

Quaderno di Antonio Lorenzin del corso di

Geometria III

Topologia algebrica

Tenuto da Riccardo Ghiloni

TOPOLOGIA QUOZIENTE

DEFINIZIONE 1.1. Sia X uno spazio topologico, sia X' un insieme e sia $f: X \rightarrow X'$ un'applicazione. La *topologia quoziente* di X' rispetto ad f è la topologia di X' più fine che rende C^0 la funzione f .

OSSERVAZIONE 1.1. Siano (X, τ) , $f: X \rightarrow X'$ come sopra. Allora la topologia quoziente τ' di X' rispetto ad f esiste e vale:

$$\tau' = \{A' \in 2^{X'} \mid f^{-1}(A') \in \tau\}$$

Sia $g: (X', \tau') \rightarrow (Y, \xi)$ una applicazione fra spazi topologici. Allora g è continua se e solo se la composizione $g \circ f$ è continua.

Sia X un insieme e sia R una relazione binaria su X (cioè $R \subset X \times X$). Ricordiamo che solitamente si scrive

$$xRy$$

Data relazione è di equivalenza se, come visto, soddisfa la riflessività, la simmetria e la transitività.

Supponiamo che R sia una relazione di equivalenza su X . Dato $x \in X$, definiamo

$$[x]_R := \{y \in X \mid xRy\}$$

Possiamo così definire il passaggio al quoziente, ottenendo

$$X/R := \{[x]_R \in 2^X \mid x \in X\}$$

DEFINIZIONE 1.2. Sia X un insieme dotato di una topologia τ e sia R una relazione di equivalenza su X . Consideriamo

$$\pi: X \rightarrow X/R$$

$$x \mapsto [x]_R$$

La topologia quoziente $\tau_{X/R}$ di X/R rispetto a π si chiama *topologia quoziente di X modulo R* e $(X/R, \tau_{X/R})$ si dice *spazio topologico quoziente di X modulo R* .

DEFINIZIONE 1.3. Dato $A \subset X$, si dice che A è π -saturato se $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Cioè, se per ogni $x \in A$,

$$[x]_R \subset A$$

LEMMA 1.1. $\tau_{X/R} = \{\pi(A) \in 2^{X/R} \mid A \in \tau, A \text{ è } \pi\text{-saturato}\}$.

LEMMA 1.2. $(X, \tau) \xrightarrow{f} (X', \tau')$ applicazione C^0 tra spazi topologici. Sia inoltre R relazione di equivalenza su X ed R' relazione di equivalenza su X' . Si può considerare dunque π e π' , da cui ricavo X/R ed X'/R' . Allora esiste

$$g: X/R \rightarrow X'/R'$$

se e solo se $\forall x, y \in X$, xRy implica $f(x)R'f(y)$, ovvero $\forall x \in X$, $f([x]_R) \subset [f(x)]_{R'}$

LEMMA 1.3. Siano (X', τ') spazio topologico, X insieme, $f: X \rightarrow X'$ applicazione continua. Definiamo R_f su X relazione di equivalenza: $\forall x, y \in X$,

$$xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

$([x]_{R_f} = f^{-1}(f(x)))$. Chiamiamo $\pi_f: X \rightarrow X/R_f$. Allora esiste g che fa commutare il diagramma, definita nel seguente modo: $g[x]_{R_f} := f(x) \quad \forall [x]_{R_f} \in X/R_f$. Essa è iniettiva per costruzione.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow \pi_f & \searrow g & \\ X/R_f & & \end{array}$$

Si noti che se f è suriettiva, g è suriettiva e dunque biiettiva. Inoltre, g è un omeomorfismo se e solo se τ' è la topologia quoziente di X' rispetto a f .

Se X è compatto ed X' è di Hausdorff, allora si ha che g è chiusa.

SUPERFICI TOPOLOGICHE

2.1. Varietà Topologiche

DEFINIZIONE 2.1.1. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *localmente euclideo* se, per ogni $x \in X$, esistono un intorno aperto U di x in X ed un omeomorfismo $\phi: U \rightarrow V$ tra U ed un aperto V di un qualche \mathbb{R}^n .

OSSERVAZIONE 2.1.1.

- (i) Si può sempre supporre che $V = \mathring{D}^n := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq 1\}$ ed anche $\phi(x) = 0$. Si può vedere che \mathring{D}^n è omeomorfo a \mathbb{R}^n grazie alla mappa $\mathring{D}^n \ni x \rightarrow x/(1 - \|x\|) \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) (U, ϕ) è detta *carta (topologica) locale* in x .
- (iii) Supponiamo che $\phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi': U' \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$ siano due carte locali in x . Allora $\phi(U \cap U')$ e $\phi'(U \cap U')$ sono due intorni aperti rispettivamente di $\phi(x)$ in \mathbb{R}^n e di $\phi'(x)$ in \mathbb{R}^m ; poichè $(\phi')^{-1} \circ \phi$ manda il primo intorno nel secondo, si ha $n = m$. Si può dunque definire la dimensione locale di X nel punto x con il simbolo $\dim_x(X)$; nel nostro caso data quantità equivale naturalmente ad n .
- (iv) Se X è uno spazio localmente euclideo e X è connesso, allora $X \ni x \rightarrow \dim_x(X) \in \mathbb{N}$ è costante.
- (v) Se X è localmente euclideo e connesso, allora è connesso per archi. Infatti, fissato $x \in X$ e definiamo $W_x := \{y \in X \mid \exists \gamma: I \rightarrow X \text{ t.c. } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$. W_x non è vuoto poichè $x \in W_x$. W_x è aperto. Sia $y \in W_x$. Allora esiste α che collega x con y . Poichè X è connesso, esiste β che collega y a z che è un punto appartenente all'intorno di y . Presa $\alpha * \beta: [0, 1] \rightarrow X$ funzione data da

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2(t - 1/2)) & \text{per } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

ho trovato che $z \in W_x$.

W_x è chiuso. Sia $y \notin W_x$. Allora $W_x \cap U_y = \emptyset$ per lo stesso ragionamento visto ora. Dunque $W_x = X$.

OSSERVAZIONE 2.1.2. Localmente euclideo non implica Hausdorff. Si consideri (\mathbb{R}, τ_e) ed $\{a, b\}$ con topologia discreta e si prenda $(\mathbb{R} \times \{a, b\}, \tau)$ con τ topologia prodotto. Se $r, s > 0$, definisco

$$(r, a) R (s, b) \Leftrightarrow r = s$$

Siano $X := \mathbb{R} \times \{a, b\}$ (R relazione agisce su X), $Y := X/R$, $\pi: X \rightarrow Y$. Si noti che

- $\pi(\mathbb{R} \times \{a\})$ è aperto in Y : $\pi^{-1}(\pi(\mathbb{R} \times \{a\})) = (\mathbb{R} \times \{a\}) \cup (\mathbb{R}^{(>0)} \times \{b\})$
- $Y = \pi(X) = \pi(\mathbb{R} \times \{a\}) \cup \pi(\mathbb{R} \times \{b\})$
- $\phi: \pi(\mathbb{R} \times \{a\}) \rightarrow \mathbb{R}$ è un omeomorfismo
 $\pi((r, a)) \rightarrow r$

Dunque Y è localmente euclideo. Tuttavia non è di Hausdorff. Sia U intorno aperto di $[(0, a)]_R \in Y$ e V di $[(0, b)]_R$. Allora, preso $\epsilon_a > 0$ opportuno, $\pi^{-1}(U) \supset (-\epsilon_a, \epsilon_a) \times \{a\}$; perciò $U \supset \pi((- \epsilon_a, \epsilon_a) \times \{a\})$. Analogamente, preso $\epsilon_b > 0$ opportuno, $\pi^{-1}(V) \supset (-\epsilon_b, \epsilon_b) \times \{b\}$; con $\epsilon := \min\{\epsilon_a, \epsilon_b\}$, si ricava l'inclusione $V \supset \pi((- \epsilon_b, \epsilon_b) \times \{b\}) \supset \pi((0, \epsilon) \times \{a\})$. D'altronde, $\pi((0, \epsilon) \times \{a\}) \subset U$; dunque $U \cap V \neq \emptyset$. Y non è di Hausdorff.

DEFINIZIONE 2.1.2. Una *varietà topologica* è uno spazio localmente euclideo, di Hausdorff, connesso e a base numerabile.

ESEMPI 2.1.1

- \mathbb{R}^n euclideo, $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \xrightarrow{id} \mathbb{R}^n)$ varietà topologica di dimensione n .
- $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ è varietà topologica di dimensione $2n$.
- $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|=1\}$. Considero $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ed $S = (0, 0, \dots, -1)$; esiste $\phi_N : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ omeomorfismo. Perciò, S^n tolto un punto è una varietà topologica.
- $\mathbb{R} \mathcal{P}^n = \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ (spazio proiettivo n -dimensionale sui reali, dunque $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$) si consideri $U_i := \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$ aperto di $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ per $i=0, \dots, n$. Ora, basta prendere

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

omeomorfismo. Si noti che $\mathbb{R}^n_{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 1\} \simeq \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$.

- Il prodotto topologico di due varietà topologiche è una varietà topologica.
- Siano \mathbb{R}^2 euclideo ed $L := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo R relazione di equivalenza su \mathbb{R}^2 ponendo

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in L$$

per $x, y \in \mathbb{R}^2$. Si noti che $[x]_R = x + L$. Siano ora $T := \mathbb{R}^2 / R = \mathbb{R}^2 / L$, che viene detto *toro*, e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ tale che $\pi(x) = [x]_R$. π è aperto: sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Vogliamo vedere che $\pi(U) \in \tau_T$, che equivale a dire $\pi^{-1}(\pi(U)) \in \tau_{\mathbb{R}^2}$; poichè $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{v \in L} (v + U) \in \tau_{\mathbb{R}^2}$, ho finito. $\forall x \in \mathbb{R}^2$, fissato $\epsilon \in (0, 1/2)$, posso prendere $B_x(\epsilon)$ che è tale che $B_x(\epsilon) \cap [y]_R = \{y\}$. $\forall y \in B_x(\epsilon)$, $\pi_x : B_x(\epsilon) \rightarrow \pi(B_x(\epsilon)) \subset T$ è biiettiva, e continua; inoltre manda aperti in aperti, ovvero è aperta. Dunque è un omeomorfismo.

Si noti che la figura descritta è proprio il toro: si prenda $Q := [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e si consideri Q/R . Si noti che ogni classe di \mathbb{R}^2/R ha almeno un rappresentante su Q/R ; dato che la relazione di equivalenza identifica i punti della frontiera uguali tra loro se hanno stessa ascissa od ordinata ed inoltre i vertici appartengono alla stessa classe, si vede che

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ Q/R & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

la funzione g rappresentata è proprio un omeomorfismo.

Vogliamo ora classificare le varietà topologiche per dimensioni. Partendo dalla 1-dimensionalità, si ha che queste varietà topologiche sono omeomorfe a \mathbb{R} o a S^1 .

Dirigiamo l'attenzione alle varietà topologiche 2-dimensionali compatte, ovvero le superfici compatte.

2.2. Superfici compatte

Esempi di superfici già viste sono S^2 , T e $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$, che tuttavia non sappiamo se siano o meno compatte. Verifichiamolo: anzitutto, $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$. Consideriamo

$$\begin{array}{ccc} S^2_+ & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ \downarrow \pi_{\text{antip}} & & \downarrow \pi_{\sim} \\ S^2_+ / \text{antip} & \xrightarrow{g} & \mathcal{P}^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

ove $S^2_+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ ed antip vuole indicare che π considera la configurazione antipodale.

Si verifica che g è un omeomorfismo.

OSSERVAZIONE 2.2.1: di tipo notazionale. Supponiamo di avere un poligono con un certo numero di lati e lo chiamiamo L . Eguagliamo alcuni lati tra loro ed i vertici come se fossero uno solo con la relazione R . La topologia di L/R è identificata universalmente da una sola parola associata, la quale ci dirà come i lati debbano essere letti: partendo da un vertice, leggo i vari lati ponendo esponente 1 se seguono la direzione di lettura scelta, esponente -1 altrimenti.

Siano S_1 e S_2 due superfici compatte e $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$. Prendo un intorno U_1 di x_1 ed un intorno U_2 di x_2 . Siano inoltre $h_1: U_1 \rightarrow D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ ed $h_2: U_2 \rightarrow D^2$. Consideriamo $Y := (S_1 \setminus \overset{\circ}{U}_1) \sqcup (S_2 \setminus \overset{\circ}{U}_2)$. Definiamo R relazione di equivalenza su Y ponendo:

$$\begin{aligned} - [x]_R &= \{x\} \text{ se } x \in (S_1 \setminus \overset{\circ}{U}_1) \sqcup (S_2 \setminus \overset{\circ}{U}_2) \\ - x R x' &\text{ con } x \in \partial U_1, x' \in \partial U_2 \text{ se } h_1(x) = h_2(x') \end{aligned}$$

Si definisce la *somma connessa* come $S_1 \# S_2 := Y/R$.

OSSERVAZIONE 2.2.2. $S_1 \# S_2$ è la somma connessa ed è ben definita a meno di omeomorfismi. $(S_1 \# S_2 \simeq S_2 \# S_1; (S_1 \# S_2) \# S_3 \simeq S_1 \# (S_2 \# S_3))$.

DEFINIZIONE 2.2.1. Siano $T_0 := \text{sfera} = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $T_1 := \text{toro}$ e, per $g \geq 1$, T_g la somma connessa di T_1 g -volte.

OSSERVAZIONE 2.2.3. T_g è la sfera con g -manici. Inoltre, $T_1 \simeq S^2 \# T$. Presa la sfera, infatti, ed eseguita la somma connessa con g tori, si ottiene T_g .

OSSERVAZIONE 2.2.4. Siano T_0 ed S una superficie topologica compatta. Vale:

$$T_0 \# S \simeq S$$

(Si ricordi che la costruzione è già stata vista dopo osservazione 2.2.1.). Dunque T_0 è l'“elemento neutro” della somma connessa.

ESEMPIO 2.2.1. Vogliamo fare in modo che $T_2 \simeq \text{Poligono} / \sim$. Anzitutto sappiamo che $T_2 := T_1 \# T_1$ e che T_1 è omeomorfo ad un quadrato con una relazione di equivalenza. Consideriamo un cerchio con il vertice del quadrato come punto sulla circonferenza (si vedano appunti di Occhetta, esempio 1.13). Togliendo la parte interna del cerchio, che chiameremo U_1 per il primo quadrato ed U_2 per il secondo, avremo che $T_1 \setminus \overset{\circ}{U}_1$ sarà omeomorfo ad un pentagono (si faccia sempre riferimento agli appunti di Occhetta), come $T_2 \setminus \overset{\circ}{U}_2$. Riprendendo lati e funzioni come negli appunti, avremo che la figura risultante sarà

$$(T_1 \setminus \overset{\circ}{U}_1) \sqcup (T_1 \setminus \overset{\circ}{U}_2) / \sim (a, b, c, d, \gamma)$$

Collegando i due lati γ , che sono in entrambi i pentagoni, otteniamo un ottagono regolare, ove γ divide in due la figura. A livello di lati, possiamo vedere che, con la notazione di osservazione 2.2.1,

$$aba^{-1}b^{-1} \# cd^{-1}c^{-1}d = ab a^{-1}b^{-1}c d^{-1}c^{-1}d$$

DEFINIZIONE 2.2.2. $U_1 := \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, per $h \geq 2$, $U_h := U_1 \# \dots \# U_1$, ovvero la somma connessa di U_1 h -volte.

ESEMPIO 2.2.2. Vogliamo identificare $U_2 = \text{poligono} / \sim$. Si ricordi che U_1 è omeomorfo ad un cerchio o-ve la circonferenza è divisa in due parti uguali che verranno visti come “i suoi lati”. Ricreando due cerchi all’interno come in esempio 2.2.1, creiamo un altro lato con la circonferenza di tale cerchio (si vedano gli appunti di Occhetta, esempio 1.15). Avremo due triangoli, da cui ricaviamo un quadrato prendendo come diagonale γ .

ESEMPIO 2.2.3: la bottiglia di Klein K . Presa la rappresentazione della bottiglia di Klein con un quadrato, possiamo vedere essa come la somma connessa di due spazi proiettivi: presa la diagonale del quadrato, è infatti possibile dividere il quadrato in due triangoli (appunti di Occhetta, esempio 1.17). Incollando i due triangoli sul lato b , si ottiene U_2 . Dunque la bottiglia di Klein è omeomorfa a U_2 , ovvero la somma connessa di due piani proiettivi.

Si noti che preso un punto interno al quadrato (omeomorfo alla bottiglia di Klein K) e considerata

$$\pi: Q = [0,1]^2 \rightarrow Q / \sim = K$$

Posso sempre trovare un disco $\pi(D)$ per cui D contiene il punto.

LEMMA 2.2.1. $T_1 \# U_1 \simeq U_3$, ovvero la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.

DIMOSTRAZIONE. $U_2 \simeq K$; dimostriamo che $T_1 \# U_1 \simeq K \# U_1$. $T_1 \# U_1 = aba^{-1}b^{-1}c^{-1}c^{-1}$, avendo eseguito un incollamento tra le figure $aba^{-1}b^{-1}$ e $c^{-1}c^{-1}$. Prendiamo d tale che si ottengano un pentagono con lati b, a, b, c, d e un triangolo con lati c, d, a . Incollando i due lati c , otteniamo l’esagono

$$dadbab^{-1}$$

Consideriamo ora $K \# U_1 = \delta\beta\delta^{-1}\beta\gamma^{-1}\gamma^{-1}$. Dividendo l’esagono con la diagonale α (lemma 1.18, appunti di Occhetta), troviamo due trapezi che, riassemblati collegando le due γ , danno

$$\alpha\delta\alpha\beta\delta\beta^{-1}$$

che è uguale alla parola ottenuta con $T_1 \# U_1$. Abbiamo dunque dimostrato la tesi.

PROPOSIZIONE 2.2.1. $T_g \# U_h \simeq U_{h+2g}$ per $g \geq 0, h \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE. Per $g=0$, ok. Vale anche per $g=1$ per lemma 2.2.1. Procedo per induzione e trovo

$$T_g \# U_h = T_{g-1} \# (T_1 \# U_1) \# U_{h-1} \simeq T_{g-1} \# (U_3 \# U_{h-1}) \simeq T_{g-1} \# U_{h+2} \simeq U_{h+2+2(g-1)} = U_{h+2g}$$

assumendo che $g \geq 2$. Ho quindi concluso.

$\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ E IL NASTRO DI MÖBIUS

Ricordiamo che $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo ad un cerchio $a^{-1}a^{-1}$ prendendo orientazione oraria. Prendo un cerchio vicino al punto P da una parte all’altra della stessa circonferenza. Chiamo Q_1 e Q_2 le intersezioni con la figura iniziale ed il primo semicerchio immerso; il lato interno lo chiamerò γ_1 ; dall’altra parte procedo analogamente; rimangono ovviamente Q_1 e Q_2 , mentre l’altro lato lo chiamo γ_2 .

