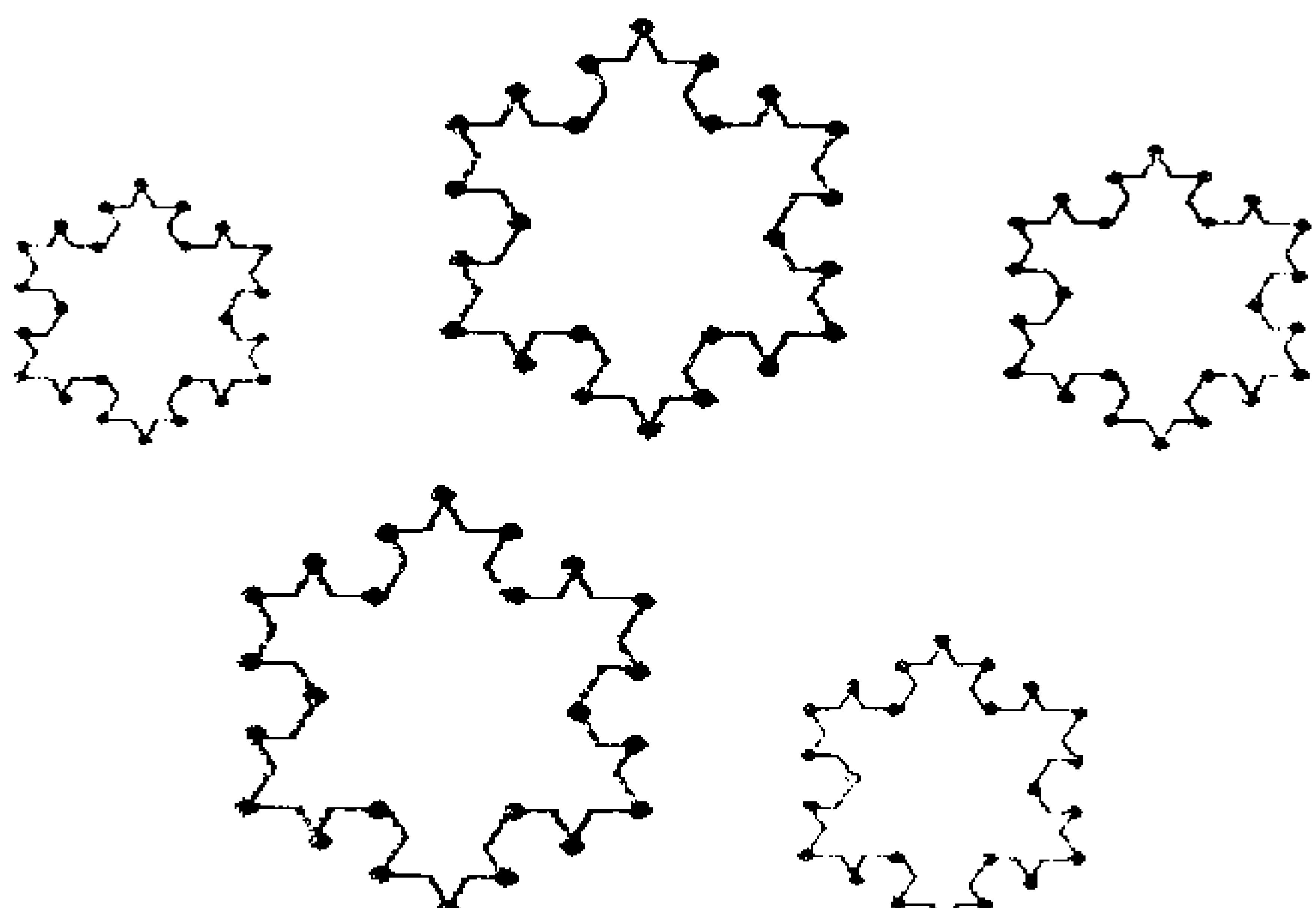
Aχioma

La revista de los estudiantes y profesores de matemática

APUNTES SOBRE...

Caos y Fractales *(Primera Parte)*



Curva copo de nieve de Koch

Julio/Agosto de 1997

Año 2 - Nº 7

Aχioma N° 7

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Directora
Gisela Serrano de Piñeiro

Propietarios
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro
Jorge Martínez

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Suscripción por 5 números (incluye gastos de envío): $11.-

Ejemplar suelto: $ 2.-

Ejemplar atrasado: $ 2,20

Editorial

¿Qué debe hacerse para ser escuchado?

¿Ayunos? ¿Marchas?

Resulta difícil pensar que no se atienda al reclamo docente.

Quienes consideramos la búsqueda del conocimiento como algo vital para nuestra existencia, quienes evitamos, con carne y uñas, el horrendo contagio con la vulgaridad; quienes soñamos, quizá ingenuamente, con un mundo mejor, definitivamente no entendemos que a los que estamos encargados, de una manera u otra, de transmitir éstos y muchos otros valores a una buena parte de la sociedad, no se nos reconozca.

Esta desatención ha provocado, entre otras cosas, una "mediocrización" del docente, quien sólo puede pensar en subsistir. ¿De qué cambios se nos habla? Los miserables salarios de los maestros hablan por sí mismos.

Los días pasan y, a veces, el desgaste es irreversible. Sin embargo, y pese a todo, hay que continuar. Quizá no esté claro por qué; quizá... no sea necesario que lo esté.

Sumario

Julio / Agosto de 1997

Año 2 - N° 7

Caos y Fractales (Primera parte)

"El gran físico teórico John Wheeler declara que en el pasado la gente no se podía considerar científicamente educada a menos que comprendiera la entropía. En el futuro, añade Wheeler, uno será científicamente analfabeto si no está familiarizado con los fractales."

(J. Briggs, D. Peat, El espejo turbulento)

Una vieja historia cuenta que cierta vez un granjero contrató a un equipo de científicos para que lo asesoraran sobre cómo mejorar su producción lechera. Después de seis meses de labor los científicos presentaron su informe. El granjero comenzó a leerlo sólo hasta llegar a la primera frase, la que comenzaba diciendo: "Sea V una vaca esférica...".

Hay un mensaje importante detrás de este viejo cuento: la geometría tradicional no siempre es suficiente para dar una descripción adecuada de las formas naturales.

En 1610 Galileo Galilei dijo que la matemática es el lenguaje de la naturaleza, y que "sus caracteres son círculos, triángulos y otras figuras geométricas". Muy por el contrario, Jonathan Swift (el autor de *Los Viajes de Gulliver*) criticó en 1726 esta filosofía diciendo que: "si ellos elogiasen la belleza de una mujer, la describirían mediante rombos, círculos, paralelogramos, elipses y otros términos geométricos."

Una postura más cercana a la de Swift que a la de Galileo encuentra su eco actual en una afirmación muy repetida por Benoit Mandelbrot en su obra *The Fractal Geometry of Nature*: "las nubes no son esferas, las montañas no son círculos, y la corteza no es lisa, ni el relámpago viaja en línea recta." A diferencia de sus predecesores, Mandelbrot (un investigador de la IBM) decidió hacer algo al respecto. Entre 1950 y 1970 desarrolló un nuevo tipo de matemática, capaz de describir y analizar la estructura irregular del mundo natural, e inventó un nombre para la nuevas formas geométricas involucradas: *fractales*.

¿Qué longitud tiene la línea costera de Gran Bretaña?

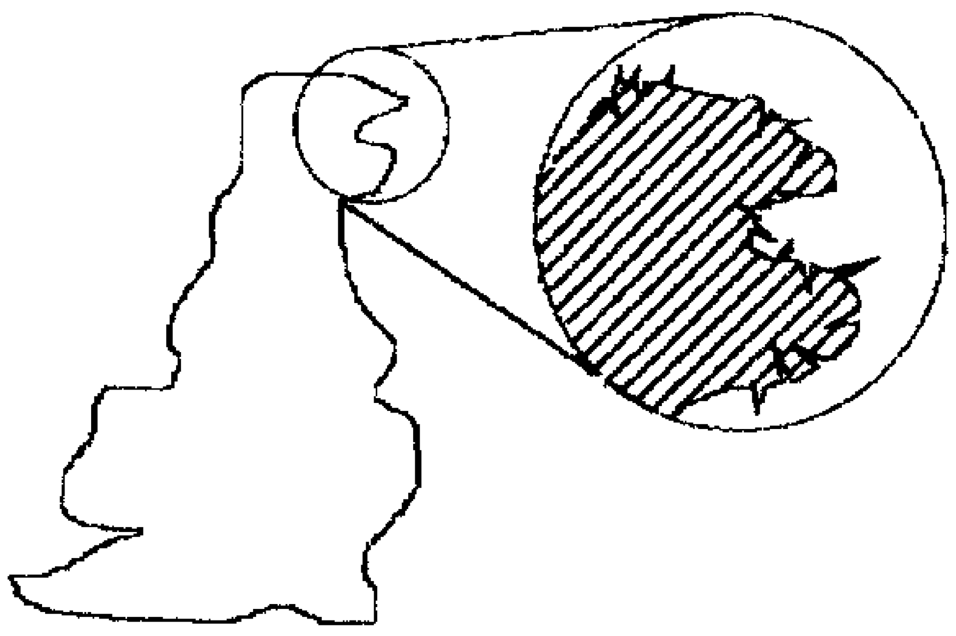
Ésta fue exactamente la pregunta que Mandelbrot formuló en su ya clásico trabajo. La respuesta le dio renombre universal.

Desde luego, los países desean saber la longitud de sus líneas costeras y límites. Cuando se traza un límite entre dos países es conveniente que ambas partes estén de acuerdo en cuanto a la longitud. A primera vista parece un problema sencillo con una solución sencilla: basta con medir. Pero las publicaciones y textos de geografía dan un kilometraje diferente para la misma línea costera o límite. ¿Cómo es posible? ¿Es un problema de negligencia en la medición? ¿Un mal cálculo?

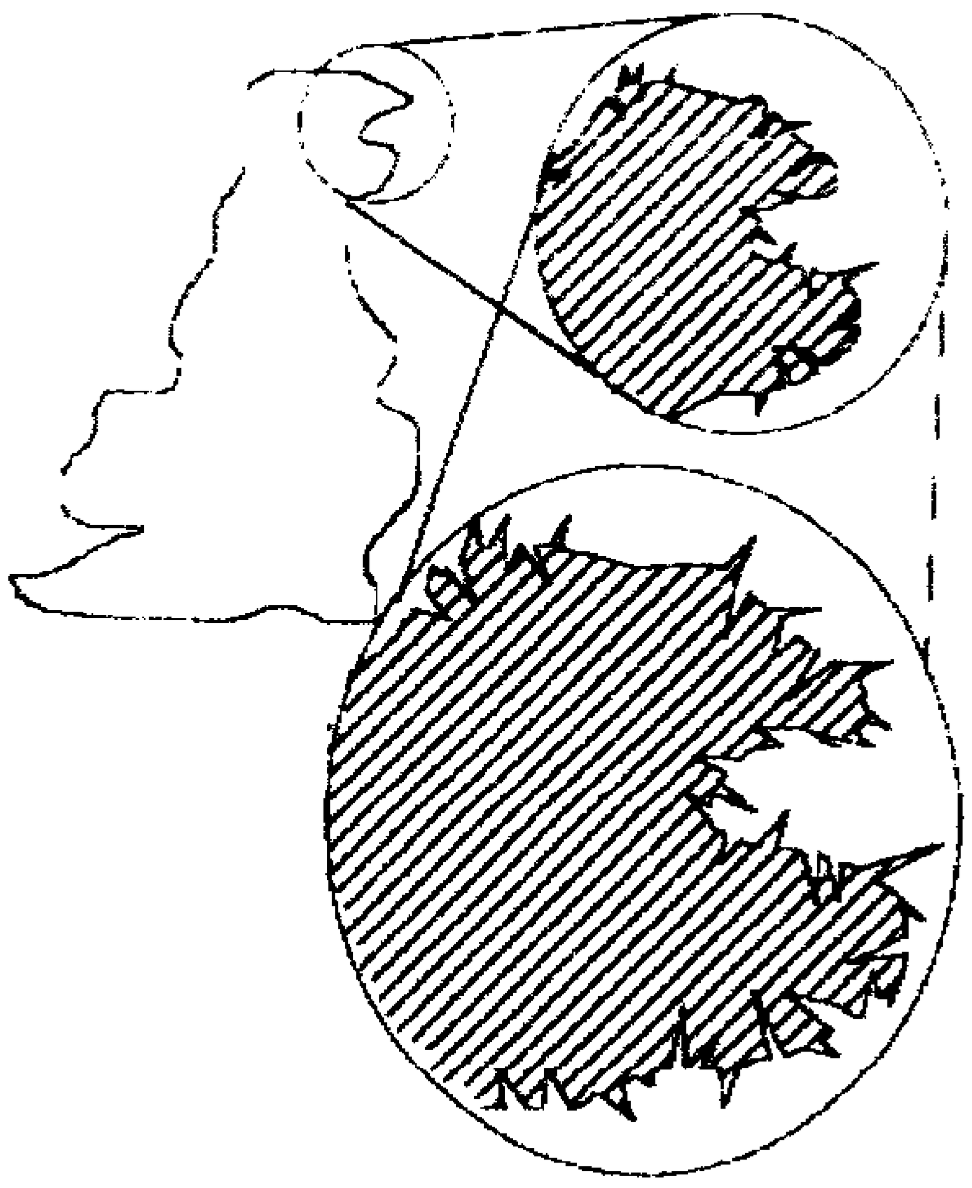
Cabe pensar que la cuestión de la línea costera británica se puede zanjar tomando un buen mapa, colocando un hilo a lo largo de la costa, y deduciendo luego el resultado a partir de la escala del mapa. Pero basta un instante de reflexión para darnos cuenta de que el mapa tiende a simplificar u omitir detalles. Sólo nos da las curvas amplias de la costa y excluye las muchas bahías y caletas.

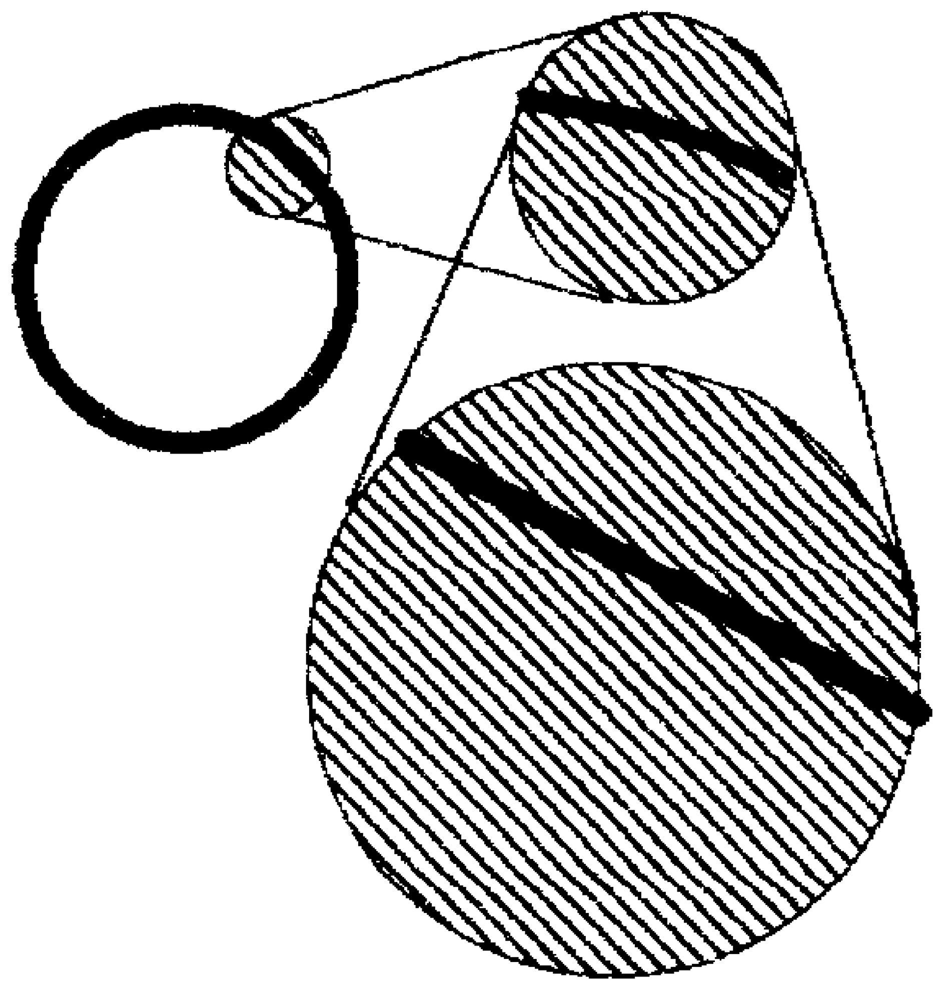
La respuesta debe estar en hallar un mapa mucho más detallado. En ese caso, el hilo se torcerá y curvará alrededor de más detalles, lo que significará que la longitud de la linea costera será mayor.

Si un topógrafo hace una medición precisa en, digamos, intervalos de 100 metros a lo largo de la costa, el detalle será aún más fino. A la vez, la línea costera tendrá mayor longitud. Pero ¿por qué detenerse aquí? ¿Por qué no medir con intervalos de 50 metros, o aún de 10? En cada etapa incluimos detalles cada vez más finos y el hilo se curvará de modos cada vez más complejos. Es evidente que cuantos más detalles incluimos, más larga se vuelve la línea costera. ¿Y si incluimos *todos* los detalles, rocas, polvo y hasta las moléculas? La verdadera línea costera debe ser infinita. En realidad la línea costera de Gran Bretaña tiene la misma longitud que cualquier otra línea costera: todas son infinitas.

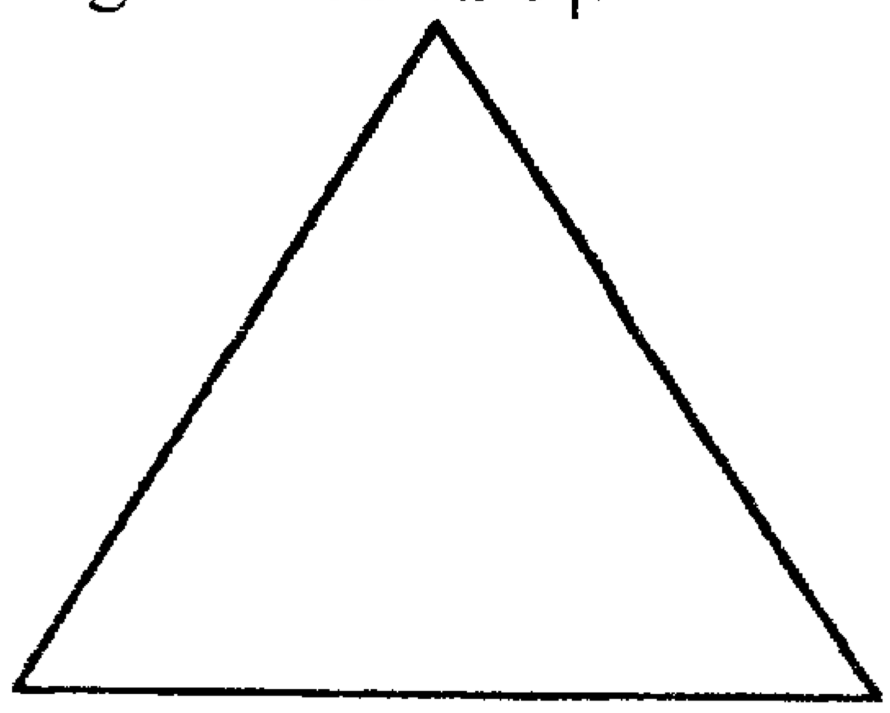


Esta fue la desconcertante conclusión a la que llegó Mandelbrot, pero ¿cómo puede ser verdadera?
La característica que distingue a una línea costera de una curva más sencilla, como por ejemplo una circunferencia, es la siguiente. La línea costera contiene detalles a escalas tan pequeñas como se desee. Por el contrario, cuando aplicamos una lupa a un arco de circunferencia lo que observamos es simplemente una curva apenas distinguible de un segmento de recta. A pequeña escala la estructura de una circunferencia no presenta ninguna riqueza de detalles.
La riqueza de detalles a todo nivel de definición es la característica distintiva de un *fractal*. Muchas veces, esta riqueza de detalles viene acompañada por una propiedad conocida como *autosimilitud*: cada pequeño fragmento del fractal reproduce, a menor escala, la estructura total.



