Aχioma

La Revista de los profesores y estudiantes de Matemática

Cortaduras, por Dedekind

(Grandes Matemáticos – pág. 9)

Año 4 – Número 18

Aχioma N° 18

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de Matemática, de venta exclusiva por suscripción. Hecho el depósito que marca la Ley.

Directores y Propietarios

Pablo Leandro Bonucci
Fernando Chorny
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes

Jorge Martínez
Gustavo Piñeiro

Colaboran en este número

Marcela Bartomeo
Pablo Ingrassia
José Manuel Ruiz Socarras

Ilustración de tapa

Fernando Chorny

Dirección postal

Av. J. B. Alberdi 667 - 7° B
(1424) Buenos Aires
Argentina

Correo electrónico

pineiro@datamarkets.com.ar

En internet

www.nalejandria.com/axioma

Impresión a cargo de

Luis Lofiego

Editorial

Tras unos breves o largos meses volvemos a encontrarnos, amigo lector. Calmad vuestra ansiedad. Como se sabe, es éste un año muy singular. Su carácter palindrómico (el segundo para muchos vivientes y el último para la mayoría) es presagioso: ¿qué magnánimas influencias, qué cambios inefables, qué disturbios físicos y emocionales, experimentaremos ante este acontecimiento nada superfluo?

Muchos sostienen que ciertos hechos, no menos miserables que cotidianos, debieran mencionarse aquí. Otros, que ya estamos bastante aturdidos por los discursos y por los ruidos. Esta disyuntiva –hablar o no hablarnos eleva a la noble categoría de discípulos hamletianos, aunque nos recuerda, asimismo, su final trágico.

La tarea no es grata pero, ¿qué importan, al fin de cuentas, nuestras palabras o nuestras omisiones? Quizás estas últimas digan más que las primeras, que muchas veces, sólo resultan ser meros énfasis de aquéllas. En última instancia, el destino o el azar, juzgará nuestras negligencias con justificado rigor o con amable piedad.

Decididos a probar y tentar al lector, y convencidos de que el único camino es el conocimiento, hemos abierto un concurso de problemas. Jugosos premios no lo motivarán; menciones y algún libro impreso será nuestro aporte. En las últimas páginas de Axioma explicamos los procedimientos que deben seguir los participantes de esta propuesta.

Sin más que decir, salvo la de ciertos cambios que no serán inadvertidos, y recordándoles que sus cartas, comentarios o artículos son siempre bienvenidos, nos despedimos hasta nuestra próxima entrega.

Sumario

Marzo/ Abril de 2002

Lógica matemática
(Tercera parte)

"Cuando en 1952 la Universidad de Harvard invistió a Gödel como doctor **honoris causa**, *la mención describió el trabajo de Gödel como uno de los más importantes avances que, en el campo de lógica, se han realizado en los tiempos modernos."*

(Ernest Nagel y James Newman, 1994)

Gustavo Piñeiro *

Comencemos esta tercera nota sobre Lógica Matemática repasando algunos de los conceptos que hemos estudiado en las entregas anteriores. Recordemos en primer lugar que una **función recursiva parcial** es una función $F: A \subseteq N \to N$ (donde N es el conjunto de los números naturales y A es el dominio de F) para la cual existe un algoritmo (o, equivalentemente, una máquina de Turing) que calcula F(n) para cada n que pertenezca al conjunto A y que, si intenta calcular F(n) para algún n que no pertenezca al dominio de F, entonces o bien se "cuelga" (es decir, entra en un proceso de cómputo infinito) o bien se detiene pero entrega como resultado del cálculo una salida carente de significado [1]. Si A = N entonces la función se denomina simplemente **recursiva**.

Recordemos además que si $F: A \subseteq N \to N$ y $G: B \subseteq N \to N$ son dos funciones (recursivas parciales o no), la igualdad F = G significa que A = B (es decir, ambas funciones tienen el mismo dominio) y que F(n) = G(n) para todo n que pertenezca a ese dominio común.

Vimos también en los artículos previos que existe un procedimiento algorítmico (representado por la máquina de Turing que denominamos con la letra U) que genera una sucesión F_1, F_2, F_3,... formada por todas las funciones recursivas parciales y en la que, eventualmente, una misma función puede aparecer varias veces. Más exactamente, F es recursiva parcial si y sólo si existe al menos un valor de n (en general habrá más de uno) tal que $F = F_n$.

En Aχioma 17 hemos mostrado la construcción explícita de una función que no es recursiva parcial, es decir una función para la cual no existe un algoritmo que permita calcularla. Como consecuencia de esta construcción hemos demostrado la siguiente afirmación, que será fundamental para nosotros en las líneas que siguen: No existe un algoritmo que, dado un n cualquiera, nos permita responder si este número n pertenece o no pertenece al dominio de F_n. Podemos construir algoritmos que respondan la pregunta para algunos valores específicos de n [2], pero es imposible construir un algoritmo que nos asegure una respuesta correcta para cualquier n arbitrariamente elegido.

Conjuntos recursivos

Nuestra intención es avanzar ahora hacia el enunciado y demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel. Para ello debemos definir previamente algunos nuevos conceptos.

Llamemos Ω al conjunto siguiente: $\Omega = \{n \in N : n \text{ pertenece al dominio de } F_n\}$. Hemos demostrado que no existe un algoritmo que permita determinar, dado un n cualquiera, si n pertenece o no al conjunto Ω. Esta observación motiva la definición siguiente:

Definición: Un conjunto $A \subseteq N$ es **recursivo** si y sólo si existe un algoritmo que, dado un n cualquiera, nos permite determinar si n pertenece o no pertenece al conjunto A.

Casi todo subconjunto de N que uno pueda imaginar será seguramente un conjunto recursivo. Por ejemplo, el conjunto de los números primos es recursivo, ya que es posible construir un algoritmo que decida en una cantidad finita de tiempo si un número cualquiera es primo o no. También es recursivo el conjunto de los cuadrados perfectos o el conjunto de las potencias de 5. En cambio, el conjunto Ω no es recursivo dado que no existe un algoritmo que determine si un n cualquiera pertenece o no al dominio de F_n.

Sin embargo, el conjunto Ω sí posee la siguiente interesante propiedad: existe un algoritmo que, a medida que se va ejecutando, va imprimiendo uno por uno todos los elementos de Ω. Más precisamente, si $n \in \Omega$ entonces al cabo de una cantidad finita de tiempo el algoritmo imprimirá el número n; si $n \notin \Omega$ entonces n nunca será impreso.

Describamos la idea de la construcción de este algoritmo. En primer lugar debemos ordenar en una sucesión lineal al conjunto de todos los pares de números naturales. Una forma de hacerlo es la siguiente: colocamos en primer lugar el par cuya suma es 2, es decir el par (1,1). Luego ubicamos los pares cuya suma es 3, ordenados siguiendo el orden lexicográfico. Luego ubicamos los pares cuya suma es 4, también ordenados lexicográficamente, y así sucesivamente. La sucesión formada comienza del siguiente modo: (1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (2,2) (3,1) (1,4) ...

Llamaremos P_n al n-ésimo par de esta sucesión, es decir $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,2)$, etc. Es claro que existe una máquina de Turing (a la que llamaremos TP) que, dado cualquier n, imprime la primera y la segunda coordenada del par P_n. Recordemos asimismo la máquina U que, dado n, imprime un algoritmo que permite calcular la función recursiva parcial F_n. El algoritmo que estamos buscando, y que deberá imprimir los elementos de Ω, puede escribirse entonces de la siguiente manera:

Algoritmo Omega:
Paso 1: Asigne a k el valor 1.
Paso 2: Usando la máquina TP calcule la primera coordenada del par P_k.
Paso 3: Asigne a la variable n el valor hallado en el Paso 2.
Paso 4: Usando la máquina TP calcule la segunda coordenada del par P_k.
Paso 5: Asigne a la variable m el valor hallado en el Paso 4.
Paso 6: Usando la máquina U genere la n-ésima máquina de Turing (que representa un algoritmo que calcula F_n).
Paso 7: Tomando como entrada el valor de n, ejecute m pasos de la n-ésima máquina de Turing (es decir, m pasos del cómputo de $F_n(n)$).
Paso 8: Si durante el cómputo del paso 7 la máquina se detuvo (llegó a la instrucción que marca el final del cálculo) e imprimió una salida con significado (es decir, de la forma $\#^s$) entonces imprima el valor de n.
Paso 9: Sume 1 al valor de k y vuelva al Paso 2.

Si lo analizamos con detenimiento, veremos que este algoritmo va revisando uno por uno los pares de la sucesión que hemos construido anteriormente. Cuando llega al par (n,m) el algoritmo ejecuta m pasos del cómputo de $F_n(n)$. Si a lo largo de esos m pasos el cómputo llega a la orden de detenerse y entrega una salida con significado, entonces sabemos con certeza que n pertenece al dominio de F_n (es decir $n \in \Omega$ y la salida representa el valor de $F_n(n)$). En consecuencia el algoritmo imprime el número n. En caso contrario no imprime nada.

Observemos que si $n \in \Omega$ entonces n pertenece al dominio de F_n y por lo tanto existe un valor de m tal que el cómputo de $F_n(n)$ se detiene al cabo de m pasos. Consiguientemente n será impreso al revisar el par (n,m). Si $n \notin \Omega$ entonces el cómputo de $F_n(n)$ o bien nunca se detiene o bien entrega una salida sin significado, por lo que el algoritmo nunca imprimirá el valor de n. Vemos entonces que, tal como deseábamos, el algoritmo imprime uno a uno los elementos de Ω y no imprime elementos que no pertenezcan a este conjunto.

Por ejemplo, si 22 perteneciera a Ω y el cómputo de $F_{22}(22)$ requiriera 105 pasos, entonces el número 22 no será impreso al revisar el par (22,104), pero sí será impreso al revisar el par (22,105). De hecho, el mismo número será impreso también al revisar el (22,106), el (22,107) y, en general, el (22,m) con $m \geq 105$. Para evitar estas repeticiones superfluas podemos insertar antes del Paso 9 del Algoritmo Omega una instrucción que revise si el número n ya ha sido impreso con anterioridad y que, en caso afirmativo, no lo imprima nuevamente. Observemos que los elementos de Ω no serán impresos necesariamente en orden creciente. Por ejemplo, si 56 también perteneciera a Ω y su cómputo requiriera, por ejemplo, 8 pasos, entonces el número 56 sería impreso antes que el ya mencionado 22, pues el par (56,8) aparece antes que el (22,105) en la sucesión que hemos construido.

Si Ω fuera infinito necesitaríamos un tiempo parejamente infinito para conocer por este procedimiento todos sus elementos. En consecuencia sería erróneo pensar que este algoritmo nos puede servir para determinar, dado un n arbitrario, si n pertenece o no a Ω (ya sabemos que no existe un algoritmo que resuelva tal problema, pues Ω no es recursivo). Una idea posible, aunque errónea, sería así: queremos saber si n pertenece a Ω, ejecutamos entonces el algoritmo Omega. Si el algoritmo imprime en algún momento el número n entonces sabemos que $n \in \Omega$. Si nunca lo imprime entonces $n \notin \Omega$. Por lo tanto tendríamos un algoritmo que determina si n pertenece o no al conjunto Ω. El error de este razonamiento consiste en que si efectivamente $n \notin \Omega$ entonces nunca lo sabremos en una cantidad finita de tiempo. Si hasta cierto momento el número n no ha sido impreso, nada nos asegura que no será impreso un minuto más tarde. Sólo disponiendo de una cantidad infinita de tiempo podríamos estar seguros de que $n \notin \Omega$.

Conjuntos recursivamente numerables

Definición: Un conjunto $A \subseteq N$ es **recursivamente numerable** si y sólo si existe un algoritmo que imprime uno por uno todos los elementos de A. Es decir, todo elemento de A es impreso por el algoritmo al cabo de una cantidad finita de tiempo, mientras que los elementos que no pertenecen a A nunca son impresos. Por ejemplo el conjunto Ω, tal como acabamos de ver en la sección anterior, es recursivamente numerable.

Todo conjunto recursivo es también recursivamente numerable. En efecto, si A es recursivo entonces existe un algoritmo T tal que, dado un n cualquiera, nos permite determinar si n pertenece o no al conjunto A. Para probar que A es recursivamente numerable debemos construir un algoritmo que imprima uno a uno los elementos del conjunto A. Procedemos entonces de esta manera: tomamos el número 1 y aplicamos el algoritmo T. Si T nos dice que $1 \in A$ entonces imprimimos el 1, en caso contrario no imprimimos nada. Pasamos al 2, si T nos dice que $2 \in A$ entonces imprimimos el 2, en caso contrario no imprimimos nada. Repetimos el procedimiento con el 3, el 4 y así sucesivamente. Es claro que de esta forma iremos imprimiendo uno por uno (además en forma creciente) los elementos de A, por lo tanto A es recursivamente numerable.
Consecuentemente, los conjuntos que antes hemos mencionado como ejemplos de conjuntos recursivos (el conjunto de los números primos, el conjunto de los cuadrados perfectos y conjunto el de las potencias de 5) son todos recursivamente numerables. Más allá del algoritmo insinuado en la demostración del párrafo precedente, es muy simple describir un algoritmo que genere uno a uno los números cuadrados. Este algoritmo simplemente debe decir: "Imprima 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, etc."

