

Quaderno di Antonio Lorenzin del corso di

Geometria III

Analisi complessa

Tenuto da Alessandro Perotti

FUNZIONI OLOMORFE

Siamo interessati a considerare delle funzioni $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si ricordi che si può identificare $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$; tuttavia sostituire \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 risulterebbe una banalizzazione per quanto andremo a fare. Considereremo funzioni “differenziabili”. Tra le varie cose, si vedranno queste proprietà:

1. $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ con γ curva chiusa ed f differenziabile anche all'interno di questa forma.
2. f ha derivate di ogni ordine ($f \in C^\infty$).
3. Principio di identità: se f, g (differenziabili) coincidono su un disco, allora $f = g$ ovunque.

Rivediamo i complessi. Consideriamo su \mathbb{R}^2 le coppie ordinate (a, b) e definiamo

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a+b, c+d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

Si verifica che \mathbb{C} così definito è tale che $(\mathbb{C}, +)$ è un gruppo abeliano, $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano, ove l'inverso è

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

mentre $(1,0)$ è l'elemento neutro. Denotiamo $(a, 0) =: a$, $i = (0,1)$; si vede che $i^2 = (-1, 0) = -1$. Dunque

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$$

è un altro modo per scrivere i numeri complessi. In generale, useremo $z = a + ib$, ove $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$ ed i è l'unità immaginaria. Il coniugato di z come è stato appena scritto è

$$\bar{z} = a - ib$$

Il modulo di z è

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = (z \bar{z})^{1/2}$$

L'inverso vale quindi ($z \neq 0$)

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Ho le seguenti relazioni:

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Si osservi che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z$$

Per il modulo,

$$|zw| = |z||w|, \quad |z+w| \leq |z| + |w|$$

In maniera naturale, si ha

$$\max\{|\Re(z)|, |\Im(z)|\} \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$$

Ogni numero complesso si può scrivere in coordinate polari: preso $\rho = |z|$ e $a = \rho \cos \theta$, $b = \rho \sin \theta$

$$z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

θ si dice argomento di z .

Indico con $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$. Si verifica che $|e^{i\theta}| = 1$, quindi è un punto della circonferenza unitaria centrata nell'origine. Inoltre, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ per $k \in \mathbb{Z}$. Posso scrivere z nella forma esponenziale:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Possiamo osservare che $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$, infatti

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi) = \cos\theta \cos\varphi - \sin\theta \sin\varphi + i(\sin\theta \cos\varphi + \cos\theta \sin\varphi) \\ e^{i\theta} e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i \sin\theta)(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \cos\theta \cos\varphi - \sin\theta \sin\varphi + i(\sin\theta \cos\varphi + \cos\theta \sin\varphi) \end{aligned}$$

Se $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, allora considererò la seguente uguaglianza

$$e^\alpha := e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Da quanto detto, ricavo che, presi $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$,

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$$

Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono n radici n -esime di α , ovvero n numeri tali che elevati alla n siano uguali ad α . Prendo

$$z = \rho_z e^{i\varphi}, \quad \alpha = \rho e^{i\theta}$$

Voglio che $z^n = (\rho_z e^{i\varphi})^n = \rho_z^n e^{in\varphi} = \alpha = \rho e^{i\theta}$. Ciò vale se e solo se

$$\begin{cases} \rho_z^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

Da cui ottengo il sistema seguente

$$\begin{cases} \rho_z = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

per $k=0, \dots, n-1$.

1.1. Funzioni complesse, continuità e derivabilità.

Denoteremo solitamente con $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funzione. Posso considerarla

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

con $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o come $f(z)$ per $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE 1.1.1. f è continua se e solo se u e v sono continue.

DEFINIZIONE 1.1.1. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è *differenziabile* in $z \in \Omega$ se esiste (finito) il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z) \in \mathbb{C}$$

Equivalentemente, $f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|)$ con $f'(z) \in \mathbb{C}$.

ESEMPIO 1.1.1. Sia $f(z) = z$.

$$\frac{z+h-z}{h} = 1$$

dunque $f'(z) = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. f è quindi differenziabile in ogni punto di \mathbb{C} .

ESEMPIO 1.1.2. Sia $g(z) = \bar{z}$.

$$\frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} \rightarrow \begin{cases} 1 & h \in \mathbb{R} \\ -1 & h = ia \ (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Dunque g non è differenziabile in nessun punto.

DEFINIZIONE 1.1.2. Una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è detta *olomorfa* se è differenziabile in ogni punto di Ω .

Alle volte si usa il termine *analitica* al posto di olomorfa.

OSSERVAZIONE 1.1.2. Valgono proprietà analoghe al caso reale: la somma, i prodotti, le composizioni di funzioni differenziabili sono funzioni differenziabili. Lo stesso vale, dove definiti, per i quozienti.

Ad esempio,

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

Se $f(z) \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$$

ESEMPIO 1.1.3. Ogni polinomio $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ con $a_i \in \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa su \mathbb{C} grazie ad esempio 1.1.1 ed osservazione 1.1.2.

Risulta naturale porsi la seguente domanda: se $f = u + iv$ è differenziabile, cosa accade a u e v ?

PROPOSIZIONE 1.1.1. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Sappiamo che $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ove $z = x + iy$. f è differenziabile in z se e solo se u e v sono differenziabili in z e valgono le *equazioni di Cauchy-Riemann* in z :

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

DIMOSTRAZIONE.

1. Supponiamo che f sia differenziabile in z . Prendiamo $h = rv$ con $|v| = 1$ ed $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+rv) - f(z)}{rv} = f'(z)$$

è equivalente a dire che esiste

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+rv) - f(z)}{r} = v f'(z) = D_v f(z)$$

per ogni $|v| = 1$ fissato. Con $v = 1$, otteniamo l'esistenza di

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+r) - f(z)}{r} = D_1 f(z) = f'(z) = f_x(z) = u_x(z) + i v_x(z)$$

Prendiamo $v = i$. Allora esiste

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+ri) - f(z)}{r} = D_i f(z) = i f'(z) = f_y(z) = u_y(z) + i v_y(z)$$

Perciò

$$\begin{cases} f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) \\ i f'(z) = u_y(z) + i v_y(z) \end{cases}$$

Da cui si ottiene che $u_x(z) + i v_x(z) = -i u_y(z) + v_y(z)$. Ottengo quindi le equazioni di Cauchy-Riemann.

Vediamo la differenziabilità di u e v . Sia $h = a + ib$. Allora

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|) = (u_x + i v_x)(a + ib) + o(|h|) = (u_x a - v_x b) + i(u_x b + v_x a) + o(|h|)$$

Da cui, dividendo in parte reale e parte complessa, si ottiene

$$u(x+a, y+b) - u(x, y) = u_x a - v_x b + o(|h|), \quad v(x+a, y+b) - v(x, y) = u_x b + v_x a + o(|h|)$$

Dunque u e v sono differenziabili in $(x, y) = z$.

2. Siano u, v differenziabili soddisfacenti le equazioni di Cauchy-Riemann. Allora, se $h = a + ib$,

$$u(z+h) - u(z) = u_x a + u_y b + o(|h|) = u_x a - v_x b + o(|h|)$$

Analogamente,

$$v(z+h)-v(z)=v_x a+v_y b+o(|h|)=v_x a+u_x b+o(|h|)$$

Da queste due relazioni, si vede immediatamente che f è differenziabile; infatti

$$\begin{aligned} f(z+h)-f(z) &= u(z+h)-u(z)+i(v(z+h)-v(z))=u_x a-v_x b+i(v_x a+u_x b)+o(|h|)= \\ &= (u_x+iv_x)(a+ib)+o(|h|)=(u_x+iv_x)h+o(|h|) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.1.3. Dalla dimostrazione appena vista si evince che $f'(z)=f_x(z)=-if_y(z)$.

Introduciamo questa notazione:

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

OSSERVAZIONE 1.1.4. $f:\Omega\rightarrow\mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$$

Infatti,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}(f_x-f_x)=0$$

poichè valgono CR (equazioni di Cauchy-Riemann). Per quanto riguarda il primo operatore, sempre con le stesse ipotesi,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=f_x=f'(z)$$

OSSERVAZIONE 1.1.5. Naturalmente, la funzione z che abbiamo visto in esempio 1.1.1, $\partial z/\partial z=1$.

Inoltre, vale che

$$\frac{\partial z^n}{\partial z}=nz^{n-1}$$

Proviamolo per induzione: il caso $n=1$ è appena stato affrontato. Supponiamo valga per $n-1$. Grazie a osservazione 1.1.2, sappiamo valere Leibnitz (derivata prodotto):

$$\frac{\partial z^n}{\partial z}=\frac{\partial(z z^{n-1})}{\partial z}=z\frac{\partial z^{n-1}}{\partial z}+z^{n-1}=z(n-1)z^{n-2}+z^{n-1}=nz^{n-1}$$

Sia $f=u+iv\in\mathcal{O}(\Omega)$, ove $\mathcal{O}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni olomorfe (in Ω). Supponiamo $u, v\in C^2(\Omega)$ (ipotesi in realtà non necessaria, come si vedrà più avanti). Allora, dato che valgono CR,

$$u_{xx}=v_{yx}=v_{xy}=-u_{yy}$$

Per cui,

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

Questa equazione è il laplaciano di u : quindi $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$ in Ω . Questo ci dice che u è *armonica* su Ω . Questo risultato si può vedere anche per v . Vale anche il viceversa.

PROPOSIZIONE 1.1.2. Sia Ω semplicemente connesso. Per ogni funzione armonica u su Ω (C^2) esiste (unica a meno di costanti additive reali) una funzione $v\in C^2(\Omega)$ tale che $f=u+iv\in\mathcal{O}(\Omega)$.

La funzione v così presa viene detta *armonica coniugata*.

1.2. Serie di potenze

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Considero la successione $\{f_n(z)\}$ con $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

DEFINIZIONE 1.2.1. $\{f_n(z)\} \rightarrow f$ se e solo se $\Re f_n(z) \rightarrow \Re f(z)$ e $\Im f_n(z) \rightarrow \Im f(z)$. Se $f_n(z) \rightarrow f(z)$ per ogni $z \in \Omega$, $\{f_n(z)\}$ converge puntualmente a $f(z)$ su Ω . Se $\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente a $f(z)$ in Ω .

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, con $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, una serie di funzioni. Si consideri $s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

DEFINIZIONE 1.2.2. Se $\{s_n(z)\}$ converge a $f(z)$ per ogni $z \in \Omega$, allora la serie è *puntualmente convergente* a f su Ω . Se la serie (reale) $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ è convergente per ogni $z \in \Omega$, si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ è *assolutamente convergente* su Ω . Se $\{s_n(z)\}$ converge uniformemente a f su Ω , allora la serie $\sum_n f_n(z)$ si dice *convergente uniformemente* a f su Ω .

L'assoluta convergenza implica che $\sum_n |\Re f_n(z)|$ e $\sum_n |\Im f_n(z)|$ sono convergenti; dunque $\sum_n f_n(z)$ è puntualmente convergente. Anche la convergenza uniforme implica quella puntuale.

TEOREMA 1.2.1: M-test di Weierstrass. Siano $M_n \in \mathbb{R}$ tali che $|f_n(z)| \leq M_n$ per ogni $z \in \Omega$. Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge assolutamente ed uniformemente in Ω .

DIMOSTRAZIONE. $\sum f_n(z)$ converge assolutamente per il criterio del confronto ($\sum_n |f_n| \leq \sum_n M_n$). Sia

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

che esiste dato che la serie converge puntualmente. Per ogni $z \in \Omega$,

$$|s(z) - s_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

Per ogni $\epsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|s(z) - s_n(z)| < \epsilon$ per ogni $z \in \Omega$ ed $n > N$. La serie converge quindi uniformemente.

DEFINIZIONE 1.2.3. Se le ipotesi del teorema 1.2.1 sono soddisfatte, allora si dice che la serie *converge totalmente* su Ω .

Sarà utile avere in mente che $n^z := e^{z \log n} = e^{x \log n} e^{iy \log n}$.