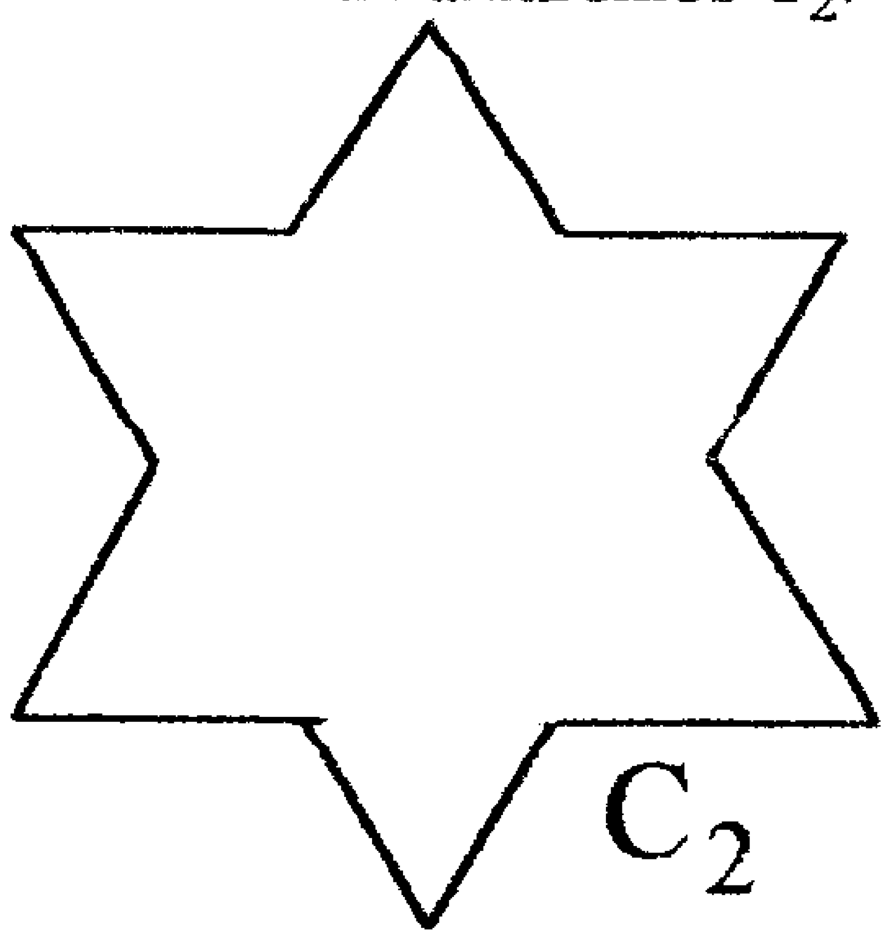


Veamos otro ejemplo en el que aparece este fenómeno de la riqueza de detalles a pequeña escala. Se trata de la "curva copo de nieve" elaborada por Helge von Koch en 1904. Esencialmente, la "isla de Koch" o copo de nieve se crea mediante un proceso de iteración en el cual cada paso se sigue a una escala más pequeña. De este modo se produce una curva de considerable complejidad, la cual contiene un elevadísimo grado de detalle. Para construir la curva copo de nieve se comienza con un triángulo equilátero de lado unidad. Llamaremos a este triángulo la curva C_1.



C_1

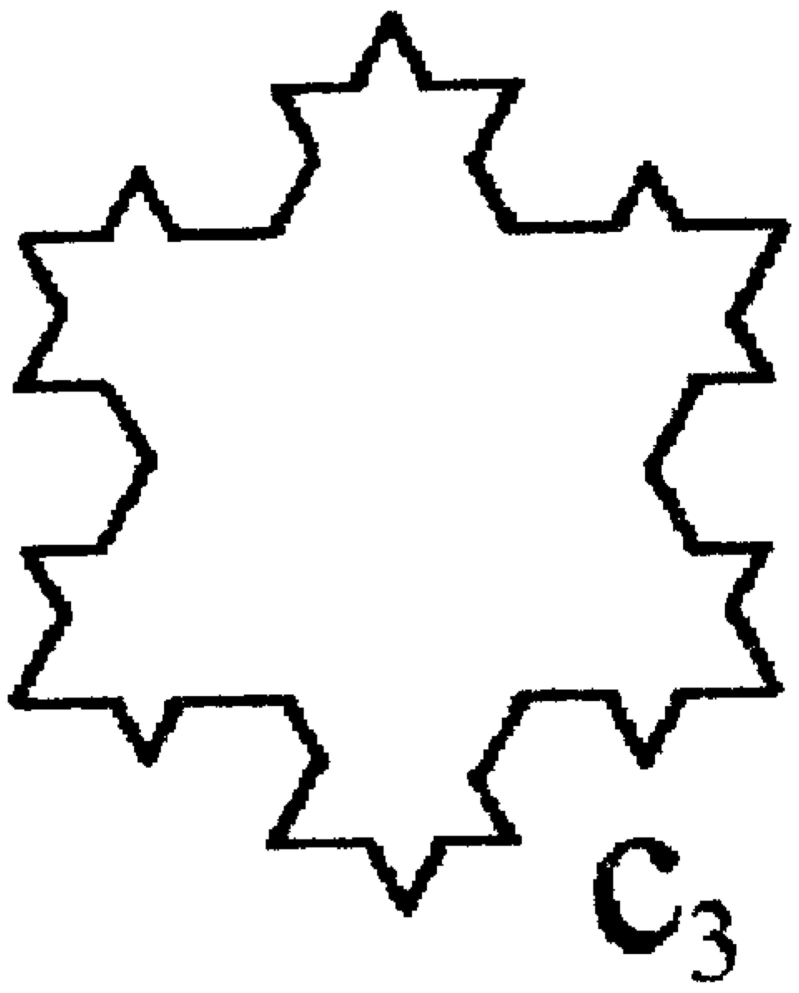
Divídase a cada lado del triángulo en tres partes iguales y tómese el segmento central como base de un triángulo equilátero dirigido hacia afuera. Bórrense luego los tres segmentos centrales. A la curva obtenida la llamaremos C_2.



C_2

Divídase luego en tres partes cada lado de C_2 y nuevamente, con igual método, constrúyase un triángulo equilátero dirigido hacia afuera. Bórrense los tercios centrales de cada lado de C_2 y se habrá obtenido la curva C_3.

Si repetimos sucesivamente este procedimiento, construyendo triángulos equiláteros cada vez más pequeños, se obtienen las curvas C_4, C_5, C_6, etc. La *curva límite* de este proceso es la *curva copo de nieve* de Koch.



C_3

Se concibe fácilmente que la curva límite cabe totalmente en una hoja de papel. De hecho, se puede demostrar que el área que encierra es 8/5 del área del triángulo original.
Pero a pesar de que el área que encierra es finita, **la longitud de la curva en sí resulta ser infinita**. En efecto, el perímetro de C_1 es 3. El perímetro de C_2 es 3 + 1. El perímetro de la curva C_3 es 3 + 1 + (4/3). El perímetro de C_4 es $3 + 1 + (4/3) + (4/3)^2$. En general el perímetro de C_n es $3 + 1 + (4/3) + (4/3)^2 + \ldots + (4/3)^{n-2}$. Como la serie:

$$3 + 1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \ldots$$

es divergente, se deduce entonces que la longitud de la curva límite supera toda cota prefijada.
Resulta notable que una curva de longitud infinita pueda dibujarse en una hoja de papel tan pequeña como se desee, como por ejemplo una simple estampilla.
Con sus muchas bahías y caletas, las curvas de Koch recuerdan las islas reales, excepto que son demasiado regulares. Para describir islas verdaderas se requieren en general fractales aún más complejos.

Si volvemos al problema de la medición de la línea costera, podemos convenir, en la práctica, una escala convencional e ignorar todos los detalles por debajo de los 100 metros (o cualquier otra cifra). Ello equivale a ver una línea costera desenfocada, de tal modo que los detalles con extensión inferior a los 100 metros quedan borrosos. Sin embargo, esta solución de compromiso deja mucho que desear ya que desde el punto de vista matemático todas las líneas costeras son infinitas ¿Cómo se pueden comparar entonces sus medidas? La respuesta es que no se debe medir la longitud cuantitativamente, sino que debe usarse una nueva clase de medida cualitativa: *la dimensión fractal*.
Para entender la dimensión fractal tenemos que olvidar nuestras ideas convencionales acerca de las dimensiones. La mayoría de las personas creen tener una idea bastante clara de este concepto. El espacio es tridimensional. Una superficie es bidimensional. Una curva es unidimensional. Por último, un punto, o una cantidad finita de puntos, tiene dimensión cero.
Las dimensiones que observamos en la vida cotidiana no tienen complicaciones: 0, 1, 2 o 3. Pero ¿son las cosas tan simples? ¿Cuál es, por ejemplo, la dimensión de un ovillo de hilo?
Desde lejos (muy lejos) el ovillo aparece como un punto y, por tanto, tiene dimensión cero. Pero a pocos metros de distancia todo vuelve a la normalidad y el ovillo es tridimensional. Pero, ¿qué ocurre si nos acercamos mucho? Vemos un hilo curvado sobre sí mismo. El ovillo está formado por una línea curva, y por tanto es unidimensional. Desde más cerca, esta curva se convierte en un cable de muy pequeño grosor, y el hilo se vuelve tridimensional. Desde más cerca aún, dejamos de ver el hilo para ver las hilachas finas que se retuercen unas alrededor de otras para formarlo: el ovillo ha vuelto a ser unidimensional.
En otras palabras la "dimensión efectiva" del ovillo va cambiando de tres a uno, una y otra vez. Su dimensión aparente depende de nuestra cercanía. La dimensión no es tan simple como parece a primera vista.
Aunque puede resultar desconcertante que los objetos naturales posean una "dimensión efectiva" que dependa de la escala considerada; este concepto permite elaborar una dimensión fractal para una línea costera y descubrir que éste es un número no entero mayor que uno. Si la dimensión fractal de una línea costera (o de una curva) está cerca de uno, la costa es poco accidentada y no tiene detalles finos. Cuanto más se aleje de este

número, más irregular y caótica será la línea costera, y esta irregularidad persistirá en escalas cada vez más pequeñas.

Pensemos en un intervalo de longitud uno, si lo dividimos en n partes iguales cada una de ellas medirá 1/n, y si se mira a cada una de estas partes con una lupa que aumente n veces, obtendremos una figura que es idéntica al intervalo original.

Si ahora tomamos un cuadrado unitario y dividimos a cada lado en n partes iguales, obtendremos un reticulado formado por n^2 cuadrados. Si aumentamos estos cuadrados n veces entonces llegarán a ser iguales al original. Si tenemos en cambio un cubo podemos dividirlo en n^3 partes iguales, cada una de las cuales dará el cubo original si se la aumenta n veces.

Como la dimensión del segmento es 1, la del cuadrado es 2 y la del cubo es 3, entonces resulta coherente plantear la siguiente relación:

$$\text{dimensión} = \frac{\log(\textit{cant. pedazos})}{\log(\textit{aumento})}$$

De modo que, para el segmento:

$$\dim = \frac{\log(n)}{\log(n)} = 1$$

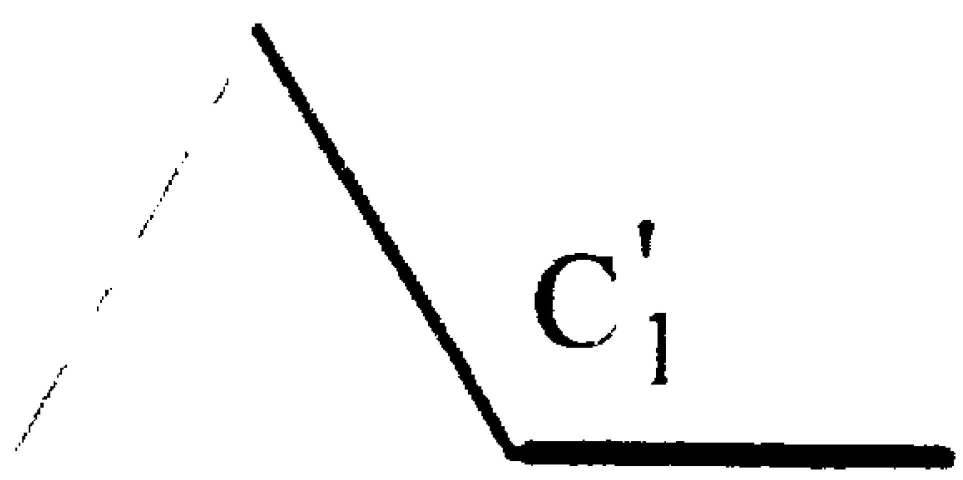
Para el cuadrado:

$$\dim = \frac{\log(n^2)}{\log(n)} = 2$$

Para el cubo:

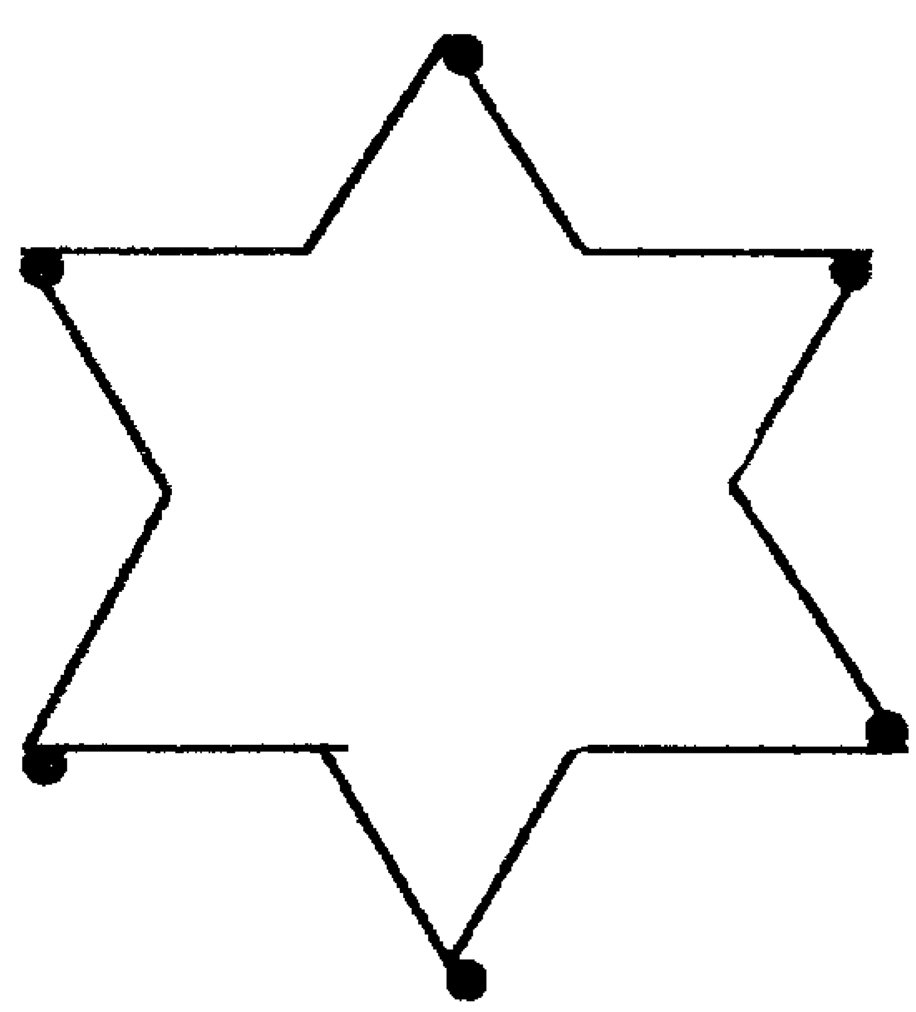
$$\dim = \frac{\log(n^3)}{\log(n)} = 3$$

Para calcular la dimensión de la curva copo de nieve, tomemos como curva C_1, no el triángulo equilátero unitario sino la siguiente curva, en la que cada segmento tiene longitud uno:

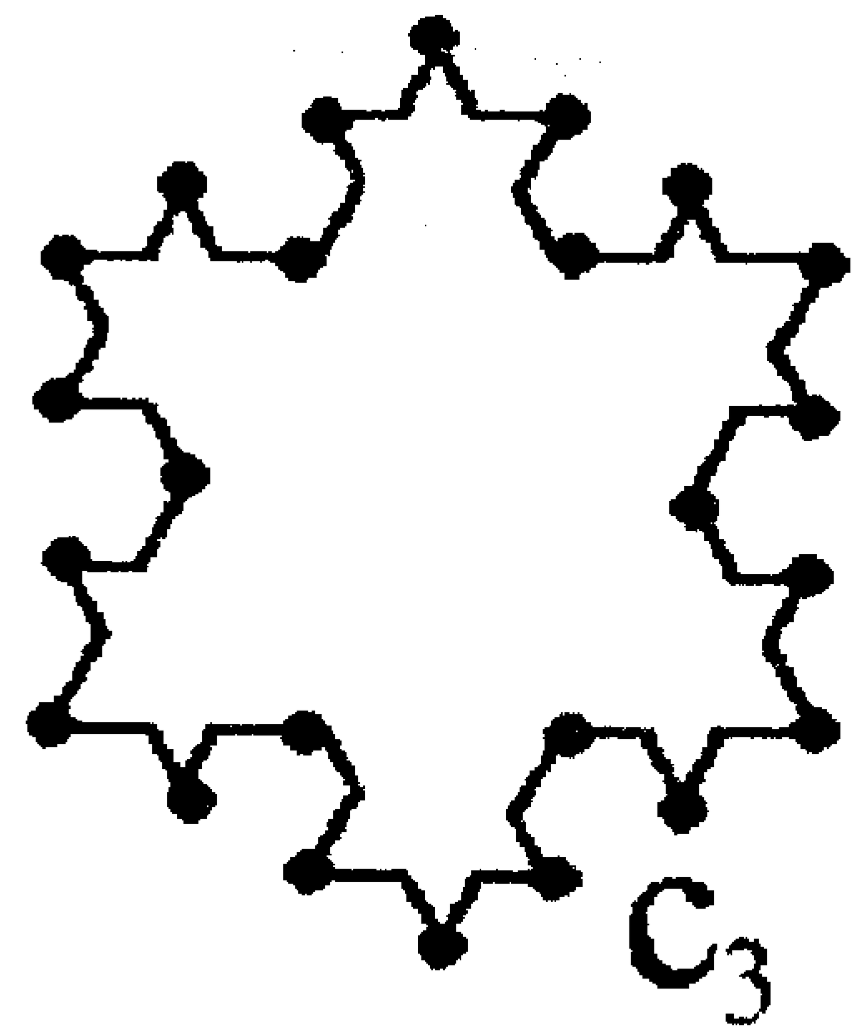


Desde C_2 en adelante seguimos considerando las mismas curvas antes descriptas, por lo que el fractal en sí no cambia en ningún aspecto.

