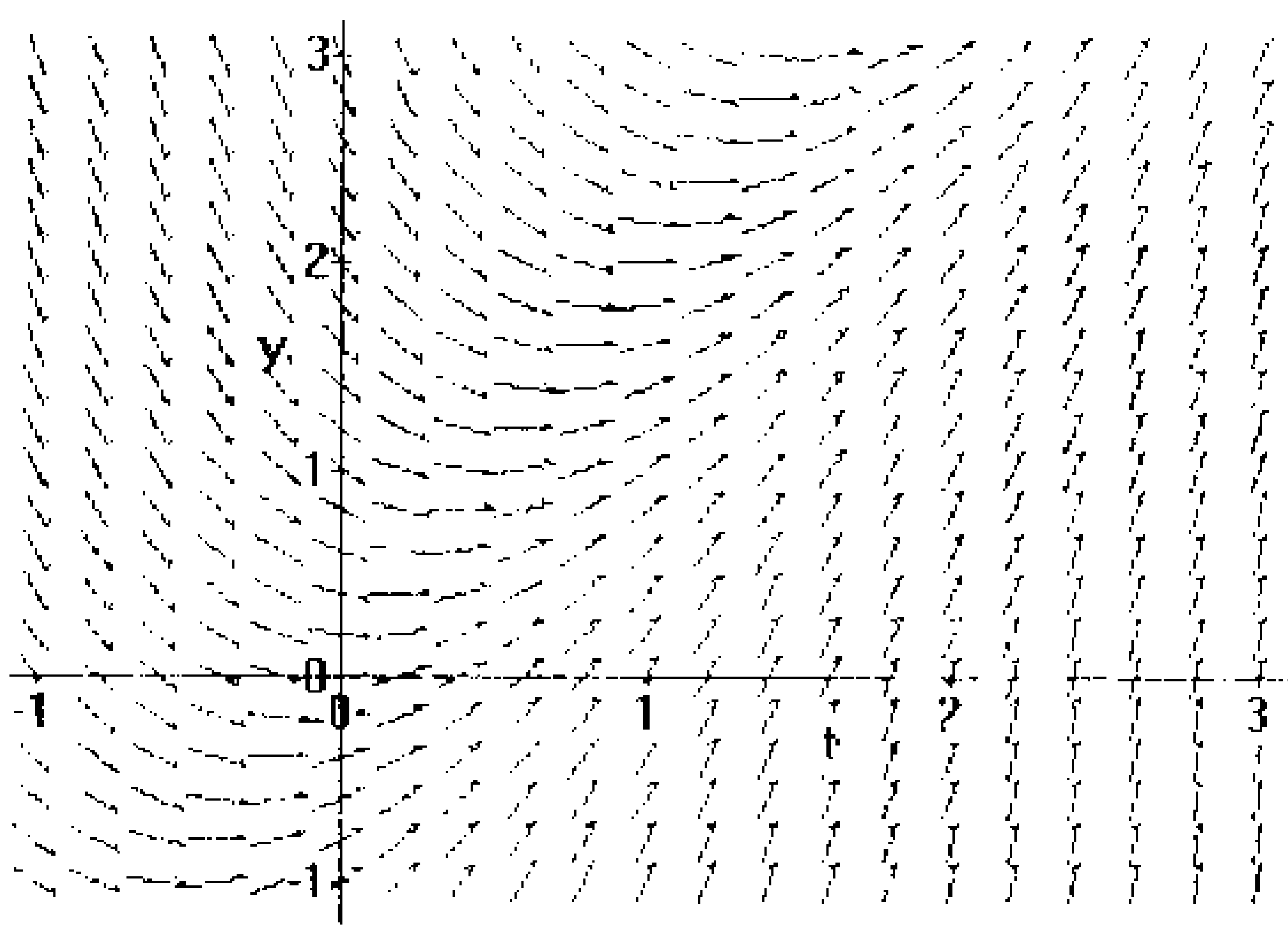
Aχioma

La revista de los estudiantes y profesores de matemática

APUNTES SOBRE...



Ecuaciones Diferenciales *(Segunda Parte)*

(Página 2)

Marzo/Abril de 1997 **Año 1 - Nº 5**

Aχioma Nº 5

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Directora
Gisela Serrano de Piñeiro

Propietarios

Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro

Colaboraron en este número
Jorge Martínez
Pablo Ingrassia

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

La responsabilidad sobre las opiniones vertidas en notas firmadas es exclusiva de sus autores.

Registro de la Propiedad Intelectual: en trámite.

Suscripción por 5 números: $11.-

Ejemplar suelto: $ 2.-

Ejemplar atrasado: $ 2,20

Impreso en letra & color ediciones, en marzo de 1997 ☎ 343-0278

Editorial

Tras estos meses de "vacaciones" es un gran placer encontramos nuevamente con nuestros lectores.

Hemos introducido un cambio en el subtítulo. Las razones del mismo están motivadas en el hecho, por un lado, de que la revista no está dirigida ni elaborada sólo por y para estudiantes sino también por y para profesores.

Por otra parte, no queremos limitarnos a distribuir Aχioma sólo dentro del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González". Deseamos que nuestra publicación pueda servir como medio de comunicación y expresión, abierta a todas aquellas personas que sientan afinidad por la ciencia que nos ocupa.

Es necesario aclarar algo. El actual staff de Aχioma ha estudiado y estudia en el I.S.P. "Dr. Joaquín V. González", y está orgulloso de ello. Más aún, una de las razones que nos llevó a emprender, el año anterior, este proyecto fue la idea de que quizás podríamos aportar un pequeño granito de arena a la enseñanza en nuestra querida institución.

Sumario

Marzo / Abril de 1997

Año 1 - Nº 5

Apuntes sobre...

Ecuaciones Diferenciales (Segunda Parte)

En la presente sección trataremos, a lo largo de varias notas, temas que nos atraen por su importancia y por su riqueza. Hoy continuaremos con el tema Ecuaciones Diferenciales iniciado en Aχioma Nº 4.

Recordemos que, según lo visto en la nota anterior, una **ecuación diferencial** es una expresión que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada (incógnita) **y = y(x)** y sus derivadas sucesivas **y', y''**,..., $\mathbf{y^{(n)}}$. El máximo orden de derivación que aparezca en la expresión se denomina el **orden** de la ecuación.

En esta ocasión trataremos sobre las ecuaciones diferenciales **de primer orden**. Es decir, aquellas en las que sólo aparece la derivada primera de la función incógnita. Un ejemplo de ecuación de primer orden es aquella cuya solución estudiamos en la nota anterior, a saber:

$$0 = y' + y \qquad (^1)$$

Otro ejemplo de ecuación de primer orden es:

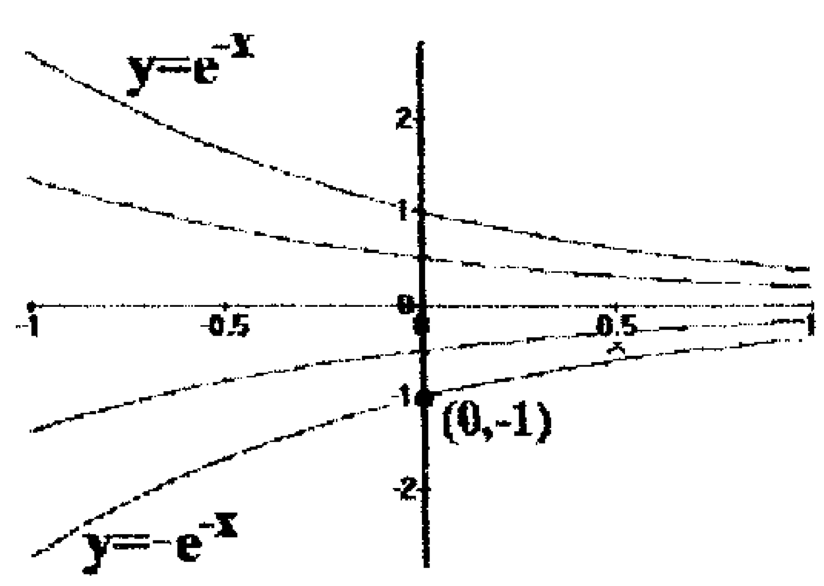
$$y' = 2x - y \qquad (^2)$$

Recordemos que la ecuación (¹) tiene en verdad *infinitas* soluciones, todas ellas expresables en la forma $y = ke^{-x}$, donde k es una constante que puede elegirse arbitrariamente.

En el problema planteado en la nota precedente sabíamos que la función buscada **y=y(x)**, además de satisfacer la relación (¹), cumplía que $y(0)=-1$. Este dato adicional (llamado la **condición inicial** de la ecuación) nos permitió determinar una única solución para el problema: $y=-e^{-x}$.

Geométricamente, la expresión $y=ke^{-x}$ (llamada la **solución general** de la ecuación) define una familia (o **haz**) de curvas en el plano; una curva para cada valor posible de k. Cada una de ellas se denomina una **curva integral** de la ecuación.

El problema de establecer cuál es la **solución particular** de la ecuación que corresponde a la condición inicial $y(0)=-1$ equivale a determinar cuál es la curva del haz que pasa por el punto (0, -1).



Las preguntas que debemos plantearnos ahora son: ¿siempre existe solución para una ecuación diferencial de primer orden? En el caso de que así sea, ¿siempre es única, una vez que se ha fijado la condición inicial?

Antes de dar respuestas a estas preguntas debemos ponernos de acuerdo acerca de ciertas notaciones.

Observemos que genéricamente una ecuación diferencial puede expresarse de la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

donde F es una función de tres variables. Por ejemplo, en (¹) es $F(x, y, y') = y' + y$, en (²) puede tomarse $F(x, y, y') = 2x - y - y'$.

Supondremos ahora que la ecuación puede resolverse respecto a y' (en otras palabras, que es posible *despejar* y'), en cuyo caso la ecuación podrá escribirse:

$$y' = f(x, y)$$

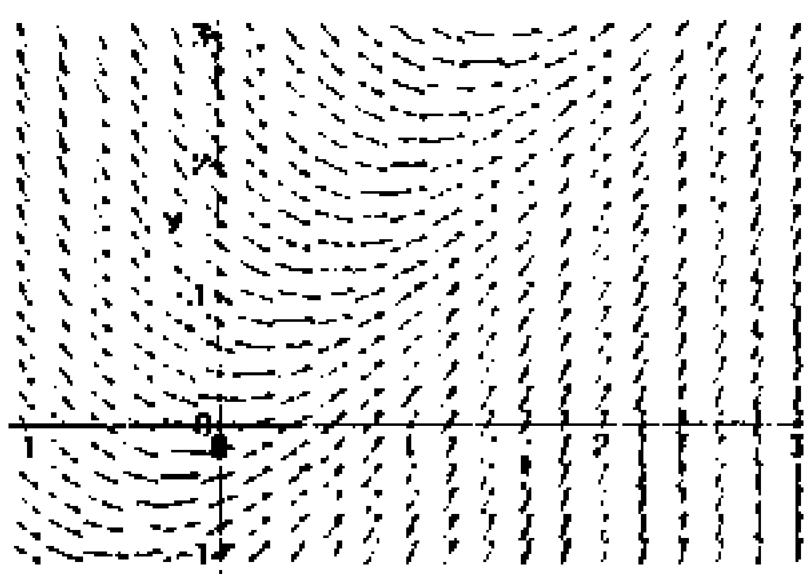
donde f es una función de dos variables. Por ejemplo, en (¹) es $f(x, y) = -y$, en (²) es $f(x, y) = 2x - y$.

La condición inicial de la ecuación puede escribirse genéricamente como $\mathbf{y(x_0) = y_0}$ donde $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{y_0}$ son datos del problema.

Las respuestas a las preguntas que nos habíamos planteado más arriba podremos ahora encontrarlas en el siguiente teorema.

Teorema: Si en la ecuación y' = f (x, y), tanto la función f como su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un cierto dominio **D** (*) y si $(x_0; y_0)$ es un punto de ese dominio, entonces existe una única solución **y = y(x)** de esta ecuación que satisface la condición $\mathbf{y(x_0) = y_0}$.

Analicemos a la luz de este teorema la ecuación (2). En este caso es f (x, y) = 2x - y, que es una función continua en todo el plano, así como lo es su derivada parcial respecto de y. El teorema nos dice entonces que, dada cualquier condición inicial $\mathbf{y(x_0) = y_0}$, existirá una solución de (2) que la satisfaga, más aún, habrá una única solución que satisfaga la condición inicial.
En consecuencia, la ecuación (2) tiene en verdad infinitas soluciones ya que, para cada número real $\mathbf{y_0}$ existe una (única) solución que verifica la condición $\mathbf{y(0) = y_0}$ y por supuesto tendremos una solución *diferente* para cada valor de $\mathbf{y_0}$ que elijamos. En este razonamiento hemos puesto $x_0 = 0$ en la condición inicial, tanto como podríamos haber tomado cualquier otro número.
La representación geométrica de estas infinitas soluciones constituye el haz de curvas de la ecuación. El hecho de que para toda condición inicial $\mathbf{y(x_0) = y_0}$ exista una solución se traduce en el hecho de que por todo punto $(x_0; y_0)$ del plano pasa una curva integral. Más aún, por cada punto $(x_0; y_0)$ del plano pasa una **única** curva del haz. En otras palabras dos curvas diferentes del haz no pueden pasar por el mismo punto, no pueden cruzarse entre si.
Podemos imaginarnos entonces al haz de curvas de (2) como una familia de curvas que cubren enteramente al plano y que no se cortan entre si.
Por otra parte, la ecuación nos dice que $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ y por lo tanto, nos da la siguiente información: si **C** es la curva integral que pasa por $P = (x_0, y_0)$ entonces la pendiente de la recta tangente a **C** en P es igual a $f(x_0, y_0)$.



Conocida en cada punto la pendiente de la recta tangente a la curva integral que pasa por allí podemos hacer un primer gráfico aproximado de las curvas integrales mediante el procedimiento de dibujar en muchos puntos (x, y) del plano pequeños segmentos de pendiente f(x, y) tal como se ve en el dibujo precedente.
El problema de resolver (o *integrar* como a veces se dice) una ecuación diferencial (con condición inicial $\mathbf{y(x_0)} = y_0$) se puede interpretar así: hay que hallar una curva que pase por (x_0, y_0) y tal que su pendiente en todo punto (x_1, y_1) del plano sea igual a $f(x_1, y_1)$.
Frecuentemente el problema de la construcción de las curvas integrales se resuelve introduciendo las isoclinas.

Definición:
Se llama **isoclina** al lugar geométrico de los puntos en los que las tangentes de las curvas integrales de la ecuación tienen la misma dirección.

