Axioma

La revista de los profesores y estudiantes de Matemática

Apuntes sobre... (Pág. 4)

¿Es posible, aunque sea en teoría, programar una computadora de tal modo que pueda resolver cualquier problema matemático?

¿Qué es exactamente un algoritmo?

¿Existen funciones perfectamente definidas para las cuales no hay ningún algoritmo que permita calcularlas?

ISSN 1515-744X
9 771515 744000

Año 3 - Número 16

Aχioma Nº 16

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de Matemática, de venta exclusiva por suscripción. Hecho el depósito que marca la Ley.

Directores y Propietarios
Fernando Chorny
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Gustavo Ernesto Piñeiro
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Pablo Bonucci
Jorge Martínez

Dirección postal
Av. Belgrano 2654 - 1º "6"
(1096) Buenos Aires
Argentina

Correo electrónico
axioma@nalejandria.com

En internet
www.nalejandria.com/axioma

Impresión y distribución
Agencia Periodística Cid
Avda. de Mayo 666, Capital Federal, Argentina.

Una publicación de
NAL Educativa S.A. (Nueva Alejandría)
Uruguay 1112;
Piso 6
Capital Federal (C1016ACD), Argentina
Teléfono: 5811-0121

Registro de la Propiedad Intelectual Nº 867689. ISSN: 1515-744X

Editorial

Hola amig@s: después de algo más de dos meses estamos otra vez junto a ustedes.
Les proponemos, como siempre, distintos caminos para acercarnos a la Matemática y su enseñanza: historia, literatura, curiosidades, problemas,...

Hemos recibido nuevas colaboraciones de lectores a los que mucho agradecemos; en la medida de lo posible, de acuerdo con el espacio disponible, y en tanto se ajusten a los temas que intentamos abordar en nuestra revista, se irán publicando.

No podemos pasar por alto dos importantes eventos ocurridos en estos meses: la RELME XV (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) organizado por la UNSAM y las Jornadas de Matemática organizadas por la F.C.E. y N. en el marco del 180.º aniversario de la fundación de la UBA.

En ambos se pudo apreciar el interés creciente por lograr un mejor acercamiento entre quienes se dedican a la enseñanza de la Matemática y los que desarrollan la investigación en el campo de la Matemática Pura. Se manifestó la preocupación por investigar y aplicar nuevas propuestas didácticas en los distintos niveles de escolaridad; fue notable la participación de muchas delegaciones extranjeras, con quienes esperamos mantener un fluido contacto.

Un párrafo aparte merecen nuestros colegas de todo el país que, patacón u otro invento mediante, siguen soportando (como nosotros) la injuria y el desprecio por su acción profesional. Con ellos, ¡toda nuestra solidaridad! porque la educación pública es la única garantía que nos ofrece un estado democrático para que la igualdad de posibilidades no sea sólo un *slogan*. No podemos permitir su destrucción.

Sumario

Septiembre/ Octubre de 2001

Lógica matemática (Primera parte)

"El lógico matemático Kurt Gödel fue uno de los gigantes intelectuales del siglo XX y, en el supuesto de que la especie se conserve, una de las pocas figuras contemporáneas que serán recordadas dentro de 1.000 años. [...] A pesar de que en todas las disciplinas es corriente alentar una cierta miopía profesional, lo cierto es que esta opinión no es fruto de un caso de autocomplacencia por parte de los matemáticos. Simplemente es la verdad." (John Allen Paulos, 1991).

por *Gustavo Piñeiro* *

En el año 1931 Kurt Gödel, por entonces un joven matemático checo casi desconocido [1], publicó un artículo titulado *Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas relacionados* [2]. En él, Gödel presentó al mundo matemático dos teoremas que, desde entonces y para siempre, marcaron un antes y un después en la historia de esta ciencia.

Hablando informalmente, el primero de esos teoremas dice que en todo sistema axiomático que sea suficientemente amplio como para contener a la aritmética elemental existen proposiciones indecidibles. Es decir, afirmaciones con significado tales que el sistema es incapaz de decidir si son verdaderas o falsas.

El segundo teorema dice esencialmente que un sistema axiomático es incapaz de demostrar su propia consistencia [3]. En particular, esto último significa que, aunque todos los matemáticos están convencidos de que su ciencia es coherente y que está completamente libre de paradojas, en realidad es imposible hallar una demostración matemática que avale esta convicción. Para los matemáticos esta creencia sólo puede ser simplemente una cuestión de fe.

Nuestra intención en esta serie de notas es exponer una demostración del primero de los dos teoremas mencionados. No será, sin embargo, la demostración dada por el mismo Gödel en su famoso artículo (una exposición de la cual puede encontrarse en el libro *El teorema de Gödel*, de E. Nagel y J. Newman, citado en la bibliografía). La demostración que mostraremos está basada en ideas completamente diferentes, las cuales fueron en realidad concebidas posteriormente a la demostración de Gödel, por lo que nuestra exposición de los conceptos no seguirá un orden cronológico. Para comenzar a comprender estas ideas debemos hablar de otro de los hombres más brillantes del siglo XX: el inglés Alan Mathison Turing.

Kurt Gödel (1906-1978)

El Entscheidungsproblem

En la conferencia inaugural del Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en el año 1900 el ilustre David Hilbert planteó veintitrés problemas matemáticos abiertos que, él esperaba, podrían ser resueltos a lo largo del siglo XX. De todos ellos, el décimo problema planteaba la siguiente pregunta: ¿es posible diseñar un **algoritmo** que permita hallar todas las soluciones de una ecuación diofántica cualquiera, o que, en su defecto, indique que tales soluciones no existen? Expresado en lenguaje moderno, el décimo problema de Hilbert pregunta si será posible, al menos en teoría, programar una computadora de tal modo que resuelva cualquier ecuación diofántica que le planteemos. [4]

Podemos transformar esta pregunta en un problema más general, conocido como el *Entscheidungsproblem*, y cuyo enunciado es el siguiente: dados los axiomas de alguna teoría matemática no trivial (por ejemplo, Teoría de Números, Topología o Geometría) ¿es posible diseñar un **algoritmo** que, dada una proposición cualquiera relativa a esa teoría, nos indique si la misma es verdadera, falsa o indecidible? Donde "verdadera" significa que la afirmación puede demostrarse a partir de los axiomas y "falsa" significa que su negación puede demostrarse a partir de los axiomas.

La tercera alternativa, que la afirmación sea indecidible, debe ser incluida debido, justamente, al primer teorema de Gödel. Esta tercera opción, por supuesto, no estaba presente en la mente de Hilbert en el año 1900. A principios del siglo XX imperaba la convicción de que, elegidos adecuadamente los axiomas, toda afirmación de una teoría dada sería siempre decidible. Enunciado en términos más dramáticos, el *Entscheidungsproblem* nos pregunta ¿es posible, aunque sea en teoría, diseñar una computadora que reemplace a un matemático?

Tanto en el planteo del décimo problema de la conferencia de París, como en el *Entscheidungsproblem*, la palabra clave es **algoritmo**. ¿Qué es un algoritmo? Intuitivamente, un algoritmo es una receta, una serie de instrucciones que nos dice cómo trabajar mecánicamente con cierto conjunto de datos. La palabra "mecánicamente" alude al hecho de que la receta debe indicarnos sin ambigüedades qué debemos hacer en cada circunstancia, nunca habremos de quedar librados a nuestra propia voluntad o criterio.

Un algoritmo recibe entonces una *entrada* o conjunto de datos iniciales (*input*, en inglés), procesa esos datos y, tras un tiempo finito, entrega como respuesta una *salida* o resultado (*output*, en inglés).

Como decíamos antes, la característica distintiva de un algoritmo es que el procesamiento de los datos se realiza en forma mecánica. Sin embargo, para tratar con el décimo problema o con el *Entscheidungsproblem* esta noción intuitiva no es suficiente. Necesitamos una definición matemáticamente precisa del concepto de **algoritmo**.

La máquina de Turing

En 1936, independientemente y con pocos meses de diferencia, se crearon dos definiciones matemáticas del concepto de algoritmo. La primera fue concebida por el lógico norteamericano Alonzo Church y la segunda, por el lógico inglés Alan Turing. [5] Aunque ambas concepciones son equivalentes, la idea de Turing resulta intuitivamente más clara, por lo que en toda la exposición sólo nos referiremos a ella. [6]

Para Turing el concepto de algoritmo puede asimilarse al de una máquina abstracta, una computadora teórica hoy conocida como **máquina de Turing**. Esta máquina consta en primer lugar de una cinta, en la cual se anotará la entrada y la salida del algoritmo. La cinta está dividida en celdas o casillas, cada una de las cuales puede contener un único símbolo (que indicaremos como #) o puede estar vacía. La cinta, además, es potencialmente infinita, esto significa que tanto hacia la derecha como hacia la izquierda podemos agregar todas las celdas que sean necesarias.

La cantidad inicial de símbolos # es siempre finita.

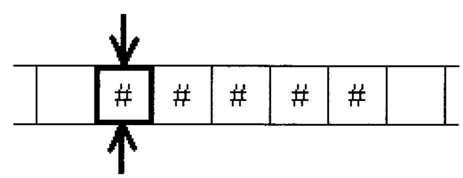


Figura 1

La máquina consta también de un cursor que puede ver el contenido de una casilla a la vez. En la **Figura 1** el cursor está observando el primer símbolo # de la izquierda. Cuando la casilla observada está vacía el cursor puede, si sus instrucciones así lo indican, anotar en ella un símbolo #. Si la casilla tiene ya un símbolo #, el cursor puede borrarlo dejando la casilla vacía. Diremos finalmente que el cursor puede moverse a razón de una casilla por vez, tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. Debido a la infinitud de la cinta, el cursor nunca encontrará límites para su movimiento.

Las acciones del cursor están dirigidas por un programa o conjunto de instrucciones. En un momento dado, la máquina puede estar en uno de una cantidad finita de estados posibles (que indicaremos como q_0, q_1, q_2,..., q_n). El programa le indica a la máquina qué debe hacer dependiendo del estado en que ésta se encuentre y de qué contenido tenga la casilla que el cursor está viendo.

Consideremos por ejemplo el siguiente programa:

	#	0
q_1	$0Dq_2$	$0Iq_1$
q_2	$\#Sq_0$	$0Dq_2$

Figura 2

En la columna de la izquierda aparecen todos los estados en que la máquina puede hallarse, excepto q_0. En la fila superior aparecen los dos posibles contenidos de una celda, el símbolo 0 significa que la celda está vacía. Convenimos en que inicialmente cualquier máquina se encontrará en el estado q_1 y que el cursor observará el primer símbolo # de la izquierda.

En las casilla interiores de la tabla están las instrucciones en sí. La instrucción superior izquierda indica que, si la máquina está en el estado q_1 y el cursor está viendo un #, entonces el cursor borra el símbolo de la casilla (ésta queda vacía) y luego se mueve un lugar a la derecha, la máquina finalmente pasa al estado q_2. La instrucción superior derecha dice que si la máquina está en el estado q_1 y el cursor está viendo una casilla vacía, entonces la celda queda vacía, el cursor se mueve un lugar a la izquierda y la máquina queda en el estado q_1.

Análogamente se interpretan las dos instrucciones restantes. Sólo debemos hacer dos aclaraciones relativas a la instrucción inferior izquierda. En primer lugar, la letra S indica que el cursor no se moverá, al cumplir la instrucción queda en la misma celda donde se hallaba. La segunda aclaración se refiere al estado q_0, éste es el *estado final* de la máquina, cuando la máquina pasa al estado q_0 se detiene de inmediato. El estado q_0 indica que el cómputo ha terminado.

La Tesis de Turing

Sugerimos a los lectores que, usando lápiz y papel, apliquen a la entrada que se muestra en la **Figura 1** el programa de la **Figura 2**. Podrán comprobar que la salida de la máquina es la cinta mostrada en la **Figura 3**.

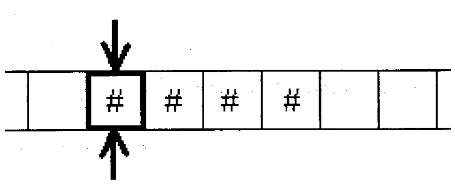


Figura 3

Por otra parte, los invitamos también a comprobar que si la entrada está formada por un único símbolo # entonces la máquina nunca llega al estado q_0, es decir, "se cuelga" y entra en un estado de cómputo perpetuo.