Toda curva C_n puede partirse en cierta cantidad de fragmentos cada uno de los cuales, convenientemente aumentado, es idéntico a la curva C_1'. Más abajo se ve la descomposición de C_2 en seis partes, cada una de las cuales debe ser ampliada 3 veces para ser igual a C_1' (los puntos marcan la división entre un fragmento y otro).



La curva C_3 se parte en 24 fragmentos, los que deben ser ampliados 9 veces. La curva C_4 se parte en 96 fragmentos que deben ser aumentados 27 veces.



En general, la curva C_n se fragmenta en 6.4^{n-1} partes, cada una de las cuales debe ser aumentada 3^{n-1} veces para ser iguales a C_1'. Tenemos que:

$$\frac{\log(\textit{cant. pedazos})}{\log(\textit{aumento})} =$$

$$= \frac{\log(6.4^{n-1})}{\log(3^{n-1})} = \frac{A}{n-1} + \frac{\log(4)}{\log(3)}$$

donde $A = \dfrac{\log(6)}{\log(3)}$.

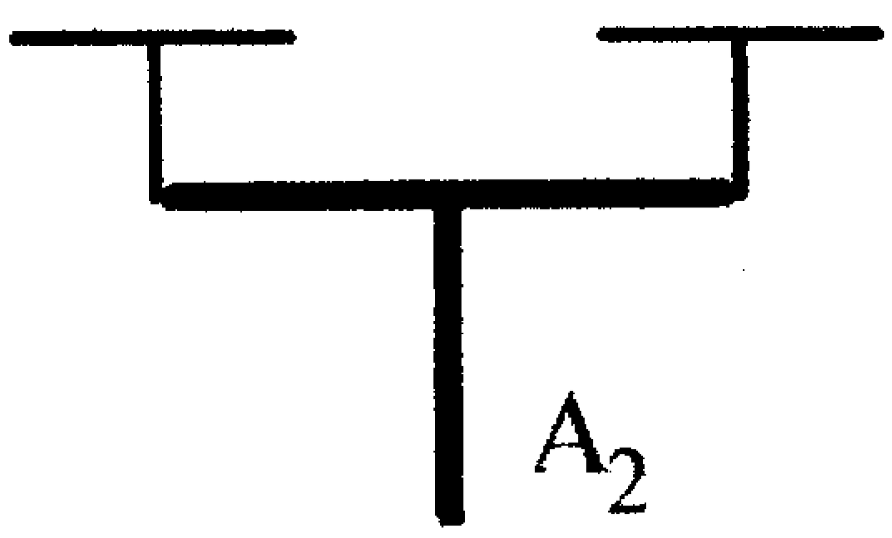
Cuando n tiende al infinito la expresión anterior tiende a:

$$\frac{\log(4)}{\log(3)} \cong 1{,}2619$$

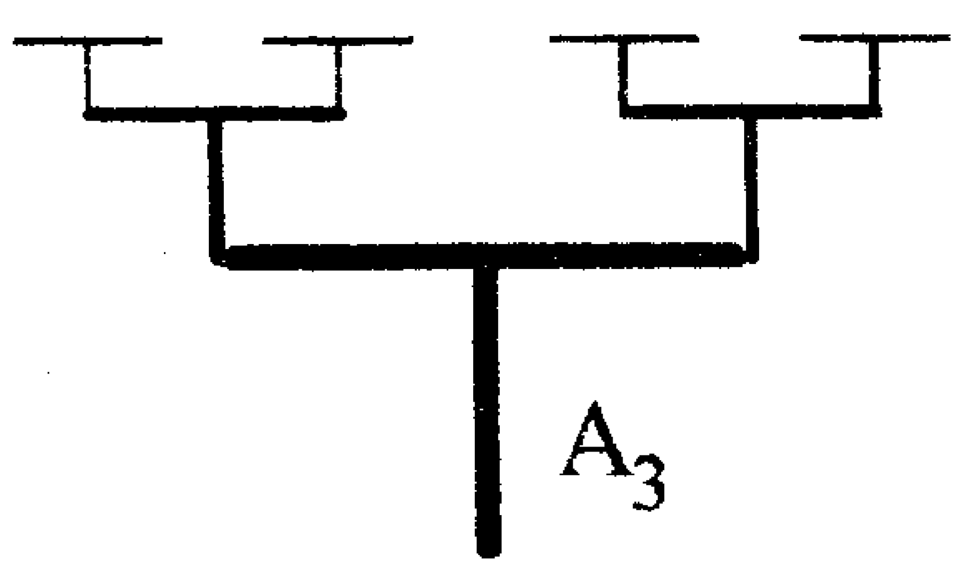
por lo que la dimensión fractal de la curva copo de nieve de Koch es aproximadamente igual a 1,2619. La dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña se estima en 1,26 aproximadamente, de donde deducimos que su complejidad fractal es comparable a la de la curva de Koch.

Otro fractal que podemos presentar aquí es el que llamaremos el "árbol binario". Este árbol se construye también en pasos sucesivos. Se comienza con tres segmentos unitarios dispuestos en forma de letra T, que constituyen el árbol A_1:

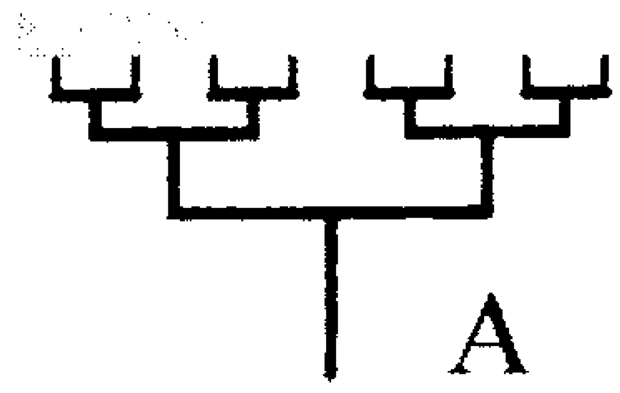
En cada extremo de la barra horizontal de A_1 se agregan dos copias de él mismo, sólo que formadas por segmentos de longitud 1/2. Obtenemos así el árbol A_2:



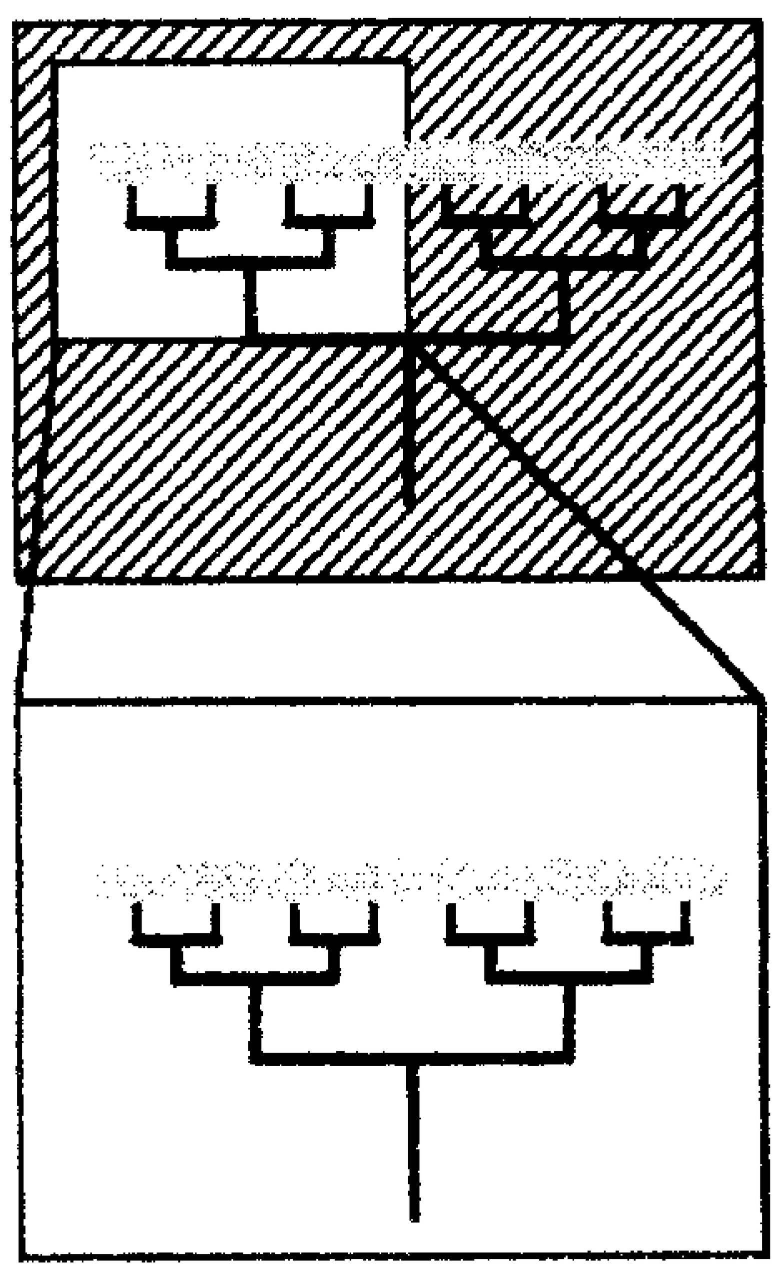
En cada extremo de las dos barras horizontales superiores de A_2 volvemos a agregar sendas copias de A_1, pero ahora formadas por segmentos de longitud 1/4. Obtenemos así el árbol A_3:



Continuamos siempre de la misma manera, agregando sucesivamente copias cada vez más pequeñas de A_1 y construyendo así los árboles A_4, A_5, A_6, A_7, etc. El *límite* de este proceso es el "árbol binario" A:

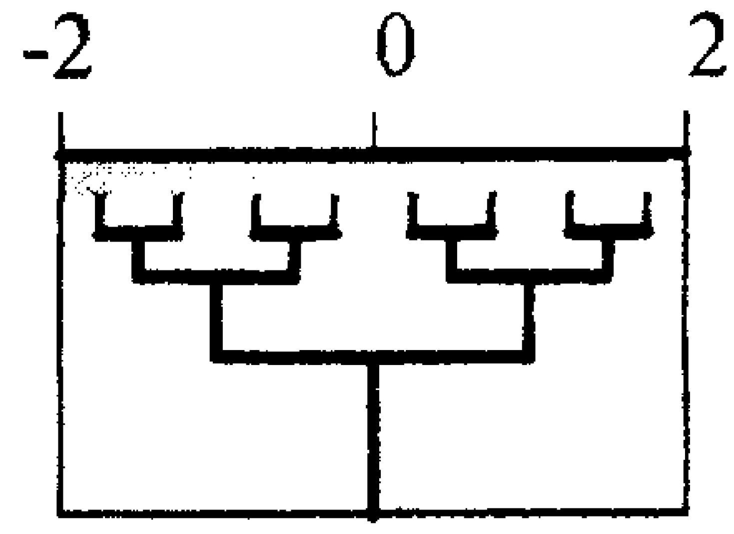


El árbol binario manifiesta claramente la característica de autosimilitud a la que aludíamos más arriba. En efecto, cualquier rama del árbol reproduce, a menor escala, la estructura total.



Esta característica es también compartida por los árboles naturales con los que nos cruzamos cada día. Cada rama de un árbol reproduce, en forma imperfecta y a menor escala, la estructura total.

Por otra parte, a pesar de la infinitud de su proceso de construcción el árbol binario es acotado: todo él cabe en un rectángulo de base 4 y altura igual a 2. En efecto, para estimar la altura del árbol debemos sumar las longitudes de cada uno de los segmentos **verticales** que aparecen en su construcción. Hay una cantidad infinita de tales segmentos y sus longitudes suman $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ Se trata de una serie geométrica convergente cuya suma es igual a 2. De ahí que sea ésta la altura del rectángulo que contiene a la totalidad del árbol. Una deducción similar se hace para estimar la longitud de su base.



En el dibujo le hemos adosado al lado superior del rectángulo de 4x2, el intervalo [-2,2] de la recta real. En el límite, cada rama del árbol A llega a tocar un punto de ese intervalo.

Para finalizar, le sugerimos al lector que reflexione sobre la siguiente pregunta: ¿las ramas del árbol llegan a alcanzar a *todos* los puntos del intervalo, o solamente a algunos de ellos?

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* BRIGGS, JOHN; PEAT, DAVID - *El espejo turbulento* - Barcelona, Salvat, 1994.
* KASNER, EDWARD; NEWMAN, JAMES - *Matemáticas e imaginación* - Barcelona, Salvat, 1994.
* STEWART, IAN - *¿Juega Dios a los dados?* -Barcelona, Grijalbo Mondadori, 1991.

La Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática
(Primera parte)

La Comisión Cultural del Departamento de Matemática del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González" invitó a su ciclo de charlas, por intermedio de los profesores María José Guasco y Claudio Salpeter, a una egresada de la Institución de reconocida trayectoria en el ámbito educativo, autora de varios textos secundarios, investigadora del tema Didáctica de la Matemática, y actualmente a cargo de dicha cátedra en el profesorado de la Facultad de Cs. Exactas de la U.B.A.: la profesora Patricia Sadovsky.
Por razones de espacio y lamentando la pérdida de información que cualquier recorte presupone, transcribimos lo que, a nuestro criterio, resultó conceptualmente más claro e interesante de la exposición.

Cuando digo Didáctica, hablo de la perspectiva desde donde yo trabajo. No se puede hablar de Didáctica como algo único y universal, porque no existe. Existen diferentes recortes, diferentes perspectivas teóricas y yo trabajo desde una perspectiva que se puede englobar en la teoría de situaciones de Brousseau o en la teoría de campos conceptuales de Vergnaud o en la teoría de la transposición didáctica de Chevallard; es lo que normalmente se dice la escuela francesa de Didáctica de la Matemática.
Si un docente o un estudiante de docente va a una charla de Didáctica de la Matemática, espera que le cuenten cómo se enseña algo, cuál es la buena manera. ¡Y he aquí la primera desilusión! No vendemos buenas maneras de enseñar los temas. **Somos contrarios a la perspectiva de enfocar las cosas en términos de buenas o malas maneras de enseñar.** ¿Por qué? Primero ¿qué quiere decir que algo es una buena manera de enseñar? ¿Una buena manera para quién? ¿Con qué concepción de aprendizaje? ¿Con qué concepción de matemática? ¿Desde qué perspectiva algo puede ser bueno o malo? Aparece un problema grande con esto de buenas o malas maneras y es que todo entra a dirimirse en el terreno de la opinión...
... La perspectiva de dirimir las cuestiones en el terreno de lo opinable es contraria a la perspectiva de constituir la Didáctica como un dominio de investigación.
... Preferimos plantear nuestro proyecto tratando de establecer la relación entre una cierta propuesta de enseñanza, a propósito de un contenido, y los sentidos que los alumnos adquieren como consecuencia de esa propuesta. Esto da lugar a una indagación y ... ubica más la perspectiva de la Didáctica como un dominio de investigación.

¿Qué cosa es el sentido de un concepto? Según Brousseau **está dado por la colección de situaciones en las que este conocimiento es realizado como teoría matemática, por la colección de situaciones en las que el sujeto lo ha encontrado como medio de solución y también que el sentido del conocimiento está dado por el conjunto de concepciones que el concepto rechaza, de errores que evita, de economías que procura y de formulaciones que retoma.**

Vamos a partir de esta definición de sentido y vamos a tratar de ver qué quieren decir cada una de estas cuestiones y cómo cada una de ellas ubica la necesidad de indagar algo pero a la vez ofrece ciertos resultados que podrían ser útiles para la enseñanza.
¿Qué quiere decir que el sentido está dado por la colección de situaciones en que un conocimiento es realizado como teoría matemática? Significa que para cada concepto (cada grupo de conceptos) habría un conjunto de situaciones que permitirían la

emergencia de ese concepto, cuando el alumno todavía no dispone del mismo. No se está pensando en los problemas para aplicar un concepto matemático que ya se aprendió o para reutilizarlo de una manera distinta, sino se está pensando en cuáles serían los problemas que hacen que las herramientas que se disponen hasta un cierto momento resulten insuficientes. Por otra parte, ¿cuál sería el conjunto de situaciones que permitirían abordar este problema y de qué manera se movilizarían, a partir de este problema o conjunto de problemas, herramientas o conceptos nuevos?

En la perspectiva de la investigación, cuando hay que pensar en la enseñanza de un concepto, ¿cuáles son los problemas para los cuales este concepto es necesario? Pero a la vez ¿cuáles son los que son abordables por el alumno con los conocimientos que tiene antes de haber identificado este nuevo concepto? y ¿cómo va a hacer un alumno para darse cuenta que las herramientas que tiene le sirvieron para abordar el problema pero le resultan insuficientes? (porque si fueran suficientes no se justificaría la introducción de un nuevo concepto).

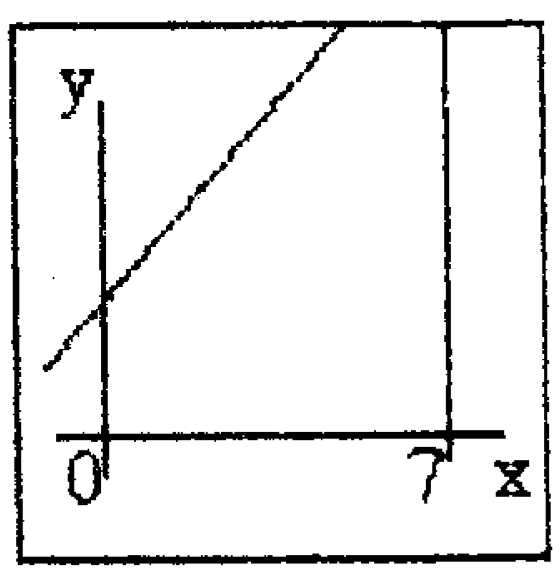
Como caso puntual, nosotros trabajamos en el grupo de investigación el pasaje de la aritmética al álgebra y nuestras preguntas centrales tienen que ver con esto: ¿cuáles son los problemas que exigen el uso de la herramienta algebraica y cómo es la complejidad de esos problemas como para que la aritmética les resulte insuficiente? ¿Cuál es la máxima complejidad posible para que el problema pueda ser abordado?

Lo que pasa en general, cuando uno ve el conjunto de problemas que se ofrece para que empiecen a trabajar en lo algebraico, es que la mayoría de esos problemas los resuelven con los recursos de la aritmética y los profesores se desesperan porque los chicos resuelven el problema pero no plantean la ecuación correspondiente.

¿Cómo se hace para que esto no ocurra? No sabemos. No tenemos respuesta. Luego abordaremos este problema: qué pasa cuando no hay respuestas.

Vamos a un ejemplo.

Nos ubicamos en el estudio de la ecuación de la recta (los chicos no la conocen). Se presenta el problema en la pantalla de la computadora para evitar que lo hagan "a ojo". El objetivo es "llegar" a la ecuación de la recta.



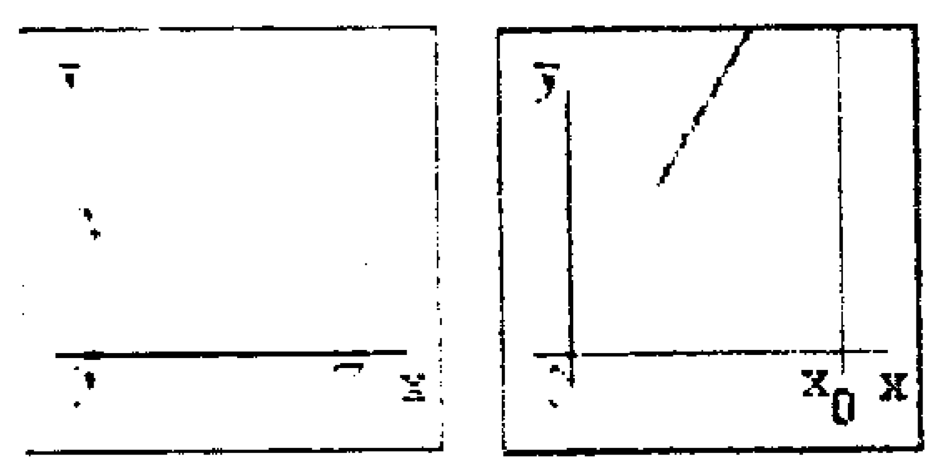
¿Dónde se van a cortar ambas rectas?

