Tema di Statistica Matematica

Primo appello

12 gennaio 2021

1) In merito a un determinato fenomeno, si sono osservati i seguenti valori:

0.821, 1.021, 0.687, 0.889, 2.801, 0.075, 1.216, 0.536, 0.865, 1.147, 0.772, 0.221, 0.667

e non si conosce nulla a proposito della distribuzione che li ha generati. Supponiamo di essere interessati a testare una certa ipotesi sulla media μ della popolazione.

a) Dopo aver descritto la filosofia della tecnica bootstrap, scrive uno script in R - commentato nelle sue parti - per la verifica del seguente sistema di ipotesi:

$$H_0 : \mu \geq 1.2 \;\; vs. \;\; H_1 : \mu < 1.2$$

b) Sulla base dell'informazione contenuta nei dati a disposizione e di quanto ottenuto al punto precedente, decidete in merito alle due ipotesi in questione.

2) Sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione casuale da una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = \theta + 1$, $\lambda > 0$.

a) Scrivere la funzione di verosimiglianza in funzione del parametro θ e trovare, se esiste, una statistica sufficiente per θ.

b) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

c) Dimostrare che lo stimatore trovato al punto precedente è stimatore non distorto e consistente per θ.

d) E' anche stimatore efficiente?

3) Enunciare e dimostrare il teorema di Rao-Blackwell e discuterne dettagliatamente il significato in relazione agli stimatori UMVU.

4) Sia $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ un campione casuale proveniente da una distribuzione $F(x)$ che ammette varianza finita e sia $\{S_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle varianze campionarie. Dimostrare che la successione degli scarti quadratici medi $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in probabilità a σ, scarto quadratico medio della popolazione.

5) Un individuo lavora a circa 50 Km di distanza dalla città in cui risiede e tutti i giorni si reca al lavoro in automobile compiendo lo stesso tragitto. Durante i primi 4 mesi dell'anno si è recato al lavoro per 91 volte e nell'arco di tale periodo ha osservato che lo scarto quadratico medio del consumo giornaliero di carburante è stato pari a 0.7 litri. Nell'arco dei successivi 3 mesi si è recato al lavoro per 61 volte osservando che, in questo periodo, lo scarto quadratico medio del consumo giornaliero di carburante è stato pari a 1.5 litri. Supponendo che il consumo giornaliero di carburante sia normalmente distribuito,

a) individuare un'opportuna statistica pivot e, a partire da questa, costruire gli intervalli di confidenza di livello 0.95 per la varianza del consumo di carburante per ciascuno dei due periodi di tempo considerati;

b) fissato $\alpha = 0.05$, verificare l'ipotesi che la varianza del consumo di carburante sia uguale a 1.8 contro l'alternativa che sia diversa da tale valore per ciascuno dei due periodi considerati;

c) supponendo le misurazioni nei due periodi di tempo siano indipendenti e fissato in α il livello di significatività del test, costruire la regola di decisione per la verifica dell'ipotesi di uguaglianza delle varianze nei due periodi considerati.

6) Supponiamo che le v.c. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ soddisfino la relazione

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ costanti fissate e $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ v.c. i.i.d. secondo $N(0, \sigma^2)$ con σ^2 quantità non nota. Trovare

a) una statistica congiuntamente sufficiente per (β, σ^2);

b) per un valore fissato di σ^2, lo stimatore a massima verosimiglianza di β e dimostrare che esso è non distorto per β;

c) la distribuzione (esatta) dello stimatore di massima verosimiglianza di β.

Inoltre,

d) dimostrare che

$$V_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

è anch'esso uno stimatore non distorto per β;

e) calcolare la varianza esatta di V_n e confrontarla con quella dello stimatore di massima verosimiglianza di β poc'anzi trovata. Che conclusioni ne traete?