Tema di Statistica Matematica

Sessione autunnale

10 settembre 2019

1) Una grandezza incognita μ é stata misurata piú volte usando due strumenti con precisioni diverse e note. Possiamo schematizzare la situazione pensando a una prima serie di misurazioni $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ rappresentabili come variabili casuali i.i.d. con legge di distribuzione $N(\mu, \sigma_X^2)$ e a una seconda serie di misurazioni anch'esse rappresentabili tramite una serie di variabili casuali $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ sempre i.i.d. con legge di distribuzione $N(\mu, \sigma_Y^2)$. Le deviazioni standard σ_X e σ_Y sono note mentre il parametro μ é da stimare; per far ció usiamo come stimatore la statistica $T = a\bar{X}_m + (1-a)\bar{Y}_n, \ \ a \in I\!R$.

a) Calcolare la media e varianza di T.

b) Trovare il valore di a in modo da minimizzare l'errore quadratico medio di T.

c) Fissato a pari al valore trovato al punto precedente, qual é la distribuzione di T?

d) Costruire un intervallo di confidenza di livello $(1-\alpha)$ per μ basato su T.

2) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale estratto da una popolazione con legge di densitá

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} 1\!\!I_{I\!R^+}(x).$$

a) Trovare l'insieme dei valori ammissibili per θ.

b) La famiglia di distribuzioni in questione appartiene alla classe delle famiglie esponenziali a $k = 1$ parametro?

c) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ.

d) Lo stimatore ottenuto al punto c) é non distorto per θ? É anche efficiente (nel senso di Bahadur) per θ?

3) Un ingegnere, ricercatore per una ditta produttrice di pneumatici, sta studiando la durata degli pneumatici prodotti impiegando una nuova mescola. In via sperimentale, sono state prodotte 16 gomme e ne é stata testata la vita su un circuito di prova ottenendo 60139.7 km come media campionaria relativa ai chilometri percorsi e 3645.94 km come deviazione standard campionaria relativa ai medesimi. Assumendo che la durata dello pneumatico di nuova generazione segua una distribuzione Normale, costruire un intervallo di confidenza al 95% per la durata media dello pneumatico.

4) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale estratto da una distribuzione Gamma di parametri (η, θ) con $\eta > 0$ noto mentre $\theta > 0$ é un parametro incognito.

a) Dimostrare che la regione critica del test piú potente di livello α per il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = \theta_0 \;\; vs. \;\; H_1 : \theta = \theta_1, \;\; \text{con} \;\; \theta_0 < \theta_1$$

ha forma

$$\mathcal{C} = \left\{ (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathcal{X} : \; \sum_{i=1}^{n} X_i \geq B \right\}$$

per una qualche costante $B > 0$.

b) Trovare la potenza del test in questione.

c) Il test corrispondente alla regione critica in a) é anche uniformemente piú potente per alternative unilaterali $H_1 : \theta > \theta_0$?

5) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale estratto da una distribuzione di Poisson con funzione di massa probabilistica

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!} \, \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(x), \;\; \lambda > 0.$$

dove $\mathbb{N}^*$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali esteso allo zero.

a) Determinare la funzione generatrice dei momenti, media, varianza e la distribuzione di $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) Trovare una statistica sufficiente e lo stimatore di massima verosimiglianza per λ.

c) Esiste uno stimatore $UMVU$ di λ? Se sí, individuarlo.

d) Assumendo che l'insieme $(3, 4, 2, 7, 4, 5, 8, 1, 0, 0)$ rappresenti l'effettiva determinazione di un campione casuale di $n = 10$ elementi estratto dalla distribuzione di Poisson in questione, calcolare il valore della stima di massima verosimiglianza del parametro λ e stimare la probabilità dell'evento $\{X_1 = 1\}$.

e) Dimostrare che lo stimatore $T_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ é uno stimatore non distorto per $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$. Determinare, inoltre, uno stimatore $UMVU$ di $\tau(\lambda)$.

f) Calcolare il limite inferiore di Cramer-Rao per lo stimatore di $e^{-\lambda}$.