El problema obliga a una anticipación; hay que encontrar relaciones; tienen que descubrir que a incrementos iguales hay igual crecimiento.

El problema ofrece la posibilidad de que pongan en juego algo que estaba a nivel implícito (conocimiento no disponible). Esta puesta en acto ofrece la posibilidad que el docente identifique la relación. La relación entra en escena y esta entrada en escena logra que los chicos identifiquen una relación pertinente.

Vuelvo a lo de las buenas y malas maneras. ¿Esto que hicimos es mejor que si mostramos la fórmula y=ax+b? Ésta no muestra la característica de lo que ocurre con los puntos de la recta. La fórmula no está informando qué relaciones se dan en algo que es lineal y por lo tanto los alumnos no infieren que puede ser modelizable a través de una función lineal y que no.

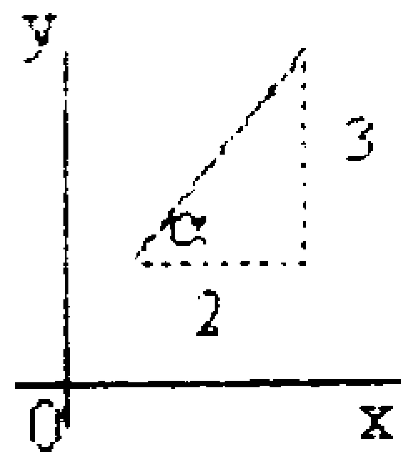
Si seguimos, aparecen variaciones del problema (por ejemplo, pendiente negativa) que hacen que la relación encontrada anteriormente se empiece a poner a prueba ahora.



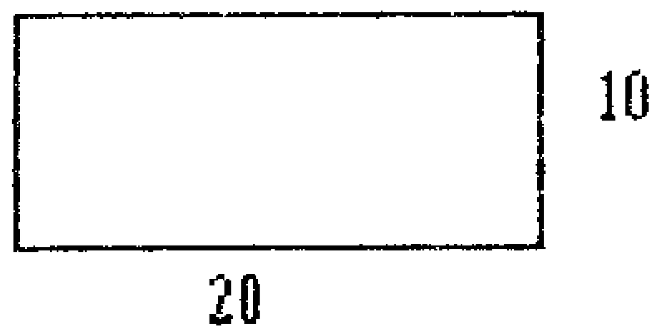
El gráfico de la derecha corresponde a lo que los chicos suelen llamar "el caso que se complica". La ecuación aparece como el resumen de una relación que se encontró previamente.

Esto es un ejemplo de lo que querría decir plantear problemas que movilicen herramientas a partir de las

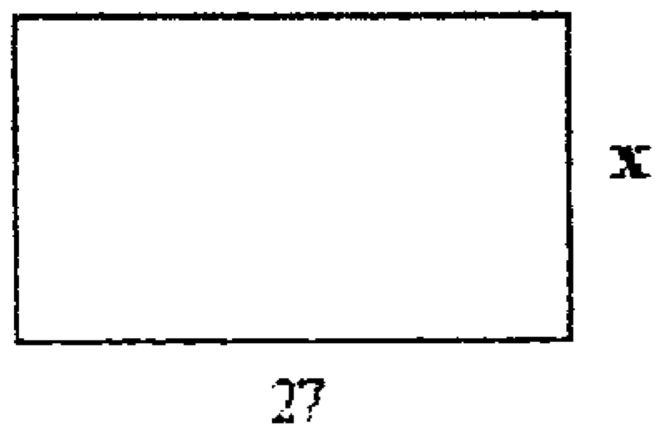
cuales se puede identificar un nuevo concepto. No alcanza con un problema. El proceso es largo, es complejo...
Una condición que parece necesaria para que los chicos tengan herramientas para abordar el problema es que también tengan alguna idea de qué es la dirección.
Antes les hemos planteado: dado un segmento y las coordenadas de los extremos, encontrar otro paralelo y mayor. Y varios así.



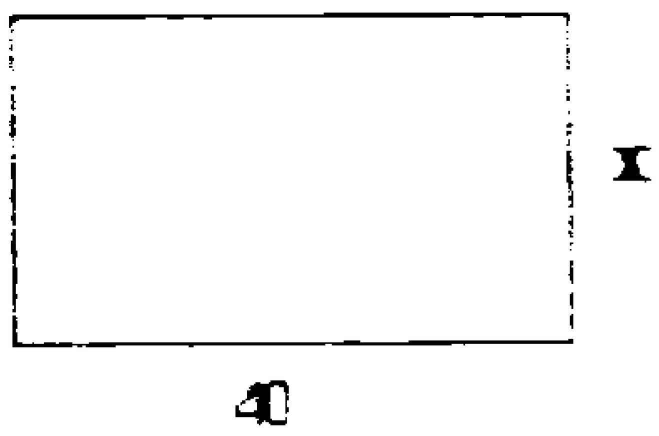
Algo bastante común es que identifican los valores 2 y 3 y para encontrar un segmento paralelo y mayor suman 1 a cada componente. Ponen en juego una concepción errónea, entendiendo por concepción que actúa en el alumno como un conocimiento.
Volvemos a la definición de sentido. Cuando Brousseau dice que está dado por el conjunto de concepciones que el concepto rechaza, de errores que evita, etc. ¿qué quiere decir? Lo cometido no es una falta, un error, sino un conocimiento, una concepción. Su rechazo exige los mismos movimientos que exige la elaboración de un conocimiento.
Si uno pudo identificar que algo funciona como una concepción errónea lo que tendrá que organizar es un conjunto de situaciones que apunten al rechazo de esa concepción y también establecer algún dominio de validez de esa concepción. Ver que si $\alpha=45°$ entonces la concepción es válida.
¿Qué sería una secuencia que apuntara al trabajo sobre esta concepción? Veamos.
Tengo una foto rectangular de 10 x 20 y quiero ampliarla.



a) Si el lado de 20 pasa a medir 27, ¿cuánto valdrá x?



b) Si el lado de 20 pasa a medir 40, ¿cuánto valdrá x ahora?



c) Tenemos una foto de 14 x 18 y queremos ampliarla para que el lado de 14 pase a medir 17. ¿Cuánto medirá el otro lado?

Vamos al caso a). Si $x=17$ (porque casi todos los chicos suman) se darían cuenta que no se respeta la proporción de doble y mitad; que $20=10.2$ y $27\neq 2.17$ entonces sumar no sirve. Encontrarían un límite en este caso, pero este límite no es general.
Pocos se centran en conservar la relación $20=2.10$ entonces $27=2.x$
Hacerlo bien en cierto contexto no significa disponer de la ley que garantiza llegar a la respuesta correcta.
En el caso b) todos multiplican por 2, pero no significa que hayan rechazado la suma como modelo.
En el caso c) se hace evidente el error, porque nuevamente todos suman.
Es interesante que en función de los datos del problema se movilizan cosas diferentes. Esto es algo que en Didáctica llamamos **variable didáctica**: algún elemento (los datos, la organización, los útiles necesarios en un problema de geometría) cuya modificación produce una modificación del abordaje que los alumnos hacen y en el conocimiento que ponen en juego.
Luego, uno de los objetivos de la investigación Didáctica es identificar las variables didácticas interesantes que permitan desplegar distintas formas del conocimiento.
Volviendo a los ejemplos. Podríamos preguntarnos por qué no les dimos de entrada el caso b) para que lo hicieran bien. Lo que ocurre es que hay que construir el rechazo a una concepción errónea. Por ejemplo, la concepción doble y mitad es punto de apoyo de una relación que debe conservarse para rechazar la suma, que no conserva dicha proporción.
El error de suma aparece en distintas formas. La idea del juego de marcos (enfoques diferentes del mismo conocimiento desde la geometría, desde la aritmética, desde el

álgebra) provoca progreso en el conocimiento. Por ejemplo, veamos el siguiente problema: en una fiesta hay 15 personas de las cuales seis son mujeres. Entra una mujer. ¿Aumenta o disminuye la proporción de mujeres? ¿Cómo lo explicaría en términos de fracciones?

Responden correctamente la gran mayoría; es el problema y no la cuenta algebraica la que nos está informando el resultado. El planteo sería: Dado $\frac{a}{b}$ con $a > b$, qué relación hay entre $\frac{a}{b} \ldots \frac{a+1}{b+1}$.

Este es el juego de marcos que estamos planteando, que tiene que ver con relacionar el error de sumar con diferentes problemas: el del rectángulo, el de la fracción y con esta cuestión algebraica: si a, b y x son números positivos ¿qué relación hay entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+x}{b+x}$? La relación cambia según sea a mayor, menor o igual que b. Hay que ir encontrando distintos puntos de apoyo que den un dominio de validez al error que se comete.

Retomando la definición de sentido se habla de "economías que procura"; cuando pensamos en plantear un problema nuevo, consideramos las herramientas que tiene el alumno porque si no tuviera ninguna no sería un problema. Tiene que darse cuenta que esas herramientas que tenía no son generales, no sirven para cualquier caso. Si esto no está claro, entonces no se entiende por qué se está introduciendo un nuevo concepto.

Juguemos un poco con las variables didácticas. Pensemos en este problema: En un torneo juegan tres equipos, todos contra todos. ¿Cuántos partidos tiene el torneo?

Los chicos hacen... A, B, C

AB BA BC CB AC CA

Esto no justifica la introducción de lo multiplicativo para resolver; inmediatamente tengo que plantear una situación donde resolver esto no sea tan cómodo; planteamos un problema idéntico con 16 equipos. ¿Cuántos partidos y cuantas fechas y partidos en cada fecha se jugarán?

Mayoritariamente los chicos hicieron árboles para resolver

15.2 = 30

30.16 = 480

Primera respuesta errónea

Otra respuesta errónea:

1 eq.________30 partidos

16 eq.________16.30=480part

El único grupo que resolvió correctamente fue el que planteó como representación de la situación una tabla

	A	B	C	D
A	●	X	X	X
B	X	●	X	X
C	X	X	●	X

16.16 -16=16.15=240

Es importante ver el papel de la representación; la interacción entre ésta y la identificación de la herramienta. Gracias a la representación identifican lo multiplicativo y no al revés; con lo cual, provocar distintas formas de representación parecería un punto interesante en este proceso de identificación de herramientas.

En cada fecha 8 partidos; como hay 30 fechas entonces 8.30=240 partidos.

Volviendo a la clase, ¿cómo avanzó la situación con los grupos cuya respuesta fue 480? Llegamos a un momento delicado y nada sencillo de resolver: aguantar la incertidumbre que provoca el error. (La respuesta) mata las ganas de seguir buscando. El problema presenta características que hace que se detecte un abordaje erróneo, pero no es sólo el problema sino la interacción que es capaz de gestar el docente. Como el grupo no avanza entonces la maestra sugiere que trabajen con menos equipos y ahí se dan cuenta del error.

Vemos que el problema ofreció posibilidades de detectar contradicciones entre respuestas que estaban pensadas desde conceptualizaciones distintas, pero muestra que no depende sólo del problema sino de las interacciones que se generan en la clase, las que hacen que el conocimiento avance

¿Cuáles son los problemas que movilizan las herramientas nuevas? Esto es motivo de indagación. Lo remarco para desresponsabilizar a los docentes en esta búsqueda.

La Didáctica de la Matemática no ha producido hoy problemas que den respuesta a todos los conceptos que un docente tiene que enseñar. Sin embargo, el docente igual tiene que seguir cumpliendo con su responsabilidad social de enseñar. Entonces, ¿qué se rescata de esto?

Se rescatan ciertos criterios que lo pondrán en mejores condiciones como para seleccionar su proyecto de enseñanza dentro de la oferta que tiene: dentro de los textos, dentro de las guías prácticas que están habitualmente en uso, cómo reorganizarlas, cómo modificarlas para transformar un problema dado en otro que genere ciertas interacciones entre el alumno y el problema.

¿Qué quiero decir cuando hablo de estos criterios? Identificamos un conjunto de condiciones para los problemas que harían posible orientar la búsqueda, tener criterios para seleccionar, sabiendo que uno no puede garantizar esto para todos los conceptos.

La pregunta es ¿cuáles son estas condiciones de los problemas? pensando en problemas que den lugar a comenzar a enseñar, y por lo tanto comenzar a aprender un concepto nuevo. La respuesta inicial no es lo que queremos enseñarle ¿Por qué? Porque si de entrada el alumno hace lo que le queremos enseñar quiere decir que ya lo sabía; no es un problema para aprender, en todo caso es un problema para reusar algo que ya sabia. La respuesta inicial debe permitir utilizar una estrategia de base con la ayuda de conocimientos anteriores. Si el alumo frente al problema no puede hacer nada, el problema no sirve. Esta estrategia deberia mostrarse lo suficientemente ineficaz como para que el alumno se vea obligado a realizar acomodaciones. Esas acomodaciones permiten construir el conocimiento al que se apunta. Los alumnos se responsabilizan por la organización de su actividad para tratar de resolver el problema propuesto. Este es un problema central y difícil de conseguir: lograr que los alumnos entren en el juego y se hagan cargo del problema.

La actividad de los alumnos está orientada hacia la obtención de un resultado que puede ser identificado por ellos. La resolución del problema indica la toma de múltiples decisiones por parte de los alumnos y la posibilidad de conocer las consecuencias de esas decisiones, los alumnos pueden recurrir a estrategias diferentes. La toma de decisiones implica que el alumno está invirtiendo conocimiento en esto que va resolviendo.

Hay veces que la respuesta está determinada en el enunciado. Eso no lleva a tomar decisiones y esto no garantiza que la resolución de ese problema esté dando lugar a algún aprendizaje. Y la cuestión de la diversidad de estrategias está asociada a esta cuestión: se pueden tomar decisiones en la medida en que hay un conjunto de alternativas para hacer frente al problema y no una respuesta única y una estrategia única.

El otro punto que considero central es qué quiere decir que el alumno puede conocer los resultados de las decisiones que toma en la interacción con el problema.

El acento está puesto en que el alumno valide los resultados de su propia actividad a través de su interacción con el problema.

Generalmente están claramente repartidos los roles: los alumnos resuelven y los profesores autorizan o no esta resolución. No está instalado que son ellos quienes podrían hacerse cargo de la validación de sus resultados.

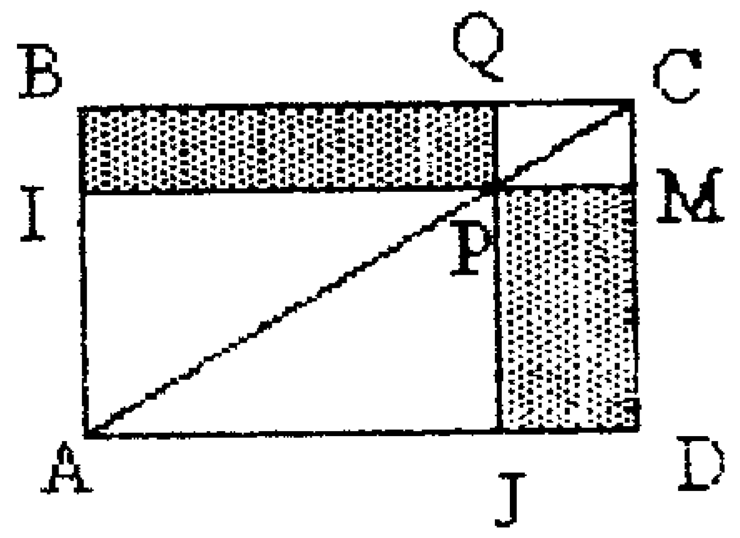
Esto requiere condiciones que a veces no están dadas. Pero otras veces las condiciones están y los alumnos no quieren hacerse cargo. Hay una búsqueda de condiciones de posibilidad, nada significa una garantía.

Veamos un ejemplo en el que los alumnos se encuentran, en su interacción con el problema, con las consecuencias de las decisiones que van tomando.

(Explica seguidamente el procedimiento seguido por un grupo de alumnos para embaldosar un piso con polígonos regulares)

Se les puede entregar moldes para no perder tiempo. Prueban con triángulos y cubren; prueban con cuadrados, también; prueban con pentágonos y es la primera sorpresa; prueban con hexágonos y como cubren sacan la primera conclusión: *Cubren los de lados pares, el triángulo será una excepción.* Con el heptágono

ni prueban y con el octógono se juegan 100% a que cubrirá.
La organización de la situación les permite decidir rápidamente qué está bien o mal... al conocer el resultado de la decisión (porque la experimentan) se continúa en el problema con más información de la que tenían inicialmente. A medida que se van rechazando opciones, esas opciones empiezan a formar parte del conocimiento disponible para abordar el problema.
A partir de esta situación, viendo que el octógono tampoco cubre empiezan a darse cuenta que no tiene que ver con los lados sino con el ángulo, sin que sepan todavía cómo es la relación. Finalmente α es divisor de 360°. Siguen probando; esto es, indagan experimentalmente y al final comprenden que se debe cumplir una serie de condiciones: que sean por lo menos tres vértices que converjan, que los polígonos que siguen probando tienen ángulos interiores muy grandes, etc. Recién ahí llegan a la respuesta: pueden ser triángulos, cuadrados o hexágonos.
Otro problema didáctico que es objeto de indagación: **la demostración**.
Aparece muchas veces como un cambio de discurso: no se puede medir, no se puede leer la información directamente sobre el dibujo. Para los chicos, este cambio de discurso está asociado a que antes iban a la primaria y ahora a la secundaria; antes aprendían con números y ahora con letras *porque somos más grandes, para que razonemos más.*
¿Cuál sería un abordaje distinto respecto de la problemática de que los chicos entren en el juego de la demostración? Sería encontrar situaciones Didácticas que les permitan a los chicos encontrar ellos los límites de la experimentación y esto sería un planteo diferente. La necesidad de demostrar que no aparezca como un cambio de discurso debido al cambio de institución o al cambio de docente, sino que aparezca porque desde los problemas que estoy resolviendo me encuentro con que leer información directamente sobre el dibujo no alcanza. Por ejemplo, se puede en este dibujo pedirle a los chicos que comparen las áreas sombreadas



¿Cómo son las áreas MPJD y PQBI?

Sintetizando: estuvimos buscando condiciones sobre los problemas, estuvimos tratando de marcar que las condiciones sobre los problemas son necesarias no suficientes. Una vez resueltos los problemas, los chicos se tendrán que contestar en qué proyecto, en qué secuencias se insertan estos problemas que estuvimos resolviendo, que tiene que ver con lo que sabía antes y qué tiene que ver con lo que voy a aprender después, por qué estas cosas que parecen tan distintas se resuelven con las mismas herramientas matemáticas. Si los chicos no se contestan estas preguntas, estas herramientas y estos conceptos que se movilizaron con los problemas que les fuimos ofreciendo no quedan descontextualizados de las situaciones que los hicieron surgir. Si no se descontextualizan, es difícil pensar la reutilización. Realmente hay una construcción, pero esa construcción queda muy ligada al contexto particular en el que emergió y es bastante difícil pensar que los chicos espontáneamente van a poder identificar las situaciones de reutilización de ese concepto.
En este proyecto de descontextualizar las herramientas que los chicos fueron elaborando, el rol del docente es crucial y difícil porque tiene que resolver una cuestión bastante compleja que es: partir de la diversidad de estrategias y procedimientos de los chicos y hacerlas converger hacia las herramientas que queremos que identifiquen finalmente al saber, en su forma culturalmente establecida.
Esta cuestión de articular lo que los chicos hicieron con lo que finalmente queremos que aprendan y retengan; coordinar las distintas producciones, manejar la diversidad; en qué momento, además, exigir esta formalización, son todas preguntas y problemas que el docente tiene que resolver y para las cuales las soluciones

no son evidentes; se sabe para algunos temas, para otros se sabe menos y para otros, no se sabe nada.