Ottingo perciò due semicerchi, che sommati mi danno un cerchio $\gamma_2\gamma_1$ (senso orario) con vertici Q_1, Q_2 ; P sarà il centro di questo cerchio. La parte tralasciata della figura iniziale forma il nastro di Möbius: ho infatti la configurazione $\gamma_2 a \gamma_1^{-1} a$.

Poichè il piano proiettivo è omeomorfo ad un cerchio ed al nastro di Möbius ed essi hanno un’unica faccia, si ottiene che $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ ha una sola faccia e non è orientabile.

OMOTOPIA

Il toro e la sfera non sono omeomorfi; vogliamo studiare questo tipo di comportamento in maniera formale.

3.1 Omotopia di applicazioni continue

DEFINIZIONE 3.1.1. Siano X e Y due spazi topologici e siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: X \rightarrow Y$ due applicazioni C^0 . Diciamo che f è *omotopa* a g , $f \sim g$, se $\exists F: X \times I \rightarrow Y$ (per I si intenderà sempre l'intervallo $[0,1]$ con topologia euclidea) continua t.c.

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

Per ogni $x \in X$. In simboli posso scrivere $F: f \sim g$ per indicare che F soddisfa questa proprietà.

ESEMPIO 3.1.1

- 1) $X = Y = D^n \subset \mathbb{R}^n$, $id_{D^n}(x) = x$; $c_0(x) = 0$. Possiamo prendere $F: D^n \times [0,1] \rightarrow D^n$ t.c. $F(x, t) = (1-t)x$
- 2) $X = Y = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = x/\|x\|$. $f \sim id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, infatti posso prendere $F(x, t) = (1-t)x/\|x\| + tx$.
- 3) $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$. Voglio mostrare che $id_{S^{2k-1}} \sim a_{2k-1}$ con $a_{2k-1}(x) = -x$, ovvero identifica l'opposto. Vale che $S^{2k-1} = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1\}$ dato che $\mathbb{R}^{2k} \simeq \mathbb{C}^k$. $F(z) = e^{\pi i} z$.
- 4) Sia X uno spazio topologico qualsiasi e sia $f: I \rightarrow X$ un arco continuo; $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$. Consideriamo $F(s, t) := f(s(1-t))$ continua. Segue che $F: f \sim c_{x_0}$, ove $c_{x_0}(x) = x_0$.

La definizione precedente non chiarisce nulla: si può ridurre qualsiasi arco alla funzione costante.

DEFINIZIONE 3.1.2. Siano $f, g: X \rightarrow Y$ continue e sia $A \subset Y$. Diciamo che f è *omotopa relativamente ad* A , in simboli $f \sim g \text{ rel. } A$, se esiste $F: X \times I \rightarrow Y$ continua t.c. $F: f \sim g$ e

$$F(a, t) = f(a) \quad \forall (a, t) \in A \times I$$

OSSERVAZIONE 3.1.1. Se $f \sim g \text{ rel. } A$, allora $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$.

DEFINIZIONE 3.1.3. Se $f, g: I \rightarrow X$ sono archi con stesso punto iniziale e stesso punto finale, ovvero

$$f(0) = g(0), \quad f(1) = g(1),$$

allora f è *omotopa a* g *relativamente a* $\{0,1\}$ se $\exists F: I \times I \rightarrow X$ continua t.c. $F: f \sim g$ ed inoltre

$$F(0, t) = f(0) = g(0), \quad F(1, t) = f(1) = g(1)$$

OSSERVAZIONE 3.1.2. L'omotopia (relativa a $\{0,1\}$) è una relazione d'equivalenza. Studiamo l'equivalenza omotopica.

DEFINIZIONE 3.1.4. Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che X e Y sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni continue $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ t.c.

$$g \circ f \sim id_X, \quad f \circ g \sim id_Y$$

Si dice inoltre che f e g sono *equivalenze omotopiche*. In simboli, l'equivalenza omotopica si scrive $X \sim Y$.

OSSERVAZIONE 3.1.3. L'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza tra spazi topologici.

OSSERVAZIONE 3.1.4

1) X e Y omeomorfi implica omotopicamente equivalenti.

2) $n \geq 1$; $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ è omotopicamente equivalente ad un punto. Cerchiamo

$$f: D^n \rightarrow \{0\}, \quad g: \{0\} \rightarrow D^n$$

Scegliamo $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$. Osservo che $f \circ g: \{0\} \rightarrow \{0\}$ è dunque uguale ad $id_{\{0\}}$; avrò $f \circ g \sim id_{\{0\}}$.

Inoltre, $g \circ f: D^n \rightarrow D^n$ è t.c. $g \circ f(x) = 0$ per ogni $x \in D^n$; $g \circ f \sim id_{D^n}$, basta prendere $F(x, t) = xt$.

DEFINIZIONE 3.1.5. Se X è omotopicamente equivalente ad un punto, allora si dice *contraibile*.

ESEMPIO 3.1.2. Sia $n \geq 1$; $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$. Sia $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'identità e $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ tale che $g(x) = x/\|x\|$. Vale che $g \circ f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ è t.c. $g \circ f = id_{S^{n-1}}$; $g \circ f \sim id_{S^{n-1}}$. $f \circ g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è t.c. $f \circ g(x) = x/\|x\|$, che abbiamo già visto essere omotopica rispetto all'identità.

3.2. Retratti

DEFINIZIONE 3.2.1. Sia X uno spazio topologico e sia A un sottospazio di X . Un'applicazione continua

$$r: X \rightarrow A$$

si dice una *retrazione* di X su A se $r(x) = x \quad \forall x \in A$. Equivalentemente, $r \circ i = id_A$ dove $i: A \rightarrow X$ è l'inclusione. Se esiste una retrazione di X su A si dice che A è un *retrato* di X .

A si dice *retrato di deformazione* di X se esiste una retrazione $r: X \rightarrow A$ t.c. $i \circ r \sim id_X$.

OSSERVAZIONE 3.2.1. Se A è un retratto di deformazione di X , allora A e X sono omotopicamente equivalenti.

OSSERVAZIONE 3.2.2. Siano \mathbb{R}^n euclideo, $X \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset X$, $\exists r: X \rightarrow A$ retrazione. Supponiamo che, per ogni $x \in X$, il segmento $[x, r(x)] \subset X$. Allora A è un retratto di deformazione di X .

Infatti, basta vedere

$$1) r \circ i = id_A$$

$$2) (i \circ r: X \rightarrow X) \sim id_X$$

La 1 vale per ipotesi; per la 2 si prenda $F: X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, t) = (1-t)r(x) + tx$. Da qui la tesi.

ESEMPIO 3.2.1

1) Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ stellato ed $A = \{C\}$ ove C è il centro di X . $r: X \rightarrow A$ t.c. $r(x) = C$. Poichè per definizione di stellato vale anche l'inclusione del segmento in X , $\{C\}$ è retratto di deformazione di X .

2) S^1 è retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Prendiamo $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$; possiamo considerare due circonferenze con centro uno P ed uno Q ; avremo $A = S^1 \vee S^1$ retratto di deformazione di X .

3) Prendiamo $T = Q/\sim_{a,b}$ toro, con $Q = I^2$. Siano $L := \{0\} \times I$ e $\sim_a := \sim_{a,b} \mid_L$. Considerato

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} Q \\ (x,y) \\ \downarrow \pi \end{array} & \xrightarrow{r} & \begin{array}{c} L \\ (0,y) \\ \downarrow \pi_{\sim_a} \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ [(x,y)]_{\sim_{a,b}} \end{array} & \xrightarrow{g} & \begin{array}{c} L/\sim_a \\ [(0,y)]_{\sim_a} \end{array} \end{array}$$

abbiamo che L/\sim_a è retrato di T .

- 4) Supponiamo che X sia un $2k$ -agone (poligono connesso con $2k$ lati) privato di un punto interno Q , dotato di una relazione di equivalenza R che identifica a due a due i lati e tutti i vertici ad un unico punto. Definiamo $R' := R \cap (\partial X \times \partial X)$, ovvero la relazione R ristretta al bordo. Ciascuno dei k lati, associati a un lato ciascuno, forma un S^1 . Otteniamo quindi che $\partial X/R' = S^1 \vee \dots \vee S^1$, ovvero $2k$ -bouquet di S^1 . Sia $r(x)$ una funzione che parte da Q passa su X e raggiunge ∂X . Otteniamo che $r: X \rightarrow \partial X$. Dunque ∂X , il bordo del poligono, è retrato di X . Per osservazione 3.2.2 abbiamo che, presa $i: \partial X \rightarrow X$ funzione inclusione, ho che $F: X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, t) = (1-t)x + (i \circ r)(x)t$ è un'omotopia tra l'identità di X ed $i \circ r$. Da questa F , possiamo ottenere

$$\tilde{F}: \frac{X}{R} \times I \rightarrow \frac{X}{R}$$

$([x]_R, t) \mapsto [F(x, t)]_R$

omotopia. La buona definizione la si ha poichè r è una retrazione e dunque $r(x) = x$ per ogni $x \in \partial X$, mentre per i punti interni ho classi diverse. Si provi a dimostrare che è un'omotopia. Si ha dunque che $\partial X/R$ è retrato di deformazione di X/R .

Per quanto appena detto, abbiamo che $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{Q\} \sim S^1$.

3.3. CW-complessi

Occupiamoci di *collassamento di sottospazi*. Prendo uno spazio topologico X ed un sottospazio A di X contraibile. Vogliamo definire X/A . Consideriamo R_A relazione di equivalenza su X t.c. $xR_A x'$ se e solo se $x = x' \notin A$ o $x, x' \in A$; cioè $[x]_{R_A} = \{x\}$ se $x \in X \setminus A$, $[x]_{R_A} = A$ se $x \in A$; dunque diremo che

$$\frac{X}{A} := \frac{X}{R_A}$$

Esistono esempi di X e A tali che X non è omotopicamente equivalente ad X/A anche se A è contraibile. Si consideri la seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.3.1: Spazi topologici di "aggiunzione" (adjunction space). Siano X spazio topologico, A sottospazio topologico di X e $f: A \rightarrow Y$ applicazione continua tra spazi topologici. Abbiamo dunque il sistema topologico

$$X \supset A \xrightarrow{f} Y$$

che induce la relazione di equivalenza su $X \sqcup Y$ (somma topologica), che indicheremo con R_f , t.c.

$$\begin{aligned} [x]_{R_f} &:= \{x\} && \text{se } x \in X \setminus A \\ [y]_{R_f} &:= \{y\} && \text{se } y \in Y \setminus f(A) \\ [x]_{R_f} &:= f^{-1}(f(x)) \cup \{f(x)\} && \text{se } x \in A \end{aligned}$$

Si osservi che $[y]_{R_f} = f^{-1}(y) \cup \{y\}$ se $y \in f(A)$. $X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/R_f$ si dice spazio di aggiunzione di X con Y lungo f .

ESEMPIO 3.3.1. Sia $X = D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \supset A := S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Supponiamo che Y sia un Hausdorff compatto. Considero $f: S^{n-1} \rightarrow Y$. Considero anche $\Pi_f: D^n \sqcup Y \rightarrow D^n \sqcup Y/R_f$. Vale che:

- 1) $D^n \sqcup Y/R_f$ è Hausdorff compatto.
- 2) La restrizione $\Pi_f|_Y: Y \rightarrow \Pi_f(Y)$ è un omeomorfismo.

DEFINIZIONE 3.3.2. Uno spazio topologico X si dice *CW-complesso* di dimensione $N \in \mathbb{N}$ se vale la seguente costruzione:

- 1) $X^0 \neq \emptyset$ è uno spazio topologico finito e discreto.
- 2) Per $0 < n \leq N$, X^n è lo spazio topologico ottenuto da X^{n-1} eseguendo l'aggiunzione di X^{n-1} con un numero finito di sistemi topologici $D_i^n \supset S_i^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ (con funzioni f_i continue). In formula, $X^n := (\sqcup_{i=1}^k D_i^n) \cup_{\sqcup_{i=1}^k f_i} X^{n-1}$.
- 3) $X = X^N$ a meno di omeomorfismi.

Il sottospazio X^n è detto *n-scheletro* di X . Ad ogni passaggio,

$$\Phi_i^n: D_i^n \rightarrow (\sqcup_{i=1}^k D_i^n) \sqcup X^{n-1} \rightarrow X^n \rightarrow X^N = X$$

è detta *mappa caratteristica*. Una cella aperta (chiusa) è l'immagine tramite una mappa caratteristica del disco aperto (chiuso).

OSSERVAZIONE 3.3.1. $\pi_n: (\sqcup_{i=1}^k D_i^n) \sqcup X^{n-1} \rightarrow X^n$ è tale che la restrizione $\pi_n|: X^{n-1} \rightarrow \pi_n(X^{n-1})$ è un omeomorfismo, come può risultare naturale da esempio 3.3.1.

Non è detto che X^n per $n > 0$ sia diverso dal vuoto.

ESEMPI 3.3.2

- 1) S^1 è un CW-complesso, poichè posso prendere $X^1 = D_1^1 \cup_{f_1} X^0 \simeq S^1$ con $f_1: S_1^0 \rightarrow X^0$ costante, X^0 uguale ad un punto.
- 2) Si vuole vedere se il disco D^n è un CW-complesso. Costruiamo $\partial D^n = S^{n-1}$ come CW-complesso. Sia $X^{n-1} = S^{n-1}$; $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{\phi} X^{n-1}$ con ϕ identità. Si ottiene D^n come CW-complesso.
- 3) Bouquet di k circonferenze. Sia X^0 un punto e poi si prendano k sistemi topologici del tipo

$$D^1 \supset S^0 \xrightarrow{\phi_i} X^0$$

Poichè X^0 è un punto, le mappe ϕ_i sono costanti. Otteniamo quindi una 0-cella e k 1-celle.

- 4) Toro. Data figura è stata vista come un quadrato su una relazione di equivalenza; vogliamo vederlo come un CW-complesso. Si prendano una 0-cella, che corrisponde al vertice del quadrato, due 1-celle, che sono i lati (a, b) del quadrato (si vedano gli appunti di Occhetta). Vogliamo vedere i due lati a, b come due circonferenze distinte. Scriviamo dunque le equazioni analitiche della mappa f che svolge quanto vogliamo. Per $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(t) = \begin{cases} (\cos(4t + \pi) + 1, \sin(4t + \pi)) & t \in [0, \pi/2) \\ (\cos(4t) - 1, \sin(4t)) & t \in [\pi/2, \pi) \\ (\cos(4t + \pi) + 1, \sin(4t)) & t \in [\pi, 3\pi/2) \\ (\cos(4t) - 1, \sin(4t + \pi)) & t \in [3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

Si noti che per questa funzione abbiamo considerato che $Q := I \times I \simeq D^2$. Vogliamo avere il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} I \times I \simeq D^2 & \xrightarrow{i} & D^2 \sqcup X^1 \\ \downarrow \sim & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\text{omeomorfismo}} & D^2 \cup_f X^1 \end{array}$$

Ci domandiamo: il morfismo i passa al quoziente? Le classi a sinistra sono mandate in classi a destra? Per i punti interni non ci sono problemi; poichè $f(x_1) = f(x_2) = y$ per ogni x_1, x_2 sulla frontiera. Se ne dedu-

ce che posso rispondere affermativamente alle due domande appena poste. Ci chiediamo ora se $\pi|_{D^2}$ è suriettiva, che è vero per costruzione. Per ogni $z \in D^2 \cup_f X^1$ esiste $x \in D^2$ tale che $f(x) = z$. Perciò è verificata l'esistenza dell'omeomorfismo che completa il diagramma.

DEFINIZIONE 3.3.3. Sia X un CW-complesso finito. $A \subset X$ si dice *sottocomplesso* se è l'unione finita di celle chiuse.

TEOREMA 3.3.1. Siano X un CW-complesso ed $A \subset X$ un sottocomplesso contraibile. Allora X è omotopicamente equivalente ad X/A .

Classificazione dei CW-complessi di dimensione 1

DEFINIZIONE 3.3.4. Un *grafo* è una coppia ordinata (V, E) , dove V è un insieme finito (detto *insieme dei vertici*) ed E è l'insieme finito di coppie (v, w) con $v, w \in V$ (detto *insieme degli archi*). Per ogni $v \in V$, $\deg_G v := \#$ archi che hanno v come estremo.

DEFINIZIONE 3.3.5. Un grafo G si dice *connesso* se il CW-complesso associato è complesso, ovvero se per ogni $v, w \in V$ esiste una catena $v = v_0, v_1, \dots, v_n = w$ per cui per ogni i si ha $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

DEFINIZIONE 3.3.6. Un grafo connesso senza cicli si dice *albero*. Per ciclo si intende una catena

$$v_0, \dots, v_n$$

con $v_0 = v_n$, $v_i \neq v_j$ per ogni $i, j \neq 0, n$ ed inoltre $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

DEFINIZIONE 3.3.7. Siano G un grafo e $T \subset G$ un albero sottografo di G . Si dice *albero di copertura* se l'insieme dei vertici di T coincide con l'insieme dei vertici di G , ovvero $V(T) = V(G)$.

PROPOSIZIONE 3.3.1. T è un albero se e solo se T è connesso e $|V|(T) = |E|(T) + 1$.

TEOREMA 3.3.2. Ogni grafo connesso e finito G ha un albero di copertura.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo T l'insieme degli alberi di G ; si noti che esso non è vuoto, poichè un punto è un albero, ed è finito, poichè lo è anche G . Esiste inoltre $F \in T$ tale che

$$|V(F)| \geq |V(T)|$$

per ogni $T \in T$. Affermo che F è di copertura e procedo per assurdo.

Supponiamo che esista $v \in V(G)$ tale che $v \notin V(F)$. Essendo G connesso, per ogni $w \in F$ esiste una catena $v = v_0, \dots, v_n = w$ con $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$. Per semplicità, suppongo che $n = 1$. Poichè $(v, w) \in E(G)$, allora $F \cup \{v\} = (V(F) \cup \{v\}, E(F) \cup \{(v, w)\})$ è un albero. Assurdo perchè $|V(F \cup \{v\})| > |V(F)|$.

TEOREMA 3.3.3. Sia X CW-complesso connesso con n 0-celle ed m 1-celle. Allora X è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso con 1 0-cella e $m - n + 1$ 1-celle.

Preso un X CW-complesso connesso, posso vederlo come un grafo connesso e dunque posso trovare un albero di copertura A che è contraibile; poichè identifico tutti i punti fra di loro ed elimino degli archi, ne ri-

cavo l'idea della tesi.

GRUPPO FONDAMENTALE

4.1. Gruppo fondamentale - Il funtore π_1

Sia (X, x_0) uno *spazio topologico puntato*, cioè X è uno spazio topologico e $x_0 \in X$. Un arco continuo

$$\alpha: I \rightarrow X \text{ t.c. } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0$$

si dice *laccio* di X con punto base x_0 .

