Axioma

La revista de los profesores y estudiantes de Matemática

La Tablilla Plimpton 322

ISSN 1515-744X

9 771515 744000

Año 3 - Número 14

Aχioma N° 14

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de Matemática, de venta exclusiva por suscripción. Hecho el depósito que marca la Ley.

Directores y Propietarios
Fernando Chorny
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Gustavo Ernesto Piñeiro
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Pablo Bonucci
Jorge Martínez

Ilustraciones
Fernando Chorny
María Eugenia Samuilov

Dirección postal
Av. Belgrano 2654 - 1° "6"
(1096) Buenos Aires
Argentina

Correo electrónico
axioma@nalejandria.com

En internet
www.nalejandria.com/axioma

Impresión y distribución
Agencia Periodística Cid
Avda. de Mayo 666, Capital Federal, Argentina.

Una publicación de
NAL Educativa S.A. (Nueva Alejandría)
Uurguay 1112;
Piso 6
Capital Federal (C1016ACD),
Argentina
Teléfono: 5811-0121

Registro de la Propiedad Intelectual N° 867689. ISSN: 1515-744X

Editorial

Escribir un prólogo, confiere la oportunidad de justificar (en general, vanamente) los aciertos y errores que el lector hallará en la lectura; es la oportunidad de la vindicación (ciertos libros no son más que prólogos de otros ya escritos por el autor o de futuras publicaciones). La nota editorial prefigura, en cambio, el agradecimiento y la crítica escueta. El primero, advertimos, debe atribuirse al profesor Pablo Bonucci quien, desde este número, ha accedido gentil, gratuita y resignadamente, a colaborar con Axioma.

En cuanto a la crítica... Imposible hacerla sin caer, indefectiblemente, en lugares comunes. ¿Hemos de hacer notar lo que todo el mundo, desde hace tiempo, percibe: la decadencia incesante del nivel de conocimiento de alumnos y profesores? ¿Debemos recordar que la sociedad considera la escuela secundaria como un trámite molesto, aunque cada vez más sencillo (sólo hay que esperar cinco años y, si se quiere, bastante menos)? ¿Qué decir de los colegios que actúan como una empresa destinada a recaudar, en donde la dignidad ha cedido su lugar a la *adaptación* sumisa, y en donde ya no se habla de enseñar sino de *contener*?

No, decididamente, nada nuevo hay bajo el sol. Almafuerte estableció para siempre que *La sociedad es como los sordomudos, que más entienden los gestos que las palabras: no oye, ve.* Los vastos discursos (los escritos y los de boca en boca) que pueblan el país, no se escuchan. Pero todo acto conlleva una intención, muchas veces críptica y hasta inconsciente. Tal vez, esta publicación sea el desesperado intento de mostrarle a esta sociedad sordomuda (ya no con palabras discursivas sino con gestos), una ferviente y silenciosa resistencia.

Sumario

Mayo/ Junio de 2001

Combinatoria (Segunda parte)

Continuamos en esta sección con el desarrollo de temas de combinatoria que hemos iniciado en Axioma 13. Incluiremos en esta ocasión algunas aplicaciones que, esperamos, resultarán de interés para nuestros lectores.

por Gustavo Piñeiro *

Introducción:

En la nota anterior, primera de esta serie, los problemas de combinatoria que analizamos nos condujeron al estudio del **Principio General de Enumeración** (P.G.E.). Recordemos su enunciado:

Digamos que queremos determinar la cantidad de elementos (o el *cardinal*) de un cierto conjunto finito A. Asumamos además que para construir cada uno de los elementos de A debemos realizar k elecciones sucesivas.

Supongamos que para la primera elección tenemos n_1 opciones. Una vez realizada la primera elección, tenemos n_2 opciones para la segunda. Una vez realizadas las dos primeras elecciones, tenemos n_3 opciones para la tercera, y así sucesivamente. Entonces, la cantidad total de elementos del conjunto puede calcularse como $n_1.n_2.n_3....n_k$.

Dos meses atrás hemos indicado también que, implícito en este enunciado, está el hecho de que en la construcción de los elementos del conjunto A es importante el **orden** en el que se realizan las elecciones. Es decir, si este orden es alterado, será diferente el elemento de A que hayamos construido.

Estudiaremos en esta ocasión cómo puede procederse cuando el orden de las elecciones deja de ser relevante.

Un problema resuelto:

Problema 1: Se han marcado diez puntos en una circunferencia. ¿Cuántos triángulos pueden trazarse que tengan vértices en esos puntos?

Solución:

Para mayor comodidad nombremos a los puntos con los dígitos del 0 al 9

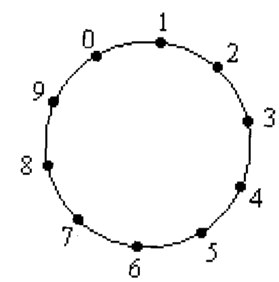


Figura 1

Trazar un triángulo con vértices en esos puntos equivale entonces a elegir tres enteros diferentes entre 0 y 9.

Por ejemplo, la construcción del triángulo que se ve en la figura siguiente equivale a haber elegido las cifras 2, 5 y 8:

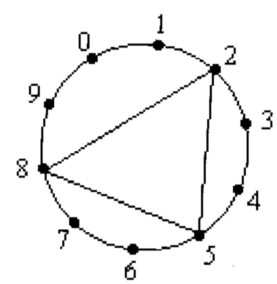


Figura 2

Si aplicáramos el P.G.E. la conclusión a la que llegaríamos es que se pueden construir 10 x 9 x 8 = 720 triángulos.

Esta conclusión, sin embargo, no sería completamente correcta. En efecto, en ese cálculo (como en todo aquél que esté basado en el P.G.E.) se considera que el triángulo que resulta de elegir 2, 5, 8 (en ese orden) es diferente del triángulo que resulta de elegir los dígitos en el orden, por ejemplo, 5, 2, 8. Sin embargo, en realidad en ambos casos obtenemos el **mismo** triángulo.

Dentro de las 720 ternas de dígitos que hemos calculado el triángulo de la figura 2 aparece contado exactamente seis veces, una vez por cada una de las siguientes elecciones de cifras:

2, 5, 8	5, 8, 2
2, 8, 5	5, 2, 8
8, 2, 5	8, 5, 2

La misma situación se da en realidad con todos los triángulos posibles: cada uno de ellos aparece 6 veces en la lista de ternas de cifras.

Podemos entonces agrupar las 720 ternas en grupos de seis de tal modo que las ternas de cada grupo representen exactamente un único triángulo.

La cantidad total de triángulos será entonces la misma que la de grupos formados, es decir 720 / 6 = 120.

Una fórmula:

Al resolver el Problema 1 hemos hecho un primer cálculo de la cantidad de triángulos admitiendo en la cuenta la existencia de repeticiones. Luego hemos determinado exactamente cuántas veces aparecía repetido cada elemento, para así obtener el resultado final.

