

- 1) se A è un aperto, oppure un chiuso di X , e $x \in A$, allora $\bar{x} \subset A$;
- 2) la relazione in X :

$$x \mathcal{R} y \quad \text{significa} \quad x \in \bar{y}$$

è una relazione di equivalenza in X ;

- 3) lo spazio quoziente X/\mathcal{R} è uno spazio T_1 .

13. Sia X uno spazio T_4 , F un chiuso di X , Y lo spazio quoziente di X , ottenuto da X identificando ad un punto i punti di F . Dimostrare che Y è uno spazio T_3 .

14. Sia X uno spazio topologico, $\{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi di X con le seguenti proprietà:

- 1) il sottospazio F_i è metrizzabile per ogni $i \in I$;
- 2) $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{F}_i = X$.

Allora X è uno spazio T_3 . (Segue dalla proposizione 4.9.)

15. L'insieme \mathbf{R} dei numeri reali con la topologia che ha per chiusi, oltre \mathbf{R} , i sottoinsiemi finiti di \mathbf{R} , non soddisfa al primo assioma di numerabilità. (Se $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di 0, risulta $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n = \{0\}$, e quindi $\mathbf{R} - \{0\}$ sarebbe numerabile.)

16. Se lo spazio topologico X è a base numerabile, ogni ricoprimento aperto di X contiene un sottoricoprimento numerabile.

17. Se lo spazio topologico X è a base numerabile e \mathcal{B} è una base di X , esiste una sottofamiglia numerabile di \mathcal{B} che è ancora una base. (Se Σ è una base numerabile di X ed $S \in \Sigma$, si considera il ricoprimento di S mediante tutti gli elementi di \mathcal{B} contenuti in S e si tiene conto del teorema di Lindelöf per ogni $S \in \Sigma$.)

18. In un insieme X la topologia discreta ha una base numerabile se, e soltanto se, X è numerabile.

19. Se $f: X \rightarrow Y$ è un'applicazione continua, surgettiva e aperta di uno spazio a base numerabile X su uno spazio topologico Y , allora Y è a base numerabile.

20. Ogni spazio quoziente di uno spazio separabile X è uno spazio separabile (v. esercizio 37 del capitolo primo).

21. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e surgettiva dello spazio topologico X sullo spazio topologico Y . Se X è uno spazio a base numerabile, allora ogni sottospazio di Y è separabile.

Capitolo quarto

Connessione

1. Spazi ed insiemi connessi

Definizione 1.1. Uno spazio topologico X dicesi *connesso*, se esso non è unione di due aperti A, B non vuoti e disgiunti.

Esempi

[1.1] Un insieme X con almeno due punti e la topologia discreta non è connesso. Un insieme X con la topologia indiscreta è connesso.

[1.2] Un insieme X infinito con la topologia che ha per chiusi (oltre X) i sottoinsiemi finiti di X , è connesso (due aperti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota).

[1.3] Se X è uno spazio topologico connesso, esso resta connesso in ogni topologia meno fine di quella data.

Siccome i chiusi sono i complementari degli aperti, si constata immediatamente che:

Proposizione 1.2. Lo spazio X non è connesso se, e soltanto se, è verificata una delle due condizioni seguenti:

- a) esiste in X un sottoinsieme A diverso da \emptyset e da X , che è simultaneamente aperto e chiuso;
- b) esistono due chiusi non vuoti e disgiunti F, G , tali che $X = F \cup G$.

La connessione può essere caratterizzata anche con la proprietà seguente:

Proposizione 1.3. Lo spazio X è connesso se, e soltanto se, per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di X , tali che $X = A \cup B$, risulta

$$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Se X non è connesso, esistono due aperti non vuoti e disgiunti A e B tali che $X = A \cup B$. Risulta

$$\bar{A} = \bar{\cup B} = \cup B = A, \quad \bar{B} = \bar{\cup A} = \cup A = B,$$

e quindi

$$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cap B) = \emptyset.$$

Supponiamo inversamente che esista una coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di X tali che $A \cup B = X$ e

$$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \emptyset.$$

Risulta

$$A \cap \bar{B} = \emptyset,$$

e per conseguenza, tenuto conto che $A \cup B = X$

$$A \subset \bar{\cup B} \subset \cup B \subset A.$$

Ne segue che $A = \bar{\cup B}$ ossia che A è aperto. Analogamente da

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup B = X$$

si trae che

$$B \subset \bar{\cup A} \subset \cup A \subset B,$$

e quindi che $B = \bar{\cup A}$, onde segue che B è aperto. Le relazioni

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset,$$

provano che X non è connesso.

Q.E.D.

Definizione 1.4. Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X dicesi un *insieme connesso* se il sottospazio Y di X è connesso.

Esempio

[1.4] Un punto è connesso. Un sottoinsieme di uno spazio T_1 che contenga almeno due punti e che possenga punti isolati non è connesso.

Le proposizioni 1.5 ed 1.6 seguenti caratterizzano i sottoinsiemi connessi della retta reale \mathbf{R} .

Sia J un sottoinsieme della retta reale \mathbf{R} dotato della proprietà seguente:

$$(1) \quad \text{se } u \in J, v \in J \text{ ed } u < v, \text{ allora } [u, v] \subset J.$$

Siccome l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali ha la proprietà dell'estremo superiore, i sottoinsiemi J di \mathbf{R} che hanno la proprietà (1) sono, oltre \mathbf{R} , gli intervalli (limitati, oppure no), elencati alla fine dell'introduzione.