Ex. 1)

$$X_1, X_2, \dots, X_m \overset{IID}{\sim} N(\mu, \sigma_X^2)$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \overset{IID}{\sim} N(\mu, \sigma_Y^2)$$

indipendenti

Le DEVIAZIONI STANDARD σ_X e σ_Y sono NOTE mentre possiamo stimare il parametro μ tramite lo STIMATORE

$$T = a \bar{X}_m + (1-a) \bar{Y}_n, \quad a \in \mathbb{R}$$

a)

$$E_\mu(T) = E(a \bar{X}_m + (1-a) \bar{Y}_n) = a\mu + (1-a)\mu = \mu, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$Var_\mu(T) = Var(a \bar{X}_m + (1-a) \bar{Y}_n) = a^2 Var(\bar{X}_m) + (1-a)^2 Var(\bar{Y}_n)$$

$$= a^2 \frac{\sigma_X^2}{m} + (1-a)^2 \frac{\sigma_Y^2}{n}$$

b) Essendo T stimatore NON DISTORTO di μ, ergo $B_\mu(T) = 0$,

$$MSE_\mu(T) = Var_\mu(T)$$

$$= a^2 \frac{\sigma_X^2}{m} + (1-a)^2 \frac{\sigma_Y^2}{n} = g(a)$$

sicché

$$\frac{d}{da} MSE_\mu(T) = 2a \frac{\sigma_X^2}{m} - 2(1-a) \frac{\sigma_Y^2}{n} = 0$$

da cui

$$a = \frac{m \sigma_Y^2}{n \sigma_X^2 + m \sigma_Y^2}$$

NB) $$\frac{d^2}{da^2} MSE_\mu(T) = 2 \frac{\sigma_X^2}{m} + 2 \frac{\sigma_Y^2}{n} > 0$$

c) Ora

$$T \sim N(\mu, \sigma_T^2)$$

con

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{m\sigma_Y^2}{n\sigma_X^2 + m\sigma_Y^2}\right)^2 \frac{\sigma_X^2}{m} + \left(1 - \frac{m\sigma_Y^2}{n\sigma_X^2 + m\sigma_Y^2}\right)^2 \frac{\sigma_Y^2}{n}$$

$$= \left(\frac{m\sigma_Y^2}{m\sigma_X^2 + m\sigma_Y^2}\right)^2 \frac{\sigma_X^2}{m} + \left(\frac{n\sigma_X^2}{n\sigma_X^2 + m\sigma_Y^2}\right) \frac{\sigma_Y^2}{n}$$

NB: $T = a\bar{X}_m + (1-a)\bar{Y}_n$ è COMBINAZIONE LINEARE di DUE V.C. NORMALI INDIPENDENTI e di CONSEGUENZA, T ha ancora DISTRIBUZIONE NORMALE in virtù della PROPRIETÀ di RIPRODUCIBILITÀ di opportuni PARAMETRI μ e σ_T^2.

d) Possiamo sfruttare la statistica PIVOT per μ data da

$$\frac{T - \mu}{\sigma_T} \sim N(0,1)$$

per costruire un INTERVALLO di CONFIDENZA per μ di livello $(1-\alpha)$. Quest'ultimo sarà dato da

$$IC_\mu(T) = \left[t - z_{1-\alpha/2}\,\sigma_T \,,\; t + z_{1-\alpha}\,\sigma_T\right]$$

con t valore di T calcolato sui dati a disposizione.

Es. 2)

a) Affinché la densità sia ben definita, NON NEGATIVA e NORMALIZZATA, θ deve essere MAGGIORE di ZERO, sicché

$$\Theta = \{\theta : \theta > 0\}$$

b) Possiamo verificare l'appartenenza a FAMIGLIA ESPONENZIALE a $k=1$ parametri STUDIANDO la forma della FUNZIONE di VEROSIMIGLIANZA oppure quella della FUNZIONE di DENSITÀ. Conviene concentrarci sulla prima visto per quanto chiesto nei punti c) e d).

Ora

$$L(\theta; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i) \cdot \frac{1}{\theta^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

da cui possiamo subito concludere l'appartenenza della famiglia di distribuzioni in questione a FAMIGLIA ESPONENZIALE a $k=1$ parametri.

La STATISTICA SUFFICIENTE (minimale) e COMPLETA per θ è data da

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

c) La funzione di logverosimiglianza è data da

$$l(\theta; \underline{x}) = -2n \ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i))$$

sicchè

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta; \underline{x}) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

rappresenta la SCORE EQUATION la cui SOLUZIONE rispetto θ restituisce lo STIMATORE di MASSIMA VEROSIMIGLIANZA di θ

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\bar{X}_n$$

d) Si tratta di calcolare

$$\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta(X)$$

dove

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \int_0^\infty \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

Sost. $v = \frac{x}{\theta}$ $\quad dx = \theta\, dv$

$x = \theta v$

$$= \theta \cdot \int_0^\infty v^2 e^{-v} dv = 2\theta$$

riconoscendo in $v^2 e^{-v}$ il KERNEL di una densità GAMMA di parametri $\alpha = 3$ (sicchè $\alpha - 1 = 2$) e $\beta = 1$; di conseguenza

$$\int_0^\infty v^2 e^{-v} dv = \underbrace{\Gamma(3) \cdot 1^3}_{\text{Costante di NORMALIZZAZIONE}} = 2$$

Ma allora

$$\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{1}{2}\cdot 2\theta = \theta, \qquad \forall\theta>0$$

sicché lo stimatore di MV $\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\bar{X}_n$ è STIMATORE NON DISTORTO di θ.