La misma idea puede aplicarse a otras situaciones en las cuales el orden en que se eligen los elementos de A no sea completamente determinante. Como segundo ejemplo, veamos una generalización del Problema 1.

Problema 2: ¿Cuántos subconjuntos de k elementos tiene un conjunto B de cardinal n?

Solución:

Decimos que se trata de una generalización del Problema 1, ya que éste equivale a preguntarse cuántos subconjuntos de tres elementos pueden obtenerse de un conjunto de diez (cada subconjunto determina un único triángulo y viceversa).

Tal como hicimos al resolver el Problema 1, como primera aproximación podemos pensar que cada uno de los subconjuntos se obtiene eligiendo sucesivamente k elementos de B. De esta forma el P.G.E. nos diría que la cantidad de subconjuntos es igual a:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Hay k factores en este producto, el cual puede expresarse brevemente como $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Como en el caso de los triángulos, cada subconjunto aparece contado k! veces (tantas como permutaciones posibles de k elementos). Por ejemplo, si B = {1, 2, 3,..., 10} y k = 3, entonces el conjunto {2, 5, 8} aparece contado 3! = 6 veces.

Por lo tanto la cantidad real de subconjuntos es igual a $\frac{n!}{k1(n-k)!}$ y así el problema queda resuelto.

Nuestra filosofía con relación a los problemas de combinatoria es reducir al mínimo el número de fórmulas que sea necesario aprender de memoria. Sin embargo vale la pena que tengamos siempre presente la fórmula que hemos deducido como solución del Problema 2.

La cantidad de subconjuntos de cardinal k que tiene un conjunto de cardinal n es igual a $\frac{n!}{k1(n-k)!}$.

Esta expresión suele abreviarse $\binom{n}{k}$ (a veces también n**C**k o C_k^n) y es conocida como *número combinatorio.*

Dados heterodoxos:

Problema 3: En las caras de un cubo marcamos los números del 1 al 6 (sin repetir ninguno) ¿Cuántos dados diferentes pueden construirse?

Solución:

Un dado normal es un cubo en el que se han marcado los números del 1 al 6 de tal manera que las caras opuestas suman 7.

En el enunciado del problema se habla de marcar las caras de un cubo con los números del 1 al 6 con la única restricción de que no puede haber caras con números repetidos.

Dejemos al cubo en una posición fija y nombremos sus caras con las letras A, B, C, D, E, F.

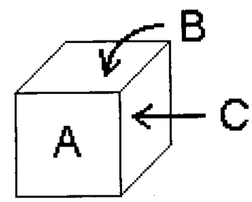


Figura 3

En la figura 3 asumimos que la cara D es la opuesta a la cara A, E es opuesta a B y F es opuesta a C.

Entonces los dados se pueden construir asignando a cada letra un número del 1 al 6 (sin repetir).
Está claro entonces que debemos hacer 6 elecciones sucesivas. Elegimos primero el número para la cara A, luego el número para la cara B y así sucesivamente hasta la cara F.

Aplicando el P.G.E. nuestra conclusión sería que existen 6! = 720 dados diferentes.

Basados en la experiencia de los problemas previos debemos preguntarnos si en el cálculo que acabamos de hacer no hemos incluido dados repetidos. Un poco de reflexión nos indica que la respuesta es afirmativa.

En efecto, tomemos por ejemplo el dado en el que las caras A, B, C, D, E y F reciben los números 2, 1, 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

Si vemos este dado en la posición de la figura 3, la cara superior tendría un 1, la frontal un 2, la cara lateral visible tendría un 3, las opuestas a estas dos últimas tendrían un 4 y 5 respectivamente, y el 6 quedaría en la cara inferior.

Manteniendo el 1 en la cara superior, giremos el dado de modo que el 3 quede en la cara frontal y el 4 en la cara lateral visible. Es obvio que seguimos teniendo el mismo dado, sin embargo, en esta posición (y siempre desde la perspectiva de la figura 3) las caras A, B, C, D, E y F reciben los números 3, 1, 4, 5, 2 y 6 respectivamente.

En otras palabras, si elegimos los números en el orden 2, 1, 3, 4, 5 y 6 obtendremos el mismo dado que si los elegimos en el orden 3, 1, 4, 5, 2 y 6.

¿Cuántas veces aparece repetido cada dado? ¿Cuántas son las permutaciones diferentes que generan el dado que acabamos de describir?

En el razonamiento que veníamos desarrollando, hemos obtenido la segunda permutación por medio de una rotación del dado (rotación que lo dejaba nuevamente en la posición de la figura 3). Es fácil concluir entonces que la cantidad de veces que cada dado aparece repetido coincide con la cantidad de posiciones diferentes en que podemos colocarlo mediante rotaciones de ese tipo.

Para contar la cantidad de posiciones observemos que para cada dado hay cuatro posiciones en las que el 1 ocupa la cara superior, otras cuatro con el 2 en esa cara, cuatro con el 3 y así sucesivamente. Por lo tanto cada dado aparece repetido exactamente 24 veces.

Por lo tanto, la cantidad de dados diferentes que pueden construirse es igual a 720 / 24 = 30.

Pregunta para los lectores: Como hemos dicho, en un dado normal las caras opuestas suman 7. ¿Cuántos dados diferentes pueden construirse que cumplan esta condición?

Otra pregunta para los lectores: ¿Cuántos dados diferentes pueden construirse que tengan forma de tetraedro regular y en los cuales las caras lleven los números del 1 al 4?

Más dados heterodoxos:

Problema 4: Se desean construir dados cúbicos en cuyas caras aparezcan números del 1 al 10. En cada dado, las caras reciben números diferentes (y, por supuesto, en cada uno de ellos faltarán cuatro de los números). La pregunta es ¿cuántos dados diferentes pueden construirse?

Solución:

Para construir uno de los dados debemos efectuar dos elecciones sucesivas. En primer lugar, debemos decidir qué números llevarán las caras del dado y en segundo lugar debemos decidir en qué caras estarán ubicados.

El P.G.E. nos dice entonces que la cantidad total de dados es igual a:

(Cantidad de elecciones posibles para los números que llevará el dado) x (Cantidad de maneras diferentes de ubicar seis números en las caras)

La primera cantidad coincide simplemente con el número de subconjuntos de 6 elementos que tiene el conjunto {1, 2, 3,..., 10}. Como ya hemos visto esta cantidad es igual a $\binom{10}{6} = 210$.

En cuanto a las maneras diferentes de ubicar seis números en las caras de un cubo, éstas ya las hemos contado en el problema anterior y hemos visto que hay 30 formas diferentes.

Por lo tanto la respuesta al problema es 210 x 30 = 6300.

Pregunta para los lectores: Imaginemos que se debe hacer un sorteo entre cinco participantes (A, B, C, D y E). Se procede de la siguiente manera:

Se construyen los 6300 dados que hemos descripto en el problema anterior y se los coloca en una bolsa (de tamaño grande).

