Tema di Statistica Matematica

II Appello - Sessione invernale

7 febbraio 2018

1) Si consideri una variabile casuale X con funzione di densitá

$$f(x;\theta) = 2\,\theta\,x\,e^{-\theta x^2}\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x), \;\; \theta > 0.$$

Determinare il limite inferiore di Cramer-Rao per gli stimatori non distorti

a) di θ;

b) di funzioni continue di θ, $g(\theta)$.

2) Sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione casuale di ampiezza $n \geq 2$ estratto da una distribuzione Normale di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Siano

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{e} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

rispettivamente media e varianza campionarie.

a) Dimostrare che $\bar{X}_n$ e S_n^2 sono stimatori non distorti rispettivamente della media e della varianza della popolazione.

b) Sia ora X_{n+1} un ulteriore elemento del campione casuale di partenza. Trovare la costante c tale per cui la statistica

$$c \cdot \frac{(\bar{X}_n - X_{n+1})}{S_n}$$

segua una distribuzione t di Student.

c) Posto $n = 8$, quindi $n + 1 = 9$, determinare il valore della costante k tale che

$$P\left(\bar{X}_n - k\,S_n < X_{n+1} < \bar{X}_n + k\,S_n\right) = 0.80.$$

3) Sia $\bar{X}_n$ la media di un campione casuale di 100 osservazioni provenienti da una popolazione di media μ e varianza $\sigma^2 = 9$. Trovare i limiti dell'intervallo in cui $\bar{X}_n - \mu$ cade con probabilitá almeno pari a 0.90, usando

a) la disuguaglianza di Chebychev;

b) il Teorema Limite Centrale.

Confrontare e commentare i due risultati ottenuti.

4) Sia X una variabile casuale avente distribuzione Normale di media μ e varianza $\theta^2\mu^2$, con $\mu > 0$ parametro ignoto e $\theta > 0$ costante nota. Sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un campione casuale di ampiezza n proveniente da tale distribuzione.

a) Mostrare che la classe di distribuzioni da cui proviene il campione costituisce una famiglia esponenziale e trovare la statistica sufficiente minimale per l'inferenza sul parametro μ.

b) Costruire un intervallo di confidenza esatto per μ a livello di confidenza $(1 - \alpha) = 0.9$.

c) Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\mu}_n$ per il parametro μ.

d) Stabilire se $\hat{\mu}_n$ é stimatore consistente per la media di X anche quando X ha legge di distribuzione Gamma di parametri $\alpha = \frac{1}{\theta^2}$ e $\beta = \theta^2\mu$.

5) Una compagnia di assicurazioni é interessata a studiare l'ammontare degli importi delle richieste di risarcimento danni per incidenti automobilistici causati da propri assicurati. Indicata con X la variabile casuale relativa all'importo della richiesta di risarcimento (espresso in migliaia di euro), dai dati relativi a un campione casuale di 25 richieste di risarcimento sono state ricavate le seguenti misure di sintesi:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 112.12 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 629.89$$

Ipotizzando che la variabile casuale X abbia distribuzione Normale,

a) costruire l'intervallo di confidenza al 95% sia per la media dell'ammontare delle richieste di risarcimento che per loro la deviazione standard;

b) fissato in 0.01 il livello di significativitá α e indicato con μ l'importo medio delle richieste di risarcimento, verificare il seguente sistema di ipotesi

$$H_0 : \mu = 3 \;\; vs. \;\; H_0 : \mu > 3$$

c) ricavare, infine, la funzione di potenza per il test di cui al precedente punto b).