Osserviamo inoltre che, se A è un sottoinsieme limitato di \mathbf{R} , allora l'estremo superiore di A è aderente ad A , ossia appartiene ad \bar{A} .

Proposizione 1.5. Ogni intervallo della retta reale \mathbf{R} è connesso. In particolare la retta reale \mathbf{R} è connessa.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che J sia un intervallo non connesso. Siano A e B due chiusi di J non vuoti e disgiunti, tali che $J = A \cup B$. Siano $x \in A, y \in B$; scambiando eventualmente A con B , si può supporre $x < y$. Siccome J è un intervallo, risulta

$$[x, y] \subset J.$$

Poniamo

$$U = A \cap [x, y], \quad z = \text{Sup. } U.$$

Siccome $U \subset [x, y]$, che è chiuso in \mathbf{R} e contenuto in J , ne segue che \bar{U} è contenuto in J e quindi è un chiuso di J .

Siccome $U \subset A$ ed A è chiuso in J , ne segue che $\bar{U} \subset A$.

Per quanto è stato osservato sopra, risulta $z \in \bar{U}$ e quindi $z \in A$.

Siccome $z \in [x, y] \cap A$ ed $y \in B$, da $A \cap B = \emptyset$ segue $z < y$.

Siccome z è l'estremo superiore degli elementi di A minori di y , risulta $[z, y] \subset B$ e quindi $z \in \bar{B}$.

Siccome $z \in J$ e B è chiuso in J , risulta $z \in \bar{B} \cap J = B$ e ciò è assurdo. Q.E.D.

Proposizione 1.6. Ogni connesso della retta reale \mathbf{R} è un intervallo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esista un connesso, C di \mathbf{R} che non sia un intervallo. C non ha la proprietà (1), ossia esistono tre numeri x, y, z con $x < z < y$, e tali che $x \in C, y \in C, z \notin C$.

I sottoinsiemi:

$$A = C \cap]-\infty, \alpha[, \quad B = C \cap]\alpha, +\infty[$$

sono due aperti di C , non vuoti ($x \in A, y \in B$), disgiunti, e tali che $C = A \cup B$, e ciò è assurdo, perché C è connesso. Q.E.D.

Concludendo, con le proposizioni 1.5 ed 1.6 abbiamo provato che:

Un sottoinsieme della retta reale \mathbf{R} è connesso se, e soltanto se, esso è un intervallo. In particolare la retta reale \mathbf{R} è connessa.

Esempi

[1.5] Ogni sottoinsieme dell'insieme \mathbf{R} dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]a, b[$ è connesso. (Due aperti non vuoti di un qualunque sottospazio di \mathbf{R} hanno sempre intersezione non vuota.)

[1.6] L'insieme \mathbf{R} dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]a, b[$ non è connesso. (In questa topologia (che è più fine della topologia della retta reale) sono aperti i sottoinsiemi $]a, b[$ e $[0, +\infty[$.)

[1.7] Nelle dimostrazioni delle proposizioni 1.5 e 1.6 sono intervenute le seguenti proprietà dell'insieme \mathbf{R} dei numeri reali: \mathbf{R} è un insieme totalmente ordinato ($X, <$) tale che:

a) X non ha massimo, né minimo; se a, b sono due elementi di X , con $a < b$, esiste $x \in X$ tale che $a < x < b$.

Ciò consente di definire su X la topologia τ che ha per base la famiglia degli intervalli $]a, b[$ (su \mathbf{R} è la topologia della retta reale, su \mathbf{Q} è la topologia della retta razionale).

b) Ogni sottoinsieme superiormente limitato di X possiede estremo superiore.

Le stesse argomentazioni usate nelle dimostrazioni delle proposizioni 1.5 e 1.6 provano che un insieme X dotato della topologia τ è connesso se, e soltanto se, vale la proprietà b).

[1.8] L'insieme \mathbf{Q} dei razionali è un sottoinsieme di \mathbf{R} , che, nell'ordinamento indotto, ha la proprietà a) dell'esempio 1.7 ma non la proprietà b). Come sappiamo (v. esempio 2.2 del capitolo secondo), la topologia della retta razionale coincide con quella indotta su \mathbf{Q} dalla topologia della retta reale. Siccome tra due numeri razionali è sem-

pre compreso un numero irrazionale, le stesse argomentazioni usate nella dimostrazione della proposizione 1.5 provano che:

Un sottoinsieme della retta razionale \mathbf{Q} contenente almeno due punti non è connesso. In particolare la retta razionale \mathbf{Q} non è connessa.

Nello studio dei sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico X ci riferiremo spesso al lemma seguente:

Lemma 1.7. Siano A e B due aperti non vuoti e disgiunti di uno spazio topologico X , la cui unione ricopra X . Sia Y un sottoinsieme non vuoto e connesso di X ; allora $Y \subset A$ oppure $Y \subset B$.

Dimostrazione. Se $A \cap Y \neq \emptyset$ e $B \cap Y \neq \emptyset$, i sottoinsiemi $A \cap Y$ e $B \cap Y$ sono due sottoinsiemi aperti e non vuoti di Y , che sono disgiunti e la cui unione è Y . Dunque Y non è connesso. Q.E.D.