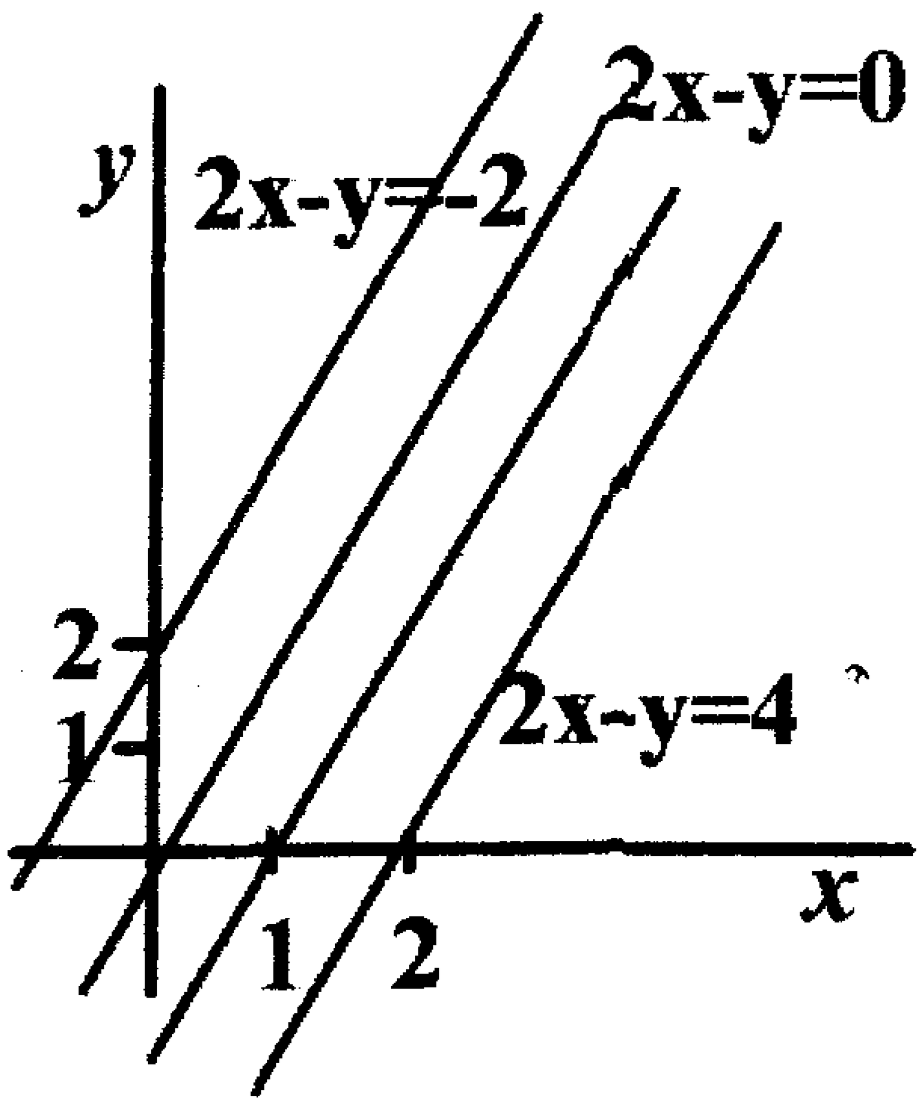
La familia de iscoclinas de la ecuación y' = f (x, y) está dada por la ecuación **f** (x, y) = k, donde k es una constante arbitraria (cada valor de **k** determina en realidad una isoclina diferente). Dando al parámetro **k** valores numéricos próximos dibujamos una red bastante compacta de isoclinas, sirviéndose de las cuales se pueden trazar las curvas integrales de la ecuación.
Estamos planteando entonces un método *gráfico* para resolver ecuaciones diferenciales.
Sirviéndonos de las isoclinas vamos a dar una resolución gráfica aproximada de la ecuación (2):

$$y' = 2x - y$$

Para obtener las ecuaciones de las isoclinas ponemos:

$$2x - y = k$$

Las distintas isoclinas son entonces rectas paralelas, todas ellas con pendiente igual a 2.

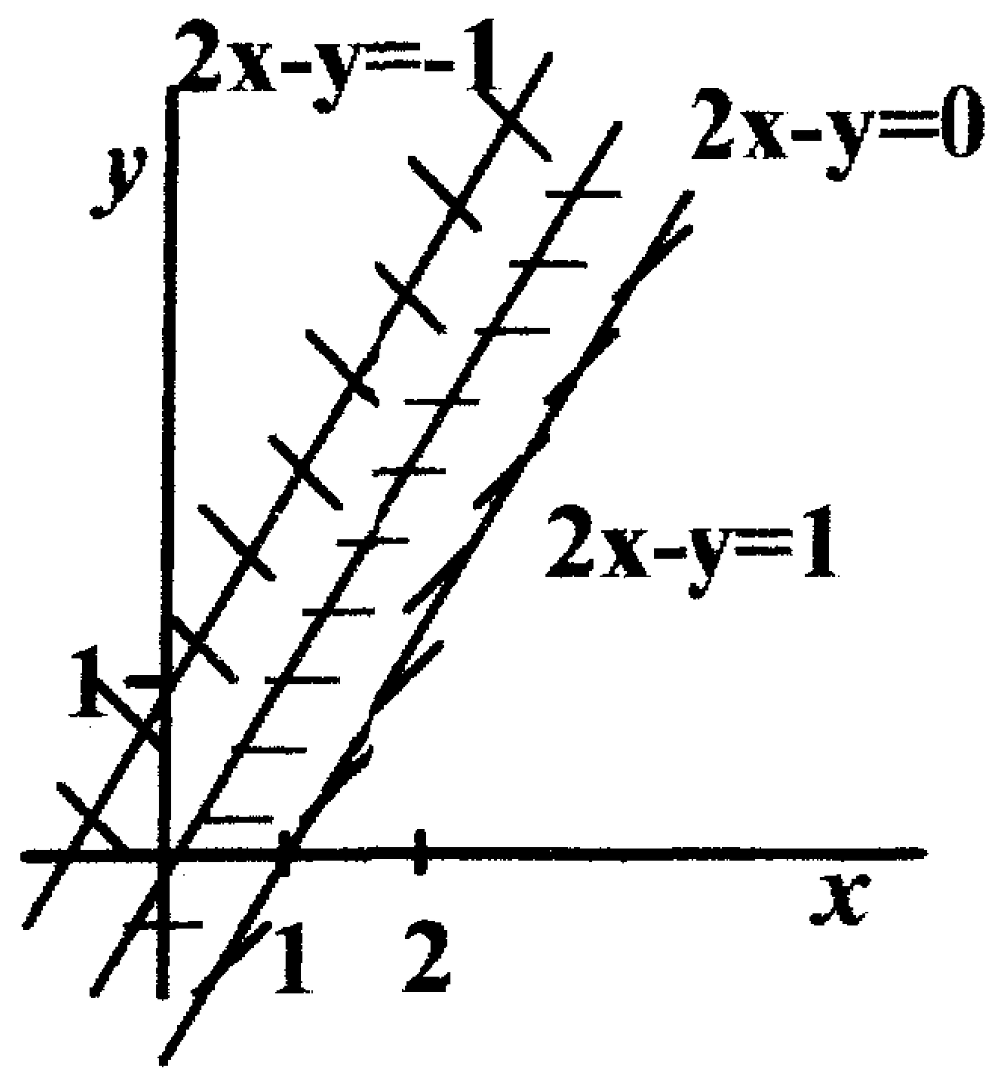


Para **k** = 0 (valor de la isoclina que corresponde a los puntos en los que y' = 0) se obtiene la recta y = 2x. Los puntos en esta recta son posibles máximos o mínimos de sus respectivas curvas integrales.

La recta y = 2x divide al plano en dos regiones. La región a la izquierda (o por encima) de la recta corresponde a valores negativos de **k** y por lo tanto a zonas de decrecimiento de las curvas integrales. A la derecha (o por debajo) los valores de **k** son positivos y por lo tanto las curvas integrales son crecientes allí.

Una consecuencia es que los puntos en la recta y = 2x son *mínimos* de sus respectivas curvas integrales.

Podemos trazar también algunas rectas tangentes. Sabemos por ejemplo que en los puntos correspondientes a la recta con **k** = -1 las tangentes forman ángulo de 135° con el eje **x**. Para **k** = 1 el ángulo es de 45°.



Además, puesto que y' = 2x - y podemos derivar ambos miembros de la igualdad y obtener:

$$y'' = 2 - y'$$
$$y'' = 2 - (2x - y)$$
$$y'' = 2 - 2x + y$$

Luego, sobre la recta y = 2x - 2 se tiene y'' = 0. Los puntos sobre esta recta son entonces posibles *puntos de inflexión* de sus respectivas curvas integrales.

Pero por otra parte, la función y(x) = 2x - 2 es ella misma solución de (2) (le pedimos al lector que verifique esta afirmación) y por lo tanto la recta **y = 2x - 2** es una de las curvas integrales de la ecuación.

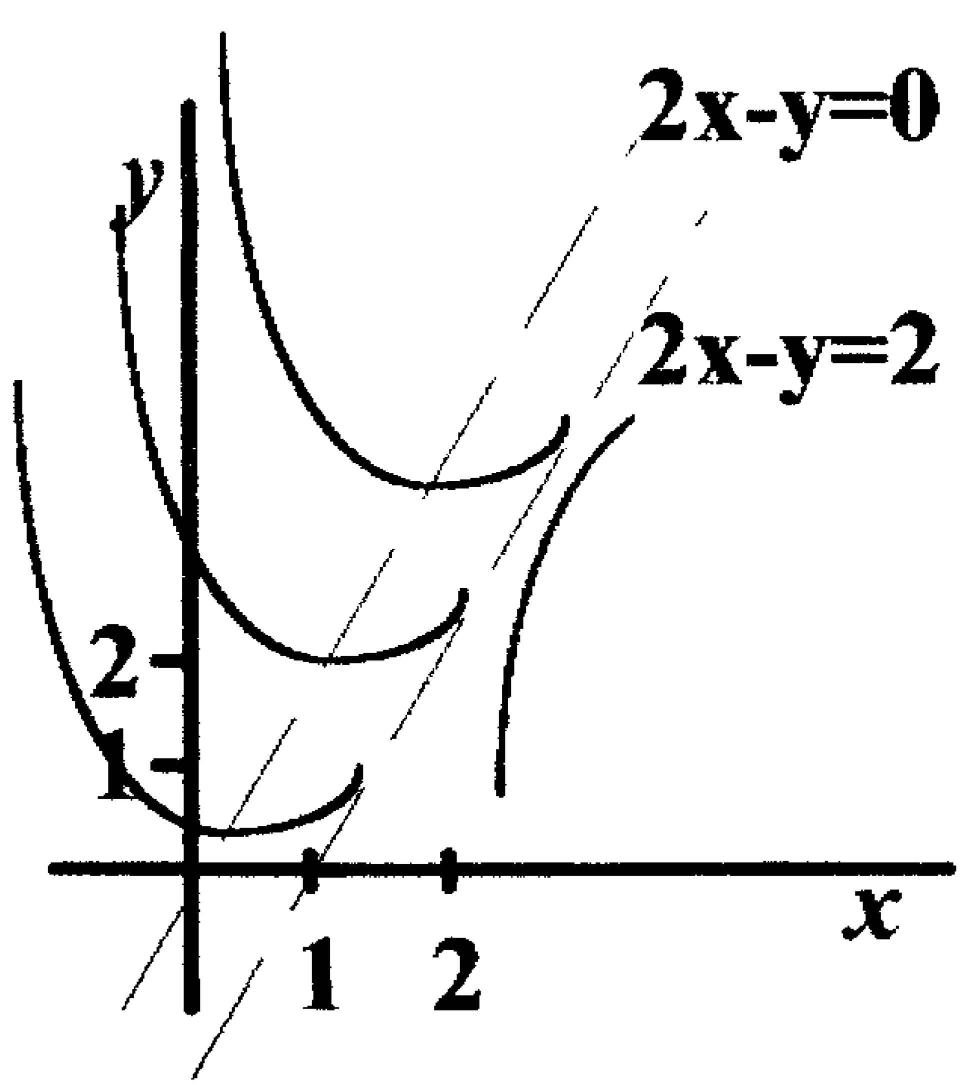
Como las curvas integrales no se cortan, deducimos que y = 2x - 2 divide al plano en dos regiones de modo tal que las curvas integrales a un lado de la recta *no se comunican* con las curvas integrales del otro lado.

Por encima de la recta **y = 2x - 2** vale **y > 2x - 2** y por lo tanto **y" > 0**. Luego, las curvas integrales ubicadas por sobre esta recta tienen sus concavidades hacia arriba. En la otra región es **y" < 0** y las curvas tienen sus concavidades hacia abajo.

Como las demás curvas integrales no se cortan con la recta **y = 2x - 2** y los puntos en esta recta son los únicos que verifican y" = 0 entonces ninguna de las curvas integrales tiene puntos de inflexión.

Además las curvas debajo de **y = 2x - 2** no cortan a la recta **y = 2x** (que está *por encima* de la recta **y = 2x - 2**). Pero **y = 2x** es la recta que contiene a los puntos donde vale y' = 0, por ende las curvas en la región debajo de **y = 2x - 2** no tienen puntos extremos.

El análisis que acabamos de realizar nos permite hacer un gráfico aproximado de las curvas integrales de la ecuación y' = 2x - y.



Cada una de estas curvas integrales es el gráfico de una solución de la ecuación.

Veamos ahora un método *analítico* para hallar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales.

Supongamos que queremos hallar la solución y = y(x) de la ecuación diferencial y' = f(x,

y) con condición inicial $y(x_0) = y_0$. Supondremos que en cierto rectángulo D con centro en el punto (x_0, y_0)

$$D = \{|x-x_0| < a, |y-y_0| < b\}$$

se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de la solución. Sea M una cota superior para los valores que toma la función f(x, y) en el rectángulo D.
Entonces pueden hallarse aproximaciones sucesivas de la solución mediante el siguiente sistema. Se va formando una sucesión recursiva de funciones $y_n(x)$ la cual queda definida por la relación:

$$y_n(x) = \int_{x0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt$$

Como primera aproximación, $y_0(x)$, puede tomarse a la función constante y_0.

Si $\mathbf{h} = \min(a, b/M)$ entonces para todo x entre $\mathbf{x_0-h}$ y $\mathbf{x_0+h}$ las aproximaciones sucesivas $y_n(x)$ convergen hacia la solución exacta de la ecuación. Para cada **x** el error cometido al reemplazar la solución exacta y(x) por la solución aproximada $y_n(x)$ es

menor que $\dfrac{M.N^{n-1}}{n!}h^n$, siendo N una cota superior para los valores que toma en D la derivada parcial de f (x, y) respecto de **y**.
Veamos como ejemplo la aplicación de este método para calcular aproximaciones sucesivas de la solución de la ecuación diferencial:

$$y' = x^2 + y^2 \quad (^3)$$

con condición inicial y(0) = 0; trabajando con puntos (x, y) en el rectángulo con

$$-1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1$$

(en otras palabras, tomamos en D los valores a = b = 1). Dejamos al lector la tarea de verificar que M puede tomarse con valor igual a 2 y que h = 1/2. Por lo tanto nuestra sucesión de funciones nos dará aproximaciones $y_n(x)$ cada vez más exactas para valores de x entre -1/2 y 1/2. Las aproximaciones sucesivas que se obtienen son:

$$y_0(x) = 0$$

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + y_0^2)dt = x^3/3$$

$$y_2(x) = \int_0^x [t^2 - y_1^2(t)]dt =$$

$$= \int_0^x (t^2 + t^6/9)dt = x^3/3 + x^7/63$$

$$y_3(x) = \int_0^x [t^2 + y_2^2(t)]dt =$$

$$= x^3/3 + x^7/63 + 2x^{11}/2079 + x^{15}/59535$$

Dejamos al lector la tarea de verificar que el error que se comete tomando a $y_3(x)$ como aproximación de la solución en el intervalo [-1/2, 1/2] es menor que 1/6.