Definición: Dada una máquina de Turing Z, diremos que una entrada es **válida** para Z si y sólo si al cabo de una cantidad finita de pasos la máquina Z llega al estado q_0. Por ejemplo, para la máquina de la **Figura 2** la entrada ##### (que indicaremos como $\#^5$) es válida, mientras que la entrada # (ó $\#^1$) no lo es.

Démosle un significado concreto a nuestras entradas y salidas. Convendremos en que una sucesión de n símbolos # consecutivos (es decir, $\#^n$) representa al número natural n. Otras entradas no tendrán significado para nosotros. Entonces, en la cinta de la **Figura 1** vemos el número 5 y en la **Figura 3** aparece el número 4.

Interpretadas de esta forma las entradas y las salidas, es fácil comprobar que si la entrada de la máquina de la **Figura 2** es un número $n > 1$ entonces la salida será el número $n - 1$. En otras palabras, la máquina representa un algoritmo que calcula la función $f : N - \{1\} \longrightarrow N$, definida por $f(n) = n - 1$, donde $N = \{1, 2, 3, 4,...\}$.

La *Tesis de Turing* dice que, codificadas adecuadamente la entrada y la salida, todo algoritmo (ó cálculo mecánico) puede representarse mediante una máquina de Turing. [7] Observemos que no es posible demostrar esta tesis, ya que para obtener una tal demostración deberíamos tener una definición precisa del concepto de algoritmo, pero esta definición es justamente lo que pretende dar la tesis. Sí podemos decir a favor de ella que todas las demás definiciones que se han dado del concepto de algoritmo (incluida la concepción de Alonzo Church) han resultado ser equivalentes a la dada por la tesis, es decir los procesos representados por cualquiera de esas otras definiciones son exactamente aquellos que pueden representarse mediante máquinas de Turing.

Hoy en día, casi 70 años después de su formulación, nadie duda de la validez de la Tesis de Turing, la que normalmente es tomada como un axioma de la teoría de algoritmos. Análogamente será también para nosotros un axioma.

La Tesis de Turing dice entonces que un proceso algorítmico es todo aquél que puede representarse mediante una máquina de Turing. Por ejemplo, si pudiéramos demostrar que cierto problema matemático no puede resolverse mediante una máquina de Turing, entonces podremos asegurar que ese problema no puede ser resuelto mediante un programa de computadora presente o futuro.

Alan Turing (1912-1954)

Funciones recursivas

Toda máquina de Turing Z define de manera natural una función $F_Z : D \subseteq N \rightarrow N$, donde D (el dominio de F_Z) está formado por todos los números naturales n tales que $\#^n$ es una entrada válida de Z para la cual la salida correspondiente representa un número natural. El número $F_Z(n)$ ($n \in D$) se define entonces del siguiente modo: $F_Z(n) = m$ si y sólo si $\#^m$ es la salida que corresponde a la entrada $\#^n$.

Definición: Diremos que una función $f : A \subseteq N \rightarrow N$ es **recursiva parcial** si existe una máquina de Turing Z tal que la función $F_Z : D \subseteq N \rightarrow N$ asociada cumple las siguientes dos condiciones: **a)** A = D (ambas funciones tienen el mismo dominio), **b)** Para todo $n \in D$ vale que $F_Z(n) = f(n)$. Cuando A = N, se dice que la función es recursiva a secas. (8)

Expresado en términos más simples, una función f es recursiva parcial cuando existe un algoritmo (un programa de computadora) que permite calcular f(n) para cualquier número n de su dominio y que "se cuelga" cuando intenta calcular f(n) para un n que no pertenezca al dominio.

Como ya hemos visto más arriba, la función $f(n) = n - 1$ (con $A = N - \{1\}$) es recursiva parcial. Para dar otro ejemplo, veamos que la función $g(n) = \log n$, cuyo dominio es el conjunto de las potencias de 10, es también recursiva parcial. Gracias a la Tesis de Turing no será necesario mostrar explícitamente una máquina de Turing que calcule g(n), alcanza con mostrar cualquier algoritmo que haga ese cálculo. La Tesis nos garantiza que dicho algoritmo podrá traducirse a una máquina.

En este caso un algoritmo puede describirse de la siguiente manera:

1) Entrada: n.
2) Para cada $k \geq 1$ calcule 10^k y compárelo con n. Deténgase cuando $10^k = n$.
3) Salida: k.

En realidad toda función que esté descripta mediante una o varias fórmulas basadas en las operaciones conocidas (suma, resta, producto, cociente, radicación, etc.) será una función recursiva parcial. Casi cualquier función que los lectores puedan imaginar será sin duda una función recursiva parcial.

Surge naturalmente la pregunta siguiente: ¿existen funciones que no sean recursivas parciales? Es decir, ¿existen funciones tales que no haya algoritmos capaces de calcularlas? Curiosamente la respuesta es afirmativa.

Una manera indirecta de demostrar la existencia de infinitas funciones no recursivas parciales es la siguiente. Puede probarse con no demasiada dificultad que el conjunto de todas las máquinas de Turing es numerable (su cardinal es $\aleph_0$), mientras que el conjunto de todas las funciones de algún $A \subseteq N$ en N es no numerable (su cardinal es c, la potencia del continuo). Por lo tanto, dado que el segundo conjunto tiene un cardinal estrictamente mayor que el primero, deben existir necesariamente funciones de algún $A \subseteq N$ en N a las cuales no esté asociada ninguna máquina de Turing. Es decir, existen funciones que no pueden ser calculadas algorítmicamente (no pueden ser "comprendidas" por un programa de computadora).

Entscheidungsproblem. En esa nota veremos además todos los conceptos que, en la tercera nota de la serie, nos permitirán demostrar el primer Teorema de Gödel.

* Licenciado en Matemáticas - UBA.

Notas

(1) Gödel había nacido en Brno (hoy República Checa) en 1906, es decir tenía por entonces menos de 25 años de edad.

(2) El artículo original llevaba por título: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, y fue publicado en el *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931), pp. 173 - 198.

(3) Un sistema axiomático es **consistente** si está libre de contradicciones, es decir, si no hay en él ninguna proposición P tal que tanto P como su negación sean demostrables a partir de los axiomas.

(4) Una ecuación diofántica es una ecuación polinómica (de una o varias variables) con coeficientes enteros de la cual se buscan exclusivamente soluciones enteras. Como ejemplo de las grandes dificultades que aparecen al resolver este tipo de ecuaciones proponemos a los lectores que intenten resolver los siguientes problemas:
a) La ecuación $x^2 - y^4 = 3$ tiene al menos cuatro soluciones enteras que resultan de combinar $x = \pm 2$ con $y = \pm 1$ ¿existen otras soluciones enteras? En caso afirmativo se pide hallarlas todas, en caso negativo se pide demostrar la inexistencia de otras soluciones.
b) ¿Tiene la ecuación $x^2 - y^4 = 5$ alguna solución entera? Como antes, en caso afirmativo se pide hallarlas todas y en caso negativo se pide dar una demostración.

(5) Turing había nacido en 1912, por lo que, como Gödel, tenía menos de 25 años al publicar su trabajo fundamental. Tristemente, la vida de ambos fue difícil y terminó trágicamente. Turing se suicidó en 1954, abrumado por las presiones sociales causadas por su homosexualidad. Gödel, por su parte, sufrió a lo largo de toda su vida de periódicos y cada vez más profundos ataques de paranoia. Finalmente, en 1978, convencido de que existía una conspiración para envenenarlo, dejó de comer y murió de inanición.

(6) El artículo original de Turing lleva por título: *On computable numbers with an aplication to the Entscheidungsproblem*, y fue publicado en el *Proceedings of London Mathematical Society*, vol. 42 (1937), pp. 230 - 265.

(7) Es posible definir máquinas que trabajen con más símbolos, que utilicen más cintas o cuyos cursores puedan moverse dos o más casillas a la vez. Sin embargo, tales cambios no representan ninguna diferencia esencial. Todo cálculo que pueda ser hecho por estas máquinas con más recursos puede también ser realizado, aunque en general más lentamente, por alguna máquina como la que hemos descripto en el texto principal.

(8) Codificando adecuadamente la entrada y la salida, es posible definir también el concepto de función recursiva parcial para funciones de varias variables.

La Ecuación Diofántica $x^2 + y^2 = z^2$

por *Claudio Salpeter* *

Como todos sabemos, el archifamoso *último teorema de Fermat* (que niega la posibilidad de que exista alguna terna de números enteros -descartando la obvia alternativa *x = y = z = 0*- que satisfaga la ecuación diofántica siendo *n* un número natural mayor que dos) fue, con nostálgico lamento de muchos, finalmente demostrado a fines de 1994 por el matemático inglés Andrew Wiles.

[Para conocer la historia de este teorema y de su demostración puede el lector consultar *El último teorema de Fermat*, por Simon Singh. Rescato de este libro el siguiente pormenor referido a las verdaderas dificultades que siempre ha originado este teorema. Se trata de un cuento breve titulado "El demonio y Simon Flagg", en donde el demonio le pide a Simon Flagg que le haga una pregunta. Si logra contestarla antes de veinticuatro horas se quedará con el alma de Simon, pero si fracasa tendrá que darle 100 000 dólares. Simon le hace la pregunta: "¿El último teorema de Fermat es correcto?" El demonio desaparece y se va por el mundo absorbiendo todas las matemáticas jamás creadas. Al día siguiente regresa y admite su derrota:

- *Tú ganas, Simon –dijo casi en secreto, mirándolo con un respeto generoso-. Ni siquiera yo puedo aprender en tan poco tiempo las matemáticas necesarias para un problema tan difícil. Entre más me metía en él peor parecía. Factorización no única, ideales. ¡Bah! ¿Sabes –le confió el demonio- que ni siquiera los mejores matemáticos de otros planetas, todos más avanzados que los de ustedes, lo han resuelto? Mira, hay un tipo en Saturno, parecido a un hongo con zancos, que resuelve ecuaciones diferenciales parciales mentalmente, e incluso él se ha dado por vencido.*]

Sin embargo, el teorema de Fermat sí se cumple cuando *n* es igual a 2. En este caso lo denominamos Teorema de Pitágoras:

$x^2 + y^2 = z^2$, con *x, y, z* números enteros.

¿Cuál es la solución general de esta ecuación diofántica? Veamos primeramente algunas condiciones que deben cumplir los enteros involucrados en ella.

Con *(x,y)* designaremos al máximo común divisor entre *x* e *y*. Además *x* | *y* significará que *x* divide a *y*.

Si *x, y, z* es una solución de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ entonces, claramente, lo serán todas las ternas *kx, ky, kz*, con k $\in$ Z.

Podemos considerar, sin pérdida de la generalidad, que estas soluciones son positivas. Sin embargo, sólo consideraremos las *soluciones primitivas*, es decir, aquellas en donde *x, y, z* no posean ningún factor común. Bastará, pues, obtener soluciones con $(x,y) = 1$.

Por otra parte, puede comprobarse que *x* e *y* no pueden ser ambos impares. Si así fuera, se tendría, en el lenguaje de las congruencias, que: $x^2 \equiv 1 \mod(4) \quad \wedge \quad y^2 \equiv 1 \mod(4)$.

Pero esto ocasionaría $z^2 \equiv 2 \mod(4)$, que es una expresión quimérica. Recuérdese que si $a \equiv b \mod(m)$ entonces *a* y *b* tienen el mismo resto en la división por *m*.

En síntesis, se han adoptado las siguientes condiciones:

$i)\ x > 0, y > 0, z > 0$

$ii)\ (x,y) = 1$

$iii)\ x \text{ e } y \text{ tienen distinta paridad}$

Podemos ahora enunciar el siguiente resultado:

Teorema: Las soluciones primitivas de $x^2 + y^2 = z^2$, en donde los enteros *x, y, z* cumplen las condiciones i), ii), iii), recién enunciadas, son:

$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2,$
en donde a, b son enteros de distinta paridad $(a,b) = 1$ y $a > b > 0$.

Demostración
Dado que *x* e *y* tienen distinta paridad, podemos suponer que $2 \mid x$. Esto hace que *y* sea impar y que *z* también lo sea. Como además $(x,y) = 1$ se tiene que $(y,z) = 1$ ya que un divisor común de *z* y de *y* divide también a *x*. Y esto sólo ocurre si tal divisor es 1.

Así, $\frac{1}{2}(z-y) \wedge \frac{1}{2}(z+y)$ son enteros y $\left(\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}\right) = 1$.