2. Spazi connessi e applicazioni continue

Proposizione 2.1. Se f è un'applicazione continua e surgettiva di uno spazio connesso X su uno spazio topologico X' , X' è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che X' non sia connesso, e siano A', B' due aperti di X' non vuoti e disgiunti, tali che $X' = A' \cup B'$.

Da $A' \neq \emptyset, B' \neq \emptyset$ segue $f^{-1}(A') \neq \emptyset, f^{-1}(B') \neq \emptyset$ perché f è surgettiva.

Da $A' \cap B' = \emptyset$ segue $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') = \emptyset$.

Da $A' \cup B' = X'$ segue $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') = X$.

Siccome f è continua, $f^{-1}(A')$ ed $f^{-1}(B')$ sono aperti di X . Tutto ciò prova che X non è connesso, contro l'ipotesi. Q.E.D.

Tenuto conto della proposizione 2.8 del capitolo secondo si ha:

Corollario 2.2. Se $f: X \rightarrow X'$ è un'applicazione continua dello spazio topologico X nello spazio topologico X' , le immagini mediante f dei sottoinsiemi connessi di X sono sottoinsiemi connessi di X' .

Esempio

[2.1] Gli archi di uno spazio topologico X , introdotti nell'esempio 2.10 del capitolo secondo hanno immagine connessa.

Corollario 2.3. *Spazi omeomorfi ad uno spazio connesso sono connessi. Uno spazio quoziente di uno spazio connesso è connesso.*

Esempi

[2.2] Consideriamo sulla retta reale \mathbf{R} i seguenti sottoinsiemi connessi

$$\mathbf{R}, [0, +\infty[, [0, 1].$$

Due qualunque di questi tre connessi non sono omeomorfi tra loro. Ogni connesso di \mathbf{R} è omeomorfo ad uno (ed uno solo) di questi. (Si osservi anzitutto che \mathbf{R} meno un punto non è connesso; $[0, +\infty[$ meno $\{0\}$ è connesso, mentre $[0, +\infty[$ meno due punti non è connesso; $[0, 1]$ meno $\{0, 1\}$ è connesso. Passando alla seconda parte dell'asserto, sono ben noti degli omeomorfismi di natura elementare al riguardo (v. del resto l'esempio 4.7 del capitolo primo).

[2.3] Il cerchio $x^2 + y^2 = 1$ di \mathbf{R}^2 è connesso perché omeomorfo ad uno spazio quoziente della retta reale \mathbf{R} (v. esempio 8.2 ed esercizio 14 del capitolo secondo).

Proposizione 2.4. *Sia X uno spazio topologico e \mathfrak{R} una relazione di equivalenza in X . Se ogni classe di \mathbf{R} -equivalenza è connessa e se lo spazio quoziente X/\mathfrak{R} è connesso, lo spazio X è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che X non sia connesso e siano A, B due aperti non vuoti e disgiunti di X , tali che $X = A \cup B$.

Se $\pi: X \rightarrow X/\mathfrak{R}$ è la proiezione naturale, ed $x \in A$, la classe di \mathfrak{R} -equivalenza Y_x di x è $\pi^{-1}(\pi(x))$. Siccome Y_x è connessa, segue dal lemma 1.7 che $Y_x \subset A$, e quindi $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Analogamente $B = \pi^{-1}(\pi(B))$.

Da $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ e $B = \pi^{-1}(\pi(B))$ segue, per la definizione di topologia quoziente, che $\pi(A)$ e $\pi(B)$ sono due aperti non vuoti di X/\mathfrak{R} , che sono disgiunti, perché unioni disgiunte di classi di \mathfrak{R} -equivalenza.

Siccome $A \cup B = X$ e π è surgettiva, si ha anche

$$X/\mathfrak{R} = \pi(A) \cup \pi(B)$$

e ciò è assurdo, perché X/\mathfrak{R} è connesso.

Q.E.D.

Proposizione 2.5. *Sia X' un insieme con almeno due elementi, dotato della topologia discreta. Uno spazio topologico X è connesso se, e soltanto se,*

ogni applicazione continua $f: X \rightarrow X'$ è costante ($f(X)$ consta di un solo punto).

Dimostrazione. Faremo vedere che X non è connesso se, e soltanto se, esiste un'applicazione continua $f: X \rightarrow X'$ tale che $f(X)$ contenga più di un punto.

Siano x', y' due punti distinti di X' ed A, B due aperti non vuoti e disgiunti di X , tali che $X = A \cup B$. Consideriamo l'applicazione $f: X \rightarrow X'$ definita ponendo:

$$f(x) = x', \text{ se } x \in A; \quad f(x) = y', \text{ se } x \in B.$$

L'applicazione f così definita è continua, e non è costante, perché $f(X) = \{x', y'\}$.

Supponiamo inversamente che $f: X \rightarrow X'$ sia un'applicazione continua non costante. Se $x' \in f(X)$, allora $B' = f(X) - \{x'\}$ non è vuoto. Siccome X' ha la topologia discreta, i sottoinsiemi $\{x'\}$ e B' sono aperti in X' . Dunque $A = f^{-1}(x')$, $B = f^{-1}(B')$ sono due aperti non vuoti e disgiunti di X , tali che $X = A \cup B$, ossia X non è connesso.

Q.E.D.