Análogamente existe un algoritmo muy sencillo que escribe una a una las potencias de 5. En cambio, para el conjunto de los números primos no se conoce por el momento ningún algoritmo que sea esencialmente mejor al que describimos en la demostración: "tome uno a uno los números naturales, compruebe si el número elegido es primo (haciendo las divisiones que sean necesarias) e imprímalo sólo en el caso de que sí lo sea."

Vimos entonces que si A es recursivo entonces A es también recursivamente numerable. No es cierta en cambio la afirmación recíproca, es decir, no es verdad que todo conjunto recursivamente numerable sea recursivo. Un contraejemplo es el mismo conjunto Ω, que es recursivamente numerable, pero no es recursivo. Sin embargo sí es cierta la siguiente propiedad: si A y su complemento (al que llamaremos A^c) son ambos recursivamente numerables entonces A es recursivo.

Demostremos esta última afirmación. Supongamos que A y A^c sean ambos recursivamente numerables. Existen entonces dos algoritmos, T_1 y T_2, tales que T_1 imprime uno por uno todos los elementos de A y T_2 hace lo propio con los elementos de A^c. Apliquemos esos dos algoritmos para ir generando alternativamente un elemento de A y uno de A^c. Dado un n cualquiera, es claro que al cabo de un tiempo finito, éste número será impreso por T_1 o por T_2. Si n es impreso por T_1 entonces $n \in A$, si n es impreso por T_2 entonces $n \notin A$. Tenemos entonces un algoritmo que decide en un tiempo finito si un n arbitrario pertenece o no pertenece a A. En consecuencia, A es recursivo.

Corolario de ello es que Ω^c no es recursivamente numerable. En efecto, dado que Ω es recursivamente numerable, si Ω^c también lo fuera, entonces por lo que acabamos de demostrar resultaría que Ω es recursivo, pero esto último contradice lo que probamos en la nota anterior. Esto significa que para Ω^c no sólo no existe un algoritmo que nos diga si un n cualquiera pertenece o no al conjunto, sino que, mucho peor todavía, ni siquiera existe un algoritmo que genere, uno por uno, los elementos Ω^c y no genere elementos que no pertenezcan a Ω^c.

Aproximación al Teorema de Gödel

Demos ahora una primera aproximación, un poco informal, al enunciado y a la demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel, el cual estudiaremos aún con más detalle en la próxima y última nota de esta serie. Hablando con cierta informalidad, el Teorema de Gödel dice que en todo sistema axiomático que sea consistente y además suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números, existirán necesariamente afirmaciones con sentido que no podrán demostrarse ni refutarse dentro del sistema.

Aclaremos el significado de los términos que aparecen en este enunciado. Un sistema axiomático es un sistema que consta de una serie de afirmaciones iniciales llamadas "axiomas". Al pensar en un axioma debemos dejar de lado el concepto clásico según el cual debe ser una afirmación "evidente por sí misma". En el concepto moderno "axiomas" son simplemente afirmaciones que se eligen arbitrariamente para constituir el "puntapié inicial" del sistema y sólo se pide de ellos que no se contradigan entre sí. Si finalmente resulta que los axiomas elegidos son realmente afirmaciones evidentes, la explicación de este hecho deberá buscarse en necesidades psicológicas o pragmáticas, pero no en exigencias lógico-matemáticas.

Toda afirmación que pueda deducirse de los axiomas es un "teorema". Una tal deducción debe realizarse siempre siguiendo las llamadas "reglas de inferencia". Estas reglas forman parte también del "andamiaje básico" del sistema axiomático. Por ejemplo, una regla que necesariamente debe formar parte del sistema es la siguiente: Si una afirmación de la forma "$P \Rightarrow Q$" es un axioma o un teorema y P es también un axioma o un teorema, entonces Q es un teorema.

Decimos que un sistema axiomático es consistente si no existe ninguna afirmación P tal que tanto P como su negación sean teoremas en el sistema. En otras palabras, no puede existir una afirmación P tal que se pueda demostrar que P es a la vez verdadera y falsa en el sistema. Llamaremos $\neg P$ a la negación de la afirmación P.

Finalmente, cuando decimos que el sistema es "suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números" implicamos en esta afirmación dos cosas. Por una parte, que el lenguaje formal en el que se escriben los axiomas y los teoremas permite expresar afirmaciones sobre los números enteros. Por ejemplo, el sistema debe contener, entre otros, símbolos que permitan escribir cualquier número natural (estos símbolos no necesariamente deben ser nuestras cifras arábigas), debe también contener símbolos que representen a los conectivos lógicos ("$\wedge$", "$\vee$", etc.), símbolos que representen a los cuantificadores ("$\forall$", "$\exists$"), etc. Para explicar qué otro concepto implica la frase "suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números" debemos dar una nueva definición.

Definición: Un conjunto $A \subseteq N$ es **definible** dentro de un sistema axiomático si existe una propiedad P expresable en el lenguaje del sistema tal que $n \in A$ si y sólo si P(n) es un teorema en el sistema. Esencialmente estamos diciendo que P es la propiedad que define al conjunto A y que para cada elemento n del conjunto la afirmación "n cumple la propiedad P" es demostrable.

Veamos un ejemplo. En el sistema axiomático desarrollado en los *Elementos* de Euclides, los números naturales son representados mediante segmentos. Un segmento arbitrario (que llamaremos unidad) representa al 1, el 2 es un segmento que duplica a la unidad en longitud, el 3 es un segmento que triplica a la unidad en longitud y así sucesivamente. Sea P(n) la propiedad "un segmento que tenga n veces la longitud de la unidad (n>1) no puede partirse de manera exacta en segmentos más pequeños que representen números mayores que la unidad".

Es claro que si n es primo entonces P(n) puede demostrarse dentro del sistema de los *Elementos*. Recíprocamente, si P(n) puede demostrarse, entonces n es primo. Si A es el conjunto de los números primos vemos entonces que $n \in A$ si y sólo si P(n) es un teorema de los *Elementos*. Por lo tanto, el conjunto de los números primos es definible en este sistema.

Puede demostrarse, y de hecho lo probaremos en la próxima nota, que si A es definible entonces A es recursivamente numerable. Cuando decimos que el sistema es "suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números" decimos que debe valer la afirmación reciproca, es decir, un sistema es "suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números" si todo conjunto que es recursivamente numerable es definible dentro del sistema. En particular, esto implica que en el sistema podemos definir todos los conjuntos que son de uso habitual en la Teoría de Números.

Estamos ahora en condiciones de dar una demostración informal del Teorema de Incompletitud de Gödel. Sea entonces un sistema axiomático consistente y suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números. Dado que Ω es recursivamente numerable entonces existe una propiedad P tal que $n \in \Omega$ si y sólo si P(n) es un teorema. La idea es que P es la traducción al lenguaje formal del sistema de la frase "n pertenece al dominio de F_n".

Sea ahora Ω_1 el siguiente conjunto: $\Omega_1 = \{n \in N : \neg P(n) \text{ es un teorema en el sistema}\}$. Observemos que si $n \in \Omega_1$ entonces $\neg$P(n) es un teorema en el sistema axiomático, en consecuencia P(n) no es un teorema (ya que el sistema es consistente y no puede ocurrir que P(n) y $\neg$P(n) sean teoremas a la vez). Si P(n) no es un teorema entonces $n \notin \Omega$ o, lo que es lo mismo, $n \in \Omega^c$. Hemos probado entonces que $n \in \Omega_1$ implica que $n \in \Omega^c$, es decir que $\Omega_1 \subseteq \Omega^c$.

Aunque $\Omega_1 \subseteq \Omega^c$, no es cierto en cambio que ambos conjuntos sean iguales. En efecto, tomando a $\neg$P como propiedad, vemos que Ω_1 es definible en el sistema. Por lo tanto Ω_1 es recursivamente numerable. Sin embargo ya hemos visto que Ω^c no es recursivamente numerable, consiguientemente no puede ocurrir que $\Omega_1 = \Omega^c$.

Dado que $\Omega_1 \subseteq \Omega^c$, pero que no son iguales, existe entonces un número natural m tal que $m \in \Omega^c$ y $m \notin \Omega_1$. En particular, $m \notin \Omega$ y $m \notin \Omega_1$. Como $m \notin \Omega$ entonces P(m) no es un teorema (no es demostrable en el sistema). Como $m \notin \Omega_1$ entonces $\neg$P(m) tampoco es un teorema. En conclusión hemos probado que existe una afirmación, P(m), tal que ni ella ni su negación son demostrables en el sistema. La afirmación es indecidible. Hemos demostrado entonces el Teorema de Incompletitud de Gödel.

Si incorporamos esta afirmación (o su negación) como un nuevo axioma, el sistema resultante volverá a cumplir las mismas hipótesis iniciales por lo que existirá un nuevo número m_1 tal que la afirmación $P(m_1)$ es indecidible. Dado que este proceso de incorporación de afirmaciones puede repetirse cualquier cantidad finita de veces llegamos a la conclusión de que existen infinitos valores de m para los cuales P(m) es indecidible. Recordando la traducción de P(m), hemos probado entonces que existen infinitos valores de m para los cuales la afirmación "m pertenece al dominio de F_m" es indecidible.

Veremos en la próxima nota que una consecuencia fundamental del Teorema de Incompletitud es un segundo teorema que asegura que un sistema axiomático que cumpla las hipótesis planteadas no puede probar de sí mismo que está libre de contradicciones. Es decir, que una demostración de la consistencia del sistema, en caso de que existiera, no puede expresarse mediante el lenguaje, los axiomas y las reglas de inferencia del propio sistema. Cualquier demostración de consistencia deberá recurrir necesariamente a elementos externos.

Considerando a la Matemática como un gran sistema axiomático, esto implica en particular que no es posible demostrar matemáticamente que la Matemática misma esté libre de contradicciones (que no haya en ella paradojas fatales). Todos los matemáticos están convencidos de que en efecto la Matemática es consistente, pero esta convicción es esencialmente una expresión de deseos, o una convicción filosófica o, si se quiere, un acto de fe. Toda la parafernalia que usan los matemáticos para demostrar sus teoremas es (y esto está matemáticamente demostrado) insuficiente para demostrar la consistencia de la Matemática, en caso de que de verdad sea consistente.

Notas:

(1) A los efectos de estos artículos, las únicas entradas y salidas con significado son sucesiones finitas de símbolos #. Una sucesión de n símbolos # (que indicamos como $\#^n$) representa al número n. Si F es recursiva parcial, $n \in A$ y $F(n) = m$, entonces al ingresar en la máquina de Turing la entrada $\#^n$, la salida deberá ser $\#^m$.

(2) Un algoritmo de este tipo sería: observe si en la máquina de Turing que define a F_n aparece la instrucción que indica que el cálculo debe detenerse. Si no es así, entonces el número n no pertenece al dominio de F_n (de hecho el dominio de F_n es vacío, pues para cualquier entrada la máquina se colgará). Este algoritmo nos da una respuesta para todos los valores de n cuya máquina carece de la instrucción de parada, pero no nos da respuesta para los demás.

* Lic. en Matemáticas – UBA.

Bibliografía:

- ARBIB, Michael. *Cerebros, máquinas y matemáticas*, Madrid, Alianza Editorial, 1982.
- HOFSTADTER, Douglas. *Gödel, Escher y Bach*, Barcelona, Tusquets, 1992.
- NAGEL, Ernest - NEWMAN, James. *El Teorema de Gödel*, Madrid, Tecnos, 1994.
- PENROSE, Roger. *La mente nueva del emperador*, México D.F., Fondo de Cultura Económica, 1996.

Un 18 de marzo...

...de 1690 nació en Konigsberg, Prusia (hoy Kaliningrado, Rusia) Christian Goldbach; quien es conocido por la conjetura que hoy lleva su nombre, y que formulara en 1742 en una carta a Euler. La misma dice que todo entero par mayor que 2 puede representarse como suma de dos primos. Goldbach también conjeturó que todo número impar es la suma de tres primos. Goldbach murió un 20 de noviembre de 1764 en Moscú, Rusia; hasta el día de hoy ambas conjeturas siguen sin resolverse.