Volviendo a los métodos gráficos para hallar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales, veremos ahora el llamado **método de Euler**. Con él se puede hallar en el intervalo $[x_0,b]$ la solución aproximada de la ecuación y' = f(x, y) con condición inicial $y(x_0) = y_0$.
El método de Euler consiste en construir una poligonal que aproxime a la curva integral que pasa por (x_0, y_0).
Para ello se divide al intervalo $[x_0,b]$ en **n** partes (no necesariamente iguales entre sí) marcando en él los puntos:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Se traza por el punto inicial $P_0 = (x_0, y_0)$ un segmento de recta con pendiente igual $f(x_0, y_0)$ hasta llegar a la altura de la abscisa x_1. Llamaremos P_1 al extremo del segmento correspondiente a la abscisa x_1. La ordenada de este punto se puede calcular como:

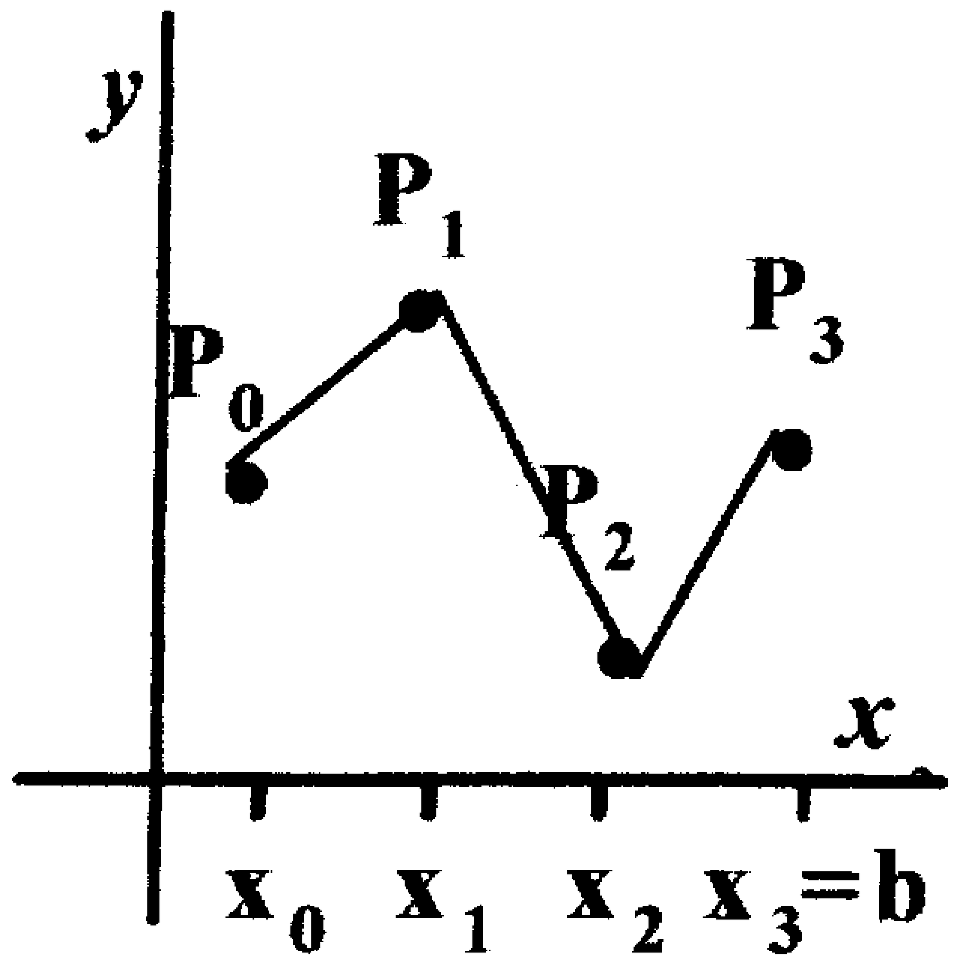
$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1-x_0)$$

Trazamos desde el punto P_1 un segmento de recta con pendiente $f(x_1, y_1)$ hasta llegar al punto P_2 a la altura de la absica x_2. Su ordenada viene dada por la fórmula:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2-x_1)$$

De modo análogo se determinan los puntos $P_3, P_4, \ldots, P_n$.
Al realizar esta construcción obtenemos la llamada **poligonal de Euler** que representa aproximadamente en el inter-

valo $[x_0,b]$ la curva integral que pasa por el punto (x_0, y_0).



Generalmente para facilitar los cálculos y la acotación del error se divide al intervalo $[x_0,b]$ en **n** partes iguales, de longitud $h = (b-x_0)/n$. Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones sobre la función $f(x,y)$, estas poligonales convergen, cuando **h** tiende a cero, a la solución exacta.
Finalizando ya, puede uno preguntarse el porqué de la insistencia en métodos para hallar soluciones *aproximadas* de ecuaciones diferenciales.
En verdad, los ejemplos más sencillos de ecuaciones diferenciales de primer orden están dados por aquellas ecuaciones de la forma $y' = f(x)$, siendo $f(x)$ una función conocida. Como se ve sólo estamos planteando aquí mediante el lenguaje de ecuaciones diferenciales el problema de hallar una función $y = y(x)$ cuya derivada sea igual a la función dato $f(x)$. Como es bien sabido una tal función $y(x)$ se denomina una **primitiva** de $f(x)$.
Ahora bien, supongamos que tomamos $f(x) = e^{-x^2}$. La ecuación resultante, $y' = e^{-x^2}$, tiene solución ya que $f(x)$ es una función continua (y por ende admite primitiva). Hay en verdad *infinitas* primitivas, todas ellas difieren en una constante. Para determinar una única solución supongamos que imponemos la condición de que $y(0) = 1$.
Es bien sabido que las primitivas de $f(x) = e^{-x^2}$ no pueden expresarse como combinación de funciones elementales, es decir, las primitivas no pueden expresarse como suma, resta, cociente, producto o composición de polinomios, radicales, funciones exponenciales, trigonométricas o logarítmicas. Esto dificulta o directamente impide el cálculo *exacto* del valor de la primitiva, se impone utilizar métodos de aproximación.
Con mayor razón, la necesidad de métodos de aproximación aparece también en algunas de las ecuaciones más complejas.

Nota:
(*) Se entiende por **dominio** a un conjunto abierto y conexo del plano.

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* KISELIOV, A.; KRASNOV M.; MAKARENKO, G. - *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* - Perú, Editorial Latinoamericana, 1987.
* PISKUNOV, N. - *Cálculo Diferencial e Integral* - U.R.S.S., Mir, 1983.

En 1875 Henri Poincaré entró en la Escuela de Minas, con la idea de convertirse en un ingeniero. Pero en su tiempo libre hizo algunos descubrimientos en el campo de las ecuaciones diferenciales, y tres años después los presentó como tesis doctoral en la Universidad de París. Esto le valió que le nombraran profesor de análisis matemático en Caen en 1879. En 1881 ya estaba instalado en la Universidad de París, desde donde reinó como el líder indiscutible de los matemáticos franceses y, presumiblemente, del mundo.

extraído de "¿Juega Dios a los dados?" de *Ian Stewart*

MUJERES MATEMÁTICAS

"Mas cuando una persona perteneciente al sexo según el cual, de acuerdo a nuestras costumbres y preconceptos, es forzada a enfrentar infinitamente más dificultades que los hombres para familiarizarse con esas investigaciones dificilísimas, y consigue, con éxito, penetrar en las partes más oscuras de ellas, teniendo para ello que superar todas esas barreras, entonces esa persona tiene, necesariamente, el más noble coraje, los más extraordinarios talentos y una genialidad superior."

Gauss, en una carta a Sophie Germain.

Cuando recibimos la propuesta, a través del Correo de Lectores, de publicar un artículo sobre mujeres matemáticas me entusiasmé rápidamente con la idea.
A cualquier persona familiarizada con la Matemática Superior le debe, por lo menos, llamar la atención el hecho de que ningún conocido teorema o famosa ecuación tenga autoría femenina. En los cincuenta o sesenta siglos de historia del desarrollo del pensamiento, nos sobran los dedos de la mano para contabilizar las mujeres que se destacaron por su contribución a las ciencias, la filosofía y las artes.
Esto no es casual si analizamos el sometimiento ejercido sobre las mujeres a lo largo de los siglos. El desigual reparto del poder en la sociedad, y el conocimiento en su expresión más amplia lo es, impidió durante gran parte de la historia de la humanidad que las mujeres accedieran a niveles de cultura semejantes a los de sus congéneres masculinos.
Los pocos ejemplos que podemos rescatar, no hacen más que confirmar este hecho.

La antigüedad

La primera matemática de que tengamos noticias fue Hipatia.
Nacida en Alejandría alrededor del año 370 de la era cristiana, se la puede considerar como una de las últimas representantes de la matemática griega.
Fue educada por su padre, Teón de Alejandría, responsable de una edición revisada de los *Elementos* de Euclides y un comentario sobre el *Almagesto* de Ptolomeo. Éste trabajaba en el famoso Museo que era, en realidad, un instituto científico semejante a las actuales universidades o institutos de investigación, ya que en él parece ser que la enseñanza estaba reducida a lo mínimo. Sus actividades se desarrollaban alrededor de cuatro secciones principales: Matemática, Astronomía, Medicina y Letras y los investigadores que allí trabajaban lo hacían solventados por el presupuesto que el monarca destinaba a dichas actividades.
A pesar de que no se conserva ningún escrito o fragmento, es probable que Hipatia ayudara a su padre en los trabajos mencionados y que ella misma escribiera los comentarios sobre las *Secciones Cónicas* de Apolonio y sobre la *Aritmética* de Diofanto. Se le atribuyen el invento de aparatos mecánicos así como la construcción de una tabla astronómica.
Hipatia fue una mujer bella y culta que se destacó también por su elocuencia. Llegó a ser una conocida filósofa, ocupando el cargo de Directora de la Escuela Neoplatónica de Alejandría.
Esto le valió ser acusada de bruja, siglos después, en pleno oscurantismo europeo, el cual se inició con la caída del Imperio Romano de Occidente

(474 D.C.).

Como representante del antiguo saber, de la manera griega de pensar el pasado, esta influyente mujer era un obstáculo para los celosos cristianos de Alejandría. Fue así que utilizando a un grupo de fanáticos, estimulados por su obispo, la hicieron ingresar en una iglesia donde la lapidaron hasta matarla y luego la descuartizaron.

La muerte de Hipatia en el año 415 representa el fin de la ciencia y de las matemáticas paganas y el comienzo de una era de fe.

Maestros famosos

Mil años deberían transcurrir para que las matemáticas renacieran al calor de los nuevos acontecimientos que inician la Edad Moderna.

Algunas mujeres cortesanas, de la alta sociedad, con cierto snobismo, se entregan a los goces espirituales y estéticos y es en este aspecto que acceden al conocimiento matemático como discípulas de algunos famosos: Catherine de Parthenay, princesa de Rohan-Soubise, alumna de Viète, el creador del Álgebra; Cristina, reina de Suecia, de Descartes, lo mismo que Isabel de Bohemia, princesa palatina; Sofía, electora de Hannover y su hija Sofía Carlota, reina de Prusia, madre del Gran Federico, alumnas de Leibniz. También Euler tiene una discípula real, la princesa Anhalt-Dessau para quien escribe "Cartas a una princesa alemana" para enseñarle ciencias. Carolina de Brandeburgo Anspach estudia a Newton y Emilia de Breteuil, marquesa de Chatêlet, traduce sus *Principia* y le agrega notas personales a la par que Clairaut. Éste utiliza largos cálculos hechos para él por Mme. Lepaute, mujer encantadora, esposa del relojero de Luis XV, sin siquiera nombrarla "por complacencia -dice Lalande- hacia una mujer celosa del mérito de Mme. Lepaute y que tenía pretensiones sin poseer ninguna especie de conocimiento. Logró hacer cometer esta injusticia a un sabio juicioso, pero débil, a quien había subyugado".

Este inicio de alumnas favorecidas fue para unas pocas, cuyo poderío económico les permitía ciertos devaneos intelectuales. Pero marcó la apertura a otras brillantes mujeres que profundizaron el surco trazado, bregando por la posibilidad de acceder a una educación sin discriminaciones sexistas.

Es indudable que su esfuerzo y capacidad tuvieron que ser muy superiores a los de sus colegas masculinos para que la sociedad en su conjunto, les diera el lugar que hoy ocupan en la historia de las matemáticas.

María Gaetana Agnesi (1718-1799)

Nacida en Milán, de gran talento, precoz e inteligente, fue guiada con esmero por su padre, profesor de Matemática en la Universidad de Bologna.

Orgulloso de los conocimientos y habilidades que su hija mostraba, solía presentarla en las veladas que organizaba con científicos, académicos e intelectuales. Era habitual que éstas se desenvolvieran en latín, lengua culta e "internacional" de la época, y cuando se dirigían a ella respondía a sus interlocutores en sus respectivos idiomas. Dominaba el griego y también el hebreo, el alemán, el español y el francés desde los 11 años.

Había estudiado los trabajos de Newton, Leibniz, Euler, los hermanos Bernoulli, Fermat y Descartes, es decir, tenía un profundo conocimiento de las matemáticas de su época como así también de Física y de otras ramas de la ciencia.

A los veinte años publicó ***Proposiciones filosóficas***, en latín, desarrollando entre sus tesis la defensa de la educación superior de las mujeres. Quizo ingresar a una orden religiosa pero no pudo hacerlo hasta la muerte de su padre, quien se oponía tenazmente a ello. Logró, eso sí, que dejaran de observarla y tratarla como un prodigio intelectual, permitiéndosele tener una vida sencilla y retirada.

Durante los diez años posteriores, antes de ingresar a la orden religiosa, se dedicó al estudio de la Matemática y escribió su obra magna: ***Instituzioni Analitiche ad uso della Gioventú***. Se lo considera uno de los primeros textos didácticos del cálculo analítico. Consiste en cuatro enormes volúmenes que abordan tópicos de *Álgebra, Geometría Analítica, Cálculo y Ecuaciones Diferenciales*. Abarcan más de mil páginas y fueron publicados en 1748. Fue inmediatamente aclamada por los comisarios de la Academia de Ciencias de París, quienes declararon en su sesión del 6 de diciembre de 1749 que era el estudio "más completo y el mejor que haya en su género".

Ese mismo año, el papa Benedicto XIV le confirió una medalla de oro y una guirnalda de flores de oro y piedras preciosas por la publicación de su libro y la nombró profesora de Matemática y Filosofía Natural de la Universidad de Bologna, cátedra que nunca llegó a asumir.

Tampoco se le permitió ingresar a la Academia francesa por ser mujer y fue incorporada como miembro de la Academia Bolognesa de Ciencia.

Su gigantesca obra fue traducida al francés y publicada en 1775 "bajo el auspicio de la Academia Real de Ciencias" por decisión firmada el 30 de agosto de ese año por el Secretario Perpetuo de la Academia, aconsejado por la comisión de la que formaban parte matemáticos de la talla de D'Alembert y Vandermonde.

La contribución de María Gaetana al estudio y desarrollo de la Matemática se ha perpetuado en una curva de tercer grado que lleva su nombre: **cúbica de Agnesi**.

Sophie Germain (1776-1831)

Fue una prominente matemática nacida en París.

Hija de un rico burgués, recibió una educación y atención cuidadosas. Niña aún, escudriñar en la biblioteca de su padre fue un magnífico pasatiempo. En contacto con una Historia de las Matemáticas, conoció el trágico final de Arquímedes (ver Aχioma N° 3) y quedó tan impactada por el hecho de que existiera una ciencia capaz de transportar a alguien a los recónditos misterios del saber, haciéndole perder la noción del tiempo y del espacio, que definió allí su vocación.

Al calor de la Revolución Francesa, y en respuesta a las necesidades surgidas con el inicio de la Revolución Industrial, se había creado la Escuela Politécnica en 1794. Pero para Sophie, lo mismo que para las demás mujeres de su época, este establecimiento estaba vedado.

Con gran tezón consiguió estudiar por su cuenta los apuntes del curso de Lagrange y escribió algunas notas y observaciones al respecto, que hizo llegar por carta a éste, firmando con el seudónimo de "M. Leblanc, alumno de la Escuela Politécnica".

Admirado Lagrange por el trabajo quiso tratar personalmente con el autor. Fue así que Sophie Germain se dio a conocer y entró en contacto con los sabios franceses de la época, además de contar, desde entonces, con Lagrange como tutor personal.

A partir de 1804 también Gauss, quien tres años antes había escrito *Disquisiciones Aritméticas*, comenzó a cartearse con "M. Leblanc, politécnico". Se enteró años después quién era verdaderamente este "aventajado", en oportunidad en que Sophie, recordando sus lecturas de infancia y la tragedia de Arquímedes, intercedió ante un amigo de su padre, un general francés del ejército de Napoleón que había invadido Hannover, para salvarle la vida.

Gauss, profundamente agradecido por su gesto, le

envió una elogiosa carta haciendo alusión al coraje y al valor necesarios para dedicarse al estudio de la matemática.
Años más tarde, Gauss recomendó a la Universidad de Göttingen concederle un doctorado honoris-causa, pero Mlle. Germain falleció antes de que pudiera concretarse el nombramiento.
En 1816 tuvo el honor de recibir el Gran Premio de Ciencias Matemáticas de la Academia de Ciencias de París, por una publicación sobre las vibraciones de las láminas elásticas. Este tema había sido puesto en concurso cinco años antes.
En 1831, año de su muerte apareció el trabajo sobre la curvatura de las superficies en el cual introdujo el concepto, hoy ya clásico, de curvatura media.
En el ámbito de la aritmética trabajó en la demostración del último teorema de Fermat (que se propone hallar todos los números enteros que satisfacen la relación $x^n + y^n = z^n$) junto a fórmulas provistas por Lagrange y dio un teorema importante así como su aplicación a la demostración del teorema de Fermat hasta el grado 100.
Forma parte de su legado intelectual un buen número de artículos sobre historia y filosofía de las ciencias, a las que Augusto Comte, el padre del positivismo, elogió en su curso.