A continuación el jugador A elige en voz alta dos números entre 1 y 10. Luego B elige dos números diferentes (siempre entre 1 y 10). De la misma manera C y D eligen dos números cada uno. El jugador E no puede elegir y toma los dos números que las elecciones previas le han dejado.

Una vez que se han anunciado las elecciones, se elige de la bolsa, al azar, uno de los dados. El dado es arrojado y se observa el número que ha quedado en la cara superior. El jugador que ha elegido ese número es el ganador.

La pregunta es ¿este sorteo es equitativo? ¿Todos los jugadores tienen la misma chance de ganar?

<u>Paseos al azar:</u>

Imaginemos ahora un punto que se mueve por la recta real. El punto comienza su recorrido en la posición 0 y su movimiento está regido por los lanzamientos de una moneda equilibrada.

Si al arrojar la moneda sale "cara" el punto se mueve una distancia fija *a* hacia la derecha. Si sale "ceca", en cambio, se mueve la misma distancia *a*, pero hacia la izquierda. La Figura 4 muestra las direcciones movimientos y la posición final del punto si salen tres caras y una ceca (en ese orden):

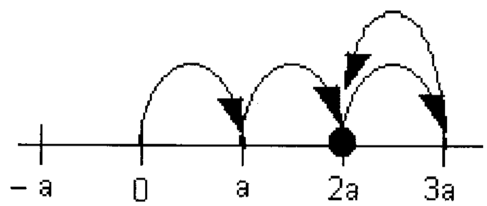


Figura 4

Problema 5: Después de n lanzamientos de la moneda ¿cuál es la probabilidad de que el punto se encuentre en la posición s*a* o en la posición –s*a* (donde s es un entero positivo dado de antemano)? En otras palabras, ¿cuál es la probabilidad de que el punto se haya alejado a una distancia s*a* de la posición inicial?

Solución:

Contemos en primer lugar en cuántas secuencias de tiradas el punto queda en la posición s*a*.

La moneda ha sido arrojada al aire n veces, llamemos d a la cantidad de veces en que ha salido cara e i a la cantidad de veces en que ha salido ceca. Es claro que d + i = n.

Por otra parte, para que el punto se encuentre en la posición s*a* debe ocurrir que d – i = s. En el ejemplo de la Figura 4, d = 3, i = 1 y s = 2. Nótese que la posición final sólo depende de las cantidades de caras y cecas, pero no del orden en que han salido.

De las relaciones d + i = n, d – i = n, deducimos que $d = \frac{n+s}{2}$ y que $i = \frac{n-s}{2}$.

Observemos que, dado que d e i son números enteros, entonces n y s deben tener la misma paridad (ambos son pares o ambos son impares). Si n y s son de diferente paridad entonces la probabilidad buscada es igual a 0.

Observemos finalmente que, sabiendo que la cantidad total de tiradas es n, no es necesario indicar la cantidad de caras y de cecas. Una de las dos cantidades determina inmediatamente la otra.

En consecuencia podemos decir que las secuencias de tiradas que ubican al punto en la posición s*a* son aquellas en las que salen $\frac{n+s}{2}$ caras.

Numeremos a los lanzamientos de la moneda desde 1 hasta n. Queremos construir una secuencia de caras y cecas en la que haya exactamente $\frac{n+s}{2}$ caras. ¿Cómo podemos hacerlo? Pues bien, para ello elegimos del conjunto {1, 2,..., n} un subconjunto de $\frac{n+s}{2}$ elementos y establecemos que las caras se dan exactamente en los lanzamientos cuyos números están en ese subconjunto.

Veamos un ejemplo numérico. Supongamos que tiramos la moneda cuatro veces. Numeramos por lo tanto los lanzamientos desde el 1 hasta el 4. Entonces, por ejemplo, para construir la secuencia en la cual hay exactamente dos caras, una en el primer lugar y otra en el último, debemos elegir el subconjunto {1, 4}.

Si volvemos al caso general, vemos que la cantidad de secuencias de tiradas en las cuales hay exactamente caras coincide con la cantidad de subconjuntos de elementos que tiene el conjunto {1, 2, 3,..., n}.

En consecuencia, la cantidad de secuencias de tiradas que dejan al punto en la posición s*a* es igual a

$$\binom{n}{(n+s)/2}.$$

Es fácil ver que la cantidad de secuencias de tiradas que lo dejan en la posición –s*a* es exactamente la misma. Finalmente, la cantidad de secuencias de tiradas que dejan al punto a una distancia s*a* de la posición inicial es igual a $2\binom{n}{(n+s)/2}$.

¿Cuál es la cantidad *total* de secuencias de n tiradas? La respuesta a este problema es una aplicación directa del P.G.E. Para construir cada una de las secuencias debemos realizar n elecciones y en cada una de ellas tenemos dos opciones posibles (d ó i). La cantidad total de tiradas es entonces 2^n.

Así entonces, la probabilidad de que la moneda quede a una distancia s*a* del punto inicial (suponiendo que n y s tienen la misma paridad) es igual a $2\binom{n}{(n+s)/2}2^{-n} = 2^{-n+1}\binom{n}{(n+s)/2}$.

El paseo interminable:

Llamemos $P_s(n)$ a la probabilidad que acabamos de calcular. Puede probarse que si s permanece fijo y n tiende al infinito entonces $P_s(n)$ tiende a 0.

Sea D un entero positivo fijo. Si arrojamos la moneda n veces, ¿cuál es la probabilidad de que el punto quede, con respecto al 0, a una distancia menor o igual que D? La respuesta a la pregunta es

$$P_0(n) + P_1(n) +...+ P_D(n)$$

Ahora bien, dado que D es fijo (y por lo tanto es fija la cantidad de sumandos), cuando n tiende al infinito la suma anterior tiende a 0.

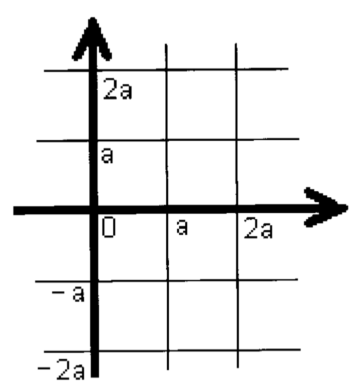
Cualquiera sea D, entonces, la probabilidad de que el punto, después de n lanzamientos, quede entre – D*a* y D*a* tiende a 0. Traducido al lenguaje común, la conclusión anterior nos dice que a medida que crece el número de lanzamientos, es cada vez más improbable que el punto quede en una posición cercana al 0.

Refinando este razonamiento, puede probarse que, **cuando n tiende al infinito, el punto tiende a recorrer la recta completa**.

Por el plano y el espacio:

George Polya ha logrado extender el resultado anterior al caso bidimensional.

En efecto, imaginemos un punto que se mueve por el plano euclidiano comenzando desde la posición (0,0).



