Tema di Statistica Matematica

Simulazione

15 dicembre 2017

1) La vita di un componente elettronico (misurata in anni), prodotto tramite un nuovo processo tecnologico, segue una distribuzione Normale di media μ e varianza $\sigma^2 = 4$. Un campione casuale di ampiezza 100 di questi componenti prodotto con questa nuova tecnologia restituisce una media campionaria pari a 2.3 anni.

a) Fissato $\alpha = 0.05$, verificare l'ipotesi che la media μ della popolazione sia almeno uguale a 2.5 anni.

b) In cosa consiste l'errore di primo tipo e qual é, nel caso qui trattato, la sua probabilitá?

c) In cosa consiste l'errore di secondo tipo? Calcolarne la probabilitá ipotizzando che la media della popolazione sotto ipotesi alternativa sia uguale a 2.3.

d) Trovare l'espressione generale della probabilitá dell'errore di secondo tipo e disegnare (approssimativamente) la funzione di potenza associata al test in questione.

2) L'ente certificatore Price Waterhouse monitora periodicamente le performance dell'U.S. Postal Service. Uno dei parametri di interesse é costituito dalla percentuale di posta consegnata nei tempi concordati con i clienti del servizio postale. In un campione casuale di 332000 oggetti spediti (lettere, pacchi,...), l'ente certificatore stabilisce che 282200 sono stati consegnati entro i tempi stabiliti.

a) Costruire un intervallo di confidenza per la percentuale degli oggetti spediti consegnati nei tempi stabiliti a livello $(1 - \alpha) = 0.99$.

b) Quanto grande deve essere il campione casuale affinché, con una probabilitá pari al 98%, la proporzione campionaria degli oggetti spediti e consegnati nei tempi stabiliti si scosti dalla vera proporzione per non piú dell'uno per cento?

3) Per verificare l'affidabilitá di un sistema software per gli acquisti telematici abbiamo deciso di registrare, nel corso dei prossimi n giorni, le proporzioni giornaliere $X_1, X_2, \dots, X_n$ di transazioni fallite. Astraendo, possiamo considerare $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ come un campione casuale estratto da una popolazione avente densitá:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\, x^{\frac{1}{\theta}-1}\, \mathbb{I}_{(0,1)}(x),$$

dove θ é un parametro positivo incognito.

a) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

b) Verificare se lo stimatore di massima verosimiglianza di θ é non distorto ed efficiente.

c) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza della proporzione attesa $\mathbb{E}_\theta(X)$ di richieste giornaliere fallite; quindi dimostrare che uno stimatore efficiente per $\mathbb{E}_\theta(X)$ NON esiste.

d) Monitorando il sistema software per $n = 4$ giorni registriamo i seguenti risultati: il primo giorno falliscono 4 su 480 richieste arrivate, il secondo 5 su 450, il terzo 3 su 300 e il quarto 6 su 500. Qual é la stima di θ basata sul metodo di massima verosimiglianza?

4) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale da una popolazione $N(\theta, 1)$. Si consideri la seguente famiglia di stimatori del parametro incognito θ:

$$T_a(X_1, \ldots, X_n) = \omega_n W_n + (1 - \omega_n)\, a, \;\; a \in \mathbb{R}$$

definita come media ponderata dello stimatore W_n e della costante reale (che si assume nota) a, con pesi $\omega_n = \frac{n}{n+1}$ e $1 - \omega_n = \frac{1}{n+1}$.

a) Trovare lo stimatore W_n, $UMVU$ per θ.

b) Determinare distorsione, varianza ed errore quadratico medio per la classe di stimatori $T_a(X_1, \ldots, X_n)$ e studiarne la consistenza.

c) Posto $a = 0$, stabilire se esistono dei valori di θ per i quali lo stimatore T_0 risulta - sotto il profilo del rischio associato a una funzione di perdita quadratica - migliore dello stimatore $UMVU$ per θ trovato in a).

d) Per i due stimatori considerati al punto c) (ovvero T_0 e W_n), tracciare i grafici (approssimativi) delle rispettive funzioni di rischio al variare di θ in $\mathbb{R}$, assumendo una funzione di perdita quadratica.

5) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale da una popolazione avente funzione di densitá

$$f(x; \theta) = \frac{2}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right) \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x), \;\; \theta > 0.$$

a) Determinare la funzione di verosimiglianza e stabilire se esiste una statistica sufficiente unidimensionale.

b) Verificare che $\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{\theta}{3}$.

c) Trovare uno stimatore non distorto di θ che sia funzione della media campionaria, $\bar{X}_n$.

d) Calcolare la varianza dello stimatore determinato al punto precedente e studiarne la consistenza.