Esto último puede pensarse de este modo. Ya que el máximo común divisor de dos números divide a cada uno de ellos y, asimismo, a la suma y a la resta de ambos, vemos que si $g = \left(\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}\right)$, entonces:

$$g \Big| \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} = z \quad \wedge \quad g \Big| \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} = y \quad .$$

Por lo tanto, *g = 1*.

Ahora bien, observemos que

$$\frac{z-y}{2} \cdot \frac{z+y}{2} = \frac{z^2 - y^2}{2^2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Como los dos factores de la izquierda son coprimos, ambos deben ser cuadrados perfectos. (Pruebe el lector esta afirmación, es decir, que dados dos enteros coprimos cuyo producto es un cuadrado perfecto, cada uno de tales enteros es un cuadrado perfecto. Sugerencia: utilice el *Teorema Fundamental de la Aritmética*)

Así $\frac{z+y}{2} = a^2 \quad \wedge \quad \frac{z-y}{2} = b^2$

$$a^2 + b^2 = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} = z$$

$$a^2 - b^2 = \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} = y$$

$$2ab = 2.\sqrt{\frac{z+y}{2}}\sqrt{\frac{z-y}{2}} = 2.\sqrt{\frac{z^2-y^2}{2^2}} = 2.\frac{x}{2} = x$$

Dado que, por ejemplo, *y* es impar, no pueden *a* y *b* tener la misma paridad.
Una de las implicaciones del teorema queda demostrada. Demostremos ahora la recíproca. Asumiendo que *a* y *b* cumplen las condiciones dadas en el enunciado del teorema, tenemos:

$$x^2 + y^2 = 4a^2b^2 + \left(a^2 - b^2\right)^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 = z^2$$

con $x > 0, y > 0, z > 0$.
Fácilmente se ve que *x* e *y* tienen distinta paridad. Faltaría ver que $(x,y) = 1$. Si $(x,y) = d$ entonces

$d \mid z$ (muestre el lector esta afirmación). Tenemos así que $d \mid y = a^2 - b^2 \quad \wedge \quad d \mid z = a^2 + b^2$.

De esta manera $d \mid 2a^2 \quad \wedge \quad d \mid 2b^2$.

Puesto que $(a,b) = 1$, entonces $d \mid 2$

Así, *d* es 1 ó 2. Pero 2 no puede ser porque *y* es impar.
Luego, $(x,y) = 1$
Queda entonces, demostrado el teorema.

* Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. «Dr. Joaquín V. González»

Bibliografía

HARDY, G. M. – WRIGHT, E. M. – *An Introduction to the Theory of Numbers* – Oxford, Clarendon Press, 1979.
SINGH, Simon – *El último teorema de Fermat* – Bogotá, Grupo Editorial Norma, 1999.
GENTILE, Enzo R. – *Aritmética Elemental*- Buenos Aires, 1985, OEA.

Ecuaciones cúbica y cuártica (segunda parte)

En esta segunda y última entrega analizaremos con mayor profundidad, a través de ejemplos, las soluciones propuestas para este tipo de ecuaciones polinómicas, por los algebristas italianos del Renacimiento. El cálculo y el álgebra actuales nos permitirán apreciar el ingenio de sus razonamientos.

por *Fernando Chorny* *

En la primera entrega de esta nota detallamos algunos pormenores históricos en la resolución de la ecuación cúbica.
Scipione dal Ferro en primer lugar, Niccolò Tartaglia, por su cuenta, y Gerolamo Cardano se disputan el mérito de la hazaña (una disputa que continúa hoy, porque no terminaron de resolverla en vida). Los distintos historiadores citados en la bibliografía reparten su cariño por uno u otro, en forma más o menos equitativa.
¿Pero hasta dónde llegaron los progresos de estos matemáticos renacentistas?

Para terminar con el problema del simbolismo

Recordemos que resolver la ecuación cúbica es encontrar una fórmula que dé sus raíces a partir de operaciones elementales y finitas entre sus coeficientes. Una tal fórmula es la que se puede reconstruir con el álgebra actual, a partir de los versos con los que Tartaglia comunicó a Cardano su solución de la ecuación $x^3+px=q$. Según vimos en el número anterior de Axioma, las raíces de esta ecuación están dadas por la expresión

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Si consideramos una ligera modificación (basta con cambiar q por –q en la expresión anterior) y trabajamos con la ecuación $x^3+px+q=0$, entonces la fórmula resolutoria será:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (1)$$

Es importante observar que, de los versos de Tartaglia a la discusión más rigurosa de esta solución, hay todavía un camino importante por recorrer, en principio por la notación y las reglas operativas del álgebra que se necesitaron para abordar la tarea.
Y el paso importante en el progreso de esta notación se daría un par de décadas más tarde, lo cual no es mucho tiempo, pero sí el suficiente como para observar que ni Tartaglia, ni dal Ferro, ni Cardano pudieron haber echado mano de los números decimales en la resolución de sus ecuaciones.

Cuando comparto una cena con un grupo de amigos, frecuentemente soy designado, en tanto "el Profesor de Matemática", para calcular la división de la cuenta entre los comensales. (Estoy seguro de que todo colega que lea esta nota, habrá pasado por esa situación más de una vez). Un poco molesto con la tarea, suelo evadirla y recalco la diferencia entre el trabajo del matemático y el del contador. Si no estuviera tan arraigada la idea popular de que hacer matemática es hacer cuentas (y muchas veces la "enseñanza" en la Escuela Secundaria tiene todo que ver con este mal), seguramente sería más fácil encontrar en personas de ocupaciones diversas una mejor predisposición para compartir con nosotros los aspectos de la matemática que consideramos llenos de belleza.
El comentario viene a cuento de que, a fines del siglo XVI, fue curiosamente la contabilidad la que se abrió paso entre la matemática de la época para ocuparse, al fin, de comenzar a resolver el problema de la operación numérica. Porque hay que decir que la famosa globalización había comenzado ya en ese entonces: el comercio crecía y con él las transacciones financieras importantes. Fue el belga **Simon Stevin** (1548-1620) quien tuvo la feliz idea de abandonar las aparatosas fracciones sexagesimales en favor de las decimales. La simplificación de cálculo que esto significa es fácil de comprender: los números enteros estaban ya estructurados sobre una base decimal, pero nadie había observado que los números de la forma $a.10^n$ podían escribirse de esa manera, tanto si fuera *n* positivo como negativo. Por otra parte, las fracciones no se manejaban con la simpleza con que lo hacemos hoy. De hecho las expresiones *duae partes* y *quattuor partes* designaban a los racionales

2/3 y 4/5, respectivamente. El lector no convencido aún del sentido simplificador que tiene el hallazgo de las fracciones decimales puede, a modo de ejercicio, considerar "duae partes" y "quattuor partes" y sumarlas, obteniendo previamente común denominador.

¿Cuál es entonces el grado de profundidad con que los algebristas del Renacimiento habrán comprendido la solución de la ecuación cúbica? Podemos estar seguros de que era un grado mayor que el que permitía el álgebra de la época, entre otras razones, porque los métodos que describieron funcionan perfectamente cuando los interpretamos por medio de la rigurosa y precisa escritura actual.

A continuación, nos dedicaremos a probar el funcionamiento de estos métodos, haciendo algunas observaciones sobre ejemplos numéricos concretos. Se dice que *"Para pelar una papa hacen falta dos cosas: un cuchillo y una papa"*. Nosotros llegaremos más lejos de lo que Tartaglia pudo describir, pero no debemos dejar de admirar el mérito de alguien que pudo pelar una papa contando solamente con un cuchillo.

Estudio de la ecuación cúbica

Si es difícil para nosotros concebir la manera en que se puede haber resuelto esta ecuación careciendo de un álgebra operativa y sistemática, mucho más difícil todavía nos resultaría privarnos de interpretar la ecuación gráficamente.
Sea una función polinómica, es decir una función de la forma

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, donde los a_i son reales y $a_n \neq 0$

Como sabemos, las raíces reales de una ecuación polinómica son los puntos del eje de abscisas por los que pasa la curva que representa a la función, es decir, los x reales tales que f(x)=0.
Esta noción nos ayudará mucho a partir de ahora, pero no olvidemos que, antes de salir a escena, el sistema de coordenadas *cartesianas* ortogonales tuvo que esperar entre bambalinas a la llegada de Descartes, si no a la de Fermat (principios de 1600).

Consideremos ahora la ecuación cúbica general:
$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (2)
dividiendo miembro a miembro por $a_3 \neq 0$ tenemos

$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ donde $b=a_2/a_3$; $c=a_1/a_3$ y $d=a_0/a_3$
El término cuadrático de esta ecuación se puede eliminar mediante la sustitución

$$x = y - \frac{b}{3} \qquad (3)$$

Se recomienda al lector ejecutar la sustitución y desarrollar las expresiones. Acaso este trabajo. tedioso y artesanal, traiga a su memoria la espantosa lista de ejercicios de álgebra, llenos de letras sin sentido, con que algunos profesores torturan a sus estudiantes. La diferencia es que, en este caso, nos movilizan las ansias por llegar a la ecuación que Tartaglia supo resolver:

$$y^3+py+q=0 \qquad (4) \qquad \text{donde}$$

$$p = c - \frac{b^2}{3} \qquad y \qquad q = \frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27}$$

Con el hallazgo de esta sustitución queda claro que resolver la ecuación (4) es condición suficiente para resolver la ecuación (2).

Ejemplos

Según el Teorema Fundamental del Álgebra, toda ecuación polinómica de grado n>0 tiene al menos una raíz compleja. El corolario inmediato de este teorema es que toda ecuación polinómica de grado n>0 tiene exactamente n raíces complejas (algunas de las cuales pueden ser múltiples) La ecuación cúbica tendrá, entonces, 3 raíces complejas que pueden presentarse de las siguientes maneras, según se ilustra en los gráficos:

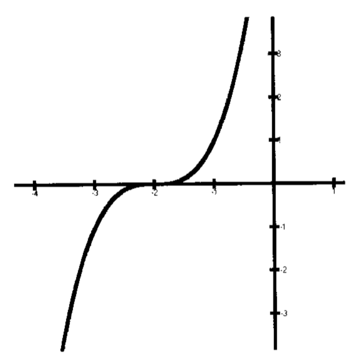


Gráfico 1

$y = x^3+6x^2+12x+8$

La función tiene una raíz real de multiplicidad 3.

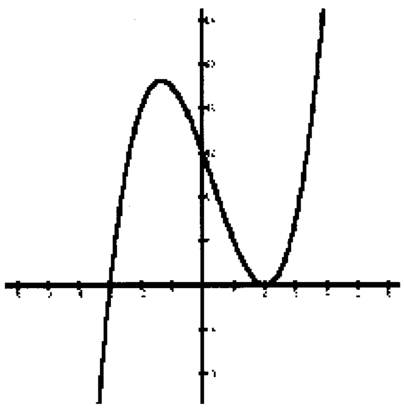


Gráfico 2
$y = x^3-x^2-8x+12$

La función tiene una raíz real simple y otra de multiplicidad 2

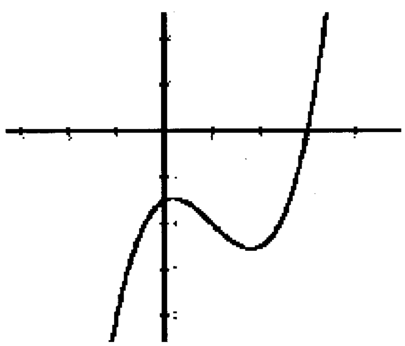


Gráfico 3
$y = x^3-3x^2+x-3$

La función tiene una raíz real simple y dos complejas conjugadas

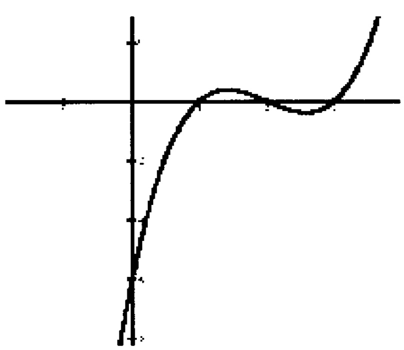


Gráfico 4
$y = x^3-6x^2+11x-6$

La función tiene tres raíces reales distintas

Las raíces de estas funciones propuestas como ejemplo son números enteros y es simple hallarlas, ya sea por simple inspección del gráfico (verificando el resultado obtenido) o bien utilizando un teorema de Gauss que permite obtener raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros[1]. Sin embargo, las utilizaremos como material de laboratorio para probar el funcionamiento de la fórmula resolutoria.
Sea la función polinómica del Gráfico 3 y planteemos la ecuación que iniciará la búsqueda de sus raíces:

$$x^3-3x^2+x-3=0 \qquad (5)$$

La sustitución (3) sería $x=y+1$. Reemplazando en (5) y desarrollando obtenemos

$$y^3-2y-4=0 \qquad \text{donde}$$
$$p=-2$$
$$q=-4$$

y el discriminante es $\Delta = \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{100}{27}$

Remplazando en la fórmula resolutoria (1) tenemos:

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{100}{27}}} \qquad (6)$$

Ahora debemos considerar que los números complejos (de parte imaginaria nula) $2+\sqrt{\frac{100}{27}}$ y $2-\sqrt{\frac{100}{27}}$ tienen tres raíces complejas cada uno. Éstas deberán ser elegidas de tal manera que su producto sea $-\frac{p}{3}=\frac{2}{3}$, de acuerdo con las consideraciones hechas en la deducción de la fórmula resolutoria[2].