Como en el caso anterior, el movimiento del punto está regido por el azar, pero esta vez necesitamos un mecanismo que genere cuatro resultados equiprobables (en lugar de dos, como era el caso de la moneda). Este requisito puede cumplirse de muchas maneras diferentes, por ejemplo, usando un dado tetraédrico, o un bolillero, o bien lanzando dos monedas.

Si optamos por esta última alternativa, podemos convenir que si en las monedas salen dos caras entonces el punto se moverá una distancia *a* hacia arriba. Si salen dos cecas, se moverá esa distancia hacia abajo. Si salen una cara y una ceca (en ese orden) se moverá hacia la derecha; y si sale ceca y cara entonces se moverá la distancia *a* hacia la izquierda.

De esta manera, el punto se irá moviendo por los vértices de un cuadriculado formado por cuadrados de lado *a* (véase la Figura 5).

El resultado de Polya demuestra que a medida que la cantidad de lanzamientos del par de monedas tiende al infinito, la probabilidad de que el punto recorra todos los vértices del cuadriculado es igual a 1. Es decir que, a la larga, si se le concede un tiempo infinito el punto acabará por recorrer todos los vértices.

Curiosamente el resultado no se extiende al espacio tridimensional.

Imaginemos que el punto inicia su recorrido en la posición (0,0,0) y que disponemos de tres monedas (o quizás de un dado octaédrico) para decidir la dirección de cada uno de sus movimientos sucesivos (en cada movimiento el punto recorre una distancia *a* en dirección paralela a alguno de los ejes cartesianos).

Ha sido también George Polya quien ha probado que en este caso, contrariamente a lo que ocurre para una o dos dimensiones, la probabilidad de que el punto recorra todas las posiciones posibles es igual a 0 (las posiciones posibles forman en este caso los vértices de un cubiculado del espacio euclidiano). Esto quiere decir que, aunque la cantidad de lanzamientos tienda al infinito, siempre existirán vértices del cubiculado por los cuales el punto no pasará.

Las demostraciones de Polya, tanto para el caso bidimensional como para el espacial, exceden los propósitos de este artículo. Sin embargo los resultados son interesantes en sí mismos y nos advierten sobre cuán erróneas pueden ser las rápidas generalizaciones de los resultados matemáticos.

****

En la nota anterior habíamos dejado planteados dos problemas para nuestros lectores. Recordemos el primero de ellos.

Problema: Cuando se escriben números en base 16 se agregan a los 10 dígitos decimales las letras A, B, C, D, E y F para representar las "cifras" 10, 11, 12, 13, 14 y 15 respectivamente. Así por ejemplo el número que, en base 16, se escribe como 1AB equivale, en base 10, a $11 + 10 \times 16 + 1 \times 16^2 = 427$. De esta manera, cada anagrama formado con esas seis letras puede leerse como un número escrito en base 16. La pregunta es ¿cuántos de los anagramas que pueden formarse con las letras A, B, C, D, E y F corresponden, en base 16, a números pares?

Veamos ahora la solución.

Digamos que un número n se escribe en base 16 de la siguiente manera: $a_k a_{k-1} \dots a_0$; es decir: $n = a_k 16^k + a_{k-1} 16^{k-1} + \dots + a_1 16 + a_0 = 16(a_k 16^{k-1} + a_{k-1} 16^{k-2} + \dots + a_1) + a_0$.

Como $16(a_k 16^{k-1} + a_{k-1} 16^{k-2} + \dots + a_1)$ es siempre par, entonces n será también par si y sólo si a_0 lo es. Por ende, sólo puede ser $a_0 = A$, $a_0 = C$, $a_0 = E$.

Deducimos que n será par si y sólo si su última "cifra" es A, C ó E. Si construimos entonces los números comenzando por la última cifra, el P.G.E. nos dice que la cantidad total de números pares es 3.5.4.3.2.1 = 360.

El segundo problema planteaba la siguiente cuestión.

Problema: ¿Cuál es la palabra castellana más larga que utilice únicamente las letras A, B, C, D, E y F (eventualmente varias veces cada una) y que, en base 16, represente un número *primo*?

No sabemos cuál es la palabra más larga que representa un número primo y dudamos de que exista un método sistemático para hallarla. La búsqueda sigue planteada como ejercicio para nuestros lectores.

Mostraremos aquí solamente un ejemplo pequeño de una tal palabra: AD, preposición latina que equivale al número 173.

* Lic. en Cs. Matemáticas – U.B.A.

Bibliografía:

SANTALÓ, Luis A. – *La probabilidad y sus aplicaciones* – Buenos Aires, Iberoamericana, 1955.

La Tablilla Plimpton 322

*por Claudio Salpeter**

He conocido lo que ignoran los griegos: la incertidumbre.

Jorge Luis Borges: *La lotería en Babilonia*

Es posible que todo aventurero de la matemática prehelénica tenga por bueno adjudicarle a ésta un carácter netamente utilitario. Entre los historiadores no hay, con respecto a ello, total acuerdo. Hay quienes sostienen que "la matemática sumeria no fue utilizada para resolver problemas de la vida práctica, sino solamente para diversión o exultación del espíritu" (las palabras figuran en la *Historia de la Matemática*, de Carl B. Boyer, y son adjudicadas a Ettore Bortolotti). En otro extremo, Morris Kline (en *El Pensamiento Matemático desde la antigüedad a nuestros días*, I, pág. 46) niega todo conocimiento teórico a la matemática prehelénica y agrega que "los egipcios y los babilonios se nos presentan como rudos albañiles, mientras los griegos serían magníficos arquitectos". Fuera de estas excesivas hipérboles, sospecho que no resultaría incongruente concederles a los babilonios algún interés en sus estudios matemáticos más allá de la mera utilidad práctica. En este camino puede conjeturarse la existencia de cierto análisis intelectual implícito en la famosa tablilla 322 de la Colección Plimpton de la Universidad de Columbia en Nueva York.

Los detalles del contenido de este bloque de arcilla han sido develados por Otto Neugebauer y A. J. Sachs en 1945 al publicarse su libro *Mathematical cuneiform texts* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1945). La Plimpton 322 es una precaria tablilla de cuatro columnas y quince filas. Se cree que pertenece al período babilónico antiguo (aprox. 1900 a 1600 a.C.). Desgraciadamente no se encuentra en buenas condiciones, está incompleta y contiene algunos errores. Fuera de estas menudencias su contenido es realmente extraordinario.

Reproduzco aquí la tabla "acondicionada" que figura en *The exact sciences in antiquity*, del citado Neugebauer:

I	**II** (=b)	**III** (=d)	**IV**
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

Este conglomerado de números merece una aclaración inicial. Primero, y en virtud de algunas roturas que presenta la tablilla, Neugebauer ha debido completarla. Los corchetes encierran los dígitos apócrifos.

El historiador ha corregido, además, algunos errores que contenía la tablilla original. En II,9 figura 9,1 cuando en realidad debería decir 8,1. En II,13 en lugar de 7,12,1 debe figurar 2,41. En III,15 encontramos 53 en lugar del correcto que es 1,46. Finalmente, en III,2 donde dice 3,12,1 debería decir 1,20,25.