Mary Fairfax Somerville (1780-1872)

Contemporánea de Sophie Germain, nació en Escocia y no recibió estudios hasta pasados los 10 años de edad, en que accedió a los pocos conocimientos que las mujeres de la época tenían derecho.
A pesar de la firme oposición de su padre, un almirante escocés, logró iniciar el estudio de los *Elementos* de Euclides y el *Álgebra* de Bonnycastle. Estos libros, utilizados en las escuelas de la época, fueron adquiridos por su hermano menor, ya que estaba muy mal visto que una joven dama entrara a una librería a comprar un libro de matemática. También estudió los *Principia* de Newton.
A la edad de 24 años se casó con un hombre con poco interés en los trabajos intelectuales de las mujeres. Como dice Eves, "por fortuna para las matemáticas, la hizo viuda tres años después" dejándole una sustancial suma de dinero con la que adquirió una cantidad de libros de matemática.

Posteriormente se casó con un hombre que simpatizaba con sus tareas intelectuales y se dedicó completamente a ellas.
Su producción más importante fue la traducción al inglés del *Tratado de Mecánica Celeste* de Laplace a la que agregó notas de gran valor.
En 1832 presentó una separata bajo el título de ***Una disertación preliminar sobre la Mecánica Celeste***, donde explicaba la matemática necesaria para comprender el tratado de Laplace.
En 1834, publicó un tratado sobre ***Las conexiones con las ciencias físicas***, elogiado por el descubridor de las leyes del electromagnetismo, Jacobo Maxwell.
El astrónomo John Couch Adams, atribuyó su descubrimiento del planeta Neptuno a unas notas que leyó en el libro de Somerville.
Esta notable científica se ganó el reconocimiento de sus pares quienes la admitieron en la Sociedad Real Inglesa de Astronomía al igual que en la Sociedad Real Inglesa de Ciencias, que mandó a colocar un busto de ella en el hall central. ¡Qué ironía! Nunca pudo Mary Fairfax admirarlo, ya que tenía prohibida la entrada al predio por su condición de mujer.
Murió longeva, en Nápoles, habiendo dedicado sus últimos años a escribir sus memorias y revisar un manuscrito sobre su trabajo ***Diferencias finitas***.
El día de su muerte, a los 92 años de edad, estaba analizando un artículo sobre los cuaternios, un nuevo tipo de conjunto en el espacio cuadridimensional que aparece

en el Álgebra Abstracta.

Sonia Kovalevsky (1850-1891)

"No necesito decirle cuánto me ha regocijado su éxito, como también a mis hermanas y a todos nuestros amigos de aquí. Yo en particular he experimentado una verdadera satisfacción, pues jueces competentes han pronunciado ahora su veredicto de que mi alumna fiel, mi 'debilidad', no es una frívola marioneta".
Con estas palabras, Weierstrass se dirigía a su antigua alumna quien acababa de ganar el Premio Bordin, instituido por la Academia de Ciencias de París, cuya Comisión aumentó el valor del mismo de 3000 a 5000 francos, dado lo excepcional del trabajo.
Sonia Kovalevsky ganó el premio con la presentación de su memoria ***Sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo***.
Ya Euler había dado un caso de integrabilidad y había hallado la traducción del problema a ecuaciones.
Posteriormente Lagrange y Poisson descubrieron un segundo caso y Jacobi dio la solución general del problema.
Pero Sonia Kovalevsky halló, y eso fue lo que presentó a consideración, un nuevo caso de integrabilidad: una tercera "integral primera" algebraica, distinta de la integral de la fuerza viva y de la integral de las áreas para condiciones iniciales arbitrarias. Husson demostró tiempo después, que los tres casos de integrabilidad hallados son los únicos.
Pero remontémonos al inicio de esta historia, en 1850, cuando Sonia Corvino-Krukowski nace en Moscú.
Su abuelo paterno, descendiente del rey de Hungría, Matías Corvino, había perdido el derecho al título de príncipe por haber contraído matrimonio con una bohemia. Su abuelo materno, en cambio, a quien llama "el pedante alemán", era un hombre estudioso y sabio, dedicado a la astronomía. Estas dos influencias contradictorias persiguieron a Sonia a lo largo de su existencia, endilgando a su rama materna o paterna, alternativamente, las inclinaciones seguidas en cada oportunidad.

A los 13 años se declara enamorada de Dostoievski, el famosísimo literato, quien visitaba a su hermana asiduamente. Lo cuenta en ***Recuerdos de infancia***, un texto declarado por los críticos literarios rusos y escandinavos de un nivel equiparable al mejor de los escritores rusos. Dice allí: "A los 12 años, tenía la convicción íntima de haber nacido poetisa".
Pero un hecho fortuito y curioso la pone en contacto, desde edad temprana, con las altas matemáticas: su padre, faltándole papel para terminar la decoración de su dormitorio, le pegó en las paredes los escritos litografiados del curso de cálculo integral de Ostrogradsky.
A los 17 años, ya decidida a seguir estudios científicos, hace arreglos para contraer matrimonio con un joven estudiante de mucho talento, con el objeto de independizarse de la tutela familiar y acceder a los estudios superiores vedados a las mujeres en Rusia, concurriendo a una Universidad extranjera.
Este ardid, fraguado conjuntamente con su hermana y una amiga, la pone en el camino que transitaría luego con gloria.
Casada con Kovalevsky, se trasladan e instalan en Heidelberg donde ambos se dedican al estudio con gran devoción: él, a la geología; ella, leyendo a sus contemporáneos matemáticos y físicos: Leo Königsberger (1837-1921) y Du Bois-Reymond (1831-1889); Kirchhoff (1824-1887) y Helmholz (1821-1894).
La llegada posterior de su hermana y de su amiga, interrumpen el clima de intimidad intelectual entre Sonia y su marido. Éste parte rumbo a Jena y luego a Munich. Aunque regresa a menudo, la separación sacude los sentimientos de Sonia quien de-

clara "No me ama más que cuando está junto a mí".
Decide entonces trasladarse a Berlín, en 1870, para entrevistar a Weierstrass, de reconocida fama, y pedirle consejo.
Éste intenta hacerla ingresar como alumna suya, cosa que no puede lograr ya que la Universidad está prohibida a las mujeres. Le dicta entonces, clases particulares logrando que Sonia trabaje con gran dedicación y fervor a lo largo de los cuatro años siguientes.
Escribe tres importantes memorias: ***La reducción de las integrales Abelianas de tercera especie***; un ***Suplemento de investigación de Laplace sobre la forma de los anillos de Saturno*** y la tercera, su tesis, ***Sobre la teoría de las ecuaciones de diferencias parciales***, por la que le otorgan el título de Doctor *in absentia*, en la Universidad de Göttingen, en 1874
Sonia Kovalevsky agotada por el gran esfuerzo, las horas dedicadas al estudio, las más de las veces mal alimentada, descuidada de su persona, absorbida totalmente por el trabajo, decide regresar a Rusia.
Al reencontrarse con su marido inicia una nueva etapa en su vida. Consiente finalmente en consumar su matrimonio y una nueva rutina se instala: fiestas, lectura de novelas, veladas divertidas, juegos de cartas. La pareja parece brillar por doquier. Weierstrass no consigue que conteste sus cartas ni siquiera que le desmienta el rumor que corre en Berlín de que ha abandonado las matemáticas.
Recién cuatro años después, producto del forzado reposo que le ocasiona el nacimiento de su hija, responde a su maestro quien en un acto de noble actitud olvida su resentimiento y se pone a su servicio.
Pero es en 1880 cuando Sonia retoma de verdad sus estudios, producto de la separación de su marido, sumergido en una catástrofe financiera. Viaja a Berlín y por consejo de Weierstrass aborda el problema de la propagación de la luz en un medio cristalino.
En 1883, se convierte en "Privat Docent" del profesor Mittag-Leffler, en Estocolmo, donde llega a transformarse en profesora vitalicia de la Universidad.
Su vida sentimental florece. Viaja a menudo a Berlín y a París. Este loco frenesí la obliga a realizar grandes esfuerzos para concentrarse en su trabajo. Le escribe a Mme. Leffler, de París: "Ayer fue un día duro para mí, pues el gran M... partió a la noche. Si se hubiera quedado no sé cómo habría hecho para poder trabajar. Es tan grande, tan poderosamente alto que ocupa muchísimo lugar, no solamente sobre un canapé, sino también en el pensamiento y nunca hubiera podido, en su presencia, pensar en otra cosa más que en él".
Llega así, en 1888, al momento cumbre de su carrera, cuando se produce la entrega de su premio.
Tiene sólo 41 años de edad, cuando la muerte la sorprende, agobiada por la incesante lucha que representó en su vida el forcejeo entre el amor y la ciencia. Su lema fue: "Di lo que sabes, haz lo que debas, pase lo que pase".
Magníficos funerales en su adiós testimoniaron el reconocimiento y elogio de sus pares. Las mujeres rusas le erigieron un monumento en su homenaje.

Amalie Emmy Noether (1882-1935)

Nació en Erlangen, Alemania, y fue la más prestigiosa matemática dedicada al campo del Álgebra Abstracta.

Max Noether (1844-1912) era un distinguido matemático de la Universidad de Erlangen que indujo a sus dos hijos, Emmy y Fritz, a estudiar junto a él y a sus colegas. Fritz se dedicó a la matemática aplicada en tanto su hermana "no pensaba más que en conceptos". Orientada por un colega de su padre y amigo de la familia, Paul Gordan (1837-1912), presentó su tesis doctoral ***Sobre los sistemas completos de invariantes para las formas bicuadráticas ternarias***, en 1907.

En 1910, cuando Gorgan se retiró de la cátedra siguió trabajando encaminada por Ernst Fischer, otro algebrista particularmente interesado en la teoria de las invariantes.
Instalada en Göttingen y bajo la influencia de Klein y de Hilbert, trabajó intensamente. Sólo tiempo más tarde se desligó de sus influencias y logró así desplegar todo su ingenio.
En 1919, ella aprueba su examen de habilitación para ejercer la docencia en la Universidad de Göttingen. Una anécdota recuerda el fastidio que le produjo a Hilbert que le negaran a esta estudiosa mujer las posibilidades de ejercer dicho cargo. Molesto con la cuestión, declaró al Consejo de la Universidad: "No veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su admisión como Privatdozent. Después de todo, no somos una casa de baños". Finalmente en 1922, es nombrada profesora extraordinaria, con un muy bajo sueldo, cargo que conservó hasta 1933. En esta fecha, la profundización y avance del régimen nazi, la obligan a emigrar, al igual que a otros científicos comprometidos con la democracia, como Born, Courant, Landau, Neugebauer y tantos más.
Se instaló por corto tiempo en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (EEUU) y luego fue nombrada profesora en Bryn Mawr, colegio para mujeres de la zona.
Si bien siguió investigando y formando grupos de estudio a su alrededor, corresponde a los años de la década anterior su mayor producción. Publicó también obras en colaboración.
Sus memorias más importantes son: ***Teoría de Ideales en los Anillos*** (1921) donde introduce el axioma de las cadenas de divisores, que le permitió demostrar el teorema de la descomposición de un ideal en mínimo común múltiplo de ideales primarios en todo anillo que cumpla ese axioma; ***Construcción abstracta de la Teoría de Ideales en el dominio de los cuerpos de números algebraicos*** (1923) donde destaca los axiomas que permiten llegar a la descomposición de producto de ideales primos y ***Álgebras no- conmutativas*** (1933).
Sus trabajos sobre los sistemas hipercomplejos, la teoria de la representación y, en general, sobre álgebras no-conmutativas, se caracterizan principalmente por el papel fundamental que desempeñan en ellos los conceptos de módulo, ideal y automorfismo, diferenciándose de Fröbenius y sus sucesores, ya que sus teorias son válidas sea cual fuere el cuerpo fundamental.
La muerte le llegó súbitamente, luego de una operación que parecía haber tenido éxito.
Recibió un fervoroso tributo de Albert Einstein y dijo Edmund Landau, replicando a quienes definían a Emmy como la hija de Max Noether: "Max Noether fue el padre de Emmy Noether. Emmy es el origen de coordenadas de la familia Noether".

Reflexión final

Es lamentable que aún hoy haya que justificar con doble esfuerzo, doble mérito, doble trabajo, el quehacer intelectual de las mujeres. Sin lugar a dudas, nuestro género tiene una deuda de gratitud eterna hacia aquéllas que nos alumbraron el camino con sus antorchas de sabiduría y tenacidad, en la lucha por conquistar un mundo de iguales.

Raquel S. Kalizsky*

*Prof. de Matemática, egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Bibliografía:

* BABINI, JOSE - *La ciencia alejandrina* - Buenos Aires, C.E.A.L. 1968.
* BELL, E.T. - *Historia de las matemáticas* - México, Fondo de Cultura Económica, 1985.
* DE MORAIS FILHO, DANIEL C. - *As mulheres na matemática* en Revista do Professor de Matemática N° 30 - Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.
* DUBREIL-JACOTIN, MARIE-LOUISE - *Mujeres matemáticas ilustres* en Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático - EUDEBA, 1976.
* EVES, HOWARD - *An Introduction to the History of Mathematics* - Saunders-College Publishing - 6° edición, 1990.

Investigando a Fibonacci

En esta sección trataremos sobre diversos temas matemáticos que esperamos sirvan tanto para el enriquecimiento personal como para ser llevados al aula.

El nombre de Leonardo de Pisa (matemático nacido hacia 1179), también conocido como *Fibonacci*, es asociado frecuentemente con una sucesión de números que aparece descripta en su obra *Liber Abaci*.
Esta sucesión, llamada justamente **sucesión de Fibonacci**, comienza como sigue: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...Nótese que en ella cada término a partir del tercero es igual a la suma de los dos anteriores. Por ejemplo, 5 es igual a 2 más 3; 8 es 3 más 5; etc.
En cuanto se comienza a investigar esta sucesión no se tarda en descubrir que los números de Fibonacci emergen inesperadamente en un amplio espectro de fenómenos naturales y también de la matemática abstracta. Por ejemplo, en el reino vegetal, la sucesión de Fibonacci hace su aparición más llamativa en la implantación espiral de las semillas de ciertas variedades de girasoles. Hay en ellas dos haces de espirales logarítmicas, una en sentido horario y otra en sentido antihorario. Los números de espirales son distintos en cada familia, y por lo común, son números de Fibonacci consecutivos.
En matemática abstracta, es realmente notable la estrecha relación que existe entre los números de Fibonacci y la razón áurea, $\Phi=(1+\sqrt{5})/2$.
Por ejemplo, es fácil demostrar que el n-ésimo número de Fibonacci es igual a $(1/\sqrt{5})[\Phi^{n} - (-\Phi)^{-n}]$.
De este hecho es posible deducir otra consecuencia notable: el cociente entre el n-ésimo número de Fibonacci y su precedente tiende a Φ cuando n tiende al infinito.
Sin embargo, Fibonacci en verdad nunca investigó la sucesión y ésta no recibió ningún estudio serio hasta comienzos del siglo pasado. Mas desde esa fecha los artículos dedicados a ella han proliferado de modo tan notable que incluso han motivado la creación de una revista de matemática recreativa (*The Fibonacci Quarterly*) dedicada exclusivamente a su estudio.
En Aχioma Nº 3 propusimos a nuestros lectores un **Proyecto de Investigación**. Los invitamos en esa ocasión a que estudiaran qué clase de números se obtienen cuando se realizan operaciones aritméticas y/o algebraicas con los números de Fibonacci: adición, sustracción, multiplicación, etc. ¿Se encuentra números de Fibonacci entr los resultados? ¿Qué hay ace ca de los cuadrados de lo números de Fibonacci? ¿Y d los cubos de los números d Fibonacci?
Al mismo tiempo que e Aχioma, este problema fu parcialmente planteado en l lista *Snark*. Es éste un grup de personas que se comunica a través de Internet y que s dedican a tratar cuestione sobre matemática recreativa problemas lógicos, juegos co el lenguaje, etc.
En *Snark*, Ángel López y Pa blo Milrud han podido dar un demostración del siguient hecho: **cuando se multipli can dos números d Fibonacci diferentes entre s (y mayores que 1) es im posible obtener como resul tado otro número d Fibonacci**.
Nuestro objetivo es reproduci aquí, en forma detallada explicada, la demostración d López y Milrud. A lo largo d la misma descubriremos además, otras muy interesan tes propiedades de la sucesió de Fibonacci y que, eventual mente, podrán resultar mu útiles en futuras investigacio nes.
Antes de comenzar con la de mostración en sí, adoptaremo una notación para los número de Fibonacci que nos permitir trabajar cómodamente co ellos. Convengamos en llama

F_n al n-ésimo número de Fibonacci. Así por ejemplo $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, etc. En este lenguaje algebraico, la condición de que cada término a partir del tercero es igual a la suma de los dos anteriores se escribe: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ si $n \geq 1$.
Finalmente, para dar coherencia a ciertas fórmulas y tal como es habitual en muchos textos, convengamos en definir $F_0 = 0$.
La primera propiedad de los números de Fibonacci que vamos a demostrar (y en la que se apoya todo el desarrollo posterior) es la siguiente:

Proposición 1: Si $n \geq 1$ y $m \geq 1$ entonces $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$.