Si tratta ora di ricavare l'INFORMAZIONE di FISHER e verificare se $\hat{\theta}_n$ è STIMATORE EFFICIENTE. Ora

$$I_n(\theta) = -\,\mathbb{E}_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\,\ell(\theta;\underline{X})\right]$$

$$= -\,\mathbb{E}_\theta\left[\frac{2n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= -\frac{2n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_\theta(X_i)$$

$$= -\frac{2n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\cdot n(2\theta) = \frac{2n}{\theta^2}$$

e dal momento che la SCORE FUNCTION $S(\theta;\underline{X}) = \frac{d}{d\theta}\,\ell(\theta;\underline{X})$ si può scrivere come

$$S(\theta;\underline{X}) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\bar{X}_n}{2} - \theta\right]}_{T_n}\cdot \underbrace{\frac{2n}{\theta^2}}_{I_n(\theta)}$$

per un NOTO TEOREMA possiamo concludere che $\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\bar{X}_n$ è STIMATORE EFFICIENTE di θ.

Ex. 3)

Riassumiamo i dati di cui abbiamo possesso:

$n = 16$

$\bar{x}_n = 60139.7$

$s_n = 3645.94$

Assumendo che la DURATA X del NUOVO TIPO di PNEUMATICO segua una distribuzione NORMALE, di cui NON CONOSCIAMO la VARIANZA, la STATISTICA PIVOT sulla quale costruire l'INTERVALLO di CONFIDENZA sarà data da

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Ora, fissato in 0.95 la PROBABILITÀ di COPERTURA dell'INTERVALLO di CONFIDENZA del VERO VALORE di μ, DURATA MEDIA del PNEUMATICO (espressa in Km percorsi) si ha

$$IC_\mu(0.95) = \left[\bar{x}_n - t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}_n + t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[60139.7 - 2.131\,\frac{3645.94}{\sqrt{16}}\ ,\ 60139.7 + 2,131\,\frac{3645,94}{\sqrt{16}}\right]$$

$$= \left[58197.33\ ,\ 62082.07\right]$$

dove $t_{16-1;\,0.025} = 2.131$ rappresenta il fattore di affidabilità corrispondente alla probabilità di copertura fissata pari a 0.95.

Ex. 4)

Abbiamo a che fare con un SISTEMA di IPOTESI SEMPLICI (η è NOTO) sicché la REGIONE CRITICA del TEST PIÙ POTENTE di livello α può essere individuata ricorrendo al LEMMA di NEYMAN-PEARSON.

Cominciamo col ricavare la FUNZIONE di VEROSIMIGLIANZA

$$L(\theta;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\eta)\,\theta^{\eta}}\, x^{\eta-1} e^{-\frac{1}{\theta}x_i}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$$

$$= \left[\frac{1}{\Gamma(\eta)}\right]^{n} \frac{1}{\theta^{n\eta}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\eta-1} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\eta-1}}{(\Gamma(\eta))^{n}} \frac{1}{\theta^{n\eta}}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$$

sicché

$$\frac{L(\theta_1;\underline{x})}{L(\theta_0;\underline{x})} = \frac{\frac{1}{\theta_1^{n\eta}}\, e^{-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\frac{1}{\theta_0^{n\eta}}\, e^{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} x_i}} > A$$

Ne consegue la REGOLA di DECISIONE relativamente al sistema di ipotesi di partenza ossia

"RIFIUTARE H_0 in favore di H_1 qualora il RAPPORTO di VEROSIMIGLIANZA sia maggiore di A, già POSITIVA."

Possiamo anche RIFORMULARE la REGOLA in questione prendendo il logaritmo del rapporto di verosimiglianza e con qualche passaggio algebrico otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\ln(A) - n\eta\left(\ln(\theta_0) - \ln(\theta_1)\right)}{\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)} = B$$

da cui RIFORMULARE la REGIONE CRITICA C_α come

$$C_\alpha = \left\{ \underline{x} \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i > B \right\}$$

che è quanto richiesto.

b) Per la PROPRIETÀ di RIPRODUCIBILITÀ della DISTRIBUZIONE GAMMA

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{G}(n\eta, \theta)$$

essendo SOMMA di V.C. IID distribuite secondo $\mathcal{G}(\eta, \theta)$.

Ora la POTENZA del test è data da

$$1 - \beta = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > B \mid \theta = \theta_1\right)$$

$$= 1 - P_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq B\right)$$

$$= 1 - F(B)$$

dove $F(B) = P_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq B\right)$ è la FUNZIONE di RIPARTIZIONE della V.C. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ sotto H_1.

c) In virtù della MONOTONIA del RAPPORTO di VEROSIMIGLIANZA, il TEST più POTENTE individuato è anche UNIFORME-MENTE più POTENTE per alternative $H_1: \theta > \theta_0$.