Indichiamo con $\mathcal{L}_{x_0}(X)$ ($\mathcal{L}(X, x_0)$) l'insieme di tutti i lacci di X con punto base x_0 . Si definisce

$$\pi_1(X, x_0) := \mathcal{L}_{x_0}(X) / \sim$$

dove \sim è la relazione relativa a $\{0, 1\}$. Se

$$\rho: \mathcal{L}_{x_0}(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

è la mappa di passaggio al quoziente, allora $\rho(\alpha) = [\alpha]$. Definiamo su $\pi_1(X, x_0)$ una struttura di gruppo.

Definiamo dunque il prodotto

$$\cdot: \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \text{ t.c. } \pi_1([\alpha], [\beta]) = [\alpha * \beta] \in \mathcal{L}_{x_0}(X)$$

dove $\alpha * \beta: I \rightarrow X$,

$$(\alpha * \beta)(s) := \begin{cases} \alpha(2s) & \text{se } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2(s-1/2)) & \text{se } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Si noti che $\alpha(1) = \beta(0)$. Si vede subito che l'arco è continuo ed è sicuramente un laccio.

OSSERVAZIONE 4.1.1. Si osservi che \cdot è ben definito: presi $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ archi continui in X tali che $\alpha \sim \alpha' \text{ rel } \{0, 1\}$, $\beta \sim \beta' \text{ rel } \{0, 1\}$; si ha inoltre $\alpha(1) = \alpha'(1) = \beta(0) = \beta'(0)$. Allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \text{ rel } \{0, 1\}$

Dimostriamo: per ipotesi, esistono $F: \alpha \sim \alpha' \text{ rel } \{0, 1\}$, $G: \beta \sim \beta' \text{ rel } \{0, 1\}$. Devo trovare un'omotopia ove a quota 0 devo avere $\alpha * \beta$ ed a quota 1 $\alpha' * \beta'$. Sia

$$H(s, t) := \begin{cases} F(2s, t) & \text{se } (s, t) \in [0, 1/2] \times I \\ G(2s-1, t) & \text{se } (s, t) \in [1/2, 1] \times I \end{cases}$$

Si noti che le due parti si "incollano" perfettamente. Si vede che $H: \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \text{ rel } \{0, 1\}$.

DEFINIZIONE 4.1.1. Sia $\alpha: I \rightarrow X$ un arco continuo di X . Definiamo l'*arco inverso* $\bar{\alpha}$ ponendo

$$\bar{\alpha}(s) := \alpha(1-s)$$

TEOREMA 4.1.1. Siano α, β, γ tre archi continui in X tali che

$$\alpha(0) = x_0, \quad \alpha(1) = \beta(0) = x_1, \quad \beta(1) = \gamma(0) = x_2, \quad \gamma(1) = x_3$$

per qualche $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$. Indichiamo con $\epsilon_{x_0}: I \rightarrow X$ la mappa che ha immagine costante x_0 . Valgono:

- 1) $\epsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \epsilon_{x_1} \text{ rel } \{0, 1\}$
- 2) $\alpha * \bar{\alpha} \sim \epsilon_{x_0} \text{ rel } \{0, 1\}$, $\bar{\alpha} * \alpha \sim \epsilon_{x_1} \text{ rel } \{0, 1\}$
- 3) $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma) \text{ rel } \{0, 1\}$

DIMOSTRAZIONE. Prima dobbiamo dimostrare un lemmine. Sia α come sopra e sia $\phi: I \rightarrow I$ continua tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$, ovvero una "riparametrizzazione". Allora $\alpha \circ \phi \sim \alpha \text{ rel } \{0, 1\}$.

Dimostriamo questo fatto. Abbiamo che $\alpha = \alpha \circ id_I \sim \alpha \circ \phi \text{ rel } \{0, 1\}$ poichè

$$F: I \times I \rightarrow X \text{ t.c. } F(s, t) = \alpha(s(1-t) + \phi(s)t)$$

è un'applicazione continua ed inoltre $F: \alpha \sim \alpha \circ \phi \text{ rel } \{0,1\}$.

Dimostriamo ora il teorema:

1) Dobbiamo vedere che $\epsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha \text{ rel } \{0,1\}$, $\alpha * \epsilon_{x_1} \sim \alpha \text{ rel } \{0,1\}$. Vorrei trovare ϕ tale che $\alpha \circ \phi = \epsilon_{x_0} * \alpha$.

Basta prendere $\phi(s) = 0$ per $s \in [0, 1/2]$ e $\phi(s) = 2s$ per $s \in [1/2, 1]$. Per la seconda relazione, devo trovare ϕ tale che $\alpha * \epsilon_{x_1} = \alpha \circ \phi$. Basta prendere $\phi(s) = 1$ per $s \in [1/2, 1]$ e $\phi(s) = 2s$ per $s \in [0, 1/2]$.

2) Devo dimostrare che $\alpha * \bar{\alpha} \sim \epsilon_{x_0} \text{ rel } \{0,1\}$. Prendo

$$F(s, t) := \begin{cases} x_0 & s \in [0, t/2] \\ \alpha(2s - t) & s \in [t/2, 1/2] \\ \bar{\alpha}(2s + t - 1) & s \in [1/2, (2-t)/2] \\ x_0 & s \in [(2-t)/2, 1] \end{cases}$$

3) Prendo

$$\Phi(s) = \begin{cases} 2s & s \in [0, 1/4] \\ s + \frac{1}{4} & s \in [1/4, 1/2] \\ \frac{s+1}{2} & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

COROLLARIO 4.1.1. $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo tale che

- $[\epsilon_{x_0}] = 1$
- $[\alpha] = [\bar{\alpha}]$
- “.” è associativo.

Questo gruppo è detto *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di X con punto base x_0 .

Vogliamo ora studiare la relazione tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ con $x, y \in X$.

Anzitutto, appare chiaro che se x, y non sono nella stessa componente connessa per archi, allora non ci potrà essere una relazione fra i due gruppi.

Supponendo invece che esista $f: I \rightarrow X$ continua tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$, allora definiamo

$$u_f: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$$

ponendo $u_f([\alpha]) := [\bar{f} * \alpha * f]$. Si noti che senza quadra non ha senso, mentre per il punto 3 di teorema

4.1.1 sotto la relazione ha senso. Dunque u_f è ben definito. Si ha che u_f è un isomorfismo con

$$u_f^{-1} = u_{\bar{f}}$$

Dimostriamo che u_f è un omomorfismo: siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x)$.

$$\begin{aligned} u_f([\alpha][\beta]) &= u_f([\alpha * \beta]) = [\bar{f} * \alpha * \beta * f] = [\bar{f} * \alpha * \epsilon_{x_0} * \beta * f] = [\bar{f} * \alpha * f * \bar{f} * \beta * f] = \\ &= [\bar{f} * \alpha * f][\bar{f} * \beta * f] = u_f([\alpha])u_f([\beta]) \end{aligned}$$

Rimande da dimostrare che $u_{\bar{f}} \circ u_f = id_{\pi_1(X, x)}$, che è ovvio. Otteniamo che $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$.

4.2. Omomorfismo indotto da una applicazione continua

Sia $f: (X, x) \rightarrow (Y, f(x))$ una applicazione continua. Sarà vero che l'applicazione

$$f_* = \pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x)) \text{ t.c. } f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$$

è ben definita ed è un omomorfismo?

Verifichiamo la buona definizione:

Supponiamo che esista $F : \alpha \sim \alpha' \text{ rel } \{0,1\}$ con $\alpha, \alpha' \in \mathcal{L}_x(X)$ tali che $[\alpha] = [\alpha']$. Voglio dimostrare che $f \circ a \sim f \circ \alpha' \text{ rel } \{0,1\}$; mi basta prendere $f \circ F$.

Dobbiamo ora far vedere che è un omomorfismo.

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_*([\alpha])f_*([\beta])$$

Da ora f_* si chiama *omomorfismo indotto* da f .

“Categorie”

La topologia puntata $Top = (Obj(Top), Morph(Top))$, ovvero è formata da tutti gli spazi topologici puntati e le applicazioni continue tra spazi topologici puntati.

La categoria dei gruppi $G = (Obj(G), Morph(G))$ è invece formata dai gruppi e dagli omomorfismi tra gruppi.

Stiamo per definire il cosiddetto “funttore” $\pi_1 : Top \rightarrow G$. Esso è tale che

$$\begin{aligned} \pi_1((X, x)) &:= \pi_1(X, x) \in Obj(G) \text{ con } (X, x) \in Obj(Top), \\ \pi_1(f) &:= f_* \in Morph(G) \text{ con } f \in Morph(Top) \end{aligned}$$

Per essere un funttore deve valere che, come prima proprietà, quando si ha la relazione

$$(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y) \xrightarrow{g} (Z, z)$$

Allora si ottiene anche

$$\pi_1(X, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y) \xrightarrow{g_*} \pi_1(Z, z)$$

Dunque $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Infatti, $(g \circ f)_*([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = g_*[f \circ \alpha] = g_*(f_*[\alpha])$

La seconda proprietà richiede invece la seguente uguaglianza

$$id_{\pi_1(X, x)} = (id_X)_*$$

LEMMA 4.2.1. Supponiamo che A sia un retrato di X . Sia $i : A \rightarrow X$ l'inclusione e sia $r : X \rightarrow A$ una re-trazione di X su A . Fissiamo $a \in A$. Allora

$$i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

è iniettiva, mentre

$$r_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$$

è suriettiva.

DIMOSTRAZIONE. Vale che $r \circ i = id_A$;

$$(A, a) \xrightarrow{i} (X, a) \xrightarrow{r} (A, a)$$

Applicando π_1 , otterremo che

$$\pi_1(A, a) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, a)$$

Dunque $(id_A)_* = id_{\pi_1(A, a)}$ se e solo se $r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A, a)}$. Da qui la tesi.

OSSERVAZIONE 4.2.1. Siano X e Y omeomorfi e connessi per archi. Allora $\pi_1(X)$ è isomorfo a $\pi_1(Y)$. $\pi_1(X)$ è uguale a $\pi_1(X, x)$ a meno di isomorfismi. Vale che

$$(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y) \xrightarrow{g=f^{-1}} (X, x)$$

Perciò $f_* = (f^1)_*$, dato che la composizione è uguale a id_X . Se X, Y non sono connessi per archi, posso considerare le loro componenti connesse.

4.3. Invarianza omotopica del gruppo fondamentale

LEMMA 4.3.1. Siano $\Phi, \Psi : X \rightarrow Y$ applicazioni continue fra spazi topologici X e Y tali che esista

$$F : \Phi \sim \Psi$$

Siano $x_0 \in X$ ed $f : I \rightarrow Y$ tale che $f(t) = F(x_0, t)$.

Allora il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_*} & \pi_1(Y, \Phi(x_0)) \\ \Psi_* \searrow & & \nearrow u_f \\ & \pi_1(Y, \Psi(x_0)) & \end{array}$$

Allora $u_f \circ \Phi_* = \Psi_*$

DIMOSTRAZIONE. Devo dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathcal{L}_{x_0}(X)$, vogliamo che valga

$$\Psi_*([\alpha]) = [\Psi \circ \alpha] = [(\bar{f} * (\Phi \circ \alpha)) * f] = (u_f \circ \Phi_*)[\alpha]$$

Vediamo se $[\Phi \circ \alpha] = [(\bar{f} * (\Phi \circ \alpha)) * f]$. Per ogni $t \in X$, considero il laccio

$$I \ni s \rightarrow (\alpha(s), t) \rightarrow F(\alpha(s), t)$$

Considero ϵ_{y_0} ove $y_0 = \Psi(x_0)$. Vale che

$$((\bar{f} * (\Phi \circ \alpha)) * f)(s) := \begin{cases} F(x_0, 1-4s) & s \in [0, 1/4] \\ F(\alpha(4s-1), 0) & s \in [1/4, 1/2] \\ F(x_0, 2s-1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Ed inoltre,

$$((\epsilon_{y_0} * (\Psi \circ \alpha)) * \epsilon_{y_0})(s) := \begin{cases} F(x_0, 1) & s \in [0, 1/4] \\ F(\alpha(4s-1), 1) & s \in [1/4, 1/2] \\ F(x_0, 1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Da cui definisco $H : I \times I \rightarrow Y$ che mi darà l'omotopia cercata:

$$H(s, t) := \begin{cases} F(x_0, (1-4s)(1-t) + t) & s \in [0, 1/4] \\ F(\alpha(4s-1), t) & s \in [1/4, 1/2] \\ F(x_0, (2s-1)(1-t) + t) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

TEOREMA 4.3.1: Teorema di invarianza omotopica del π_1 . Sia $\phi : X \rightarrow Y$ una equivalenza omotopica tra spazi topologici e sia $x \in X$. Allora $\phi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x))$ è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Esiste $\psi : Y \rightarrow X$ tale che $\psi \circ \phi \sim id_X$ e $\phi \circ \psi \sim id_Y$. Applichiamo il lemma 4.3.1.

$$(X, x) \xrightarrow{\phi} (Y, \phi(y)) \xrightarrow{\psi} (X, \psi(\phi(x)))$$

Otteniamo quindi

$$\pi_1(X, x) \xrightarrow{\phi_*} \pi_1(Y, \phi(x)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi(\phi(x)))$$

Che complessivamente è la funzione $(\psi \circ \phi)_*$. Perciò posso prendere $id_{\pi(X,x)} = (id_X)_*$ manda $\pi_1(X, x)$ in se stesso e $u_f: \pi_1(X, \psi(\phi(x))) \rightarrow \pi_1(X, x)$. Dunque $\psi_* \circ \phi_* = (u_f)^{-1}$ che è un isomorfismo. Perciò ψ_* è suriettiva. Ora applichiamo il lemma a $\phi \circ \psi \sim id_Y$:

$$\pi(Y, \phi(x)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi(\phi(x))) \xrightarrow{\phi_*} \pi_1(X, \phi(\psi(\phi(x))))$$

Si noti che $\phi_* = \pi_1(\phi, \psi(\phi(x)))$. Tramite l'identità $id_{\pi_1(Y, \phi(x))}$, mando $\pi(Y, \phi(x))$ in se stesso ed inoltre $u_g: \pi_1(X, \phi(\psi(\phi(x)))) \rightarrow \pi(Y, \phi(x))$. Quindi $\phi_* \circ \psi_*$ è isomorfismo. Perciò ψ_* è iniettiva.

VERSO SEIFERT-VAN KAMPEN

5.1. Gruppi con presentazione

Sia $S = \{x_i\}_{i \in I}$ un insieme. Consideriamo l'insieme delle parole associate ad S :

$$x_{i_1}^{\epsilon(i_1)} x_{i_2}^{\epsilon(i_2)} x_{i_3}^{\epsilon(i_3)} \dots x_{i_k}^{\epsilon(i_k)}$$

tali che $\epsilon(i_h) \in \{1, -1\}$: perciò avrò o $x_i^1 = x_i$ o x_i^{-1} . $\{x_i, x_i^{-1}\}_{i \in I}$ è detto *alfabeto* di S . W è definito come l'insieme delle parole di S . Anche la parola vuota appartiene a W .

Definiamo una relazione di equivalenza \sim su W ponendo

$$w_1 \sim w_2$$

se posso ottenere w_1 a partire da w_2 con un numero finito di operazioni elementari: posso inserire o cancellare $x_i x_i^{-1}, x_i^{-1} x_i$.

Su W/\sim definiamo la seguente operazione di gruppo: prese $w_1, w_2 \in W$, allora

$$[w_1]_{\sim} \cdot [w_2]_{\sim} := [w_1 w_2]_{\sim}$$

Si ottiene che $(W/\sim, \cdot)$ è un gruppo con $1 := [\text{parola vuota}]_{\sim}$ e viene detto *gruppo libero generato* da S , che viene indicato con $\langle S \rangle$ o $\langle S \mid \emptyset \rangle$. D'ora in poi si utilizzeranno le parole per indicare le loro classi. Prendendo una parola generica, vale

$$(x_{i_1}^{\epsilon(i_1)} x_{i_2}^{\epsilon(i_2)} x_{i_3}^{\epsilon(i_3)} \dots x_{i_k}^{\epsilon(i_k)})^{-1} = x_{i_k}^{-\epsilon(i_k)} \dots x_{i_2}^{-\epsilon(i_2)} x_{i_1}^{-\epsilon(i_1)}$$

ESEMPI 5.1.1. Come esempi per ottenere un gruppo libero generato, possiamo prendere

$$S = \emptyset, \langle S \rangle = \{1\},$$

$$S = \{x\}, \langle S \rangle = \{1, x, x^{-1}, xx, x^{-1}x^{-1}, \dots\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^{-1}, x^{-2}, \dots\} \simeq \mathbb{Z}$$

$$S = \{x, y\}, \langle S \rangle = \{1, x, y, x^{-1}, y^{-1}, xy, yx, \dots\} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

$$S = \{x_1, \dots, x_n\}, \langle S \rangle = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{*n}$$

Siano $S = \{x_i\}_{i \in I}, \{x_i, x_i^{-1}\}_{i \in I}$ alfabeto indotto da S e W l'insieme delle parole. Scegliamo $R \subset W$. Definiamo una relazione di equivalenza su W ponendo

$$w_1 \sim_R w_2$$

se posso ottenere w_1 a partire da w_2 con un numero finito di operazioni elementari del tipo:

$$1) \text{ inserire o cancellare } x_i x_i^{-1}, x_i^{-1} x_i$$

$$2) \text{ inserire o cancellare } r, r^{-1} \text{ con } r \in R$$

Definiamo su W/\sim_R il prodotto

$$[w_1]_{\sim_R} [w_2]_{\sim_R} := [w_1 w_2]_{\sim_R}$$

con $1 := [\text{parola vuota}]_{\sim_R}$. $(W/\sim_R, \cdot)$ si dice *gruppo con presentazione* e viene indicato con $\langle S \mid R \rangle$.

ESEMPI 5.1.2.

$$1) \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle = \{1\}$$

$$2) S = \{x\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, R = \{x^n\}. \langle S \mid R \rangle = \langle x \mid x^n \rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$3) S = \{x, y\}, R = \{xyx^{-1}y^{-1}\},$$

$$\langle S \mid R \rangle = \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle = \{1, x, x^2, \dots, y, y^2, \dots, xy, \dots\} = \{x^n y^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

dato che vale $yx \sim_R xyx^{-1}y^{-1}yx = xy$. Utilizziamo $=$ al posto di \sim_R per comodità.

- Si noti che $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle = \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1}=1 \rangle = \langle x, y \mid xy=yx \rangle$. In quest'ultima, dalla relazione bisogna ricavare chi è R ; mi basta prendere la prima parola per la seconda inversa: $xy(yx)^{-1}=xyx^{-1}y^{-1}$.
- 4) Gruppo diedrale: $\langle x, y \mid x^4=y^2=(xy)^2=1 \rangle$; si intende $x^4=1, y^2=1, xyxy=1$; dunque la scrittura equivale a $\langle \{x, y\} \mid \{x^4, y^2, xyxy\} \rangle$
- 5) Preso un gruppo qualsiasi (G, \cdot) , considero $\langle S_G \mid R_G \rangle$ con $S_G := G$ e $R_G := \{(x \cdot y)y^{-1}x^{-1} \mid x, y \in G\}$. Si ha $G \simeq \langle S_G \mid R_G \rangle$. Posso infatti prendere l'isomorfismo $G \ni x \rightarrow [x]_{\sim_{R_G}} \in \langle S_G \mid R_G \rangle$.