Teorema 2.6. *Se X_1 e X_2 sono due spazi connessi, lo spazio prodotto $X = X_1 \times X_2$ è connesso, e viceversa.*

Dimostrazione. Siano $p: X \rightarrow X_1$ e $q: X \rightarrow X_2$ le proiezioni canoniche di X su X_1 e su X_2 . Se $X = X_1 \times X_2$ è connesso, anche $X_1 = p(X)$ e $X_2 = q(X)$ sono connessi, per la proposizione 2.1.

Supponiamo che X_1 e X_2 siano connessi e proviamo che $X = X_1 \times X_2$ è connesso.

Sia $f: X \rightarrow X'$ una qualsiasi applicazione continua di X in uno spazio X' munito della topologia discreta. In virtù della proposizione 2.5, per dimostrare che X è connesso, basterà provare che f è costante su X , cioè che se (x_1, x_2) e (y_1, y_2) sono due qualsiasi punti di X ($x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$), risulta $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$.

Fissati ad arbitrio $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, consideriamo le applicazioni continue

$$f_{x_1}: X_2 \rightarrow X' \quad \text{e} \quad f_{x_2}: X_1 \rightarrow X'$$

definite rispettivamente da

$$\begin{aligned} f_{x_1}(u_2) &= f(x_1, u_2) \quad \text{per ogni } u_2 \in X_2, \\ f_{x_2}(u_1) &= f(u_1, x_2) \quad \text{per ogni } u_1 \in X_1. \end{aligned}$$

Poiché X_2 e X_1 sono connessi, per la proposizione 2.5 $f_{z_1}(X_2)$ e $f_{z_2}(X_1)$ sono due punti di X' , cioè f_{z_1} e f_{z_2} sono costanti, rispettivamente su X_2 e su X_1 . Si ha pertanto

$$f(y_1, y_2) = f_{y_1}(y_2) = f_{y_2}(x_1) = f(x_1, y_2) = f_{x_1}(y_2) = f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2). \quad \text{Q.E.D.}$$

Con ovvie varianti, si dimostra in modo analogo il

Teorema 2.6'. Se $\{X_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di spazi topologici, lo spazio prodotto è connesso se, e soltanto se, tutti gli X_i sono connessi.

Esempi

[2.4] $L^{\mathbf{R}^n}$ euclideo, il cubo I^n ($I = [0, 1]$) sono spazi connessi. Gli spazi metrici \mathbf{R}^{N^*} ed I^{N^*} , studiati nel paragrafo 7 del capitolo secondo, sono connessi.

[2.5] \mathbf{R}^n meno un punto è connesso, per $n \geq 2$. (Segue dalla proposizione 2.5 con argomentazioni analoghe a quelle della dimostrazione del teorema 2.6.)

3. Componenti connesse

Lemma 3.1. Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X , due qualsiasi dei quali siano non disgiunti. L'unione $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ è un sottoinsieme connesso di X .

Dimostrazione. Supponiamo che Y non sia connesso, e siano A e B due aperti di Y , disgiunti e non vuoti, tali che $Y = A \cup B$. Dal lemma 1.7 segue che, per ogni $i \in I$ si ha

$$Y_i \subset A, \text{ oppure } Y_i \subset B.$$

Siccome A e B non sono vuoti, esiste $Y_i \subset A$, $Y_j \subset B$; ma allora $Y_i \cap Y_j \subset A \cap B = \emptyset$, e questo contraddice l'ipotesi.

Q.E.D.

In particolare:

Corollario 3.2. Se $\{Y_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi connessi di X , tali che $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$, allora $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.

Corollario 3.3. Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X , e sia Y_0 un altro connesso di X , tale che $Y_0 \cap Y_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$. Allora $Y_0 \cup Y$, dove $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$, è un connesso di X .

Dimostrazione. $Z_i = Y_0 \cup Y_i$ è un connesso di X per il lemma 3.1, e $\bigcap_{i \in I} Z_i \supset Y_0 \neq \emptyset$. Dunque, per il corollario 3.2, è connesso $\bigcup_{i \in I} Z_i = Y_0 \cup Y$. Q.E.D.

Corollario 3.4. Sia $\{Y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di sottoinsiemi connessi di X , tali che $Y_n \cap Y_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora $Y = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Y_n$ è connesso.

Dimostrazione. È immediato provare, per induzione su n , che $Z_n = \bigcup_{h \leq n} Y_h$ è connesso per ogni $n \in \mathbf{N}$.

D'altra parte $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} Z_n = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Y_n$ e $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} Z_n \supset Y_0 \neq \emptyset$. Dunque Y è connesso, per il corollario 3.2. Q.E.D.

Esempi

[3.1] Consideriamo in \mathbf{R}^n la struttura di spazio vettoriale (su \mathbf{R}). Siano x' ed x'' due punti di \mathbf{R}^n ; il sottoinsieme

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid x = x' + t(x'' - x') \text{ dove } 0 \leq t \leq 1\}$$

è il segmento di estremi x' ed x'' . Un sottoinsieme X di \mathbf{R}^n si dice *convesso* se, insieme a due suoi punti qualunque, contiene il segmento che li ha per estremi.

I sottoinsiemi convessi di \mathbf{R}^n sono connessi. (Sono unioni di segmenti aventi un estremo a comune, che sono connessi perché immagine continua del connesso $[0, 1]$.)

In particolare i dischi di \mathbf{R}^n e le loro chiusure sono connessi.