Fuente: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Evaristo en... *La solución que Cantor no vió.*

El día de π

Cada 14 de marzo se celebra el día de π ya que corresponde a sus tres primeros dígitos: 3, 14 (los países anglosajones para expresar una fecha, primero expresan el mes y después el día). En escuelas de diferentes lugares del mundo se festeja este día, trabajando con los alumnos sobre la historia y el concepto de π, o haciendo proyectos especiales que involucren a este número.
En internet pueden encontrarse páginas que tienen un espacio dedicado al tema, en algunas se sugieren actividades, se cuentan historias, canciones y tarjetas electrónicas de π.
A continuación transcribimos la letra de una canción alusiva al número π que escribimos, la misma debe cantarse acompañada por la melodía de "Canción de tomar el té" de María Elena Walsh

Estamos celebrando
el día de pi
tiene tantas cifras
como nunca vi,
como nunca vi.

El diámetro pi veces
Justo nos dará
Una bella circunferencia
Tú ya lo verás
Tú ya lo verás

Arquímedes usando
la vieja exhaución
sólo pudo aproximarlo
qué desilusión
qué desilusión

En mil siete setenta
Lambert descubrió
que pi es irracional
¡qué demostración!
¡qué demostración!

¿Algebraico o trascendente?
¿Cuál será la opción?
En mil ocho ochenta y dos,
Lindemann contestó
Lindemann contestó

Pi es trascendente
duda no quedó
de que el círculo no se cuadra
es la explicación
es la explicación

Quizás jamás sabremos
todo sobre él
Hay misterios y grandes cosas
Aún por aprender
Aún por aprender

Esperamos que nos hagan llegar ideas y proyectos para compartir.
http://mathforum.org/t2t/faq/faq.pi.html http://www.winternet.com/~mchristi/piday.html
http://www9.123greetings.com/events/pi/
http://www.tarjetas.com/step1.asp?cat_fldAuto=217&id_SCat=18 (tarjetas electrónicas en español)

Cortaduras, por Dedekind

Las cortaduras de números reales constituye uno de los temas tratados en los cursos de matemática superior y es un hermoso ejemplo de intuición, lógica y originalidad. La intención del presente artículo es clarificar, si es posible, el procedimiento empleado por el propio matemático.

Pablo Bonucci *

Un poco de historia. Julius Whilhelm Richard Dedekind (1831-1916), nacido en Brunswick, Alemania, estudió en la Universidad de Gottingen donde también dio clases de matemática. Luego fue profesor en la escuela Politécnica de Zurich y por más de cincuenta años en la escuela Politécnica de Brunswick. Es difícil entender cómo un catedrático con su capacidad sólo haya accedido a cargos menores, en tanto mentes de condición muy inferior han logrado puestos más altos. (Hoy en día es comprensible).

Vivió soltero y dotado de un excelente humor hasta su muerte, al cuidado de su hermana.

Se cree que mientras sus clases de Cálculo Diferencial discurrían, comentaba a sus alumnos la necesidad de fundamentar (crear un cimiento que sustente lógicamente) al Cálculo, que por esos tiempos tenía como único respaldo la contundencia de sus resultados. El fin era similar al que logró con la geometría Euclides. Este período se denominó de 'Fundamentación del Análisis', y ya había sido iniciado por Cauchy en 1821.

Dedekind hizo notar, por ejemplo, que no es posible probar, sin caer en vacíos teóricos, el famoso teorema de Bolzano, el cual indica que si una función continua toma en los extremos de un intervalo de números, valores de distinto signo, entonces se anula en, al menos, un valor intermedio de dicho intervalo. Cabe señalar que el problema de la fundamentación del cálculo se redujo al problema de fundamentar los elementos con los que operan las funciones: los números reales. Por lo tanto el objetivo de Dedekind fue, según sus palabras: *"Encontrar una fundamentación puramente aritmética y rigurosa, para los principios del análisis infinitesimal".* Esta fundamentación está relatada en su libro *"Stetigkeit und Irrationale Zalhen" (Continuidad y números irracionales)* de 1872. El camino que eligió fue el de aritmetizar el Análisis e incluir a la aritmética como una parte de la Lógica. Esta concepción fue denominada luego escuela logicista, compartida y continuada por el matemático Gotlob Frege.

Tres hechos significativos para la teoría de las cortaduras son: la continuidad de la recta numérica (hecho este preconcebido por todos desde la época de los geómetras griegos.) La relación uno a uno que se utiliza para asignar a cada número racional un punto de la recta numérica y viceversa; y el hecho de que cada número en la recta "divide " a la misma en dos partes, una a derecha y otra a izquierda, sin elementos comunes. Este último punto no es más que el concepto de orden de magnitudes conmensurables definido por Euclides en el siglo III a.C. La discrepancia en la fundamentación se originaba cuando las cantidades no eran conmensurables o, lo que es lo mismo, ningún número racional la correspondía. Como es sabido, la medida de la diagonal de un cuadrado de lado unitario no es correspondida por ningún segmento de la recta numérica, con uno de sus extremos en el origen y el otro en algún número racional. Esta simple observación motivó la teoría de Dedekind y como él mismo dijo: *" Si todos los puntos de una línea recta son de dos clases, de manera que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto y únicamente uno que ocasiona la partición de todos los puntos en dos clases, separando la recta en dos porciones".* Resumiendo el problema consistía en probar que la recta numérica es continua, diferenciando esto de la noción de densidad que sí satisfacen los números racionales. Se necesitaba definir entonces una nueva clase de números que, cabe destacar, ya eran conocidos y utilizados por todos.

Definición de Números irracionales

Era claro en aquella época, que la condición discontinua de los números racionales no completaba la recta numérica. Entonces apelando a la motivación geométrica mencionada, Dedekind introduce el concepto de *Cortadura (Schnitt.)*

Según Dedekind: *"He mencionado que cada número racional **a** efectúa una separación del sistema R (números racionales) en dos clases, de manera que cada número a_1 de la primera clase A_1 es menor que cada número a_2 de la clase A_2; el número **a** no es ni el mayor número de la clase A_1 ni el menor número de la clase A_2. Si ahora nos dan cualquier separación del sistema R en dos clases A_1 A_2, las cuales poseen solamente la propiedad característica de que cada número a_1 en A_1 es menor que cualquier número a_2 en A_2, entonces, por concisión, llamaremos a esta separación una cortadura y la designaremos por (A_1, A_2)".*

Gráficamente:

R —a_1—)a(—a_2————
A_1 A_2

En esta parte del texto de Dedekind es en donde se genera la primer controversia: *"Podemos decir que cada número racional a produce una cortadura, o, estrictamente hablando, dos cortaduras que, sin embargo, no podemos considerarlas como esencialmente diferentes; esta cortadura posee, además, la propiedad de que entre los elementos de la primera clase existe uno mayor, o, que entre los números de la segunda clase uno menor. Y si una cortadura posee esta propiedad entonces esta formada por el número racional mayor o menor".*
El cuestionamiento es el siguiente: la cortadura no es producida por un número racional, LA CORTADURA **ES** UN NÚMERO RACIONAL.
El verdadero descubrimiento fue hecho por Dedekind cuando demostró que existen infinitas cortaduras que no son producidas por ningún número racional (o mejor dicho, que no son números racionales.)

Cortaduras irracionales

A continuación, un ejemplo propuesto por Dedekind de cortadura irracional:

Sea D un entero positivo, pero no el cuadrado de un entero, entonces tenemos un entero positivo k tal que:

$$k^2 < D < (k+1)^2$$

La clase A_2 está compuesta por todos los números racionales a_2 cuyo cuadrado es mayor que D, en símbolos:

$$A_2 = \{a_2 \in Q^+ / a_2^2 \geq D\}$$

Y la primera clase A_1, formada por todos los demás números racionales:

$$A_1 = \{a_1 \in Q^+ / a^2{}_1 < D\} \cup Q_0^-$$

Según esta definición, la cortadura (A_1,A_2) define un número que no es racional.
Continúa el matemático: *"Para probar esto es necesario demostrar que no hay ningún número racional cuyo cuadrado es D".*
En términos de cortaduras lo que se debe probar es que no existe en la clase A_1 elemento máximo, ni en la clase A_2 elemento mínimo. Dedekind recurre, para lograr tal efecto, a una demostración algebraica indirecta:

<u>Demostración</u>: (constará de varias demostraciones intermedias):

Si D es un número, cuadrado de un número racional, $D = \left(\frac{t}{u}\right)^2 ; u \neq 0$ con t y u enteros, obtenemos la siguiente ecuación:

$$t^2 - Du^2 = 0 \qquad (1)$$

Y suponemos que u tiene la propiedad de ser el <u>menor</u> entero que satisface la ecuación anterior:

Si tomamos $u \in Z^+ \wedge k \in Z^+ \wedge k < u$ que además satisfagan la ecuación (1), entonces:

$$t^2 = Du^2 \quad \text{y} \quad t^2 = Dk^2$$

si restamos la segunda ecuación de la primera, nos queda:

$(u^2 - k^2)D = 0$
$u^2 = k^2$
$u = k$, Absurdo. Por lo tanto, u es el menor entero que justifica (1).

Pero además como D no es cuadrado de ningún número entero, entonces existe un entero λ que cumple: $\lambda u < t < (\lambda + 1)u$
Analicemos esto último:

Como D no es cuadrado de un entero, existe λ tal que $\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$

$$\lambda^2 < \frac{t^2}{u^2} < (\lambda+1)^2$$
$$u^2\lambda^2 < t^2 < (\lambda+1)^2 u^2$$
$$u\ \lambda\ < t\ \ < (\lambda+1)\ u \quad \text{lqqd.}$$

Consideremos el número u' = t.
Entonces u'< u.
Probemos esto:

Si $u\ \lambda\ < t\ \ < (\lambda+1)\ u$, entonces
$$u\lambda < t < \lambda u + u$$
$$0 < t - \lambda u < u$$
$$0 < u' < u \quad \text{lqqd.}$$

Luego se tiene que el número $t' = Du - \lambda t$ es entero positivo menor que t.

De la demostración anterior observamos que:

$$u\ \lambda\ < t\ \ < (\lambda+1)\ u$$
$$\lambda\ < \frac{t}{u} < (\lambda+1)$$
$$0 < \frac{t}{u} - \lambda < 1$$
$$0 < \frac{t^2}{u} - \lambda t < t$$
$$0 < \frac{t^2}{u^2}u - \lambda t < t$$
$$0 < Du - \lambda t < t$$
$$0 < t' < t \quad \text{lqqd}$$

Podemos comprobar que:

$$t'^2 - Du'^2 = (Du - \lambda t)^2 - D(t - \lambda t)^2 =$$
$$= D^2u^2 - 2Dut\lambda + \lambda^2 t^2 - Dt^2 + 2Dtu\lambda -$$
$$- D\lambda^2 u^2 = t^2(\lambda^2 - D) - Du^2(\lambda^2 D) =$$
$$= (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$$

De la cual, el segundo factor (t^2 – Du^2) es 0 debido a (1), sabiendo que existe un entero u, el menor, que al multiplicarlo por D iguala el cuadrado de otro entero.

Igualando el primer factor a cero se deduce la expresión $D = \frac{t'^2}{u'^2}$ y ésta es absurda, pues contradice la hipótesis que afirma que u es el <u>menor entero</u> que posee la suposición mencionada, ya que $0 < u' < u$.

Hasta aquí sólo se ha probado que cada número racional x es mayor que D ó menor que D. Queda por probar, todavía, que en la clase A_1 no existe un elemento máximo, ni en la clase A_2 uno mínimo. La manera en que Dedekind razona esto es realmente admirable.

Considérese la siguiente función de "Dedekind" $x \to y$, de racionales en racionales:

$$y = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$$

Con $D \neq \frac{t^2}{u^2}$, t y u enteros.

Restando miembro a miembro x, se obtiene:

$$y - x = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D} - x$$

$$y - x = \frac{x^3 + 3Dx - 3x^3 - xD}{3x^2+D} = \frac{2xD - 2x^3}{3x^2+D}$$

$$y - x = \frac{2x(D - 2x^2)}{3x^2+D} \quad (*)(*)$$

Recordando que la cortadura *(A_1,A_2)* define al número real D, lo que se pretende probar con esta función es que:

$$\forall x \in A_1 \Rightarrow (\exists y \in A_1 \wedge x < y)$$

ó, lo que es lo mismo,

$$x^2 < D \Rightarrow (y^2 < D \wedge x < y)$$

Es decir, cualquier racional x de la primera clase menor que D, es siempre superado por otro racional y, de la misma clase (no hay máximo.) Análogamente se demuestra que A_2 no tiene mínimo, es decir que:

$\forall x \in A_2 \Rightarrow (\exists y \in A_2 \wedge x > y)$

o sea, $x^2 > D \Rightarrow (y^2 > D \wedge x > y)$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros, en la función de Dedekind (recuadrada):

$y^2 = \dfrac{x^2(x^2+3D)^2}{(3x^2+D)^2}$ y restando D en cada miembro de la igualdad, resulta (queda la verificación a cargo del distinguido lector):

$$y^2 - D = \frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2} \quad (*)$$

Analizando los signos en las ecuaciones (*)(*) y (*) comprobamos que:
Si x pertenece a la clase A_1 ($x^2 < D$) y debido a la expresión (*)(*) se tiene que $y > x$, entonces en (*) se verifica que $y^2 < D$, (o sea, y, también pertenece a la primera clase; por lo tanto ésta carece de máximo).
Sugerencia: analizar los signos de los numeradores de cada ecuación.
Análogamente se puede probar que la clase A_2 no posee mínimo (a cargo del Lector).
De estas dos conclusiones se desprende la siguiente tesis:
"La cortadura *(A_1, A_2)* no es generada por ningún número racional ", es decir, $D \notin Q$.