Para hallar las raíces de $2+\sqrt{\frac{100}{27}}$ expresamos el número en su forma trigonométrica:

$$2+\sqrt{\frac{100}{27}} = \left|2+\sqrt{\frac{100}{27}}\right|.(\cos(0)+i \quad \text{sen}(0)) =$$

$$=\left(2+\sqrt{\frac{100}{27}}\right).(\cos(0)+i \quad \text{sen}(0))$$

Las raíces cúbicas se obtienen haciendo

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}} =$$
$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}}.\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)+i \quad \text{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right) (7)$$

con K = 0,1,2

Ahora es importante hacer una observación: si pretendemos mantener la expresión exacta de las raíces que estamos buscando, es decir, si eludimos todo tipo de aproximación o redondeo, terminaremos obteniendo expresiones radicales, del tipo de la expresión (6), que pronto estarán también en función del seno y el coseno del argumento de los números complejos involucrados. En efecto, según (7), las raíces cúbicas buscadas son:

$$z_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i \ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i \ \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Análogamente, las raíces cúbicas que conforman el segundo término de la expresión (6) son:

$$w_1 = \sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{100}{27}}}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{100}{27}}} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i \ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{100}{27}}} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i \ \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Estos valores son exactos, pero seguir manipulándolos de esta manera hasta el final haría sumamente engorrosos los cálculos y perderíamos de vista por un buen rato el verdadero objetivo del problema, que es hallar las raíces de la ecuación $x^3-3x^2+x-3=0$. El lector paciente puede intentar aventurarse en este lance, comenzando por poner $\cos(2\pi/3)= -1/2$, etc.

Nosotros nos limitaremos a aproximar los valores involucrados con algunas cifras decimales correctas. Desde ya, este procedimiento desvirtúa el valor teórico del método que estamos ejemplificando, pero, como contrapartida, hará más inmediata la apreciación de los resultados. Hay que observar –para terminar con esta aclaración– que el cálculo numérico ofrece herramientas y métodos mucho más prácticos para quien se ha resignado a conformarse con aproximaciones. Volveremos brevemente sobre este tema al final de la nota y lo trataremos más detalladamente en Axioma nº 17

Aproximemos ahora las raíces calculadas. Tenemos

$z_1 \cong 1{,}577$ $\qquad w_1 \cong 0{,}422$

$z_2 \cong -0{,}789+1{,}366\, i$ $\qquad w_2 \cong -0{,}211+0{,}366\, i$

$z_3 \cong -0{,}789-1{,}366\, i$ $\qquad w_3 \cong -0{,}211-0{,}366\, i$

Los valores de y, según (6), serán entonces

$y_1=z_1+w_1$

$y_2=z_2+w_3$

$y_3=z_3+w_2$

Verifique el lector que ésta es la manera de armar las sumas, pues se cumple la condición $z_1w_1=z_2w_3=z_3w_2=$ $= -p/3 = 2/3$

Luego, las raíces buscadas son

$y_1 = 2$

$y_2 = -1 + i$

$y_3 = -1 - i$

De donde, recordando la sustitución inicial $x=y+1$ resulta que las raíces de $x^3-3x^2+x-3=0$ son

$x_1=3$

$x_2= i$

$x_3= -i$

lo cual es fácil de verificar, dado que $x^3-3x^2+x-3 = (x-3)(x^2+1)$. Ver nota al pie [3]. Como anticipaba el gráfico, hemos dado con una raíz real y dos complejas conjugadas. Proponemos al lector que afiance la comprensión del procedimiento que acaba de leer resolviendo las ecuaciones correspondientes a los restantes gráficos. En el caso de los gráficos 1 y 2 se observará que el discriminante es $\Delta = 0$. Es interesante el caso del gráfico 4, pues para llegar a obtener las raíces reales hay que "escapar" momentáneamente de **R** y operar con números complejos, para terminar otra vez en el mismo conjunto del que se arrancó. Este caso, que ocurre al ser $\Delta < 0$ y que Tartaglia y Cardano no pudieron resolver, fue el llamado *irreducible*.

Para terminar con la ecuación cúbica, proponemos algunos ejercicios más:

- Demostrar (cosa que hizo Cardano) que en toda ecuación polinómica de tercer grado la suma de las raíces es igual al opuesto aditivo del coeficiente cuadrático.
- (trabajoso y algo tedioso, pero instructivo) Reemplazar la fórmula resolutoria (1) en la

ecuación (4) para verificar que, efectivamente, es la solución de la ecuación. Sugerencia: llamar Δ al discriminante para abreviar un poco.

La ecuación cuártica

Es el momento de volver brevemente a los protagonistas de nuestra historia. Gerolamo Cardano no fue del todo injusto con Tartaglia (al menos en un principio). Al comienzo de su importante obra, *Ars Magna*, Cardano declara: *"En nuestros tiempos Scipione Dal Ferro, boloñés, resolvió el capítulo de cubo y cosas igual a número; hazaña realmente hermosa y admirable. Este arte, superando toda sutileza humana posible y el esplendor de todo ingenio mortal, muestra el valor de los ingenios humanos: quien llegó a esto puede con razón admitir que nada le ha de ser imposible. En emulación con el matemático mencionado, Niccolò Tartaglia de Brescia, amigo nuestro, habiendo entrado en discusión con María Florido[4] (discípulo de Dal Ferro), para ganar la justa encontró el mismo capítulo y me lo confió, pues se lo había pedido insistentemente (...) Comprendí que podían deducirse muchas cosas más. Aumentada mi confianza llegué a encontrarlas, en parte con la ayuda de Ludovico Ferrari, antiguo discípulo mío. Todo lo que éste encontró será indicado con su nombre, lo demás me pertenece."*

Aquí aparece mencionado un nuevo personaje, **Ludovico Ferrari (1522-1565)**, el penúltimo que mencionaremos en este sucinto relato. A Ferrari se atribuye, sin discusión, el haber hallado la solución de la ecuación de cuarto grado. El problema disparador fue pergeñado por el bresciano da Coi, aquél que había motivado también las investigaciones de Tartaglia: *"Dividir al número 10 en tres partes que estén en progresión geométrica y tales que el producto de las dos primeras sea 6".*
Antes de contemplar la maravillosa solución de Ferrari, lanzamos la primera propuesta de esta parte para el lector: plantear el problema y verificar que deviene en una ecuación de cuarto grado.

La solución de Ferrari

Esta solución aparece publicada en la *Ars Magna* de Cardano, debidamente atribuida a Ferrari, quien, guiado por Cardano y en circunstancias no del todo limpias ni transparentes, derrotó a Tartaglia en un famoso torneo público que se celebró en Milano, en agosto de 1548. Una vez más, brotó de las más venenosas disputas un fruto valioso para el conocimiento humano.

Llamemos **a, x** y **c** a los tres números buscados. Será:

$$a+x+c=10 \qquad (8)$$

y, como están en progresión geométrica,

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{c} \Rightarrow ac = x^2 \qquad (9)$$

Por otro lado, por hipótesis,

$$ax = 6 \qquad (10)$$

Multiplicando (8) por 6x tenemos:

$$36 + 6x^2 + 6xc = 60x$$

Como de (9) y (10) se deduce $6xc=x^4$ tenemos:

$$36 + 6x^2 + 6x^4 = 60x$$

Ahora, sumando $6x^2$ nos queda:

$$(x^2 + 6)^2 = 60x + 6x^2$$

Acá viene el gran artificio: para volver a completar cuadrados, sumamos un par de términos desconocidos pero convenientes:

$$(x^2 + 6)^2 + 2y(x^2 + 6) + y^2 = 60x + 6x^2 + 2y(x^2 + 6) + y^2$$

y así tenemos:

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 2x^2(y + 3) + 60x + y^2 + 12y \qquad (11)$$

Si queremos (o, mejor dicho, si Ferrari quiere) que el segundo término sea el desarrollo del cuadrado de un binomio del tipo $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$, tendremos:

$$m = x\sqrt{2y+6} \qquad\qquad n = \sqrt{y^2+12y}$$

$$2mn = 2x\sqrt{2y+6}\sqrt{y^2+12y} = 60x$$

de donde $(y + 3)(y^2 + 12y) = 450$ (12)
Hemos arribado a una ecuación cúbica que nos permite averiguar la y de la ecuación (11). Ahora podemos escribir en esa ecuación

$$(x^2+6+y)^2 = \left(x\sqrt{2y+6}+\sqrt{y^2+12y}\right)^2 \quad \text{o sea}$$

$$x^2+6+y = x\sqrt{2y+6}+\sqrt{y^2+12y}$$

que (siendo y un número conocido) es una cuadrática en x. Esta cuadrática resuelve el problema de da Coi.

Unas observaciones para terminar

El lector habrá advertido que en el último paso se han cancelado cuadrados sin considerar los signos. Razones de espacio nos impiden encarar un análisis de la ecuación cuártica como el que se hizo en el caso de la cúbica, en el que se contemplen las restricciones que dan lugar a soluciones de distinto tipo. Dejamos algunas sugerencias para encarar el problema (además de consultar la bibliografía que figura al pie):

- Siendo la ecuación cuártica general: $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, reducirla a la forma $y^4+py^2+qy+r=0$ mediante la sustitución

$$x = y - \frac{b}{4} \qquad \text{(hallazgo de Ferrari)}$$

- Aplicar el método con el que Ferrari resolvió el problema de da Coi en el caso general de la ecuación $y^4+py^2+qy+r=0$.

La primera síntesis prolija y organizada que trata la solución sistemática de las ecuaciones cúbica y cuártica aparece en el *Álgebra* de **Bombelli (1530? – 1579?)**, quien, como broche de oro a este proceso que se da en la Italia del Renacimiento, vislumbra una interpretación geométrica que desemboca en la clara noción de los números complejos. Por primera vez las raíces de números negativos son tomadas como soluciones posibles de una ecuación, en particular, en el caso irreducible de la ecuación cúbica (ver gráfico 4).

Así concluye la etapa renacentista: arrastrando un álgebra de notación rudimentaria hasta los límites de su alcance, en lo que respecta a resolver ecuaciones polinómicas. Pero el valor de estas soluciones es más teórico que práctico. Con Descartes, Fermat, Newton y Leibniz, serán la Geometría Analítica y el Cálculo los que tomarán la posta del problema, llegando a descubrir métodos numéricos que permitirán hallar raíces, aproximándolas hasta hacer el error *tan chico como se quiera.*

En cuanto a la búsqueda de fórmulas resolutorias para ecuaciones polinómicas de grado superior al cuarto, se necesitará aún un importante progreso del álgebra: no para hallar las soluciones sino para demostrar su inexistencia. Ruffini, Abel y Galois, desde el naciente siglo XIX, nos traerán esta noticia ◣

*Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. «Dr. Joaquín V. González»

[1] El lector puede hallar este teorema en cualquier libro de álgebra elemental, o bien en Axioma nº 10.
[2] Ver la primera parte de esta nota en Axioma nº 15.
[3] De hecho es esta verificación la que nos permite cambiar el $\cong$ por un =.
[4] Cardano latiniza el nombre de Anton María Fior.

Bibliografía

- MIELI, Aldo, *Panorama general de Historia de la Ciencia, V*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1952.
- NEWMAN, James R., *Sigma, el mundo de las Matemáticas*, Barcelona, Grijalbo, 1997.
- REY PASTOR - BABINI, *Historia de la Matemática*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1951.
- SARTON, George, *Seis alas*, Buenos Aires, Eudeba, 1965.
- SEVERI, Francesco, *Lecciones de Análisis*, Barcelona, Labor S.A., 1951.
- BOURBAKI, Nicolas, *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza, 1972.
- GENTILE, Enzo, *Notas de Álgebra I*, Buenos Aires, EUDEBA, 1973.