ESEMPIO 1.2.1.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^2$. Si vede che $|z^n / n^2| \leq 1/n^2$ se $|z| \leq 1$. Allora la serie converge uniformemente su $B_0(1)$, ovvero $\{|z| \leq 1\}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$. $n^{-z} = e^{-x \log n} e^{-iy \log n}$. $|n^{-z}| = e^{-x \log n} \leq e^{-s \log n} = n^{-s}$ ove $s > 1$. Dunque la serie è uniformemente convergente su $\{\Re z > s\}$. Questa serie è la *Zeta di Riemann*.

TEOREMA 1.2.2: di Hadamard. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una *serie di potenze* con $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ e sia

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

il *raggio di convergenza*.

1. La serie converge assolutamente nel disco $B_{z_0}(R)$ e non converge se $z \notin \overline{B_{z_0}(R)}$.
2. La serie converge uniformemente su $\overline{B_{z_0}(r)}$ con $r < R$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $z_0 = 0$. Fissiamo $0 < r < R$ e $r < t < R$. Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{|a_n|} < t^{-1}$ per ogni $n \geq N$. Allora $|a_n z^n| < (r/t)^n$ se $|z| \leq r$. Allora $\sum a_n z^n$ converge assolutamente ed uniformemente su $B_0(r)$. Se $|z| > R$, allora $|z|^{-1} < \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$: dunque per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste $n > N$ tale che $|z|^{-1} < \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora esiste una sottosuccessione di $\{a_n z^n\}$ con $|a_n z^n| > |a_n|/|a_n| = 1$. Ne ricavo che $a_n z^n$ non converge a 0. Perciò la serie $\sum_n a_n z^n$ non può convergere.

ESEMPIO 1.2.2.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$. Questa serie ha $R=1$, infatti $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$. Per cui il disco di convergenza è $B_0(1)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n!$. Qui $R=+\infty$.
3. Se la serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)$ ha raggio di convergenza $R > 0$, allora la serie di potenze complessa $\sum_n a_n (z - x_0)$ converge sul disco $B_{x_0}(R)$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, con

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ è primo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque si ha $\sqrt[n]{|a_n|} = 2$ se n è primo e 0 altrimenti. Perciò $R = (\limsup_n |a_n|^{1/n})^{-1} = 1/2$.

$$\sum_n a_n z^n = 4z^2 + 8z^3 + \dots$$

DEFINIZIONE 1.2.4. Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, la *serie derivata* è la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n$$

OSSERVAZIONE 1.2.1. La serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie di potenze. Infatti,

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = ((n+1)|a_{n+1}|)^{1/n} = ((n+1)^{1/(n+1)} |a_{n+1}|^{1/(n+1)})^{(n+1)/n} = (n+1)^{1/n} (|a_{n+1}|^{1/(n+1)})^{(n+1)/n}$$

Considerando il \limsup , ho che

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \rightarrow R^{-1}$$

Per cui ho dimostrato che le due serie hanno lo stesso raggio.

TEOREMA 1.2.3. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie di potenze complessa con raggio $R > 0$. Allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è olomorfa nel disco $B_{z_0}(R)$ e $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre $z_0=0$. Fissiamo un punto $z \in B_0(R)$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$\overline{B_z(\delta)} \subset B_0(R)$$

Calcoliamo il rapporto incrementale ove h è tale che $z+h \in B_z(\delta)$, ovvero $|h| < \delta$.

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{[(z+h)/z]^n - 1}{[(z+h)/z] - 1} z^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z+h}{z} \right)^j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j \end{aligned}$$

Sappiamo anche valere che $|z+h| \leq |z|+|h| < |z|+\delta$.

$$\left| a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j \right| \leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |z|^{n-1-j} |z+h|^j \leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} (|z|+\delta)^{n-1} = |n a_n (|z|+\delta)^{n-1}|$$

Data stima la posso vedere come la derivata nel punto $z+z\delta/|z| \in \overline{B_z(\delta)}$, infatti

$$\left| z + \frac{z}{|z|} \delta \right| = |z| + \delta$$

La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (|z|+\delta)^{n-1}$ è assolutamente convergente, dato che la è serie derivata nel punto $z+z\delta/|z|$. Sono quindi soddisfatte le ipotesi per il test di Weierstrass: si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j$$

è uniformemente convergente per h con $|h| < \delta$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

1.3. Estensione complessa di alcune funzioni notevoli

DEFINIZIONE 1.3.1. Definiamo

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

Si vede subito che $(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} / n! = e^z$.

Fissato $w \in \mathbb{C}$, definiamo $g_w(z) = e^{w-z} e^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. $g_w'(z) = -e^{w-z} e^z + e^{w-z} e^z = 0$, dunque la funzione è costante. In particolare, $g_w(z) = g_w(0) = e^w$. Sia $z = \beta$ e $w = \alpha + \beta$. Per cui vale, come ci aspettiamo, che

$$e^{\alpha+\beta} = e^w = g_w(z) = e^{w-z} e^z = e^{\alpha} e^{\beta}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Prendiamo ora un numero $\theta \in \mathbb{R}$.

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \cos \theta + i \sin \theta$$

Perciò, se $z = x + iy$, allora $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Da quanto visto, l'esponenziale e^z è periodico di periodo $2\pi i$: $e^{z+2k\pi i} = e^z$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

L'immagine di e^z è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Facciamo vedere che $e^z = \alpha$ ha sempre soluzione per $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\alpha = |\alpha| e^{i \arg(\alpha)}$$

Devo trovare x tale che $e^x = |\alpha|$ ed y tale che $e^{iy} = e^{i \arg(\alpha)}$. Prendo $z = x + iy$ che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} x = \ln |\alpha| \\ y = \arg \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ESEMPIO 1.3.1. Sia $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$. $\arg(-1) = \pi$, $|\alpha| = 1$.

$$\begin{cases} x = \ln(1) = 0 \\ y = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Per cui $e^{i\pi} = -1$.

DEFINIZIONE 1.3.2. Definiamo

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}), \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

Si vede che $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, da cui

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Da questo si vede subito che $\sin z, \cos z$ sono periodiche di periodo 2π .

OSSERVAZIONE 1.3.1. $\sin z, \cos z$ assumono tutti i valori complessi. Proviamolo per il coseno.

$$\cos z = \alpha$$

Questa equazione può essere rivista con l'esponenziale; quindi

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\alpha \Leftrightarrow e^{2iz} + 1 = 2\alpha e^{iz} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2\alpha e^{iz} + 1 = 0$$

Otteniamo quindi due soluzioni

$$e^{iz} = \begin{cases} \alpha_1 = \alpha - w_1 \\ \alpha_2 = \alpha + w_1 \end{cases}$$

con $w_1^2 = \alpha^2 - 1$. Si noti che α_1 e α_2 sono diversi da 0. $e^{iz} = \alpha_j$ (per $j=1,2$) con $z = x + iy$ soddisfa

$$\begin{cases} y = -\ln |\alpha_j| \\ x = \arg \alpha_j + 2k\pi \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, $y = 0$. Quindi gli zeri di $\cos z$ sono sulla retta reale.

DEFINIZIONE 1.3.3. Si possono definire

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

Vogliamo definire il logaritmo complesso. Sappiamo che $e^z = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ha come soluzioni

$$z_k = \ln |\alpha| + i(\arg \alpha + 2k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

e vediamo se la definizione così posta può essere giusta ($\arg z \in [0, 2\pi)$). Questa funzione è discontinua: infatti, preso $z_1 \in \mathbb{R}$, ($\log z_1 = \ln |z_1|$) e z_2 che si avvicina a z_1 dalla circonferenza unitaria, i.e.

$$\log z_2 = \ln|z_2| + i \arg z_2 \rightarrow \ln|z_1| + 2\pi i$$

Si ha che $\log z_2$ non tende a $\log z_1$. Possiamo togliere, ad esempio, $\log z$ è continua su $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Ma non è l'unica scelta che si può fare.

DEFINIZIONE 1.3.4. Il *logaritmo principale* è la funzione

$$\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{Log}(z) := \ln|z| + i \arg z$$

con $\arg z \in [-\pi, \pi)$ (in questo modo, se $x \in \mathbb{R}$, allora $\text{Log } x = \ln x$).

OSSERVAZIONE 1.3.2. Non sempre vale che $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$

Vediamo che $\text{Log } z \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\})$. Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$. Prendo $z = x + iy \in \Omega$

$$\text{Log } z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dunque ottengo

$$\begin{cases} u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} & u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} & v_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Valgono le equazioni di Cauchy-Riemann. Quindi il logaritmo principale è olomorfo su Ω e si ha

$$(\text{Log } z)' = u_x + i v_x = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{1}{z}$$

Se $z \in \mathbb{C} \setminus (\Omega \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\})$, esiste α ($= \pm \pi/2$) tale che $z e^{i\alpha} \in \Omega$.

$$\text{Log}(z e^{i\alpha}) = \ln|z| + i \arg(z e^{i\alpha}) = \ln|z| + i \arg z + i \alpha = \text{Log } z + i \alpha$$

Quindi si ha che

$$(\text{Log } z)' = (\text{Log}(z e^{i\alpha}))' e^{i\alpha} = \frac{1}{z e^{i\alpha}} e^{i\alpha} = \frac{1}{z}$$

DEFINIZIONE 1.3.5. Sia $a \in \mathbb{C}$ (fissato). Possiamo definire

1. $z^a := e^{a \text{Log } z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\})$
2. $a^z := e^{z \text{Log } a} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ se $a \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

Per 1, possiamo vedere come esempio $z^{1/2} = \sqrt{z} := e^{(\text{Log } z)/2}$.

INTEGRAZIONE LUNGO CURVE

2.1. Integrazione

Supponiamo di avere $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Posso scrivere che $f=u+iv$; definisco

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

PROPOSIZIONE 2.1.1.

$$1. \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt \text{ per ogni } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$2. \int_a^b \Re f(t) dt = \Re \int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b \Im f(t) dt = \Im \int_a^b f(t) dt$$

$$3. \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

4. Se F è derivabile e $F' = f$, allora

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

5. Se $\theta:[a,b] \rightarrow [c,d]$ e $\theta(a)=c$, $\theta(b)=d$ di classe C^1 con inversa di classe C^1 ,

$$\int_c^d f(s) ds = \int_a^b f(\theta(t)) \theta'(t) dt$$

DIMOSTRAZIONE. Tutti i punti sono banalmente verificati tranne 3. Proviamolo. Definisco

$$w := \int_a^b f(t) dt$$

Suppongo $w \neq 0$; con $w=0$ la tesi è ovvia. $w = |w| e^{i\theta}$; quindi $w e^{i\alpha} = |w| e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+$.

$$e^{i\alpha} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{i\alpha} f(t) dt = \Re \left(\int_a^b e^{i\alpha} f(t) dt \right)$$

Perciò

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| e^{i\alpha} \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \Re \int_a^b e^{i\alpha} f(t) dt \right| = \Re \int_a^b e^{i\alpha} |f(t)| dt = \\ &= \int_a^b \Re(e^{i\alpha} f(t)) dt \leq \int_a^b |e^{i\alpha} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 2.1.1. Una *curva regolare* in \mathbb{C} è

$$\gamma: J=[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$$

di classe C^1 con $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$. Più in generale, γ è una *curva regolare a tratti* se $\gamma \in C^0$ su J e $\gamma \in C^1$ su J è stato tolto un numero finito di punti.

Un esempio di curva regolare è $\gamma(t) = r e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ e $r > 0$, infatti $\gamma'(t) = r e^{it} \neq 0$.

DEFINIZIONE 2.1.2. Sia $\theta: \tilde{J}=[c, d] \rightarrow J=[a, b]$ è C^1 con inversa di classe C^1 , $\theta(c)=a$ e $\theta(d)=b$. La curva

$$\tilde{\gamma}:=\gamma \circ \theta: \tilde{J} \rightarrow \mathbb{C}$$

è detta *riparametrizzazione* di γ (che è una curva regolare $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$).

DEFINIZIONE 2.1.3. Siano γ una curva regolare $J \rightarrow \mathbb{C}$ e S una suddivisione di $J=[a, b]$ del tipo

$$a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Allora

$$\ell(\gamma, S) := \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

La lunghezza della curva fra $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ è

$$\ell(\gamma) := \sup_S \ell(\gamma, S)$$

Se γ è regolare, si può provare che

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt < \infty$$

DEFINIZIONE 2.1.4. Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ C^1 a tratti. Considero poi

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

tale che $\gamma([a, b]) \subseteq \Omega$. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

OSSERVAZIONE 2.1.1. $\int_{\gamma} f(z) dz$ non dipende dalla parametrizzazione.

