i\rangle=\sum_{i=1}^n a_{ih}a_{ik}=(A^tA)_{hk}$$

Da cui la tesi.

Si noti che, dato che un'isometria è un'affinità, so che, preso un riferimento euclideo $(O;\{e_1,\dots,e_n\})$ di $\boldsymbol{E}^n$ e data $f$ isometria, allora $f(X)=AX^t+C$ se $\boldsymbol{E}^n=k^n$ per proposizione 1.4.1. Per lemma 1.5.2, $A$ è unitaria.

Studiamo ora in dettaglio il caso di $\mathbb{R}^2$. Dato che, per quanto appena detto, $A$ è una matrice unitaria, abbiamo che

$$A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\ \text{ o }\ A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

che identificano rispettivamente un'isometria *diretta* ed un'isometria *inversa*. La prima rappresenta la rotazione di $\theta$, mentre la seconda è la riflessione rispetto alla retta passante per l'origine con angolo $\theta/2$ rispetto all'asse delle $x$. Dunque *le isometrie di* $\mathbb{R}^2$ *sono rotazioni e riflessioni con traslazioni* .

Per il caso $\mathbb{R}^3$, conviene prima considerare il seguente lemma.

LEMMA 1.5.3. Sia $A\in\mathcal{O}(3)$. Allora $A$ ha un autovalore reale $\lambda=\pm1$.
Si ricordi che $\mathcal{O}(n):=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}): AA^t=Id\}$ è l'insieme delle matrici unitarie.

DIMOSTRAZIONE. $A$ ha sicuramente una radice reale, poiché il polinomio caratteristico ha grado $3$ e coefficienti reali. $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ unitaria implica che $\|Ax\|=\|x\|$ per ogni $x\in\mathbb{R}^3$. Sia $\bar{x}$ un autovettore per $\lambda\in\mathbb{R}$ autovalore. Allora $\|\lambda\bar{x}\|=\|A\bar{x}\|=\|\bar{x}\|$, da cui $|\lambda|=1$, i.e. $\lambda=\pm1$.

Possiamo quindi concludere che le isometrie di $\mathbb{R}^3$ sono della forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A \end{pmatrix}$$

ove $A$ è una delle due matrici viste nel caso di $\mathbb{R}^2$.

Si verifica che l'insieme delle isometrie di $\boldsymbol{E}^n$, $Isom(\boldsymbol{E}^n)$, è un gruppo.

Sia $E = \mathbb{R}^n$ e sia $H$ un iperpiano (sottospazio di dimensione $n-1$); il simmetrico di un punto $P$ rispetto ad $H$ è $\sigma_H(P)$ tale che $\overline{N\,\sigma_H(P)} = -\overline{NP}$, dove $N = r \cap H$ con $r$ passante per $P \perp H$. Si verifica che se $H: a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + c = 0$, allora

$$\sigma_H(P) = P - 2\frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|^2}(a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + c)$$

La dimostrazione segue dal fatto che $\overline{P\,\sigma_H(P)} = -2\,\overline{NP}$ e che, preso $Q \in H$, allora

$$\overline{NP} = \langle \overline{QP}, \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|} \rangle \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|}$$