Ocurre con el lenguaje lo que ocurre con el andar: así como al someter el paso normal o el andar ordinario a una depuración y ajuste rítmicos se transforma en danza, mientras que si se los automatiza tomando de él lo esencial se convierte en marcha; de igual modo, si se tiende a elevar el contenido expresivo y musical del lenguaje ordinario utilizando la riqueza en significados que las palabras poseen se transforma en lenguaje poético, mientras que si se lo hace preciso, conciso, dando a las palabras un sentido único, ese lenguaje se convierte en lenguaje científico.

Texto extraído de Qué es la ciencia, *J. Babini, Columba, Bs.As.,1960.*

Evolución de la enseñanza

Esta carta de J.Angel Domínguez Pérez -Correo de Lectores «Cacumen», España- ya fue publicada en el número 1 de Axioma (mayo-junio de 1996). Creímos oportuno reproducirla ahora, con el objeto de reconsiderar las propuestas didácticas puestas en juego, valorar sus resultados y tomar una decisión: llorar a coro o reirnos de buen grado, hasta recobrar el humor y las ganas de seguir batallando en pos de la educación.

La enseñanza en 1950. Primero superior

Problema: Un campesino vende una bolsa de papas por $1 000. Sus gastos de producción se elevan a 4/5 del precio de venta. ¿Cuál es su beneficio?

La enseñanza en 1960. Tercer grado

Problema: Un campesino vende una bolsa de papas por $1 000. Sus gastos de producción se elevan a 4/5 del precio de venta, o sea, a $ 800. ¿Cuál es su beneficio?

La enseñanza en 1970. Quinto grado

Problema: Un campesino cambia un conjunto P de papas por un conjunto M de monedas. Sus gastos de producción corresponden a otro conjunto Q de monedas. El cardinal del conjunto M es igual a $ 1 000 y el de Q es $ 800. Cada elemento que pertenece a M y a Q vale 1.
Dibuja 1 000 puntos gordos que representen los puntos del conjunto M y 800 puntos gordos que representen los puntos del conjunto Q, y da respuesta a la cuestión siguiente: ¿cuál es el cardinal del conjunto B de los beneficios? Dibuja B en color, de preferencia rojo.

La enseñanza en 1986. Sexto grado

* *Objetivos para el alumno:*

. Memorizar el nombre del profesor.
. Transcribir el texto del pizarrón al cuaderno.
. Analizar el texto.
. Utilizar correctamente la regla y el subrayado
. Diferenciar las palabras.
. Seleccionar los datos importantes.
. Transferir los conocimientos anteriores.

* *Objetivos para el profesor:*

. Consultar el manual de objetivos Taxonomía de los objetivos de la Educación de Benjamín Bloom.

* *Actividad planteada:*

Un campesino vende una bolsa de papas por A 1 000. Sus gastos de producción se elevan a A 800 y el beneficio es de A 200.

1) Señala la palabra PAPAS.
2) Discute sobre ella con tus compañeros de clase.

Transformación educativa 1999. Octavo año

Contenidos conceptuales:

. Las papas: papas blancas y papas negras; la discriminación.
. Puré de papas.
. Papanatas, papas fritas de ayer y de siempre.

Contenidos procedimentales:

Adquisición de habilidades y destrezas para la comprensión de la función de la papa en este mundo globalizado.

Adquisición de destrezas para la comprensión de la necesidad de flexibilizar las papas en función de mejorar su calidad.

Contenidos actitudinales:

Sensibilidad y respeto por las papas.

Valoración del papel central de la papa en su capacidad transformadora y vinculada con la actividad productiva.

Valoración del uso racional de la papa.

Reconocimiento de la capacidad transformadora vinculada a la globalización de la economía.

Diálogo registrado durante una clase.

Alumno: ¡Profe...! ¿Qué es una papa?

Docente: Mire, señor educando, no moleste y póngase a trabajar. No sé qué es una papa, pero en las próximas Jornadas de Actualización Docente se lo averiguo.

Este texto fue extraído del capítulo La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición *por Delia Lerner, que integra el libro* Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate, Paidós Educador, Bs. As.,1999, págs.92 /93.

"Un medio sin intenciones didácticas es manifiestamente insuficiente para lograr que el alumno se apropie de todos los conocimientos culturales que se desea que adquiera."
G. Brousseau (1986)

En Didáctica de la Matemática, los resultados de investigación han llevado a profundizar la reflexión sobre las dificultades que se generan cuando se pretende restituir a los alumnos el derecho a reelaborar el conocimiento. Dado que el contrato didáctico vigente en general adjudica al maestro la responsabilidad de transmitir directamente el conocimiento nuevo, no resulta fácil renegociar ese contrato implícito y transferir al alumno la cuota de responsabilidad que necesariamente debe asumir en el marco de un modelo que lo concibe como productor del conocimiento.

Señala Brousseau (1994):
«El trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro. [...] Para que un niño lea una situación como una necesidad independiente de la voluntad del maestro, hace falta una construcción epistemológica intencional. La resolución del problema se vuelve entonces responsabilidad del alumno, que debe hacerse cargo de obtener un cierto resultado . No es tan fácil. Es necesario que el alumno tenga un proyecto y acepte su responsabilidad.»

La papiroflexia como recurso en la enseñanza de la Geometría

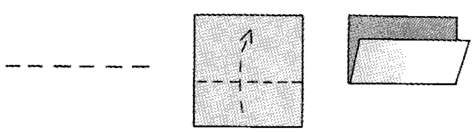
por *Raquel S.Kalizsky* *

La técnica de plegar un cuadrado de papel de unos 15 cm de lado para obtener figuras –papiroflexia u *Origami*- es milenaria.
De acuerdo con la intención puesta en el trabajo, los expertos se dividieron en dos corrientes, ya sea que destinaran su plegado a buscar formas líricas o a vislumbrar principios geométricos capaces de estimular la razón. Algunos consideran, no obstante, que "a medida que (cada persona) disfrute de la amplia variedad de plegados diferentes... se hará más evidente que el *Origami* encierra una espléndida fusión de lo lógico y lo lírico...»

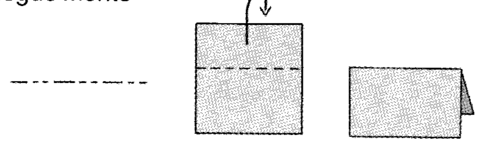
El destacado pedagogo alemán Friedrich Froebel (1782-1852), fundador del sistema *kindergarten*, mostró gran interés hacia el *Origami* como medio de poner a los niños en contacto con las formas geométricas. En la versión japonesa de sus obras completas, publicadas por la Tamagawa University Press, en 1981, en las páginas 716-717 del volumen 4, aparecen los pasos para producir la construcción de un cuadrado a partir de un trozo de papel.

Antes de introducirnos en las construcciones propiamente dichas, tenemos que aprender el significado de los símbolos que nos permitiran interpretar las instrucciones.

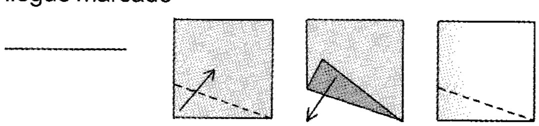
Pliegue Valle



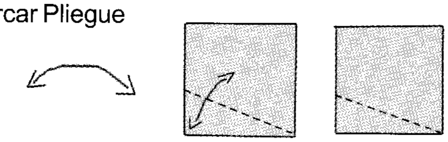
Pliegue Monte



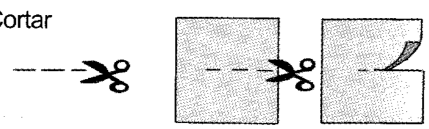
Pliegue marcado



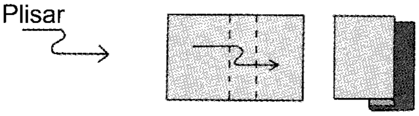
Marcar Pliegue

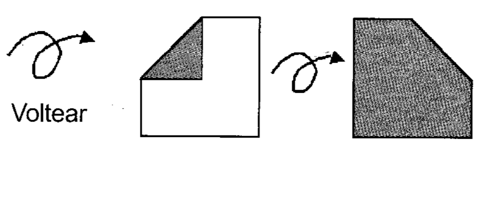


Cortar



Plisar

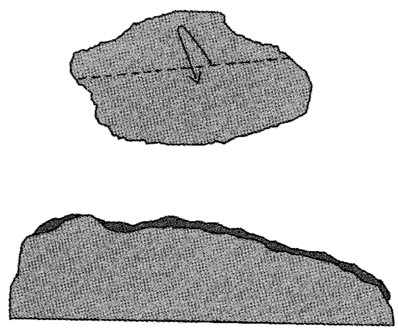




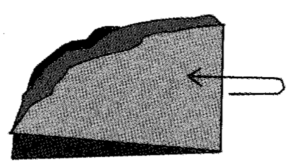
Voltear

Ahora estamos en condiciones de abordar la construcción del cuadrado de Froebel.

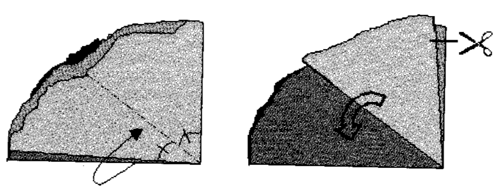
1) Doblamos en dos un papel de forma irregular.



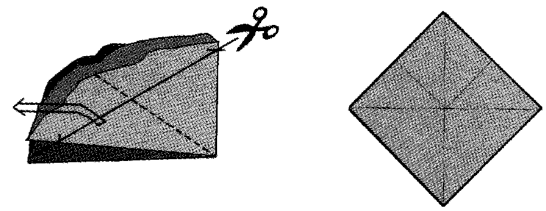
2) Volvemos a doblar de manera que ambas partes del borde anterior se superpongan.



3) Plegamos la doble capa superior, como se muestra, y hacemos una muesca en el papel con las tijeras.

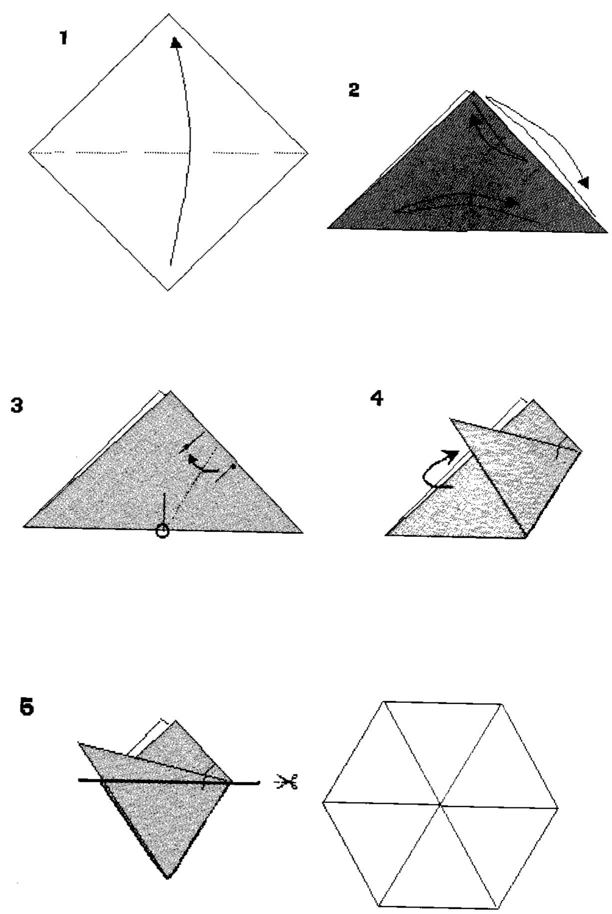


4) Restituimos la doble capa superior a su posición primitiva y cortamos por la línea recta que une ambas muescas. Al extender el papel, podemos observar un cuadrado (¿por qué será que alteramos la serie lingüística y no hemos adoptado el nombre de **tetrágono regular**?).



Esta construcción es importante, en primer lugar, porque nos proveerá de todos los cuadrados que necesitemos para producir nuestros futuros plegados; en segundo lugar, porque la podemos aprovechar para mostrar las propiedades de las diagonales y de las bases medias del cuadrado, sus ejes de simetría; también, como forma de construir una "escuadra" que nos permita clasificar ángulos o triángulos.

Obtenido el cuadrado, estamos en condiciones de construir un hexágono regular.