PROPOSIZIONE 2.1.2.

1. $\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz$
 2. $\Re \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \Re f(z) dz$, $\Im \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \Im f(z) dz$
 3. $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq (\max_{\gamma} |f|) \ell(\gamma)$
 4. Se esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $F' = f$ su Ω e $\text{supp}(\gamma) := \gamma([a, b]) \subseteq \Omega$, allora
- $$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

DIMOSTRAZIONE. Le prime due tesi derivano da proposizione 2.1.1. Per il punto 3,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \max_{\gamma} |f| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq (\max_{\gamma} |f|) \ell(\gamma)$$

Mostriamo il punto 4. Per farlo, vogliamo vedere che

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma) = (F' \circ \gamma) \gamma' = (f \circ \gamma) \gamma'$$

Siano $F = U + iV$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(F \circ \gamma) &= \frac{d}{dt}(U \circ \gamma + iV \circ \gamma) = (U_x \circ \gamma)\gamma'_1 + (U_y \circ \gamma)\gamma'_2 + i((V_x \circ \gamma)\gamma'_1 + (V_y \circ \gamma)\gamma'_2) = \\ &= (F_x \circ \gamma)\gamma'_1 + (F_y \circ \gamma)\gamma'_2 = (F' \circ \gamma)\gamma'_1 + i(F' \circ \gamma)\gamma'_2 = (F' \circ \gamma)(\gamma'_1 + i\gamma'_2) = (F' \circ \gamma)\gamma'\end{aligned}$$

A questo punto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (f \circ \gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

OSSERVAZIONE 2.1.2. Se γ è chiusa, ovvero è tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni $f = F'$ con $F \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Useremo la seguente notazione: presa $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, definiamo

$$-\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

tale che $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$. Perciò $-\gamma(a) = \gamma(b)$, $-\gamma(b) = \gamma(a)$. Naturalmente,

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Infatti

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t)) dt = \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds$$

ove $s = a+b-t$.

ESEMPIO 2.1.1. Sia $f(z) = (z-a)^n$ ove $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Dato che

$$f(z) = \left(\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \right)'$$

Per ogni γ chiusa, si ha

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = 0$$

Se prendessimo $f(z) = (z-a)^n$ con $n \leq -2$, la primitiva vale $(z-a)^{n+1}/(n+1)$. Anche qui, l'integrale di f vale 0 per ogni γ chiusa.

Presa $\gamma(t) = a + e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, calcoliamo

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)} = \int_0^{2\pi} i \frac{e^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$$

Dunque l'integrale di $f(z) = (z-a)^n$ su una curva chiusa vale 0 per $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ed $a \in \mathbb{C}$.

ESEMPIO 2.1.2. Considero $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ e calcolo

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

grazie al fatto che su γ vale $\bar{z} = z^{-1}$.

2.2. Teorema di Cauchy locale

TEOREMA 2.2.1: Di Goursat. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e R un rettangolo in Ω (con lati paralleli agli assi). Allora

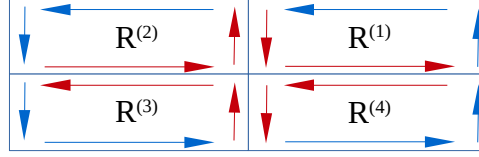
$$\int_{\partial R} f(z) dz$$

per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Chiamiamo, per $R' \subset \Omega$ rettangolo

$$\eta(R') = \left| \int_{\partial R'} f(z) dz \right|$$

Suddividiamo il rettangolo R in quattro rettangoli uguali come in figura.



Chiaramente l'integrale di f sul bordo di R è uguale alla somma degli integrali di f sui bordi dei quattro rettangoli, perché i lati comuni sono percorsi in verso opposto. Si ha perciò

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial R^{(j)}} f(z) dz$$

Esiste R_1 tale che $\eta(R_1) \geq \eta(R)/4$. Applichiamo lo stesso procedimento su questo R_1 . Avremo che esiste un R_2 tale che $\eta(R_2) \geq \eta(R_1)/4 \geq \eta(R)/16$. Otterremo la famiglia $\{R_n\}$ tale che $R_{n+1} \subset R_n$ ove

$$\eta(R_n) \geq \frac{\eta(R)}{4^n}$$

Prendiamo $z_n \in R_n$ e consideriamo la famiglia $\{z_n\}$, che converge ovviamente a $z^* \in \bigcap_n R_n$. Vale la stima

$$|z_n - z_m| \leq \text{diam}(R_n)$$

se $n, m \geq N$. f è derivabile in z^* , per cui per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \epsilon |z - z^*|$$

per ogni z tale che $|z - z^*| < \delta$. Per n grande, $|z - z^*| < \delta$ per ogni $z \in R_n$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial R_n} f(z) dz &= \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)] dz + \int_{\partial R_n} (f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*)) dz = \\ &= \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)] dz \end{aligned}$$

Vale perciò che

$$\eta(R_n) \leq \int_{\partial R_n} |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| dz \leq \epsilon \text{diam } R_n \cdot \ell(\partial R_n) \leq \epsilon \frac{\text{diam } R}{2^n} \frac{\ell(\partial R)}{2^n} = \frac{\epsilon K}{4^n}$$

ove $K := \text{diam } R \cdot \ell(\partial R)$. Per cui,

$$\eta(R) \leq 4^n \eta(R_n) \leq \epsilon K$$

Per l'arbitrarietà di ϵ , posso concludere.

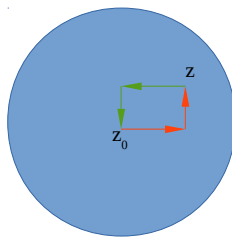
COROLLARIO 2.2.1: Teorema di Cauchy locale. Sia D un disco aperto di \mathbb{C} e γ una curva chiusa in D . Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni $f \in \mathcal{O}(D)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$F := \int_{\partial R^-} f(w) dw = \int_{\partial R^+} f(w) dw$$



ove ∂R^- è il percorso rosso e ∂R^+ è il percorso verde. Esiste

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f'(z)$$

Dunque, presa $\gamma(t) = z + ti$ con $t \in [0, r]$ e $f = u + iv$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(z+r) - F(z)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int f(w) dw = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r f(z+ti) i dt = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r (u(z+ti) i - v(z+ti)) dt = \lim_{r \rightarrow 0} (u(z+t_0 i) i - v(z+t_1 i)) \end{aligned}$$

con $t_0, t_1 \in [0, r]$. Quindi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = u(z) i - v(z) = i f(z)$$

Analogamente, $\partial F(x)/\partial x = u(z) + i v(z) = f(z)$. Dunque

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (f(z) - f(z)) = 0$$

Si ricava anche che

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z) = f'(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (f(z) + f(z)) = f(z)$$

Dunque $F \in \mathcal{O}(D)$ e $F' = f$. Perciò $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

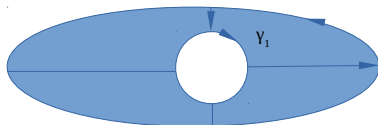
COROLLARIO 2.2.2. Sia D un disco aperto, sia $f \in \mathcal{O}(D)$ e siano γ_1, γ_2 curve con lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, il cui supporto è contenuto in D . Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Inoltre,

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} f dz = 0 = \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz$$

ESEMPIO 2.2.1.



Considerata la figura, posso prendere $\{\gamma_i\}$ famiglia di cui abbiamo rappresentato γ_1 . Allora vale

$$0 = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \frac{dz}{z} = \int_C \frac{dz}{z} - \int_{\partial B_0(r)} \frac{dz}{z}$$

Ove C è l'ellisse e $B_0(r)$ il cerchio interno. Poichè

$$\int_{\partial B_0(r)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Allora anche l'altro integrale vale $2\pi i$.

TEOREMA 2.2.2. Sia D disco aperto. Siano $a_1, \dots, a_n \in D$ e sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ tale che

$$\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i) f(z) = 0$$

per ogni i . Allora

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

per ogni rettangolo $R \subset D$ tale che $\partial R \cap \{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che R contenga un solo punto a . Se considero un quadrato $Q \subset R$ che contiene a , poiché ∂R e ∂Q sono riconducibili l'uno all'altro (stesso tipo di archi),

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Per ipotesi, so che per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(z)(z - a)| < \epsilon$ se $|z - a| < \delta$. Sia $Q \subset B_a(\delta)$.

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial Q} f(z)(z - a) \frac{1}{z - a} dz \right| < \epsilon \max_{z \in \partial Q} \frac{1}{|z - a|} 4\ell(Q) = \epsilon \left(\min_{z \in \partial Q} |z - a| \right)^{-1} 4\ell(Q)$$

Dato che $\min_{z \in \partial Q} |z - a|$ vale la metà del lato del quadrato, che è $\ell(Q)$, si ha

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| < 8\epsilon$$

COROLLARIO 2.2.3. Se γ è chiusa con $\text{supp}(\gamma) \subset D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ tale che $\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i) f(z) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

DIMOSTRAZIONE. Si ricordi la costruzione fatta nel teorema di Cauchy locale, ove però invece di prendere il centro considero gli a_i . Grazie a teorema 2.2.2, la dimostrazione è analoga.

2.3. Indice di un punto rispetto a una curva

DEFINIZIONE 2.3.1. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ curva chiusa. Sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$ ($\text{supp}(\gamma) = \gamma([a, b])$). L'indice di $z \in \Omega$ rispetto alla curva γ è

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

(esso viene detto anche winding number, indice di avvolgimento).

PROPOSIZIONE 2.3.1 $\text{Ind}_{\gamma}(z) \in \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$g(s) := \int_a^s \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z}, \quad \varphi(s) := e^{g(s)}$$

Se mostriamo che $\varphi(b) = e^{g(b)} = 1$, allora

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\gamma(t) - z} dt = k \in \mathbb{Z}$$

Si noti che

$$\varphi' = e^{g(s)} \frac{\gamma'}{\gamma - z} = \frac{\varphi \gamma'}{\gamma - z}$$

Per cui

$$\frac{\varphi'}{\gamma'} = \frac{\varphi}{\gamma - z}$$

Derivando nuovamente,

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma - z} \right)' = \frac{\varphi'}{\gamma - z} - \frac{\varphi \gamma'}{(\gamma - z)^2} = \frac{\varphi'}{\gamma - z} - \frac{\varphi'}{\gamma'} \frac{\gamma'}{\gamma - z} = 0$$

Dunque, poichè $\varphi(a) = e^{g(a)} = e^0 = 1$,

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{1}{\gamma(a) - z}$$

Da cui $\varphi(b) = (\gamma(b) - z) / (\gamma(a) - z) = 1$ dato che γ è chiusa.

LEMMA 2.3.1. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, γ curva chiusa con $\text{supp}(\gamma) \subset \Omega$ e $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua su $\text{supp}(\gamma)$. Allora

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} dw$$

è olomorfa in $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$.

DIMOSTRAZIONE. Facciamo anzitutto vedere che f è continua. Sia $z_0 \in \Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$ e considero $B_{z_0}(\delta)$ (palla di centro z_0 e raggio δ , che è la distanza di z dalla curva) contenuta in $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$. Prendiamo ora $z \in B_{z_0}(\delta/2)$. Chiaramente, se $w \in \text{supp}(\gamma)$, allora $|w - z| \geq \delta/2$.

$$\left| \frac{g(w)}{w - z} - \frac{g(w)}{w - z_0} \right| = \left| \frac{g(w)(z - z_0)}{(w - z)(w - z_0)} \right| \leq \max_{w \in \text{supp}(\gamma)} |g(w)| \frac{2}{\delta^2} |z - z_0|$$

Consideriamo ora f :

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \int_\gamma \left(\frac{g(w)}{w - z} - \frac{g(w)}{w - z_0} \right) dw \right| \leq \max_{w \in \text{supp}(\gamma)} |g(w)| \frac{2}{\delta^2} |z - z_0| \ell(\gamma) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

Dunque f è continua. Vediamo che f è olomorfa su $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$. Sia $r(z)$ il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \left(\frac{g(w)}{w - z} - \frac{g(w)}{w - z_0} \right) \frac{1}{z - z_0} dw = \\ &= \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z)(w - z_0)} dw \end{aligned}$$

Si verifica che r è continua con la dimostrazione di f continua appena fatta prendendo al posto di g la funzione $g(w)/(w - z_0)$. Allora esiste

$$\lim_{z \rightarrow z_0} r(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z_0)^2} dw$$

Perciò f è differenziabile in z_0 : dunque f è olomorfa su $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$.