[3.2] Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punto di \mathbf{R}^n . Il sottoinsieme di \mathbf{R}^n $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_n \geq 0\}$ (semisfera di \mathbf{R}^n) è connesso. (È omeomorfo al disco chiuso di \mathbf{R}^{n-1} con centro nell'origine e raggio 1.)

Il sottoinsieme di \mathbf{R}^n $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ (sfera di \mathbf{R}^n) è connesso. (È l'unione di due semisfere aventi intersezione non vuota.)

[3.3] Uno spazio topologico X si dice *connesso per archi* se per ogni coppia x, y di punti di X esiste un'applicazione continua $a: I \rightarrow X$ tale che $a(0) = x, a(1) = y$ (arco di estremi x, y ; v. esempio 2.10 del capitolo secondo). Se X è connesso per archi, X è connesso.

I sottoinsiemi convessi di \mathbf{R}^n sono connessi per archi.

Dato un punto $x_0 \in X$, l'unione C_{x_0} di tutti i sottoinsiemi connessi di X contenenti x_0 è — per il corollario 3.2 — un sottoinsieme connesso di X . Esso è il *più grande insieme connesso* di X contenente x_0 , nel senso che: se Y è un connesso di X contenente x_0 , allora $Y \subset C_{x_0}$.

Definizione 3.4. Dicesi *componente connessa* di un punto x_0 di X il più grande sottoinsieme connesso C_{x_0} di X contenente x_0 .

Esempi

[3.4] Se X è connesso, per ogni $x \in X$ la componente connessa C_x di x è X . Se X ha la topologia discreta, per ogni $x \in X$ la componente connessa C_x di x è $\{x\}$.

[3.5] Per ogni punto q della retta razionale \mathbf{Q} (v. esempio 1.8) la componente connessa C_q di q è $\{q\}$, sebbene \mathbf{Q} non abbia la topologia discreta.

[3.6] $\mathbf{R} - \{0\}$ non è connesso ed è unione disgiunta delle componenti connesse di 1 e -1.

Definizione 3.5. Uno spazio topologico X si dice *totalmente sconnesso* se ogni connesso Y di X consta di un solo punto.

Dalla definizione 3.4 segue subito la:

Proposizione 3.6. X è *totalmente sconnesso* se, e soltanto se, per ogni $x \in X$, si ha $C_x = \{x\}$.

Esempi

[3.7] Un insieme X con la topologia discreta, la retta razionale \mathbf{Q} sono spazi *totalmente sconnessi*.

[3.8] Se gli aperti di una base \mathfrak{B} dello spazio topologico X sono chiusi ed X è T_0 , allora X è *totalmente sconnesso* (ogni sottoinsieme Y di X che contenga almeno due punti è unione di due aperti in Y non vuoti e disgiunti).

Lemma 3.7. Sia D un sottoinsieme di X denso in X . Se D è connesso, X è connesso.

Dimostrazione. Siano, per assurdo, A e B due aperti non vuoti disgiunti di X , tali che $X = A \cup B$.

Dalla proposizione 6.10 del capitolo primo segue che gli aperti del sottospazio D , $D \cap A$ e $D \cap B$ sono ambedue non vuoti.

Poiché $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$, D non può essere connesso, contro l'ipotesi. Q.E.D.

Ne segue:

Proposizione 3.8. Se Y è un sottoinsieme connesso di X , ogni sottoinsieme Z di X tale che $Y \subset Z \subset \bar{Y}$ è connesso. In particolare la chiusura \bar{Y} di Y è connessa.

Corollario 3.9. La componente connessa C_{x_0} di un qualsiasi punto x_0 di X è un sottoinsieme chiuso di X .

Esempio

[3.9] In uno spazio topologico X la relazione: $x \mathfrak{R} y$ significa "esiste un connesso Y di X che contiene x ed y " è una relazione di equivalenza.

Le classi di \mathfrak{R} -equivalenza sono le componenti connesse dei punti di X . Tenuto conto della proposizione 4.4 del capitolo terzo, segue dal corollario 3.9 che lo spazio quoziente X/\mathfrak{R} è T_1 .

Inoltre X/\mathfrak{R} è *totalmente sconnesso*. (Sia K un connesso di X/\mathfrak{R} e π la proiezione naturale di X su X/\mathfrak{R} . Basta osservare che $Y = \pi^{-1}(K)$ è unione di componenti connesse di punti di Y e che K è il quoziente di Y modulo la relazione di equivalenza indotta da \mathfrak{R} su Y . Per la proposizione 2.4 Y è connesso e ciò è possibile se, e soltanto se, K è un punto.)

Sia C_x la componente connessa di un punto x di X e sia $y \in C_x$. La componente connessa C_y di y è un sottoinsieme connesso, il quale contiene C_x . Pertanto $C_y = C_x$. Dunque C_x è la *componente connessa* di ogni suo punto.

Definizione 3.10. Diremo *componente connessa* di X un sottoinsieme C di X che è componente connessa di un punto di X . Se Y è un sottoinsieme di X , diremo *componente connessa* di Y ogni componente connessa del sottospazio Y .

Segue dal corollario 3.9 (v. anche esempio 3.9) che le componenti connesse di uno spazio topologico X sono chiuse e a due a due disgiunte. Non è detto che queste componenti siano aperte, come prova l'esempio 1.8 sulla retta razionale \mathbb{Q} . Vale però la:

Proposizione 3.11. *Se Y è un sottoinsieme connesso di X , il quale è simultaneamente aperto e chiuso, Y è una componente connessa di X .*

Dimostrazione. Basterà provare che, se $Z \supset Y$ e Z è connesso, risulta $Z = Y$. Infatti Y è aperto e chiuso in Z . Poiché Z è connesso, deve essere $Y = Z$.
Q.E.D.