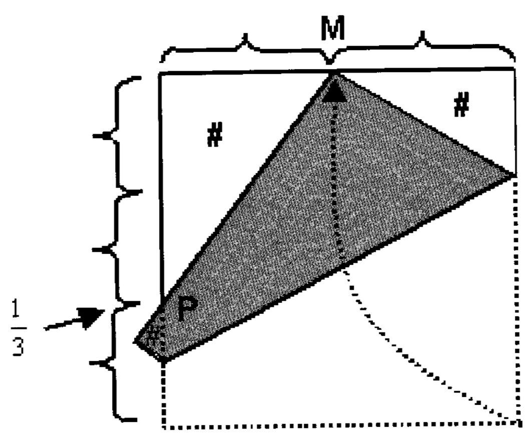
Plegar como sinónimo de dividir

En general, plegar con cuidado un cuadrado de papel, alineando bordes y esquinas, equivale a dividir líneas y ángulos en partes iguales: dos, cuatro, seis, ocho, etcétera.
Para obtener un número impar de divisiones iguales, es necesaria la aplicación de principios matemáticos.

Veamos algunos ejemplos.

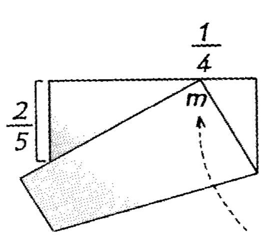
Teorema de Haga

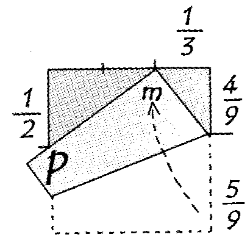
Su autor, Kazuo Haga, muestra esta división del lado del cuadrado en tres partes iguales.



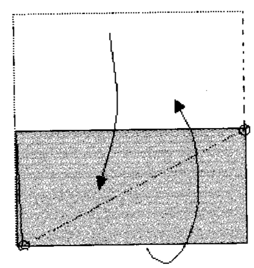
1) Los tres triángulos rectángulos (#) son semejantes. La proporción en la que se encuentra la longitud de sus lados es **3 : 4 : 5**.
2) El punto P señala un tercio de la longitud del lado.

La expansión del Teorema de Haga, debida a Kohji y Mitsue Fushimi, requiere modificar la ubicación del punto M sobre el lado del cuadrado; se obtiene así la división de éste en cinco y nueve partes iguales, respectivamente.

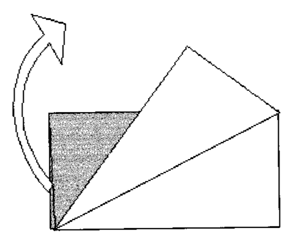




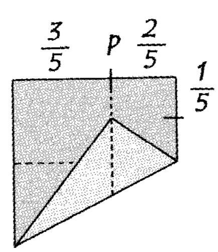
En el libro *La geometría del* Origami, publicado por la Nihon Hyöron-sha, aparece este plegado que divide el lado del cuadrado en cinco partes iguales.



pliegue sólo la capa superior

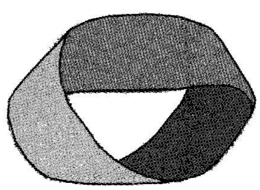


Abra desde el otro lado

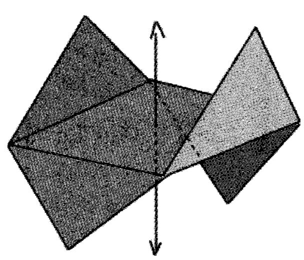


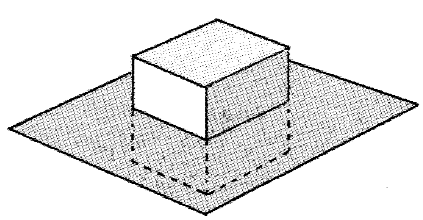
Plegado iso-área

En general, el papel utilizado en papiroflexia suele ser blanco de un lado y coloreado del otro. Al finalizar el plegado, se obtienen objetos tales que el anverso y el reverso de las superficies utilizadas son iguales.
Pero no es ésto lo que Toshikazu Kawasaki denomina plegado iso-área sino los objetos que repiten el principio de la cinta de Moëbius.

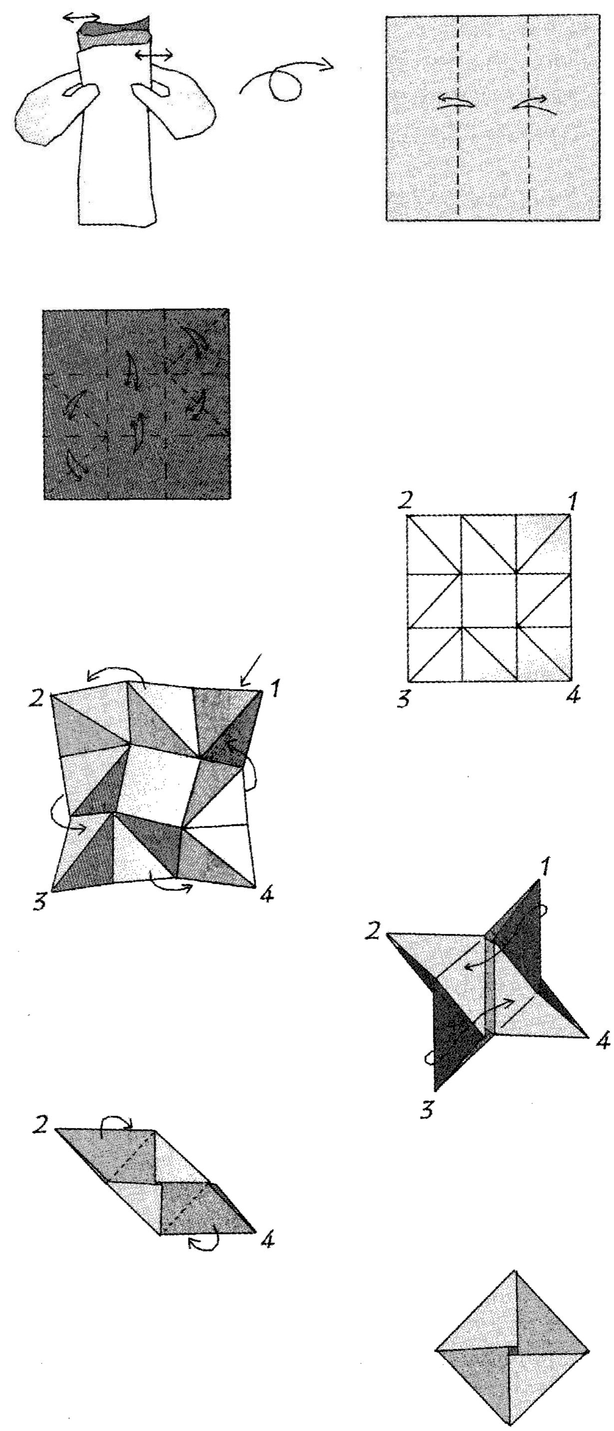


Ésta es la representación del plegado iso-área en forma plana y en forma sólida.



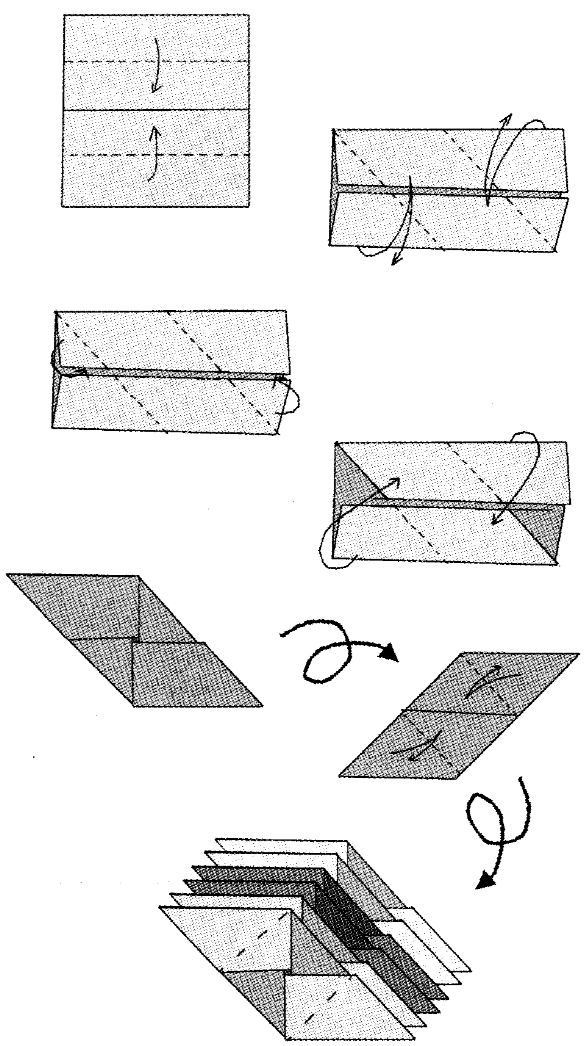


Ejemplo de este plegado, bastante más complicado, por cierto, que el que estamos acostumbrados a efectuar cuando ambas caras no resultan iguales, es este posavasos.

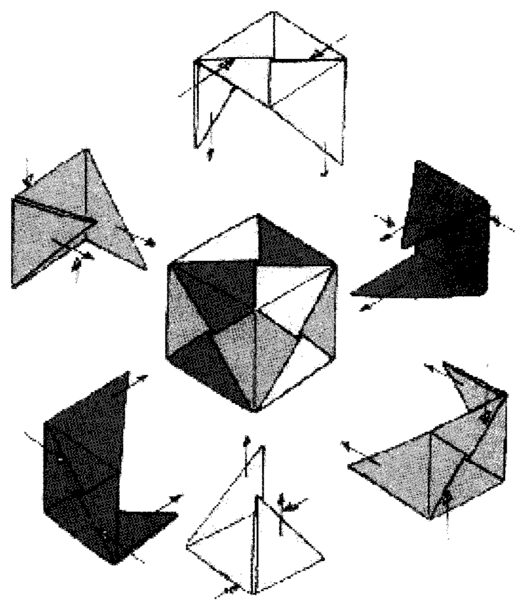


Una mención especial merecen las construcciones tridimensionales. Nos referiremos a ellas a partir de la visión que nos da el Origami modular, es decir, aquél en el que se utilizan varias hojas para la confección del objeto. Mitsunobu Sonobè da origen a la legendaria "caja de color" que se conoce con el nombre de módulo Sonobè.
El ensamblado de distinta cantidad de unidades permite la confección de multitud de cuerpos y figuras maravillosas.

El módulo Sonobè



Seis unidades, dos de cada uno de tres colores distintos



A modo de conclusión

Es indudable la necesidad de que los alumnos adquieran el conocimiento de las propiedades geométricas de las figuras de dos y tres dimensiones, tal como lo establece el programa secundario de los primeros años y el de EGB del tercer ciclo.
Que el descubrimiento lo hagan a través de estas construcciones y experimenten con ellas, puede resultar más ameno e interesante que el estudio tradicional, cuyo nivel de abstracción vemos hoy cada vez más lejos del alcance de nuestros alumnos.

* Profesora en Matemática y Astronomía egresada del I.S.P. «Dr. Joaquín V. González»

Bibliografía:

KASAHARA K. y TAKAHAMA T. , *Papiroflexia "origami" para expertos,* EDAF, Madrid, 2000.
TAKAHAMA, Toshie, *Origami for displays/ Ornaments*, Sufunotomo Co., Tokyo, 1995.

El retorno

por *Claudio Salpeter* *

Hacia el año 1895, Herbert George Wells escribió *The Time Machine*. Un hombre inventa una máquina que le permite viajar a remotísimos siglos. En el año 802000 y tantos, se encuentra con habitantes de extrañas costumbres. Luego, de regreso a su época, describe a sus amigos aquel descubrimiento; éstos, como era de esperar, descreen de sus visiones. El protagonista, sintiendo tal vez nostalgia de su porvenir, se instala nuevamente en su máquina. Sus amigos ya no volverán a verlo.

Imposible imaginar aquella inaudita empresa sin una *máquina del tiempo*. Hoy un hombre recorre (sé que es así) ignotas regiones del tiempo prescindiendo de aquel valioso medio; pronto alguien lo seguirá. Me limitaré, pues, al relato de los únicos acontecimientos que mi fugaz estado consciente es capaz de transmitir.