Es. 5)

a) Per la PROPRIETÀ di RIPRODUCIBILITÀ

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$$

Infatti sia $S_n = \sum_{i=1} X_i$. Allora

$$M_{S_n}(t) \overset{d}{=} \mathbb{E}_\lambda[e^{tS_n}] = \mathbb{E}_\lambda[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}]$$

$$= \mathbb{E}_\lambda\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right]$$

$$\overset{\text{indip}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\lambda(e^{tX_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$= \left[e^{\lambda(e^t-1)}\right]^n = e^{n\lambda(e^t-1)}$$

In cui si riconosce la FUNZIONE GENERATRICE dei MOMENTI di una v.c. di POISSON di parametro $n\lambda$ e ciò permette di concludere che

$$S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda).$$

Ora

$$\mathbb{E}_\lambda(S_n) = n\lambda$$

$$Var_\lambda(S_n) = n\lambda$$

come si può facilmente verificare.

b) La funzione di verosimiglianza è data da

$$L(\lambda; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(x_i)$$

$$= \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(x_i)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \cdot e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

sicché per il TEOREMA di FATTORIZZAZIONE di NEYMAN la STATISTICA

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

è SUFFICIENTE (minimale) (è anche COMPLETA essendo la FAMIGLIA delle distribuzioni di POISSON una FAMIGLIA ESPONENZIALE a $K=1$ parametri)

Ora

$$l(\lambda; \underline{x}) = \ln L(\lambda; \underline{x}) = -n\lambda + \ln(\lambda) \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i! \, \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(x_i))$$

sicché la SCORE EQUATION è data da

$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda; \underline{x}) = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

sicché lo STIMATORE di MV di λ sarà

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

essendo $\frac{d^2}{d\lambda^2} \ell(\lambda; \underline{x}) < 0.$

c) Partendo dallo stimatore di MV

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

e osservando che

i) è STIMATORE NON DISTORTO di λ

ii) è FUNZIONE di STATISTICA SUFFICIENTE e COMPLETA

in base al COROLLARIO del TEOREMA di RAO-BLACKWELL possiamo concludere che $\hat{\lambda}_n$ è STIMATORE UMVU di λ.

Non solo, poiché

$$S(\lambda; \underline{X}) = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda\right] \cdot \frac{n}{\lambda}$$

dove

$$\frac{n}{\lambda} = I_n(\lambda) = -\mathbb{E}_\lambda \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} \ell(\lambda; X)\right]$$

$$= -\mathbb{E}_\lambda \left[-\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{n}{\lambda}$$

possiamo concludere sulla base di un NOTO TEOREMA che $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ è anche STIMATORE EFFICIENTE per il parametro λ.

d) Sulla base della determinazione campionaria

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{10} 34 = 3.4$$

ed essendo

$$P_\lambda(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda} = g(\lambda)$$

in virtù della PROPRIETÀ di INVARIANZA degli STIMATORI di MASSIMA VEROSIMIGLIANZA, la STIMA di MV di $P_\lambda(X=1)$ sarà

$$\hat{P}_\lambda(X=1) = \hat{\lambda}_n e^{-\hat{\lambda}_n} = 3.4\, e^{-3.4} = 0.11347$$

e) Si tratta di calcolare

$$\mathbb{E}_\lambda(T_n) = \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}\right]$$

$$= \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{S_n}\right] \qquad \text{con } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda)$$

$$\overset{d.}{=} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{s_n} \frac{(n\lambda)^{s_n}}{s!} e^{-n\lambda}$$

$$= e^{-n\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\left(\frac{n-1}{\cancel{n}}\right) \cdot \frac{\cancel{n}\lambda}{s_n}\right]^{s_n}$$

$$= e^{-n\lambda} \cdot e^{\lambda(n-1)} = e^{-\lambda} = \tau(\lambda)$$

e di conseguenza essendo $T_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum X_i}$ stimatore NON DISTORTO e FUNZIONE di STATISTICA SUFFICIENTE e COMPLETA per λ è lo STIMATORE UMVU di $\tau(\lambda)$.

f) Usando l'ESTENSIONE del LIMITE INFERIORE di RAO-CRAMÉR per la VARIANZA di STIMATORI NON DISTORTI di FUNZIONI del parametro, si ha che per $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$

$$\frac{[\tau'(\lambda)]^2}{I_n(\lambda)} = \frac{(-e^{-\lambda})^2}{\frac{n}{\lambda}} = \frac{\lambda e^{-2\lambda}}{n}$$

è il LIMITE INFERIORE CERCATO.