La columna IV presenta como único fin la numeración de las filas.

Para comprender el contenido de las restantes columnas debe recordarse que los babilonios utilizaban la base sexagesimal para su sistema de numeración. Neugebauer ha ideado una manera de transcribir los símbolos cuneiformes de los mesopotámicos separando con comas las sucesivas posiciones sexagesimales. Por ejemplo, 3,12,53 equivaldría en nuestro sistema decimal a $3.60^2 + 12.60 + 53$ esto es, 11573. Si ahora se desea escribir un número fraccionario, se recurre al punto y coma, que separa la parte entera de la fraccionaria. Así, 2;31,5 representa al número, en sistema decimal, $2+\frac{31}{60}+\frac{5}{60^2}$, es decir, $\frac{1813}{720}$.

Los babilonios no fueron, lamentablemente, tan precavidos como Neugebauer y, en general, no es sencillo para nosotros detectar si el número es entero o fraccionario. El contexto debía indicar la naturaleza del número en cuestión. He aquí cómo sería nuestra tabla (mostraré sólo las columnas II, III y IV) si consideráramos a todos los valores como números enteros en el sistema decimal:

II (=b)	**III** (=d)	**IV**
119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

La columna IV está compuesta, indiscutiblemente, por números enteros. La columna I, como se verá, está evidentemente compuesta por números fraccionarios (aunque Neugebauer omita el punto y coma). En cambio, las columnas II y III pueden identificar tanto a números enteros como a fraccionarios. Hechas estas aclaraciones, pasaré a explicar el contenido de la tabla.

Neugebauer afirma que *b* y *d* (que representan las columnas II y III respectivamente) son números pitagóricos. Esto es, son soluciones enteras (tomando como enteros a tales números) de la relación pitagórica: $d^2 = b^2 + l^2$ (No se adelante el ansioso lector otorgando a la columna I el valor de l).

Consideremos, por ejemplo, la fila 1. Allí encontramos que $b = 1{,}59$ (119) y que $d = 2{,}49$ (169). (En los paréntesis he encerrado el correspondiente número entero en base diez, salvo en este último paréntesis en el que sólo he encerrado En los paréntesis he encerrado...).

De la relación pitagórica descubrimos que $l^2 = 4{,}0{,}0$ (14400) que nos lleva a $l = 2{,}0$ (120).

Ungidos de fervor matemático procedemos a efectuar los cocientes $\frac{d}{l}$ elevándolos al cuadrado, $\left(\frac{d}{l}\right)^2$. Obtenemos así (sorpréndase el lector) los valores de la columna I.

Pero nuestro espíritu escéptico requiere algún ejemplo. Aprovechando los valores de la fila 1, vemos que $\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \left(\frac{1{,}59}{2{,}0}\right)^2 = 1{,}59{,}0{,}15$, esto es, $\frac{28561}{14400}$. Compruebe el lector la coincidencia en la tablilla.

[Es evidente que se obtiene un mismo resultado para $\left(\frac{d}{l}\right)^2$ si conferimos a *b* y *d* valores enteros o fraccionarios.]Puede observarse asimismo que los valores de la columna I, además de ser cuadrados perfectos, contienen la inusitada propiedad de que si les restamos a cada uno de ellos la unidad, continuamos teniendo cuadrados perfectos. Por ejemplo, en la columna I de la fila 6 leemos 1,47,6,41,40, que es la fracción $\frac{23\ldots}{129\ldots}$

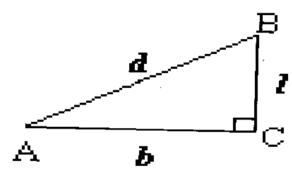
(que es cuadrado de $\frac{481}{360}$). Luego, si a aquella fracción le restamos 1, obtenemos $\frac{101761}{129600}$ (que es cuadrad…

$\frac{319}{360}$).

Pero esta propiedad no es tan inusitada en realidad (el epíteto surgió al sólo efecto de acaparar la atenció…

lector), ya que se observa con facilidad que si $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2-1=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ que es un cuadrado perfecto.

Es decir, que la tablilla Plimpton 322 está relacionada con ternas pitagóricas (irrisoriamente, 1500 años antes … nacimiento del mismísimo Pitágoras). Así, podemos considerar el triángulo rectángulo ABC, en donde *d* (co… na III) es la hipotenusa y *l* (columna II) es uno de los catetos:



El valor del otro cateto no aparece en la tabla (conviene decir que probablemente la tablilla contuviera, en s… origen, más filas y más columnas que las que hoy conocemos). Finalmente la columna I, repetimos, indica …

cocientes $\left(\frac{d}{l}\right)^2$, en donde $b^2+l^2=d^2$. Podríamos admitir (en nuestra insaciable sed de fórmulas) que

$$\left(\frac{d}{l}\right)^2=\frac{b^2+l^2}{l^2}=1+\left(\frac{b}{l}\right)^2.$$

Los valores de la columna I pueden igualmente verse, como los cuadrados de las cosecantes del ángulo A (o … las secantes del ángulo B). De esta manera, algunos consideran que la Plimton 322 es una tabla trigonométr… de cuadrados de cosecantes de ángulos. Pero no de cualquier ángulo. Observemos la siguiente tabla en don… están calculados los valores del cateto *l* que no figura en la tablilla:

II (=b)	**III** (=d)	**IV**	**Valores de l**	**ángulo B (º)**
119	169	1	120	44,76
3367	4825	2	3456	44,25
4601	6649	3	4800	43,79
12709	18541	4	13500	43,27
65	97	5	72	42,08
319	481	6	360	41,54
2291	3541	7	2700	40,32
799	1249	8	960	39,77
481	769	9	600	38,72
4961	8161	10	6480	37,44
45	75	11	60	36,87
1679	2929	12	2400	34,98
161	289	13	240	33,86
1771	3229	14	2700	33,26
56	106	15	90	31,89

Como puede apreciarse, los valores del ángulo B se hallan entre 45º y 31º, y van descendiendo, aproximadamente, de a un grado.
Neugebauer nos dice que "esta observación sugiere que los matemáticos antiguos que compusieron este texto estuvieron interesados no sólo en determinadas ternas de números pitagóricos sino también en sus razones $\frac{d}{l}$". A continuación, el historiador nos recuerda que todas las ternas pitagóricas enteras pueden obtenerse en la forma

$$l = 2pq \qquad b = p^2 - q^2 \qquad d = p^2 + q^2$$

donde *p* y *q* son enteros arbitrarios, coprimos, no simultáneamente impares y *p* es mayor que *q*. En el próximo número de Axioma, demostraremos esta última afirmación. Esto lleva a conjeturar que los primitivos babilonios, al elaborar la tablilla, incursionaron en lo que hoy llamamos *teoría de números*.
De acuerdo a Boyer, los autores de la Plimpton comenzaron tomando dos enteros sexagesimales regulares (es decir, dos enteros cuyos únicos divisores primos no son distintos de 2, 3 o 5) *p* y *q*, con *p* mayor que *q*. Esta regularidad, cara a los babilonios, era necesaria pues, siendo $l = 2pq$ también regular, el cociente $\frac{d}{l}$ podía efectuarse con tranquilidad al no tener que dividir por números irregulares; evitaban, de esta manera, enfrentarse al inasible infinito.
Continuando con la conjetura, se indica que los valores de *p* debían limitarse a ser menores o iguales que 125. Además, consideraban triángulos rectángulos en donde *b* es menor que *l*. Puede confirmar el lector que esta última condición y $p > q$ conducen a que $1 < \frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$.