En septiembre de 1997 recibí, en mi domicilio de la calle Sarmiento, el número catorce de *Mathematical Concepts and Reports*, que edita y dirige Arthur L. Kinsey en forma rigurosamente trimestral. En ella me detuvo el artículo de una sección que mi lectura suele omitir. No sustento por la didáctica de la matemática ningún interés especial, pero que Erik Laggendorf haya titulado su opúsculo con un lacónico *Travels* me causó, cuanto menos, cierta sorpresa. Laggendorf, hasta donde sé, desprecia la enseñanza. Por otra parte, suele carecer de la virtud (o del vicio) de la síntesis. Leí el escrito no sin el prejuicio del que sospecha que nada interesante va a encontrar. Al cabo, descubrí que mi pensamiento era infundado.

Laggendorf declara la imposibilidad real de todo tipo de enseñanza. Las diversas didácticas son, para el matemático dinamarqués, meras falacias, producto de la soberbia universal de la especie humana. El aprendizaje de los conceptos matemáticos (aun los más básicos) no es, como suele pensarse, un proceso que involucra la razón y la tenacidad. Es, por el contrario, un proceso de captación de sensaciones, de percepción de ideas latentes en nuestro subconsciente (algo así como la *anamnesis* platónica). Estas ideas no son, por lo tanto, inherentes al objeto de estudio, sino que son producidas por el mismo sujeto. Nuestro concepto de número (si es que puede existir tal cosa) no es el mismo en cada época o en cada región. El número tres es una característica común que tienen todos los tríos. Para el matemático occidental *un número es* -siguiendo a Russell- *cualquier cosa que es el número de alguna clase.* Para los maoríes -siguiendo a Barton-, tres es un verbo. Asimismo, Oswald Spengler en *La decadencia de Occidente* postula la existencia de diferentes tipos de números: uno indio, otro árabe, otro antiguo, otro occidental; de aquí concluye que *no hay ni puede haber número en sí.* De este modo, pretender que puede transmitirse alguna idea es un síntoma de ingenuidad, o de vileza. Los *Travels* constituyen un ataque a las diversas escuelas didácticas. Las últimas líneas del artículo mencionan la posibilidad de utilizar, sin embargo, ciertos métodos no usuales.

Las críticas de Laggendorf, aunque carecían de originalidad, me recordaron la pluma injuriosa, no exenta de ironía, de Schopenhauer: *Los franceses, con sus pomposas explicaciones, han olvidado la principal regla de toda didáctica: ser didácticos.* Esta dialéctica me distrajo, y supuse en aquel momento que aquellos *métodos no usuales* sólo eran parte de su juego verbal.

No existe actividad humana que no contenga un aprendizaje, pero también, que no postergue algún otro. En el capítulo XIX de la *Didáctica Magna*, Juan Amós Comenio declara que *aprender y enseñar están íntimamente enlazados.* Las palabras del educador checo o tal vez, la insistencia de Fernando Chorny, me convencieron para asistir, en julio de 1998, al IV Congreso Latinoamericano de Educación Matemática con sede en Bariloche.

Chorny estaba interesado en escuchar al profesor brasileño Gilberto Filgueiras Da Souza, cuya charla, si no recuerdo mal, versaría sobre el arte de contar hasta tres de los *Cajuneiros,* tribu antropófagade la selva amazónica (parece ser -después me enteré- que su sistema de numeración y su *modus operandi* fue registrado por un jesuita del norte, el padre Adalberto Feijoada, quien sería deglutido oportunamente por los indígenas). Al mediodía del día once, pisamos la ciudad.

Bariloche, helada y hermosa, enseñaba con orgullo sus cerros blancos y su inmenso lago; el marco imponente de este santuario del sur predisponía a la contemplación. La imprevista tormenta que nos recibió nos predispuso, empero, al refugio en el comedor del hotel. A la mañana siguiente, tras el chocolate caliente de rigor, nos dirigimos al edificio central. Mientras mi amigo discurría en la matemática salvaje, yo decidí hojear el programa del día. La conferencia de las dieciséis horas registraba, para mi sorpresa, un exiguo encabezado: *Travels*. Habían logrado traer al país a Erik Laggendorf. Era un hombre de rostro melancólico pero enérgico. Se notaba cierto descuido en su vestimenta. Argüí que no tendría más de cuarenta y cinco años de edad. No repetiré sus palabras, que escuché y no comprendí, ni sus esquemas, que observé y olvidé al instante. Pero creo poder esbozar algunas de sus ideas. El sonido, adujo Laggendorf, puede transportarnos a formas arcaicas de percepción; formas sutiles que hemos olvidado pero que alguna vez fueron patrimonio de nuestros remotos antecesores. El individuo ha perdido la capacidad de oír la caída de la frágil nieve, el continuo fluir de la sangre de su cuerpo o el rumor producido por el movimiento de las alas de la crisálida. No me refiero a sonidos mitológicos, como la música de las esferas celestes de los pitagóricos o el canto de las sirenas que escuchó Ulises; hablo de sonidos reales, puros, olvidados. Este retorno a las percepciones primeras puede llevarnos a conceptos abstractos originados en las mentes de nuestros antepasados. Tal es el caso de la idea de número. Russell ya advirtió que deben haberse necesitado muchos siglos para descubrir que un par de faisanes y un par de días son, ambos, ejemplos del número dos. Hoy esta noción de número natural nos resulta baladí; no así otras, verbigracia, la de número irracional (es de notar que para el famoso matemático del siglo XIX, Leopold Kronecker tales números no existían). Si es posible percibir sonidos ancestrales, tal vez podamos hacer lo propio con los conceptos aritméticos o geométricos surgidos en la antigüedad. Las matemáticas que intentan enseñarse son el resultado de siglos de marcha y contramarcha, y no pueden ser captadas por individuos alejados de las motivaciones primigenias.

Debo admitir que aquellas palabras, aunque carentes de fundamento, me resultaron atractivas. Su estilo tajante y vehemente provocó cierta perplejidad en un auditorio que iba disminuyendo con el correr de los minutos. El último tramo de su exposición fue un ejercicio de percepción sensorial;Laggendorf lo denominó *Travels*. Bajo el amparo de la oscuridad, comenzaron a escucharse toscos ruidos que fueron transformándose en disímiles sonidos. Al principio, de cierta familiaridad: cascadas, truenos, vientos, lluvia. Después, semejaron remotos murmullos, alguna vez percibidos. Los sonidos fueron luego más extraños, ignotos, lejanos (sé que experimenté temor y desamparo). Algunos de ellos se repetían y parecían emerger desde el interior de mi cuerpo. Aquí mi memoria zozobra; hay cierta confusión, ciertos cambios. Sentí que esos intangibles sonidos fluían en torno a mí y, de alguna manera, me sostenían. Pensé, tal vez con soberbia, que podía producirlos a voluntad. Inesperadamente, comencé a anticiparlos. Establecí un orden y fui capaz de ejercitar una clasificación. Esta actividad mental fue hecha en forma natural, sin procesos deductivos. Comprendí (o creí comprender), siquiera unos instantes, al inefable Número. Pude verlo en toda su nitidez y pureza; quizás lo escuché (revelación ésta que hubiera agradado a la hermandad pitagórica).

El lenguaje es un instrumento asaz pobre. Estos avatares recién descriptos son sólo el resultado de un precario recuerdo traducido en palabras de escasa significación. Si hubiera podido ir reflejando en alguna lengua cada uno de aquellos estados mentales a medida que transcurrían aquellos sonidos, ¡qué misterios maravillosos no habría develado, qué magnífica poesía no habría gestado! Debe consolarse mi espíritu con meras parcialidades.

Como el resto de los que presenciamos el experimento, negué que hubiera acontecido algún suceso extraño más allá de cierto aturdimiento. Laggendorf no efectuó ninguna conclusión.

A fines de 1999, Arthur Kinsey anunciaba en la nota editorial de la *Mathematical Concepts* que, inexplicablemente, le había perdido el rastro a Erik Laggendorf desde hacía casi seis meses; su madre y sus escasos amigos no ignoraban esa ausencia. Kinsey insinuó que la última vez *había notado a Erik algo abstraído y cansado*; mencionó también una brevísima carta que le llegara el día anterior a su desaparición. Pensaba que la revista podría servir de ayuda para encontrar a Laggendorf. Decidí (en aquel momento desconocía que mi viaje ya se había iniciado) solicitar una copia de aquella carta. En menos de una semana el documento fotocopiado llegó a mis manos. Sus escasas líneas decían: *Lamento no poder enviar aún el artículo prometido. Tengo algo descuidada mi salud. Un zumbido tenaz, casi familiar, me acompaña fielmente desde hace unos días. No puedo evitar el retorno.*

Al principio lo creí preso de alguna enfermedad incurable e interpreté que "el retorno" se refería a su propia muerte. Ahora comprendo que hubo de transitar una remota serie, cuyos tramos iniciales ya conozco. Ignoro, sin embargo, su desenlace final, que presiento terrible.

No transcurrió un mes cuando sentí, durante unos escasos segundos, un ligero zumbido en mis oídos. Al mes siguiente, volvió a repetirse el cuadro. El relato de los detalles de mi existencia desde aquellos fatídicos días no es tarea que esté a mi alcance; no hallaré palabras que describan, siquiera someramente, las innumerables visiones, las perplejidades infinitas, los temores, los sueños, los instantes dichosos, el asombro. Hoy, ya acostumbrado a ese sonido familiar, he perdido ciertas nociones del lenguaje oral: como consecuencia de ello he comenzado a aislarme. He descuidado -por momentos soy consciente de estas cosas- mi higiene, mi vestimenta; ha crecido mi barba desmesuradamente. Por otra parte, los colores me resultan más vívidos; veo en ciertas formas, como la luna o las nubes, tal nitidez y belleza, que deslucen y degradan mi torpe forma humana. Hay veces en que extraño el fuego (aunque también le temo). Todo esto me sorprende, pues mi naturaleza nunca fue proclive a la contemplación.

Son ya escasos mis períodos de lucidez; últimamente los he deplorado. La inconsciencia es mucho más grata. Se sienten temores, lo admito, pero se es inmortal.

Pronto atravesaré inciertas regiones; repetiré, con seguridad, el camino de Erik Laggendorf. Sé que, inconcebiblemente, estoy retornando.

* Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. «Dr. Joaquín V.González»

Rara vez se obtiene un descubrimiento significativo o una visión esclarecedora si se hace uso de un procedimiento exclusivamente axiomático. El pensamiento constructivo, guiado por la intuición, es la verdadera fuente de la dinámica matemática.

La intuición constructiva de los matemáticos da a esta ciencia un elemento no deductivo e irracional que la hace comparable con la música y el arte.

De *¿Qué es la Matemática?* de Courant y Robbins

Comentarios de textos

por *Jorge Martínez* *

***La medida de la realidad (La cuantificación y la sociedad occidental, 1250-1600),* Alfred W. Crosby, Editorial Crítica, Barcelona, 1998. 205 páginas.**

En el siglo X, un geógrafo árabe llamado Masudi, escribió: "*Los europeos son gente de mente embotada y cuánto más al norte están, más ignorantes y groseros son*".

Al fin de la **Edad Media** y comienzos del **Renacimiento**, ya no era posible sostener esta opinión pues Europa se encontraba en las primeras etapas de creación de la ciencia y la tecnología, que la llenarían de esplendor. En este texto **Crosby**, desde la perspectiva de historiador de la ciencia, describe la forma en que el viejo continente logró convertirse en extraordinario crisol de ciencia y cultura, en un lapso de 350 años.

Esta revolución cultural, según Crosby, no parece haber sido simple y solamente consecuencia lógica de una expansión política, y necesitó la aparición de un nuevo modelo explicativo de la realidad que desplazara al viejo modelo cualitativo. Este nuevo modelo fue el modelo cuantitativo y la idea central de este modelo: "*Conocer es medir*".

Artistas, inventores, burócratas, banqueros, astrónomos y filósofos, buscaron en la aplicación de la Matemática un modo de expresarse mejor y poder crear explicaciones creíbles de la realidad.

Y así, el artista del Renacimiento desarrolló la perspectiva, el banquero medieval simplificó sus cálculos al adoptar los números arábigos y el cartógrafo realizó mapas más precisos; pero, lo que es más importante, el desarrollo tecnológico se aceleró en forma notable.

¿Qué tuvo que ver en este complejo proceso el desarrollo propio de la Matemática ?

Mucho, según Crosby, y en este ameno pero riguroso libro justifica su opinión.