OSSERVAZIONE 5.1.1: Trasformazioni di Tietze.

- 1) $\langle S \mid R \rangle$ dato; sia $r \in R$ tale che r è in “ $(R \setminus \{r\})$ -equivalente a 1”, ovvero r è conseguenza delle relazioni $R \setminus \{r\}$. Allora

$$\langle S \mid R \rangle = \langle S \mid R \setminus \{r\} \rangle$$

a meno di isomorfismi.

- 2) Siano $\langle S \mid R \rangle$ un gruppo con presentazione, $\bar{s} \notin S$ e w parola scritta in S . Vale:

$$\langle S \cup \{\bar{s}\} \mid R \cup \{\bar{s}=w\} \rangle = \langle S \mid R \rangle$$

Abelianizzazione di gruppi

DEFINIZIONE 5.1.1. Sia G un gruppo e siano $g, h \in G$. Definiamo il *commutatore* di g e h in G come il seguente elemento $[g, h] \in G$:

$$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$$

Se H, K sono due sottoinsiemi di G , allora

$$[H, K] := \{[h, k] \in G \mid h \in H, k \in K\}$$

Il sottogruppo generato da $[G, G]$ è un sottogruppo normale, detto *sottogruppo dei commutatori*. Il gruppo quoziente $Ab(G) := G/[G, G]$ si chiama *abelianizzato* di G .

Si può notare che l'abelianizzato di un gruppo è commutativo. Inoltre, se G e G' sono isomorfi, lo sono anche $Ab(G)$ e $Ab(G')$.

OSSERVAZIONE 5.1.2. Se $G = \langle S \mid R \rangle$, allora $Ab(G) = \langle S \mid R \cup [S, S] \rangle$.

ESEMPI 5.1.3.

- 1) $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$. $Ab(\langle S \rangle) = Ab(\mathbb{Z}^{*n}) = \{x_1, \dots, x_n \mid x_i x_j = x_j x_i \ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\} = \{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$

La scrittura $\mathbb{Z} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ vale solo per i gruppi abeliani.

- 2) $G = \langle x, y \mid x^4=y^2=(xy)^2=1 \rangle$. Allora $Ab(G) = \langle x, y \mid x^4=y^2=xyxy=[x, y]=1 \rangle$. Notiamo che, poiché vale $[x, y]=1$, allora $xyxy=x^2y^2$, che equivale a x^2 avendo $y^2=1$. Vale quindi che $x^4=(x^2)^2=1$, $x^2y^2=1$. Per cui
 $Ab(G) = \langle x, y \mid y^2=x^2=[x, y]=1 \rangle = \{x^n y^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} / \{y^2, x^2, [x, y]\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2)^2$
Potevamo anche considerare che $\langle x, y \mid y^2=x^2=[x, y]=1 \rangle = \langle x \mid x^2=1 \rangle \oplus \langle y \mid y^2=1 \rangle$.

OSSERVAZIONE 5.1.3. Se $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ e $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, allora $G_1 \oplus G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup [S_1, S_2] \rangle$.

5.2. Il teorema di Seifert-Van Kampen

Sia X uno spazio topologico e siano U_1 ed U_2 due aperti di X tali che

- 1) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ non vuoti connessi per archi,
- 2) $X = U_1 \cup U_2$

Fissiamo $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Valgono i diagrammi

$$\begin{array}{ccccccc}
 & U_1 & & & \pi_1(U_1, x_0) & & \\
 & /_{i_1} & & j_1 \backslash & & /_{i_{1*}} & & j_{1*} \backslash \\
 U_1 \cap U_2 & & X & & \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & & \pi_1(X, x_0) \\
 & \backslash_{i_2} & & j_2 / & & \backslash_{i_{2*}} & & j_{2*} / \\
 & U_2 & & & \pi_1(U_2, x_0) & &
 \end{array}$$

Considerati

$$\begin{aligned}
 \pi_1(U_1, x_0) &= \langle S_1 \mid R_1 \rangle \\
 \pi_1(U_2, x_0) &= \langle S_2 \mid R_2 \rangle \\
 \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) &= \langle S \mid R \rangle
 \end{aligned}$$

Allora

$$\pi_1(X, x_0) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle$$

Dove $R_S := \{ "i_{1*}(s)" = "i_{2*}(s)" \mid s \in S \}$ ove $"i_{1*}(s)"$ è la rilettura di $i_{1*}(s)$ come parola generata da S_1 ed analogamente $"i_{2*}(s)"$ da S_2 .

TEOREMA 5.2.1. Sia $S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$. Allora $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ e un suo generatore è $[\sigma]$, ove

$$\sigma : I \rightarrow S^1, \quad \sigma(t) := e^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

ESEMPI 5.2.1.

- 1) $S^2 := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$. Sia $p = (1, 0, 0)$. Voglio calcolare $\pi_1(S^2, p)$ usando il teorema di Seifert-Van Kampen. Poniamo $U_1 := \{ (x, y, z) \in S^2 \mid z < 1/2 \}$ e $U_2 := \{ (x, y, z) \in S^2 \mid z > -1/2 \}$.

U_1 ed U_2 sono naturalmente connessi per archi e la loro intersezione è una fascia equatoriale. Possiamo dunque applicare il teorema.

$$\begin{aligned}
 \pi_1(U_1, p) &= \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle \text{ perchè } U_1 \text{ è omeomorfo a } B_2(1) \\
 \pi_1(U_2, p) &= \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle \text{ analogamente} \\
 \pi_1(U_1 \cap U_2, p) &= \langle \gamma \mid \emptyset \rangle \text{ ove } \gamma \text{ è l'insieme del laccio che fa un giro sull'equatore.}
 \end{aligned}$$

Allora $\pi_1(S^2, p) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$ e lo sappiamo prima ancora di studiare R_S ; d'altronde non abbiamo parole.

- 2) Si prenda il bouquet di due S^1 : $X := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x+1)^2 + y^2 - 1)((x-1)^2 + y^2 - 1) = 0 \} = S^1 \vee S^1$.

Chiamo i due lacci a e b . Sia $U_1 := \{ (x, y) \in X \mid x > -1 \}$ ed $U_2 := \{ (x, y) \in X \mid x < 1 \}$. Perciò $U_1 \sim S^1_a$, ovvero alla circonferenza sulla destra. Analogamente, $U_2 \sim S^1_b$. Si vede facilmente che $U_1 \cap U_2$ è connesso per archi e contraibile. Inoltre $X = U_1 \cup U_2$. Poniamo $P := (0, 0)$.

$$\begin{aligned}
 \pi_1(U_1, P) &= \langle \alpha_1 \mid \emptyset \rangle \mathbb{Z}[a], \text{ ovvero } [a] = \alpha \text{ è un suo generatore} \\
 \pi_1(U_2, P) &= \langle \beta \mid \emptyset \rangle
 \end{aligned}$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, P) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$$

Dunque $\pi_1(X, P) = \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

OSSERVAZIONE 5.2.1. Siano X, Y due spazi topologici connessi per archi, $x \in X, y \in Y$ tali che U_x è un aperto contraibile di X contenente x ed analogamente per $V_y \subset Y$ contenente y . Se Z è “l’unione ad un punto di X e Y ottenuta incollando x e y ”, cioè

$$Z = \frac{X \sqcup Y}{\sim_{x=y}}$$

Allora $\pi_1(Z, [x]_{\sim}) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$, dove $\langle S_1 \mid R_1 \rangle = \pi_1(X, x)$ e $\langle S_2 \mid R_2 \rangle = \pi_1(Y, y)$.

Dimostrazione. Se $\rho: X \sqcup Y \rightarrow Z$, allora posso prendere $U_1 := \rho(X \sqcup V_y)$, $U_2 := \rho(U_x \sqcup Y)$. Dunque abbiamo $U_1 \cap U_2 = \rho(U_x \sqcup V_y)$. Si nota che

$$\begin{aligned} \langle S_1 \mid R_1 \rangle &= \pi_1(X, x) = \pi(U_1, [x]) \\ \langle S_2 \mid R_2 \rangle &= \pi_1(Y, y) = \pi(U_2, [x]) \\ \pi_1(U_1 \cap U_2, [x]) &= \{1\} = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle \end{aligned}$$

Perciò per Seifert-Van Kampen vale la tesi.

ESEMPIO 5.2.2 (si veda Esempio 4.21 su appunti di Occhetta). Considero $Q := I^2$ e $\rho: Q \rightarrow K := Q / \sim_{a,b}$ applicazione di passaggio al quoziente. Vogliamo applicare Seifert-Van Kampen. Posso vedere i lati come un bouquet di 2 S^1 : ho quindi due archi, che sono a e b , che in realtà mi identificano $a \circ \rho$ e $b \circ \rho$ rispettivamente. Definiamo $U_1 := \rho(Q \setminus \{C\})$, ove C è il centro del quadrato; U_1 è ovviamente un aperto connesso per archi. Sia poi $U_2 := \rho((0,1)^2)$. $U_1 \cap U_2 := \rho((0,1)^2 \setminus \{C\})$. Fisso $R' = \rho(R) \in U_1 \cap U_2$. Per quanto detto prima,

$$\pi_1(S_1 \vee S_1, P') = \langle a, b \mid \emptyset \rangle$$

Sia $\delta: I \rightarrow Q$ che va dall’origine a R (come negli appunti di Occhetta). Esso è tale che $\delta' = \rho \circ \delta$ parte da $\delta'(0) = P'$ ed arriva in $\delta'(1) = R'$. Si ottiene

$$\pi_1(S_1 \vee S_1, P') \xrightarrow{i_*} \pi_1(U_1, P') \xrightarrow{u_{R'}} \pi_1(U_1, R')$$

Da cui $a, b \rightarrow a, b \rightarrow \alpha := [\bar{\delta}' * a * \delta']$, $\beta := [\bar{\delta}' * b * \delta']$. Perciò si ha

$$\pi_1(U_1, R') = \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle$$

Si nota che $\pi_1(U_2, R') = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$, dato che U_2 è contraibile. L’intersezione è un quadrato senza bordo nè centro, per cui può essere rappresentato da S_y^1 , con $\gamma: I \rightarrow (0,1)^2 \setminus \{C\}$, $\gamma' := \rho \circ \gamma$. Dunque

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, R') = \langle \gamma' \mid \emptyset \rangle$$

Si ottiene $\pi_1(K, R') = \langle \alpha, \beta \mid R_S \rangle$. Dato che $S_2 = \emptyset$, si ha $R_S = \{“i_{1*}(\gamma’)” = 1\}$.

$$“i_{1*}(\gamma’)” = \beta \alpha^{-1} \beta \alpha$$

Per cui $\pi_1(K, R') = \langle \alpha, \beta \mid \beta \alpha^{-1} \beta \alpha \rangle$ (per maggiori informazioni vedere gli appunti di Occhetta).

ESEMPIO 5.2.3 (si vedano pagine 46-47 degli appunti di Occhetta). Si prenda T_g , ovvero il g -toro:

$$T_g := T_1 \# T_1 \# \dots \# T_1$$

Il caso $g=0$ è già stato affrontato. Sia $g \geq 1$. Si considero il 4 g -agone: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 \dots b_g^{-1} \simeq T_g$

Presi U_1 ed U_2 come in esempio 5.2.2 adeguatamente rivisti, con Seifert-Van Kampen si ottiene

$$\pi_1(T_g, P') = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 \dots a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$$

Nel caso di $U_h := \mathbb{R} \mathcal{P}^2 \# \mathbb{R} \mathcal{P}^2 \# \dots \# \mathbb{R} \mathcal{P}^2$ h -volte (si ricordi che $\mathbb{R} \mathcal{P}^2 \simeq a_1 a_1$). Prendo il poligono $2h$ -agono: $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_h a_h$. Otteniamo

$$\pi_1(U_h, P') = \langle a_1, \dots, a_h \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_h^2 \rangle$$

Sia nel caso di T_g che nel caso di U_h , P' va inteso come punto.

Voglio dimostrare che T_g non è omotopico a $T_{g'}$, se $g \neq g'$, U_h non è omotopico a $U_{h'}$ per $h \neq h'$. Inoltre, anche T_g non deve essere omotopico a U_h per ogni $g \geq 0$ ed $h \geq 0$.

Calcoliamo $Ab(\pi_1(T_g))$:

$$Ab(\pi_1(T_g)) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1 \dots \beta_g^{-1}, [\alpha_i, \alpha_j], [\alpha_i, \beta_j], [\beta_i, \beta_j] \ \forall i, j \rangle = \mathbb{Z}^{2g}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} Ab(\pi_1(U_h)) &= \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_h^2, [\alpha_i, \alpha_j] \ \forall i, j \in \{1, \dots, h\} \rangle = \\ &= \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_0 = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h, \alpha_0^2 = 1, [\alpha_i, \alpha_j] \ \forall i, j \in \{0, 1, \dots, h\} \rangle = \\ &= \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_h = \alpha_{h-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1} \alpha_0, \alpha_0^2 = 1, [\alpha_i, \alpha_j] = 1 \ \forall i, j \in \{0, 1, \dots, h\} \rangle \end{aligned}$$

Dunque posso togliere α_h poichè è in funzione delle altre lettere dell'alfabeto. Da questi passaggi, si ottiene

$$Ab(\pi(U_h)) = \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$$

ove si ricordi che $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

OSSERVAZIONE 5.2.2.

- 1) Nessun abelianizzato del T_g può essere isomorfo all'abelianizzato di U_h , dato che $Ab(\pi(U_h))$ ha un elemento di torsione (ovvero una componente appartiene a \mathbb{Z}_2).
- 2) $Ab(\pi_1(T_g))$ non è isomorfo a $Ab(\pi_1(T_{g'}))$ per $g \neq g'$ ed $Ab(\pi_1(U_h))$ non è isomorfo a $Ab(\pi_1(U_{h'}))$. Basta provare che, se esiste $\phi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ isomorfismo, allora $n=m$. Infatti $Ab(\pi_1(T_g)) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ ed inoltre se avessi un isomorfismo $\mathbb{Z}^{h-1} \simeq \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2 / \{0\} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}^{h'-1} \times \mathbb{Z}_2 / \{0\} \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}^{h-1}$, varrebbe $h=h'$, da cui si deduce direttamente che vale la tesi anche per $Ab(\pi_1(U_h))$.

$(2\mathbb{Z})^n < \mathbb{Z}^n$, $(2\mathbb{Z})^m < \mathbb{Z}^m$; perciò $\phi((2\mathbb{Z})^n) = (2\mathbb{Z})^m$. Dunque ϕ al quoziente mi porta al seguente risultato:

$$(\mathbb{Z}_2)^n \simeq \mathbb{Z}^n / (2\mathbb{Z})^n \rightarrow \mathbb{Z}^m / (2\mathbb{Z})^m \simeq (\mathbb{Z}_2)^m$$

Vale inoltre $\#(\mathbb{Z}_2)^n = 2^n$ e $\#(\mathbb{Z}_2)^m = 2^m$. Dato che Φ , ovvero ϕ al quoziente, è una biiezione, $2^n = 2^m$ e perciò $n=m$.

5.3. Classificazione delle superfici compatte

TEOREMA 5.3.1. Ogni superficie compatta è omeomorfa ad una ed una sola superficie del tipo T_g, U_h con $g \geq 0$ ed $h \geq 1$.

DEFINIZIONE 5.3.1. Sia S una superficie topologica compatta. Un triangolo geometrico di S è una applicazione $\tau: T' \rightarrow S$, ove T' è un triangolo non degenero di \mathbb{R}^2 e τ è un omeomorfismo sull'immagine, ovvero $T' \rightarrow \tau(T') \subset S$ è un omomorfismo. In breve, scriveremo $\tau: T' \rightarrow T(\subset S)$, ove $T = \pi(T')$.

DEFINIZIONE 5.3.2. Una triangolazione di S è una famiglia di triangoli geometrici $\{\tau_i: T_i' \rightarrow T_i \subset S\}_{i \in I}$ tali che $U_{i \in I} T_i = S$ e tali triangoli geometrici si possono intersecare solo nei tre modi seguenti:

- Non si intersecano
- Si intersecano sull'immagine dei vertici
- Si intersecano sull'immagine di lati

Le superfici topologiche sono tutte triangolabili.

ESEMPIO 5.3.1. (Esempio 4.28 degli appunti di Occhetta). Si consideri il toro e si divida la superficie del quadrato $Q = I^2$ in quattro triangoli. Considerato $\rho: Q \rightarrow Q/\sim$, prendo $\tau_i: T_i' \rightarrow T_i$ ove $\tau_i := \rho|_{T_i'}$. Questa non è assolutamente una triangolazione: i triangoli al quoziente hanno due lati in comune. Prendiamo 8 triangoli: anche questa volta non ho una triangolazione poichè ci sono due vertici in comune con vari triangoli. Presi 18 triangoli, si ottiene una triangolazione.

DIMOSTRAZIONE di Teorema 5.3.1 (si vedano appunti di Occhetta, Teorema 4.29).

Passo 0. Per Radò (Teorema 4.26 negli appunti di Occhetta) esiste una triangolazione finita di S :

$$\tau_1: T_1' \rightarrow T_1 \subset S, \dots, \tau_n: T_n' \rightarrow T_n \subset S$$

Possiamo supporre che $\{T_i'\}$ sia famiglia di disgiunti e che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ esista $j < i$ (se $i \geq 2$) tale che esistono e_i lato di T_i' ed e_j lato di T_j tali che $\tau_i(e_i) = \tau_j(e_j)$. Questa enumerazione esiste sempre perché S è connessa.

Passo 1. Associa ad S un poligono con lati identificati a coppie (il poligono al quoziente deve essere omeomorfo ad S). Considero T_1' . A meno di riordinare i lati, avremo (per quanto visto in passo 0)

$$(\tau_j^{-1} \circ \tau_i)|_{e_i}: e_i \rightarrow e_j,$$

ovvero possiamo identificare un lato di T_1' con un lato di T_2' . La struttura di incollamenti creerà quindi un poligono.

Passo 2. Fissato un vertice del poligono e una percorrenza, prima o poi riincotrerò lo stesso lato da cui sono partito. Si hanno due possibilità: o i due lati uguali hanno diversa orientazione (tipo 1) oppure hanno stessa orientazione (tipo 2). Nel passo 2 eliminiamo le coppie adiacenti di lati di tipo 1, ovvero se la parola del poligono ad un certo punto contiene aa^{-1} , cancello entrambi (se abbiamo almeno quattro lati, altrimenti è ovvia la tesi).

Passo 3. Tutti i vertici quozientati. Sappiamo che ci sono almeno due vertici P, Q distinti. Suppongo di avere un lato che è orientato verso Q in due parti del poligono (vedi appunti di Occhetta, pagina 44). A fine procedimento, avremo due P ed un solo vertice Q . Volendo andare a 0 il numero di punti Q , procediamo alternando passo 3 e passo 2. Si noti che per il passo 2 non esistono più di due vertici.