Para finalizar, y retomando la pregunta inicial de Claudio (tenemos la sensación de que la Didáctica es algo muy teórico) hay resultados que produce la Didáctica que pueden serle útiles al profesor para pensar la enseñanza.

Hay otras producciones de la Didáctica que son modelos más teóricos, que están en el ámbito de la investigación. El profesor en función de enseñanza puede no estar interesado en estas producciones teóricas... aparecen más como modelos teóricos productivos para formular hipótesis, para diseñar y poner a prueba situaciones, etc., pero que puestos, difundidos y ofertados a los profesores, como no se entiende para qué sirve, o se ve como algo muy teórico, muy alejado de la práctica o se empiezan a difundir palabras sin que se entienda demasiado bien el significado de ellas y necesariamente se deforma el significado. Conceptos tales como transposición didáctica, contrato didáctico, son conceptos que uno ve que se usan muchas veces de una manera un poco naïf, donde no se entiende muy bien para qué sirve pensar las cosas en los términos de contrato didáctico o transposición didáctica.

El contrato didáctico es una herramienta teórica que puede servir para identificar ciertos procesos en el momento de la investigación. Ahora, si el contrato didáctico le va a servir al docente para justificar todo lo que pasa en una clase, no sirve para nada como herramienta.

No es responsabilidad de los docentes que estas cosas pasen; es responsabilidad de quienes difundimos.

Por eso quienes enseñamos Didáctica de la Matemática a futuros docentes nos debemos una discusión de cómo distinguir estos planos de producción de la Didáctica y poder discernir un poquito qué cosas son útiles para la enseñanza, para la práctica docente, para pensar la práctica docente y qué cosas es más interesante y más productivo pensarlas en el ámbito de la investigación. Esto no quiere decir que sean secretas, pero si uno las trasmite, trasmitirlas aclarando en qué ámbitos son interesantes y mostrando por qué.

Finalmente si tuviera que contestar qué aporta la Didáctica de la Matemática a los profesores, yo diría: no aporta ni pretende aportar recetas; no pretende decir que quien atienda sus resultados va a solucionar todos los problemas de la enseñanza; no pretende simplificar la enseñanza; la enseñanza es algo difícil y complejo. Creo que la Didáctica de la Matemática como dominio de investigación pretende conocer mejor el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Ayudar al docente a conocer mejor un proceso del cual él es protagonista, yo creo que es un aporte. Ni más ni menos. Ese es el aporte: entender mejor la práctica de la enseñanza.

A continuación de la exposición se generaron interesantes preguntas que la Prof. Sadovsky respondió ampliando conceptos ya vertidos y agregando nuevos. En la segunda parte de esta nota, transcribiremos dicho diálogo.

Enseñar es un oficio difícil, tal vez despiadado, pues no podemos dar a nuestros alumnos lo que nosotros no somos.

Lo mejor de nuestra enseñanza es, al fin de cuentas, la humanidad que haya en nosotros.

Si no proponemos nada humano, nuestro papel es irrisorio.

W. SERVAIS (1913-1979)

***Del paraíso que creó Cantor nadie podrá expulsarnos** - David Hilbert*

Georg Cantor

Los primeros años

Hijo de Georg Waldemar Cantor (un próspero comerciante) y María Bohm, nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, Rusia, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. Fue el hijo mayor de una familia con marcado temperamento artístico (herencia de un abuelo de su madre, un reconocido músico): su hermano Constantin, fue un buen pianista y su hermana Sophie Nobiling una prodigiosa dibujante. En Georg esta naturaleza artística reprimida encuentra una turbulenta salida en la Matemática y la Filosofía.

Descendiente de judíos puros por ambas ramas, la familia era cristiana. El padre se había convertido al protestantismo, y la madre, desde su nacimiento, fue católica romana. Cantor prefirió el lado protestante y adquirió mucho interés por la teología medieval.

Su interés absorbente por el estudio de las Matemáticas fue reconocido antes de cumplir los 15 años. Su primera educación fue confiada a un preceptor particular, y después siguió un curso en una escuela elemental en San Petersburgo. Cuando la familia se trasladó, debido a una enfermedad pulmonar del padre, en 1856, a Francfort, Alemania, Cantor asistió primero a algunas escuelas privadas de dicha ciudad y de Darmstadt, ingresando luego al Instituto de Wiesbaden en 1860.

Georg Cantor estaba decidido a ser matemático, pero su padre esperaba que siguiera estudios de ingeniería, por ser una profesión más lucrativa. Así le escribía, cuando tenía 15 años, expresando las esperanzas de sus numerosos tíos, tías y primos: *"Esperan de ti que llegues a ser nada menos que un Theodor Schaffer, y más tarde, si Dios lo permite, un astro luminoso en el firmamento de la ingeniería"*. Georg aceptó la voluntad de su padre, hasta que cuando tenía 17 años su progenitor reconoció el error que había cometido frustando la vocación de su hijo y le permitió seguir la carrera matemática universitaria. Así respondía Georg: *"Mi querido papá podréis daros cuenta del gran placer que me ha producido su carta. Ella establece mi futuro... Ahora soy feliz cuando veo que no se disgustará si sigo mis sentimientos preferidos. Espero que usted, querido padre, ha de vivir para encontrar un placer en mi conducta, dado que mi alma, todo mi ser, vive en mi vocación; lo que un hombre desea hacer y lo que su compulsión interna le empuja, lo cumplirá"*.

Cantor comenzó sus estudios universitarios en Zurich, en 1862, pero pasó a la Universidad de Berlín al siguiente año, después de la muerte de su padre. En Berlín se especializó en Matemática, Filosofía y Física, aunque jamás fue muy afecto a la tercera. En Matemática sus profesores fueron Kummer, Weierstrass y Kronecker. Siguiendo la costumbre alemana, Cantor pasó un breve tiempo en otra Universidad, y cursó el semestre de 1866 en Göttingen.

La atmósfera matemática de Berlín, con Kummer y Kronecker, estaba cargada de Aritmética, así Cantor hizo un profundo estudio sobre las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, y escribió en 1867, su disertación, aceptada para aspirar al título de doctor sobre un punto difícil que Gauss había dejado a un lado respecto a la solución en números enteros x, y, z de la ecuación indeterminada:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

donde a, b, c son números enteros. Era un excelente trabajo, nos dice E.T. Bell, pero en base a él ningún matemático podría haber predicho que el autor de 22 años llegaría a ser uno de los más originales creadores de la historia de la Matemática.

Orígenes del problema

Las necesidades del Análisis - en particular el estudio a fondo de las funciones de variables reales, que se desarrolla durante todo el siglo XIX- son el origen de lo que iba a convertirse en la moderna Teoría de conjuntos.
Cantor parte del Análisis, y sus trabajos sobre las series trigonométricas, inspirados en los de Riemann, le llevan de modo natural, en 1872, a un primer intento de clasificación de los conjuntos "excepcionales". Se trata de los conjuntos E, incluidos en $\boldsymbol{R}$, tales que si una serie trigonométrica $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{nix}$ converge hacia 0 salvo en los puntos de E, se tiene necesariamente $c_n=0$ para todo n. Estos conjuntos E serán los que en la actualidad conocemos como numerables.
Cantor comienza a interesarse por los problemas de equipotencia, ya que en 1873 hace notar que el conjunto de los números racionales es numerable. Después, a partir de 1874, se interesa primordialmente por el problema de la dimensión, que le preocupa, e intenta en vano, durante tres años, demostrar la imposibilidad de una correspondencia biunívoca entre R y R^n $(n>1)$ antes de conseguir él mismo, estupefacto, definir una correspondencia de este tipo.
En una serie de seis memorias publicadas en los *Mathematische Annalen* entre 1878 y 1884 ataca simultáneamente los problemas de equipotencia, la teoría de conjuntos totalmente ordenados, las propiedades topológicas de R y R^n, y el problema de la medida, y entre sus manos van separándose poco a poco, con una claridad admirable, las nociones que parecían tan indisolublemente unidas en la concepción clásica del "continuo".

Sus trabajos

Su primer amor fue la teoría gaussiana de números, a la cual se sintió atraído por su dificultad, nitidez y clara perfección de las pruebas.
A partir de estos estudios, bajo la influencia de la escuela de Weierstrass, pasó al Análisis riguroso, particularmente a la teoría de las series trigonométricas (Trabajos en conexión con el "número real").
Cantor se casa en 1874 y en su luna de miel viaja con su esposa a Interlaken, donde se encuentran con Dedekind.
Éste, en 1872, había publicado en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, la definición de conjunto infinito: "Un sistema S se llama *infinito* cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario, se dice que S es un sistema finito."
El mismo año de su casamiento, 1874, publica Cantor en el Journal de Crelle uno de sus más revolucionarios artículos. Cantor reconoció, lo mismo que Dedekind, la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos, pero se dio cuenta además de que no todos los conjuntos infinitos son del "mismo tamaño", cosa que no parecía haber pensado Dedekind. En el caso finito, dos conjuntos se dice que tienen el mismo número cardinal si se pueden poner sus elementos en correspondencia biunívoca. De una manera análoga, se puso a construir Cantor una jerarquía de conjuntos infinitos, atendiendo a la Mächtigkeit o "potencia" del conjunto.
Algunos resultados de la teoría de conjuntos de puntos eran tan paradójicos y chocaban tan frontalmente con la intuición, que Cantor mismo escribía en una ocasión a Dedekind, en 1877, debido a su construcción de una correspondencia biunívoca entre un cuadrado y su lado: "Je le vois, mais je ne le crois pas" ("Lo veo, pero no lo creo"), y le pedía vehementemente a su amigo que revisase cuidadosamente la demostración. Los editores de revistas se mostraron también a menudo indecisos acerca de si aceptar o no sus artículos, y varias veces la publicación de artículos de Cantor en el *Journal de Crelle* se retrasó por indecisiones editoriales y por miedo de que los errores acechasen escondidos en un planteamiento tan decididamente poco convencional de

los conceptos matemáticos, como era el de Cantor.

Los opositores

Georg Cantor pasó la mayor parte de su carrera profesional en la universidad de Halle, una universidad pequeña sin ningún renombre especial. Él había esperado durante largos años alcanzar la distinción de un puesto de profesor en la prestigiosa universidad de Berlín, y le echaba la culpa a Leopold Kronecker (1823-1891) de su continuo fracaso en conseguirlo. Kronecker aprobaba el programa de aritmetización del análisis, como Weierstrass, pero exigía que la aritmética fuese finita, y aquí entró en agudo conflicto con Cantor. Insistía Kronecker en que tanto la aritmética como el análisis deberían basarse exclusivamente en los números enteros. "Dios hizo los enteros", solía decir, "y todo lo demás es obra del hombre". Rechazaba categóricamente las construcciones del número real de su época, sobre la base de que no podían conseguirse por medio de procesos finitos únicamente, e hizo llamamientos para llevar a cabo una revolución aritmética que excluiría a los números irracionales, considerándolos inexistentes.

Kronecker fue durante la mayor parte de su vida un próspero hombre de negocios, pero estuvo siempre estrechamente relacionado con los científicos de la universidad de Berlín, donde finalmente se le ofreció y él aceptó un puesto de profesor en 1883. Kronecker no solamente impidió que Cantor obtuviese un puesto en la universidad de Berlín, sino que intentó ir destruyendo subterráneamente la rama de la matemática que estaba aquél creando. Debido probablemente a estos reiterados ataques, el hipersensible y temperamental Cantor sufrió en 1884 la primera de las crisis nerviosas que iban a presentársele periódicamente durante los últimos 33 años de su vida. Los ataques de depresión lo llevaron a veces a dudar de su propia obra. Hacia el final de su vida se ganó el reconocimiento general por sus descubrimientos, pero después de una dura vida de lucha casi sin pausa, su muerte en 1918 en un sanatorio mental de Halle nos viene a recordar que el genio y la locura están a veces estrechamente relacionados.

Precursores

Desde los tiempos de Zenón se ha hablado del infinito, tanto en el ámbito teológico como en el matemático, pero es Cantor quien finalmente puede establecer en forma precisa de qué se estaba hablando.

La mayoría de las veces se citan ejemplos sobre magnitudes indefinidamente grandes. Otras, en cambio, la atención se centra en los infinitos elementos de una colección concreta, por ejemplo los números reales o los puntos de un segmento.

Ya **Galileo Galilei** (1564-1642), en la "Primera jornada" de sus célebres *Discorsi*, de 1638, con motivo de la conocida "rueda de Aristóteles" había traído a colación cuestiones matemáticas relacionadas con los conjuntos infinitos: al comparar la sucesión de los números naturales y la de sus cuadrados

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, \ldots$

$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots, n, \ldots$

aparece ante nosotros el milagro de que "una parte de un todo puede tener el mismo número cardinal que el todo". Y en una comparación de sólidos, a la manera de Arquímedes en el *Método*, llegó a la paradójica equivalencia entre un punto y una circunferencia.

Bolzano escribió *Paradojas del infinito* (póstumo 1851), donde asomaban, en una atmósfera más filosófica que matemática, algunas de las nuevas concepciones.

Cauchy y Weierstrass pensaban que sólo podían resultar paradojas de los intentos de identificar un infinito "completo" o actual en la matemática, creyendo que lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño no representaban más que las correspondientes potencialidades de Aristóteles, es decir, el caracter *esencialmente incompleto* del *proceso* en cuestión.

Problemas del infinito potencial y actual.

Los matemáticos clásicos evitan cuidadosamente introducir en sus razonamientos el "infinito actual" (es decir, conjuntos formados por una infinidad de elementos concebidos como simultáneamente existentes, al menos en la mente), y se conforman con el "infinito potencial", es decir, con la posibilidad de aumentar toda magnitud dada (o de disminuirla, si se trata de una magnitud "continua"). Este punto de vista permitía al menos desarrollar la mayor parte de las matemáticas clásicas, incluyendo la teoría de las proporciones y más tarde el Cálculo infinitesimal, y se convirtió en un dogma casi universalmente aceptado hasta bien entrado el siglo XIX.

Teoría de conjuntos.

§1 La concepción de potencia o número cardinal

Por un "conjunto" (*Menge*) entenderemos cualquier colección en un todo (*Zusammenfassung su einem Ganzen*) M de objetos definidos y separados m de nuestra intuición o nuestro pensamiento. Estos objetos se denominan los "elementos" de M.

Así comienza Cantor su trabajo titulado *Contribuciones para la fundación de la teoría de los números transfinitos* - Primer artículo - Marzo de 1895.

A continuación resumiremos algunas de las definiciones y teoremas que Cantor incluye en este artículo

Todo conjunto M tiene una "potencia" definida, a la cual también llamaremos "número cardinal".

Designaremos por el nombre "potencia" o "número cardinal" de M el concepto general el cual, mediante nuestra activa facultad de pensamiento, surge desde el conjunto M cuando nosotros nos abstraemos de la naturaleza de sus elementos m y del orden en que ellos están dados.

Denotaremos el resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal o potencia de M.

$$\overline{\overline{M}}$$

Como cada elemento m, si lo abstraemos de su naturaleza, se transforma en una "unidad", el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ es un conjunto definido compuesto por unidades, y ese número tiene existencia en nuestras mentes como una imagen intelectual o proyección del conjunto dado M.

Decimos que dos conjuntos M y N son "equivalentes", en símbolos

M~N o N~M

si es posible ponerlos, por alguna ley, en una relación de uno a otro que para todo elemento de uno de ellos le corresponda un y sólo un elemento del otro.

....

De importancia fundamental es el teorema que dos conjuntos M y N tiene el mismo número cardinal, si y sólo si, son equivalentes: así,

de M~N tenemos $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, y

de $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ tenemos M~N.

Así la equivalencia de conjuntos forma la condición necesaria y suficiente para la igualdad de sus números cardinales.

....

§2 "Mayor" y "menor" con potencias.

Si para dos conjuntos M y N con números cardinales $a = \overline{\overline{M}}$ y $b = \overline{\overline{N}}$, se cumplen ambas condiciones:

(a) No existe parte de M que sea equivalente con N,

(b) Existe una parte N_1 de N tal que N_1~M,

De esta manera ellas expresan una relación definida entre los números cardinales a y b.

....

Expresaremos la relación de a y b caracterizada por (a) y (b) diciendo: a es "menor" que b o b es "mayor" que a, en símbolos

a<b o b>a

....

Teorema A. Si a y b son dos números cardinales cualesquiera, luego a=b o a<b o a>b.

Desde este teorema los siguientes teoremas que, de todas formas, no utilizaremos aquí, pueden ser simplemente deducidos:

B. Si dos conjuntos M y N son tales que M es equivalente a una parte N_1 de N y N a una parte M_1 de M, luego M y N son equivalentes; (*);

C. Si M_1 es una parte de un conjunto M, M_2 es una parte del conjunto M_1, y si los conjuntos M y M_2 son equivalentes, luego M_1 es equivalente a ambos M y M_2;

D. Si, con dos conjuntos M y N, N no es equivalente ni a M ni a una parte de M, existe una parte N_1 de N que es equivalente a M;

E. Si dos conjuntos M y N no son equivalentes, y existe una parte N_1 de N que es equivalente a M, entonces ninguna parte de M es equivalente a N.

§3 La suma y multiplicación de potencias.

La unión de dos conjuntos M y N que no tienen elementos comunes la denotamos por (M,N).

....

El número cardinal de (M,N) sólo depende de los números cardinales $a = \overline{\overline{M}}$ y $b = \overline{\overline{N}}$.

Esto nos conduce a la definición de la suma de a y b. Pondremos

$$a+b=\overline{\overline{(M,N)}}$$

....

Ahora vayamos a la multiplicación. Cada elemento m de un conjunto M puede ser pensado estrechamente relacionado con cada elemento n de otro conjunto N para formar un nuevo elemento (m,n); denotaremos por (M.N) el conjunto de todos estas "uniones amarradas" (m,n), y lo llamamos el "conjunto de las uniones amarradas (*Verbindungsmenge*) de M y N".

Vemos que la potencia de (M.N) sólo depende de las potencias de $a=\overline{\overline{M}}$ y $b=\overline{\overline{N}}$

....

Luego definimos el producto a.b por la ecuación

$$a.b=\overline{\overline{(M.N)}}$$

§4 La potenciación de cardinales.

Por un "cubrimiento del conjunto N con elementos de un conjunto M" o, más simplemente, por un "cubrimiento de N con M" entendemos una ley por la cual cada elemento n de N es relacionado con un elemento definido de M, donde el mismo elemento de M puede aparecer repetidamente en dicha correspondencia. El elemento de M relacionado con n es, en cierta forma, una función de n, y puede ser denotado por f(n). Es llamado una "función cubrimiento de n". El correspondiente cubrimiento de N es llamado f(N).

....

La totalidad de los diferentes cubrimientos de N con M forma un conjunto definido con los f(N) como elementos; lo llamamos el "conjunto cubrimiento de N con M" (*Belegungsmenge*) y lo denotamos por (N/M).

....

El número cardinal de (N/M) depende solamente de los números cardinales $a=\overline{\overline{M}}$ y $b=\overline{\overline{N}}$; nos sirve para la definición de a^b:

$$a^b=\overline{\overline{(N/M)}}$$

....