En consecuencia al número D se lo define como Irracional. En otros términos, como ya se ha apreciado, esta cortadura **es** un número Irracional.

Algunas Críticas

Antes de comenzar con las críticas que como se sabe, no siempre son constructivas, cabe destacar que este notable matemático, sintió la necesidad de fundamentar la materia que el dictaba a sus alumnos, con bases lógicamente sólidas; lo cual ya es un merito que excusa cualquier tipo de invectiva que acertadamente o no, le hubieran hecho. La búsqueda de una verdad que justifique los conocimientos sostenidos por los resultados de un procedimiento como el cálculo, amerita a Dedekind a quedar en la historia como uno de los grandes matemáticos y educadores.
Es necesario aclarar que Dedekind trabajó como lo que fue: un matemático, no como un lógico; ésta es la principal falencia que observan sus detractores.
En su planteo se pueden objetar ciertos "descuidos" como los que se enumeran a continuación:

1) La intuición no es una base firme para fundamentar la matemática, en cambio, sí lo es la lógica, con este argumento Dedekind toma una postura objetable por otras corrientes del pensamiento matemático: los intuicionistas.
2) Trabajó con cortaduras, conjuntos infinitos, sin definirlos previamente y sin saber nada de su existencia. Luego Cantor y Rusell (alrededor del año 1900) formalizarán estos conceptos conjuntistas, otorgándoles rigor.
3) Dedekind concede a la lógica una posición trascendental, tildándola de psicologismo.

En la actualidad, en los libros de matemática de nivel superior, una cortadura racional es definida de la siguiente manera:

(A_1, A_2) es una Cortadura en Q si:
1) $A \neq \varnothing \wedge A \neq Q$ *es decir* $A \subset Q$
2) $x \in A \wedge a < x \Rightarrow a \in A$
3) $x \in A \Rightarrow \exists y \in A / x < y$

Estas condiciones, salvando diferencias de notación y de autores, expresan los postulados ya expuestos por Dedekind.

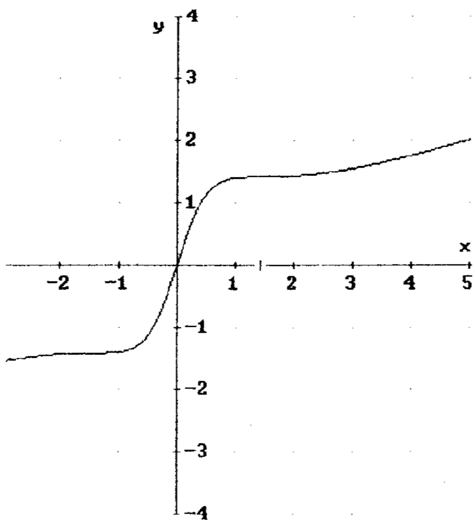
Otra visión de las cortaduras

Se deja al lector, por último, el gráfico de la función de Dedekind, considerando D = 2, la cual se transforma en la siguiente expresión:

$$y : \Re \to \Re / y = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$$

Se analizará el comportamiento de la misma en un entorno reducido de $x = \sqrt{2}$ y se verificará la carencia de máximo y mínimo. Por lo que la cortadura que este número (irracional) represente también carecerá de máximo y de mínimo.

Gráfico de la función: $y = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$. La cual es Biyectiva.



Nota: La marca en el eje de abscisas corresponde al número $x = \sqrt{2}$

Esta función tiene por derivadas de orden uno, dos y tres las siguientes expresiones:

$$y' = \frac{3x(x^2-2)}{(3x^2+2)^2} \qquad y'' = \frac{96x(x^2-2)}{(3x^2+2)^3}$$

$$y''' = -\frac{96(9x^4-36x^2+4)}{(3x^2+2)^4}$$

Las primeras dos derivadas se anulan en $x = \sqrt{2}$; la de tercer orden alcanza el valor ¾ (positivo) [(1)]; esto significa, que la función no alcanza ni máximo ni mínimo en ese punto de abscisa.

La hipótesis que se baraja sobre la invención las cortaduras de Dedekind, consiste en sostener que la única motivación que tuvo para crearlas fue la continuidad de la recta numérica.

Sin embargo, es posible entrever que, tratándose de un conocedor profundo del Cálculo matemático, otra motivación haya podido ser la cercanía temporal de los estudios realizados por Taylor, Cauchy, Lagrange, etc. sobre las funciones continuas, derivables e integrables en los siglos XVII, XVIII y XIX.◣

(1) Si la primera derivada no nula de una función es de orden impar y positiva, entonces la función es estrictamente creciente en el punto analizado.

* Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. J. V. González"

Bibliografía:

- NEWMAN, James. *Sigma el mundo de las matemáticas*, Editorial Grijalbo,1997.
- KLINE, Morris. *El pensamiento matemático, de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, 1999.
- CAÑON LOYES, Camino. *La matemática "Creación y descubrimiento"*, Editorial Comillas.
- REY PASTOR, J. - BABINI, J. *Historia de la matemática*, Editorial Espasa Calpe,1952.

◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈

Un 18 de abril...

...de 1907 nació en Helsingfors, Finlandia (en ese momento parte del Imperio Ruso) Lars Valerian Ahlfors, quien en 1936 fue uno de los dos matemáticos que recibieron por primera vez la Medalla Fields (el equivalente al Premio Nobel para los matemáticos) en el Congreso Internacional de Oslo, el otro fue J. Douglas). Falleció en octubre de 1996 en Pittsfield, EE.UU.

Fuente: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Importancia de los métodos aproximados de solución

La siguiente nota es una colaboración de uno de nuestros lectores. Agradecemos su envío y aprovechamos la oportunidad para renovar la invitación a todos los lectores que tengan algún material para compartir.

M. Sc. José Manuel Ruiz Socarras*

Tengo la impresión, en mis 20 años de trabajo como profesor, de que generalmente los estudiantes menosprecian los métodos que conducen a la solución aproximada del problema. Y digo que tengo la impresión pues no conozco de estudios realizados al respecto.

Sin embargo, no debemos culpar a los estudiantes por esa valoración, ya que si calculamos el tiempo que se dedica a enseñarles métodos exactos de solución a lo largo de toda la enseñanza, incluyendo la educación superior, obtendremos que el tiempo dedicado a la enseñanza de métodos aproximados es mínimo en comparación con el dedicado a métodos exactos, mientras que en la práctica, según señalan algunos autores, sólo se pueden resolver por métodos exactos no más del 5 % de las ecuaciones diferenciales que se pueden presentar. Si a la contradicción anterior le sumamos que no siempre los profesores le demuestran a los estudiantes la importancia de los métodos aproximados, entonces el estudiante obviamente llega a pensar que lo más importante son los métodos exactos.

Sucede pues que se dedica mucho tiempo a estudiar gran cantidad de métodos llamados exactos que realmente resuelven un grupo pequeño de problemas, en lugar de dedicar más tiempo a estudiar métodos aproximados que, aunque sean relativamente pocos en cantidad, pueden sin embargo aplicarse a un gran número de problemas.

Un ejemplo de problema que no puede ser resuelto por un método exacto es la búsqueda de las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado mayor que cuatro, lo cual fue demostrado por Galois (1811-1832) y, sin embargo, las ecuaciones de grado superior al cuatro aparecen con frecuencia en problemas técnicos y científicos. Por ejemplo, en la aerodinámica aplicada, en el estudio de las condiciones de estabilidad de un avión, interviene una ecuación de octavo grado.

Hay que llevarle al estudiante la idea de que no solamente la mayoría de los problemas no pueden ser resueltos por métodos exactos, sino que existen también problemas cuya solución por un método exacto, aunque es posible, es más laboriosa y engorrosa que mediante la utilización de un método aproximado.

Por ejemplo, para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales del tipo $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ (i = 1, 2,....,n), si se dispone de métodos exactos o directos como lo es la regla de Cramer, la gran cantidad de cálculos que se requieren para evaluar los determinantes, aunque el sistema sea de bajo orden, es mucho mayor que el número de operaciones que requiere por ejemplo un método aproximado como lo es el método de eliminación de Gauss. Digamos que para n = 10 la aplicación de la regla de Cramer requiere aproximadamente 40 000 000 de multiplicaciones, en tanto que el método de Gauss requiere aproximadamente 300 multiplicaciones y divisiones.

Estamos hablando de métodos exactos y Métodos aproximados, cuando lo correcto es hablar de Métodos analíticos y Métodos numéricos respectivamente, puesto que exacto hay muy poco en la vida. Cuando decimos que el largo de una mesa es de 4m, esa medida no es exacta, pues ella incluye un cierto error, me refiero al error; que introducen los ojos como órganos de la visión más el error del propio instrumento de medición que se use.

Cuando trabajamos con un sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático de un circuito eléctrico para hallar los valores de la intensidad de la corriente, los coeficientes de las ecuaciones del sistema, son valores de las resistencias y los términos independientes son los valores de las fuentes de voltajes. Ambos tipos de valores, obtenidos mediante mediciones, llevan implícitos errores de los equipos de medición y de nuestros órganos de la vista. De ahí que el modelo matemático es aproximado.

Además, el hecho de que sea un modelo ya encierra un determinado tipo de error, ya que todo modelo es ante todo una aproximación del objeto que modela (de lo contrario no sería un modelo). Lo que nos interesa entonces es encontrar un buen modelo, es decir, una buena aproximación: tratar de disminuir el error, pero sin que deje de ser una aproximación, pues en caso contrario no se trataría entonces de un modelo como método de investigación de la realidad objeto de estudio.

Tenemos, pues, que un modelo matemático es una aproximación. Entonces, al resolverlo por un mal llamado método exacto, la solución no puede ser tampoco exacta y mucho menos si tenemos en cuenta las operaciones de redondeo que hay que introducir al realizar operaciones aritméticas con los números que resultan, números que al ser también aproximados van propagando el error de cálculo. Vemos que no es lógico hablar de métodos exactos, ya que en ningún momento la solución que se obtiene es exacta.

Lo lógico es hablar de Métodos analíticos y de Métodos numéricos. Estos últimos son agrupados en la disciplina matemática que se denomina Matemática Numérica o Matemática de Cálculo.

La Matemática Numérica se define como la teoría y la práctica del cálculo eficiente y la estimación del error de la solución aproximada. El adjetivo "eficiente" es una de las diferencias primarias entre la Matemática Numérica y el resto de la Matemática, pues en la Numérica no basta con solucionar el problema, sino que interesa también el tiempo que se necesita para obtener la solución y la estimación del error de la aproximación, de ahí que uno de sus objetivos sea la elección del método más adecuado para la solución del problema. El resto de la Matemática no se ocupa de tal eficiencia.

Otra diferencia entre ambos tipos de Matemáticas está dada por la forma de la solución, ya que generalmente los Métodos Numéricos dan la solución en forma numérica y el resto de la Matemática da la solución en forma analítica, o sea a través de funciones. En la Matemática Numérica no se obtiene la expresión analítica de la función, sino valores aproximados de dicha función. Claro está que también existen Métodos Numéricos para hallar la forma aproximada de una función y aquí la solución no es numérica, sino una expresión analítica pero aproximada.

Lo importante es, entonces, no tanto buscar la solución exacta de un problema, sino la solución aproximada, pero con la precisión requerida, o sea, con un error, lo suficientemente pequeño y próximo a cero. Esa es la utilidad de los Métodos Numéricos.

Importa también el tiempo empleado en obtener la solución y en esto ha jugado un papel importante el enorme desarrollo de la tecnología, ya que la velocidad actual de los medios computarizados de cálculo ha reducido considerablemente el tiempo de obtención de la solución, lo que ha motivado la popularidad, el enorme uso y aceptación que hoy en día tienen los Métodos Numéricos. Sumémosle a ello que las computadoras son capaces de dar la solución con la precisión requerida.

Aquí es bueno aclarar que no es correcto pensar que el desarrollo tecnológico computarizado es quien ha creado los Métodos Numéricos. Los orígenes de la Matemática Numérica son muy antiguos; datan de miles de años atrás, cuando los babilonios, 2000 años a.n.e., construyeron tablas matemáticas y elaboraron efemérides astronómicas. Lo que sucede es que la mayoría de los Métodos Numéricos requieren de un enorme volumen de cálculo que los hacían engorrosos de utilizar. Esta dificultad vino a eliminarse con el desarrollo de la computación.