Passo 4. Possiamo mettere assieme le coppie di lati concordi. Presi due lati uguali di tipo due, considero un lato b che congiunge il vertice P e taglio il poligono lungo b . Riunisco poi incollando i lati a : ottengo due lati b adiacenti.

Passo 5. Se esistono due lati uguali di tipo uno, allora deve esistere un'altra coppia di lati di tipo uno. Se così non fosse, tutti i lati "sopra" i due lati a si identificano fra loro ed analogamente "sotto": i vertici quindi non coinciderebbero. Ciò è assurdo per passo 3. Dunque posso tagliare il poligono sopra i vertici di a ed incollare sotto ciò che ottengo attaccando gli altri due lati uguali del poligono.

ESERCIZIO 5.3.1. Si consideri $S^1 = \partial D^1$. Ci domandiamo se è retracts di D^2 , cioè se esiste $r : D^2 \rightarrow \partial D^2$ continua tale che $r(x) = x$ per ogni $x \in \partial D^2$. La risposta è intuitivamente negativa; andremo perciò a dimostrare che data funzione non esiste. Dovremo perciò vedere che una condizione necessaria all'esistenza di r viene violata. Se S^1 è retracts di D^2 , allora ho una determinata condizione. Se questa non viene soddisfatta, allora non esiste. Per esempio, dovrebbe valere questo schema:

$$\pi_1(S^1, (1,0)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, (1,0)) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, (1,0))$$

Si ricordi inoltre che $\pi_1(S^1, (1,0)) = \langle a \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e che $\pi_1(D^2, (1,0)) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$. i_* dovrebbe essere iniettiva. Ma i_* non può che essere costante dato che i_* ha immagine in un gruppo banale. Dunque r_* non può essere suriettiva. Perciò S^1 non è retracts di D^2 .

TEOREMA 5.3.2: Del punto fisso (Di Brower). Sia $f : D^2 \rightarrow D^2$ continua. Allora esiste $x \in D^2$ tale che $f(x) = x$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che non esista x tale che $f(x) = x$. Allora possiamo definire una mappa $r : D^2 \rightarrow \partial D^2$ tale che $r(x) = \overline{xf(x)} \cap S^1$. r è continua e tale che per ogni $y \in \partial D^2$, $r(y) = y$. Allora r è retrazione. Ma abbiamo dimostrato in esercizio 5.3.1 che data r non esiste. Assurdo.

ESERCIZIO 5.3.2. Si prenda $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ ed $A = S^1$. A può essere un retracts di X ? Prima avevamo considerato lo schema

$$\pi_1(A, (1,0)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, (1,0)) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, (1,0))$$

Si vede subito $\pi_1(A, (1,0)) \simeq \mathbb{Z}$ e che $\pi_1(X, (1,0)) \simeq \mathbb{Z}$. Abbiamo quindi che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\} \sim S^1$ con centro $(1,1)$ e raggio 1. Tuttavia, noi abbiamo S^1 con centro $(0,0)$ e raggio 1. L'intuizione mi suggerisce che non esiste data retrazione. Possiamo dimostrare che i_* non è iniettiva o che r_* non è suriettiva. Studiamo i_* .

$$i_* : \pi_1(S^1, (1,0)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}, (1,0))$$

Prendiamo il cappio $\alpha : I \rightarrow S^1$ tale che $\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. So che $\pi_1(S^1, (1,0)) = \langle a \mid \emptyset \rangle$ ove $a = [\alpha]$.

$$i_*([\alpha]) = [i \circ \alpha]$$

ove $i \circ \alpha : I \rightarrow S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$. Essendo che $i \circ \alpha(I)$ è contenuto in un aperto contraibile, otteniamo che

$$i_*(a) = 0$$

Dunque i_* non è iniettiva.

ESERCIZIO 5.3.3. Calcolare il gruppo fondamentale di X toro con un disco all'interno. Abbiamo due strategie. La prima è l'uso del teorema di Seifert-Van Kampen, mentre la seconda è dimostrare l'equivalenza omotopica con uno spazio più semplice. Usiamo entrambe le strategie.

Partiamo con l'uso di Seifert-Van Kampen. Dobbiamo prendere U_1, U_2 con intersezione non vuota al fine di trovare il diagramma visto in 5.2. Vorremo associare un aperto riconducibile al toro ed uno al disco.

Sia U_1 il toro con un anello che contiene l'estremità del disco. Per quanto riguarda U_2 prendiamo invece il disco aperto. Dunque $U_1 \cap U_2$ è un anello aperto. In formula, $U_1 = X \setminus D(r_1)$ e $U_2 = \mathring{D}_2(r_2)$. Con $r_1 < r_2$, $U_1 \cap U_2 = U_2 \setminus D(r_1)$. Studiamo l'intersezione. Prendo γ cammino. Posso retrarre tutta l'intersezione su γ , una circonferenza. Dunque $\pi_1(U_1 \cap U_2, x) \simeq \pi_1(\gamma, x)$ ove $x \in \gamma$. Abbiamo bisogno di un cappio che compia un giro su γ . Perciò $U_1 \cap U_2 \sim \gamma = S^1$. Per U_2 si ha subito che è contraibile: è un disco aperto. Perciò $\pi_1(U_2, x) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$. Studiamo U_1 : considero una retrazione che spinge l'anello tutto sulla circonferenza di D . Perciò $U_1 \sim T$ toro. $\pi_1(T, y) = \langle [a], [b] \mid [a][b] = [b][a] \rangle$, ove a è il cappio lungo la "ciam-

bella". Si ha $\pi_1(T, y) = \pi_1(U_1, y)$. Infatti, U_1 è connesso per archi, esiste $\delta: I \rightarrow U_1$ tale che $\delta(0) = x$ e $\delta(1) = y$. Considero $u_\delta: \pi_1(U_1, y) \rightarrow \pi_1(U, x)$, che è tale che $u_\delta([a]) = [\delta * a * \bar{\delta}] = [\alpha]$ ed analogamente per $[b]$: $u_\delta([b]) = [\delta * b * \bar{\delta}] = [\beta]$. $\pi(U_1, y) = \langle [\alpha], [\beta] \mid [[\alpha], [\beta]] \rangle$. Per Seifert-Van Kampen,

$$\pi_1(X, x) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle$$

Devo perciò scrivere γ in funzione delle parole α e β per ottenere R_S : ovvero,

$$“(j_1)_*((i_1)_*[\gamma]) = (j_2)_*((i_2)_*[\gamma])”$$

Si vede che $“(j_2)_*((i_2)_*[\gamma]) = 1$. Si può notare che $(j_1)_*((i_1)_*[\gamma]) = [\beta]$. Dunque

$$\pi_1(X, x) = \langle [\alpha], [\beta] \mid [\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1} = 1, [\beta] = 1 \rangle = \langle [\alpha] \mid [\alpha][\alpha]^{-1} = 1 \rangle = \langle [\alpha] \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Usiamo ora la seconda strategia. Pensiamo il nostro spazio come un CW-complesso. A questo punto, posso usare il teorema seguente: se $A \subset X$ è un sottocomplesso contraibile, allora $X \sim X/A$. Si ricordi che è già stata fatta la costruzione del toro come CW-complesso in esempi 3.3.2.(4). Abbiamo una 0-cella $\{P\}$, due 1-celle $\{a, b\}$ e due 2-celle. Il disco è invece un sottocomplesso contraibile: lo prendo come A . X/A sarà perciò il toro tolto della circonferenza di A . Otteniamo quindi un CW-complesso con una 1-cella.

Voglio costruire uno spazio topologico che ha X/A come spazio quoziente. Come 0-cella prendo P, Q . Inoltre, ho due 1-cella ed una 2-cella. Ho il toro privato di una circonferenza ove le due parti si congiungono con un segmento A' , che chiamerò X' . Ottengo che $X/A \simeq X_2 \simeq X'/A'$. Perciò

$$X \sim X/A = X_2 = X'/A' \sim X' \sim X'/A_2 \simeq S^2 \vee S^1$$

ove A_2 è un cerchio. Ottengo che

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X'/A_2, \bar{x}) = \pi_1(S^2, \bar{x}) * \pi_1(S^1, \bar{x}) \simeq \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

ESERCIZIO 5.3.4. Si classifichi la superficie ottenuta come quoziente di un ottagono con rappresentazione

$$db^{-1}cba^{-1}da^{-1}c^{-1}$$

E vertici P, Q, P, P, Q, P, Q, P . Ricordiamo i passi del teorema.

- 1) Eliminazione delle coppie adiacenti del tipo 1
- 2) Riduzione dei vertici ad un unico punto
- 3) Rendere adiacenti coppie del secondo tipo
- 4) Raggruppare le coppie del primo tipo

Il primo punto non richiede nessuno studio dato che non esistono coppie adiacenti del tipo 1. Studiamo il punto 2. Tagliamo ba^{-1} con vertici P, Q, P . Sia il lato creato dal taglio denotato con e . Ottengo perciò

$$db^{-1}ceda^{-1}c^{-1}, ab^{-1}e^{-1}$$

Ho perciò $db^{-1}cedb^{-1}ec^{-1}$ con vertici P, Q, P, P, P, Q, P, P . Dobbiamo fare altri due passaggi per eliminare tutti i vertici Q . Taglio db^{-1} con lato di taglio f . Ho perciò

$$fcedb^{-1}ec^{-1}, bd^{-1}f$$

Da cui ricavo $fcedd^{-1}fec^{-1}$ con vertici P, P, P, P, P, Q, P, P . Si noti che ci sono due lati adiacenti del primo tipo: otteniamo quindi un esagono $fcefec^{-1}$ con tutti i vertici identificati con P .

Passiamo al punto 3. Tagliamo l'esagono di modo da ottenere due trapezi: $fceg^{-1}$ ed $fec^{-1}g$. Si ottiene

$$gge^{-1}c^{-1}ec^{-1}$$

Rimangono i due lati c : tagliamo l'esagono ed otteniamo $c^{-1}he$ ed $h^{-1}gge^{-1}c^{-1}$. Dunque abbiamo

$$h^{-1}h^{-1}gge^{-1}e^{-1}$$

Ovvero, indicata con S la superficie analizzata, $S \sim U_3$. $\pi_1(S, P) = \langle [e], [g], [h] \mid [g]^2[e]^{-2}[h]^{-2} = 1 \rangle$.

ESERCIZIO 5.3.5. Determinare il gruppo fondamentale di $X = T \cup (D^2 \setminus \{P, Q\})$.

Prendiamo $U_1 = X \setminus D^2(R)$ tale che $P, Q \in D^2(R)$, $U_2 = \overset{\circ}{D}^2(r)$ tale che $P, Q \in D^2(r)$. Volendo che l'intersezione sia diversa dal vuoto, impongo $r > R$. $U_1 \cap U_2 = \overset{\circ}{D}^2(r) \setminus D^2(R)$. Vediamo come affrontare il problema con la teoria dei CW-complessi. Come primo obiettivo, vogliamo vedere $X \sim X'$ CW-complesso. Il disco a cui sono stati tolti due punti è formato da tre 1-celle e due 0-celle. Allora X ha come retrarro di deformazione X' formato da due 0-celle, quattro 1-celle ed una 2-cella. Dobbiamo trovare un sottocomplesso A contraibile tale che $X'' = X'/A$ sia “facile”. Possiamo scegliere tre A diversi, ovvero le tre 1-celle che descrivono il disco senza due punti: prendiamo la 1-cella centrale e chiamiamola l_2 . Ottengo X'/l_2 , che assomiglia a T_2 , solo che al centro delle due circonferenze abbiamo un punto singolare; data figura infatti non è “parente” di T_2 . Prendiamo la 1-cella che rappresenta metà circonferenza. X'/l_1 risulta essere simile a $T \vee S^1$, dato che ottengo il toro con una circonferenza all'interno.

$$\pi_1(X, P) \simeq \pi_1(X', P) \simeq \pi_1(X'', P)$$

ove $X'' \simeq T \vee S^1$; perciò $\pi_1(T, P) = \langle [l_3], [l_4] \mid [l_3][l_4][l_3]^{-1}[l_4]^{-1} \rangle$, $\pi_1(S', P) = \langle [l_2] \mid \emptyset \rangle$. Ho perciò

$$\pi_1(X, P) = \langle [l_2], [l_3], [l_4] \mid [l_3][l_4][l_3]^{-1}[l_4]^{-1} \rangle$$

OSSERVAZIONE 5.3.1. Esiste una versione semplificata di Seifert-Van Kampen, che afferma che, preso

$$X = X_1 \vee X_2$$

con $\pi_1(X_1, P) = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ e $\pi_1(X_2, P) = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, allora $\pi_1(X, P) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$.

OMOLOGIA SINGOLARE

6.1. Gruppi abeliani e successioni esatte

Consideriamo i gruppi abeliani. Il gruppo sarà $(G, +)$ con lo zero 0 elemento neutro e, presa $B = \{g_i\}_{i \in I}$ famiglia in G , essa si dice *insieme dei generatori* per G se, per ogni $g \in G$,

$$g = \sum_{i \in I} n_i g_i$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\{i \in I \mid n_i \neq 0\}$ finito. $B = \{g_i\}_{i \in I}$ si dice *libero* (in G) se vale ciò che segue:

$$\sum_{i \in I} n_i g_i = 0 \Leftrightarrow n_i = 0 \text{ per ogni } i \in I$$

Useremo la seguente notazione:

- 1) Se esiste B insieme di generatori finito, allora G si dice essere *finitamente generato*.
- 2) Se esiste un insieme libero (eventualmente infinito) B di generatori, allora B è una *base* di G .

ESEMPI 6.1.1

- 1) \mathbb{Z}^n è libero: $B = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 1), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$
- 2) Sia $n \geq 2$: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non è libero, infatti $0 \cdot [1]_n = [0]_n = n[1]_n$.

DEFINIZIONE 6.1.1. Sia G gruppo abeliano. $g \in G$ è *di torsione* se esiste $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tale che $ng = 0$. Sia $T(G)$ il sottoinsieme di G formato da tutti gli elementi di torsione di G .

OSSERVAZIONE 6.1.1

- 1) Siano G, G' gruppi abeliani e supponiamo G libero con base $B = \{g_i\}_{i \in I}$. Scegliamo $\{g'_i\}_{i \in I} \subset G'$: stiamo pensando a una funzione $\psi: I \rightarrow G'$ tale che $i \mapsto g'_i$. Allora esiste ed è unico un omomorfismo

$$\phi: G \rightarrow G'$$

talche $\phi|_B = \psi$, cioè $\phi(g_i) = g'_i$.

Dimostrazione. Sia $g \in G$; allora $g = \sum_i n_i g_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ unici. Allora definisco $\phi(g) := \sum_i n_i g'_i$. Esso è sicuramente unico poichè se ne esistesse un altro, la differenza sarebbe un omomorfismo che porta la base in 0 . Vale inoltre che $g_i = 1 \cdot g'_i$, perciò $\phi(g_i) = 1 \cdot g'_i = g'_i$, come volevasi dimostrare.

- 2) $T(G)$ è un sottogruppo di G . Infatti, se $ng = 0$ (perciò $g \in T(G)$) con $n \neq 0$, allora $n(-g) = -ng = 0$ e perciò anche $-g \in T(G)$. $0 \in T(G)$ è ovvio. Mi basta provare che presi $g_1, g_2 \in T(G)$, allora anche la somma è in $T(G)$. Esistono $n_1, n_2 \neq 0$ tali che $n_1 g_1 = 0$ e $n_2 g_2 = 0$. Allora

$$(n_1 n_2)(g_1 + g_2) = n_2(n_1 g_1) + n_1(n_2 g_2) = 0 + 0 = 0$$

- 3) Sia $\phi: G \rightarrow G'$ omomorfismo. Valgono i seguenti fatti:

- $\phi(T(G)) \subset T(G')$
- Se ϕ è un isomorfismo, allora $\phi(T(G)) = T(G')$

Si noti che se ϕ è isomorfismo, allora vale il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & G' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ G/T(G) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & G'/T(G') \end{array}$$

Dunque in particolare $\tilde{\phi}$ è un isomorfismo ed è tale che $\tilde{\phi}(g+T(G))=\phi(g)+T(G')$. Mostriamo le tesi.
 Dimostrazione. Se $g \in T(G)$, allora esiste $n \neq 0$ tale che $ng=0$; dunque $n\phi(g)=\phi(ng)=\phi(0)=0$ in G' . Perciò $\phi(g) \in T(G')$. Grazie al diagramma visto, vale anche la seconda tesi.

TEOREMA 6.1.1. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Allora $T(G)$ è finito ed esiste (unico) $n \in \mathbb{N}$ per cui vale

$$G \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T(G)$$

ove \simeq indica l'isomorfismo fra i due gruppi. n si dice *rango*.

DEFINIZIONE 6.1.2. Supponiamo di una successione di abeliani, G, H, K , collegati fra loro tramite omomorfismi ϕ, ψ . Tale successione si dice *esatta* in H se $\text{Im}(\phi) = \text{ker} \psi$. La successione è esatta se lo è in ogni gruppo. Una successione esatta corta è della forma

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\phi} H \xrightarrow{\psi} K \rightarrow 0$$

ovvero parte da 0 e torna in 0: si ha ϕ iniettiva e ψ suriettiva.

Nel caso degli spazi vettoriali, si può verificare che per una successione esatta corta, con la notazione usata, vale

$$K \oplus G \simeq H$$

per il teorema di nullità più rango. Questo non si può sempre fare nel caso dei gruppi abeliani.

LEMMA 6.1.1. Si consideri la successione esatta corta di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\phi} H \xrightarrow{\psi} K \rightarrow 0$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- 1) Esiste un omomorfismo $h: H \rightarrow G$ tale che $h \circ \phi = \text{Id}_G$
- 2) Esiste un omomorfismo $k: K \rightarrow H$ tale che $\psi \circ k = \text{Id}_K$
- 3) Esiste un isomorfismo $f: H \rightarrow G \oplus K$ che fa commutare il diagramma seguente

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 0 \rightarrow & G & \downarrow & K & \rightarrow 0 \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & G \oplus K & &
 \end{array}$$

Si veda Lemma 6.13 degli appunti di Occhetta.

COROLLARIO 6.1.1. Sia $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow 0$ una successione esatta corta. Se K è libero, allora tale successione è spezzante.

DIMOSTRAZIONE. Se $B = \{g_i\}_{i \in I}$ è una base di K , allora esiste $g'_i \in H$ tale che $\psi(g'_i) = g_i$ per ogni i . Definiamo $k: K \rightarrow H$ come l'unico omomorfismo tale che $k(g_i) = g'_i$ per ogni i . Allora $\psi \circ k: K \rightarrow K$ è l'identità di K id_K ; infatti,

$$g_i \xrightarrow{k} k(g_i) = g'_i \xrightarrow{\psi} g_i$$

per ogni i .

6.2. Complessi catena

DEFINIZIONE 6.2.1. Sia una successione $\{(C_q, \delta_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ di gruppi abeliani, con $\delta_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ omomorfismi. Data successione si dice *complesso catena* e si indica con \mathcal{C} se $\delta_q \circ \delta_{q+1} = 0$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$. Si noti che data richiesta è equivalente a dire che $\text{Im}(\delta_{q+1}) \subset \ker(\delta_q)$.