Podemos probar fácilmente los teoremas para tres números cardinales **a**, **b** y **c**:

$$a^b.a^c=a^{b+c}$$
$$a^c.b^c=(ab)^c$$
$$(a^b)^c=a^{b.c}$$

....

Si denotamos la potencia del continuo X (esto es, la totalidad X de los números reales x tales que $x\geq 0$ y $x\leq 1$) por υ, podemos ver fácilmente que puede ser representada por, entre otros, la fórmula:

$$\upsilon=2^{\aleph_0}$$

donde en *§6* se da el significado de $\aleph_0$. De hecho, la definición de potenciación, $2^{\aleph_0}$ es la potencia de todas las representaciones

$$x=\frac{f(1)}{2}+\frac{f(2)}{2^2}+\ldots+\frac{f(\nu)}{2^\nu}+\ldots$$

(donde $f(\nu)=0$ o 1)

de los números x en el sistema binario. Si prestamos atención al hecho de que todo número x está representado una sola vez, con la excepción de los números

$$x=\frac{2\nu+1}{2^\mu}<1,$$ los cuales se representan dos veces, tenemos, si denotamos la totalidad "enumerable" de estos últimos por $\{s_\nu\}$

$$2^{\aleph_0}=\overline{\overline{(\{s_\nu\},X)}}$$

Si quitamos de X cualquier conjunto "enumerable" $\{t_\nu\}$ y denotamos lo que queda por X_1, tenemos:

$$X=(\{t_\nu\},X_1)=(\{t_{2\nu-1}\},\{t_{2\nu}\},X_1),$$

$$(\{s_\nu\},X)=(\{s_\nu\},\{t_\nu\},X_1),$$

$$\{t_{2\nu-1}\}\sim\{s_\nu\},\ \{t_{2\nu}\}\sim\{t_\nu\},\ X_1\sim X_1;$$

$$X\sim(\{s_\nu\},X),$$

y así

$$2^{\aleph_0}=\overline{\overline{X}}=\upsilon \qquad (**)$$

Se sigue de esta fórmula y de las propiedades de potenciación

$$\upsilon.\upsilon=2^{\aleph_0}.2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0+\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\upsilon$$

y en consecuencia, por repetida multiplicación por υ,

$$\upsilon^\nu=\upsilon$$

donde ν es cualquier número cardinal finito.

Si elevamos a la potencia $\aleph_0$ tenemos,

$$\upsilon^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0.\aleph_0}$$

pero, por *§6, como* $\aleph_0.\aleph_0=\aleph_0$, tenemos

$$\upsilon^{\aleph_0}=\upsilon$$

Estas fórmulas significan que tanto el continuo ν-dimensional como el $\aleph_0$-dimensional tienen la misma potencia que el continuo unidimensional.

§5 Los números cardinales finitos.

Mostraremos a continuación cómo los principios que hemos establecido, y sobre los cuales luego la teoría del infinito actual o números cardinales transfinitos será construída, sustenta también la más natural, breve y más rigurosa fundamentación para la teoría de números finitos.

Recordemos que estaba en pleno desarrollo la fundamentación de la aritmética y de esta manera Cantor intenta formalizar la construcción de los números naturales

....

Los siguientes teoremas vienen a primer plano.

A. Los términos de la serie ilimitada de números cardinales finitos 1, 2, 3, ..., υ, ... son todos distintos entre sí.

B. Cada uno de estos números υ es mayor que los anteriores y menor que los siguientes.

C. No existen números cardinales los cuales, en magnitud, estén situados entre dos números cardinales consecutivos υ y $\upsilon+1$.

D. Si M es un conjunto tal que su potencia no es igual a la de ninguna de sus partes, luego el conjunto (M,e), que se obtiene de M por adición de un elemento nuevo sencillo e, tiene la misma propiedad de no ser de igual potencia con ninguna de sus partes.

E. Si N es un conjunto con un número cardinal finito υ y N_1 es alguna parte de N, el número cardinal N_1 es igual a uno de los números precedentes 1, 2, 3, ..., υ-1.

F. Si K es un conjunto de números cardinales finitos diferentes, existe uno, k_1 entre todos ellos que es menor que todos los demás.

§6 El menor número cardinal transfinito Aleph-Cero.

Los conjuntos con números cardinales finitos se denominan "conjuntos finitos", los restantes "conjuntos transfinitos" y sus números cardinales "números cardinales transfinitos".

El primer ejemplo de un conjunto transfinito está dado por la totalidad de números cardinales finitos υ; llamaremos a este número cardinal "Aleph-cero" y lo denotaremos por $\aleph_0$; así definimos

$$\aleph_0=\overline{\overline{\{\nu\}}}$$

Que $\aleph_0$ es un número transfinito, es decir, no igual a ningún número finito μ, se sigue del simple hecho que, si al conjunto $\{\upsilon\}$ se agrega un nuevo elemento e_0, el conjunto unión $(\{\upsilon\}, e_0)$ es equivalente al conjunto original $\{\upsilon\}$. Podemos pensar en esta recíproca correspondencia unívoca entre ellos: al elemento e_0 del primero le corresponde el elemento 1 del segundo, y al elemento υ del primero le corresponde el elemento $\upsilon+1$ del otro. Por *§3* tenemos

$$\aleph_0+1=\aleph_0$$

Pero ya hemos mostrado que $\mu+1$ siempre es diferente de μ, y por lo tanto $\aleph_0$ no es igual a ningún número finito μ.

El número $\aleph_0$ es mayor qu cualquier número finito μ:

$$\aleph_0>\mu.$$

....

Por otra parte, $\aleph_0$ es el menor número cardinal transfinito. Si **a** es cualquier número cardinal transfinito diferente de $\aleph_0$, entonces

$$\aleph_0<a.$$

Esto se apoya en los siguientes teoremas:

A. Todo conjunto transfinito T tiene partes con el número cardinal $\aleph_0$.

....

B. Si S es un conjunto transfinito con número cardinal $\aleph_0$, y S_1 es cualquier parte transfinita de S, luego $\overline{\overline{S_1}}=\aleph_0$.

....

Concluimos, sumando 1 a ambos miembros

$$\aleph_0+2=\aleph_0+1=\aleph_0$$

y, por repetición

$$\aleph_0+\upsilon=\aleph_0$$

Además tenemos

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$$

....

La ecuación anterior puede también ser escrita

$$\aleph_0.2=\aleph_0;$$

y, sumando $\aleph_0$ repetidamente a ambos miembros, encontramos que

$$\aleph_0.\upsilon=\upsilon.\aleph_0=\aleph_0.$$

También tenemos

$$\aleph_0.\aleph_0=\aleph_0.$$

....

Si a ambos lados de la ecuación multiplicamos por $\aleph_0$, obtenemos $\aleph_0^3=\aleph_0^2=\aleph_0$, y repitiendo la multiplicación por $\aleph_0$, tenemos la ecuación, válida para todo número cardinal finito υ:

$$\aleph_0^{\upsilon}=\aleph_0.$$

Los teoremas E y A de *§5* conducen a estos teoremas sobre conjuntos finitos:

C. Todo conjunto finito E es tal que no es equivalente a ninguna de sus partes.

Este teorema dice precisamente lo contrario que el siguiente para conjuntos transfinitos:

D. Todo conjunto transfinito T es tal que tiene partes T_1 que son equivalentes a él.

....

A partir de $\aleph_0$ prosigue, por una ley definida, el siguiente número cardinal mayor $\aleph_1$, de este por la misma ley el siguiente mayor $\aleph_2$ y así continua. Pero ni siquiera la ilimitada secuencia de números cardinales

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_\upsilon, ...$$

agota la concepción de número cardinal transfinito. Probaremos la existencia de un número cardinal que denotaremos $\aleph_\omega$ y el cual mostraremos que es el siguiente más grande de todos los números $\aleph_\upsilon$; de este procede en la misma forma que $\aleph_1$ de $\aleph_0$ un siguiente mayor $\aleph_{\omega+1}$, y así continúa, sin fin.

Para todo número cardinal transfinito **a** hay un siguiente mayor procedente de este acorde a una única ley, y también para todo conjunto ascendente bien-ordenado de números cardinales transfinitos, {**a**}, hay un siguiente mayor procedente de este conjunto en una única forma.

Para la rigurosa fundamentación de esta cuestión, descubierta en 1882 y expuesta en el folleto *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* (Leipzig, 1883) y en el volumen XXI de *Mathematische Annalen*, haremos uso de los llamados "tipos ordinales" cuya teoría tendremos que exponer en los siguientes párrafos.

A continuación daremos la idea de la definición de ordinales, tratada por Cantor en este mismo trabajo, aunque no profundizaremos en sus propiedades.

Un conjunto X se llama bien ordenado si en él está definido un orden tal que para todo subconjunto A no vacío de X, A tiene un mínimo.

Un conjunto X bien ordenado y un conjunto Y bien ordenado se dicen isomorfos si existe una función f de X en Y que es biyectiva y tal que si x e y pertenecen a X entonces $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

"Ser isomorfos" es una relación de equivalencia. Se llama ordinal a cada clase de equivalencia de esta relación.

La clase de equivalencia de los números naturales se denomina ω.

Algunos resultados de la teoría de conjuntos

Cantor demostró que los números racionales son coordinables con los naturales.

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \ldots & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \ldots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \ldots & & & \\
\frac{1}{5} & \ldots & & & &
\end{array}$$

Además, demostró concluyentemente que el conjunto de los números reales tiene una potencia mayor que la del conjunto de los números racionales. Para demostrar esto utilizó Cantor un razonamiento por *reductio ad absurdum*. Supongamos que los números reales entre 0 y 1 son numerables, y supongámoslos expresados todos ellos como decimales que no terminan en una sucesión de ceros (es decir, que, por ejemplo $\frac{1}{3}$ aparecerá representado por 0,333..., $\frac{1}{2}$ por 0,4999..., etc.); si los números $0<x<1$ pudieran ordenarse en un orden numerable tendríamos una sucesión:

$$a_1 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$
$$a_2 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$
$$a_3 = 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$
....

donde a_{ij} es un dígito entre 0 y 9. Para demostrar que en cualquier ordenación de este tipo no pueden figurar todos los números reales entre 0 y 1, Cantor construye un decimal infinito distinto de todos los de la lista: para ello basta escribir el decimal $0{,}b_1b_2b_3\ldots$, donde $b_k=9$ si $a_{kk}=1$, y $b_k=1$ si $a_{kk}\neq 1$. Este número real estará entre 0 y 1 y, sin embargo, será distinto evidentemente de todos los de la sucesión dada, que habíamos supuesto contenía todos los números reales entre cero y uno.

Los números reales pueden clasificarse de diferentes maneras, por ejemplo: 1) en racionales e irracionales, o 2) en algebraicos y trascendentes. Cantor demostró que incluso la clase de los números algebraicos, que es mucho más extensa que la de los números racionales, tiene, sin embargo, la misma potencia que el conjunto de los números naturales.

Como una cuestión de interés puede decirse que la teoría de Cantor del infinito fue ansiosamente captada por los jesuitas, cuyas agudas mentes lógicas descubrieron en ella, pruebas indudables de la existencia de Dios (más allá de su teológica comprensión) y de la afinidad de la Santísima Trinidad con su tres-uno, uno-tres, co-igual, co-eterno. Cantor ridiculizó el pretencioso absurdo de tales pruebas, aunque fuera devoto cristiano y conocedor de la teología.

Problemas posteriores relacionados

Las paradojas de Cantor y Russell

Cantor demostró que para cualquier conjunto A existe un conjunto mayor que A, esto es, P(A) (partes de A). Supóngase que se elige A como el conjunto de *todos* los conjuntos. Entonces, por el teorema de Cantor, existe un conjunto mayor que A, ¿pero cómo puede haber un conjunto mayor que el conjunto de todos los conjuntos? El conjunto partes de A es un subconjunto de A, ya que A contiene a *todos* los conjuntos, de modo que ¿cómo puede un subconjunto de A ser mayor que el mismo A? El propio Cantor halló esta paradoja en 1897; más tarde, Bertrand Russell dio una versión simplificada de la paradoja de Cantor, que es más o menos así: Dado cualquier conjunto x, x es un miembro de sí mismo (en cuyo caso el conjunto se denomina extraordinario) o no lo es (conjunto ordinario). Por otro lado, tómese algo así como el conjunto de todas las cosas concebibles por la mente humana, por ende es evidentemente un miembro de sí mismo. Sea B el conjunto de todos los conjuntos ordinarios. Entonces, todo conjunto ordinario es un miembro de B y todo miembro de B es ordinario: ningún conjunto extraordinario está en B. ¿Es B un miembro de sí mismo o no? De ambas formas encontraremos una contradicción.

En 1919 Russell dio una popularización de la paradoja en términos del barbero de un cierto pueblo que afeita a todos los habitantes del pueblo que no se afeitan a sí mismos y sólo a ellos. Entonces, el barbero no afeitará a ningún habitante que se afeite a sí mismo, pero cualquier habitante que no se afeite a sí mismo es afeitado por el barbero. ¿El barbero se afeita a sí mismo o no?

Existen otras variantes de esta misma paradoja.

Tanto la paradoja de Cantor como la de Russell pueden explicarse negando la posibilidad de que exista algo como el conjunto de todos los conjuntos o como el conjunto de todos los conjuntos ordinarios. Estos dos conjuntos simplemente no pueden existir. Al principio el descubrimiento de estas paradojas fue perturbador, ya que parecía indicar que la matemática pudiera ser inconsistente con la lógica. Y se hizo necesaria una revisión de los fundamentos. Este emprendimiento fue llevado a cabo por Russell y Whitehead en sus *Principia Mathematica*, que aunque con razonable certeza está libre de inconsistencias, es relativamente complicado y no es de uso generalizado en la actualidad; y por otra parte por Zermelo en lo que se conoce como la teoría de conjuntos de Zermelo que luego fue ampliada por Fraenkel y que es uno de los principales sistemas matemáticos de uso hoy en día.

El problema del continuo.

Cantor conjeturó que no hay ningún conjunto cuyo tamaño sea intermedio entre el de N y el del conjunto de todos los conjuntos de enteros positivos P(N) (que el cardinal de P(N) es υ, el cardinal de los números reales, ya se ha demostrado en (**)) y esta conjetura se conoce como la "hipótesis del continuo". Más aún, Cantor conjeturó la hipótesis más general de que para ningún conjunto infinito A existe un conjunto de tamaño intermedio entre el de A y el de P(A). Esta conjetura se conoce como la "hipótesis generalizada del continuo".

En 1939, Gödel demostró que si tomamos el sistema de Zermelo-Fraenkel (la teoría de conjuntos actual) la hipótesis del continuo no puede ser refutada en él. Y en 1963, Paul Cohen demostró que la hipótesis del continuo nunca podrá ser demostrada a partir de estos axiomas. De modo que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas actuales de la teoría de conjuntos.

El axioma de elección.

Debe fijarse la atención en un detalle lógico que fue observado por primera vez por Zermelo, algún tiempo después de la formulación de la teoría de conjuntos por Cantor. En la demostración de que $\aleph_0$ es el cardinal transfinito más pequeño, tanto como en la prueba de que cada cardinal transfinito se encuentra en la serie aleph, aparece una hipótesis que también se usa en otras demostraciones matemáticas sin ser explícitamente probada. Esta hipótesis, que, como parece, no puede ser derivada de otros principios de la lógica, se conoce como el postulado o axioma de elección, y puede expresarse de la manera siguiente: *Dado un sistema M de conjuntos, en que dos de ellos no tienen elemento común, entonces hay un conjunto que tiene exactamente un elemento en común con cada uno de los conjuntos del sistema M.* Este postulado no ofrece dificultades cuando se trata con series de conjuntos finitos, pues se puede seleccionar un elemento de cada uno de estos conjuntos con un número limitado de operaciones. Pero si se dan infinitos conjuntos y no se formula ninguna regla que distinga un elemento de cada uno de ellos, no podemos proceder de esta forma. De aquí, la afirmación de que exista tal conjunto en cada caso representa un postulado especial y lógico.

El teorema de Cantor-Bernstein.

Cantor, si bien enunció, no había podido demostrar cabalmente el teorema indicado con **(*)**. Esta laguna fue cubierta en parte por el teorema de F. Bernstein (1897) demostrando que las relaciones $\mathbf{a \leq b}$ y $\mathbf{a \geq b}$ implican $\mathbf{a=b}$.

Topología.

Las ideas de Cantor, al menos su teoría de los conjuntos de puntos sobre la recta y el plano son enseguida utilizadas y difundidas ampliamente entre las escuelas francesas y alemana de la teoría de funciones. A medida que estas ideas se van extendiendo, empieza a pensarse en su posible aplicación a conjuntos, no ya de puntos, sino de curvas o de funciones. Estrechamente relacionada con lo anterior está la introducción de las llamadas "funciones de línea" en 1887, y la creación del "cálculo funcional", o teoría de funciones cuyo argumento es otra función.

Teoría de la medida.

La "integral de Riemann" ocupó de modo natural su lugar dentro de la corriente de ideas que llevaba, entonces, a un estudio a fondo del "continuo" y de las funciones de variables reales y que culminaría, con Cantor, en el surgimiento de la teoría de conjuntos. La forma dada por Riemann a la condición de integrabilidad, sugería la idea de la "medida" del conjunto de puntos de discontinuidad de una función en un intervalo, pero todavía deberían transcurrir treinta años antes de que se llegase a dar una definición fecunda y cómoda de esta noción.

Los primeros intentos en esta dirección se deben a Stolz, Harnack y Cantor (1884-1885); para definir la "medida" de una parte E acotada de R, a diferencia de los dos primeros, Cantor, situándose ya desde el principio en R^n, considera, para un conjunto E acotado y para $\rho>0$ el entorno $V(\rho)$ de E formado por los puntos cuya distancia a E es $\leq\rho$, y toma el extremo inferior del "volumen" de $V(\rho)$ (Cantor no da una definición precisa de este "volumen" y se limita a decir que puede calcularse mediante una integral múltiple). Con esta definición resulta que la "medida" de un conjunto es igual a la de su adherencia, de donde se deduce en particular que la "medida" de la unión de dos conjuntos sin puntos comunes puede ser estrictamente inferior a la suma de las "medidas" de estos dos conjuntos. A E. Borel corresponde el mérito de haber sabido discernir los defectos de las definiciones anteriores y de haber visto la forma de remediarlos.

Para terminar recordamos las palabras de Hilbert: "La teoría de Cantor me parece el fruto más admirable de la mente matemática, y una de las conquistas más preciosas de los procesos intelectuales del hombre".

Gisela S. de Piñeiro*

* Profesora de Matemática, egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Bibliografía:

* BABINI, JOSÉ - *Historia de las ideas modernas en matemática* - OEA, 1980 (Tercer edición).

* BELL, E. T. - *Los Grandes Matemáticos* - Editorial Losada, 1948.

* BOURBAKI, NICOLAS - *Elementos de historia de las matemáticas* - Alianza Editorial - Madrid, 1972, 1976.

* BOYER, CARL B - *Historia de la matemática* - Madrid, Alianza Universidad Textos, 1994.

* CANTOR, GEORG - *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* - Dover Publications Inc. - New York.

* NEWMAN, JAMES - *Sigma - El mundo de las matemáticas* - Tomo 4 - Ediciones Grijalbo - Barcelona, 1994.

* SMULLYAN, RAYMOND - *Satán, Cantor y el infinito* - Gedisa Editorial - Barcelona, 1995.

Problemas y Juegos de Ingenio

Problemas Propuestos

1. *Colaboración del Prof. Gustavo Krimker.* Sean f(x) y g(x) continuas en [a,b]. Probar que si $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, entonces f(x) y g(x) se cortan en un punto interior al [a,b].