Para demostrarlo utilizaremos la técnica llamada *inducción global*. Recordemos que es éste un método para demostrar afirmaciones relativas a los números naturales. En él se prueba primeramente que la afirmación es verdadera para algunos de los primeros números y luego se procede a probar que, bajo la suposición de que la afirmación es verdadera para todo número menor que k, entonces también es forzosamente verdadera para el propio número k.
Probado todo esto, se puede afirmar que la propiedad es cierta para todos los números naturales.
La afirmación que nos interesa demostrar tiene en realidad *dos* variables naturales (**n** y **m**). Tal como es habitual en estas situaciones, dejamos fija una de las variables y hacemos *inducción global* en la otra. Concretamente, supondremos que **n** es un número natural fijo arbitrario y haremos inducción en la variable **m**.
Primeramente probemos que, cualquiera sea el número **n** entonces:

$$F_{n+1} = F_{n+1}F_1 + F_nF_0$$

Esta afirmación, que corresponde a tomar m = 1, queda inmediatamente demostrada con sólo recordar que $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Cuando se toma m = 2 la propiedad queda de la forma:

$$F_{n+2} = F_{n+1}F_2 + F_nF_1$$

El lector comprobará fácilmente que esta igualdad es también inmediatamente verdadera.
Hemos probado hasta aquí que, cualquiera sea **n**, la afirmación es verdadera si m = 1 ó m = 2. Procedamos ahora al llamado *paso inductivo*: sea **m** un número tal que suponemos que la propiedad es verdadera para todo número estrictamente menor que él (esta suposición es llamada habitualmente la *hipótesis inductiva*). Se trata entonces de probar que la afirmación es verdadera para el propio número **m**. En todo momento, **n** es un número arbitrario fijo. Como ya sabemos que la propiedad es verdadera para m = 1 y m = 2, asumiremos que $m \geq 3$.

Por la condición que define a la sucesión de Fibonacci vale que:

$$F_{n+m} = F_{n+m-1} + F_{n+m-2} \quad (^1)$$

Los números **m-1** y **m-2** son menores que **m**; luego, por la hipótesis inductiva, la propiedad vale para ambos:

$$F_{n+m-1} = F_{n+1}F_{m-1} + F_nF_{m-2}$$
$$F_{n+m-2} = F_{n+1}F_{m-2} + F_nF_{m-3}$$

Reemplazando estas igualdades en (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} F_{n+m} &= F_{n+m-1} + F_{n+m-2} = \\ &= F_{n+1}F_{m-1} + F_nF_{m-2} \\ &+ F_{n+1}F_{m-2} + F_nF_{m-3} \\ &= F_{n+1}(F_{m-1} + F_{m-2}) + \\ &\quad F_n(F_{m-2} + F_{m-3}) \\ &= F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} \end{aligned}$$

El último renglón nos dice que la propiedad es verdadera para **m**. Esto finaliza el paso inductivo y la demostración de la **Proposición 1**.
Una primera consecuencia sumamente interesante de esta proposición es la siguiente:

Proposición 2: Si n es un divisor de m entonces F_n es un divisor de F_m.

Nótese que **n** es un divisor de **m** (o equivalentemente, **m** es un múltiplo de **n**) si y sólo si existe un número natural **k** tal que nk = m. Podemos entonces reescribir la proposición 2 del siguiente modo:

Proposición 2': Para todo número natural k, F_n es un divisor de F_{nk}.

La **Proposición 2'** es equivalente a la **Proposición 2**; por lo que, una vez que demostremos aquélla, la **Proposición 2** quedará automáticamente probada.
Para probar la **Proposición 2'** supondremos nuevamente que **n** es un número natural arbitrario fijo y haremos *inducción completa* en **k**.
La inducción completa es esencialmente una versión simplificada de la inducción global. En este caso, en primer lugar se verifica que la afirmación es verdadera para k = 1 y luego se procede a demostrar que, si la propiedad es cierta para el número **k**, entonces es verdadera para **k+1**.
Como antes, la conclusión que se obtiene es que la afirmación resulta ser verdadera para todos los números naturales.
Se trata entonces de probar que F_{nk} es un múltiplo de F_n. Para ello, tal como fue dicho, haremos inducción completa en **k** y supondremos que **n** es un número arbitrario fijo.
Si k = 1 la afirmación a probar resulta ser que F_n es múltiplo de F_n. Esto es claramente verdadero.
Suponiendo que la afirmación fuese verdadera para **k** vamos a probar que también es verdadera para **k+1**. Hay que probar entonces que $F_{n(k+1)}$ es un múltiplo de F_n.
Ahora bien, $F_{n(k+1)} = F_{n+nk}$ y por la **Proposición 1**:

$$\begin{aligned} F_{n(k+1)} &= F_{n+nk} \\ &= F_{n+1}F_{nk} + F_nF_{nk-1} \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva F_{nk} es múltiplo de F_n y como F_n también lo es, entonces el último renglón nos permite deducir fácilmente que $F_{n(k+1)}$ es múltiplo de F_n. Esto finaliza el paso inductivo y también la demostración de la **Proposición 2**.
Una interesante consecuencia de la **Proposición 2** que Martin Gardner menciona en su libro *Carnaval Matemático*, y que los lectores no tendrán mayores dificultades en demostrar, es la siguiente: si para algún n≥5 resulta que F_n es primo entonces el propio número n debe ser primo. Por ejemplo, $F_{11} = 89$ o $F_{13} = 233$ son primos.
La afirmación recíproca no es cierta, bien puede ocurrir que n sea primo, pero que no lo sea F_n. Por ejemplo $F_{19} = 4181$ es divisible por 37 mientras que $F_{31} = 1.346.269$ es divisible por 557.
Este tema se vincula con la más importante de las cuestiones relativas a la sucesión de Fibonacci aún no resueltas, a saber: ¿hay infinitos números de Fibonacci que sean primos? ¿o sólo son finitos? La respuesta por el momento es desconocida.
Volviendo al tema que nos ocupa, hemos visto hasta ahora que si n es un divisor de m entonces F_n es un divisor de F_m. En rigor de verdad, la afirmación recíproca es falsa, ya que F_2 es divisor de F_3 pero 2 no es divisor de 3. Sin embargo esencialmente F_2 es el único número de Fibonacci que aporta contraejemplos para la afirmación recíproca. En efecto:

Proposición 3: Si n>2 y F_n es divisor de F_m entonces n es divisor de m.

Antes de demostrar esta proposición debemos recordar dos hechos. El primero es una propiedad, quizás no muy ampliamente conocida, de la divisibilidad. A saber: si **a** es un divisor de **bc** y **a** es coprimo con **b** entonces **a** es divisor de **c**. El segundo hecho es que dos números de Fibonacci consecutivos siempre son coprimos.
Supongamos entonces que F_n es un divisor de F_m. Efectuando la división entera de m por n tenemos que:

$$m = nk + r$$

Donde k es el cociente y r es el resto, 0≤r<n. Se trata, desde luego, de probar que r = 0. Ahora bien, aplicando la **Proposición 1** tenemos que:

$$\begin{aligned} F_m &= F_{nk+r} \\ &= F_{nk}F_{r+1} + F_{nk-1}F_r \end{aligned}$$

Como F_n es divisor de F_m y también es divisor de F_{nk} entonces se deduce que F_n es divisor de $F_{nk-1}F_r$.
Vamos a ver ahora que F_n es coprimo con F_{nk-1}. Es decir, que no puede existir un primo p tal que p sea divisor al mismo tiempo de F_n y de F_{nk-1}.
Demostraremos esto *por el absurdo*; es decir, partiremos de la suposición de que *sí* existe un primo p tal que p sea divisor al mismo tiempo de F_n y de F_{nk-1} y de allí llegaremos a una contradicción.

Sea entonces p un primo que es divisor de F_n y de F_{nk-1} al mismo tiempo. Como a su vez F_n es divisor de F_{nk}, entonces p sería también divisor de F_{nk}. Pero p es asimismo divisor de F_{nk-1}. El primo p sería divisor de F_{nk} y F_{nk-1}; pero como estos dos números son coprimos (por ser dos números de Fibonacci consecutivos), entonces hemos llegado a una contradicción. Ésta resulta de suponer que F_n y F_{nk-1} *no* son coprimos; se deduce entonces que sí lo son.

Resumiendo: F_n es divisor de $F_{nk-1}F_r$ y es coprimo con F_{nk-1}.

Luego F_n es divisor de F_r.

Pero si $n > 2$ y $r < n$ entonces F_r es menor de F_n. La única forma en que F_r sea múltiplo de F_n pero a la vez menor que él es que $F_r = 0$, por lo que $r = 0$, como queríamos probar.

Podemos resumir todo lo demostrado hasta aquí en la siguiente proposición:

Proposición 4: Sea $n > 2$; entonces F_n es divisor de F_m si y sólo si n es divisor de m.

El lector no tendrá dificultad en deducir la siguiente consecuencia: en los casos en que m es primo pero F_m no lo es, los divisores de F_m no pueden aparecer entre los números de Fibonacci.

Vamos ahora al hecho que nos interesa demostrar aquí, a saber: que el producto de dos números de Fibonacci mayores que 1 y diferentes entre sí no puede ser igual a otro número de Fibonacci.

Se trata entonces de ver que no puede darse la igualdad:

$$F_k = F_n F_m \quad (^2)$$

donde **m**, **n** y **k** son números naturales diferentes y mayores que 2. Podemos suponer que **m** es menor que **n** y que **n** es menor que **k** (nótese que **m** es menor o igual que **n-1**).

Supongamos que la igualdad (^{2}) se cumpliera; entonces F_n y F_m serían divisores de F_k y por lo tanto n y m serían divisores de k. Si k es par, de esto se deduce que $2n \leq k$; si n es impar, se deduce que $2n+1 \leq k$.

En el caso en que n es par (y $2n \leq k$) se tiene:

$$\begin{aligned} F_k &\geq F_{2n} \\ &= F_{n+n} \\ &= F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} \\ &> F_nF_{n-1} \\ &\geq F_nF_m \end{aligned}$$

La conclusión es que $F_k > F_nF_m$, lo que contradice a (^{2}).

Si n es impar (y $2n+1 \leq k$) entonces tenemos:

$$\begin{aligned} F_k &\geq F_{2n+1} \\ &> F_{2n} \\ &\geq F_nF_m \end{aligned}$$

Nuevamente se llega a que $F_k > F_nF_m$, contradiciendo a (^{2}).

En uno u otro caso se llega a la conclusión de que si valiera la igualdad (^{2}) se llegaría a una contradicción.

Por ende, la igualdad (^{2}) no puede ocurrir. Hemos probado entonces que el producto de dos números de Fibonacci mayores que 1 no puede ser igual a otro número de Fibonacci.

Sin embargo este resultado no agota el proyecto de investigación que habíamos propuesto a nuestros lectores en Aχioma N° 3. Quedan todavía muchas preguntas sin respuesta: ¿puede un número de Fibonacci ser la suma de los cuadrados de otros dos? Es decir, ¿puede ser $F_k = (F_n)^2 + (F_m)^2$? ¿O puede ser en cambio $(F_k)^2 = (F_n)^2 + (F_m)^2$?

Las preguntas posibles son infinitas y quedan abiertas para que nuestros lectores se diviertan intentando responderlas. Estas páginas están abiertas para recibir el resultado de sus investigaciones: demostraciones, conjeturas o refutaciones serán siempre bienvenidas.

Gustavo Piñeiro*

* Lic. en Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* GARDNER, MARTIN - *Circo matemático* - Madrid, Alianza Editorial, 1983.
* LEONARDO DE PISA - *El libro de los números cuadrados*, EUDEBA, Buenos Aires, 1973.
* MILRUD, PABLO - Mensaje en la lista Snark, Internet, 18 de septiembre de 1996.
* STEWART, IAN - *¿Juega Dios a los dados?*, Grijalbo Mondadori, Buenos Aires, 1991.

Matemática, Virreinato y Revolución de Mayo

La colonización de América se desarrolló mientras en España reinaba la casa de los Habsburgos y, posteriormente, la de los Borbones.
Durante el gobierno de Carlos I de España, Carlos V de Alemania, (1516-1556) se exploró, conquistó y colonizó la mayor parte de América.
Carlos I era hijo de Felipe El Hermoso y Juana La Loca. Sus abuelos maternos eran los Reyes Católicos, Fernando V (soberano de Aragón, Cerdeña, Sicilia y Nápoles) e Isabel de Castilla. Sus abuelos paternos, pertenecientes a la casa de Habsburgos en Alemania, eran Maximiliano (emperador de Alemania) y María (señora de los Países Bajos, Flandes, y porciones del norte y este de Francia).
Al morir, en 1700, el último Habsburgo, Carlos II, sin dejar descendencia, se desata la guerra de la Sucesión de España. Ésta llega a su fin al firmarse la paz de Utrecht, donde se reconoce a Felipe V, de la casa de los Borbones, como nuevo rey.
Estas dos etapas de gobierno dejaron establecido el sistema educativo que reinaría en el territorio del Río de la Plata hasta 1820.

Colonización del Río de la Plata

La colonización de estas tierras se vio influenciada por dos corrientes socio-culturales bien diferenciadas.
La primera, llevada a cabo durante el gobierno de los Habsburgos, se originó en el Perú y penetró por el Norte de nuestro actual territorio.
Se estableció directamente por la obra de las órdenes religiosas, especialmente la Compañía de Jesús. Testimonio de ello son las ciudades de Santiago del Estero, Tucumán y Córdoba (donde tuvo su centro).
La segunda, durante el reinado de los Borbones, denominada corriente del Plata (con sede en Buenos Aires), fue impuesta por los funcionarios del Virreinato y reflejó la penetración, en España, de las ideas que estaban en auge en Francia. Entre éstas, las que promovían la acción todopoderosa de la educación como la herramienta para el progreso y el perfeccionamiento de la conducta humana.

Primeros intentos educativos

Los Habsburgos se esforzaron por mantener la unidad religiosa, por eso se opusieron a todo lo que pudiera implicar un intento de renovación.
Debido a las largas luchas entre españoles y moros, en territorio español, se identificó el poder de la monarquía con el poder religioso de la Iglesia Católica. Por lo tanto, no es de extrañar que la conquista y la colonización del nuevo continente fueran empresas de carácter político-religioso. El estado apoyaba a la Iglesia para que ésta realizara su obra evangelizadora y a su vez la Iglesia robustecía la autoridad de la monarquía.
La educación en el Río de la Plata también se vio impregnada de este clima político-religioso. Por lo cual se entiende que los dos objetivos principales en lo que respecta a la educación fueron la enseñanza y la propagación de la religión católica.
Se adoptó con este fin el sistema de misiones, en el cual se destacó la Compañía de Jesús, que tenía como objetivos: 1°) convertir a los indígenas al cristianismo, 2°) incorporarlos a la cultura europea, 3°) utilizarlos en la producción, obligándolos a trabajar para arrancarlos del vicio.
La monarquía se preocupó particularmente por la educación de los hijos de los caciques. Las Ordenanzas de

Zaragoza (1518), dictadas por Carlos I, habían determinado que todos los hijos de caciques, menores de diez años, se entregasen "a los frailes dominicos o franciscanos, para que los dichos frailes les mostrasen a leer y escribir y todas las otras cosas de nuestra Santa Fe". Añadían que luego de cuatro años, debían ser devueltos a las personas que los hubieran dado. Se pretendía de esta forma que los caciques, por influencia de sus hijos adquirieran hábitos morales, a la vez que se aseguraba que los futuros gobernantes tuvieran una formación católica.