Inoltre,

$$H_q(\mathcal{C}) := \frac{\ker(\delta_q)}{\text{Im}(\delta_{q+1})}$$

è detto *q-esimo gruppo di omologia* di \mathcal{C} . Gli elementi di $\ker(\delta_q)$ si chiamano *q-cicli* di \mathcal{C} , mentre quelli di $\text{Im}(\delta_{q+1})$ sono i *q-bordi* di \mathcal{C} e δ_q si chiama *q-esimo operatore di bordo* di \mathcal{C} .

DEFINIZIONE 6.2.2. Sia $\mathcal{C}: \rightarrow C_{q+2} \rightarrow C_{q+1} \rightarrow C_q \rightarrow \dots$ e $\mathcal{C}': \rightarrow C'_{q+2} \rightarrow C'_{q+1} \rightarrow C'_q \rightarrow \dots$. Una famiglia

$$f = \{f_q: C_q \rightarrow C'_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$$

di omomorfismi si dice *omomorfismo* fra \mathcal{C} e \mathcal{C}' se tutti i quadrati formati da $C_{q+2}, C_{q+1}, C'_{q+2}, C'_{q+1}$ commutano, ovvero se vale

$$\delta'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \delta_q$$

per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

OSSERVAZIONE 6.2.1. Se $f = \{f_q: C_q \rightarrow C'_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ è un morfismo di complessi catena, allora

$$f_q(\ker(\delta_q)) \subset \ker(\delta'_q), \quad f_q(\text{Im}(\delta_{q+1})) \subset \text{Im}(\delta'_{q+1})$$

Dimostrazione. Sia $c \in \ker(\delta_q)$. Vale, per definizione di f ,

$$\delta'_q(f_q(c)) = f_{q-1}(\delta_q(c)) = f_{q-1}(0) = 0$$

Quasi analogamente si prova la seconda inclusione.

Da questa osservazione, posso definire

$$\bar{f}_q: H_q(\mathcal{C}) \rightarrow H_q(\mathcal{C}'), \quad \bar{f}_q(c + \text{Im}(\delta_{q+1})) = f_q(c) + \text{Im}(\delta'_{q+1})$$

6.3. Omologia singolare

Per ogni $q \in \mathbb{N}$, identifichiamo $\mathbb{R}^q = \mathbb{R}^q \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{q+1}$. Denotiamo

$$E_0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q, \quad E_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q, \dots, \quad E_q = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^q$$

Si noti ovviamente che $E_0 \in \mathbb{R}^0$, $E_0, E_1 \in \mathbb{R}^1$ eccetera. Vogliamo inoltre definire $\Delta_q \subset \mathbb{R}^q$ chiamato *q-simplesso*:

$$\Delta_q := \left\{ \sum_{i=0}^q \lambda_i E_i \in \mathbb{R}^q \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ per ogni } i, \lambda_i \geq 0 \text{ per ogni } i, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \right\}$$

Si noti che la sommatoria che definisce gli elementi di Δ_q può essere rivista nel seguente modo

$$E_0 + \sum_{i=1}^q \lambda_i (E_i - E_0)$$

Questo lo posso fare anche con E_1, E_2, \dots, E_q . Possiamo rivedere l'insieme anche in questo modo

$$\Delta_q = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q \mid \lambda_i \geq 0, 0 \leq \sum_{i=1}^q \lambda_i \leq 1 \right\}$$

Infatti sto prendendo i vettori di quel tipo. Vediamo degli esempi.

Con $q=0$, ho $\Delta_0=\{0\}=\mathbb{R}^0=\{E_0\}$. Con $q=1$, ho $\Delta_1=\{\lambda_1\in\mathbb{R} \mid 0\leq\lambda_1\leq 1\}=[0,1]=[E_0,E_1]\in\mathbb{R}$. Con $q=2$, si ha $\Delta_2=\{(\lambda_1,\lambda_2)^t\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda_1,\lambda_2\geq 0, 0\leq\lambda_1+\lambda_2\leq 1\}$, ovvero un triangolo. Δ_3 è un tetraedro. Si noti anche che vivono uno dentro l'altro; infatti $\Delta_0\subset\Delta_1\subset\Delta_2\subset\ldots$

DEFINIZIONE 6.3.1. Un q -simplexso singolare è una applicazione continua della forma

$$\sigma:\Delta_q\rightarrow X,$$

cioè è un elemento di $C^0(\Delta_q, X)$. σ sarà spesso identificato con la sua immagine.

ESEMPIO 6.3.1. Uno 0-simplexso singolare è un'applicazione $C^0(\Delta_0, X)$, per cui $\Delta_0=\{E_0\}\rightarrow X$ è un punto. Con $q=1$, $\sigma(\Delta_1)$ sarà un segmento deformato. Analogamente con gli altri q . Attenzione: non c'è alcun limite su σ : Δ_2 potrebbe anche avere immagine un solo punto su X .

OSSERVAZIONE 6.3.1. Sia S un insieme qualsiasi non vuoto. Definiamo il gruppo abeliano libero generato da S , indicandolo con $G(S)$, come segue:

$$G(S):=\{\psi:S\rightarrow\mathbb{Z} \mid \psi^{-1}(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \text{ è finito}\}$$

In più, prese $\psi, \psi'\in G(S)$, definisco la somma

$$(\psi+\psi')(s):=\psi(s)+\psi'(s)$$

per ogni $s\in S$.

Interpretazione di $\psi\in G(S)$ come “combinazione lineare finita su \mathbb{Z} di elementi di S ”

Vale che, presa $\psi\in G(S)$,

$$\psi=\sum_{s\in S}\psi(s)\chi_{[s]},$$

dove $\chi_{[s]}:S\rightarrow\mathbb{Z}$ tale che $\chi_{[s]}(t)=1$ se $t=s$ e vale 0 altrimenti. Identifico la funzione $\chi_{[s]}$ con s ed inoltre $\psi(s)$ lo identifico con $a_s\in\mathbb{Z}$. Scrivo perciò

$$\psi=\sum_{s\in S}a_s s$$

DEFINIZIONE 6.3.2. Presi X spazio topologico e $q\in\mathbb{N}$, definiamo il gruppo delle q -catene singolari di X , indicandolo con $S_q(X)$, come il gruppo libero generato da $C^0(\Delta_q, X)$:

$$S_q(X):=G(C^0(\Delta_q, X))=\left[\sum a_\sigma\sigma \mid \sigma \text{ } q\text{-simplessi singolari di } X\right]$$

ESEMPIO 6.3.2. Prendiamo $q=0$ e $c\in S_0(X)$.

$$c=a_1\sigma_1+a_2\sigma_2$$

con $a_1, a_2\in\mathbb{Z}$, $\sigma_1, \sigma_2\in C^0(\{E_0\}, X)$, ove queste due applicazioni sono identificate con le immagini su X . Per esempio, se $\sigma_1(E_0)=x_1$ e $\sigma_2(E_0)=x_2$, allora un elemento di $S_0(X)$ è $c=5x_1-6x_2$.

Con $q=1$, $c\in S_1(X)$ è della forma $c=a_1\sigma_1+a_2\sigma_2$ con $\sigma_1, \sigma_2\in C^0(\Delta_0, X)$: esse identificheranno perciò due cammini. Perciò un elemento di $S_1(X)$ è una somma di cammini “pesati”, in questo caso da a_1, a_2 .

Per ottenere $c=0$, mi basta prendere, con la notazione di osservazione 6.3.1., $\psi=0$ per ogni valore.

Con $q \geq 1$, vogliamo arrivare a considerare questa successione

$$S_{q+1}(X) \xrightarrow{\delta_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\delta_q} \dots \xrightarrow{\delta_1} S_0(X) \xrightarrow{\delta_0} 0 = S_{-1}(X) \rightarrow \dots$$

Prendiamo gli operatori di faccia così definiti:

$$F_q^i: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q, \quad F_q^i = [E_0, E_1, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_q] := [E_0, E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_q]$$

con $i \in \{0, 1, \dots, q\}$. Ognuna di queste operazioni è restrizione dell'unica applicazione affine $R^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}^q$ tale che, da E_0, \dots, E_{q-1} vertici di Δ_{q-1} , arrivo ad alcuni vertici di Δ_q :

$$F_q^i(E_j) = \begin{cases} E_j & j < i \\ E_{j+1} & j \geq i \end{cases}$$

ESEMPIO 6.3.3. Con $q=1$, $F_1^0: \Delta_0 \rightarrow \Delta_1: F_1^0 = [\hat{E}_0, E_1] = [E_1]$. Dunque $F_1^0(E_0) = E_1$ ed inoltre vale anche che $F_1^1(E_0) = E_0$. Prendiamo $q=2$: $F_2^0 = [E_1, E_2]$, per cui $F_2^0([E_0, E_1]) = [E_1, E_2]$; $F_2^1 = [E_0, E_2]$. Si può notare che la i -esima faccia è la faccia opposta all' i -esimo vertice.

DEFINIZIONE 6.3.3. Siano $\sigma \in C^0(\Delta_q, X) \subset S_q(X)$ e $i \in \{0, 1, \dots, q\}$. Definiamo la i -esima faccia di σ

$$\sigma^{(i)}: \Delta_{q-1} \rightarrow X, \quad \sigma^{(i)} := \sigma \circ F_q^i$$

Definiamo inoltre l'operatore di bordo

$$\delta_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}$$

per ogni $\sigma \in C^0(\Delta_q, X)$. Perciò $\delta_q: S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ e vale quindi

$$\delta_q \left(\sum_{\sigma \in C^0(\Delta_q, X)} a_\sigma \sigma \right) := \sum_{\sigma \in C^0(\Delta_q, X)} a_\sigma \delta_q \sigma$$

ESEMPIO 6.3.4. Prendo $q=1$. $\delta_1(\sigma) = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} = \sigma \circ F_1^0 - \sigma \circ F_1^1 = x_1 - x_0$ ove σ va da x_0 a x_1 : quindi è il vettore ottenuto dalla differenza fra arrivo e partenza. Sia $q=2$:

$$\delta_2(\sigma) = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = (\sigma \circ F_2^0) - (\sigma \circ F_2^1) + (\sigma \circ F_2^2)$$

Identificati con $x_i := \sigma(E_i)$, ho la rappresentazione dei lati dell'immagine del triangolo.

ESERCIZIO 6.3.1. Vale che $\delta_1 \circ \delta_2 = 0$, infatti

$$\delta_1(\delta_2 \sigma) = \delta_1 \sigma^{(0)} - \delta_1 \sigma^{(1)} + \delta_1 \sigma^{(2)} = (x_2 - x_1) - (x_2 - x_0) + (x_1 - x_0) = x_2 - x_1 - x_2 + x_0 + x_1 - x_0 = 0$$

Vedremo che $\delta_{q-1} \circ \delta_q = 0$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$. Inoltre

$$\dots \rightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\delta_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\delta_q} S_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$

Si definisca $\ker(\delta_q) =: Z_q(X)$, detti i q -cicli singolari e $\text{Im}(\delta_{q+1}) =: B_q(X)$, detti q -bordi singolari. Per quanto appena detto, $B_q(X) \subset Z_q(X)$. Allora

$$H_q(X) := \frac{Z_q(X)}{B_q(X)}$$

è detto q -esimo gruppo di omologia singolare di X . Per $q \geq 2$, $h, k \in \{0, 1, \dots, q\}$, $h \neq k$.

$$\mathcal{J}_q^{(h,k)}: \Delta_{q-2} \rightarrow \Delta_q, \quad \mathcal{J}_q^{(h,k)} = [E_0, \dots, \hat{E}_h, \dots, \hat{E}_k, \dots, E_q]$$

LEMMA 6.3.1. Vale che

$$F_q^i \circ F_{q-1}^j = \begin{cases} \mathcal{P}_q^{(i,j)} & \text{se } i > j \\ \mathcal{P}_q^{(i,j+1)} & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $i > j$. F_{q-1}^j come funzione è tale che

$$[E_0, \dots, E_{j-1}, E_j, \dots, E_{i-2}, E_{i-1}, \dots, E_{q-2}] \rightarrow [E_0, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_{i-1}, E_i, \dots, E_{q-1}]$$

Applicando poi F_q^i ,

$$[E_0, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_{i-1}, E_i, \dots, E_{q-1}] \rightarrow [E_0, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_q]$$

a cui mancano E_j ed E_i ; è la definizione di $\mathcal{P}_q^{(i,j)}$. Ciò vale per $i-1 \geq j+1$. Dovremmo quindi dimostrare anche per $i=j+1$ e $i \leq j$.

Vogliamo far vedere che $\delta_{q-1} \circ \delta_q = 0$ per ogni q :

$$\begin{aligned} (\delta_{q-1} \circ \delta_q) \sigma &:= \delta_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ F_q^i) \right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \delta_{q-1} (\sigma \circ F_q^i) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \circ F_q^i) \circ F_{q-1}^j = \\ &= \sum_{(i,j) \in A} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^i \circ F_{q-1}^j) \end{aligned}$$

ove $A := \{0, 1, \dots, q\} \times \{0, 1, \dots, q-1\}$. Prendo $B := \{(i, j) \in A \mid i \leq j\}$, $C := \{(i, j) \in A \mid i > j\}$:

$$\begin{aligned} (\delta_{q-1} \circ \delta_q) \sigma &= \sum_{(i,j) \in B} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^i \circ F_{q-1}^j) + \sum_{(i,j) \in C} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^i \circ F_{q-1}^j) = \\ &= \sum_{(i,j) \in B} (-1)^{i+j} \sigma \circ \mathcal{P}_q^{(i,j+1)} + \sum_{(i,j) \in C} (-1)^{i+j} \sigma \circ \mathcal{P}_q^{(i,j)} \end{aligned}$$

Considerando che $\mathcal{P}_q^{(i,j)} = \mathcal{P}_q^{(j,i)}$ e ponendo $i' = j+1$, $j' = i$, si ottiene

$$\sum_{(i',j') \in C} (-1)^{j'+i'-1} \sigma \circ \mathcal{P}_q^{j',i'} + \sum_{(i,j) \in C} (-1)^{i+j} \sigma \circ \mathcal{P}_q^{(j,i)} = 0$$

Se $c, c' \in Z_q(X)$ sono tali che $c + B_q(X) = c' + B_q(X)$, ovvero esiste $d \in S_{q+1}(X)$ tale che $c = c' + \delta_{q+1} d$, allora c e c' si dicono *omologhi* in X .

OSSERVAZIONE 6.3.2. Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ la famiglia delle componenti connesse per archi di X . Poichè Δ_q è connesso per archi e σ è C^0 , anche $\sigma(\Delta_q)$ è connessa per archi. Quindi esiste unico $i \in I$ tale che

$$\sigma(\Delta_q) \subset X_i$$

Perciò

$$S_q(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} S_q(X_i)$$

Vale quindi il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\delta_q} & S_{q-1}(X) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \bigoplus_{i \in I} S_q(X_i) & \rightarrow & \bigoplus_{i \in I} S_{q-1}(X_i) \end{array}$$

Dunque $Z_q(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} Z_q(X_i)$ e $B_q(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} B_q(X_i)$; ne concludo che

$$H_q(X) = \frac{Z_q(X)}{B_q(X)} \simeq \bigoplus_{i \in I} \frac{Z_q(X_i)}{B_q(X_i)} = \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i)$$

ESERCIZIO 6.3.2. Siano $X = \{p\}$ e $q \in \mathbb{N}$. Si noti che esiste solo $\sigma_q: \Delta_q \rightarrow X$ mappa costante. Allora

$$S_q(X) = \{k \sigma_q \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \langle \sigma_q \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Vogliamo calcolare chi sia $\delta_q(\sigma_q)$ con $q \geq 1$.

$$\delta_q(\sigma_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma_q \circ F_q^i) = \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \right) \sigma_{q-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } q \text{ è dispari} \\ \sigma_{q-1} & \text{se } q \text{ è pari } \geq 2 \end{cases}$$

Si ha quindi che $\delta_1 = 0$, δ_2 è un isomorfismo, $\delta_3 = 0$, ...

$$H_0(X) = \frac{\mathbb{Z} \langle \sigma_0 \rangle}{0} \simeq \mathbb{Z}$$

Per cui $H_0(X) = \langle [\sigma_0] \rangle$. $H_1(X) = S_1(X)/S_1(X) = 0 (= \{0\})$, $H_2(X) = 0/0 = 0$; si può vedere che $H_{2k}(X) = 0/0 = 0$, $H_{2k+1}(X) = S_{2k+1}(X)/S_{2k+1}(X) = 0$

Omomorfismo indotto da una applicazione continua

Siano X e Y due spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ una applicazione C^0 .

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\delta_q} & S_{q-1}(X) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow S_{q+1}(f) & & \downarrow S_q(f) & & \downarrow S_{q-1}(f) \\ \dots & \rightarrow & S_{q+1}(Y) & \xrightarrow{\delta'_{q+1}} & S_q(Y) & \xrightarrow{\delta'_q} & S_{q-1}(Y) \rightarrow \dots \end{array}$$

Definiamo $S_q(f)(\sigma) := f \circ \sigma$. Allora

$$S_q(f) \left(\sum_i a_i \sigma_i \right) := \sum_i a_i S_q(f)(\sigma_i) = \sum_i a_i (f \circ \sigma_i)$$

Devo verificare che $\delta'_q \circ S_q(f) = S_{q-1}(f) \circ \delta_q$. Vale

$$\begin{aligned} (\delta'_q \circ S_q(f))(\sigma) &= \delta'_q(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (f \circ \sigma) \circ F_q^i \\ (S_{q-1}(f) \circ \delta_q)(\sigma) &= S_{q-1}(f) \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ F_q^i) \right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i S_{q-1}(f)(\sigma \circ F_q^i) = \sum_{i=0}^q (-1)^i f \circ (\sigma \circ F_q^i) \end{aligned}$$

Perciò $S_q(f)$ è un complesso catena ed induce il seguente omeomorfismo

$$H_q(f): H_q(X) \rightarrow H_q(Y), \quad H_q(f)(c + B_q(X)) := S_q(f)(c) + B_q(Y)$$

Inoltre, $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$, $H_q(\text{Id}_X) = \text{Id}_{H_q(X)}$.

OSSERVAZIONE 6.3.3. Se $f: X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora per ogni $q \in \mathbb{Z}$, $H_q(f)$ è un isomorfismo da $H_q(X)$ in $H_q(Y)$ e $H_q(f)^{-1} = H_q(f^{-1})$.

TEOREMA 6.3.1. Se $f, g: X \rightarrow Y$ sono applicazioni continue omotope e $q \in \mathbb{Z}$, allora $H_q(f) = H_q(g)$.