Esempio

[3.10] Una *varietà topologica* X di dimensione n è uno spazio topologico X con la proprietà seguente: per ogni punto $x_0 \in X$ esistono un intorno aperto U_{x_0} di x_0 ed un omeomorfismo h_{x_0} di U_{x_0} con \mathbb{R}^n tale che $h_{x_0}(x_0) = 0$. Una varietà topologica connessa è connessa per archi. (Sia D_{x_0} l'insieme dei punti x di X che possono essere congiunti a x_0 con un arco (v. esempio 3.3). D_{x_0} è connesso: tenuto conto degli esempi 2.10 del capitolo secondo e 3.2, si vede subito che D_{x_0} è chiuso e aperto. Dunque D_{x_0} è la componente connessa di x_0 e coincide perciò con X .)

Proposizione 3.12. *Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici, e sia $X = \prod_{i \in I} X_i$ lo spazio topologico prodotto. Ogni componente connessa C di X è della forma*

$$C = \prod_{i \in I} C_i$$

con C_i componente connessa di X_i .

Dimostrazione. Poiché tutte le C_i sono connesse, per il teorema 2.6' il prodotto $\prod_{i \in I} C_i$ è un sottoinsieme connesso di X . Resta da provare che esso è un sottoinsieme connesso massimale. Supponiamo, per assurdo, che esista un sottoinsieme connesso D di X tale che

$$\prod_{i \in I} C_i \subset D \quad \prod_{i \in I} C_i \neq D.$$

Sia $x = (x_i)_{i \in I}$ un punto appartenente a D ma non a $\prod_{i \in I} C_i$. Esiste almeno un indice $j \in I$ per il quale $x_j \notin C_j$.

Sia $p_j: X \rightarrow X_j$ la proiezione canonica di X su X_j . Per il corollario 2.2, $p_j(D)$ è un connesso di X_j . Siccome $p_j(D) \supset C_j$ ed $x_j \in p_j(D)$, $x_j \notin C_j$, ne segue che C_j non è una componente connessa di X_j , contro l'ipotesi.
Q.E.D.

Dalla proposizione 3.11 segue il

Corollario 3.13. *Se gli spazi X_i sono totalmente sconnessi, $X = \prod_{i \in I} X_i$ è totalmente sconnesso.*

Infatti $C_i = \{x_i\}$ e $\prod_{i \in I} \{x_i\} = \{x\}$.

In particolare lo spazio prodotto di una famiglia di spazi muniti della topologia discreta è *totalmente sconnesso* anche se — come risulta dall'esempio 6.1 del capitolo secondo — la topologia prodotta non è necessariamente la topologia discreta.

4. Spazi localmente connessi

Definizione 4.1. Uno spazio topologico X dicesi *localmente connesso in un punto* $x \in X$, se x ammette un sistema fondamentale di intorni connessi. Uno spazio localmente connesso in ogni suo punto dicesi *localmente connesso*.

Esempi

[4.1] La retta reale \mathbb{R} , più in generale \mathbb{R}^n (v. esempio 3.2), sono spazi connessi e localmente connessi. Anche le varietà topologiche (v. esempio 3.10) sono localmente connesse.

[4.2] Uno spazio totalmente sconnesso X è localmente connesso, se e soltanto se, X ha la topologia discreta. In particolare la retta razionale \mathbb{Q} non è localmente connessa.

Teorema 4.2. *Lo spazio topologico X è localmente connesso se, e soltanto se, per un qualunque aperto A di X , ogni componente connessa di A è aperta in X .*

Dimostrazione. 1) Sia X localmente connesso.

Sia A un aperto di X e sia C una componente connessa di A . Dobbiamo provare che C è aperto in X , ossia che ogni punto $x \in C$ ha un intorno U contenuto in C .

Poiché A è aperto, esso è un intorno di x . Essendo X localmente

connesso per ipotesi, esiste un intorno connesso U di x contenuto in A : $x \in U \subset A$. Poiché C è una componente connessa di A , risulta $U \subset C$.

2) Supponiamo ora che ogni componente connessa di un qualsiasi aperto A sia aperta in X . Dobbiamo provare che X è localmente connesso.

Fissato ad arbitrio $x \in X$, sia V un intorno aperto di x e sia W la componente connessa di V contenente x . W è aperta in X , in base alla nostra ipotesi. Quindi W è un intorno connesso di x , per il quale si ha

$$x \in W \subset V.$$

Ciò prova l'asserto.

Q.E.D.

Esempio

[4.3] Consideriamo in \mathbb{R}^2 , con la topologia euclidea, la famiglia di segmenti:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; y = 0\} \\ Y_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0; 0 \leq y \leq 1\}; \\ Y_n &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n; 0 \leq y \leq 1\} \text{ per } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Il sottospazio di \mathbb{R}^2 , $X = [\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n] \cup X_0$ è connesso, ma non è localmente connesso nei punti di $Y_0 - \{0\}$.

Teorema 4.3. Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici tutti localmente connessi e — tranne al più un numero finito fra essi — connessi.

Lo spazio prodotto

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

è localmente connesso.