Podemos preguntarnos cuántos posibles pares (*p,q*) existen que cumplan las condiciones recién enunciadas. Hay exactamente 42 pares. Me propongo mostrar una tabla en donde figuran todos estos pares de números y cada una de las ternas pitagóricas que generan:

	p	q	$p^2 - q^2$	2pq	$p^2 + q^2$	p/q	
1	2	1	3	4	5	2	**11**
2	3	2	5	12	13	1,5	
3	4	3	7	24	25	1,333...	
4	5	4	9	40	41	1,25	
5	6	5	11	60	61	1,2	
6	8	5	39	80	89	1,6	
7	9	4	65	72	97	2,25	**5**
8	9	8	17	144	145	1,125	
9	10	9	19	180	181	1,111...	
10	12	5	119	120	169	2,4	**1**
11	15	8	161	240	289	1,875	**13**
12	16	9	175	288	337	1,777...	
13	16	15	31	480	481	1,0666...	
14	20	9	319	360	481	2,222...	**6**
15	25	12	481	600	769	2,08333...	**9**
16	25	16	369	800	881	1,5625	
17	25	18	301	900	949	1,3888...	
18	25	24	49	1200	1201	1,041666...	
19	27	16	473	864	985	1,6875	
20	27	20	329	1080	1129	1,35	
21	32	15	799	960	1249	2,1333...	**8**
22	32	25	399	1600	1649	1,28	
23	32	27	295	1728	1753	1,185185...	
24	36	25	671	1800	1921	1,44	

25	40	27	871	2160	2329	1,481481...	
26	45	32	1001	2880	3049	1,40625	
27	48	25	1679	2400	2929	1,92	**12**
28	50	27	1771	2700	3229	1,851851...	**14**
29	54	25	2291	2700	3541	2,16	**7**
30	64	27	3367	3456	4825	2,370370...	**2**
31	64	45	2071	5760	6121	1,4222...	
32	75	32	4601	4800	6649	2,34375	**3**
33	75	64	1529	9600	9721	1,171875	
34	81	40	4961	6480	8161	2,025	**10**
35	81	50	4061	8100	9061	1,62	
36	81	64	2465	10368	10657	1,265625	
37	81	80	161	12960	12961	1,0125	
38	100	81	3439	16200	16561	1,234567905	
39	125	54	12709	13500	18541	2,3148148...	**4**
40	125	64	11529	16000	19721	1,953125	**x**
41	125	72	10441	18000	20809	1,736111...	
42	125	96	6409	24000	24841	1,30208333...	

La última columna (en negrita) numera las primeras catorce líneas ordenadas de acuerdo al valor de **p/q** (salvo la línea 40 donde he colocado una **x**). *Estas catorce líneas corresponden a las primeras catorce filas de la tablilla Plimpton 322.* La fila que lleva una **x**, tal vez por olvido, no figura en la Plimpton.
La fila 15 de la tablilla no figura en esta última tabla. La razón es que no debería estar allí pues se trata de números generados por dos valores de p y q impares. Si p=5 y q=9 se obtiene la terna pitagórica 56,90,106 que es la que figura en la tabla. Los números de esta terna son múltiplos de la terna 28,45,53 que se generan a partir de p=7 y q=2. Pero p=7 es irregular, es decir, no cumple con las restricciones antes enunciadas.

Boyer insiste en decirnos que probablemente la tablilla Plimpton 322 haya estado "subordinada al problema de medir áreas de cuadrados o lados de triángulos rectángulos". A mí me gusta pensar, sin embargo, que un remoto matemático de Babilonia ha "jugado" con ternas pitagóricas y ha encontrado un placer intelectual en ese ejercicio de teoría de números; placer que, posiblemente, sus contemporáneos desestimarían. ◣

El escriba babilónico de la Plimpton 322

Marduk ha propiciado mi tarea;
he cumplido mi parte con esmero.
He pisado Asur, Lagash, Ur; espero
algún día ser digno de esta aldea.
He aprendido de sabios el manejo
de la cuña sagrada, que permite
escribir en la arcilla y que no admite
la ignorancia; los símbolos que dejo
me justificarán. Tal vez, remotos
hombres leerán mis números, mis tablas
laboriosas, mis cálculos ignotos,
el secreto del triple formato, las
vastas sumas. Mis dioses me han pedido
divulgar un misterio. Yo he cedido.

* Profesor de Matemáticas y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Centros de triángulos

La figura más simple es también, a la hora de estudiar sus propiedades, la más elegante. Estudiados desde la Antigüedad, los triángulos parecerían no tener secretos a ser develados. Sin embargo, en las líneas siguientes, mostraremos qué tan lejos de la realidad está la suposición precedente; para ello haremos una pequeña reseña de algunos de los tantos "centros de triángulos" que se han definido desde la Antigüedad clásica. Veamos pues cómo estas simples y bellas figuras pueden seguir maravillándonos .

por Gisela Serrano *

Todo comienza en Grecia

En la Antigüedad clásica se conocían cuatro puntos notables o centros de triángulos.
En las demostraciones de los teoremas 4 y 5 del Libro IV de los Elementos de Euclides (siglo III a. C.), cuyos enunciados son respectivamente: Inscribir y Circunscribir un círculo en un triángulo dado, quedan determinados el incentro (intersección de las tres bisectrices de los ángulos internos del triángulo), que es el centro de la circunferencia inscripta en dicho triángulo y el circuncentro (intersección de las mediatrices de los lados del triángulo), que es el centro de la circunferencia circunscripta en el mismo.