COROLLARIO 2.3.1. $\text{Ind}_\gamma(z)$ è continua su $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$.

COROLLARIO 2.3.2. $\text{Ind}_\gamma(z)$ è costante sulle componenti connesse di $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$.

OSSERVAZIONE 2.3.1. $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ sulla componente connessa illimitata di $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$. Infatti,

Dunque per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che $|w - z| \geq M$ se $|z| \geq R$ per ogni $w \in \text{supp}(\gamma)$. Quindi

$$\left| \int_\gamma \frac{dw}{w - z} \right| \leq \frac{1}{M} \ell(\gamma)$$

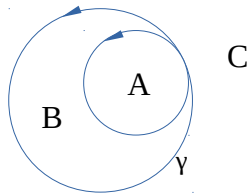
per $|z| \geq R$. Ne ricavo che il valore assoluto dell'integrale tende a 0 per z che va a $+\infty$.

ESEMPIO 2.3.1. Sia $\gamma = \partial B_a(r)$. Allora, sapendo che $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$,

$$\text{Ind}_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } |z - a| < r \\ 0 & \text{se } |z - a| > r \end{cases}$$

Se γ_n è $\partial B_a(r)$ percorso n volte, $\text{Ind}_a(z) = n$ se $|z - a| < r$, 0 altrimenti. Ovviamente, $\text{Ind}_{-\gamma}(z) = -1$ con $|z - a| < r$ e 0 altrimenti.

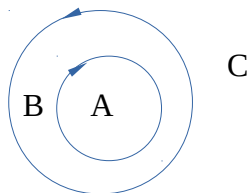
ESEMPIO 2.3.2. Considero



Allora abbiamo

$$\text{Ind}_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{su } C \\ 1 & \text{su } B \\ 2 & \text{su } A \end{cases}$$

ESEMPIO 2.3.3. Considero



Allora

$$\text{Ind} = \begin{cases} 0 & \text{su } C \\ 1 & \text{su } B \\ 0 & \text{su } A \end{cases}$$

2.4. Formula integrale e applicazioni

TEOREMA 2.4.1: Formula integrale di Cauchy (locale). Siano D un disco aperto, γ una curva chiusa con $\text{supp}(\gamma) \subset D$ e $f \in \mathcal{O}(D)$. Per ogni $z \in D \setminus \text{supp}(\gamma)$,

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz$$

COROLLARIO 2.4.1. Se $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$, allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}$$

DIMOSTRAZIONE di teorema 2.4.1. La funzione così definita

$$F(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$$

è olomorfa su $D \setminus \{z\}$. Inoltre, si nota facilmente che

$$\lim_{w \rightarrow z} (w-z)F(w) = 0$$

La funzione F soddisfa il teorema integrale di Cauchy. Dunque

$$0 = \int_{\gamma} F(w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z)$$

Da qui la tesi.

OSSERVAZIONE 2.4.1. La formula integrale vale anche per $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ se

$$\text{supp}(\gamma) \cap \{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset, \quad z \notin \{a_1, \dots, a_n\}, \quad \lim_{w \rightarrow a_i} (w-a_i)f(w) = 0 \text{ per } i=1, \dots, n$$

ESEMPIO 2.4.1. Siano $\gamma = \partial B_a(r)$, $f \in \mathcal{O}(B_a(R))$ con $R > r$. Preso $z = a$, $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 1$. Allora

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a} dw$$

Considerando $w = a + r e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, si ottiene

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r e^{it})}{r e^{it}} r i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r e^{it}) dt$$

Dunque il valore di f nel centro è la media integrale di f su $\partial B_a(r)$. Vale anche per le funzioni armoniche, basta prendere le parti reali di questo risultato.

Vediamo alcune applicazioni della formula integrale.

Singolarità eliminabili

TEOREMA 2.4.2. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ aperto, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ tale che $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$. Allora esiste $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\tilde{f}|_{\Omega \setminus \{a\}} = f$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma = \partial B_a(r)$ con $\overline{B_a(r)} \subset \Omega$. Si definisca

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

per $z \in B_a(r)$. Si verifica che g è olomorfa e per la formula integrale $g=f$ su $B_a(r) \setminus \{a\}$. Sia

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} g(z) & z \in B_a(r) \\ f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \end{cases}$$

Teorema di Weierstrass

TEOREMA 2.4.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z \in \Omega$. Allora esiste un disco aperto $B_{z_0}(r)$ dove

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{z_0}(r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Ovvero, f è olomorfa se e solo se f è analitica.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma := \partial B_{z_0}(r)$. Per $z \in B_{z_0}(r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z) + (z-z_0)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0 \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} dw$$

Si noti che $|(z-z_0)/(w-z_0)| \leq r/r = 1$. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n$$

Essa è uniformemente convergente per $z \in \overline{B_{z_0}(t)}$ con $0 < t < r$; infatti, se $|z-z_0| \leq t$,

$$\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| \leq \frac{t}{r} < 1$$

Dunque posso applicare l'm-test di Weierstrass usando la maggiorazione $\sum_n M_n$ con $M_n := (t/r)^n$.

Ricavo quindi la tesi:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n$$

COROLLARIO 2.4.2. Una funzione olomorfa è C^∞ (questo perché le serie di potenze sono C^∞).

COROLLARIO 2.4.3. Vale che $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$. Perciò

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_{z_0}(r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

COROLLARIO 2.4.4: Stime di Cauchy. $B_{z_0}(r) \subset \Omega$. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $M = \sup_{\partial B_{z_0}(r)} |f|$. Allora

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M}{r^n}$$

DIMOSTRAZIONE.

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial B_{\delta}(z_0)} \frac{M}{r^{n+1}} dw \leq \frac{n! M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n! M}{r^n}$$

Teorema di Liouville

TEOREMA 2.4.4. Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ è limitata, allora è costante.

DIMOSTRAZIONE. Vogliamo usare la stima di Cauchy. Per ogni $r > 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! \sup_{\partial B_r} |f|}{r^n}$$

Poichè f è limitata per ipotesi, esiste K tale che $|f| \leq K$. Dunque

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! K}{r^n}$$

Per l'arbitrarietà di r , ottengo che $|f^{(n)}(0)| = 0$ per ogni $n \geq 1$. Quindi $f(z) = f(0)$ per ogni z ; la funzione è quindi costante.

COROLLARIO 2.4.5. Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ e la parte reale (o la parte immaginaria) di f è limitata, allora f è costante.

DIMOSTRAZIONE. $F(z) = e^{f(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. $|F(z)| = e^{\Re f(z)} \leq M$ perché la parte reale è limitata. Per Liouville, F è costante. Da cui $0 = (e^{f(z)})' = e^{f(z)} f'(z)$; dunque $f'(z) = 0$. f è quindi costante.

Teorema fondamentale dell'algebra

TEOREMA 2.4.5. Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha una radice, ovvero esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Sia $f = 1/p \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Facciamo vedere che f è limitata in \mathbb{C} : consideriamo la funzione

$$h(z) := \frac{z^n}{p(z)}$$

con $n = \text{grado}(p(z)) > 0$. Allora

$$h(z) = \frac{z^n}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}} \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}$$

Quindi $f(z) = 1/p(z) = h(z)/z^n$ tende a 0 per $|z| \rightarrow +\infty$. Dunque, per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$|f(z)| \leq M$$

se $|z| \geq 2$. Perciò $|f(z)| \leq \max\{M, \max_{B_0(R)} |f|\}$. Quindi per Liouville $1/p$ è costante. Ma ciò è assurdo poichè p non è costante.

Teorema di Morera

TEOREMA 2.4.6. Siano $\Omega \in \mathbb{C}$ aperto e $f \in C(\Omega)$ tale che

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

per ogni rettangolo R contenuto in Ω , allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $D \subseteq \Omega$ disco aperto. Si può costruire una primitiva olomorfa F di f in D (come per teorema di Cauchy, corollario 2.2.1). Per Weierstrass (teorema 2.4.3), F è analitica. Quindi $F' = f$ è analitica, quindi olomorfa.

Si può vedere che se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f = u + iv$, allora per Cauchy-Riemann vale $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, dunque u è armonica.

Viceversa, sia $u(x, y)$ reale di classe C^2 . Se $\Delta u = 0$ su un disco D , allora esiste un'armonica coniugata v su D , cioè tale che $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$.

Dimostrazione. Definiamo $g := u_x - i u_y$. Essa è olomorfa in D , infatti valgono CR:

$$\begin{cases} (u_x)_x = u_{xx} = (-u_y)_y = -u_{yy} \\ (u_x)_y = u_{xy} = -(-u_y)_x = u_{yx} = u_{xy} \end{cases}$$

grazie al fatto che u è armonica ($\Delta u = 0$) e al teorema di Schwarz ($u_{xy} = u_{yx}$, siamo nelle ipotesi). Allora g ha una primitiva olomorfa $h = \alpha + i\beta$ tale che $h' = g$.

$$h' = h_x = \alpha_x + i\beta_x = \alpha_x - i\alpha_y = g = u_x - i u_y$$

Quindi $(u - \alpha)_x = 0$ e $(u - \alpha)_y = 0$: posso scrivere che $u - \alpha = c \in \mathbb{R}$. A questo punto costruisco

$$f = h + c = u + i\beta$$

che è naturalmente olomorfa nel disco per costruzione.

ESEMPIO 2.4.2. Questa dimostrazione è usata negli esercizi per trovare l'armonica coniugata. Presa

$$u = x^2 - y^2 + x + 1$$

Allora $\Delta u = 2 - 2 = 0$. Posso prendere $g := 2x + 1 - i(-2y) = 2(x + iy) + 1 = 2z + 1 = (z^2 + z)'$. Ottengo

$$z^2 + z = (x + iy)^2 + (x + iy) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)$$

Dunque $f = z^2 + z + 1$ ha $\Re f = u$ e $v = 2xy + y$.

OSSERVAZIONE 2.4.2. L'armonica coniugata su D è unica a meno di costanti reali.

FORMULA INTEGRALE

3.1. Catene omologhe

Siano $\gamma_i: J \rightarrow \mathbb{C}$ curve di classe C^1 a tratti chiuse con $i=1, \dots, n$. Una *catena* è una somma

$$\gamma = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$$

ove $m_i \in \mathbb{Z}$. Possiamo quindi definire

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} f(z) dz, \quad \text{Ind}_{\gamma}(z) = \sum_{i=1}^n m_i \text{Ind}_{\gamma_i}(z)$$

Chiaramente, Ind_{γ} sarà definito per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$, ove $\text{supp}(\gamma) = \cup_{i=1}^n \text{supp}(\gamma_i)$.

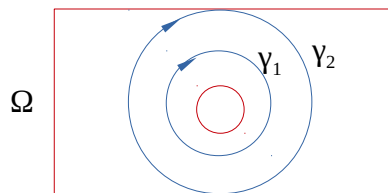
Date due catene γ e η , esse sono *omologhe* in Ω (con $\Omega \supset \text{supp}(\gamma) \cup \text{supp}(\eta)$) se

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \text{Ind}_{\eta}(z)$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Si dice che γ è *omologa* a 0 in Ω se $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

In simboli, si scrive rispettivamente $\gamma \sim_{\Omega} \eta$ e $\gamma \sim_{\Omega} 0$.

ESEMPIO 3.1.1. Prendiamo $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ con γ_1, γ_2 come in disegno



Allora $\text{Ind}_{\gamma}(z) = \text{Ind}_{\gamma_1}(z) - \text{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1 - 1 = 0$, ovvero $\gamma \sim_{\Omega} 0$.

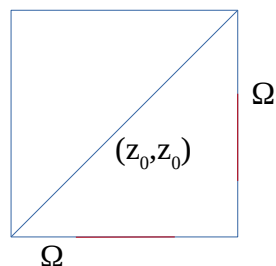
OSSERVAZIONE 3.1.1. $\gamma \sim_{\Omega} 0$ coincide con $[\gamma] = 0$ in $H_1(\Omega)$ (come definito in topologia algebrica).