In particolare, se f è una equivalenza omotopica, allora $H_q(f): H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ è un isomorfismo per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

COROLLARIO 6.3.1. Se X e Y sono due spazi topologici omotopicamente equivalenti, allora

$$H_q(X) \simeq H_q(Y)$$

per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

COROLLARIO 6.3.2. Se X è contraibile, allora

$$H_q(X) \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

6.4. Significato geometrico di $H_0(X)$ e $H_1(X)$.

TEOREMA 6.4.1. Sia X uno spazio topologico (diverso dal vuoto) connesso per archi. Allora

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

In particolare, fissato comunque $x_0 \in X$, $H_0(X) = \mathbb{Z} \langle [x_0] \rangle$.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che

$$\rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\delta_1} S_0(X) \xrightarrow{\delta_0} 0, \quad H_0(X) = S_0(X) / \text{Im}(\delta_1)$$

Consideriamo l'omomorfismo $\deg: S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $\deg(\sum_i a_i x_i) = \sum_i a_i$. \deg è suriettivo: infatti per ogni $a \in \mathbb{Z}$, scelto $x \in X$, $\deg(ax) = a$. Se fossi in grado di dimostrare che $\ker(\deg) = B_1(X)$, allora per il teorema degli omomorfismi avrei che $\mathbb{Z} = \text{Im}(\deg) \simeq S_0(X) / \ker(\deg) = H_0(X)$. Anzitutto, si ha

$$B_1(X) \subset \ker(\deg)$$

per ogni X . Infatti, preso $c = \sum a_i \sigma_i$, con σ_i 1-simplici di X (ovvero cammini),

$$\begin{aligned} (\deg \circ \delta_1)(c) &= \deg\left(\sum_i a_i \delta_1 \sigma_i\right) = \deg\left(\sum_i a_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0))\right) = \\ &= \sum_i a_i \deg(\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = \sum_i a_i (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Posso quindi considerare il complesso catena "ridotto"

$$\rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\delta_1} S_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Vogliamo ora vedere che $\ker(\deg) \subset B_1(X)$. Sia $c = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $a_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$ tale che $\deg(c) = 0$.

Dato che X è connesso per archi, prendo x_0 e lo connetto ad x_i con un cammino σ_i per ogni $i = 1, \dots, n$.

Definisco ora $d := \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i$.

$$\delta_1\left(\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_1 \sigma_i = \sum_{i=1}^n a_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i x_0 = \sum_{i=1}^n a_i x_i = c$$

Perciò $c \in B_1(X)$.

Sia X spazio topologico. Il complesso catena

$$\rightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\delta_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\delta_q} S_{q-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow S_1(X) \rightarrow S_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

si chiama *complesso singolare ridotto o aumentato (augmented)* di X e viene indicato con $\tilde{H}_q(X)$.

Si noti inoltre che $\tilde{H}_q(X) := H_q(X)$ se $q \geq 1$, mentre $\tilde{H}_0(X) := \ker(\deg) / B_1(X)$.

Consideriamo la successione esatta corta spezzante (l'ultimo termine è libero)

$$0 \rightarrow \ker(\deg) \xrightarrow{i} S_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Siccome è spezzante, $S_0(X) \simeq \ker(\deg) \oplus \mathbb{Z}$; dunque

$$H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

Dunque affinché X sia connesso per archi, $\tilde{H}_0(X)$ è 0.

Vogliamo studiare la relazione fra H_1 e π_1 .

PROPOSIZIONE 6.4.1. Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$ e siano

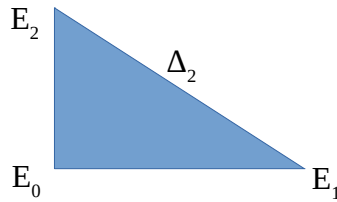
$$\alpha, \beta: I = \Delta_1 \rightarrow X$$

lacci continui di X con punto base x_0 . Se $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi_1(X, x_0)$, cioè se $\alpha \sim \beta \text{ rel } \{0, 1\}$, allora $[\alpha] = [\beta]$ in $H_1(X)$ (cioè $\alpha \sim \beta$ in $H_1(X)$, che vale se e solo se $\alpha - \beta \in B_1(X)$, che è analogo a dire che esiste $c \in S_2(X)$ tale che $\gamma_2 c = \alpha - \beta$).

DIMOSTRAZIONE. Esiste $F: \alpha \sim \beta \text{ rel } \{0, 1\}$. Si ha il seguente diagramma che identifica F :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\beta} & \\ \uparrow \epsilon_{x_0} & & \uparrow \epsilon_{x_0} \\ 0 = E_0 & \xrightarrow{\alpha} & 1 = E_1 \end{array}$$

ove $\epsilon_{x_0}(t) = x_0$ per ogni $t \in I$. Prendiamo $Q(s, t) = (1-s)E_0 + s((1-t)E_1 + tE_2)$ in modo da ottenere



Vale che Q è continuo e $Q|_{(0,1] \times I}: (0,1] \times I \rightarrow \Delta_2 \setminus \{E_0\}$ è un omeomorfismo. Definiamo $\sigma: \Delta_2 \rightarrow X$ ponendo

$$\sigma(s, t) := \begin{cases} F((Q')^{-1}(s, t)) & \text{se } (s, t) \neq E_0 \\ x_0 & \text{se } (s, t) = E_0 \end{cases}$$

Per costruzione, un intorno di E_0 ha immagine un intorno di x_0 . Calcoliamo le facce:

$$\sigma^{(0)} = \epsilon_{x_0}, \quad \sigma^{(1)} = \beta, \quad \sigma^{(2)} = \alpha$$

Allora si ha subito che $\delta_2 \sigma = \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = \epsilon_{x_0} - \beta + \alpha$. Tuttavia non vogliamo la funzione costante. Prendendo

$$\sigma_{x_0}: \Delta_2 \rightarrow X, \quad \delta_2(\sigma_{x_0}) = \epsilon_{x_0} - \epsilon_{x_0} + \epsilon_{x_0} = \epsilon_{x_0}$$

Allora $\delta_2 \sigma = \delta_2 \sigma_{x_0} - \beta + \alpha$, da cui $\delta_2(\sigma - \sigma_{x_0}) = \alpha - \beta \in B_1(X)$. Abbiamo quindi dimostrato la tesi.

COROLLARIO 6.4.1. La funzione $\chi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ tale che $\chi([\alpha]) = \alpha + B_1(X)$ con $\alpha: I \rightarrow X$ laccio continuo di base x_0 è ben definita.

TEOREMA 6.4.2. Se X è connesso per archi, allora

- χ è suriettiva
- χ è un omeomorfismo
- $\ker(\chi) = \text{"sottogruppo dei commutatori di } \pi_1(X, x_0) \text{"}$

Dal teorema appena enunciato, si ricava quindi che

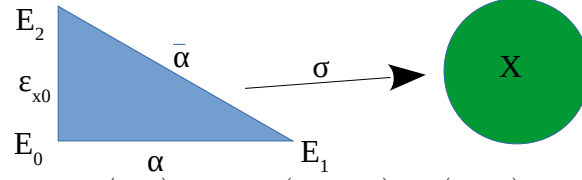
$$H_1(X) \simeq \text{Ab}(\pi(X, x_0))$$

COROLLARIO 6.4.2. Se $X = S^1$, $\chi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow H_1(S^1)$ è un isomorfismo; si ha $H_1(S^1) = \mathbb{Z} \langle \gamma \rangle$, ove

$\gamma:\Delta_1=I\rightarrow S^1$ manda $s\in I$ in $e^{2i\pi s}=(\cos(2\pi s),\sin(2\pi s))$.

OSSERVAZIONE 6.4.1. Sia $\alpha:\Delta_1=I\rightarrow X$ continuo con punto iniziale x_0 e punto finale x_1 . Vale

1) $\alpha+\bar{\alpha}\in Z_1(X)$. Infatti $\delta_1(\alpha+\bar{\alpha})=\delta_1(\alpha)+\delta_1(\bar{\alpha})=(x_1-x_0)+(x_0-x_1)=0$. Inoltre $\alpha+\bar{\alpha}\in B_1(X)$ se e solo se $[\alpha+\bar{\alpha}]=0$ in $H_1(X)$. Vale il diagramma



Si ha $\sigma(s,t):=\alpha(s)$ per ogni $(s,t)\in\Delta_2$ e $\sigma(1-s,s)=\alpha(1-s)$

2) $(\alpha*\beta)-\alpha-\beta\in B_1(X)$. Ciò vale solo se $[(\alpha*\beta)-\alpha-\beta]=0$ in $H_1(X)$. Dato che vale

$$(\alpha*\beta)-\alpha-\beta=((\alpha*\beta)+\bar{\alpha}-\beta)-\bar{\alpha}-\alpha$$

e $\bar{\alpha}+\alpha\in B_1(X)$, allora mi basta provare che $(\alpha*\beta)+\bar{\alpha}-\beta\in B_1(X)$. Prendiamo $\rho:\mathbb{R}^2\rightarrow L$ proiezione ortogonale che segue l'ipotenusa del triangolo che rappresenta gli archi con E_0, E_1, E_2 come vertici.

Definisco $\sigma(y):=(\gamma)(\rho(y))$, ove γ è la riparametrizzazione di $\alpha*\beta$; vale per ogni y appartenente al triangolo.

$$\sigma^{(0)}=\alpha*\beta, \quad \sigma^{(1)}=\beta, \quad \sigma^{(2)}=\bar{\alpha}$$

Allora $\delta_2\sigma=(\alpha*\beta)-\beta+\bar{\alpha}\in B_1(X)$.

IL TEOREMA DI MAYER-VIETORIS

7.1. Successione esatta di Mayer-Vietoris

DEFINIZIONE 7.1.1. $C' = \{(C'_q, \delta'_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$, $C = \{(C_q, \delta_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$, $C'' = \{(C''_q, \delta''_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$. Si prenda la successione

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$$

dove $f: C' \rightarrow C$ e $g: C \rightarrow C''$ sono morfismi di complessi catena ($f = \{f_q: C'_q \rightarrow C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$, per cui si ottiene che $H(f_q): H_q(C') \rightarrow H_q(C)$). Data successione si dice *esatta corta* se per ogni $q \in \mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow C'_q \xrightarrow{f_q} C_q \xrightarrow{g_q} C''_q \rightarrow 0$$

Per cui $\text{Im}(f_q) = \ker(g_q)$, con f_q iniettiva e g_q suriettiva.

Vale il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \delta'_{q+1} & \rightarrow & C'_q & \xrightarrow{\delta'_q} & C'_{q-1} & \xrightarrow{\delta'_{q-1}} & C'_{q-2} \rightarrow \\
 & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} & & \downarrow f_{q-2} & \\
 \delta_{q+1} & \rightarrow & C_q & \xrightarrow{\delta_q} & C_{q-1} & \xrightarrow{\delta_{q-1}} & C_{q-2} \rightarrow \\
 & \downarrow g_q & & \downarrow g_{q-1} & & \downarrow g_{q-2} & \\
 \delta''_{q+1} & \rightarrow & C''_q & \xrightarrow{\delta''_q} & C''_{q-1} & \xrightarrow{\delta''_{q-1}} & C''_{q-2} \rightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

ed inoltre, la successione descritta qua sotto è detta *esatta* (se δ_q esiste).

$$H_q(C') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C'') \xrightarrow{\exists \delta_q?} H_{q-1}(C') \xrightarrow{H_{q-1}(f)} H_{q-1}(C) \xrightarrow{H_{q-1}(g)} H_{q-1}(C'')$$

Si noti che $H_q(C'') = \ker(\delta''_q)$ e che $H_{q-1}(C') = \ker(\delta'_{q-1}) / \text{Im}(\delta'_{q-1})$. Vediamo se esiste δ_q , che definiamo come segue:

$$\delta_q(z''_q + B_q(C'')) := C'_{q-1} + B_{q-1}(C')$$

Si verifica che data funzione esiste.

DEFINIZIONE 7.1.2. Siano $C = \{(C_q, \delta_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ e $C' = \{(C'_q, \delta'_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ due complessi catena. Definiamo la *somma diretta*:

$$C \oplus C' := \{(C_q \oplus C'_q, \delta_q \oplus \delta'_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$$

dove $\delta_q \oplus \delta'_q: C_q \oplus C'_q \rightarrow C_{q-1} \oplus C'_{q-1}$ è tale che $\delta_q \oplus \delta'_q(c, c') = (\delta_q c, \delta'_q c')$.

Sia X uno spazio topologico e siano X_1, X_2 due sottospazi di X (non vuoti). Assumiamo $X_1 \cup X_2 = X$.

Consideriamo i due diagrammi

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & & S_q(X_1) \\
 \swarrow j_1 & \searrow i_1 & \swarrow S_q(j_1) \quad \searrow S_q(i_1) \\
 X_1 \cap X_2 & X, & S_q(X_1 \cap X_2) \quad S_q(X) \\
 \swarrow j_2 & \searrow i_2 & \swarrow S_q(j_2) \quad \searrow S_q(i_2) \\
 X_2 & & S_q(X_2)
 \end{array}$$

Sia $q \in \mathbb{Z}$:

$$0 \rightarrow S_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi_q} S_q(X_1) \oplus S_q(X_2) \xrightarrow{\psi_q} \langle S_q(X_1), S_q(X_2) \rangle \rightarrow 0$$

ove $\varphi_q := (S_q(j_1), -S_q(j_2))$ e $\psi_q((c_1, c_2)) := S_q(i_1)(c_1) + S_q(i_2)(c_2)$. Si nota subito che $\psi_q \circ \varphi_q = S_q(i_1) \circ S_q(j_1) - S_q(i_2) \circ S_q(j_2) = S_q(i_1 \circ j_1) - S_q(i_2 \circ j_2) = 0$

Unendo più successioni esatte corte di questo genere, otteniamo

$$0 \rightarrow S(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi = \{\varphi_q\}_q} S(X_1) \oplus S(X_2) \xrightarrow{\psi = \{\psi_q\}_q} S\{X_1, X_2\} \rightarrow 0$$

Si verifica quindi che

$$H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\Phi_q} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\Psi_q} H_q(S\{X_1, X_2\})$$

ove è chiaro che $\Phi_q = (H_q(j_1), -H_q(j_2))$, $\Psi_q = H_q(i_1) + H_q(i_2)$. Possiamo anche considerare

$$H_q(S\{X_1, X_2\}) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$$

e continuare il procedimento. Ma noi vogliamo studiare X ; infatti $\langle S_q(X_1), S_q(X_2) \rangle \subset S_q(X)$ ma non sempre sono uguali.

TEOREMA 7.1.1: Di Mayer-Vietoris. Se $\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 = X$ (in particolare se X_1, X_2 sono aperti di X e vale che $X_1 \cup X_2 = X$), allora $S\{X_1, X_2\} = S(X)$, ovvero la seguente successione è esatta:

$$\rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\Phi_q} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\Psi_q} H_q(X) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_{q-1}(X_1) \oplus H_{q-1}(X_2) \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow$$

dove $\Phi_q := (H_q(j_1), -H_q(j_2))$ e $\Psi_q := H_q(i_1) + H_q(i_2)$. Si tratta della *successione di Mayer-Vietoris associata alla terna* (X, X_1, X_2) .

Posso considerare la stessa successione per l'omologia, ovvero si può "tildare" il tutto.

ESEMPI 7.1.1.

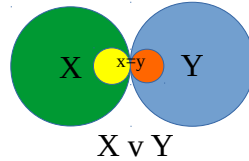
1) Siano X e Y spazi topologici, $x \in X$ ed $y \in Y$, U_x un intorno aperto contraibile di x in X e U_y un intorno aperto contraibile di y in Y . Definiamo

$$X \vee Y := \frac{X \sqcup Y}{\sim_{x \sim y}}$$

ove con " $x \sim y$ " è la relazione che identifica ogni punto con se stesso, tranne x ed y che sono identificati anche fra loro. Per cui in $X \vee Y$, $x = y$. Poniamo

$$\begin{aligned} X_1 &= \rho(X \cup U_y) \\ X_2 &= \rho(Y \cup U_x) \end{aligned}$$

ove ρ identifica il passaggio al quoziente.



Si vede che $X_1 \cup X_2 = X \vee Y$. Si noti che $X_1 \cap X_2$ è contraibile; allora $X_1 \sim X$ ed $X_2 \sim Y$. Scriviamo la successione di Mayer-Vietoris per questo caso:

$$\rightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X \vee Y) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2)$$

ove $\tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \simeq 0$, $\tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \simeq \tilde{H}_q(X) \oplus \tilde{H}_q(Y)$ ed $\tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \simeq 0$. Si ottiene

$$\tilde{H}_q(X \vee Y) \simeq \tilde{H}_q(X) \oplus \tilde{H}_q(Y)$$

2) Omologia delle sfere. Sia $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.

Vogliamo calcolare $\tilde{H}_q(S^n)$ per ogni $n, q \in \mathbb{N}$. Per $q=0$, $\tilde{H}_0(S^n)=0$ se $n \geq 1$ per quanto visto nel capitolo precedente; $\tilde{H}_0(S^0)=\mathbb{Z}$. Per $q \geq 1$ fisso $n=0$ e studio $H_q(S^0)=H_q(\{-1\}) \oplus H_q(\{1\})=0$. Prendiamo $n \geq 1$. Poniamo $X_1 := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -1/2\}$ ed $X_2 := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < 1/2\}$. Si vede subito che $X_1 \cap X_2$ è una fascia equatoriale ed ha come retratto S^{n-1} . Applichiamo Mayer-Vietoris. Notiamo che X_1, X_2 sono contraibili, perciò

$$\rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_{q-1}(X_1) \oplus H_{q-1}(X_2) \rightarrow$$

Per cui vale anche con \tilde{H}_q ; ottengo perciò

$$\tilde{H}_q(S^{n-1}) \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_q(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0$$

Se ne ricava $\tilde{H}_q(S^n) \simeq \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$ e per ogni $n \geq 1$. Vale quindi

$$\tilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q=n \\ 0 & \text{se } q \neq n \end{cases}$$

se $n=0$, vale che

$$H_q(S^0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } q=0 \\ 0 & \text{se } q \neq 0 \end{cases}$$

per $n \geq 1$, vale invece

$$H_q(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q \in \{0, n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vogliamo studiare i generatori di $H_n(S^n)$ con $n \geq 1$. Con $n=1$, $H_1(S^1) = \langle [\gamma] \rangle$ con γ laccio. Con $n=2$ si vede che

$$H^2(S^2) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(S^1)$$

Dalla circonferenza centrale di S^2 , posso costruire dei triangoli che vanno da un segmento della circonferenza al polo nord ed al polo sud. Ogni triangoli rappresenta il cono su un triangolo sferico. Ritroviamo $H^2(S^2) \simeq H^1(S^1)$.

3) Prendiamo un bouquet di S^1 n -volte.

$$H_q(\vee_{i=1}^n S_i^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q=0 \\ \mathbb{Z}^n & \text{se } q=1 \\ 0 & \text{se } q \geq 2 \end{cases}$$

Per $q \geq 2$ si ha 0 perchè, per quanto visto in 1 ed in 2, vedo subito che $H_q(\vee_{i=1}^n S_i^1) = H_q(S^1)^n = 0^n = 0$.