Las explicaciones giran sobre tres notorios ejes: **la Pantometría** (medición universal), la **visualización** ("*El ojo........príncipe de las Matemáticas*", decía Leonardo) y el nuevo modelo **cuantitativo**.

Los capítulos 4, 5 y 6 dedicados al tiempo, al espacio y a la Matemática, son notables páginas de Historia de la Matemática donde la razón explicativa no olvida el aforismo de Mumford: (*Toda cultura vive dentro de su sueño*). Un importante elenco de matemáticos como Al Khuwarizmi, Gerberto, Fibonacci, Oresme, Nicolas de Cusa, Pacioli y Recorde, por nombrar algunos, transitan estas páginas y lo notable es que no lo hacen desagregados, muy por el contrario, pertenecen a un conjunto definido por la continuidad del desarrollo matemático desde el Medioevo hasta el Renacimiento . Este desarrollo culminará en el mundo de Copérnico y Galileo, nada menos.

Kelvin dijo una vez: "*... cuando no puedes expresarlo en números, tu conocimiento es pobre e insatisfactorio*". Ese parece ser el espíritu protector de este sorprendente texto.

* Profesor de Matemática, egresado del I.E.S. Nº 2 «Mariano Acosta».

Problemas y juegos de ingenio

Gracias a la feliz intervención de nuestros lectores es que, en esta vida azotada por los problemas, hemos tenido la suerte de comenzar a recibir soluciones. Publicamos aquí las correspondientes a los problemas de Axioma nº 13 y ofrecemos a continuación un par de problemas nuevos, para seguir alimentando este fuego que es la luz de nuestro entendimiento.

1. *Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro.*
La profesora de Alfredo y Bernardo les ha pedido que calculen ln(arctg x) – ln(arctg y), para ciertos valores de "x" e "y" ($x > y > 0$). Ambos alumnos efectuaron el cálculo usando una calculadora científica. Alfredo trabajó (correctamente) con la calculadora en modo RAD, pero Bernardo usó la calculadora en modo DEG. Sin embargo, ambos obtuvieron el mismo resultado *¿por qué?*

Alfredo y Bernardo hacen el siguiente cálculo

ln (arctg (x)) - ln (arctg (y)) = $\ln\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{arctg}(y)}\right)$

Para la calculadora de Bernardo, que está en modo DEG, es

arctg(x)=a
arctg(y)=b

Con lo que calcula: $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

Para la calculadora de Alfredo, que está en modo RAD, es

arctg(x)= $\frac{a}{180^\circ\pi}$

arctg(y)= $\frac{b}{180^\circ\pi}$

Con lo que calcula: $\ln\left(\frac{\frac{a}{180^\circ\pi}}{\frac{b}{180^\circ\pi}}\right)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

Ambos cálculos arrojan el mismo resultado.

2. *Extraído de "La probabilidad y sus aplicaciones" – SANTALO, L. – Buenos Aires, Ibero-Americana, 1955.*
Calcule la probabilidad de que dos números enteros dados al azar sean primos entre sí. (Se aceptan aproximaciones)

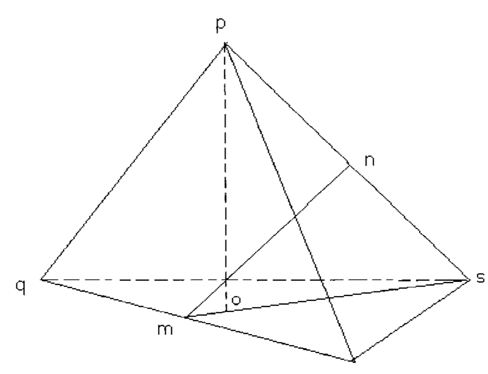
La solución de Santaló: La probabilidad de que un número entero sea divisible por un primo p es igual a 1/p. Luego, la probabilidad de que dos números no sean divisibles a la vez por p es de $1-\frac{1}{p^2}$

La probabilidad buscada es entonces igual al producto de los infinitos factores $1-\frac{1}{p^2}$ que se obtienen dando a p los distintos valores primos posibles p = 2, 3, 5, 7, 11,... Este producto infinito es igual a $\frac{6}{\pi^2}$, que es la probabilidad buscada.

(SANTALÓ, Luis - La probabilidad y sus aplicaciones - Buenos Aires, Iberoamericana, 1955).

3. *Extraído de "Cómo plantear y resolver problemas" – POLYA, G. – México D.F., Trillas, 1965.*
En un tetraedro cualquiera, dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son ortogonales. Además, cada una de esas aristas es perpendicular a la línea, de longitud b, que une sus puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b.

El siguiente dibujo representa el tetraedro protagonista del problema.



Las hipótesis son:

$qr \perp ps$
$|qr|=|ps|=a$
m punto medio de qr
n punto medio de ps
$mn \perp qr$
$mn \perp ps$
$|mn|=b$

mn y ns determinan un plano ortogonal a qr. Como ms está incluido en ese plano es $ms \perp qr$ y, por lo tanto, ms es la altura del triángulo qrs (base del tetraedro) correspondiente al lado qr.
Además ms es hipotenusa del triángulo rectángulo mns. Calculemos ms: $|ms|=\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Entonces la superficie de la base del tetraedro, qrs es:

$$\sup=\frac{base.h}{2}=\frac{a.\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} \quad (1)$$

Para calcular la altura po del tetraedro llamemos α= ángulo nsm. Entonces

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{|po|}{|ps|}=\frac{|po|}{a}\Rightarrow |po|=a.\operatorname{sen}\alpha \quad (2)$$

Podemos calcular α en función de a y b si hacemos, en el triángulo mns

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|mn|}{|ns|}=\frac{b}{\frac{a}{2}}\Rightarrow \alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right) \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) tenemos

$$|po|=a.\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{2b}{a}\right) \quad (4)$$

Ahora, el volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{\sup base\times h}{3}$$

De (1) y (4) resulta

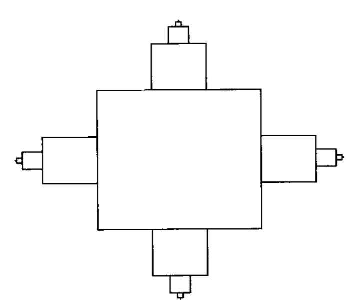
$$V=\frac{a\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2}\cdot a\cdot\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right)\right)\cdot\frac{1}{3}$$

Queda como ejercicio para el lector buscar una expresión más estética para este engendro que hemos obtenido.

4. Extraído de "Aritmética Elemental en la formación matemática" – GENTILE, E. – Buenos Aires, Olimpíada Matemática Argentina, 1992.
Probar que hay un único primo p tal que 2p + 1 es un cubo.

Si 2p+1 es un cubo debe haber un n natural tal que
$2p + 1 = n^3$
$2p = n^3 - 1$
Pero el segundo miembro de la igualdad anterior puede factorearse quedando
$2p = (n-1)(n^2 + n + 1)$ (*)
Como p es primo (y $p\neq 2$, ya que con p = 2, 2p+1 no es un cubo) la expresión 2p es la única factorización posible del primer miembro en (*) Como, por ser n natural, $n^2 + n + 1$ es mayor que 2, la única posibilidad en (*) es que sea n -1 = 2, es decir, n = 3. Con esta solución, resulta p = 13, el primo (único) que estábamos buscando.

5. *Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro.*
Consideremos la siguiente figura: tomamos un cuadrado unitario, dividimos cada uno de sus lados en tres partes iguales y sobre cada tercio central dibujamos un cuadrado de lado 1/3. Repetimos la operación sobre cada uno de los lados "exteriores" de estos cuatro cuadrados más pequeños: dividimos el lado en tres partes iguales y sobre el tercio central dibujamos un cuadrado de lado 1/9. Repetimos esta construcción ad infinitum obteniendo como resultado una figura de aspecto similar a la siguiente:



Hallar el área total de la figura.
Hallar el perímetro total de la figura.
Hallar el área del menor cuadrado que es capaz de contener a la totalidad de la figura.

Solución propuesta por Marcela Bartomeo, (estudiante del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González")

Primero tenemos que analizar cómo van variando las medidas de los lados de los cuadrados que forman parte de la figura. El central tiene lado de medida 1, el que le sigue mide 1/3, el otro, 1/9 (o sea $(1/3)^2$), el siguiente 1/27 (o sea $(1/3)^3$) y así sucesivamente.

Por lo tanto, podemos escribir la sucesión de las medidas de los lados: 1, $\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$,... Ahora, para calcular el área de la figura tenemos un cuadrado central de área igual a 1 y a ése le tenemos que sumar cuatro cuadrados del "primer nivel", cuatro del "segundo nivel" y así sucesivamente. Veamos:

Área = $1+4\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2+4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2+4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2+\dots$

Área = $1+4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^6+\left(\frac{1}{3}\right)^8+\dots\right]$

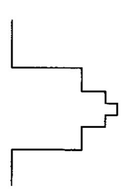
Área = $1+4.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$

Resulta que ahora nos quedó una serie geométrica para calcular la suma. Así, tenemos:

Área = $1+4.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = 1+4.\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

Ahora nos toca calcular el perímetro; para esto vamos a analizar el perímetro de la figura que se forma sobre cada lado del cuadrado central y luego lo multiplicamos por cuatro.

En cada lado del cuadrado tenemos (ver figura):



$4.\frac{1}{3}+4.\frac{1}{9}+4.\frac{1}{27}+\dots$ o sea $4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}$. Como esto ocurre en cada lado y tenemos cuatro lados iguales, queda:

Perímetro = $4.4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}=16\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}=16.\frac{1}{2}=8$

(por tratarse otra vez de una serie geométrica). Para hallar el área del menor cuadrado que es capaz de contener a la figura, primero necesito encontrar la medida de la diagonal de dicho cuadrado. Lo que se me ocurrió es trazar la base media del cuadrado central (cualquiera de las dos) y como también es base media de todos los cuadrados que están apoyados en los lados (si la prolongo lo suficiente), lo único que necesito para hallar la diagonal buscada es sumar las medidas de todas esas bases medias. Por lo tanto, llamando D a la diagonal, queda:

D = $1+2.\frac{1}{3}+2.\frac{1}{9}+2.\frac{1}{27}=1+2.\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}=1+2.\frac{1}{2}=2$

Entonces el área del cuadrado mínimo que contiene a la figura es $\frac{D^2}{2}=\frac{4}{2}=2$.

Problemas propuestos:

1. Propuesto por el Prof. Jorge Martínez

Azur, guerrero de Caldea, visita la tumba de Eibal (notable caudillo militar). Un sacerdote le impide el paso y le dice:
- Para entrar aquí has de descomponer el medio en cuatro partes de la unidad distintas entre sí.Azur contesta: 1/2 = 1/4 + 1/7 + 1/12 + 1/42
Azur entra y rinde respetos al gran soldado. Cuando sale, el sacerdote vuelve a pedirle:
- Para salir, haz lo mismo de distinta forma.
Azur invoca: 1/2 = 1/3 + 1/8 + 1/42 + 1/56, luego sale.
Amigo lector ¿puedes dar otras descomposiciones y, si el tiempo te es propicio, dar una receta para la partición del medio?

2. Propuesto en la Semana de la Matemática organizada por la FCEN - UBA:

a) Demostrar que arctg (1/2)+arctg(1/3)= $\pi/4$
b) Demostrar que arctg (1)+arctg (2)+arctg (3)= π

NOTA: Prof. Alicia Bignon: gracias por sus palabras que nos alientan a seguir adelante con entusiasmo y por las soluciones de los problemas. Esta nota la hemos agregado sobre el cierre de la edición cuando otras soluciones ya habían sido publicadas.

Aχioma

La Revista de los profesores y estudiantes de Matemática

Adelantos Aχioma 17

Apuntes sobre... Lógica Matemática (2º parte)

Historia: El Programa de Erlangen

Entrevista al Profesor Juan Foncuberta

Experiencias en el aula: Estimaciones

Comentarios de Textos.

Invitamos a nuestros lectores -los de siempre y los que vendrán- a hacernos llegar sus críticas, sus sugerencias, su parecer con respecto a esta nueva etapa de Aχioma, y todas aquellas cosas que consideren de valor o de interés para la revista.
Sepa el amigable lector que recibir su correspondencia genera en cada uno de nosotros un renovado estímulo. Tanto la aprobación -que nos afirma en nuestro camino- como la dura crítica -que nos invita a mejorar constantemente- constituyen un alimento inapreciable para nuestra labor.
El lector puede contactarse con nosotros a través de nuestro correo electrónico o postal.