Y para terminar los dejo con dos problemas. El primero que no se resuelve por Matemática Numérica y el segundo que sí se resuelve por ella para que ustedes, amigos lectores, lleguen a sus propias conclusiones de cuál de ellos es más frecuente en la práctica y, sin embargo, a cuál se le dedica más tiempo en la enseñanza.

Problema 1:
Calcule el área bajo la curva $y = f(x)$ conociendo la expresión analítica de la función $f(x)$.

Problema 2:
Calcule el área bajo la curva $y = f(x)$ de la que no conocemos su expresión analítica sino solamente un número finito de valores que se han obtenido por medición, es decir, (x_0,y_0), (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n).

* Universidad de Camagüey, Cuba.

Bibliografía:

- SUÁREZ ALONSO, M. *Matemática Numérica, Primera y Segunda parte*, Cuba, Editorial Pueblo y Educación, 1986.

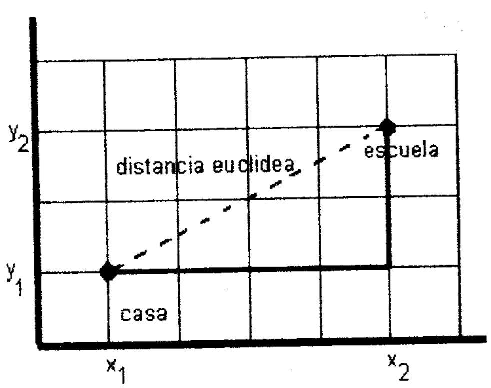
Distancia

La idea intuitiva de distancia nos acompaña desde nuestros primeros años. En esta nota intentaremos sumergirnos en el mundo matemático para saber algo más sobre este concepto.

Gisela Serrano *

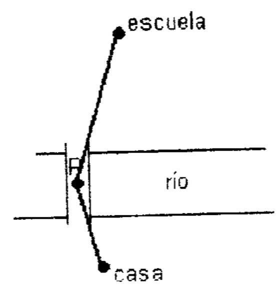
Imaginemos que estamos en el patio de un colegio; todos sabemos cómo medir a qué distancia se encuentra, por ejemplo, un alumno del mástil. ¿Cómo lo haríamos? Una posibilidad sería tomar un piolín y extenderlo entre el alumno y el mástil; luego determinaríamos la longitud del tramo de piolín utilizado y tendríamos así la distancia deseada. Si trasladamos esta situación a un sistema de coordenadas lo que estamos buscando es la distancia entre dos puntos ubicados en un mismo plano (en este caso, el piso del patio), estos puntos son: (x_1, y_1), el mástil y (x_2, y_2), el alumno. La distancia entre ellos se calcula de la siguiente manera: $d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. A esta distancia se la suele llamar usual o euclidea, y corresponde a la longitud del segmento que une los dos puntos. Esta noción de distancia coincide con la que solemos aprender en el colegio secundario, pero veamos que no es la única que existe.

Imaginemos ahora que nos preguntan a qué distancia está una casa de la escuela. Ya no podemos utilizar el mismo método que antes, pues nadie puede suponer que vamos a ir desde la casa hasta la escuela siguiendo el segmento de recta que une estos dos puntos y atravesando en el camino varios edificios.



Si suponemos que estamos en una ciudad con manzanas cuadradas, resulta más razonable utilizar la siguiente fórmula para calcular la distancia de la casa (ubicada en el punto (x_1, y_1)) a la escuela (en el punto (x_2, y_2)): $d_1[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

El caso vuelve a cambiar si, por ejemplo, vivimos en el campo y para llegar a la escuela debemos atravesar un puente, si P es el punto medio del puente, entonces una medición razonable de la distancia sería: $d_P[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d[(x_1, y_1), P] + d[P, (x_2, y_2)]$, donde d es la distancia euclídea.



Vemos en estos pocos ejemplos que existen circunstancias en las cuales el modo más natural de medir una distancia es muy diferente del que conocemos usualmente. Existe en realidad una diversidad de distancias que pueden utilizarse en R^2. Pero entonces, la pregunta que debemos hacernos es: ¿qué es exactamente una distancia?

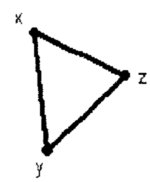
Existe para este concepto una definición matemática precisa que dice lo siguiente: si tenemos un conjunto cualquiera X (tomemos en cuenta que no debe ser necesariamente R^2), una distancia (o métrica) en X es una función d: $X \times X \to R$ que satisface las siguientes condiciones para $x, y, z \in X$ arbitrarios:

1) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
2) $d(x, y) = d(y, x)$
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

El concepto de distancia es fundamental para el Análisis Matemático, ya que es a partir de él que puede darse la idea de convergencia. Esta última noción es la que nos permite, por ejemplo, definir los números reales.

Si pensamos a la distancia como la longitud de un camino (en el primer ejemplo que vimos, el camino del alumno al mástil, en el segundo y en el tercero, de la casa a la escuela), vemos que las tres propiedades de la definición son muy razonables.

La primera propiedad dice, por un lado, que la longitud del camino debe ser siempre un número no negativo; y por otro, que si la longitud es cero entonces no nos hemos movido del punto de partida.
La segunda propiedad dice que la longitud del camino que va de x a y es la misma que la del camino que va de y a x.
La tercera propiedad nos da la idea de "camino más corto posible", es decir si pasamos por un punto intermedio estaremos "alargando" el recorrido. Esta propiedad es conocida como "desigualdad triangular" y generaliza la propiedad que dice que en un triángulo cualquiera la longitud de uno de sus lados no puede ser mayor a la suma de las longitudes de los otros dos.



Notemos que los tres conceptos de distancia que hemos mencionado en el comienzo de esta nota cumplen esta definición y por lo tanto todos ellos nos permiten medir distancias. Otro ejemplo de métrica (que puede definirse en cualquier conjunto) es la llamada métrica discreta o trivial en X, que está definida como:

$$d_t(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

En este caso la distancia entre dos puntos cualesquiera vale 1, salvo que sean iguales en cuyo caso vale 0. Dejamos como ejercicio para los lectores la demostración de que esta distancia y las anteriores cumplen efectivamente las condiciones mencionadas en la definición.

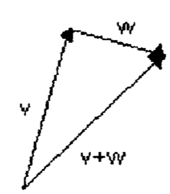
A diferencia de lo que ocurre en los ejemplos iniciales es difícil encontrar una situación de la vida diaria en la que resulte natural la utilización de la métrica discreta. Su utilidad se reduce principalmente a ciertos fines teóricos. Uno de ellos es que permite demostrar que en cualquier conjunto es posible definir al menos una métrica.

Al par formado por un conjunto X y una métrica d se lo llama *espacio métrico*. Este concepto fue definido por primera vez por Maurice Fréchet (1878-1973) en 1906 como parte de su tesis doctoral titulada *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (*Sobre algunos puntos del cálculo funcional*) aunque fue Felix Hausdorff (1868-1942) quien inventó el nombre "espacio métrico" y quien creó la teoría sobre espacios topológicos y métricos en *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).

Como hemos visto, en el mismo conjunto X pueden definirse distintas métricas, resultando por lo tanto distintos espacios métricos con los mismos puntos. Diremos que dos espacios métricos (X, d) y (X', d') pueden considerarse iguales (desde el punto de vista de la teoría de espacios métricos) si existe una función biyectiva $f: X \rightarrow X'$ tal que $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo los valores de x, y en X.

La norma de un vector

Cuando trabajamos con espacios vectoriales, es importante tener una noción de la "longitud" de cada vector. A esta "longitud" se le pedirá que verifique determinadas propiedades, como por ejemplo que sea un número positivo, que el número asignado sea cero sólo en el caso de que el vector sea el vector nulo; que si multiplicamos a un vector por un escalar su "longitud" se multiplique por el módulo de ese escalar, y que cumpla que si tomamos la "longitud" de un vector que sea la suma de otros dos, esta "longitud" sea menor que la suma de las "longitudes" de cada uno de los vectores originales. Si recordamos "la regla de la poligonal" que utilizamos para sumar vectores en R^2, la idea es la misma que la de la desigualdad triangular.



A esta "longitud" se la denomina norma del espacio vectorial. Expresemos simbólicamente lo antedicho:

Sea un espacio vectorial V [1], una norma en V es una función $\|\ \|: V \to R$, que cumple las siguientes condiciones para $x, y \in V$; $k \in R$:

1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$
2) $\|k . x\| = |k| . \|x\|$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Es fácil comprobar que a partir de cualquier norma se induce una distancia en V, para ello sólo tendremos que definir $d(x, y) = \|x - y\|$. Se puede comprobar que esa función cumple efectivamente las propiedades para ser una distancia. Sin embargo, debemos destacar que no toda distancia en un espacio vectorial está definida a través de una norma. La condición necesaria y suficiente para que ello suceda es que la distancia d en un espacio vectorial V cumpla que $d(kx, ky) = |k|d(x,y)$, si esto se cumple d está inducida por la norma definida por $\|x\| = d(x,0)$.

Ahora bien, la métrica discreta, por ejemplo en R^2, no cumple la propiedad especificada, es decir, no vale que para todo $x, y \in V$; $k \in R$, $d_t(kx, ky) = |k|d_t(x,y)$ (es muy fácil hallar contraejemplos) y por lo tanto concluimos que esta métrica no está inducida por norma alguna. Puede verse también que, a menos que P = (0,0) la que hemos llamado d_P tampoco es una distancia inducida por una norma.

Al par $(V, \|\ \|)$ se lo denomina espacio normado. Esta noción fue brillantemente explicitada por Stefan Banach (1892-1945), en su trabajo de tesis de 1920, sacando a la luz una idea que estaba implícita en muchos artículos anteriores sobre análisis funcional; por ejemplo ya en sus trabajos de 1916-1918, Frigyes Riesz (1880-1956) había expresado sus razonamientos en términos de la norma del espacio.

R^2 es un espacio vectorial y los dos primeros ejemplos del comienzo de este artículo corresponden a distancias inducidas por normas en R^2. La distancia euclídea es inducida por la llamada norma euclídea que se define como $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$, si $x=(x_1, x_2)$. La que hemos llamado d_1 es la distancia inducida por la norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Estas dos normas son casos particulares de un teorema según el cual: si p es un número mayor que 1 la expresión $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$ define una norma en R^2.

Otra norma posible es $\|x\|_\infty = \text{máx}\ \{|x_1|, |x_2|\}$ que recibe ese nombre pues puede probarse que para cada x fijo $\|x\|_p$ tiende a $\|x\|_\infty$ cuando p tiene al infinito.

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

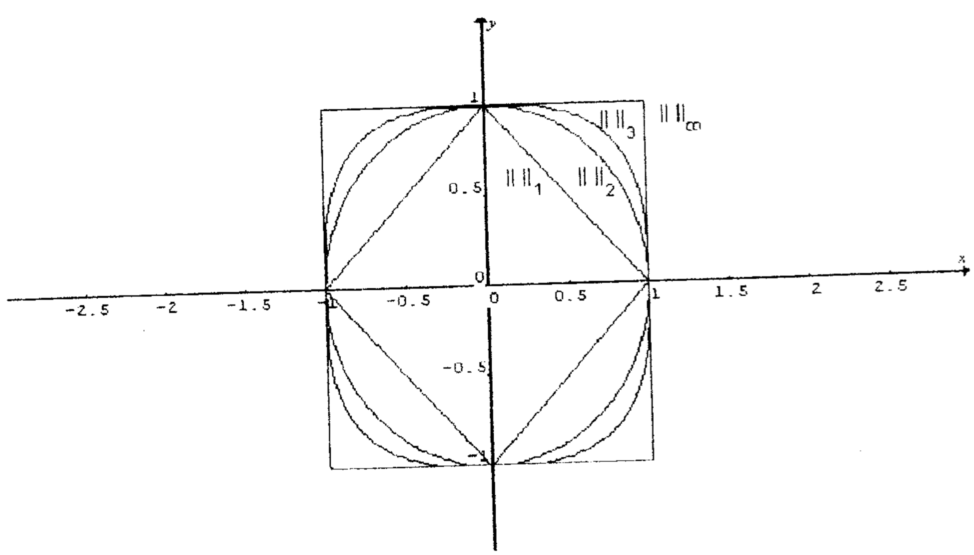
$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$

....

$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$

$\|x\|_\infty = \text{máx}\ \{|x_1|, |x_2|\}$

Veamos a continuación, gráficamente, cuáles son los puntos que distan 1 del origen de coordenadas tomando como espacio vectorial a R^2 y las diversas normas que hemos enumerado:



Por otra parte, estas normas pueden extenderse en forma natural a R^n con $n \in N$ cualquiera. Hemos visto que para $n \geq 2$ en R^n hay más de una norma, ¿habrá entonces más de una norma en R?