Primeros establecimientos educativos

El primer maestro de escuela que hubo en el actual territorio argentino fue D. Pedro de Vega quien ejerció el magisterio en Santa Fe, designado al efecto por D. Juan de Garay, desde la fundación de esa ciudad en 1573 hasta 1577 por lo menos. Es de suponer que además de enseñar a leer y escribir, enseñara a contar. Posteriormente, las escuelas funcionaron en los conventos, más tarde los cabildos se interesaron por la apertura de escuelas particulares. Éstas se generalizaron a principios del siglo XVII y se establecían cuando el cabildo autorizaba a un laico para el ejercicio de la docencia, dándole en general un local donde ejercer. Es oportuno aclarar que la enseñanza siempre era costeada por los alumnos. A continuación transcribimos el Acuerdo del Cabildo, de fecha 1° de agosto de 1605, donde por primera vez se autoriza el ejercicio de la docencia en Buenos Aires: "...Francisco de Vitoria dio petición que le resiban por maestro de la escuela y que se obliga a enseñar a dichos nyños y que se le pague un peso por mes a los que enseñare a leer y a los que enseñare a escrevir y contar, dos pesos: y proveyóse que le resiban por tal maestro y al dicho precio". No hay pruebas de que Vitoria llegase a ejercer el magisterio.

Otros establecimientos educativos surgieron con la llegada de los Borbones al trono de España: las Escuelas del Rey. En ellas la enseñanza era costeada, en parte por el cabildo, y en parte por los alumnos, pero el maestro estaba obligado a recibir gratuitamente a un número determinado de alumnos pobres.

Los estudios preparatorios para poder acceder a estudios superiores comenzaron a desarrollarse en nuestro territorio en el siglo XVII. Se impartían en las que solían denominarse aulas de gramática o latinidad y de filosofía, que funcionaban en algunos conventos.

Se debe tener en cuenta que el estudio del latín era imprescindible para acceder a estudios superiores, ya que en las universidades las clases se dictaban en ese idioma.

En lo que respecta a los estudios superiores, el único centro que existió durante la época colonial en el actual territorio argentino surgió del Colegio Máximo establecido en Córdoba en 1613 por el padre Diego de Torres, provincial de la Compañía de Jesús, con el obispo de Córdoba del Tucumán, fray Fernando de Trejo y Sanabria. La enseñanza en dicho Colegio, más tarde transformado en Universidad fue meramente escolástica, estaba destinada a formar miembros del clero.

Primeros matemáticos

A pesar de que en este primer período de nuestra historia no se hace mucha mención de la matemática, dada la forma en que fueron pobladas esta tierras, debieron haber venido hombres versados en matemática aplicada. En la Revista Nacional, año I, t. 1, n° 1, pág. 29, 1886: *Crónica del desarrollo de las ciencias matemáicas y de observación en el Río de la Plata*, Juan M. Gutiérrez, según cita Dassen, nos dice: "Juan de Ayolas, Cabeza de Baca, Martínez de Irala, acaudillando sus huestes por aquellas tierras jamás holladas por planta europea, eran acompañados, según una expresión de Ulrich Schmidel, por *hombres entendidos en materia de astros*".

El Padre jesuita Buenaventura Suárez, nacido en Santa Fe, estudió en el Colegio de su ciudad natal y luego realizó sus estudios superiores en Córdoba. Mientras ejercía su apostolado en las reducciones de la selva misionera y chaqueñas, profundizó por sí solo sus estudios de matemática y los aplicó a la astronomía, publicando en 1744 un calendario titulado *Lunario de un siglo*. Para realizar sus observaciones debió valerse de instrumentos que él mismo fabricó "con madera de nuestros bosques y hasta con lentes de fabricación americana y misionera", según la expresión del historiador Guillermo Furlong.

La expulsión de la Compañía de Jesús

La Compañía de Jesús fue expulsada por orden de Carlos III en 1767. Éste conocía los problemas que acarrearía dicha expulsión con respecto a la educación, por lo que ordenaba a los gobernadores y virreyes: "sin la menor dilación a subrogar la enseñanza de primeras letras, latinidad y retórica... oyendo a los ayuntamientos, diputados y personeros del común y otras personas celosas e inteligentes, sobre el modo práctico que haya en cada paraje, proponiendo el número de maestros, pasantes y repetidores que les deben ayudar, sus salarios y emolumentos".

En noviembre de 1771, la Junta Provincial de Temporalidades, presidida por el entonces gobernador Vértiz, consultó a los cabildos eclesiástico y secular, respecto a la mejor manera de aplicar los bienes pertenecientes a la Compañía de Jesús para "establecer escuelas y estudios generales para la enseñanza y educación de la juventud." La respuesta del cabildo eclesiástico auspicia la creación de un colegio convictorio y la erección de una universidad; el secular respondió en forma concordante con el eclesiástico, insistiendo en la conveniencia de trasladar la Universidad de Córdoba a Buenos Aires. Mientras se estudiaban los dictámenes de ambos cabildos, el procurador general Manuel de Basavilbaso hizo una presentación donde, luego de apoyar la idea de dotar a Buenos Aires de una Universidad, decía que no podía tener efectividad en forma inmediata, por lo tanto proponía la creación de escuelas de primeras letras y aulas de gramática latina, lo cual se hizo efectivo instalándose los "reales estudios" en 1772 en el local que había sido del Colegio de San Ignacio.

Ya en su cargo de virrey, Juan José Vértiz dotó a Buenos Aires de su primera imprenta. Éste llevó a cabo la fundación (en donde hoy funciona el Colegio Nacional de Buenos Aires) del Real Colegio Convictorio de San Carlos "en perpetua memoria del augusto nombre de nuestro soberano" en 1783, cuyo rector fue Vicente Jaunzarás y que funcionó hasta que en las invasiones inglesas, especialmente en la segunda (1807), jóvenes y maestros abandonaron las aulas para tomar las armas, con la consiguiente clausura de los cursos, convirtiéndose el local en cuartel de Patricios. Por las aulas del Real Colegio de San Carlos pasaron casi todos los hombres que hicieron la Revolución de Mayo. Se impulsó también, el estudio de la medicina con la creación del Protomedicato, tribunal encargado de examinar a aquellos que aspiraban ejercer la medicina, que inició la enseñanza de la anatomía y de la cirugía en 1801 y la de la medicina al año siguiente.

Manuel Belgrano (1770-1820)

Cursó estudios jurídicos en la Universidad de Salamanca, donde tomó contacto con las nuevas ideas de los enciclopedistas y economistas. Además pudo añadir a estas ideas las que surgieron de sus lecturas, ya que por concesión de Pío IV fue autorizado en forma amplia para que pudiese "leer toda clase de libros condenados, aunque fuesen heréticos".

En 1793 fue designado secretario del Consulado de Buenos Aires y desde allí intentó llevar a la práctica sus ideas, aunque no encontró espíritus afines. De ahí que se limitase a la difusión de las mismas, principalmente en sus *Memorias*, sugiriendo un amplio programa de reformas económico-culturales. Sostenía que la base de la riqueza se encuentra en la agricultura y que para poder hacer una explotación adecuada hay que educar a la gente de campo en todo lo concerniente al cultivo de la tierra, para lo cual sugería crear una escuela de agricultura. La segunda etapa sería proteger al comercio, el mejor modo de hacerlo, a su juicio, estaba en difundir los principios en que se basa la ciencia del comercio. Por ello proponía la creación de una escuela especial, en la que se daría una enseñanza práctico profesional basada en el estudio de la aritmética, la

teneduria de libros, la geografía, la estadistica, las leyes comerciales y las reglas de la navegación.
Propugnó la creación de escuelas gratuitas, donde se suministrara una educación regular desde la infancia. Sostuvo que el progreso del comercio dependía directamente de la difusión de la educación. Esta idea lo llevó a proyectar la creación de escuelas gratuitas para las niñas donde se enseñara además de la doctrina cristiana, la lectura, la escritura, costura y bordado, ya que "el bienestar y la virtud de la mujer instruida, constituyen la base de la sociedad".

Escuelas de Dibujo y Naútica

Por iniciativa de Belgrano se crearon dos escuelas, la de Dibujo, que comenzó a funcionar en marzo de 1799, en el Consulado, con el titulo de "Escuela de geometría, arquitectûra, perspectiva y de toda especie de dibujo", pero donde sólo se enseñó dibujo. Y la Escuela de Naútica, que inició sus actividades el 26 de noviembre de 1799, con el objetivo de fomentar "el estudio de la ciencia naútica proporcionando por este medio a los jóvenes una carrera honrosa y lucrativa y a aquellos que no se destinan a ella unos conocimientos los más a propósito para sus progresos, bien sea en el comercio, bien en la milicia o cualquier otro estudio". Sus bases fueron fijadas previo informe del capitán de navio Félix de Azara, que continuó luego como asesor del consulado en lo relativo a esa escuela. A continuación transcribimos un aviso de un periódico de la época, *Telégrafo mercantil rural, politico-económico e historiográfico del Rio de la Plata* (nº 24, pág.192, de 20 de junio de 1801), citado por el Dr. Dassen en su obra:

Academia de Náutica, establecida por el Real Consulado.
Director y 1° maestro D. Pedro Cerviño.
Id. id. 2°......
Se enseña en ella la Aritmética-Geometria, y práctica, Trigonometria rectilínea, y Esférica, Cosmografia, Geografia, uso de los Glovos ó Esferas artificiales, <<Hidrografia>>.Nabegacion, Astronomia Naútica, Algebra, y su aplicación á la Aritmética, y Geografia y Curbas Ecnica. Cálculo diferencial, é integral, y Mecánica. Se compone hoy esta Academia de 26 Alumnos.

Don Juan Alsina (agrimensor y piloto) había obtenido (por concurso al igual que D. Pedro Cerviño) el puesto de 2° director y maestro de la Academia. Pero pronto llegó el conflicto. Aunque Cerviño tomó a su cargo las matemáticas y Alsina el pilotaje, ambos comenzaron por la aritmética y los principios fundamentales de las matemáticas. El entredicho se produjo debido a que Alsina consideraba que era necesario enseñar los principios de la naútica sin esperar un año y medio, como se exigía. Si la Academia de naútica tenía por objeto, según lo indica el articulo 8° de su reglamento, no sólo formar pilotos, sino también proporcionar la enseñanza de las principales ramas de las matemáticas, a fin de que los alumnos que quisieren seguir otra carrera, tuviesen conocimientos propios para ser <<útiles a sí mismos y al Estado>>, su plan debía ser sin duda diferente del que hubiese correspondido a una simple escuela para formar pilotos. Sin embargo, el mismo artículo 8° declara ser tal objeto de formar pilotos el principal de la Academia. Estas ambigüedades y la diferencia de temperamentos explican la desaveniencias entre ambos directores. Cerviño, al igual que Belgrano, entusiastas admiradores de las matemáticas. Alsina, en cambio, con un criterio más utilitario, sólo deseaba formar pilotos expertos.
A continuación transcribimos una parte del programa, que mandó imprimir la Junta de Gobierno para los segundos certámenes (1802) que se tomaron:
La Arismética, Geometria, y Trigonometria han merecido siempre tanta estimación, que apenas hay quien dude de su utilidad. Todos conocen las ventajas, que adquiere

el entendimiento por medio del método con que se enseñan sus verdades. Por esto, y por ser la norma mas segura para no dar en mil escollos en el estudio del cálculo, de quien depende el conocimiento de lo mas sublime de la Geometria, y Ciencias Fisico-Matemáticas, se han explicado primero; despues se explicó la Trigonometria Esférica, la Cosmografia, la Geografia y la Hidrografia, sin las quales no se podria formar idea cabal de la Navegacion, que fué la última, pero para dar mas amplitud, y generalidad á estos conocimientos, y adquirir los de Navegacion en el grado de perfeccion de que son capaces, pareció oportuno explicar el Algebra, y aplicarla á la Arismética, Geometria, y Curbas Conicas: con estos antecedentes pasaremos al cálculo diferencial, e integral para enseñar las leyes del movimiento, la Estática, Dinámica, y demás comprehendidas baxo el nombre general de Mecánica...

Acerca de los textos utilizados para la enseñanza eran los de Bezout *Cours de mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'artillerie*, Bails *Principios de matemáticas* y, Jorge Juan y Santacilla *Compendio de navegación*. El Algebra se enseñaba hasta las ecuaciones de segundo grado, con una incógnita, y las de primero, hasta con tres incógnitas o indeterminadas. El Cálculo Infinitesimal y de la Mecánica no sabemos exactamente hasta dónde alcanzaba su enseñanza.

Un decreto de la Corte clausuró en 1806 la Escuela de Naútica por haberse, en su creación, infringido a las reales órdenes que regían la marcha de estos establecimientos. A continuación se transcribe el comentario que hace al respecto el Dr. Dassen: "Es obvio que ese argumento fué sólo un pretexto; en realidad, la Corte no podía tolerar los vientos de independencia que ya soplaban por estas tierras y además, el obscurantismo con que España sumió a sus colonias, era incompatible con semejantes instituciones de enseñanza."

Cátedra de Matemática en Córdoba

En 1807, se autorizó la creación en Buenos Aires de una Academia, en sustitución de la clausurada. En ella la enseñanza tendería a dar una ilustración a los ciudadanos bajo el punto de vista de la carrera militar. Fue cerrada cerca de un año después, posiblemente porque Don Carlos O'Donell, su fundador, fue designado para inaugurar en Córdoba (1809) la primera cátedra de matemática que allí funcionó.

El impreso con que fue anunciado dicho acontecimiento en la capital del virreinato decía: "la aritmética, sea la vulgar, sea la álgebra que trata más jeneralmente de las cantidades, debe ser de uso continuo en una vida como la nuestra, en que fluctuando siempre entre la probabilidad i la duda nunca podemos asegurar nuestros juicios sin el auxilio del cálculo. La jeometría, del mismo modo, cuyo oficio es combinar todas las proporciones de formas regulares a la materia i viene a ser como la lójica de esas artes consoladoras a quienes tanto deben nuestras necesidades, así reales como ficticias". (GARRO, op. cit., pág. 231).

Esta iniciativa fue tomada en 1808 por el nuevo rector de la casa de estudios, el deán Gregorio Funes, quien hizo crear una cátedra que sostuvo d[e] sus ingresos personales du[-]rante dos años. Comprendía aritmética, álgebra [y] geometría. Al principio est[a] cátedra fue muy concurrida, pero rápidamente disminuyó e[l] interés, por lo cual el deá[n] decidió retirar el subsidio. Si[n] embargo, la Universidad cor[-]dobesa la sostuvo en adelante.

Ideales de la Revolución d[e] Mayo

Con el advenimiento de l[a] Revolución del 25 de Mayo d[e] 1810 surgieron nuevos ideale[s] que llevaron lentamente a u[n] cambio cultural. La minorí[a] ilustrada dirigente de l[a] Revolución consideró nece[-]saria una nueva concepció[n] educativa adaptada a est[a] nueva organización política. En palabras de Solari: "al deja[r] el pueblo de ser vasallo de un re[y] para convertirse en dueño de su[s] destinos, al reemplazar el gobiern[o] absoluto por un régimen de[-]mocrático y representativo, a l[a] educación se le impuso una nuev[a] finalidad: formar la concienci[a] ciudadana."