Dimostrazione. Sia $x = \{x_i\}_{i \in I}$ ($x_i \in X_i$) un punto di X e sia U un intorno di x in X . Si può supporre

$$U = \prod_{i \in I} U_i,$$

dove gli U_i sono scelti nel modo seguente: esiste un sottoinsieme finito H di I tale che per $i \in H$, U_i è un intorno di x_i in X_i ; per $i \in I - H$, $U_i = X_i$. Sia J il sottoinsieme finito di I , tale che, per $i \notin J$, X_i è connesso. Tenuto conto che tutti gli X_i sono localmente

connessi, costruiamo, per ogni $i \in H \cup J$, un intorno connesso V_i di x_i tale che $V_i \subset U_i$, ed assumiamo $V_i = X_i$ per $i \in I - (H \cup J)$. Posto

$$V = \prod_{i \in I} V_i,$$

V è un intorno di x per il quale si ha $V \subset U$. Inoltre, per il teorema 2.6', V è connesso. Q.E.D.

Nell'ipotesi del teorema 4.3 la condizione che tutti gli spazi X_i , salvo un numero finito, siano connessi, non può essere soppressa, come prova l'esempio 6.1 del capitolo secondo sul prodotto di una famiglia infinita di spazi discreti. Lo spazio prodotto, che è totalmente sconnesso, sarebbe localmente connesso se, e soltanto se, la topologia prodotto fosse quella discreta e ciò è possibile nei casi seguenti: la famiglia di spazi è finita, oppure solo un numero finito di essi hanno almeno due punti.

Il teorema 4.3 può essere invertito.

Teorema 4.4. Se lo spazio prodotto $X = \prod_{i \in I} X_i$ di una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ di spazi topologici X_i è localmente connesso, tutti gli spazi X_i sono localmente connessi e — salvo al più un numero finito — connessi.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che tutti gli X_i ($i \in I$), salvo al più un numero finito, sono connessi. Sia $x = \{x_i\}_{i \in I}$ un punto di X ($x_i \in X_i$), e sia U un intorno connesso di x . Per la proposizione 6.3 del capitolo secondo, $p_i(U) = X_i$, salvo al più un insieme finito J di indici. Per il corollario 2.2, per ogni $i \notin J$, X_i è connesso.

Proviamo infine che per ogni $i_0 \in I$, X_{i_0} è localmente connesso. Sia x_{i_0} un qualsiasi punto di X_{i_0} e sia U_{i_0} un intorno aperto di x_{i_0} , $p_{i_0}: X \rightarrow X_{i_0}$ la proiezione canonica.

L'insieme $p_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$ è aperto e quindi è intorno di ogni punto $y \in p_{i_0}^{-1}(x_{i_0})$. Per ipotesi X è localmente connesso; esiste quindi un intorno connesso V di y tale che $V \subset p_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$. Per il corollario 2.2, $p_{i_0}(V)$ è un intorno connesso di x_{i_0} ed, evidentemente, $p_{i_0}(V) \subset U_{i_0}$. Q.E.D.

Teorema 4.6. Se X è localmente connesso, ogni suo spazio quoziente è localmente connesso.

Dimostrazione. Sia \mathfrak{R} una relazione di equivalenza in X . Sia $X' = X/\mathfrak{R}$ lo spazio quoziente e sia $\pi: X \rightarrow X'$ la proiezione naturale. In base al teorema 4.2, proveremo il nostro asserto mostran-

do che le componenti connesse di un qualsiasi aperto A' di X' sono degli aperti di X' . Sia M' una componente connessa di A' . Sia $x \in \pi^{-1}(M')$ e sia N la componente connessa di $\pi^{-1}(A')$ passante per x . L'immagine $\pi(N)$ è connessa, per il corollario 2.2. Poiché $\pi(N) \subset M'$, risulta pertanto $N \subset \pi^{-1}(M')$. Dunque $\pi^{-1}(M')$ è unione di componenti di $\pi^{-1}(A')$. Poiché A' è aperto in X' , $\pi^{-1}(A')$ è un aperto di X . Siccome X è localmente connesso, tutte le componenti connesse di $\pi^{-1}(A')$ sono degli aperti. Dunque $\pi^{-1}(M')$ è un aperto di X , e quindi M' è un aperto di X' .
Q.E.D.

Esercizi

1. Sia X un insieme infinito con la topologia che ha per chiusi (oltre X) i sottoinsiemi finiti di X . Un sottoinsieme Y di X è connesso se, e soltanto se, Y è infinito, oppure è costituito da un solo punto.
2. Il sottospazio X dei punti (x, y) del piano euclideo per i quali $xy \geq 1$ non è connesso; il sottospazio Y dei punti (x, y) per i quali $xy \leq 1$ è connesso. [I semipiani (aperti) $x > 0$ ed $x < 0$ intersecano X in due aperti (di X) non vuoti e disgiunti la cui unione è X . Se $(x, y) \in Y$, il segmento congiungente l'origine $(0, 0)$ con (x, y) è contenuto in Y .]
3. Uno spazio topologico X è connesso se, e soltanto se, ogni sottoinsieme proprio e non vuoto di X ha frontiera non vuota.
4. Sia A un sottoinsieme proprio e non vuoto di uno spazio topologico X . Se B è un sottoinsieme connesso di X che interseca A e \bar{A} , allora B interseca la frontiera di A .
5. La corona circolare $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ è un sottoinsieme connesso del piano euclideo.
6. Sia \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $] -\infty, a[$. Ogni sottospazio X di \mathbb{R} è localmente connesso.
7. Ogni sottoinsieme infinito X della retta reale \mathbb{R} ha almeno un sottoinsieme infinito totalmente sconnesso.
8. L'insieme \mathbb{R} dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $[a, b[$ è totalmente sconnesso (v. esempio 3.8).