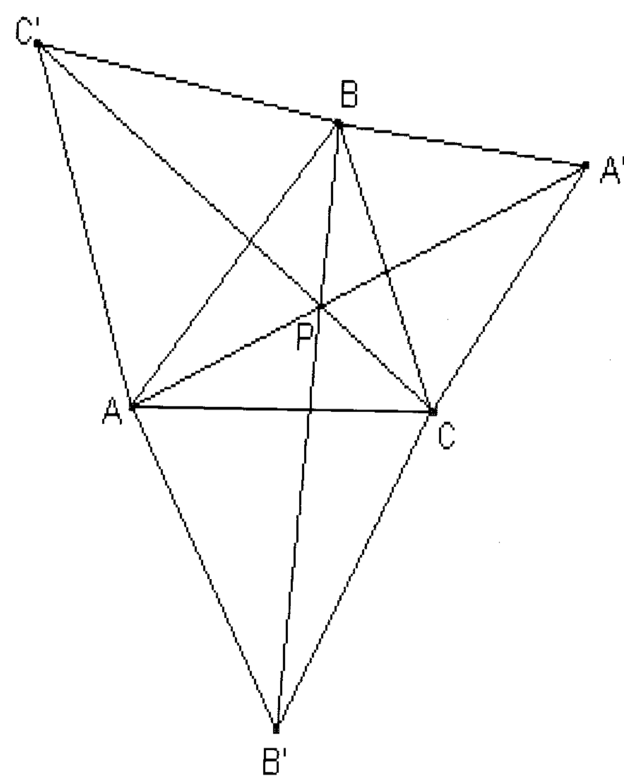
Arquímedes de Siracusa (287-212), por su parte, enunció los teoremas fundamentales concernientes a los centros de gravedad de varias figuras planas. En particular, en el Libro I del tratado Sobre el equilibrio de los planos, encuentra los centros de gravedad de un paralelogramo, un triángulo y un tra-pecio. El centroide es el centro de masa (o centro de gravedad o baricentro) del triángulo. Este punto es la intersección de las medianas del triángulo y divide a cada mediana en la relación 1:2.

Arquímedes también da a entender en sus trabajos que conoce la existencia del ortocentro (intersección de las alturas del triángulo), pero es Proclo de Bizancio (filósofo y geómetra del siglo V) quien por primera vez enuncia explícitamente su existencia.

El tiempo pasa...

El ortocentro de un triángulo es el punto tal que la suma de sus distancias a los lados es mínima. Muchos centros de triángulos resultan definibles naturalmente como la respuesta a algún problema concreto de máximos y mínimos.

Sin embargo, tuvieron que pasar más de mil años para que se definiera un nuevo centro de triángulo. Recién en el siglo XVII Pierre de Fermat formuló el problema de encontrar un punto para el cual la suma de las distancias de P a cada uno de los vértices del triángulo sea la mínima posible. Fue Torricelli (por otra parte creador del barómetro de mercurio) quien resolvió el problema al probar que, si construimos triángulos equiláteros sobre cada uno de los lados del triángulo ABC (llamémoslos A'BC; B'CA y C'AB),



el punto P, que se obtiene como intersección de A'A, B'B y C'C, es la solución buscada (al menos si cada ángulo es menor a 120º).

El punto P que hemos construido se conoce como punto de Fermat-Torricelli o también primer centro punto de Fermat-Torricelli o también primer centro isogónico (iso = igual, gon = ángulo) ya que los ángulos BPC; CPA y APB son todos iguales.

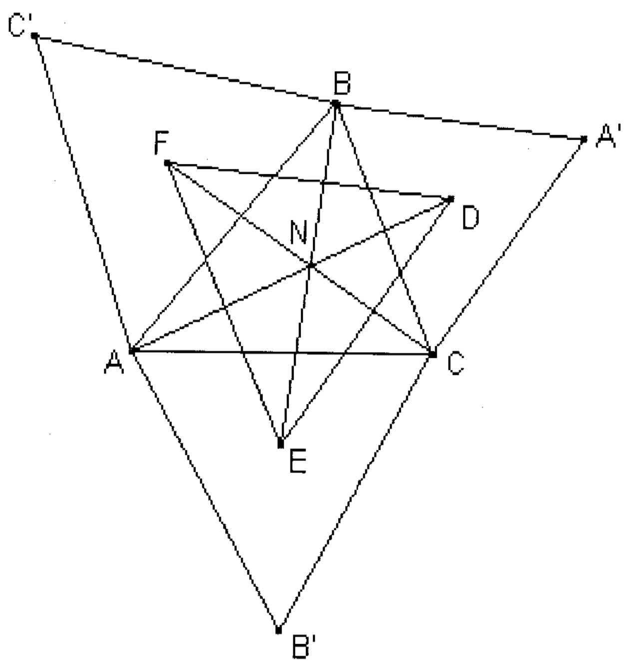
El segundo centro isogónico se obtiene construyendo los tres triángulos equiláteros hacia "adentro" del triángulo inicial.

Puntos de Napoleón

A princicios del siglo XIX, Napoleón Bonaparte hizo su aporte a la historia de los centros de triángulos.

Aunque, si bien Napoleón se interesó en el estudio de la matemática y en particular de la geometría, es dudoso que haya conocido suficiente de esta última como para descubrir el teorema que hoy lleva su nombre.

El teorema de Napoleón dice: Si se construyen triángulos equiláteros exteriores sobre cada lado de un triángulo cualquiera (ABC), sus centros forman un triángulo equilátero (marcado DEF en la figura).

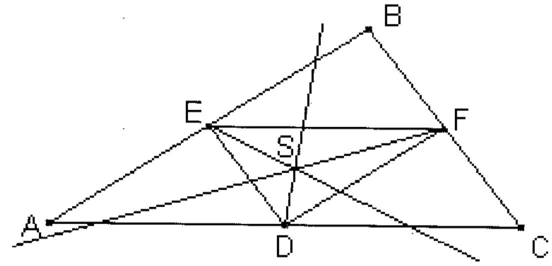


Al punto donde se intersecan los segmentos DA, EB y FC, se lo llama el primer punto de Napoleón indicado con N en el gráfico.
El segundo punto de Napoleón se obtiene marcando los otros tres triángulos equiláteros.

El centro de Spieker

Como hemos dicho, el centroide es el centro de masa del triángulo. El centro que veremos a continuación tiene también una importante propiedad física.

Tomemos el triángulo ABC, marquemos en él los puntos medios de cada lado (llamémoslos D, E y F). Obtendremos un nuevo triángulo DEF. Marquemos en él las bisectrices de sus ángulos interiores.

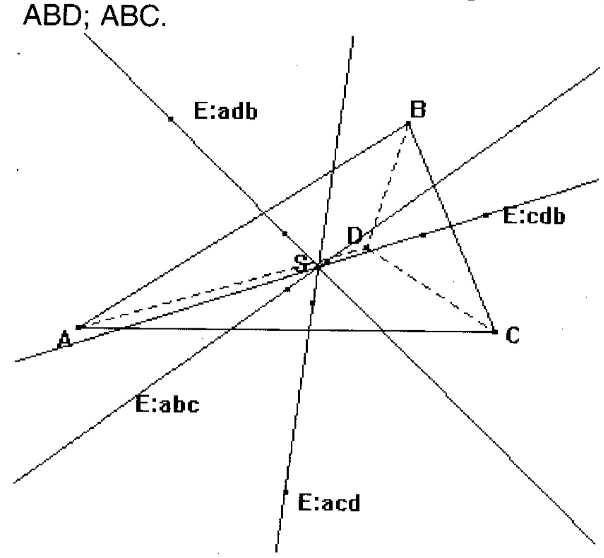


Dichas bisectrices se cortan en un punto (en el gráfico denotado por S y conocido como centro de Spieker). Este punto tiene como característica ser el centro de masa del perímetro del triángulo ABC.