7.2. Omologia relativa

Sia X uno spazio topologico e sia $q \in \mathbb{N}$. Dato $\sigma \in C^0(\Delta_q, X)$, il *supporto* $|\sigma|$ di σ è definito ponendo $|\sigma| := \sigma(\Delta_q)$

Sia $c = \sum_{\sigma \in C^0(\Delta_q, X)} a_\sigma \sigma$ con $a_\sigma \in \mathbb{Z}$. Poniamo

$$I_c := \{\sigma \in C^0(\Delta_q, X) \mid a_\sigma \neq 0\}$$

Definiamo il *supporto* $|c|$ di c ponendo

$$|c| := \bigcup_{\sigma \in I_c} |\sigma|$$

Osserviamo che $c=0$ se e soltanto se $|c| = \emptyset$.

Consideriamo un sottospazio topologico A di X ; equivalentemente, possiamo prendere la coppia (X, A) .

Sia $i: A \rightarrow X$ l'inclusione e sia $S_q(i): S_q(A) \rightarrow S_q(X)$, che è la mappa iniettiva

$$\sum_{\sigma} a_{\sigma} \sigma \rightarrow \sum_{\sigma} a_{\sigma} (i \circ \sigma)$$

Identificheremo $S_q(A)$ con $S_q(i)(S_q(A)) \subset S_q(X)$. Segue che

$$S_q(A) = \{c \in S_q(X) \mid |c| \subset A\} \subset S_q(X)$$

Definiamo

$$S_q(X, A) := \frac{S_q(X)}{S_q(A)}$$

come il *gruppo delle q -catene singolari relative di X modulo A* o *gruppo delle q -catene di (X, A)* . Si vede che dato gruppo è abeliano. Grazie al fatto che $\delta_q(S_q(A)) \subset S_{q-1}(A)$, si ha $|\delta_q \sigma| \subset |\sigma| \subset A$. Perciò vale il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \rightarrow & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\delta_q} & S_{q-1}(X) & \rightarrow \\ & \downarrow \pi_{q-1} & & \downarrow \pi_{q-1} & & \downarrow \pi_{q-1} & \\ & \frac{S_{q+1}(X)}{S_{q+1}(A)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_{q+1}} & \frac{S_q(X)}{S_q(A)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_q} & \frac{S_{q-1}(X)}{S_{q-1}(A)} & \end{array}$$

Vogliamo verificare che anche sotto si tratta di una catena:

$$\bar{\delta}_{q-1} \bar{\delta}_q(c + S_q(A)) := \delta_{q-1} \circ \delta_q(c) + S_{q-2}(A) = 0$$

L'omologia del complesso catena $\{(S_q(X, A), \bar{\delta}_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$, cioè

$$H_q(X, A) := \frac{\ker(\bar{\delta}_q)}{\text{Im}(\bar{\delta}_{q-1})}$$

è detta q -esimo gruppo di omologia relativa di X modulo A .

OSSERVAZIONE 7.2.1. Se $A = \emptyset$, $S_q(A) = 0$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$, $S_q(X, A) = S_q(X)$, $\bar{\delta}_q = \delta_q$. Perciò,

$$H_q(X, \emptyset) \simeq H_q(X)$$

per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

Interpretazione geometrica di $H_q(X, A)$

DEFINIZIONE 7.2.1. Sia $Z_q(X, A) := \{c \in S_q(X) \mid \delta_q c \in S_{q-1}(A)\} = \{c \in S_q(X) \mid |\delta_q c| \subset A\}$ il *gruppo dei q -cicli relativi di X modulo A* .

Sia $B_q(X, A) := \{c \in S_q(X) \mid \exists d \in S_{q+1}(X), \exists c_A \in S_q(A) \text{ tali che } c = c_A + \delta_{q+1} d\}$ il *gruppo dei q -bordi relativi di X modulo A* . Si noti che $B_q(X, A) = \{c \in S_q(X) \mid \exists d \in S_{q+1}(X) \text{ tale che } |c - \delta_{q+1} d| \subset A\}$.

OSSERVAZIONE 7.2.2. $S_q(A) \subset B_q(X, A) \subset Z_q(X, A) \subset S_q(X)$.

TEOREMA 7.2.1. Vale che

$$H_q(X, A) \simeq \frac{Z_q(X, A)}{B_q(X, A)}$$

DIMOSTRAZIONE. Vale che

$$\begin{aligned} \ker(\bar{\delta}_q) &= \{c + S_q(A) \in S_q(X)/S_q(A) \mid (\delta_q c) + S_{q-1}(A) = 0 + S_{q-1}(A)\} = \\ &= \{c + S_q(A) \in S_q(X)/S_q(A) \mid \delta_q c \in S_{q-1}(A)\} \end{aligned}$$

Inoltre, si vede subito che $\pi_q^{-1}(\ker(\bar{\delta}_q)) = \{c \in S_q(X) \mid \delta_q c \in S_{q-1}(A)\} = Z_q(X, A)$. Perciò

$$\pi_q \mid : Z_q(X, A) \rightarrow \ker(\bar{\delta}_q)$$

è suriettivo. Dunque $\ker(\pi_q \mid) = \ker(\pi_q) \cap Z_q(X, A) = S_q(A) \cap Z_q(X, A) = S_q(A)$. Grazie al primo teorema sugli omeomorfismi, si ottiene che

$$\ker(\bar{\delta}_q) \simeq \frac{Z_q(X, A)}{S_q(A)}$$

Applicando la stessa procedura ma su $\bar{\delta}_{q+1}$ partendo dall'immagine, si ottiene che

$$\pi_q \mid : B_q(X, A) \rightarrow \text{Im}(\bar{\delta}_{q+1})$$

è suriettivo e dunque

$$\text{Im}(\bar{\delta}_{q+1}) \simeq \frac{B_q(X, A)}{S_q(A)}$$

Per cui

$$H_q(X, A) = \frac{\ker(\bar{\delta}_q)}{\text{Im}(\bar{\delta}_{q+1})} \simeq \left(\frac{Z_q(X, A)}{S_q(A)} \right) / \left(\frac{B_q(X, A)}{S_q(A)} \right) \simeq \frac{Z_q(X, A)}{B_q(X, A)}$$

OSSERVAZIONE 7.2.3. Siano $\{X_k\}_{k \in K}$ le componenti connesse per archi di X e sia $A_k := X_k \cap A$. Vale che $B_q(X, A) \simeq \oplus_k B_q(X_k, A)$, $Z_q(X, A) \simeq \oplus_k B_q(X_k, A)$ e $\delta_q(S_q(A_k)) \subset S_{q-1}(A_k)$. Per cui

$$H_q(X, A) \simeq \oplus_k H_q(X_k, A)$$

per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

Vogliamo vedere la successione esatta lunga di coppia (X, A) .

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & S_{q+1}(A) & \xrightarrow{\delta'_{q+1}} & S_q(A) & \xrightarrow{\delta'_q} & S_{q-1}(A) & \rightarrow \\ & \downarrow S_{q+1}(i) & & \downarrow S_q(i) & & \downarrow S_{q-1}(i) & \\ \rightarrow & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\delta_q} & S_{q-1}(X) & \rightarrow \\ & \downarrow \pi_{q-1} & & \downarrow \pi_{q-1} & & \downarrow \pi_{q-1} & \\ \rightarrow & \frac{S_{q+1}(X)}{S_{q+1}(A)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_{q+1}} & \frac{S_q(X)}{S_q(A)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_q} & \frac{S_{q-1}(X)}{S_{q-1}(A)} & \rightarrow \end{array}$$

Grazie a proposizione 7.2 (appunti di Occhetta), si ha che esiste ∂_q tale che

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(\pi_q)} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} H_{q-1}(X) \xrightarrow{H_{q-1}(\pi_{q-1})} H_{q-1}(X, A)$$

è una successione esatta.

PROPOSIZIONE 7.2.1. Se A è retrato di X , allora

$$H_q(X) \simeq H_q(A) \oplus H_q(X, A)$$

per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. A retrato di X significa che esiste $r : X \rightarrow A$ continua tale che

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A$$

con $i \circ r = \text{Id}_A$. Applicando H_q , si ottiene

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(r)} H_q(A) \xrightarrow{\quad} 0$$

e vale $H_q(i) \circ H_q(r) = Id_{H_q(A)}$. Allora $H_q(i)$ è iniettiva per ogni q . Perciò vale

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(X)$$

Da cui posso estrarre una successione esatta corta

$$0 \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow 0$$

Voglio vedere che la successione esatta corta sia spezzante: ma lo so per ipotesi, dato che esiste r retrazione. Ho quindi ricavato la tesi.

Applichiamo questo risultato. Siano $k, n \in \mathbb{N}$ tali che $0 \leq k \leq n$. $S^k = \{x \in R^{k+1} \mid |x|_{k+1} = 1\}$. Inoltre, posso vedere che $S^k \subset S^n$ considerando $\mathbb{R}^{k+1} \simeq \mathbb{R}^{k+1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Iterando questa idea, si ottiene

$$S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots \subset S^k \subset \dots \subset S^n$$

Se S^k fosse un retratto di S^n , allora $H_k(S^n) \simeq H_k(S^k) \oplus H_k(S^n, S^k)$, ma $H_k(S^n) = 0$ e $H_k(S^k) \simeq \mathbb{Z}$. Assurdo.

PROPOSIZIONE 7.2.2. $H_0(X, A)$ è isomorfo al gruppo abeliano libero generato dalle componenti connesse per archi di X che non intersecano A .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{X_k\}_{k \in K}$ l'insieme delle componenti connesse per archi di X .

$$H_0(X, A) \simeq \bigoplus_{k \in K} H_0(X_k, A_k)$$

ove $A_k := X_k \cap A$. Mi basta dimostrare che se X è connesso per archi ed $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$, allora si ha che

$$H_0(X, A) = 0$$

Si noti che $H_0(X, A) \simeq Z_0(X, A)/B_0(X, A)$. $Z_0(X, A) = \{c \in S_0(X) \mid |\delta_0 c| \subset A\} = S_0(X)$. Devo verificare che $B_0(X, A) = S_0(X)$.

$$B_0(X, A) = \{c \in S_0(X) \mid \exists d \in S_1(X) \text{ tale che } |c - \delta_1 d| \subset A\}$$

Fissiamo $a \in A$. Se $c \in S_0(X)$, allora $c = \sum_{i=1}^n a_i P_i$ con $a_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in X$. Poichè X è connesso per archi,

per ogni i esiste $\sigma_i: \Delta_1 = I \rightarrow X$ tale che $\delta_1 \sigma_i = P_i - a$. Definiamo $d := \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \in S_1(X)$.

$$c - \delta_1 d = \sum_{i=1}^n a_i P_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_1 \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i P_i - \sum_{i=1}^n a_i P_i + \sum_{i=1}^n a_i a = a \sum_{i=1}^n a_i$$

per cui $|c - \delta_1 d| \subset A$. Ho finito.

ESEMPIO 7.2.1: Omologia del toro. Siano $X_1 = D^2(R)$ ed $X_2 = X \setminus D^2(r)$ con X toro ed $R > r$. Si vede che $X_1 \cap X_2 = D^2(R) \setminus D^2(r)$. Per ogni q ,

$$\tilde{H}_q(X_1) = \{0\}$$

Mentre

$$\tilde{H}_q(X_2) = \begin{cases} \{0\} & q \neq 1 \\ \mathbb{Z} \langle [a] \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle [b] \rangle & q = 1 \end{cases}$$

Inoltre, $\tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) = \{0\}$ per $q \neq 1$, mentre $\tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z} \langle [c] \rangle$. Per $q \geq 3$,

$$\tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) = \{0\} \rightarrow \tilde{H}_q(T) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) = \{0\}$$

per cui $\tilde{H}_q(T) = \{0\}$ per $q \geq 3$. Studiamo gli altri casi.

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(T) \xrightarrow{\delta_2} \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi_1} \tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) \xrightarrow{\psi_1} \tilde{H}_1(T) \rightarrow 0$$

Studiamo $\tilde{H}_2(T)$. δ_2 è iniettiva, $\tilde{H}_2(T) \simeq \text{Im } \delta_2$ e $\text{Im } \delta_2 = \ker \varphi_1$. Dunque $\tilde{H}_2(T) \simeq \ker \varphi_1$. Per $\tilde{H}_1(T)$, si

noti che ψ_1 è suriettiva e per il teorema di isomorfismo si ha

$$\tilde{H}_1(T) \simeq \frac{\tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2)}{\ker \psi_1}$$

Usando l'esattezza del nucleo, si vede che $\ker \psi_1 = \text{Im } \varphi_1$. Studiamo la funzione φ_1

$$\varphi_1 = (H_1(j_1), -H_1(j_2)): \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z} \langle [c] \rangle \rightarrow \tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) = \{0\} \oplus \mathbb{Z} \langle [a] \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle [b] \rangle$$

Per cui,

$$H_1(j_1): \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z} \langle [c] \rangle \rightarrow \tilde{H}_1(X_1) = \{0\}$$

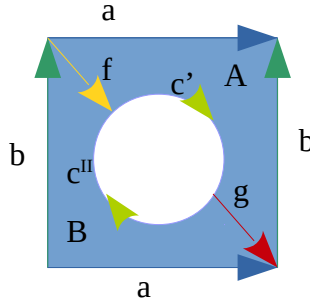
è costante, ovvero tale che $[c] \rightarrow 0$.

$$H_2(j_2): \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z} \langle [c] \rangle \rightarrow \tilde{H}_1(X_2) = \mathbb{Z} \langle [a] \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle [b] \rangle$$

Vogliamo trovare una relazione in $\tilde{H}_1(X_2)$ tra a, b e c . Dobbiamo costruire un 2-simplesso singolare

$$\sigma: \Delta_2 \rightarrow X_2$$

tale che a, b e c compaiano in $\delta_2 \sigma$. Anzitutto, vogliamo che il toro risulti questa figura:



Costruiamo due funzioni: $\sigma_1: \Delta_2 \rightarrow A$, $\sigma_2: \Delta_2 \rightarrow B$, ove A è descritto da $fc'gba^{-1}$ e B da $f(c'')^{-1}ga^{-1}b$.

$$\delta_2 \sigma = \delta_2(\sigma_1 + \sigma_2) = \delta_2 \sigma_1 + \delta_2 \sigma_2 = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \sigma_i(E_j E_k) + \sum_{i=0}^2 (-1)^i \sigma_2(E_j E_k)$$

con $j, k \neq i$. Allora

$$\begin{aligned} \delta_2 \sigma &= \sigma_1(\overline{E_1 E_2}) - \sigma_1(\overline{E_0 E_2}) + \sigma_1(\overline{E_0 E_1}) + \sigma_2(\overline{E_1 E_2}) - \sigma_2(\overline{E_0 E_2}) + \sigma_2(\overline{E_0 E_1}) = \\ &= f * c' * g - \bar{b} + \bar{a} + \bar{g} * c'' * \bar{f} - b + a \end{aligned}$$

Dunque,

$$[0] = [f * c' * g - \bar{b} + \bar{a} + \bar{g} * c'' * \bar{f} - b + a] = [f * c' * g * \bar{g} * c'' * \bar{f} - (\bar{b} * b) + (\bar{a} * a)]$$

grazie al lemma che afferma che, preso $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_n$ cappio, allora $[\gamma] = [\gamma_1 + \dots + \gamma_n] \in H_1(X)$. Da cui

$$[0] = [f * c' * c'' * \bar{f}] = [f + c' + c'' + \bar{f}] = [f + c + \bar{f}] = [c + f * \bar{f}] = [c]$$

Ne ricavo che $[\delta_2 \sigma] = [0]$; $H_1(j_2)([c]) = 0$. Dunque

$$\tilde{H}_2(T) = \ker \varphi_1 - \ker (H_1(j_1), -H_1(j_2)) = \mathbb{Z}$$

Ed inoltre

$$\tilde{H}_1(T) = \frac{\tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2)}{\text{Im } \varphi_1} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

In sintesi,

$$\tilde{H}_q(T) = \begin{cases} \{0\} & q \neq 1, 2 \\ \mathbb{Z} \langle [a] \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle [b] \rangle & q = 1 \\ \mathbb{Z} & q = 2 \end{cases}$$

ESEMPIO 7.2.2: Omologia ridotta del piano proiettivo. Sia $X_1 = D^1(R)$, $X_2 = \mathbb{R} \mathcal{P}^2 \setminus D^1(r)$; $r < R$.

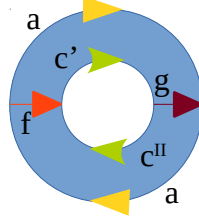
Si ha quindi $X_1 \cap X_2 = D^1(R) \setminus D^1(r)$. $\tilde{H}_q(X_1) = \{0\}$ per ogni q ,

$$\tilde{H}_q(X_2) = \begin{cases} \{0\} & q \neq 1 \\ \mathbb{Z}\langle [a] \rangle & q = 1 \end{cases}, \quad \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \begin{cases} \{0\} & q \neq 1 \\ \mathbb{Z}\langle [c] \rangle & q = 1 \end{cases}$$

Per $q \geq 3$, si ottiene, come in esempio 7.2.1, $\tilde{H}_q(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) = \{0\}$.

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) \xrightarrow{\delta_2} \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi_1} \tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) \xrightarrow{\psi_1} \tilde{H}_1(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) \rightarrow 0$$

Allora $\tilde{H}_2(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) = \ker \varphi_1$ e $\tilde{H}_1(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) = (\tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2)) / \text{Im } \varphi$. Vale che $H_1(j_1): [c] \rightarrow 0$, analogamente a esempio 7.2.1. $H_1(j_2): \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}\langle [c] \rangle \rightarrow \tilde{H}_1(X_2) = \mathbb{Z}\langle [a] \rangle$. Per capire qual è l'immagine di c bisogna costruire un 2-simplesso singolare $\sigma: \Delta_2 \rightarrow X_2$ tale che c ed a compaiano in $\delta_2 \sigma$.



Come prima, prendo $\sigma_1: \Delta_2 \rightarrow A$ e $\sigma_2: \Delta_2 \rightarrow B$ con A descritta da $fc'ga$ e B da $f(c'')^{-1}ga^{-1}$.

$$\delta_2(\sigma_1 + \sigma_2) = \delta_2(\sigma_1) + \delta_2(\sigma_2)$$

Da cui otteniamo $[0] = [a + f * c' * g + a + \bar{c} * c'' * \bar{f}] = [a + a + f * c' * g * \bar{g} * c'' * \bar{f}] = [2a + c + f * \bar{f}] = [2a + c]$.

Dunque $\varphi_1 = (H_1(j_1), -H_1(j_2)): \mathbb{Z}\langle [c] \rangle \rightarrow \{0\} \oplus \mathbb{Z}\langle [a] \rangle$ manda $[c] \rightarrow (0, [2a])$. Vale che

$$\tilde{H}_2(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) \simeq \ker \varphi_1 = \{0\}, \quad \tilde{H}^1(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) \simeq \frac{\tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2)}{\text{Im } \varphi_1} = \frac{\mathbb{Z}\langle [a] \rangle}{\mathbb{Z}\langle [2a] \rangle} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2 = \text{Ab}(\pi_1(\mathbb{R}\mathcal{P}^2))$$

Dunque

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}\mathcal{P}^2) = \begin{cases} \{0\} & q \neq 1 \\ \mathbb{Z}_2 & q = 1 \end{cases}$$