9. Sia A un sottoinsieme dello spazio topologico X , non vuoto e diverso da X , e sia B un sottoinsieme dello spazio topologico Y , non vuoto e diverso da Y . Se X ed Y sono connessi, il complementare di $A \times B$ in $X \times Y$ è connesso.

10. Siano A e B due chiusi non vuoti dello spazio topologico X . Se $A \cup B$ ed $A \cap B$ sono connessi, allora A e B sono connessi. (Supponiamo $A \not\subset B$ ed A non connesso; se $A = E \cup F$ con E, F chiusi, non vuoti e disgiunti, uno di essi, ad esempio E contiene $A \cap B$. Pertanto $E \cup B$ e F sono due chiusi non vuoti e disgiunti, la cui unione è $A \cup B$.)

11. Consideriamo nel piano euclideo i sottoinsiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1; y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1; y = 1\}$$

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1/n; 0 \leq y \leq 1\} \text{ per } n = 1, 2, \dots$$

e sia $X_n = A \cup A_n$.

La famiglia $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ ha le seguenti proprietà:

- 1) $X_n \supset X_{n+1}$ per $n = 1, 2, \dots$
- 2) X_n è connesso per $n = 1, 2, \dots$
- 3) $\bigcap_{n=1,2,\dots} X_n$, non è vuota e non è connessa.

12. Sia $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione che ordini tutti i numeri razionali e sia $A_n = \mathbb{R} - \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$. Se \mathbb{R} è la retta reale, allora $A_n \supset A_{n+1}$, A_n ha $n+2$ componenti connesse e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ha una infinità non numerabile di componenti connesse.

13. Sia $I = [0, 1]$ con la topologia indotta dalla retta reale, ed $\mathfrak{F} = \{f: I \rightarrow I\}$ l'insieme delle applicazioni continue di I in sé.

$$d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

è una distanza su \mathfrak{F} . La topologia indotta da d è quella di uno spazio connesso per archi. (Se $f, g \in \mathfrak{F}$, allora $f + t(g-f) \in \mathfrak{F}$ per ogni $t \in I$.)

14. Lo spazio dell'esempio 4.3 è connesso per archi.

15. Sia f la funzione su \mathbb{R} a valori reali definita da

$$f(x) = 0, \text{ se } x = 0$$

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ per ogni } x \neq 0.$$

Il grafico di f è un connesso dell' \mathbb{R}^2 euclideo che non è connesso per archi.

16. Sia (X, d) uno spazio metrico, $a: I \rightarrow X$ un arco (v. esempio 3.3) di X tale che $a(0) \neq a(1)$; per ogni numero r tale che

$$0 < r < d(a(0), a(1))$$

esiste $t \in I$ tale che $d(a(0), a(t)) = r$.

17. Se A e B sono due sottoinsiemi connessi dello spazio topologico X , ed $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso.

18. Sia \mathbf{R} l'insieme dei numeri reali e τ la famiglia dei sottoinsiemi di \mathbf{R} che si ottengono dagli aperti della retta reale togliendo al più un'infinità numerabile di punti. La famiglia τ è una topologia su \mathbf{R} strettamente più fine della topologia euclidea (l'assioma b) della definizione 1.1 del capitolo primo segue dal teorema di Lindelöf).

(\mathbf{R}, τ) è connesso, ma non è connesso per archi. (Ogni arco $a: I \rightarrow \mathbf{R}$ di (\mathbf{R}, τ) è costante; non esiste infatti nessun $\varepsilon > 0$ tale che $a([0, \varepsilon])$ sia diverso da $a(0)$ e sia contenuto in un intorno aperto di $a(0)$ in \mathbf{R} , ottenuto da un intorno U della topologia reale sopprimendo un'infinità numerabile di punti che sia densa in U .)

Capitolo quinto

Compattezza

1. Spazi compatti

Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi Y_i di un insieme X .
Risulta

$$(1) \quad \bigcup_{i \in I} \bar{Y}_i = \bar{\bigcap_{i \in I} Y_i}.$$

Definizione 1.1. Si dice che la famiglia $\{Y_i\}_{i \in I}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* se per ogni sottoinsieme finito J di I l'intersezione $\bigcap_{i \in J} Y_i$ è non vuota.

Proposizione 1.2. Sia X uno spazio topologico. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- 1) ogni ricoprimento di X mediante aperti contiene una famiglia finita che è ancora un ricoprimento di X ;
- 2) ogni famiglia di chiusi di X la cui intersezione sia vuota contiene una famiglia finita, la cui intersezione è vuota;
- 3) ogni famiglia di chiusi di X che abbia la proprietà dell'intersezione finita ha un'intersezione non vuota.

Dimostrazione. 1) \Leftrightarrow 2). Sia $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi di X . Consideriamo la famiglia $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ di aperti $A_i = \bar{X} \setminus F_i$. In base alla (1), l'essere \mathfrak{F} tale che

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$$

equivale alla

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X,$$