Ejemplo de este interés no[s] proporciona Mariano Moren[o] (1778-1811), secretario de l[a] Primera Junta, quien segú[n] cita Solari, nos dice: "Si l[os] pueblos no se ilustran, si no se vu[l]garizan sus derechos, si cada hom[]bre no conoce lo que vale, lo q[ue] puede y lo que debe, nuevas ilusi[o]nes sucederán a las antiguas [y] después de vacilar algún tiempo e[n]tre mil incertidumbres, será tal v[ez] nuestra suerte mudar de tiranos, s[in] destruir la tiranía". Moreno e[n]tendía la educación en un se[n]tido amplio, no únicamente las aulas. Así, fundó la Biblioteca Pública y el periódico *La Gaceta de Buenos Aires* con el fin de formar e informar al pueblo. Lamentablemente muchos de los proyectos de Moreno se vieron truncados con su muerte. Sólo se sabe que tenía idea de traer profesores del extranjero para que, sobre la base del conocimiento científico, formaran a los que con los años serían los hombres que fueran "el honor y la gloria de su patria".

Manuel Belgrano continuó con su prédica en favor de la educación mediante artículos publicados en *El Correo del Comercio*. Propuso el establecimiento de escuelas de primeras letras en todas las parroquias de la ciudad y en la campaña; proyectó que los jueces obligaran a los padres a enviar a sus hijos a la escuela; y sugirió se obligara a los párrocos a que influenciaran a sus feligreses a educar a sus hijos. También insistió sobre la importancia de la educación de la mujer.

Otro importante partícipe de la educación popular fue el padre Castañeda (1776-1832) quien defendió la idea de que no sólo debía enseñarse lectura, escritura, aritmética y rudimentos de religión, sino que también debían incluirse enseñanzas complementarias con informaciones científicas y prácticas, agregados estéticos (música, baile) y ejercitación física. Aunque no fueron aceptadas, sus ideas contribuyeron a la convicción de que era necesaria una ilustración popular.

Durante este periodo se fundaron diversos establecimientos en Buenos Aires y en todo el país. Se comisionó a Idelfonso Paso y Pablo Pedro Aguirre a visitar los cuatro establecimientos existentes en Buenos Aires e informar sobre los mismos. Tras este informe el Cabildo elevó un oficio sobre las escuelas municipales sosteniendo la conveniencia de "unifomar la educación y organizar un método sistemático, que generalmente se siga y adopte en todas las escuelas".

En 1813 la Soberana Asamblea General Constituyente, teniendo como antecedente el Reglamento para las escuelas del Norte redactado por Belgrano, abolió el castigo de azotes en las escuelas, pero disuelta la Asamblea, la ignorancia de los maestros hizo que en el Estatuto provisional (1815) se anulara ese decreto. Recién en 1819 Pueyrredón ordenó "que jamás vuelvan a hacer uso de un castigo tan ignominioso como bárbaro y desagradable"

Las escuelas del Norte

"Venid que de gracia se os da el néctar agradable y el licor divino de la sabiduría". Esta inscripción hizo grabar Belgrano en el escudo de las escuelas de primeras letras por él fundadas en Tarija, Tucumán, Jujuy y Santiago del Estero. Para las cuales redactó su reglamento (25 de mayo de 1813), del cual se recomienda ampliamente su lectura completa. A continuación y dado lo extenso del mismo, transcribimos solamente algunos de sus artículos:

Art. 5° - Se enseñará en estas escuelas a leer, escribir y contar, la gramática castellana, los fundamentos de nuestra Sagrada Religión, y la Doctrina Cristiana [...], los primeros rudimentos sobre el origen y objeto de la sociedad, los derechos del hombre en ésta y su obligación hacia ella y al gobierno que la rige.

Art. 18 - El maestro procurará con su conducta y en todas sus expresiones y modos inspirar a sus alumnos amor al orden, respeto a la religión, moderación y dulzura en el trato, sentimientos de honor, amor a la virtud y a las ciencias, horror al vicio, inclinación al trabajo, despego del interés, desprecio de todo lo que diga a profusión y lujo en el comer, vestir y demás necesidades de la vida, y un espíritu nacional que les haga preferir el bien público al privado, y estimar en más la calidad de americano que la de extranjero.

Educación especializada

Luego de la Revolución de Mayo hubo diversas fundaciones. El 18 de julio de 1810 se creó la Academia de Música. En mayo de 1813 se dispuso la creación de un Instituto Médico que más tarde, y viendo la necesidad de formar mayor número de cirujanos para atender a los heridos de los ejércitos de campaña, se transformó en el Instituto Médico Militar. En 1815 el Consulado de Buenos Aires abrió una Academia de Dibujo. Comenzó a funcionar también, en este período, la Academia de Jurisprudencia.

En lo que respecta a la enseñanza de la Matemática, se instaló, a expensas del Consulado y por iniciativa de Belgrano, el 12 de septiembre de 1810 la *Escuela de Matemáticas* dedicada a formar oficiales del ejército. Su estatuto fue redactado por Felipe de Sentenach, bajo cuya dirección funcionó hasta 1812, año en que fue fusilado y con él desapareció la escuela. La enseñanza comprendía: aritmética, geometría plana, trigonometría rectilínea y geometría práctica (doce meses seguidos). Además, los oficiales aspirantes a la ingeniería y artillería deberían cursar: álgebra inferior y superior con sus aplicaciones a la aritmética y geometría; mecánica, y en particular estática, secciones cónicas (dieciocho meses). La instrucción de los oficiales de la guarnición fue considerada "como el principio de la ilustración de esa brillante carrera que una política destructora había degradado sepultándola diestramente en las tinieblas de la ignorancia" (*Gaceta de Buenos Aires*, 23 de agosto de 1810)

En 1813, se decide establecer una Academia, prolongación de la del Consulado. En ella debían enseñarse, además de las matemáticas puras, la arquitectura civil y naval bajo la dirección de Cerviño. Pero recién se hace efectiva en 1816 bajo la dirección de don Manuel Herrera, sargento mayor de "la artillería de la patria".

Pocos días antes, el 20 de enero de 1816, el director supremo había resuelto fundar una escuela oficial de ciencias exactas bajo la dirección de don Felipe Senillosa (1794-1858) quien llegó al país en 1815 por sugerencia de Rivadavia, quien desempeñaba funciones diplomáticas en Europa. Senillosa tuvo en 1835 a su cargo, con la colaboración de Mossotti, la comparación de la vara al metro, estableciéndose desde entonces 1 vara = 866 mm.

La escuela comenzó a funcionar el 22 de febrero de ese mismo año, pero ambas debieron de haberse fusionado, pasando a depender del Consulado, ya que no se encuentran datos de la primera después del 13 de julio de 1816. En septiembre del mismo año el gobierno dicta un decreto nombrando a do[n] José de Lanz (gran profes[or] mejicano, residente e[n] Europa, desde donde lo envi[ó] Rivadavia) director de [la] Academia y a Senillos[a] segundo director, pe[ro] Senillosa retomaría su lugar [al] retirarse don José de Lanz [al] año de haber asumido. El pla[n] de estudio, que se desarrollab[a] en dos años era superior al d[e] los establecimient[os] anteriores. Comprendía: el[e]mentos de aritmética, álgebr[a,] geometría, geometría descrip[]tiva, trigonometría rectilínea [y] esférica con aplicación a la to[]pografía; eso en el primer añ[o]. En el otro se enseñaban a[l]gunos principios de cálcul[o] infinitesimal, de mecánic[a,] astronomía y navegación. S[e] procuraba formar oficial[es] ilustrados y esto explica l[os] autores utilizados: Legendr[e,] Poisson, Monge, Cisca[r,] Bezout, Lacroix, todos ell[os] eran eminentes profesores [de] escuelas militares o naval[es] francesas.

A continuación detallamos [el] programa de las materias [de] exámenes:

Aritmética: Numeración. Números enteros. Números complejos. Teoría de las nuevas monedas, pesas y medidas. Propo[r]ciones y regla de tres simple, directa e indirecta, y regla de tres compuesta. Reglas de compañía, de aligación y de interé[s]
Geometría: Propiedades de la línea recta y de la circular. Áreas «de los planos» y su medición. De los planos y línea rec[ta] Cuerpos terminados por planos y medida de sus volúmenes y capacidad. Cuerpos redondos. Cuerpos circulares;
Álgebra: Operaciones fundamentales. Aplicaciones a quebrados. Ecuaciones de primer y segundo grado, con una o m[ás] incógnitas. Problemas que trae el autor (Lacroix). Cálculo de radicales; consideraciones del *infinito o imposible, can[ti]dades negativas, ecuaciones* idénticas. Binomio de Newton; elevación de las cantidades a cualesquiera potencias y extr[a]cción de toda especie y grado de raíces;
Aplicación del álgebra a la aritmética: Cantidades equidiferenciales, o proporciones por diferencias. Proporsiciones [por] cociente. Principales propiedades de unas y otras deducidas de sus ecuaciones y aplicación a la resolución de algu[nos] problemas. Logaritmos, formación de las tablas, su uso, etc.;

Principios de geometría descriptiva: Planos que se consideran. Problemas relativos a los planos y línea recta. Problemas relativos a los planos tangentes a una superficie curva de revolución, y algunas aplicaciones al modo de calcular las sombras, representación de los cuerpos sobre el papel, levantamiento de planos y costrucción.
Nota.- Hasta aquí alcanzan las materias de examen pertenecientes a los alumnos de primera clase o de primer año.
Trigonometría plana y esférica: Definición de las líneas que se consideran en el círculo. Fórmulas conducentes a la formación de las tablas de los senos, cosenos, etc., y a la resolución trigonométrica de algunos casos. Resolución de los triángulos rectilíneos, en general, rectángulos u oblicuángulos. Resolución de los triángulos esféricos, ya por diversas fórmulas o analogías, ya por medio de los segmentos y perpendicular. Aplicación de la trigonometría a algunos problemas, como medir distancias y alturas, accesibles o inaccesibles: otros relativos al levantamiento de planos, nivelación y navegación:
Aplicación del álgebra a la geometría: Costrucción de las cantidades y resolución geométrica de las ecuaciones de primero y segundo grado por medio de la línea recta y del círculo: algunos problemas. Líneas de primer orden y sus ecuaciones. Líneas de segundo orden y sus ecuaciones, a saber: la ecuación general de las secciones cónicas y las partiuculares a cada una de ellas relativamente a sus ejes principales. Aplicación a la construcción geométrica de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, o resolución de algunos problemas determinados o indeterminados. Hallar los medios proporcionales entre dos rectas dadas. Trisección de un arco dado:
Principios de mecánica: De las fuerzas y modo de representar su intensidad y dirección. Estática, a saber: equilibrio de un punto material, equilibrio de un cuerpo sólido, composición y equilibrio de las fuerzas paralelas: ídem de las dirigidas en un mismo plano. Aplicación de estos principios a los cuerpos graves. Centros de gravedad y modo de determinarlas. Equilibrio del polígono funicular. Máquinas elementales, su definición, uso, relación entre la fuerza motriz y la resistencia, ley general del equilibrio en las máquinas:
Cosmografía o elementos de astronomía: Sistema del mundo. Determinación de la posición de los cuerpos celestes. De la Tierra. Fenómenos que resultan del movimiento giratorio de la Tierra. De la Luna. Correcciones que deben aplicarse a las alturas de los astros. Resolución de varios problemas que tienen aplicación al pilotaje, como, *determinar la latitud del observador por medio de la altura meridiana de un astro: determinar la hora de nacer y poner el Sol; hallar su amplitud, ázimut, etc.* Por último explicarán y harán ver prácticamente el modo cómo se deben manejar los instrumentos de más uso, como son el *teodolito, el cuarto de círculo, el grafómetro, reportador, nivel y sextante de reflexión.*

Pero lo más importante es que Senillosa, más que cultivar la memoria, se preocupó por desarrollar la razón de los alumnos. La Academia funcionó hasta 1821 cuando fue incorporada a la Universidad.
En 1815, en Córdoba, se aprueba una modificación en la estructura de los estudios propuesta por el deán Funes, con la que se pretende mejorar la enseñanza de las ciencias: intensificar la matemática, estudiar experimentalmente la física, aunque aún no se contara con el material necesario; sin mostrar, sin embargo, la misma intención para con la filosofía, que era aristotélica, prohibiendo la difusión de las ideas de Descartes, Locke y Leibniz.
En Tucumán, Belgrano funda una Academia de Matemáticas. Mientras tanto, en Mendoza, por obra de San Martín, se crea el Colegio de la Santísima Trinidad, que empieza a funcionar en 1818. Estaba destinado principalmente al estudio de las ciencias, pues su propósito era establecer "cátedras de humanidades, en que se enseñarán los sagrados derechos y deberes del hombre en sociedad, las facultades mayores, la física, las matemáticas, la geografía, la historia y el dibujo". Se puede observar que no se incluye la teología, dice el historiador Vicente F. López, "revelaba ya un progreso tanto más evidente en las ideas de los que habían dirigido la fundación de este establecimiento, cuanto que la enseñanza de la filosofía en manos del rector Guiraldes, estaba calcada sobre el método de Condillac y tomaba por punto de partida, como este grande maestro, la observación experimental y la observación efectiva de la conciencia individual".

Gisela S. de Piñeiro*

*Prof. de Matemática, egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Bibliografía:

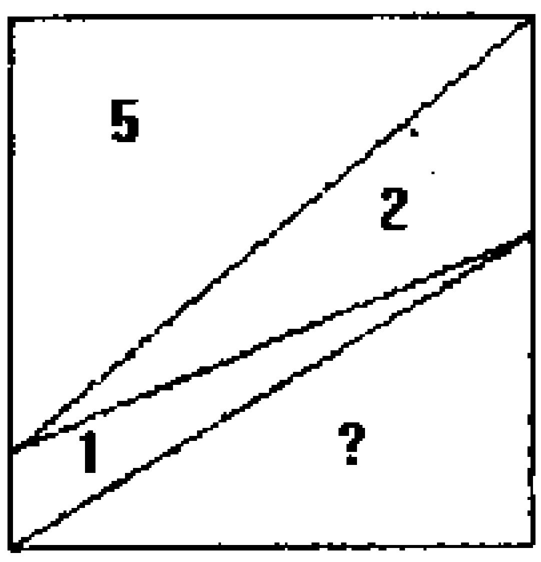
* BABINI, JOSE - *Historia de la ciencia argentina* - México, Fondo de Cultura Económica, 1949.
* DASSEN, CLARO CORNELIO - *Evolución de las Ciencias en la República Argentina - IV Las Matemáticas en la Argentina* - Buenos Aires, Coni, 1924.
* SOLARI, MANUEL HORACIO - *Historia de la educación argentina - 2ª ed.* - Buenos Aires, Paidós, 1972.

Problemas y Juegos de Ingenio

*por Gisela Serrano de Piñeiro**

Problemas Propuestos

1. *De 120 Acertijos para hacerse el Bocho - Diego Kovács e Iván Skvarca - Ed. de la Urraca* - El cuadrado de la figura está dividido en cuatro triángulos. Tres de ellos tienen área 5, 2 y 1, tal como se indica. Averigüe el área de ?.



2. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola*: Supongamos que f y g, están definidas en $(a;b)$ y que su suma es una función continua en $x_0 \in (a;b)$. ¿Son o no continuas las funciones f y g en x_0? Justifique.

3. *De La Probabilidad y sus Aplicaciones - Luis Santaló - Ed. Ibero-Americana* - Sea el segmento AB de longitud unidad. Se da en él un punto X al azar. Hallar la probabilidad de que el producto de los segmentos AX . XB sea mayor que $\frac{1}{9}$.

4. *De ¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos - Raymond Smullyan - Ed. Cátedra* - En "El mercader de Venecia", de Shakespeare, Porcia tenía tres cofres -uno de oro, otro de plata y otro de plomo-, dentro de uno de los cuales estaba el retrato de Porcia. El pretendiente tenía que elegir uno de los cofres y si tenía suerte (o inteligencia) elegiría el que tenía el retrato, pudiendo así pedir a Porcia por esposa. En la tapa de cada cofre había una inscripción para ayudar al pretendiente a elegir sabiamente.
Pero supongamos que Porcia quisiera elegir marido, no por su bondad, sino por su inteligencia. Tendría las siguientes inscripciones en lo cofres:

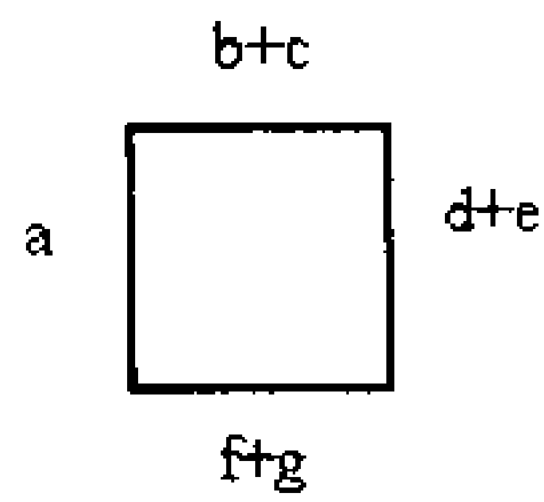
Oro	**Plata**	**Plomo**
El retrato está en este cofre.	*El retrato no está aquí.*	*El retrato no está en el cofre de oro.*

Porcia explicó al pretendiente que de los tre enunciados, a lo sumo uno era verdad. ¿Cuá cofre debe elegir el pretendiente?

