Tema di Statistica Matematica

Pre-appello

18 dicembre 2015

1) Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale proveniente da una distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in (0, 1)$.

a) Dimostrare che $C_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i \leq c\}$ é la regione critica del test piú potente di livello α per il seguente sistema di ipotesi

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \ \ vs. \ \ H_1 : p = \frac{1}{3}$$

b) Determinare n e c tali che, approssimativamente,

$$P\left(\sum_{i=1}^n x_i \leq c \mid p = \frac{1}{2}\right) = 0.10 \ \text{ e } \ P\left(\sum_{i=1}^n x_i \leq c \mid p = \frac{1}{3}\right) = 0.80$$

2) Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale proveniente da una distribuzione avente la seguente funzione di densitá

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha\lambda\, x^{\alpha-1} \exp\{-\lambda x^\alpha\}\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x), \ \ \alpha > 0, \lambda > 0.$$

a) Posto $\alpha = 1$, determinando opportunamente la costante $c > 0$, ottenere uno stimatore non distorto per la varianza di X nella classe degli stimatori che hanno forma $\bar{X}_n^2/c$.

b) Dimostrare che lo stimatore ottenuto al punto precedente coincide con quello restituito dal teorema di Rao-Blackwell.

c) Supponendo ora $\lambda = 1$ e disponendo di un valore iniziale $\hat{\alpha}_0$ per il parametro α non noto, scrivere l'approssimazione dello stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\alpha}_n$ fornita dal primo passo dell'algoritmo di Newton-Raphson.

3) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale proveniente da una distribuzione Normale di media μ e varianza $\theta^2\mu^2$ con $\mu > 0$ parametro ignoto e θ costante nota.

a) Trovare la statistica sufficiente minimale per il parametro μ.

b) Individuata un'opportuna statistica pivot per μ, costruire sulla base di questa un intervallo di confidenza di livello 0.90 per il parametro μ.

c) Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\mu}_n$ del parametro μ.

4) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale proveniente da una distribuzione Normale di media μ_0 nota e varianza σ^2 ignota.

a) Stabilire se lo stimatore

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu_0^2$$

é stimatore UMVU per il parametro σ^2.

b) Fissato in $\alpha = 0.05$ il livello di significativitá e posto $\mu_0 = 0$, costruire un test esatto (basato su T_n) per la verifica del sistema di ipotesi $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ vs. \ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

c) Determinare la funzione di potenza del test individuato al punto precedente.

5) Sia p la proporzione di individui che preferiscono il prodotto A ad altri prodotti simili. Intervistati 250 consumatori é emerso che 130 di essi dichiarano di preferire il prodotto A ad altri prodotti simili.

a) Determinare la numerositá campionaria affinché il valore assoluto della differenza tra lo stimatore e la vera proporzione p sia inferiore a 0.05 con una probabilità del 98%.

b) Costruire l'intervallo di confidenza per la proporzione p a livello di confidenza del 97%.

6) Indicato con X il credito non recuperato (espresso in migliaia di euro), i valori si sintesi che seguono si riferiscono, relativamente al 2014, a un campione casuale semplice di 150 clienti di una banca risultati insolventi, non avendo restituito il prestito loro accordato:

$$\sum_{i=1}^{150} x_i = 6232.40 \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{150} x_i^2 = 402709.08$$

a) Stimare media e varianza del credito non recuperato, giustificando la scelta degli stimatori usati alla luce delle rispettive proprietá.

b) Nel triennio 2010-2012 il credito mediamente non recuperato è stato di 45.25 migliaia di euro; a inizio 2013 la banca ha modificato il sistema di valutazione del rischio di credito introducendo dei nuovi parametri con cui valutare l'affidabilità del cliente debitore. Sulla base dei dati relativi al 2014 di cui sopra, si può affermare a un livello di significatività del 5% che le modifiche apportate al sistema di valutazione abbiano ridotto l'ammontare medio del credito non recuperato? Giustificare il procedimento di calcolo e commentare il risultato ottenuto.