La norma usual en R es la que conocemos con el nombre de módulo o valor absoluto. De hecho, para el caso de R todas las normas $\| \|_p$ y la norma $\| \|_\infty$ coinciden con el módulo, ¿es entonces el módulo la única norma que existe en R?. La respuesta es no ya que $\|x\| = a|x|$ (donde $a > 0$ es un número cualquiera) también define una norma. Si embargo, sí es cierto que toda norma en R es de la forma $a|x|$ para algún $a > 0$. Lo mismo ocurre en Q. Sin embargo, en este último caso es posible definir otras funciones que, aunque no son normas en el sentido que hemos definido, tienen muchas de sus propiedades. En particular permiten definir distancias. Se trata de las llamadas normas p-ádicas.

Para definirlas, sea p ahora un entero primo y a un número entero distinto de cero, llamemos ord_p al exponente de la mayor potencia de p que divide al número a. Por ejemplo: $ord_2\ 12 = 2$; $ord_5\ 35 = 1$; $ord_5\ 250 = 3$, $ord_5\ 16 = 0$. Definimos entonces la $| |_p$ en Q del siguiente modo:

$$| x |_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{ord_p x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

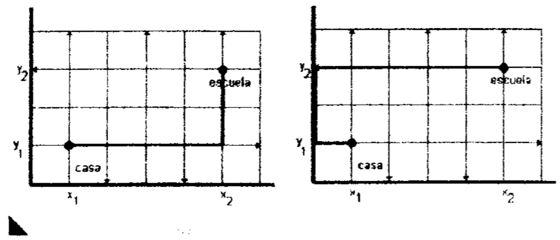
Estas "normas" (una distinta para cada primo) cumplen las siguientes propiedades para x, y $\in Q$:

1) $|x|_p \geq 0$; $|x|_p = 0$ si y sólo si $x = 0$
2) $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p$
3) $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

Por otra parte, fue Alexander Ostrowski (1893-1986) quien demostró que toda función que cumpla esas tres propiedades o bien es el módulo o bien es $| |_p$ para algún primo p.

Algo más sobre distancias en la realidad

Para finalizar veamos que no todas las distancias con las que nos relacionamos en nuestra vida cotidiana, cumplen con la definición de distancia que tomamos en matemática. Ya vimos, al comienzo de la nota, como calcular la distancia entre dos puntos en una ciudad (en nuestro ejemplo entre la escuela y la casa), pero la situación cambia si viajamos en automóvil y las calles no son todas de doble sentido.
Para ir de la casa a la escuela tendremos que recorrer como mínimo 6 cuadras, mientras que para ir de la escuela a la casa deberá recorrer como mínimo 8 cuadras. En este ejemplo no se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$.



* Profesora en Matemática y Astronomía egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

(1) Un espacio vectorial se compone de: un cuerpo de escalares y un conjunto de vectores; una adición de vectores: asociativa, conmutativa, con elemento neutro y opuesto; y una multiplicación por escalares: con neutro, asociativa y distributiva (para los escalares y los vectores).

Bibliografía:

- BELL, E. T. *Historia de las Matemáticas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1995.
- COTLAR, Misha – CIGNOLI, Roberto. *Nociones de espacios normados*, Buenos Aires, EUDEBA, 1967.
- KOBLITZ, Neal. *P-adic Numbers, p-adic Análisis, and Zeta-Functions*, Springer-Verlag.
- MARTINÓN, Antonio (editor). *Las Matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, Madrid, Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas - Nivola Libros y ediciones, 2000.
- SPRECHER, David. *Elements of Real Análisis*, New York, Academic Press, 1970.
- WAWRZYNCZYK, Antoni – DELGADO, Joaquín. *Introducción al Análisis*, México D.F., Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, 1993.
- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

El tamaño del Sistema Solar

Pablo Ingrassia *

Hoy en día, todo el mundo está familiarizado con los juguetes construidos a escala, desde aviones para armar hasta sofisticadas maquetas, pero: ¿alguien ha imaginado alguna vez un Sistema Solar a escala?

Pues, la única razón para hacerlo es tomar conciencia de las enormes distancias que hay entre cada uno de los planetas; pero no resulta para nada práctico tratar de conservar una maqueta en el fondo de la casa.

Para tener una idea más concreta de lo que estamos comentando, pensemos en un planeta Tierra representado por una bolita de vidrio de 1 cm de diámetro. La Luna sería una diminuta pelotita de 2,7 mm de diámetro girando alrededor de la Tierra a 30 cm de distancia.

El Sol, un enorme globo de casi 1,10 m de diámetro ubicado a casi 12 km de la Tierra; vale decir que si se lo ubicara en medio de la Plaza del Congreso, en Buenos Aires, la Tierra estaría apenas pasando la Av. Gral. Paz, en Vicente López.

El planeta Plutón, cuya órbita marca el límite del Sistema Solar, sería una bolita de 1,8 mm de diámetro girando a 462 km de distancia del Sol. Manteniendo al Sol enfrente del Congreso, Plutón andaría por la ciudad de Miramar.

Conservando siempre la misma escala y tomando al diámetro de la Tierra, de 12.756 km igual a 1 cm, los restantes planetas y sus respectivas ubicaciones desde el Sol serían:

Mercurio: una pelotita de 3,8 mm de diámetro girando a 4,5 km de distancia del Sol.

Venus: contando con 9,4 mm de diámetro y ubicado a 8 km del Sol.

Marte: 0,5 cm de diámetro y a 18 km del Sol.

Júpiter: el planeta más grande del Sistema Solar, con 11 cm de diámetro y a casi 61 km de distancia.

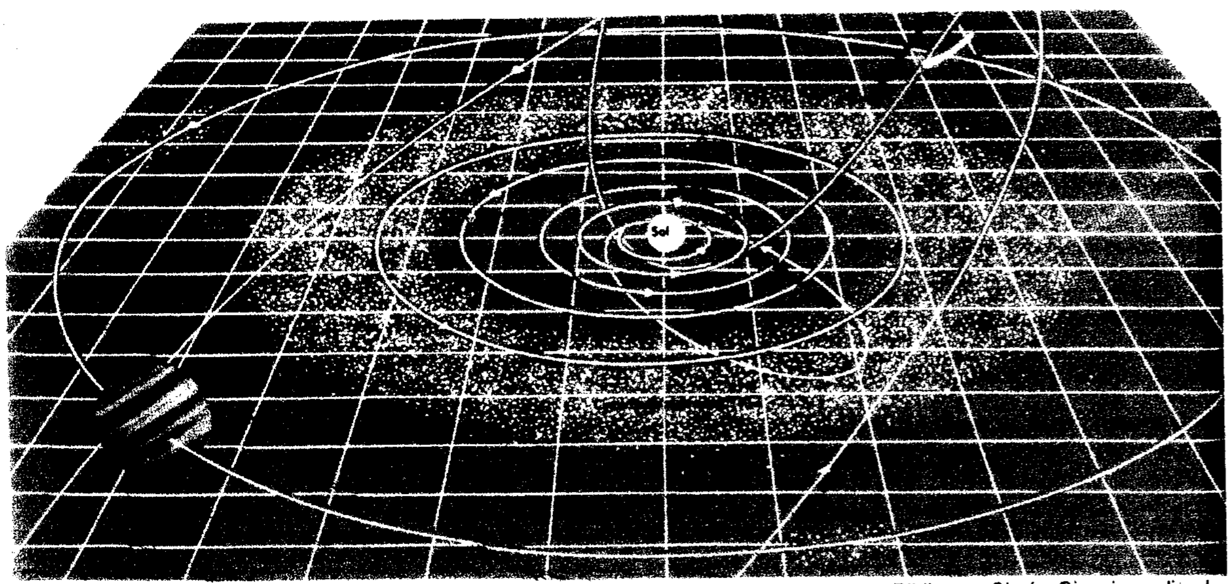
Saturno: 9 cm y alejado 110 km del Sol.

Urano: 4 cm y a escasos 220 km del Sol.

Neptuno: 3,8 cm y a una distancia del Sol de 350 km aproximadamente.

Y recién estamos dejando el Sistema Solar. Las estrellas se hallan todavía mucho más lejos.

La distancia entre el Sol y Plutón es de 5.900 millones de km, es decir, 5.900.000.000 km o $5{,}9.10^{9}$ km.



Fuente: Biblioteca Clarín. Ciencia explicada.

La estrella más cercana al Sol, Alfa del Centauro, se encuentra a 37.800.000.000.000 km o $3{,}78.10^{13}$ km, es decir, casi 38 billones de km. ¿No marea un poco?

Por ello se ha adoptado al año luz como unidad de medida para grandes distancias.

La luz se desplaza en el vacío a la increíble velocidad de 300.000 km/seg; nada conocido la supera. La mayor velocidad alcanzada por un vehículo construido por el hombre fue de aproximadamente 18 km/seg (65.000 km/h).

Una hora tiene 3.600 seg; un día tiene 86.400

seg, y un año nada menos que 31.536.000 seg. Un año luz es la distancia que recorre la luz al cabo de un año (medida en km), o sea, pasados 31.536.000 segundos. Esto equivale a $9{,}46.10^{12}$km, o bien 9.460.000.000.000 km (casi 9,5 billones de km).
Haciendo una simple regla de tres, se concluye que un viaje desde el Sol hasta la estrella Alfa del Centauro, demoraría algo más de 4 años si uno se desplazara a la velocidad de la luz.
Por eso se dice que la distancia a la estrella más próxima al Sistema Solar es de 4 años luz.
Volviendo al ejemplo del Sistema Solar a escala, ahora que tenemos datos concretos acerca de la distancia a la que se encuentra, Alfa del Centauro debería ubicarse a 3.000 millones de km, es decir, en la misma órbita del planeta Urano.
Y aquí se termina el modelo a escala porque la mayoría de las estrellas que vemos en el cielo se hallan mucho más lejos que Alfa del Centauro.
La estrella más brillante de todo el cielo, Sirio, está a 8 años luz.
La estrella Antares, en la constelación de Escorpio, se encuentra a más de 300 años luz.
Las galaxias están muchísimo más lejos: la galaxia espiral M-31 en Andrómeda se ubica a más de 2 millones de años luz, vale decir que hoy en día se la puede observar como era antes de que el hombre apareciera sobre la Tierra.
El cúmulo de galaxias de la constelación de Virgo llega a 60 millones de años luz, tal cual era en plena época de los dinosaurios.
Y luego de este comentario me despido hasta la próxima ya que tantas cifras *desorbitantes* me producen vértigo.

* Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Un 18 de febrero...

...de 1201 nació en Tus, Khorasan (actualmente Iran) Nasir al-Din al Tusi, y falleció el 26 de junio de 1274 en Kadhimain, cerca de Bagdad, actualmente en Irak.
Una de las contribuciones más importantes de al-Tusi fue la creación de la trigonometría como disciplina matemática por sí misma en lugar de ser sólo una herramienta para cálculos astronómicos.
Como se establece en la biografía del *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990): *Este trabajo es realmente el primero en la historia que trata a la trigonometría como una rama independiente dentro de la matemática pura y el primero en el cual se desarrollan los seis casos para triángulos rectángulos esféricos.*
Su trabajo también contiene la famosa fórmula del seno para triángulos planos:

$$a/\text{sen } A = b/\text{sen } B = c/\text{sen } C$$

Otra contribución de al-Tusi a la matemática se registra en su manuscrito fechado en 1265 concerniente al cálculo de raíces n-ésimas de números enteros. En realidad, se cree que este manuscrito es una versión de los métodos que habían sido desarrollados por la escuela de al-Karaji. En dicho manuscrito determina los coeficientes del desarrollo de cualquier potencia del binomio y la posibilidad de construir con ellos el que hoy conocemos como triángulo de Pascal.
También escribió sobre minería, medicina, filosofía y ética. Tuvo una gran cantidad de discípulos, quienes a su vez hicieron importantes contribuciones, por ejemplo, Qutb ad-Din ash-Shirazi quien dio la primera explicación matemáticamente aceptable de la formación del arco iris.
La influencia de al-Tusi, especialmente en el Islam Oriental, fue inmensa. Probablemente, si tomamos en cuenta todos los campos del conocimiento, fue más responsable del renacimiento de la ciencia islámica que cualquier otra contribución individual. [biografía del *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990)]

Fuente: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

¡Rayos! Otra vez Fibonacci

Marcela Bartomeo (*) y Fernando Chorny (**)

En el capítulo 13 de su libro "Circo Matemático", Martin Gardner cita un problema estudiado por Leo Moser.