LEMMA 3.1.1. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. La funzione

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{se } w \neq z \\ f'(z) & \text{se } w = z \end{cases}$$

è continua su $\Omega \times \Omega$.

DIMOSTRAZIONE.



Se $z_0 \neq w_0$, allora g è continua in (z_0, w_0) . Dato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f'(z) - f'(z_0)| \leq \epsilon$$

se $|x - x_0| \leq \delta$. Supponiamo che $B_{z_0}(\delta) \subseteq \Omega$. Presi $z, w \in B_{z_0}(\delta)$ con $z \neq w$,

$$g(z, w) - g(z_0, z_0) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z_0) = \frac{1}{w - z} (f(w) - f(z) - f'(z_0)(w - z))$$

Prendiamo

$$\gamma(t) = (1 - t)z + tw$$

con $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = f(w) - f(z)$$

D'altronde,

$$\int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = \int_0^1 f'(\gamma(t))(w - z) dt$$

Perciò

$$g(z, w) - g(z_0, z_0) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt - \int_0^1 f'(z_0) dt$$

Da questo,

$$|g(z, w) - g(z_0, z_0)| \leq \epsilon$$

dato che $\gamma(t), z_0 \in B_{z_0}(\delta)$.

Se $z = w \in B_{z_0}(\delta)$, allora $g(z, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0)$. Vale $|g(z, z) - g(z_0, z_0)| \leq \epsilon$.

TEOREMA 3.1.1: Di Cauchy. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Sia γ una catena con $\text{supp}(\gamma) \subset \Omega$ e tale che $\gamma \sim_{\Omega} 0$. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora:

1. Teorema dell'integrale nullo. Vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

2. Formula integrale. Se $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, allora

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z - w} dw$$

ESEMPIO 3.1.2. Prendiamo $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ con

$$\gamma_1(t) = 2e^{2\pi it}, \quad \gamma_2(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi it}$$

Per $t \in [0, 1]$. Voglio sfruttare teorema 3.1.1 per calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - z}$$

Si osservi che $\gamma \sim_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} 0$, infatti $\text{Ind}_{\gamma}(0) = \text{Ind}_{\gamma_1}(0) - \text{Ind}_{\gamma_2}(0) = 1 - 1 = 0$. Inoltre,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - z} = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z - 1} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - 1} dz$$

Si noti che $f(z) = 1/z \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Vale che $\text{Ind}_{\gamma}(1) = \text{Ind}_{\gamma_1}(1) - \text{Ind}_{\gamma_2}(1) = 1$. Si ottiene quindi

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - z} = 2\pi i f(1) = 2\pi i$$

DIMOSTRAZIONE di teorema 3.1.1. Definiamo $g: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Si verifica che $g \in C^0(\Omega \times \Omega)$ per lemma 3.1.1. Inoltre $g(z, w_0)$ è olomorfa su Ω per ogni $w_0 \in \Omega$ fissato. Sia $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma) \mid \text{Ind}_\gamma(z) = 0\}$. Inoltre $\gamma \sim_\Omega 0$ implica che $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Allora $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega'$. Perciò $\mathbb{C} = \Omega \cup \Omega'$ (non è detto che Ω, Ω' siano disgiunti). Sia $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, w) dw & z \in \Omega \\ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw & z \in \Omega' \end{cases}$$

h è ben definita: preso $z \in \Omega \cap \Omega'$, si noti che

$$\begin{aligned} \int_\gamma g(z, w) dw &= \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_\gamma \frac{dw}{w - z} = \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) 2\pi i \text{Ind}_\gamma(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \end{aligned}$$

Inoltre, Ω' è unione delle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$ dove $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$; questo implica che Ω' è aperto. Posso dunque usare lemma 2.3.1 per affermare che $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ grazie al fatto che f è continua. Vogliamo dimostrare che h è olomorfa anche in Ω tramite il teorema di Morera. Sia $R \subset \Omega$ un rettangolo.

$$\int_{\partial R} h(z) dz = \int_{\partial R} \left(\int_\gamma g(z, w) dw \right) dz = \int_\gamma \left(\int_{\partial R} g(z, w) dz \right) dw = 0$$

grazie al teorema di Fubini ed al teorema di Goursat. Perciò h è olomorfa in $D \supset R$ per ogni $D \subset \Omega$. Perciò h è olomorfa in Ω . $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Voglio ora dimostrare che è limitata per utilizzare il teorema di Liouville. Sia $z \in \Omega'$ con $|z| \gg 0$. Anzitutto,

$$|w - z| \geq |z| - |w|$$

Grazie a ciò,

$$|h(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \right| \leq \max_{w \in \gamma} \left(\frac{|f(w)|}{|z| - |w|} \right) \ell(\gamma)$$

Se $z \in \Omega$, allora

$$|h(z)| \leq \max \left\{ \max_\Omega |h|, \max_{B_0(R)} |h| \right\}$$

Dunque h è limitata in \mathbb{C} e tende a 0 per $|z| \rightarrow +\infty$. Grazie a Liouville, $h(z) \equiv 0$.

Sia $z \in \Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$. Da

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \text{Ind}_\gamma(z)$$

si deduce che vale anche il punto 2. Per dimostrare 1 usiamo 2. Presa $F(w) := f(w)(w - z) \in \mathcal{O}(\Omega)$ per $z \in \Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$ con $F(z) = 0$, si ha che

$$0 = F(z_0) \text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)(w - z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) dw$$

COROLLARIO 3.1.1. Se $\gamma \sim_\Omega \eta$ allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(z) dz$$

per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè $\gamma - \eta \sim_{\Omega} 0$, vale

$$0 = \int_{\gamma - \eta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\eta} f(z) dz$$

PROPOSIZIONE 3.1.1. Sia γ una catena in $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $\gamma \sim_{\Omega} 0$. Siano $z_1, \dots, z_n \in \Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$ e D_i dischi centrati in z_i per $i=1, \dots, n$ con $D_i \subset \Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$ a due a due disgiunti. Presi $\gamma_i = \partial D_i$, $m_i = \text{Ind}_{\gamma}(z_i)$ per $i=1, \dots, n$ e $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, allora

$$\gamma \sim_{\Omega'} \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$$

DIMOSTRAZIONE. Se $z \notin \Omega$, allora $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ perchè $\gamma \sim_{\Omega} 0$ e $\text{Ind}_{\gamma_i}(z) = 0$ perchè z non è nel bordo di γ_i . Se $z = z_i$, allora

$$\text{Ind}_{\sum m_i \gamma_i}(z) = m_i = \text{Ind}_{\gamma}(z)$$

Da qui la tesi.

OSSERVAZIONE 3.1.1. Se γ è una curva chiusa semplice ($\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ e $\gamma|_{[a, b]}$ è iniettiva) di classe C^1 a tratti, vale il *teorema della curva di Jordan*. Esso afferma che $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$ ha esattamente due componenti connesse, una limitata (“interno di γ ”) e una illimitata (“esterno di γ ”), e $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ vale 0 all'esterno di γ mentre vale 1 all'interno, se γ è orientata positivamente.

Vale

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 0, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

per ogni f olomorfa in un aperto contenente il supporto di γ .

3.2. Successioni di funzioni olomorfe

TEOREMA 3.2.1. $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe su Ω con $f_n \rightarrow f$ uniformemente sui compatti di Ω . Allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. $f \in C^0(\Omega)$ per la convergenza uniforme su ogni $R \subset \Omega$ rettangolo:

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial R} f_n(z) dz = 0$$

Per Morera, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

ESEMPIO 3.2.1. Presa $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-z \log n}$, si verifica che essa è uniformemente convergente su $\{\Re z > 1\}$. Dunque $\zeta \in \mathcal{O}(\{\Re z > 1\})$ (in realtà, $\zeta \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ e viene detta *zeta di Riemann*).

Vale il seguente legame:

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-z})^{-1}.$$

3.3. Serie di Laurent

Vogliamo descrivere una serie del tipo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$. L'idea naturale è appunto quella di definirla come la somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

ove si può notare che la seconda sommatoria ha senso se $z \neq z_0$. Studiamo la connessione fra le serie di questa forma, dette di *Laurent*, e le funzioni olomorfe.

TEOREMA 3.3.1. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}$. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ove $\Omega \supset A$. Allora posso scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Questa serie è uniformemente convergente in A con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

ove $\gamma_s = \partial B_{z_0}(s)$ con $r \leq s \leq R$.

DIMOSTRAZIONE. Si noti che $\Gamma = \gamma_R - \gamma_r \sim_{\Omega} 0$, ovvero si ha $Ind_{\Gamma}(z) = Ind_{\gamma_R}(z) - Ind_{\gamma_r}(z) = 0$ per ogni $z \notin \Omega$. Possiamo applicare la formula integrale di Cauchy: se $z \in \mathring{A}$,

$$f(z) = f(z) Ind_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Si noti che per Weierstrass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

L'altro termine vale invece

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0) - (z-z_0)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(z-z_0) \left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} dw =$$

Dato che $|w-z_0/z-z_0| \leq \frac{r}{r} = 1$,

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}} dw\right) (z-z_0)^{-n-1}$$

Ponendo $-n = m+1$, quanto appena scritto si eguaglia con

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{m+1}} dw\right) (z-z_0)^m$$

Si noti che possiamo rifare il ragionamento per una qualche $r \leq s \leq R$ dato che $\gamma_r - \gamma_s \sim_{\Omega} 0$; quindi l'integrale su una delle due curve equivale allo stesso integrale sull'altra curva.

3.4. Singolarità isolata

DEFINIZIONE 3.4.1. f ha una *singolarità isolata* in z_0 se $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$ con D disco centrato in z_0 .

OSSERVAZIONE 3.4.1. Se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

allora z_0 è una *singolarità eliminabile*.

ESEMPIO 3.4.1. Sia $f(z) = (\cos z - 1)/z \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Si vede che

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots = 1 + z^2 \left(\frac{-1}{2} + \dots \right) = 1 + z^2 g(z)$$

ove $g(0) = -1/2$. Dunque

$$\frac{\cos z - 1}{z} = z g(z)$$

L'estensione olomorfa di f è

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\cos z - 1}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 3.4.2. Sia $h(z) = (\cos z - 1)/z^2$. Allora essa ha una singolarità eliminabile in 0; prendendo $g(z)$ definita come in esempio 3.4.1, $h(z) = g(z)$. Dunque l'estensione olomorfa è

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} \frac{\cos z - 1}{z^2} & z \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

In generale, se $f \in \mathcal{O}(D)$, la funzione

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$$

ha singolarità eliminabile in z_0 .

Se $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$, z_0 è eliminabile se e solo se i coefficienti a_n della serie di Laurent di centro z_0 sono nulli per ogni $n < 0$.

Infatti, presa z_0 singolarità eliminabile è chiaro che $|z - z_0| |f(z)| \leq M$ su D , da cui

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_s} \left| \frac{f(w)(w - z_0)}{(w - z_0)^{n+2}} \right| dw \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{s^{n+2}} 2\pi s = M s^{-n-1}$$

Se $n \leq -2$, $-n-1 > 0$; ne ricavo che $|a_n| \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0$. Inoltre,

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_{-1}$$

Da cui ricavo che $a_n = 0$ per $n < 0$.

DEFINIZIONE 3.4.2. Sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$ e supponiamo che z_0 non sia eliminabile. Se $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ per ogni $n > m$, allora si dice che z_0 è un *polo* di f di ordine m .

Questo avviene se e solo se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m$ esiste ed è non nullo; infatti,

$$(z - z_0)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_n a_n (z - z_0)^{n+m}$$

Per cui

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n \leq -m} \lim_{z \rightarrow z_0} a_n (z - z_0)^{n+m}$$

Inoltre, per ipotesi, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^{m+1} = 0$, cioè $f(z)(z - z_0)^m$ ha singolarità eliminabile in z_0 . Se ne deduce che $a_n = 0$ per ogni $n \leq -1 - m$ per quanto visto a pagina precedente.

ESEMPIO 3.4.3. Sia

$$f(z) = \frac{z}{(\cos z - 1)^2}$$

Questa funzione ha polo in 0 di ordine 3. Riconsiderata $z^2 g(z) = \cos z - 1$ come in esempio 3.4.1, allora

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 g(z))^2} = \frac{1}{z^3 g^2(z)} = \frac{1}{z^3} \cdot \left(\frac{1}{g(z)} \right)^2$$

Dato che $g(0) \neq 0$, si vede subito che f ha un polo di ordine 3.