Soluciones a los Problemas de Axioma N° 4:

1. De Diego Kovács - Los Acertijeros N° 58: *Gontij el fakir cruza sus piernas huesudas y comienza a to car la flauta. De un canasto de mimbre ubicad frente a sus rodillas salen danzando 100 serpiente de la India. Todas miden un número entero d metros entre 1 y 100 y no hay dos que midan l mismo. Algunas rodean a Gontijo y forman cuadrado de menor superficie posible. ¿Cuánt mide ese cuadrado? Nota: Ninguna serpiente hac una torsión de 90° con el cuerpo.*

Respuesta dada por Raquel Kalizsky



a=b+c=d+e=f+g y además la superficie debe s mínima, por lo cual el problema consiste en e contrar siete números distintos que cumplan co la igualdad anteriormente propuesta donde a s el menor posible. Dichos números son:

$$7=4+3=5+2=6+1$$

Por lo cual el cuadrado formado tiene lado 7.

2. Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola: *Se tiene un conjunto A de números naturales. El cardinal de A es menor que 7. El mínimo común múltiplo de todos los números de A es 390. Si se consideran dos elementos cualesquiera de A, resultan coprimos. El producto de todos los números de A no es divisible por 160 ni es la cuarta potencia de ningún número natural. Determine los elementos de A.*

Respuesta.

El problema así planteado tiene condiciones sobrantes (la primera y las dos últimas) y posee varias soluciones:

Sabemos que el m.c.m. = 390, si factorizamos 390=2.3.5.13, por lo cual y como los elementos de A son coprimos entre sí, basta tomar combinaciones de estos números primos. Tendremos que los posibles conjuntos son 29, a continuación los enumero.

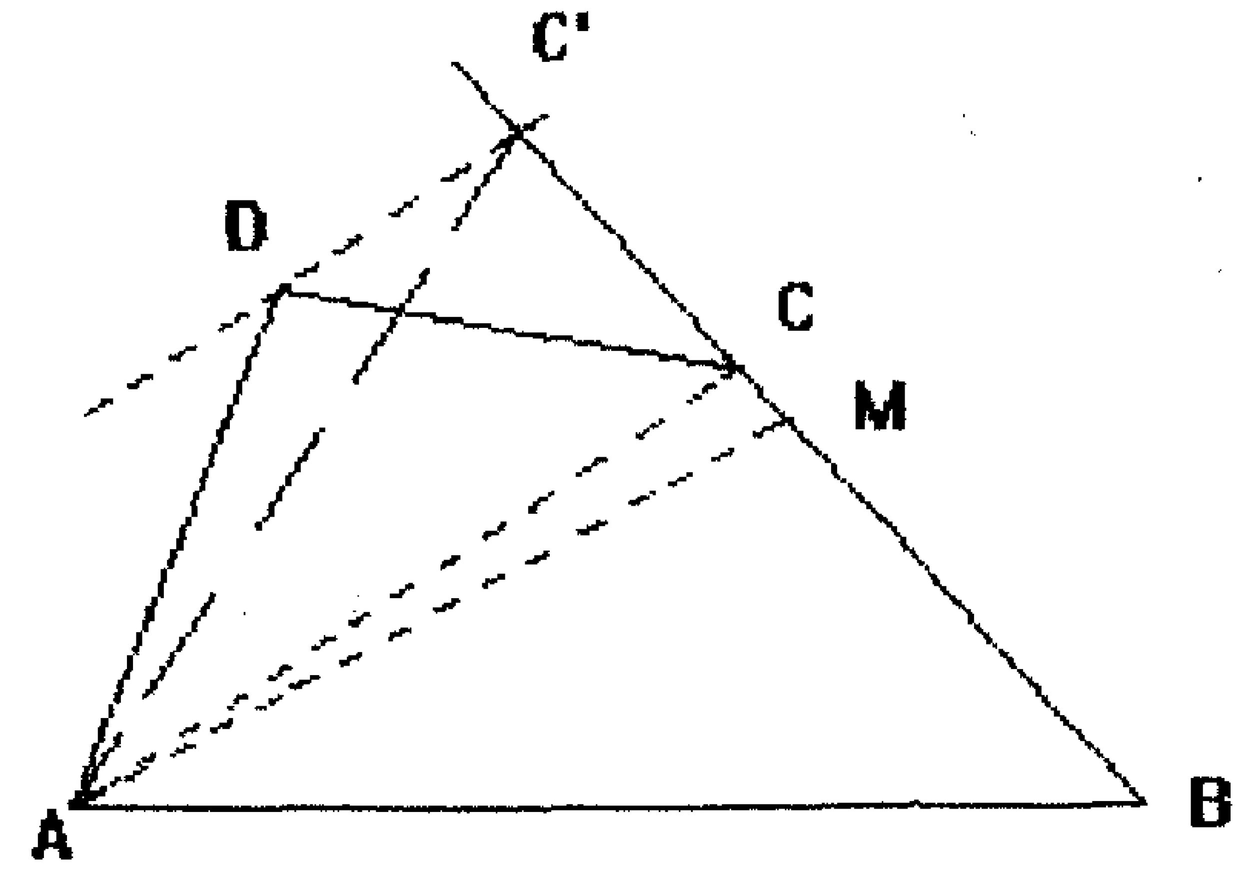
A={1;2;3;5;13}; A={2;3;5;13}; A={1;6;5;13}; A={6;5;13}; A={1;3;10;13}; A={3;10;13}; A={1;3;5;26}; A={3;5;26}; A={1;2;15;13}; A={2;15;13}; A={1;2;5;39}; A={2;5;39}; A={1;2;3;65}; A={2;3;65}; A={1;6;65}; A={6;65}; A={1;10;39}; A={10;39}; A={1;26;15}; A={26;15}; A={1;2;195}; A={2;195}; A={1;3;130}; A={3;130}; A={1;5;78}; A={5;78}; A={1;13;30}; A={13;30}; A={1;390}

En realidad el enunciado correcto es el siguiente (enviado por el Prof. Alfredo Cóccola): **Se tiene un conjunto A de números naturales. El cardinal de A es mayor que 7. El mínimo común múltiplo de todos los números de A es 390. El máximo común divisor de dos números cualesquiera del conjunto es superior a la unidad. El producto de todos los números de A no es divisible por 160 ni es la cuarta potencia de ningún natural. Determine los elementos de A.** Lo dejamos para que lo piensen.

3. De O.M.A. - Nota N° 11 - Geometría - *Dado el cuadrilátero ABCD de la figura, trazar desde un vértice una recta que lo divida en dos partes de igual área.*

Respuesta dada por la O.M.A.

Elijamos como vértice A.



Construimos el triángulo AC'B de igual área que el cuadrilátero ABCD (ya demostrado en Aχioma N° 2). Si M es el punto medio de BC', la recta AM divide al cuadrilátero en dos partes de igual área ([ABM]=área de ABM):

[ABM] = [AMC'] = [AMC] + [ACC'] =
= [AMC]+[ACD]=[AMCD]

Observación: Ver que este procedimiento no sirve tomando cualquier vértice para comenzar.

4. De Notas de Algebra I - Dr. Enzo Gentile - Ed. EUDEBA - *Utilizando únicamente la axiomática de los números reales, demostrar que a.0=0*

Respuesta

0	= 0 + 0	por ser el 0 elem. neutro
a.0	= a.(0+0)	
	= a.0 + a.0	por Ley distributiva

Por lo tanto,

a.0 = a.0 + a.0
Sumando miembro a miembro el inverso aditivo de a.0, tenemos
a.0 + (-a.0) = a.0 + a.0 + (-a.0)
0 = a.0

¡Hasta el próximo número!

* Prof. de Matemática, egresada del I.S.P. "Joaquín V. Gónzalez"

Lecturas Matemáticas

Hoy comentamos dos libros que nos han parecido de lectura sencilla y necesaria a saber:

1) GRAPHS. An Introductory Approach - Wilson y Watkins - Ed. John Wiley. New York. 1990 (en inglés) 340 páginas.
Es un curso introductorio de Matemática discreta (tema que los profesores alguna vez dejamos de lado, pero cuya importancia matemática es evidente). El tema central del libro son los grafos que son introducidos de manera sencilla, a través de ejemplos, donde se matematizan muchos asuntos de diversas ciencias y disciplinas. Cada tema (grafos, digrafos, caminos, árboles) posee una gran cantidad de problemas (con soluciones) de modo que se puede aprender "haciendo". Es realmente notable todo lo que se puede hacer con los grafos y el libro así lo entiende, al poner de manifiesto una gran cantidad de aplicaciones.
De recomendable lectura, es ameno e intuitivo sin desmedro de las pruebas rigurosas de las propiedades de los grafos más notables.

2) MATEMATICAS I - (C.O.U.) - Guzmán y Colera - Ed. Anaya - Madrid. 1995, 415 páginas.
Es un gran texto de introducción en la Matemática Universitaria. De prolija presentación e impresión de calidad, se presenta ordenado en forma muy precisa.
Consta de seis bloques: Álgebra lineal, Geometría analítica, Funciones, Cálculo diferencial, Cálculo integral y Probabilidades.
La presentación de cada tema se hace a través de problemas muy seleccionados y con gran rigor conceptual, aunque no parezca a primera vista.
Al final de cada bloque hay dos novedosas secciones llamadas estrategias de pensamiento y orientación universitaria, donde se trata de situar a la Matemática dentro del panorama general de las Ciencias. En estas secciones, hay abundantes referencias a la Matemática.
En cada tema se proponen una gran cantidad de problemas para resolver (con soluciones), y se presentan exámenes tipo en una muy buena selección.
Si bien el temario es bastante general, vale la pena considerarlo como excelente libro de consulta.

Hasta la próxima

Jorge Martínez*

*Prof. de Matemática del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

El olvido de las matemáticas perjudica a todo el conocimiento, ya que el que las ignora no puede conocer las otras ciencias ni las cosas de este mundo.

Roger Bacon

*por Raquel S. Kalizsky**

Nuevas autoridades en el Departamento de Matemáticas del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Tal como lo informáramos en el N° 4, se realizaron las elecciones de Junta Departamental, resultando electos por la lista única de docentes, los profesores Sardella, Oscar (como Director de Carrera); Ferreiro, Julio; Martinez, Jorge; Martinez, Hebe; Di Giorgio, Francisco y Rotbart, Aída y como representantes de alumnos los integrantes de la lista Función Biyectiva: Salpeter, Claudio, Barbarossa, Mariana; Chorny, Fernando, Gamarra, Mercedes y Píngaro, Gonzalo. Las nuevas autoridades se reúnen los dias 5 de cada mes; en caso de resultar feriado, la reunión se pospone para el lunes inmediato posterior.

Comisión Cultural del Dpto. de Matemática del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Sigue en marcha el trabajo iniciado exitosamente el año pasado por esta Comisión.
Entre los proyectos para el ciclo 1997, se preven conferencias, conciertos, talleres y algo más, que oportunamente anunciaremos a nuestros lectores.

Cursos

Aún no contamos con información precisa acerca de los cursos de perfeccionamiento docente que se dictarán en las distintas instituciones. No obstante, queremos hacerles llegar lo que hemos podido averiguar.

PROCIENCIA Conicet
Hay una Oferta de Cursos a Distancia, organizada por PRO-CIENCIA Conicet, cuya sede se ha trasladado a Pacheco de Melo 1826 P.B. (1126) Capital Federal, teléfonos 814-3859/3860. Atiende de 10:00 a 12:30hs. y de 13:30 a 17:00hs.
La particularidad de estos cursos es que son "a distancia", lo cual resulta muy conveniente para acomodarlos a la ajetreada vida de los docentes. El costo de cada curso es de $32,50 y se abona al momento de recibir el cuadernillo de trabajo, con lo cual uno queda inscripto. A partir de ese momento hay un plazo máximo de un año para rendir la evaluación presencial, previo envío de la evaluación a distancia.
En lo que a matemática se refiere, hay cinco cursos, correlativos todos del primero de ellos: *Matemática I. Su enseñanza,* el cual cuenta ahora con una actualización que pueden rendir los que ya han aprobado el curso primitivo.
Los siguientes son
* *Matemática II. Enseñanza de la geometría.*
* *Matemática III. Álgebra. Su enseñanza.*
* *Matemática IV. Probabilidades y estadística.*
* *Análisis matemático.*

U.T.N. - Regional Buenos Aires
Integrando la Red de Formación Docente Continua, ofrece una serie de cursos para docentes de nivel primario y medio. Los mismos son arancelados teniendo un costo de $30.- de inscripción (que sirve para más de un curso) y $20.- por mes. Detallamos a continuación los cursos previstos:
* *"Hacia una integración entre ecuaciones y funciones"* (30 hs.) Semipresencial Prof. María Teresa Figueroa. Viernes de 18 a 21 hs.
* *"La era informática II"* (30 hs.) Lic. Walter Legnani Sábados de 9 a 12 hs.
* *"La matemática en nuestra vida cotidiana"* (30 hs.) Lic. Walter Legnani, Prof. Gladys Diaz. Sábados de 14 a 17 hs
* *"Conjuntos numéricos y operaciones"* (30 hs.) Prof. Alfredo Cóccola. Sábados de 14 a 17 hs.
* *"Funciones numéricas"* (30 hs.) Prof. Leonor Carbajal. Sábados de 9 a 12 hs.

Informes e inscripción en su sede de Medrano 951 - 1° piso - Asesoría Pedagógica - teléfonos 862-0708/0109 interno 125, de lunes a viernes de 11:00 a 17:00 horas.

Charlas

En el marco de la 23° FERIA INTERNACIONAL DE BUENOS AIRES EL LIBRO DEL AUTOR AL LECTOR, se realizarán las 2° Jornadas sobre Vocación & Empleo en la Argentina - Dirección General Lic. Juan Antonio Lázara. Las mismas tendrán lugar en el Centro Municipal de Exposiciones, entre el 18 de abril y el 5 de mayo, correspondiendo el miércoles 30 de abril, 18hs., a la charla sobre DOCENCIA.

Entrada gratuita para Universidades e Instituciones (de lunes a viernes). Cupos limitados - Reservas al 903-7294 - Se entregarán certificados de asistencia.

Canción de la Olimpíada Matemática

Nuestro país está encargado, este año, de organizar la 38° Olimpíada Matemática Internacional. La misma se desarrollará del 18 al 31 de julio en la ciudad de Mar del Plata.
Con el propósito de recibir a los jóvenes matemáticos internacionales que competirán, la señora Lidia Roisman ha escrito un poema el cual se transformará en la Canción de la Olimpíada Matemática Argentina. Lo transcribimos a continuación

Volaremos por el cielo
recorreremos caminos;
esto no tendrá fronteras
sumando nuestros destinos.

Unidos en un anhelo
venimos de todas partes,
a compartir la alegría
de juntar ciencia con arte.

Sumamos, multiplicamos
y llegamos a un total;
infinito es nuestro sueño
sin medida, de verdad.

Volveremos a encontrarnos
resolviendo los problemas;
razonar es nuestro estilo,
¡la amistad nuestro sistema!

* Prof. de Matemática, egresada del I.S.P. "Joaquín V. Gónzalez"

Próximo Número... Mayo/Junio 1997

Grandes matemáticos: Galois.

Apuntes sobre..., Ecuaciones Diferenciales (última parte).

Historia: Resolución de la ecuación de segundo grado.

Problemas, Información, Correo de Lectores.

Y mucho más...