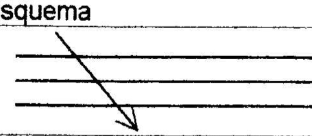
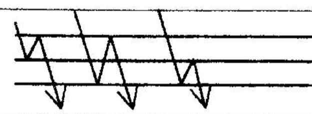
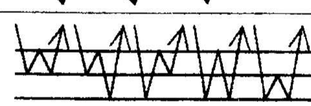
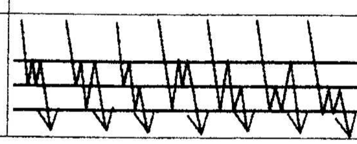
Supongamos que tenemos dos láminas de vidrio superpuestas, de tal manera que quedan determinados tres planos paralelos: la superficie superior de la primera lámina (1), la superficie de contacto entre la primera y la segunda lámina (2) y la superficie inferior de esta última (3) Ver, más abajo, figuras del cuadro.

Un haz de luz que incida oblicuamente en el sistema formado por estas láminas sufrirá reflexiones y/o refracciones, según las leyes de la óptica que en realidad no incumben a la naturaleza matemática de este problema.

Se trata de contar el número de trayectorias posibles que pueda seguir el haz luminoso en función del número de reflexiones que experimente a lo largo de su recorrido. Descartaremos la posibilidad trivial de que el primer reflejo se produzca sobre la superficie (1), al llegar el haz, pues en tal caso dicho haz no ingresará al sistema.

Para poner mayor claridad, ilustremos algunos casos. Siempre consideraremos que el rayo incide inicialmente desde arriba hacia abajo.

En el siguiente cuadro se muestran el número de reflexiones del rayo, el correspondiente número de trayectorias posibles, un esquema para mostrar esas trayectorias y lo que llamaremos la "sucesión de reflejos" del rayo. Cada término de la sucesión de reflejos de un rayo representa el número de superficie en la que se ha ido reflejando.

Reflexiones	Trayectorias	Esquema	Sucesión de reflejos
0	1		-
1	2		2 3
2	3		21 31 32
3	5		212 312 323 213 313
4	8		2121 3121 3231 2131 3131 3232 2132 3132

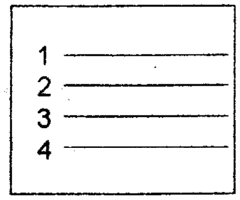
No en vano el capítulo del libro de Gardner en el que aparece este problema se titula "Números de Fibonacci y de Lucas". Puede observarse que, a medida que aumentan los reflejos, el número de trayectorias distintas se va ajustando notablemente a la sucesión de Fibonacci (a excepción del primer término): 1, 2, 3, 5, 8 trayectorias posibles.

Como todo problema resuelto abre las puertas de un nuevo problema por resolver, hemos pensado en ir un poco más allá y preguntarnos:

¿Cuál será el número de trayectorias posibles para un rayo si variamos el número de láminas a 4, 5,...o n?

El caso de los cuatro planos

Nos ocuparemos en detalle del caso de las 3 láminas (que determinan 4 planos)



Un enfoque del problema consiste en organizar el conteo de las sucesiones de reflejos (en adelante, SR). El rayo comienza llegando desde arriba y puede reflejarse en los planos 2, 3 ó 4. Estos son los posibles comienzos de toda SR.

Después de su primer reflejo, el rayo se dirige hacia arriba y, por lo tanto, se reflejará en un plano de número menor que el del plano del que proviene. Luego bajará e irá a reflejarse en una placa de número mayor y así sucesivamente. Vamos a caracterizar las SR de una manera que nos permita pensar de aquí en más solamente en la construcción de sucesiones independizándonos del problema físico del haz luminoso y de las láminas de vidrio:

En general, toda SR $a(n) = a_1, a_2, \ldots, a_n$ tiene estas propiedades:

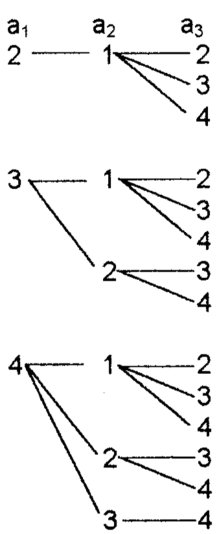
1) $1 \leq a_i \leq 4 \quad \forall i \in N$

2) $a_n > a_{n+1}$ si n es impar

3) $a_n < a_{n+1}$ si n es par

En palabras: el subíndice n denota el orden de reflejo del rayo. A un reflejo de orden impar lo sucede un número menor (porque el rayo viaja desde abajo hacia arriba) y a un reflejo de orden par lo sucede un número mayor (porque el rayo viaja de arriba hacia abajo). Hecha esta salvedad, nos dedicaremos a contar las SR arriba caracterizadas.

Un diagrama de árbol nos puede ayudar a armar las sucesiones:



212
213
214

312
313
314
323
324

412
413
414
423
424
434

Un posible camino para contar las SR es observar que el número de ramas del árbol que genera cada término (el número de reflejos que genera cada plano) depende del valor numérico de dicho término y de la paridad de su subíndice. Por ejemplo, el número 3 genera dos ramas (dos trayectorias del rayo) desde un término de orden impar (31 y 32, el rayo va de abajo hacia arriba), pero genera una sola desde un término de orden par (34, el rayo va de arriba a abajo).

Para saber cuántos nuevos reflejos generará cada plano nos interesa, entonces, saber en qué placa se reflejó el rayo por última vez, es decir, de dónde proviene.

Armaremos el siguiente cuadro en el que clasificaremos las SR según el número en el que terminan. Luego estudiaremos un algoritmo que nos permita completarlo.

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1			X_1		
	2			X_2		
	3			X_3		
	4			X_4		
	total			X_t		

El cuadro, una vez completo, se leerá de esta manera:

X_1 es el número de sucesiones cuyo 3° término es el número 1 (el número de rayos que hacen su 3° reflejo en el plano número 1)

X_2 es el número de sucesiones cuyo 3° término es el número 2 (el número de rayos que hacen su 3° reflejo en el plano número 1).

Análogamente, X_3 y X_4.

X_t es el número de sucesiones formadas en total por tres términos y es el valor S(3), siendo S(n) el número de trayectorias posibles para los n reflejos de un rayo que ingresa al sistema de cuatro planos. (*)

Describimos ahora el algoritmo de construcción de la tabla:

Completamos la primera columna de la tabla, de arriba a abajo:

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1	0		0		0
	2	1				
	3	1				
	4	1				
	total	3				

Ninguna SR puede terminar en 1 porque ningún reflejo puede producirse en el primer plano (esto ocurrirá en todos los términos de orden impar).

El único reflejo puede producirse en el plano 2, o bien en el 3, o bien en el 4.

Hay 3 SR: una termina en 2, una en 3 y la otra en 4.

Completamos la segunda columna de abajo hacia arriba:

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1	0	3	0		0
	2	1	2			
	3	1	1			
	4	1	0		0	
	total	3				

Ninguna SR puede terminar en 4 porque el rayo viaja hacia arriba (esto ocurrirá en todos los términos de orden par).

Hay una sola SR que puede terminar en 3: la que proviene de 4.

Hay 2 SR que pueden terminar en 2: la que proviene de 3 más la que provenía de 4.

Análogamente, hay 3 SR que terminan en 1.

Observe el lector que el símbolo ↑ significa que en el casillero en el que termina la flecha está la suma de los otros dos casilleros que la flecha atraviesa.

Con este algoritmo podemos completar el resto de la tabla. Las columnas impares se completan desde arriba hacia abajo. Recomendamos al lector terminar de completar su tabla para luego compararla con la siguiente:

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1	0	3	0	14	0
	2	1	2	3	11	14
	3	1	1	5	6	25
	4	1	0	6	0	31
	total	3	6	14	31	70

Así, la sucesión S(n) buscada es:

S(n) = 1, 3, 6, 14, 31, 70, ... con S(0)=1 que no aparece en la tabla. Veamos que el algoritmo de construcción se inicia una vez fijada la primera columna. Sigamos el procedimiento indicado para construir una tabla en forma algebraica. Ese camino nos llevará al hallazgo del término general de la sucesión S(n).

Comenzamos por completar los ceros de la tabla y llamar a, b y c a los valores de la primera columna. (Nosotros sabemos que a = b = c = 1).

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1	0		0		0
	2	a				
	3	b				
	4	c	0		0	
	total	S(1)				

Sigamos ahora el algoritmo de las flechitas.

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1	0	a+b+c	0	3a+5b+6c	0
	2	a	b+c	a+b+c	2a+4b+5c	3a+5b+6c
	3	b	c	a+2(b+c)	a+2b+3c	5a+9b+11c
	4	c	0	a+2b+3c	0	6a+11b+14c
	total	S(1)	S(2)	S(3)	S(4)	S(5)

Resulta: S(1) = a+b+c.
S(3) = 3a+5b+6c

S(2) = a+2b+3c
S(4) = 6a+11b+14c
S(5) = 14a+25b+31c

Reemplazando, según estas últimas ecuaciones, resulta la siguiente tabla:

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1	0	S(1)	0	S(3)	0
	2	a	b+c	S(1)	2a+4b+5c	S(3)
	3	b	c	a+2b+2c	S(2)	5a+9b+11c
	4	c	0	S(2)	0	S(4)
	total	S(1)	S(2)	S(3)	S(4)	S(5)

Observando las mismas ecuaciones, esta tabla puede rescribirse una vez más:

		Reflejo número				
		1	2	3	4	5
Termina en	1	0	S(1)	0	S(3)	0
	2	a	b+c	S(1)	S(3)–S(1)	S(3)
	3	b	c	a+2b+2c	S(2)	S(4)–S(2)
	4	c	0	S(2)	0	S(4)
	total	S(1)	S(2)	S(3)	S(4)	S(5)

Con lo que tenemos, retomando que a = b = c = 1 y que S(0)=1, la sucesión definida recurrentemente de la siguiente manera:

S(0)=1
S(1)=3
S(2)=6
S(3)=14
S(4)=2S(3)+S(2)-S(1)
S(5)=2S(4)+S(3)-S(2)
...
S(n) =2S(n-1)+S(n-2)–S(n-3)

Esto resuelve el problema para el caso de los 4 planos. La construcción de las tablas correspondientes a más planos es completamente análoga y sumamente sencilla de programar en una planilla de cálculo. Así lo hemos hecho para varios casos que se exhiben a continuación. Sugerimos al lector construir algunas de las tablas correspondientes y verificar estos resultados. En particular, la tabla de 3 filas genera la sucesión de Fibonacci.

Primeros 15 términos para:

4 planos: 1, 3, 6, 14, 31, 70, 157, 353, 793, 1782, 4004, 8997, 20216, 45425, 102069, 229347...

5 planos: 1, 4, 10, 30, 85, 246, 707, 2037, 5864, 16886, 48620, 139997, 403104, 1160693, 3342081...

6 planos: 1, 5, 15, 55, 190, 671, 2353, 8272, 29056, 102091, 358671, 1260143, 4427294, 15554592, 54648506, 191998646...

7 planos: 1, 6, 21, 91, 371, 1547, 6405, 26585, 110254, 457379, 1897214, 7869927, 32645269, 135416457, 561722840...

Otro enfoque, interpretando las tablas

Sabemos que en la famosa sucesión de Fibonacci los dos primeros términos se definen, F(1) = F(2) = 1, y luego cada término se obtiene de la suma de dos términos anteriores (los dos inmediatamente anteriores).
Un enfoque del problema, debido a Gustavo Piñeiro, consiste en considerar a las sucesiones S(n) como hijas del mismo principio: el de definir en forma arbitraria un determinado número de términos iniciales y luego calcular cada término como la suma de otros dos anteriores, (el inmediato anterior más otro que se encuentra aún más atrás).
Sea b(n) la sucesión cuyos tres primeros términos son 1, 2, 3, (es decir, b(1) = 1, b(2) = 2, b(3) = 3) y a partir de allí se sigue la siguiente regla:

b(n) = b(n-1) + b(n-2) si n = 2k
b(n) = b(n-1) + b(n-4) si n = 2k + 1

La sucesión comienza con 1, 2, 3, 5, 6, 11, 14, 25, 31, 56, 70, ...

Diremos que esta sucesión es del tipo 1, 3, 1, 3, 1, 3,... Esto significa que cada término es la suma del término precedente y otro que se halla más atrás. El 1, 3, 1, 3 significa que ese otro término se obtiene la primera vez salteando un término hacia atrás, luego salteando tres hacia atrás, luego uno, luego tres, etc. Esto se puede comprobar en la sucesión (hágalo).

De esta sucesión tomamos el primer término y luego vamos salteando uno, es decir, nos quedamos con los términos impares: 1, 3, 6, 14, 31, 70,... así llegamos a la sucesión S(n) para 4 planos que habíamos definido.

Podemos utilizar el mismo criterio de notación para definir las sucesiones S(n) correspondientes a más de 4 planos. Por ejemplo, para 5 planos, construimos la sucesión que comienza con 1, 2, 3, 4 y que luego es del tipo1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5,... Tenemos: 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 19, 26, 30, 56, 75, 85, 160, 216, 246,...

