GEOMETRIA III

VII Foglio di Esercizi - 26 Maggio 2014

Residui, massimo modulo e teorema di Rouché

Esercizio 1. Siano $p(z)$ e $q(z)$ due polinomi in $\mathbb{C}[z]$ di grado m ed n con $n \geq m+2$. Mostrare che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0.$$

Esercizio 2. Calcolare con il teorema dei residui i seguenti integrali:

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione restrizione di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa in $\{\Im(z) \geq 0\}$

eccetto che per un numero finito di poli $z_1, \dots, z_n$ contenuti in $\{\Im(z) > 0\}$ e tale che

$$\exists\, K,\ a > 0 : |f(z)| \leq \tfrac{K}{|z|^{1+a}} \qquad \text{se } |z| \to +\infty,$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_j} Res_{z_j}(f)$$

Caso particolare: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$, $Q(x)$ polinomi a coefficienti reali tali che

$Q(x)$ non ha radici reali e $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx \qquad \left[\tfrac{\pi}{12}\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9} dx \qquad \left[\tfrac{5\pi}{12}\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} \qquad \left[\tfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right]$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+4} dx \qquad \left[\tfrac{\pi}{6}\right]$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx \qquad \left[\tfrac{\pi}{200}\right]$$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(\alpha x) - \frac{1}{2}}{(x^2+1)^2} dx \qquad \text{con } \alpha \geq 0 \qquad \left[\tfrac{\pi}{8} e^{-2\alpha}(2\alpha+1)\right]$$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione restrizione di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa in $\{\Im(z) \geq 0\}$ eccetto che per un numero finito di poli $z_1, \dots, z_n$ contenuti in $\{\Im(z) > 0\}$ e tale che

$$\exists\, K : |f(z)| \leq \tfrac{K}{|z|} \qquad \text{se } |z| \to +\infty,$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{z_j} Res_{z_j}\left(f(z)e^{iz}\right)$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},\, a \neq 0 \qquad \left[\tfrac{e^{-|a|}\pi}{2|a|}\right]$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} \qquad \left[\tfrac{\pi e^{-2}}{2}\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20}dx \qquad \left[\tfrac{\pi}{4}e^{-4}\left(4\cos(2)+2\sin(2)\right)\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10}dx \qquad \left[\tfrac{\pi}{3}e^{-3}\left(\cos(1)-3\sin(1)\right)\right]$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+9)}dx \qquad \left[\tfrac{\pi}{9}\left(1-e^{-3}\right)\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{(x^2+1)(x-1)}dx \qquad \left[-\tfrac{\pi}{2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{1-x^2}dx \qquad [\pi]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^3+1}dx \qquad \left[\tfrac{\pi}{6}e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\tfrac{\pi}{3}\right]$$

Esercizio 4. Sia γ la circonferenza con centro nell'origine e raggio 4. Calcolare:

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)}dz.$$

Esercizio 5. Sia γ la circonferenza con centro nell'origine e raggio π. Calcolare:

$$\int_\gamma \frac{1+\tan^2(\pi z)}{\tan(\pi z)}dz.$$

Esercizio 6. Sia $f(z) = z/e^z$ e sia S il settore circolare

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } 0 \leq arg(z) \leq \pi/2\}.$$

Trovare il massimo modulo di f su S.

Esercizio 7. Trovare il minimo modulo della funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z+2}$$

sul quadrato chiuso, centrato nell'origine, con lati paralleli agli assi e di lato 2. centrato nell'origine di lato 2.

Esercizio 8. Trovare il massimo modulo delle seguenti funzioni

a) $f(z) = e^{-z^2}$	nel cerchio $\lvert z\rvert \le 1$	$[e]$
b) $g(z) = e^{z^2}$	nel cerchio $\lvert z\rvert \le 1$	$[e]$
c) $h(z) = z^2 - 3iz + 4$	nel cerchio $\lvert z\rvert \le 2$	$[10]$
d) $q(z) = z^2 - iz + 1$	nel cerchio $\lvert z\rvert \le 1$	$[\sqrt{5}]$

Esercizio 9.

a) Quanti zeri ha il polinomio $z^4 + z^3 - 4z + 1$ nella corona circolare $1 < |z| < 3$?

b) Quanti zeri ha la funzione $e^z + 4z^4 + 1$ nel cerchio $|z| < 1$?

c) Quanti zeri ha il polinomio $z^6 - 5z^4 + 10$ nel cerchio $|z| < 1$? E nella regione $|z| \ge 3$?

d) Quanti zeri ha il polinomio $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ nel cerchio $|z| < 1$?

Esercizio 10. Sia γ la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1. Calcolare:

$$\int_\gamma \frac{3z^7 - 4z^5 + 41z}{11z^8 - z^7 + 2z^3 + 5} dz.$$

Esercizio 11. Si mostri che per ogni $n \ge 1$ l'equazione

$$e^z = 3z^n$$

ha n radici distinte in $|z| < 1$.