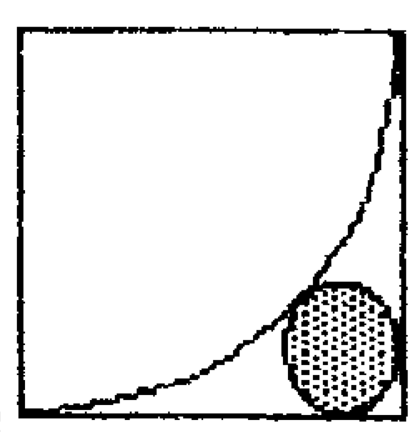
2. *Colaboración de Pilar Balmaceda (alumna de 3° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González") - extraído de "La Magia de la Matemática" de Theoni Pappas - Colección De Mente -* La pirámide de los 1.

$$\begin{gathered} 1^2 = 1 \\ 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 \\ 1111^2 = 1234321 \\ 11111^2 = 123454321 \\ 111111^2 = 12345654321 \\ 1111111^2 = 1234567654321 \end{gathered}$$

¿Cuándo se termina?

3. *Colaboración del Prof. Alfredo Coccola.* Demuestre que para un número natural cualquiera n el número $n^3 - n$ es divisible por 6.

4. *Colaboración de Marcela Bartomeo (alumna de 2° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González") - extraído de la O.M.A.:* Hallar el área sombreada en función de L (lado del cuadrado abcd). La circunferencia sombreada es tangente a los lados del cuadrado y al cuarto de circunferencia de centro a.



5. *Colaboración del Prof. Jorge Martínez:* Hallar el número natural más grande que dividido por 151 y 202 da el mismo cociente.

6. *Colaboración del Prof. Jorge Martínez:* Probar que $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}}$ es un entero positivo. ¿Cuál es?

Soluciones a los Problemas de Axioma N° 6:

1 De Aritmética Elemental - Enzo Gentile - Monografía de la O.E.A. - *¿Qué día de la semana fue el 15 de abril de 1707 (nacimiento de Euler)?*

* *Respuesta basada en la dada por Dr. Enzo Gentile:*

Para contestar esta pregunta es necesario recordar que en nuestro calendario un año normal consta de 52 semanas y un día, o sea 365 días. Un año bisiesto consta de un día más, agregado al mes de febrero, o sea consta de 366 días. Un año que no es secular (o sea que no corresponde a un siglo) es bisiesto si, y sólo si, es divisible por 4. Los años seculares, tales como 1600, 1700, 1800, 1900,... son bisiestos si, y sólo si, son divisibles por 400. Por consigiente, los años 1600 y 2000 son bisiestos, pero no lo son los años 1700, 1800 y 1900.
La observación fundamental para determinar en qué día de la semana cayó una fecha dada es que dos fechas dadas caen en el mismo día de la semana si, y sólo si, el número de días del intervalo que forman esas dos fechas tiene resto 1 en la división por 7. Por ejemplo, lo que todos observamos en el calendario:

Lunes 1, Lunes 8, Lunes 15, Lunes 22, Lunes 29

Así, por ejemplo, si el 1° de enero fue sábado y el año no es bisiesto, del 1° de enero al 31 de diciembre hay 365=52.7+1. Por lo tanto, ambas fechas caen el mismo día de la semana. Si el año fuera bisiesto sería 366=52.7+2, por lo tanto el 31 de diciembre caería el día siguiente de la semana al correspondiente al primero de enero.

Con esta disgresión es posible calcular el día de la semana que le correspondió al 15 de abril de 1707. La información básica se obtiene de un calendario de 1997.

i) Años transcurridos de 1707 a 1997: 1997-1707=290 años.

ii) Años bisiestos intermedios. Estos van de 1708 a 1996, o sea 1996-1708=288 años. Pero 1800 y 1900 no fueron bisiestos. Por lo tanto, el número de años bisiestos intermedios fue

$$(\frac{288}{4}+1)-2=71.$$

iii) Del 15 de abril de 1707 al 15 de abril de 1997 transcurrieron 290 años +1 día.
Por lo tanto el número total de días fue:

$$290 \,.\, 365 + 71 + 1 = 105922 = 15131 \,.\, 7 - 5$$

Dado que el 15 de abril de 1997 fue martes podemos afirmar que 105917 días antes, también fue martes y que el 15 de abril de 1707 (o sea, 105922 días atrás) fue ***viernes***.

2. Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola: *Sea f derivable en R tal que:* $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$. *Pruebe que existe* $x_0 \in (-1;1)$ *tal que* $f'(x_0)=0$.

* *Respuesta dada por* ***Marcela Bartomeo*** *(alumna de 2° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González)*

Voy a demostrarlo por el absurdo.

Supongamos que no existe $x_0 \in (-1;1)$ tal que $f'(x_0)=0$, esto quiere decir que en dicho intervalo la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente (porque es derivable en R). Si es estrictamente creciente, entonces tenemos:
Para todo $x \in (-1;0)$

$$f(-1)<f(x)<f(0)$$

Luego

$$\int_{-1}^{0} f(-1)\,dx < \int_{-1}^{0} f(x)\,dx < \int_{-1}^{0} f(0)dx$$

Integrando, obtenemos:

$$f(-1) < \int_{-1}^{0} f(x)\,dx < f(0)$$

De igual manera se puede probar que:

$$f(0) < \int_{0}^{1} f(x)dx < f(1)$$

entonces, tendremos

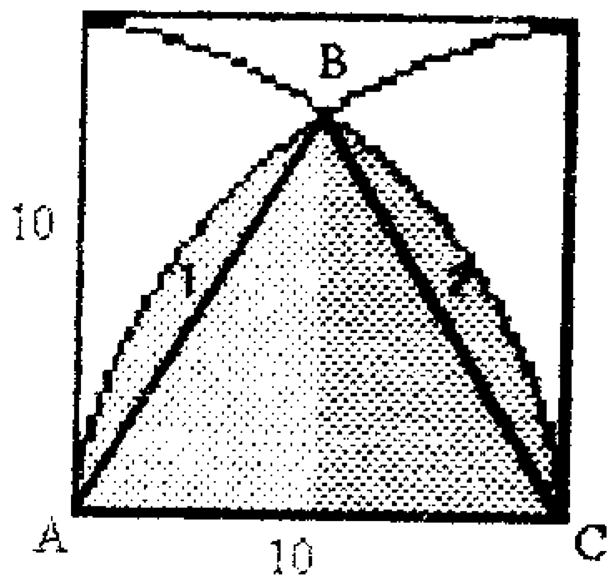
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx < \int_{0}^{1} f(x)dx$$

Lo que es un absurdo según la hipótesis. En el caso de ser estrictamente decreciente, por un razonamiento análogo llegamos a:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx > \int_{0}^{1} f(x)dx$$

Esta última desigualdad es también un absurdo que provino de suponer que no existe $x_0 \in (-1;1)$ tal que $f'(x_0)=0$. Luego, existe $x_0 \in (-1;1)$ tal que $f'(x_0)=0$, que es lo que queríamos demostrar.

3. De O.M.A. - *Hallar el área sombreada. Las curvas son cuerdas de circunferencias de radio 10.*



* *Respuesta dada por* ***Gonzalo Pingaro*** *y* ***Pablo Bonucci*** *(alumnos de 3° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González")*

La zona sombreada está delimitada por dos circunferencias C_1 y C_2. Éstas tienen radios $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Como $\overline{AC}$ es radio de ambas, entonces: $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$ y valen 10. Luego el triángulo ABC es equilátero con lo cual todos sus ángulos interiores son de 60°.

Área pedida = Área ABC + Área 1 + Área 2

pero las zonas 1 y 2 son iguales.

Utilizando la fórmula de Herón:

$$\text{Área ABC} = \sqrt{15.5.5.5} = 25\sqrt{3}$$

Luego calculamos el área de los segmentos circulares:

$$2.\ \text{Área } 1 = 2.\left(\frac{\pi.10^2.60°}{360°} - 25\sqrt{3}\right)$$

Sumando, obtenemos:

$$\text{Área zona sombreada} = 25\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

* ***Respuesta dada por Marcela Bartomeo*** *(alumna de 2° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González")*

La zona sombreada está delimitada por dos circunferencias C_1 y C_2.

C_1: centro (0,0); $x^2 + y^2 = 10^2$

C_2: centro (10,0); $(x-10)^2 + y^2 = 10^2$

La intersección de las dos circunferencias en el primer cuadrante la hallamos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ (x-10)^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

Así obtenemos dos puntos: $(5;5\sqrt{3})$ y $(5,-5\sqrt{3})$.
Pero a nosotros nos interesa sólo la intersección en el primer cuadrante $(5;5\sqrt{3})$.
Para obtener el área del sector circular necesitamos el ángulo C y el radio (que ya conocemos).
El angulo C, lo podemos obtener por trigonometria.

$$tgC = \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} \Rightarrow tgC = \frac{5\sqrt{3}}{5} \Rightarrow tgC = \sqrt{3} \Rightarrow C = 60°$$

análogamente: A=60°.

Por lo tanto el triángulo ABC es equilátero y los sectores AB con centro en C y BC con centro en A son congruentes. Luego descomponiendo el área sobreada obtenemos su área:

$$\text{Área zona sombreada} = 25\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

4. De Probabilidad y aplicaciones estadísticas - Paul Meyer - Ed. Addison-Wesley Iberoamericana - *De 6 números positivos y 8 números negativos se eligen 4 números al azar (sin sustitución) y se multiplican ¿En cuántos casos el producto es un número positivo?*

* *Respuesta dada por* ***Adrián Portos*** *(alumno de 4° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González")*

Los casos en que el producto es un número positivo son:
a) 4 números positivos.
b) 4 números negativos.
c) 2 números positivos y 2 negativos.
Como no influye el orden y no hay repetición la manera de contarlos es por combinatoria.

a) 4 positivos: $C_{6,4}=\frac{V_{6,4}}{4!}=\frac{6.5.4.3}{4.3.2}=15$

b) 4 negativos: $C_{8,4}=\frac{V_{8,4}}{4!}=\frac{8.7.6.5}{4.3.2}=70$

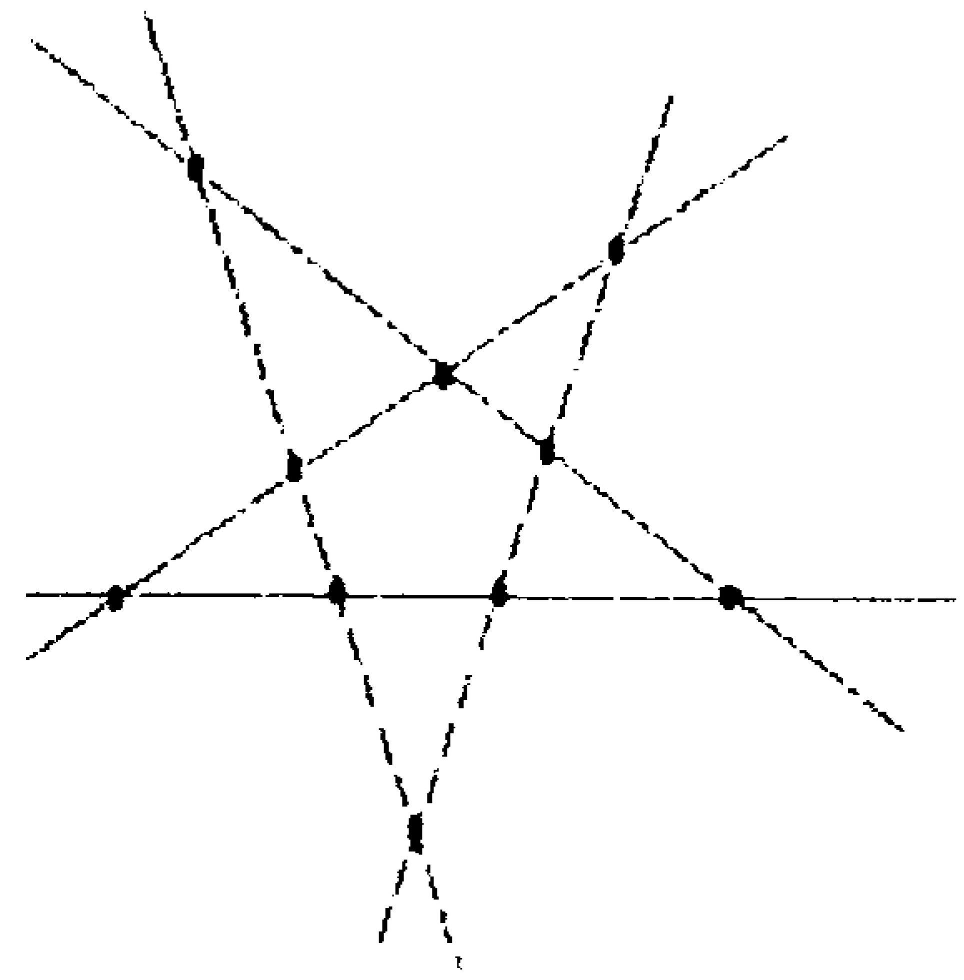
c) 2 negativos y 2 positivos:

$$C_{8,2}\,.\,C_{6,2}=\frac{8.7}{2}.\frac{6.5}{2}=28.15=420$$

Por lo tanto, los casos totales son 463.

5. **Colaboración de Paola Dogliotti (alumna de 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)** - *Distribuir diez monedas sobre cinco rectas de manera tal que a cada recta correspondan cuatro monedas.*

* *Respuesta dada por* ***Marcela Bartomeo*** *y* ***Adrián Portos*** *(alumnos de 2° y 4° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González")*



Las monedas hay que colocarlas en las intersecciones de las rectas que contienen a los lados de un pentágono.

¡Hasta el próximo número!

Cuando Tennyson escribió "La visión del pecado", Babbage lo leyó. Se dice que, a continuación, escribió la siguiente y extraordinaria carta al poeta:

" En su, por otro lado, bello poema, hay un verso que dice:

Cada momento muere un hombre,
Cada momento nace uno.

Es evidente que de ser esto cierto, la población del mundo sería estable. Lo cierto es que la tasa de nacimientos excede ligeramente la de defunciones. Yo sugeriría que en la próxima edición de su poema escriba:

Cada momento muere un hombre,

Cada momento $1\frac{1}{16}$ nace.

Hablando estrictamente, esto no es correcto. La cifra real es un decimal tan largo que no cabría en la línea, pero creo que $1\frac{1}{16}$ será una aproximación suficiente para la poesía. Suyo, etc."

de "Matemathical Gazett"

Lecturas Matemáticas

Hoy, entregamos algunas reflexiones sobre dos "clásicos". Comenzamos por un clásico especial:

1) HISTORIA DE LA MATEMÁTICA - Carl B. Boyer - Ed. Alianza Universidad - Madrid, 1986 - 808 páginas, rústica. Traducción de Mariano Martínez Perez.

Ya convertida en un clásico de la Historia de la Matemática, esta obra une un tratamiento riguroso de los conocimientos matemáticos en su forma actual, con la descripción del proceso evolutivo de los conceptos, a través de civilizaciones y épocas. Se hace evidente, que el profesor Boyer ha querido mantenerse fiel al rigor matemático sin descuidar la perspectiva y los detalles históricos. La disposición de los temas se realiza en 28 capítulos que abarcan desde los orígenes de la numeración y la geometría hasta la matemática del siglo veinte. Cada capítulo culmina con su propia lista bibliográfica y una selección de preguntas y ejercicios muy bien seleccionados.

Al final del libro, hay una bibliografía general muy exhaustiva y detallada, y una extraordinaria tabla Cronológica de 11 páginas, que abarca desde el hombre primitivo hasta el año 1966.

Son, creo, de lectura "obligatoria" para todo el que se sienta "matemático", los capítulos XXIII (El período de Gauss y Cauchy) y el XXV (Aritmetización del Análisis). Es notable también, cómo se desarrolla la evolución del Álgebra lineal y la Teoría de números.

Para ser leido con provecho, requiere al menos conocimientos matemáticos compatibles con segundo año o mejor tercer año de la formación básica del profesorado de Matemática. Si uno no se dedica a la Historia de la matemática, pero desea tener un texto de consulta, entonces considérelo muy seriamente como texto principal. En síntesis: un grande, no sólo de tamaño.

2) ARITMÉTICA ELEMENTAL EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA - Enzo R. Gentile - Ed. Olimpíada Matemática Argentina - Buenos Aires, 1992 - 94 páginas.

¿Qué decir de esta pequeña joya? Contiene tres capítulos, a saber: Introducción, Problemas de Aritmética, Diccionario de Aritmética y Aspectos históricos. Además presenta tres pequeños apéndices: Esquema para el desarrollo de un curso elemental de Aritmética, Principio de Inducción y El principio de los casilleros. En la introducción, el autor (fallecido en 1991), nos dice que la propuesta del libro es RESOLVER PROBLEMAS y más aún: se trata de generalizar, buscar relaciones y pensar profundamente. La selección de problemas es perfecta y responden a las grandes ideas que el libro porta: divisibilidad, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, congruencias. Los protagonistas del libro son el número entero, los números primos y, en fin, la teoría elemental de números. El autor reproduce en la introducción una frase del reputado G. H. Hardy (1877-1947) que transcribimos textualmente: "Pocas cosas hay en el mundo para las cuales tengo tan poco paladar como la pedagogía matemática, pero no puedo resistir la tentación de concluir con una lección pedagógica. La teoría elemental de números debería ser uno de los mejores temas para la instrucción matemática temprana. Requiere muy pocos conocimientos; el tema que trata es tangible y familiar, los procesos de razonamiento que emplea son simples, generales y pocos; y es única dentro de la ciencia matemática por su apelación a la curiosidad natural."

En resumen: lo recomendamos y creemos imprescindible su lectura.

Hasta la próxima.

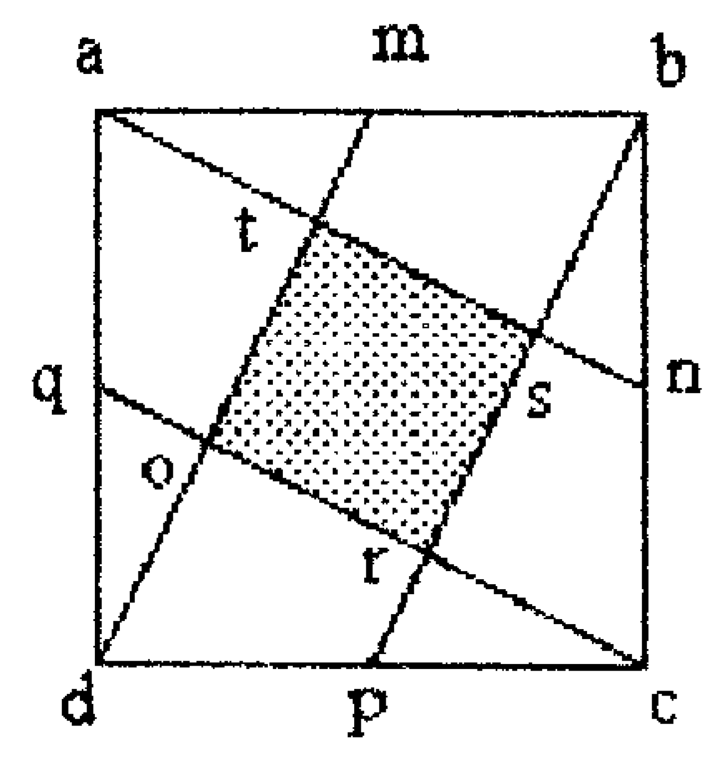
Jorge Martínez*

* Prof. de Matemática, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Festejo del 1er. Aniversario de Aχioma

Y llegó finalmente el día del festejo.
Desbordantes de ansiedad, con la alegría y el temor que provocan tantos preparativos, nos encontramos eufóricos, pegando carteles, acomodando butacas y escritorios, sacando las últimas necesarias fotocopias.
Se hicieron las nueve de la mañana y dijimos: es temprano. A las nueve y media, nuestra impaciencia empezó a aflorar. Ya cerca de las diez, nos mirábamos con mezcla de angustia y desconcierto. Seguíamos siendo los organizadores y nuestros valiosos invitados los que sumábamos trece: ¿Un número fatídico? ¿Un número de suerte? ¡Un entero positivo, al fin!
Con un reconfortante café o té caliente acompañamos el debate que generó la ausencia masiva, endulzando el trago amargo. Analizada la realidad que vivimos, evaluando lo acontecido como su lógica consecuencia, decidimos sacudirnos la desazón y dar rienda suelta a nuestra imaginación. Después de todo, esa era la consigna con la que habíamos intentado reunir a nuestros lectores y amigos.
Tenemos la certeza de que muchos de ellos, la gran mayoría, hubieran querido acompañarnos. Así nos lo hicieron saber. Pero también comprendemos que no todos disponen del tiempo necesario para ello. Y el tiempo tiene aquí una definición más amplia que la que le otorga el diccionario. Es, ante todo, la disponibilidad mental imprescindible para realizar cualquier tarea.
Por eso, compartimos desde estas líneas con todos y cada uno de ustedes las actividades realizadas ese día, con la convicción de que no faltarán oportunidades para, dentro de algún tiempo, volver a intentar otro encuentro personal tan fructífero como lo fue éste.