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \left(\frac{b_0}{z^3} + \frac{b_1}{z^2} + \frac{b_2}{z} \right) + (b_3 + b_4 z + \dots)$$

DEFINIZIONE 3.4.3. Sia $f \in \mathcal{O}(D)$ tale che $f(z_0) = 0$. z_0 è uno *zero* di ordine m ($m > 0$) se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $a_n = 0$, $n < m$, $a_m \neq 0$, ovvero $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$
2. $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)} \neq 0$

OSSERVAZIONE 3.4.2. Se f ha uno zero isolato di ordine m in z_0 , allora $1/f$ ha un polo di ordine m in z_0 e viceversa. Infatti, se

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g(z_0) \neq 0$, allora

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{g(z)}$$

DEFINIZIONE 3.4.4. $\Omega \subset \mathbb{C}$, $S \subset \Omega$ sottoinsieme discreto. Una funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$ tale che i punti di S siano poli per f , o singolarità eliminabili, si chiama *funzione meromorfa* su Ω .

DEFINIZIONE 3.4.5. z_0 è una *singolarità essenziale* di f se nello sviluppo di Laurent ci sono infiniti termini negativi.

ESEMPIO 3.4.4. Presa

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Allora la funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} tolto lo 0

$$g(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-m)!} z^m$$

Il punto 0 è una singolarità essenziale di $e^{\frac{1}{z}}$.

TEOREMA 3.4.1: Casorati-Weierstrass. Se z_0 è una singolarità essenziale di f e $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$, allora

$$f(D \setminus \{z_0\})$$

è un insieme denso in \mathbb{C} .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $|f(z) - \alpha| \geq \delta$ per ogni $z \in D \setminus \{z_0\}$. Allora la funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

è olomorfa in D tolto z_0 ed è limitata. Grazie a questo, z_0 è eliminabile per $g(z)$. Dunque $g \in \mathcal{O}(D)$, ove per g si intende l'estensione di essa. Esistono $h(z_0) \neq 0$ olomorfa e $m \geq 0$ tali che

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

Se $m=0$, cioè $g(z_0) \neq 0$, avremo che

$$f(z) - \alpha = \frac{1}{g(z)}$$

è olomorfa nell'intorno di z_0 , che è assurdo (z_0 sarebbe singolarità eliminabile per f).

Se $m > 0$, allora la funzione

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{h(z)} = f(z) - \alpha$$

mi direbbe che f avrebbe un polo di ordine m . Dunque siamo giunti all'assurdo anche in questo caso.

COROLLARIO 3.4.1. Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, biunivoca, con $f^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, allora

$$f(z) = az + b$$

con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $f(0) = 0$ (altrimenti si considera $f - f(0)$). Sia $h(w) = f(1/w)$ che è ovviamente olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vogliamo studiare che tipo di singolarità si ha in 0 ; in particolare, vogliamo verificare che $w=0$ non è singolarità essenziale di h . Per ipotesi, f^{-1} è continua, ovvero f è aperta. Sia δ un numero positivo e consideriamo $f(B_0(1/\delta)) \supseteq \overline{B_0(c)}$. Si noti che se $|z| \geq 1/\delta$, allora $|f(z)| > c$. Dunque $|h(w)| > c$ se $|w| = 1/|z| \leq \delta$. Dunque $h(B_0(\delta) \setminus \{0\})$ non è denso in \mathbb{C} poichè 0 non soddisfa la condizione. Dunque h non ha singolarità essenziale in 0 .

Possiamo scrivere che $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$; allora $h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^{-n}$. Dato che h non ha singolarità essenziale in 0 , esiste N tale che $a_n = 0$ per $n \geq N$. Quindi $f(z)$ è un polinomio e, poichè f biunivoca, ha unica radice in $z=0$. Dunque $f(z) = az^n$; se n fosse maggiore a 1 , allora f non sarebbe iniettiva. Perciò $n=1$ e $f(z) = az$ (essendo f biunivoca, $a \neq 0$).

RESIDUI

4.1. Teorema dei residui

DEFINIZIONE 4.1.1. Sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$. Allora posso scrivere data funzione con la serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Definiamo $a_{-1} =: \text{Res}_{z_0}(f)$ come il *residuo* di f in z_0 . Si ricordi che

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw$$

ove γ è una circonferenza centrata in z_0 e contenuta in D .

TEOREMA 4.1.1: Dei residui. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ con $z_1, \dots, z_n \in \Omega$. Sia γ una catena in Ω tale che $\gamma \sim_{\Omega} 0$ con $z_i \notin \text{supp}(\gamma)$ per ogni i . Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{Res}_{z_i}(f)$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che, dalla dimostrazione del teorema di Cauchy,

$$\gamma \sim_{\Omega'} \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \gamma_i$$

ove $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \int_{\gamma_i} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) 2\pi i \text{Res}_{z_i}(f)$$

DEFINIZIONE 4.1.2. Un *intorno di* ∞ è un aperto di \mathbb{C} contenente il complementare di un disco chiuso.

DEFINIZIONE 4.1.3. Se f è olomorfa su un intorno di ∞ , $f(1/w) =: g(w)$ è olomorfa in un intorno di 0. Si dice che f ha una *singolarità eliminabile, un polo o una singolarità essenziale* in ∞ se g ha lo stesso tipo di singolarità in 0.

DEFINIZIONE 4.1.4. Siano $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con Ω intorno di ∞ e $g(w) = f(1/w)$ (olomorfa su $D \setminus \{0\}$). Allora,

$$\text{Res}_{\infty}(f) = \text{Res}_0 \left(-\frac{g(w)}{w^2} \right)$$

PROPOSIZIONE 4.1.1. Se γ è una circonferenza con $\text{supp}(\gamma) \subset \Omega$ e centro 0, allora

$$\text{Res}_{\infty}(f) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma(t) = R e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = - \int_0^{2\pi} f \circ \gamma(t) \left(\frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t)^2} \right) \gamma(t)^2 dt$$

Sia $\bar{y}(t) := 1/y(t) = (1/R)e^{-it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= - \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{\bar{y}(t)}\right) \bar{y}'(t) \frac{1}{\bar{y}(t)^2} dt = - \int_0^{2\pi} \frac{g(\bar{y}(t))}{\bar{y}(t)^2} \bar{y}'(t) dt = \\ &= - \int_{-\bar{y}} \left(\frac{-g(w)}{w^2} \right) dw = -2\pi i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{-g(w)}{w^2} \right) = -2\pi i \operatorname{Res}_{\infty}(f) \end{aligned}$$

Grazie alla proposizione appena provata, ed al teorema dei residui, si ottiene il seguente risultato.

COROLLARIO 4.1.1. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ e sia γ circonferenza centrata in 0 che include z_1, \dots, z_n che non appartengono al $\operatorname{supp}(\gamma)$. Allora

$$\operatorname{Res}_{\infty}(f) + \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z_i}(f) = 0$$

4.2. Calcolo dei residui

PROPOSIZIONE 4.2.1. Se f ha un polo semplice ($m=1$) in z_0 e g è olomorfa nell'intorno di z_0 , allora

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = (\operatorname{Res}_{z_0}(f))g(z_0)$$

DIMOSTRAZIONE. Presa una certa h olomorfa, per ipotesi vale che

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z)$$

Inoltre,

$$g(z) = g(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Per cui, per una certa l olomorfa, vale

$$f(z)g(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} g(z_0) + l(z)$$

Dunque $\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = a_{-1}g(z_0)$.

ESEMPIO 4.2.1. Vogliamo calcolare $\operatorname{Res}_1(f)$ con

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1} = \left(\frac{z^2}{z+1} \right) \frac{1}{z-1}$$

Grazie a proposizione 4.2.1, $\operatorname{Res}_1(f) = 1 \cdot 1/(1+1) = 1/2$. Calcoliamo ora $\operatorname{Res}_{-1}(f)$:

$$\operatorname{Res}_{-1}(f) = \left(\frac{z^2}{z-1} \right) \Big|_{z=-1} \operatorname{Res}_{-1} \left(\frac{1}{z+1} \right) = -\frac{1}{2}$$

Dunque, per corollario 4.1.1 si vede che $\operatorname{Res}_{\infty}(f) = 0$. Vediamolo coi calcoli:

$$\operatorname{Res}_{\infty}(f) = \operatorname{Res}_0 \left(\frac{-1/w^2}{1/w^2 - 1} \frac{1}{w^2} \right) = \operatorname{Res}_0 \left(\frac{w^2}{w^2 - 1} \right) = 0$$

COROLLARIO 4.2.1. Se f ha uno zero semplice all'infinito, cioè $g(w) = f(1/w)$ ha uno zero semplice in 0, allora (nelle ipotesi di f olomorfa su un intorno di ∞)

$$\operatorname{Res}_{\infty}(f) = - \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, $g(w) = a_1 w + \dots = w h(w)$ con $a_1 \neq 0$ ed h olomorfa con $h(0) \neq 0$.

$$\text{Res}_\infty(f) = \text{Res}_0\left(-\frac{g(w)}{w^2}\right) = \text{Res}_0\left(-\frac{h(w)}{w}\right) = \text{Res}_0\left(-\frac{1}{w}\right)h(0) = -h(0) = -\lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$$

PROPOSIZIONE 4.2.2. Sia f olomorfa vicino a z_0 con z_0 zero semplice di f . Allora $1/f$ ha un polo semplice in z_0 con

$$\text{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

DIMOSTRAZIONE. $f(z) = (z - z_0)h(z)$, con h olomorfa tale che $h(z_0) \neq 0$. Ovviamente, $f'(z_0) = h(z_0)$, che è diverso da 0. Per ogni $z \neq z_0$,

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{h(z)}$$

ove $1/h(z)$ è olomorfa vicino a z_0 . Allora

$$\text{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \text{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{(z - z_0)}\right) \frac{1}{h(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

ESEMPIO 4.2.2. Sia $h(z) = 1/\sin z$. Il seno in 0 ha uno zero semplice; infatti $\sin' z = \cos z$ ed il coseno è diverso da 0 per $z = 0$. Dunque

$$\text{Res}_0(h(z)) = \frac{1}{(\cos z)_{z=0}} = 1$$

PROPOSIZIONE 4.2.3. Supponiamo che f abbia un polo di ordine m in z_0 . Allora

$$\text{Res}_{z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} \right]$$

OSSERVAZIONE 4.2.1. Se $m = 1$,

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Se invece $m = 2$,

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} [((z - z_0)^2 f(z))']$$

DIMOSTRAZIONE di proposizione 4.2.3. Per ipotesi, $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$ con g olomorfa vicino a z_0 . Dunque,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Per cui

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m}$$

Da quanto appena scritto, si ricava

$$\text{Res}_{z_0}(f) = a_{-1} = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Abbiamo quindi provato la tesi.

ESEMPIO 4.2.3. Consideriamo

$$h(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

Consideriamo $z=1$ polo doppio. Usando quanto appena provato, si ottiene

$$\text{Res}_1(h) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{z^2}{z+1} \right)' = \frac{2z(z+1) - z^2}{(z+1)^2} \Big|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

4.3. Applicazione agli integrali impropri

APPLICAZIONE 4.3.1. Sia $f(x)$ una funzione integrale di cui vogliamo calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Supponiamo che f sia la restrizione alla retta reale di una funzione $f(z)$ olomorfa in un intorno di

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \geq 0\}$$

eccetto in un numero (finito) di poli $z_1, \dots, z_n \in S$. Supponiamo inoltre che

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^{1+a}}$$

per $|z| \rightarrow +\infty$ con $a > 0$. Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i}(f)$$

Si osservi che, fissati $a < 0$ e $b > 0$, gli integrali

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx, \quad \int_b^{\infty} f(x) dx$$

sono convergenti perché $|f(x)| \leq K/|x|^{1+a}$. Dunque esiste

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Consideriamo la curva che va da $-R$ a R e poi ricollega R a $-R$ con una semicirconferenza che contiene i punti z_i quando R è sufficientemente grande. Chiamiamo la semicirconferenza Γ_R e la parametrizzazione di $[-R, R]$ come $\gamma(x)$. Allora

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i}(f)$$

Inoltre, per $R \rightarrow +\infty$, si ha

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{K}{R^{1+a}} (\pi R) = \frac{K\pi}{R^a} \rightarrow 0$$

Quindi vale quanto affermato sopra.

