Tema di Statistica Matematica

III appello - Sessione invernale

3 febbraio 2014

1) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale proveniente da una distribuzione Normale, $N(0, \theta)$ e sia

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

a) Verificare se S_0^2 risulta essere uno stimatore non distorto di θ e individuare, a partire da S_0^2, un'opportuna statistica pivot (e la relativa distribuzione) che permetta di costruire procedure inferenziali su θ.

b) Costruire un intervallo di confidenza per θ di livello $(1 - \alpha)$.

c) Considerato un campione casuale di dimensione $n = 15$ proveniente dalla distribuzione in questione, si é osservato che $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 156.49$. Calcolare l'intervallo di confidenza per θ a livello di confidenza del 95%.

2) Sia $(X_1, ..., X_n)$ un campione casuale da una distribuzione con funzione di densitá

$$f(x; \theta) = \theta(1 - x)^{\theta - 1} \, 1\!\!I_{(0,1)}(x), \;\; \theta > 0.$$

a) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ.

b) Dato il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ *vs.* $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 < \theta_1$, trovare la regione critica corrispondente al test piú potente di livello α per sottoporre a verifica il precedente sistema di ipotesi.

c) Trovare l'intervallo di confidenza (approssimato) per θ, fissato a 80% il livello di confidenza, e calcolarne gli estremi supponendo di avere osservato un campione di $n = 225$ unitá per il quale lo stimatore di massima verosimiglianza di θ vale $\hat{\theta}_n = 1.5$.

d) Si consideri il campione osservato di cui al punto precedente e si vogliano confrontare le ipotesi:

$$H_0 : \theta = 1.3 \;\; vs. \;\; H_1 : \theta = 1.6$$

Sempre assumendo $n = 225$ e $\hat{\theta}_n = 1.5$, calcolare il valore approssimato della potenza del test trovato in b), ponendo il valore B che individua la regione critica pari a 1.464.

3) Si consideri un campione casuale di n osservazioni da una popolazione con densitá

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}} \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \;\; \theta > 0.$$

a) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ.

b) Lo stimatore trovato al punto a) é anche $UMVU$ per θ? Se no, individuare lo stimatore $UMVU$ per θ.

c) Verificare se la famiglia di densitá $\mathcal{F} = \left\{ f(x;\theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}} \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \;\; \theta > 0 \right\}$ appartiene a famiglia esponenziale a $k = 1$ parametri.

d) Lo stimatore $UMVU$ trovato al punto b) é anche efficiente (nel senso di Rao-Cramér) per θ?

4) Si consideri un campione casuale proveniente da una distribuzione di Bernoulli, $b(1,\theta)$, con $\theta \in (0,1)$ probabilitá di successo nella singola prova bernoulliana. Considerata la funzione del parametro θ,

$$\psi = g(\theta) = ln \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right),$$

nota in letteratura come *log-odds*, trovare la distribuzione asintotica dello stimatore di massima verosimiglianza di ψ.