De ella tomamos el primer término y luego vamos saltando dos: 1, 4, 10, 30, 85, 246, ... así llegamos a la sucesión S(n) para 5 planos que viene dada más arriba.

Análogamente (y poder usar aquí esta palabra simplificadora que tanto gusta a los matemáticos es sumamente importante porque significa que ha aparecido una regularidad), suponemos la forma de construir la sucesión S(n) para 6 planos: sus 5 primeros términos son 1, 2, 3, 4, 5 y luego es del tipo 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, ... Tenemos ahora: 1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14, 15, 29, 41, 50, 55, 105, 146, 175, 190

De ella tomamos el primer término y luego vamos saltando tres: 1, 5, 15, 55, 190 ... así llegamos a la sucesión S(n) para 6 planos que viene dada más arriba.

La generalización de esta regularidad que ha aparecido consiste en suponer que la S(n) para n planos se construiría definiendo los primeros n-1 términos como 1, 2, 3, ...,n-1. A partir de entonces la sucesión sería del tipo 1, 3, 5, 7,...,2n-5, 1, 3, 5, 7, ..., 2n-5 y de ella tomaríamos el primer término para luego ir saltando de a n-3.

Esta última consideración, como la construcción generalizada propuesta para las tablas, queda, en lo que respecta a este artículo, el limbo de la conjetura. Cabe mencionar que existe en Internet una página que funciona como un gran catálogo de sucesiones. Su dirección es **http://www.research.att.com/~njas/sequences/** En ella, puede hacer su consulta todo curioso que se haya topado con alguna sucesión determinada, en el curso de sus divagaciones mentales. Así lo hicimos y tuvimos la satisfacción y el desencanto de encontrar estas sucesiones. Satisfacción porque corroboramos el resultado correspondiente al problema del reflejo en los cuatro planos. Desencanto porque supimos que no habíamos sido los primeros en ocuparnos de plantearlo y resolverlo. Existen en la página referencias de bibliografía muy específica (y no en español), como así también de los autores que han compartido con nosotros (sin que los conozcamos) el placer de dedicar algunas tardes a la vertiginosa persecución de un rayo de luz travieso. ◣

(*) Estudiante de la carrera de profesora en Matemática y Astronomía en el I.S.P. "Dr. J. V. González"
(**) Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. J. V. González"

Bibliografía:

- GARDNER, Martin. *Circo Matemático*, Madrid, Alianza Editorial, 1983.
- http://www.research.att.com/~njas/sequences/

Comentarios de textos

Jorge A. Martínez *

***Una lectura matemática del pensamiento posmoderno*, Vladimir Tasic, Colihue, 2001, 239 páginas.**

Vladimir Tasic, nacido en Yugoslavia en 1965 y nacionalizado canadiense, es doctor en Matemática y ha dictado cursos sobre Lógica, Fundamentos e Historia de La Matemática en diversas universidades. Por otro lado Tasic posee una sólida formación en Filosofía contemporánea, lo cual le permite conectar con prolijidad las temáticas mencionadas. Tomando como punto de partida a las ideas matemáticas de Kant, el autor lanza una mirada novedosa y aguda sobre las ideas contemporáneas a través del ojo de un matemático.

El intercambio fluido de ideas y conceptos entre Matemática y Filosofía es el eje conductor de este texto, donde resulta muy interesante el análisis que hace Tasic sobre el desarrollo de las ideas del romanticismo que condujeron a una crítica de la Lógica y la Matemática Clásica del siglo XX y el regreso de esas críticas desde la óptica del posmodernismo.

No hay duda de que el objetivo central del texto es la invitación a la polémica, sin soslayar el antagonismo entre dos entidades que el autor reconoce difíciles de definir: *Ciencia y posmodernismo.*

Tasic se propone entonces rastrear con profundidad y detalle temas centrales como Identidad e Incompletitud, desde el programa formalista de Hilbert hasta las nociones más nuevas de Inteligencia artificial, en una ordenada secuencia, donde desmenuza ideas e ideólogos del siglo XX en acertada selección.

Resulta particularmente notable la exposición crítica de las ideas *intuicionistas* en Matemática a las que el autor adscribe una importancia especial para comprender las claves del texto.

La obra resultará muy atractiva para aquellos que se interesan en Fundamentos de la Matemática y es razonable pensar que ampliará horizontes y generará revisiones y replanteos sobre la relación que existe, desde los griegos hasta hoy, entre la Matemática y la Filosofía.

***La mente nueva del emperador*, Roger Penrose, Fondo de Cultura Económica, México, 1996, 1ra edición, 568 páginas.**

En el prefacio de esta obra, el conocido Martin Gardner opina que es muy difícil que un matemático o físico eminente pueda escribir un libro que sea accesible a un amplio público, pero que Penrose ha logrado esta meta con holgura y que por ello esta obra va en camino de convertirse en un clásico de divulgación científica.

Uno no puede menos que suscribir esta opinión tan autorizada y agregar, so pena de omisión, que este es un texto de alta divulgación y que se necesita alguna formación en Matemática, Física y Astronomía para leerlo con provecho, y extraer de él todo lo que este admirable libro puede brindar.

La obra en sí, se compone de diez fornidos capítulos que exponen aspectos esenciales del pensamiento matemático y físico actual como ser: Algoritmos y máquinas de Turing, inteligencia artificial, matemática recursiva y no recursiva, relatividad general y teoría cuántica.

El propósito del libro es analizar la posibilidad de una *inteligencia artificial fuerte*. (¿Podrá una computadora igualar a la mente humana?). Es sabido que hay computadoras que juegan altos niveles de ajedrez, por ejemplo, pero dudamos de que comprendan el juego como un ser humano lo haría.

Para el autor existen facetas del pensamiento humano que nunca serán imitadas por computadora alguna y para defender esta idea recurre a una amplia gama de conocimientos que van desde la Matemática recursiva y los algoritmos hasta el teorema de Gödel, pasando por los agujeros negros y la mecánica cuántica.

Penrose cuestiona aquí algunas de las ideas esgrimidas por los defensores de tal inteligencia artificial fuerte, pero para hacerlo necesita un detallado paseo previo por la historia científica del siglo XX y en este paseo no teme abordar temas que muchos consideran superfluos.

Los conocidos trabajos de Penrose sobre Cosmología, en colaboración con su amigo Stephen Hawking, parecen ser el germen de las notables páginas de los capítulos VII y VIII sobre problemas cosmológicos en tanto que los capítulos III y IV (Matemática y realidad, y Verdad, demostración e intuición) son unos verdaderos hallazgos de claridad en el intrincado universo del conocimiento actual.

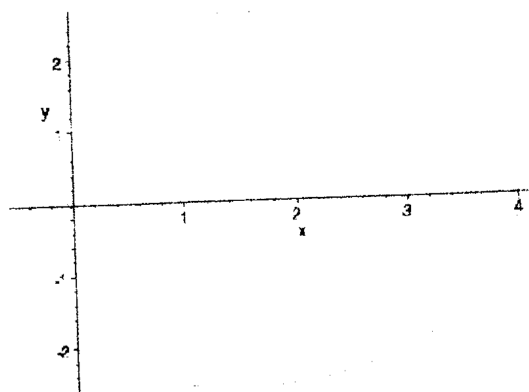
Recomendamos la lectura de esta obra sumando una modesta reflexión: un mundo multifacético y complejo como el de hoy no necesariamente requiera ideas sencillas para ser explicado.

Nota: Existe otra edición de este texto que mencionamos: *La nueva mente del emperador*, Roger Penrose, Editorial Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1995, 587 páginas.

* Profesor de Matemática, egresado del IES Nº 2 "Mariano Acosta".

Un 18 de marzo...

...de 1640 nació en Paris, Francia, Philippe de La Hire, quien murió el 21 de abril de 1718, en Paris. En 1708 calculó la longitud de la cardioide, que es una curva que se forma como el lugar geométrico de un punto en la circunferencia de un círculo que rueda alrededor de la circunferencia de otro círculo de igual radio. El nombre, como se ve en el dibujo, hace referencia a la "forma de corazón".



$(x2 + y2 - 2ax)2 = 4a2(x2 + y2)$

Otros ámbitos en los que hizo importantes contribuciones fueron la astronomía, la geodesia y la fisica. También produjo tablas dando los movimientos del Sol, Luna y los planetas. Un monte en la Luna le rinde homenaje, el monte La Hire.

... de 1796 nació en Utzenstorf, Suiza, Jakob Steiner quien contribuyó en gran medida al desarrollo de la geometría proyectiva. No le gustaba el álgebra ni el análisis y creía que los cálculos desplazaban al pensamiento mientras que la geometría lo estimulaba. Murió en Berna, Suiza el 1 de abril de 1863.

Fuente: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Problemas y juegos de ingenio

En esta sección les ofrecemos problemas y juegos de ingenio y los invitamos a compartir con nosotros sus soluciones (totales o parciales) así como también otros problemas que deseen proponer. Nuestra dirección postal es: Av. Juan B. Alberdi 667 - 7º B - C.P. 1424 - Ciudad de Buenos Aires - Argentina y nuestro e-mail: pineiro@datamarkets.com.ar

Problemas propuestos

1. Recta tangente:
(Colaboración de Gustavo Piñeiro)
Encuentren todos los números $a \neq 0$ para los cuales se verifica la siguiente propiedad: la recta tangente al gráfico de $y = x^2$ en $x = a$ tiene raíz igual a 7.

2. Primos y más primos:
(Colaboración de Jorge Martínez).
Encuentren todos los primos positivos p para los cuales p + 4 y p + 8 son también primos.

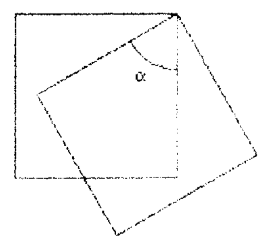
3. Uno, tres, cinco:
(Fuente: David Berman, College Math. Journal, Enero 1994).
Llamemos A al conjunto de todos los números enteros entre 1 y 100 inclusive, A = {1, 2, 3, ..., 100}. Es sabido (véase Aχioma 14) que hay $\binom{100}{6}$ = 1.192.052.400 subconjuntos de A que tengan exactamente seis elementos. Calculen cuántos son los subconjuntos de seis elementos de A en los cuales no aparecen dos números consecutivos. Por ejemplo, no estamos contando al subconjunto {1, 3, 11, 4, 67, 89}, ya que en él aparecen el 3 y el 4, pero sí contamos el subconjunto {1, 18, 11, 4, 67, 89}.

4. Reordenando letras
(Colaboración de Iván Skvarca).
Imagínense que los números del 1 al 10 están escritos con fichas del Scrabel. Uds. tienen por un lado tres letras que forman UNO, por otro tres letras distintas que forman DOS, más allá algunas letras que forman TRES, y así hasta el grupito que forma DIEZ. Las cuarenta y tres letras forman, en total, diez palabras.

Reacomode las letras para dejar formada la menor cantidad posible de palabras castellanas.

Cada letra forma parte de una sola palabra. No quedan letras sueltas. No están permitidas palabras extranjeras ni nombres propios; el resto vale todo. ¿Cuántas palabras logra armar?

5. Dos cuadrados:
(Colaboración de Jaime Poniachik)
Dos cuadrados iguales están superpuestos. ¿Cuánto debe valer el ángulo α para que el área de la parte superpuesta sea igual a la mitad del área de cualquiera de los dos cuadrados?



Solución pendiente de Aχioma 17

1. (Colaboración de Jorge Martínez).
Azur, guerrero de Caldea, visita la tumba de Eibal (notable caudillo militar). Un sacerdote le impide el paso y le dice:
– Para entrar aquí has de descomponer el medio en cuatro partes de la unidad distintas entre sí.
Azur contesta: 1/2 = 1/4 + 1/7 + 1/12 + 1/42
Azur entra y rinde respetos al gran soldado. Cuando sale, el sacerdote vuelve a pedirle:
– Para salir, haz lo mismo de distinta forma.
Azur invoca: 1/2 = 1/3 + 1/8 + 1/42 + 1/56, luego sale.
Amigo lector ¿puedes dar otras descomposiciones y, si el tiempo te es propicio, dar una receta para la partición del medio?

Solución del autor:

Para resolver el problema utilizamos la identidad: $1/a = 1/(a+1) + 1/a(a+1)$.
Tomando a = 2 obtenemos 1/2 = 1/3 + 1/6.
Tomemos ahora a = 3 y sustituyamos 1/3 en la igualdad obtenida: 1/2 = 1/4 + 1/12 + 1/6. Reemplacemos 1/4 y entonces 1/2 = 1/5 + 1/20 + 1/12 + 1/6. Este procedimiento puede continuarse tantas veces como queramos para obtener infinitas particiones diferentes del medio.