ESEMPIO 4.3.1. Si consideri l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Prendiamo $f(z) = 1/(1+z^2)^2$. $z=i$ è l'unico polo in $\{\Im z > 0\}$. Dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f)$$

Potendo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z+i)^2}$$

ove $1/(z+i)^2$ è ovviamente olomorfa in $\{\Im z > 0\}$. Il polo è di ordine 2 e quindi per proposizione 4.2.3, si ha

$$\operatorname{Res}_i(f) = \lim_{z \rightarrow i} ((z-i)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)' = \frac{-2}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

Da cui

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}$$

APPLICAZIONE 4.3.2. Sia $f(x)$ con le stesse ipotesi precedenti (applicazione 4.3.1) ma con l'ipotesi

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|}$$

per $|z| \rightarrow \infty$. Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z_i}(f(z) e^{iz})$$

Se l'integrale di f esiste, poiché e^{ix} ha modulo 1, esiste anche l'integrale scritto qui sopra. Consideriamo $A, B > 0$ ed il quadrato di vertici $-B, A, A+iT, -B+iT$ parametrizzato in senso antiorario, ove $T = A+B$. Questo quadrato verrà denominato con Q . Sul lato superiore L^+ , presa $\gamma(x) = -x + iT$,

$$\left| \int_{L^+} f(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_{-A}^B f(-x + it) e^{-T - ix} dx \right| \leq \frac{K}{T} e^{-T} T = K e^{-T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

Sul lato L_A , ed analogamente su L_B (lati verticali di Q), usando la parametrizzazione $\gamma(y) = A + iy$, si ha

$$\left| \int_{L_A} f(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^T f(A + iy) e^{-y + iA} i dy \right| \leq \frac{K}{A} \int_0^T e^{-y} dy = \frac{K}{A} (-e^{-y})_0^T = \frac{K}{A} (1 - e^{-T}) \xrightarrow{A, B \rightarrow \infty} 0$$

Perciò, quando $A, B \rightarrow \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z_i}(f(z) e^{iz})$$

ESEMPIO 4.3.2. Voglio calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx =: I$$

Considero $f(z) = 1/(1+z^2)$; allora

$$\Re \left(\frac{e^{iz}}{1+z^2} \right) = \frac{\cos x}{1+x^2}$$

Dunque $I = \Re \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dz = \Re (2\pi i \operatorname{Res}_i(f(z) e^{iz}))$. Calcoliamo il residuo:

$$\operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{iz}}{1+z^2} \right) = \left(\frac{e^{iz}}{i+z} \right) \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Dunque

$$I = \Re \left(2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} \right) = \frac{\pi}{e}$$

ESEMPIO 4.3.3. Un argomento molto legato a quanto stiamo facendo è quello che tratta le *trasformate di Fourier*, le quali, presa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, hanno la forma

$$\hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx$$

Con quanto visto, si può provare che se $\Phi(x)$ è la distribuzione normale, ovvero vale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

allora

$$\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)$$

Consideriamo $a, b, t > 0$ costanti ed il rettangolo di vertici $-a, b, b+it, -a+it$. Sappiamo che

$$\hat{\Phi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+it)^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+it)^2}{2}} dx$$

Considerato $z = x + it$, $f(z) = e^{-z^2/2}$, possiamo concludere.

ESEMPIO 4.3.4. Vogliamo calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

La funzione complessa che prendiamo è $g(z) = e^{iz}/z$, che ha un polo semplice in 0. Consideriamo una semicirconferenza con centro l'origine e raggio ϵ ; consideriamo quindi il cammino lungo il quadrato Q di applicazione 4.3.2 ove fra $-\epsilon, \epsilon$ consideriamo la semicirconferenza detta sopra anziché il segmento reale $[-\epsilon, \epsilon]$ di modo da non considerare direttamente il polo. Chiamiamo questo nuovo cammino Q_ϵ . Vale il seguente risultato, che può tornare utile per questo esempio.

LEMMA 4.3.1: Di Jordan. Sia Ω aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ tale che $\overline{B_{z_0}(\delta)} \subset \Omega$. Supponiamo che esista finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = b$$

(z_0 è un polo semplice o una singolarità eliminabile). Allora, chiamato γ_τ l'arco di raggio τ che va dall'angolo θ_1 all'angolo θ_2 ,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\gamma_\tau} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)b$$

DIMOSTRAZIONE. $f(z) = b/z + g(z)$ con g olomorfa in z_0 , che assumeremo uguale a 0 per semplicità.

Dunque

$$\int_{\gamma_\tau} f(z) dz = \int_{\gamma_\tau} \frac{b}{z} dz + \int_{\gamma_\tau} g(z) dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{b}{\tau e^{i\theta}} \tau i e^{i\theta} d\theta + \int_{\gamma_\tau} g(z) dz = ib(\theta_2 - \theta_1) + \int_{\gamma_\tau} g(z) dz$$

Dato che vale

$$\left| \int_{\gamma^\tau} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma^\tau} |g(z)| \tau (\theta_2 - \theta_1) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0,$$

concludo.

Torniamo ora all'esempio 4.3.4. Chiamiamo γ_ϵ la semicirconferenza detta prima e sia $T = A + B$;

$$0 = \int_{\partial Q_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-B}^{-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^A \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_A^{A+iT} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{A+iT}^{-B+iT} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-B+iT}^{-B} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Quando facciamo tendere A, B a più infinito, ottengo

$$0 = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx + 0$$

per ogni $\epsilon > 0$. Si noti che $\cos x/x$ è una funzione dispari; quindi quanto appena scritto può essere riscritto così:

$$0 = i \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + i \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Facendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$, per il lemma di Jordan (attenzione: $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0$), si ottiene

$$0 = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx + i(-\pi) \cdot 1$$

Per cui ricaviamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

APPLICAZIONE 4.3.3. Consideriamo gli integrali su $[0, 2\pi]$ di funzioni trigonometriche. Sia

$$Q(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

ove $g, h \in \mathbb{R}[x, y]$ con $h \neq 0$ su $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Una $Q(x, y)$ così definita è detta *funzione razionale*. Vogliamo considerare in particolare $Q(\cos \theta, \sin \theta)$ su $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, ove $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Se ne ricava

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

Quindi prendiamo

$$f(z) = \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)$$

che appartiene a $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, ovvero è meromorfa. Appliciamo il teorema dei residui sulla circonferenza unitaria:

$$\int_{\gamma = \partial B_0(1)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=0}^n \text{Res}_{z_i}(f)$$

ove $\{z_i\}$ sono i poli di f in $B_0(1)$. D'altra parte,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{Q(\cos \theta, \sin \theta)}{i e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

Dunque possiamo usare la formula

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{i=0}^n \text{Res}_{z_i}(f)$$

ESEMPIO 4.3.5. Calcoliamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \cos \theta}$$

Per farlo, dobbiamo prendere

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{3 - \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{2}{iz \left(6 - z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i(6z - z^2 - 1)} = \frac{2i}{z^2 - 6z + 1}$$

I poli sono $z_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Ci interessa solo il polo $z_1 = 3 - 2\sqrt{2} \in B_0(1)$. Allora

$$\text{Res}_{z_1}(f) = \text{Res}_{z_1} \left(\frac{2i}{z - z_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{z - z_2} \right) \Big|_{z=z_1} = 2i \frac{1}{z_1 - z_2} = 2 \frac{i}{-4\sqrt{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

Da cui otteniamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \cos \theta} = 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ZERI DI FUNZIONI OLOMORFE

5.1. Principio di identità

TEOREMA 5.1.1. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla. Consideriamo

$$Z(f) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$$

Allora $Z(f)$ non ha punti di accumulazione in Ω .

COROLLARIO 5.1.1: Principio di identità. Se $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ sono tali che $f|_S = g|_S$ con S insieme con (almeno) un punto di accumulazione in Ω , allora $f \equiv g$.

DIMOSTRAZIONE di teorema 5.1.1. Supponiamo $Z(f) \neq \emptyset$. Sia $z_0 \in Z(f)$. Allora, per un certo $m > 0$,

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con g olomorfa vicino a z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Per continuità, $g(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 . Dunque z_0 è uno zero isolato di f .

Sia A l'insieme dei punti di accumulazione di $Z(f)$ in Ω . Ovviamente $A \subset Z(f)$, infatti se $Z(f) \ni z_n \rightarrow z$, allora $z \in A$ ed essendo limite di una successione di elementi di $Z(f)$, $f(z) = 0$ e quindi $z \in Z(f)$. Ne ricavo che gli elementi di A sono gli zeri di f non isolati.

A è aperto: se z_1 è uno zero non isolato di f , allora f è identicamente nulla in un intorno di z_1 , che è quindi un intorno contenuto in A .

A chiuso: sia $z_n \in A, z_n \rightarrow z_0$. Allora $f(z_n) = 0$, quindi $f(z_0) = 0$. Allora z_0 è zero non isolato di f ; $z_0 \in A$.

Dato che Ω è connesso, o $A = \Omega$ o $A = \emptyset$. Dato che se $A = \Omega$, allora $f \equiv 0$, che non vale per ipotesi. Ricaviamo la tesi: $A = \emptyset$.

COROLLARIO 5.1.2. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla. Allora

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$$

Analogamente, se $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora $f/g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

DEFINIZIONE 5.1.1. Siano $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Allora possiamo considerare $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z)$ olomorfa in un intorno di z_0 , $g(z_0) \neq 0$ e $m \in \mathbb{Z}$. Il numero

$$\text{ord}_{z_0}(f) := m$$

è l'ordine di f in z_0 .

5.2. Principio dell'argomento

TEOREMA 5.2.1: Principio dell'argomento. Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, γ catena tale che $\gamma \sim_{\Omega} 0$. Se gli zeri e i poli di $f \in \Omega$, indicati con $\{z_i\}_{i=1, \dots, n}$, non appartengono al supporto di γ ($\text{supp}(\gamma)$), allora

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{z_i}(\gamma) \text{ord}_{z_i}(f)$$

OSSERVAZIONE 5.2.1. Presa $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ curva chiusa, vale che

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (\text{Log}(\gamma(t)))' dt = \frac{1}{2\pi i} [\text{Log } \gamma(b) - \text{Log } \gamma(a)] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} i [\arg \gamma(b) - \arg \gamma(a)] = \frac{1}{2\pi} \Delta_{w \in \gamma} \arg(w) \end{aligned}$$

Per l'integrale in teorema 5.2.1, avremo quindi che

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{w \in f \circ \gamma} \arg w$$

Da qui viene il nome del teorema.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che $\text{Res}_{z_i}(f'/f) = \text{ord}_{z_i}(f)$. Anzitutto, $f'/f \in \mathcal{M}(\Omega)$; in particolare, vale $f'/f \in \mathcal{O}(\Omega')$ ove $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Vicino a z_i , $f(z) = (z - z_i)^m g(z)$, con $m = \text{ord}_{z_i}(f)$, $g(z_i) \neq 0$, g olomorfa vicino a z_i . $f'(z) = m(z - z_i)^{m-1} g(z) + (z - z_i)^m g'(z)$. Per cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

con g'/g olomorfa vicino a z_i , ovviamente. Da questo, si ottiene che $\text{Res}_{z_i}(f'/f) = m$. Usiamo il teorema dei residui applicato a f'/f :

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} dz = 2\pi i \sum_i \text{Ind}_\gamma(z_i) \text{Res}_{z_i} \left(\frac{f'}{f} \right) = 2\pi i \sum_i \text{Ind}_\gamma(z_i) \text{ord}_{z_i}(f)$$

COROLLARIO 5.2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e γ una curva chiusa semplice in Ω tale che il suo interno sia contenuto in Ω . Supponiamo che $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ abbia zeri e poli non appartenenti al supporto di γ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_\infty$$

ove con N_0 e N_∞ indico il numero con molteplicità degli zeri e dei poli rispettivamente contenuti nell'interno di γ .