Transcribimos uno de los problemas propuestos y resuelto en la jornada.



abcd: cuadrado
m, n, p, q: puntos medios de cada lado.
Averiguar el área de la zona sombreada.

Solución:

Veamos primero que *tsro* es un cuadrado y luego averiguaremos cuánto mide su lado.

Comparando los triángulos *atm* y *mad*, se comprueba que son semejantes; por lo tanto *atm* es rectángulo en *t*; por lo tanto *tsro* es rectángulo pues igual demostración se puede desarrollar para los restantes vértices. (I)
Además los triángulos *amt* = *bsn* = *crp* = *doq* pues son triángulos rectángulos de hipotenusa $l/2$ y ángulos *ban*, *cbp*, *dcq* y *adm* iguales (por ser los triángulos *abn* = *bcp* = *cdq* = *dam*).
Esto significa que los cuadriláteros *mbst*, *nsrc*, *prod* y *qota* son iguales. Por lo tanto

$$\overline{ts} = \overline{sr} = \overline{ro} = \overline{ot} \text{ (II)}$$

De (I) y (II) se verifica que *tsro* es un cuadrado.

Llamemos $l = \overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{da}$

$$\frac{l}{2} = \overline{qa} = \overline{am} = \overline{mb} = \overline{bn} = \overline{nc} = \overline{cp} = \overline{pd} = \overline{dq}$$

Comparando los triángulos *abn* y *qdc*, obtenemos que $\overline{an} = \overline{qc} = \frac{l}{2}\sqrt{5}$, y si l=1:

$$\overline{an} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como los triángulos *amt* y *nba* son semejantes:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\overline{mt}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \overline{mt} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \overline{ta} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{ts} = \overline{an} - \overline{at} - \overline{sn}$$

$$\overline{ts} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Área}(tsro) = (\overline{ts})^2 = \frac{1}{5}$$

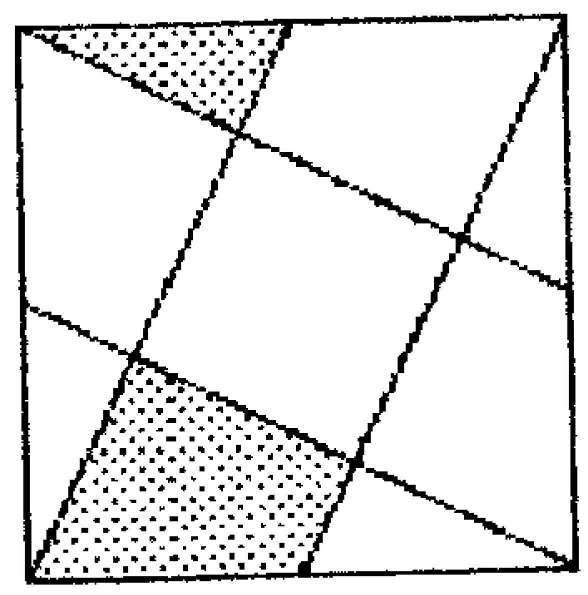
En general, el área sombreada es $\frac{1}{5}l^2$

Otra forma, es ver que la suma de las áreas del triángulo *amt* y el cuadrilátero *mtsb*, es igual a la del cuadrado sombreado. Con lo cual, con el cuadrado abcd se pueden construir 5 cuadrados como el sombreado. Luego, el área sombreada debe ser 1/5 del área del cuadrado abcd. Se puede demostrar que las rectas *an* y *md*; *pb* y *qc* son perpendiculares, por lo cual los ángulos formados son rectos y que son paralelas dos a dos (Pensando *ad* y *cd* como un par de ejes coordenados, se hallan las ecuaciones de las cuatro rectas). También se puede ver, utilizando congruencia de triángulos y el teorema de Pitágoras, que las figuras formadas con suma de áreas son congruentes a la del área sombreada).

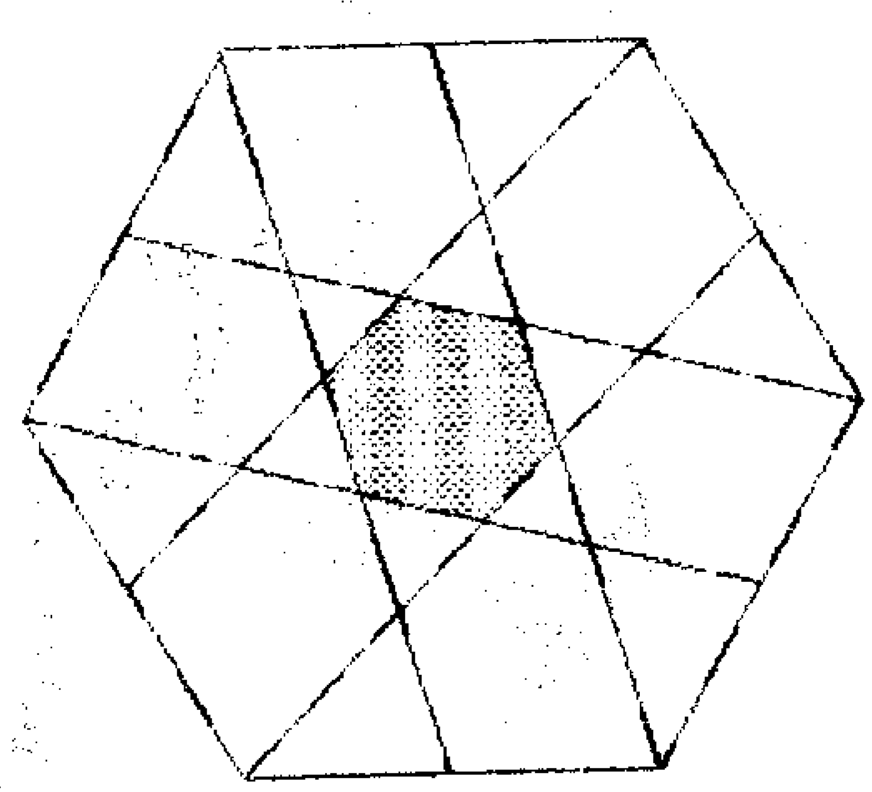
El segundo aspecto de este problema consistía en inventar nuevos enunciados a partir del dado.

He aquí algunas de las propuestas:

Prof. Irene Zapico: Hallar las superficies sombreadas ahora:



Lic. Gustavo Piñeiro:
1) Hallar el área del hexágono pequeño.
2) Conjetura: (n par) es un n-ágono regular la intersección de las n/2 franjas es un n-ágono regular.
Hallar la razón de las áreas (en función de n)
3) ¿En cuántos "pedazos" queda dividido el polígono?



Otra actividad encarada en la jornada fue la creación literaria inspirada en imágenes diversas. Estos fueron los resultados:

Pareja

Con la vista enfocada al infinito, a ese que Cantor le dedicó tantas horas, danzaban abrazados estrechamente, uniendo sus racionales e irracionales intenciones para completar la recta de su historia común.

Muchas veces habían intentado algunos giros, aunque sus traslaciones los transportaban a otros espacios afines donde preferían intercambiar soluciones o variedades de ellas.
Al ritmo establecido en cada intervalo, las partes cóncavas de sus vidas se ajustaban con sus convexidades y justo ahí, en el máximo, los minutos se les escapaban por la tangente que en ese infinitesimal instante había dejado de crecer para anularse.
Los planos de su existencia se mostraban muy inquietos y, cateto contra cateto, altura contra mediana, se encontraron en la hipotenusa de la vida, intentando una relación que fuera única, una verdadera función.

Raquel Kalizsky

Héctor y Andrómaca (óleo, 1917) G. De Chirico

Un barbero y su nuevo cliente

Don Fermín es el barbero del pueblo, es arquetípico en lo suyo: está al tanto de todas las novedades y todos los chismes porque vive conversando con sus clientes habituales.
Hoy está atendiendo a un vecino nuevo que no está muy dispuesto a hablar.
Don Fermín intenta iniciar alguna conversación pero su cliente sólo responde con monosílabos. Caen en un silencio que no es habitual en la barbería ni grato para su dueño. Hasta que el recién llegado al pueblo le pregunta: -"¿Usted es el único barbero de este pueblo?"-
- "Sí" - contesta Don Fermín.
- "Y usted, ¿se afeita a sí mismo o es afeitado por el barbero?" - vuelve a preguntarle.
- "¡Anda! - exclama Don Fermín - ¿no le he dicho que soy el único barbero? ¡A mí no me lo tiene que preguntar!" -
El flamante vecino de aquel pueblo quedó para siempre convencido de que la sabiduría de Don Fermín es infinita.

Irene Zapico

Inspirados en la misma imagen los autores desarrollaron estas dos diferentes historias:

Comencé a observar aquella figura con detenimiento; diría con obscenidad. No sentía agrado hacia ella, por el contrario, inducía en mí el más agudo rechazo. Sin embargo, no podía apartar mis ojos de sus trazados. Aquellas manos que se dibujaban, una a la otra, interferían en mis pensamientos. Tenían una intensión, aunque yo la desconocía. Quizá, pensaba, era la sutil manera de explicar que debía ser yo mismo quien forjara mi destino. O tal vez, estaban allí para hacerme entender, de una vez por todas, que un isomorfismo precario en *la teoría general de sistemas traería serios conflictos, si no se producía, al mismo tiempo, un aumento del producto bruto interno. No sé, estaba confundido. Sentía que aquel dibujo superaba mi capacidad de interpretación. Decidí, pues, no mirar más. De ese modo, pensaba con ingenuidad, acabaría mi calvario.*

Esto no sucedió. Aquellas manos se habían infiltrado, literalmente, en las capas más profundas de mi mente de las que, no está de más decirlo, desconocía su existencia. El problema no radicaba en el hecho de que aquellas extremidades se hubieran atrincherado en mi cerebro, sino en que comenzaron a manejar a su antojo cada acto de mi vida, aunque, debo reconocerlo, no sin cierta habilidad.

Pero había problemas. Cuando, por ejemplo, tomaba alguna decisión que no les agradaba, apretaban con fuerza mis arterias cerebrales, provocándome intensos dolores.

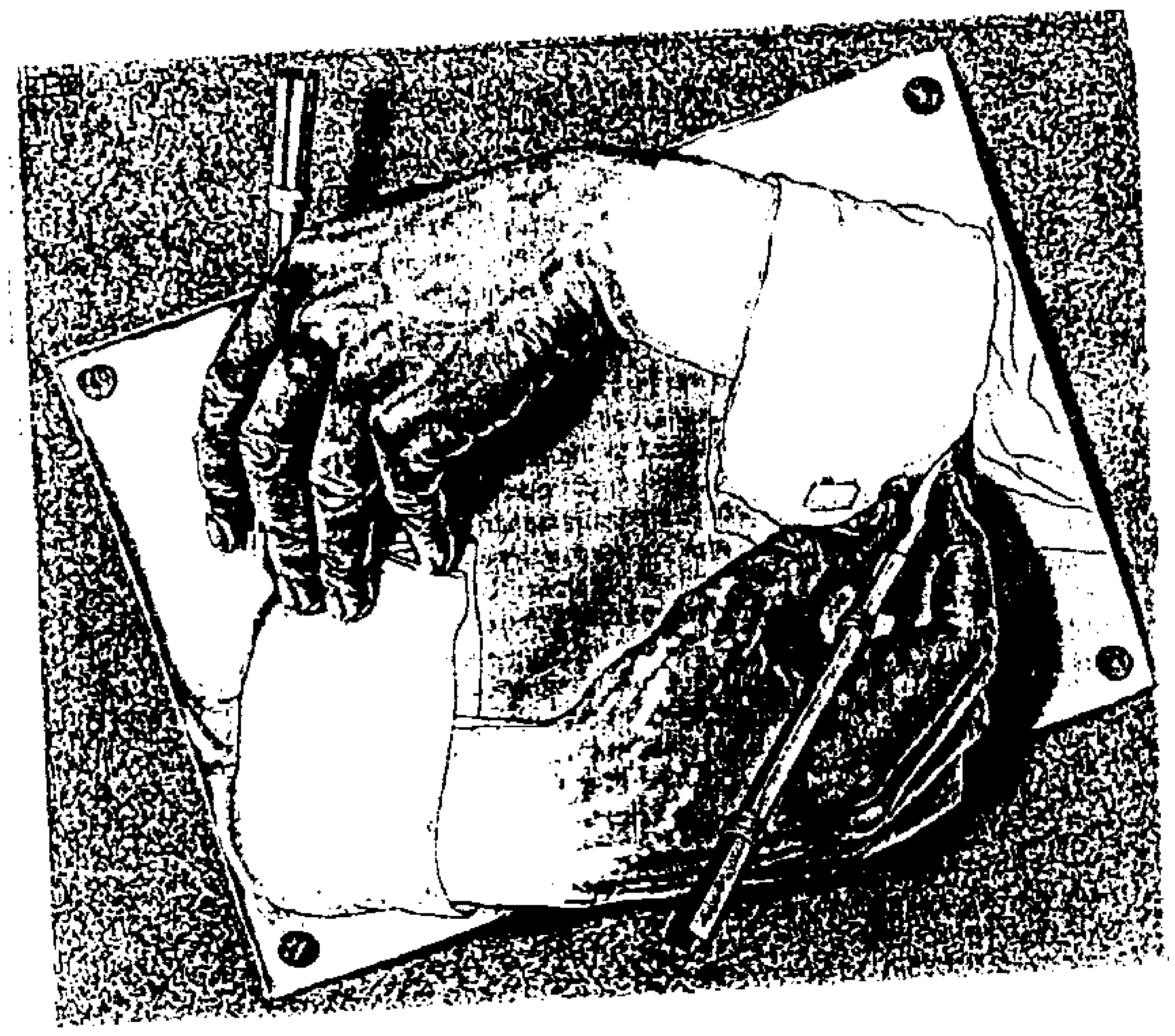
Aunque esto me ocasionaba diversos inconvenientes, había aprendido a sobrellevarlo con cierta resignación y estoicismo. Sin embargo, había algo que no podía tolerar. Aquellas sucias y malditas manos continuaban autogenerándose. Ya no eran sólo manos, tenían también brazos, que se dirigían, con asombrosa rapidez, a mis propias extremidades.

Me preguntaba hasta dónde seguirían. Sus epigramas usurparon mi cabeza y comenzaron a descender por mi tráquea que, sensible al tacto, me provocaba toses y vómitos a cualquier hora.

En esos atormentados días me sentía doblemente impotente. Primero, porque no sabía ni podía frenar a aquel diabólico dibujo que se autoalimentaba descontroladamente. Segundo, y esto me preocupaba especialmente, la vil figura había llegado ya a mis genitales. Placer y dolor se confundían en aquellos intensos momentos.

Desconozco si el transcurrir del tiempo o alguna otra causa motivaron que, a pesar de que las manos lograron dibujar una figura completa que encajó perfectamente en mi cuerpo, pudiera acostumbrarme a su invasión. Lo cierto es que hoy, podría decirse que tenemos una aceptable relación, y hasta a veces es una gran compañía en mis ratos de soledad. Sin embargo, sé que aquella figura continúa creciendo, ya no en cuerpo sino en espíritu. Y hasta en ocasiones dudo acerca de mi verdadera identidad, y hoy no podría afirmar si mis manos o las otras escribieron estas líneas.

Claudio Salpeter



Manos dibujando (litografía, 1948) M. C. Escher

Con arcilla informe construí un muñeco. Le di dos brazos, le di dos piernas y una cabeza. Le puse ojos (pero no veía). Le puse boca (pero no hablaba). Le puse nariz (pero no respiraba). Porque mi muñeco no tenía vida. Entonces soplé...

...Y sentí al mismo tiempo un soplo en mi nuca. Giré y vi detrás de mí a alguien que con mi mismo rostro me sonreía y que me dijo que con arcilla informe había construido un muñeco (que era yo); que me dio brazos, me dio piernas y una cabeza. Me puso ojos, me puso nariz y una boca y luego sopló. Al mismo tiempo sintió un soplo en su nuca. Giró y vio detrás de él a alguien con nuestro mismo rostro. Volví a mirar hacia adelante. Mi muñeco (que tenía también mi rostro) me miraba con curiosidad. Le conté cómo lo había construido, cómo le había dado brazos, piernas, nariz y boca y luego había soplado. Él me respondió: "yo también hice un muñeco y le di vida". "Pero yo fui el primero", le dije. "Todos lo hicimos a la vez", me respondió.

Gustavo Piñeiro

Correo de lectores

Nuestro profundo agradecimiento a:

* Marcela Bartomeo, por tus reconfortantes palabras.

* Adrián Portos, por tu carta, que a continuación transcribimos, y las soluciones a los problemas del N°5. Debido a que éstas llegaron después del cierre de la revista no pudieron ser publicadas en el número anterior.

Amigos de Axioma:

Me parece acertado el cambio de nombre para la revista, ya que los sigo desde el primer número y los artículos están destinados a toda la comunidad matemática.

Soy fanático de las secciones "Grandes Matemáticos" y "Curiosidades Matemáticas" porque encuentro en ellas una vía distinta para acaparar la atención de los alumnos en una clase.

Muchos saludos, sigan así que el Instituto los necesita para seguir creciendo.

* Eduardo Lavia, quien el día 28 de mayo próximo pasado nos invitó a su programa "Mirador a la Ciencia", que se emite todos los miércoles de 18 a 19 horas por F.M. Flores, en el 90.7 del dial. Difundir nuestra publicación y sus propuestas fue el objetivo principal pero, sin dudas, logramos algo más: conectarnos con un amante de la investigación y del estudio; director, también él, de la revista zonal de distribución gratuita "Mirador a la Ciencia" dedicada a la divulgación científica y tecnológica.
Invitamos a nuestros lectores a compartir su interesante programa en el que, a partir de nuestra visita, se desempeña como colaboradora permanente nuestra compañera Andrea Morales.

Desde nuestro hacer cotidiano, saludamos la presencia de los participantes de la Olimpíada Matemática Internacional que se celebra en la ciudad de Mar del Plata. Es nuestro deseo que las jornadas sirvan para aunar voluntades en la búsqueda de un mejor entendimiento entre los pueblos.

Próximo Número - Septiembre/ Octubre 1997

Apuntes sobre..., Caos y Fractales (segunda parte)

Historia: Los problemas clásicos griegos

Didáctica: Charla con Patricia Sadovsky (segunda parte)

Elementos sobre la teoría de Grupos

Comentarios de textos, Problemas, Información, Correo de Lectores...