ESEMPIO 5.2.1. Prendiamo $f(z) = 1/z^2$ con $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ per $t \in [0, 1]$. Allora con $f \circ \gamma(t) = e^{-4\pi i t}$ percorro due volte la circonferenza in senso orario. La variazione totale dell'argomento è quindi

$$\Delta_{f \circ \gamma} \arg w = -4\pi$$

Inoltre,

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \int_\gamma \left(\frac{-2}{z^3} \right) z^2 dz = -2 \int_\gamma \frac{dz}{z} = -2 \cdot 2\pi i = -4\pi i$$

Abbiamo ottenuto quanto ci aspettavamo per osservazione 5.2.1. Anche il corollario 5.2.1 dà lo stesso risultato.

5.3. Teorema di Rouché

TEOREMA 5.3.1. Sia γ una curva chiusa semplice in $\Omega \subset \mathbb{C}$ con l'interno di γ contenuto in Ω . Siano f, g olomorfe in Ω tali che $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \text{supp}(\gamma)$. Allora f e g hanno lo stesso numero (con molteplicità) di zeri nell'interno di γ .

(Se valgono queste condizioni, f e g non si annullano sul supporto di γ).

DIMOSTRAZIONE. Sia $F(z) = g(z)/f(z) \in \mathcal{M}(\Omega)$. La disuguaglianza nell'enunciato ci dice che

$$|F(z) - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| = \left| \frac{g(z) - f(z)}{f(z)} \right| < 1$$

per ogni $z \in \text{supp}(\gamma)$. Perciò $F \circ \gamma$ è all'interno del disco centrato in 1 di raggio 1. Quindi $\text{Ind}_{F \circ \gamma}(0) = 0$ (0 sta nella componente illimitata di $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(F \circ \gamma)$). Supponendo che $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$0 = 2\pi i \text{Ind}_{F \circ \gamma}(0) = \int_{F \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz$$

Calcoliamo la quantità integrata:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$$

Perciò

$$0 = \int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N_0(g) - N_0(f))$$

Da qui la tesi.

ESEMPIO 5.3.1. Sia $p(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$. Voglio prendere il monomio che pesa di più nell'insieme dove mi trovo, che in questo caso è il disco centrato nell'origine di raggio unitario. Prendo $f(z) = -5z^3$:

$$|p(z) - f(z)| = |z^8 + z - 2| \leq |z|^8 + |z| + |-2| = 4 < |f(z)| = 5$$

Dunque p e f hanno lo stesso numero di zeri in $\{|z| < 1\}$. Quindi p ha esattamente tre zeri in $\{|z| < 1\}$.

Chiamiamo $h(z) = z^8$. Vogliamo applicare Rouché con questa scelta. Per $|z| = 2$,

$$|p(z) - h(z)| = |-5z^3 + z - 2| \leq 5 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 44 < |h(z)| = 256$$

Da questo, ricavo che $p(z)$ ha tutti gli zeri, che sono 8 in $\{|z| < 2\}$. Dai due calcoli, noto che p ha 5 zeri nella corona $\{1 < |z| < 2\}$.

OSSERVAZIONE 5.3.1. Il teorema di Rouché vale anche con la maggiorazione $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ per ogni $z \in \text{supp}(\gamma)$ e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \text{supp}(\gamma)$.

In questo caso nella dimostrazione ottengo $|F(z) - 1| \leq 1$, quindi γ può toccare la circonferenza; ma se così fosse avrei $F(z) = 0$ per qualche $z \in \text{supp}(\gamma)$ e smentirei il fatto che $g(z) \neq 0$. Vale perciò la dimostrazione precedente.

ESEMPIO 5.3.2. Sia $g(z) = 4z^5 - z^3 + z^2 - 2$. Prendo come $\gamma: |z| = 1$ e $f(z) = 4z^5$.

$$|g(z) - f(z)| = |-z^3 + z^2 - 2| \leq 4 = |f(z)|$$

Dunque, se $g(z)$ non si annulla su $|z| = 1$, allora $g(z)$ ha 5 (tutti) zeri in $|z| < 1$. Prendiamo ora $B_0(1+\epsilon)$ e rifacciamo la stessa stima:

$$|g(z) - f(z)| \leq |-z^3| + |z^2| + |-2| = (1+\epsilon)^3 + (1+\epsilon)^2 + 2 < (1+\epsilon)^5 + (1+\epsilon)^5 + 2(1+\epsilon)^5 = 4(1+\epsilon)^5 = |f(z)|$$

Dunque $g(z)$ ha 5 zeri in $B_0(1+\epsilon)$. Per l'arbitrarietà di ϵ , dati zeri sono in $\overline{B_0(1)}$.

ESEMPIO 5.3.3. Sia $g(z) = z^3 - 1$. Prendiamo $f(z) = z^3$. Allora, se $|z| = 1$,

$$|g(z) - f(z)| = 1 \leq |f(z)|$$

Con lo stesso ragionamento di esempio 5.3.2, g ha tre zeri in $\overline{B_0(1)}$. Si osservi che in questo caso i 3 zeri sono proprio su $\partial B_0(1)$.

5.4. Comportamento locale e applicazioni

TEOREMA 5.4.1. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ tale che $\text{ord}_{z_0}(f) = m > 0$ (zero di ordine m). Per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $w_0 \in B_0(\delta)$ l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\epsilon)$ (esse sono distinte se $w_0 \neq 0$).

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo $\epsilon > 0$ tale che $B_{z_0}(\epsilon) \subset \Omega$, $f \neq 0$ su $\overline{B_{z_0}(\epsilon)} \setminus \{z_0\}$ e $f' \neq 0$ su $\overline{B_{z_0}(\epsilon)} \setminus \{z_0\}$. Sia $\delta = \min_{|z-z_0|=\epsilon} |f|$. Preso $|w_0| < \delta$ e considerata la funzione $g(z) = f(z) - w_0$, si ha

$$|f(z) - g(z)| = |w_0| < \delta \leq |f(z)|$$

per ogni $z \in \partial B_{z_0}(\epsilon)$. Per Rouché, f e g hanno lo stesso numero di zeri in $B_{z_0}(\epsilon)$. Da questo, g ha m zeri in $B_{z_0}(\epsilon)$, ovvero $f(z) = w_0$ ha m soluzioni. Inoltre, $g' = f' \neq 0$ su $\overline{B_{z_0}(\epsilon)} \setminus \{z_0\}$: dunque gli zeri di g sono tutti semplici (se $w_0 \neq 0$), perciò le m soluzioni di $f(z) = w_0$ sono distinte.

COROLLARIO 5.4.1. Siano f olomorfa su Ω non costante e $z_0 \in \Omega$. Supponiamo che $f(z_0) = \alpha$ e

$$\text{ord}_{z_0}(f - \alpha) = m (> 0)$$

Allora per ogni $\epsilon > 0$ piccolo, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $w_0 \in B_\alpha(\delta)$ l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\epsilon)$ (distinte se $w_0 \neq \alpha$).

DIMOSTRAZIONE. Applico teorema 5.4.1 alla funzione $f - \alpha$.

COROLLARIO 5.4.2. Siano $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ polo di f di ordine m . Per ogni ϵ piccolo esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni w_0 con $|w_0| > 1/\delta$, l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\epsilon)$.

DIMOSTRAZIONE. Applico teorema 5.4.1 a $1/f$.

Teorema della mappa aperta

TEOREMA 5.4.2. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω connesso e f non costante. Allora f è aperta.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha \in f(\Omega)$ e sia $f(z_0) = \alpha$. Siano $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tali che se $w_0 \in B_\alpha(\delta)$, l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni (per corollario 5.4.1). Quindi $B_\alpha(\delta) \subset f(\Omega)$; $f(\Omega)$ è aperto.

Principio del massimo

TEOREMA 5.4.3. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante. Allora $|f|$ non ha massimo in Ω .

DIMOSTRAZIONE. Sia $z_0 \in \Omega$. f non è costante in un intorno di z_0 per il principio di identità. Prendiamo $w_0 = f(z_0)$. Applicando il teorema della mappa aperta, esiste $B_{w_0}(\delta) \subseteq f(\Omega)$. Esistono punti in $B_{w_0}(\delta)$ di modulo maggiore di $|w_0|$. Allora z_0 non è punto di massimo per $|f|$. Per l'arbitrarietà, concludo.

COROLLARIO 5.4.3. Sia Ω connesso con $\overline{\Omega}$ compatta. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, allora

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial \Omega} |f|$$

Teorema della mappa inversa

TEOREMA 5.4.4. Siano $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$. Allora esistono intorno aperti V di z_0 e W di $f(z_0)$ per cui la restrizione $f|_V : V \rightarrow W$ è invertibile e $f^{-1} : W \rightarrow V$ olomorfa.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha = f(z_0)$. Allora $f(z) - \alpha$ ha ordine 1 in z_0 (poiché $f'(z_0) \neq 0$). Allora possiamo applicare il corollario 5.4.1: $f(z) = w_0$ ha un'unica soluzione in $B_{z_0}(\epsilon)$ per ogni $w_0 \in B_\alpha(\delta)$. Siano

$$V = B_{z_0}(\epsilon), \quad W = B_\alpha(\delta)$$

Allora $f|_V : V \rightarrow W$ è biunivoca. Inoltre, $f|_V$ è aperta per il teorema 5.4.2 e perciò $(f|_V)^{-1}$ è continua. Siano $w, w_1 \in W$ e siano $z = f^{-1}(w)$ e $z_1 = f^{-1}(w_1)$. Si ha

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_1))}$$

Abbiamo dunque dimostrato il teorema.

OSSERVAZIONE 5.4.1. Nel caso reale, la supposizione $f'(x) \neq 0$ è sufficiente ma non necessaria: possiamo invertire ad esempio, $f(x) = x^3$ anche se $f'(0) = 0$.

Nel caso complesso, se $f'(z_0) = 0$, allora non esiste f^{-1} vicino a z_0 : infatti, $f - f(z_0)$ ha ordine $m \geq 2$ e per corollario 5.4.2 f non è iniettiva vicino a z_0 . Ovvero, la condizione $f'(z_0) \neq 0$ è condizione necessaria.

Siano $a, b \in \mathbb{R}^2$ vettori non nulli. Possiamo considerare una funzione γ_a tale che $\gamma_a(0) = z_0$ e $\gamma'_a(0) = a$ e analogamente una funzione γ_b con $\gamma_b(0) = z_0$ e $\gamma'_b(0) = b$. Presa una funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, allora

$$f \circ \gamma_a(0) = f(z_0) = f \circ \gamma_b(0)$$

Preso f olomorfa, voglio vedere quando vale che l'angolo α fra a e b si preserva tramite f , ovvero l'angolo fra $(f \circ \gamma_b)'(0)$, $(f \circ \gamma_a)'(0)$ vale α .

DEFINIZIONE 5.4.1. f è *conforme* in z_0 se l'angolo fra a e b e l'angolo tra $(f \circ \gamma_a)'(0)$ e $(f \circ \gamma_b)'(0)$ sono uguali per ogni $a, b \in \mathbb{R}^2$ non nulli.

Siano $f = u + iv$, $\gamma_a(t) = (x(t), y(t))$. Allora

$$(f \circ \gamma_a)' = (u \circ \gamma_a)' + i(v \circ \gamma_a)' = (u_x x' + u_y y') + i(v_x x' + v_y y')$$

Per cui, presa la matrice Jacobiana di f

$$J(f) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

Abbiamo

$$(f \circ \gamma_a)' = J(f) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

In particolare, per $t = 0$,

$$J(f)a = J(f) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (f \circ \gamma_a)'(0)$$

Per cui f è conforme in z_0 se e solo se $J_{z_0}(f)$ preserva gli angoli.

TEOREMA 5.4.5. Sia f differenziabile in z_0 . f è conforme in z_0 se e solo se vale $f'(z_0) \neq 0$. Quindi se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $f' \neq 0$ su Ω , allora f è conforme su Ω .

DIMOSTRAZIONE (parziale). Supponiamo $f'(z_0) \neq 0$. Per Cauchy-Riemann,

$$J_{z_0}(f) = \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix}$$

Da cui, $\det J_{z_0}(f) = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2 > 0$. Prendo $r = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} > 0$; quindi esiste θ per cui

$$(u_x, v_x) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Dunque

$$J_{z_0}(f) = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} R_\theta$$

Da ciò, capiamo che $J_{z_0}(f)$ preserva gli angoli.