Punto de Schiffler o ... donde las rectas de Euler concurren

La recta de Euler
Leonhard Euler (1707 - 1783) probó que en todo triángulo el ortocentro, el circuncentro y el centroide se encuantran alineados. La recta que contiene a estos tres puntos se denomina recta de Euler.

Denotemos con D el incentro del triángulo ABC. El punto de Schiffler del ABC es el punto donde concurren las rectas de Euler de los triángulos BCD; CAD; ABD; ABC.

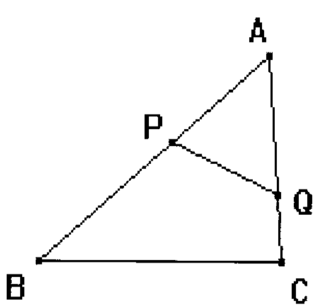


Schiffler, Veldkamp y van der Spek resolvieron un problema propuesto por Kurt Schiffler (1896-1986) donde se introducía este punto y fueron ellos mismos quienes sugirieron nombrar dicho punto en honor al autor.

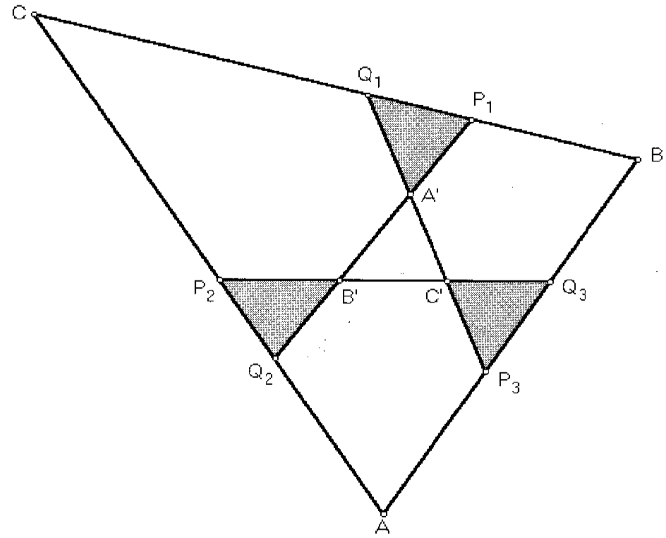
Ubicación en un triángulo
Una forma de ubicar un punto en un triángulo cualquiera es dar tres números cualesquiera que sean proporcionales a las distancias de dicho punto a cada uno de los lados del triángulo.
Por convención se dará primero la distancia del punto P al lado BC, luego al CA y por último al AB.
A estas coordenadas se las denomina "coordenadas homogéneas trilineares", abreviado frecuentemente como "trilineares".
Por ejemplo el incentro de un triángulo ABC, por ser equidistante a los tres lados tiene trilineares 1:1:1
El punto de Schiffler tiene trilineares:
(b+c-a)/(b+c) : (a+c-b)/(a+c) : (b+a-c)/(b+a)
donde a, b y c son las longitudes de los la-dos del triángulo.

Centro de congruencia de Yff

Un isoscelizador para el ángulo A en un triángulo ABC es cualquier segmento desde un punto P sobre el lado AC a un punto Q sobre el lado AB tal que los segmentos AP y AQ tengan la misma longitud, con lo cual el triángulo APQ es isósceles.



En el triángulo ABC, sea P_2Q_3 un isosceli-zador del ángulo A, o sea que el triángulo AP_2Q_3 es isósceles. Sean a su vez P_3Q_1 y P_1Q_2 isoscelizadores de los ángulos B y C respectivamente. Llamemos A', B' y C' a los vértices del triángulo formado por los tres isoscelizadores.



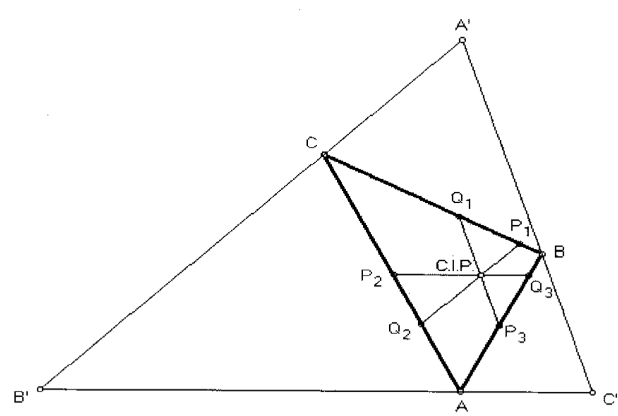
Peter Yff probó en 1987 que los seis puntos P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 y Q_3 se pueden construir de modo que los cuatro triángulos $A'P_1Q_1$; $B'P_2Q_2$, $C'P_3Q_3$ y A'B'C' sean congruentes.

Desplacemos los tres isoscelizadores de modo que los tres triángulos exteriores sigan siendo congruentes y que el triángulo A'B'C' se transforme en un único punto. Este punto es aquí llamado Centro de Congruencia de Yff.

Las trilineares, maravillosamente simples, de dicho punto son:

sec(A/2) : sec (B/2) : sec (C/2)

También Peter Yff probó, en 1989, que existe una única configuración en la cual los tres ángulos A, B y C tienen isoscelizadores de igual longitud, y que ellos se encuentran en un punto llamado punto isoscelizador congruente.



Punto isoperimetral y punto de igual desvío

En todo triángulo acutángulo podemos definir los dos puntos notables siguientes:

1) el punto isoperimetral P definido por las siguientes trilinerares:

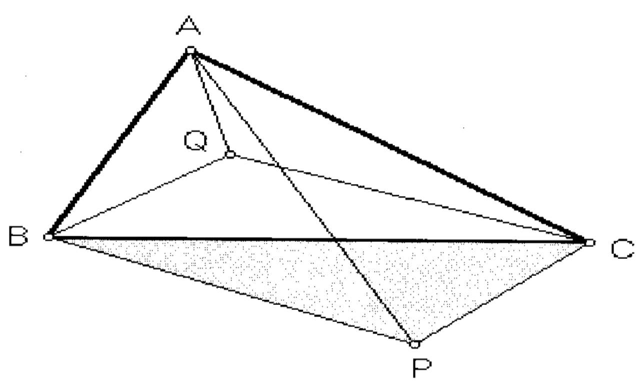
sec(A/2) cos (B/2) cos (C/2) – 1:
sec(B/2) cos (A/2) cos (C/2) – 1:
sec(C/2) cos (A/2) cos (B/2) – 1

Este es el único punto para el cual los tres triángulos BPC, CPA y APB tienen igual pe-rímetro.

2) el punto de igual desvío Q definido por las trilineares:

sec(A/2) cos (B/2) cos (C/2) + 1:
sec(B/2) cos (A/2) cos (C/2) + 1:
sec(C/2) cos (A/2) cos (B/2) + 1

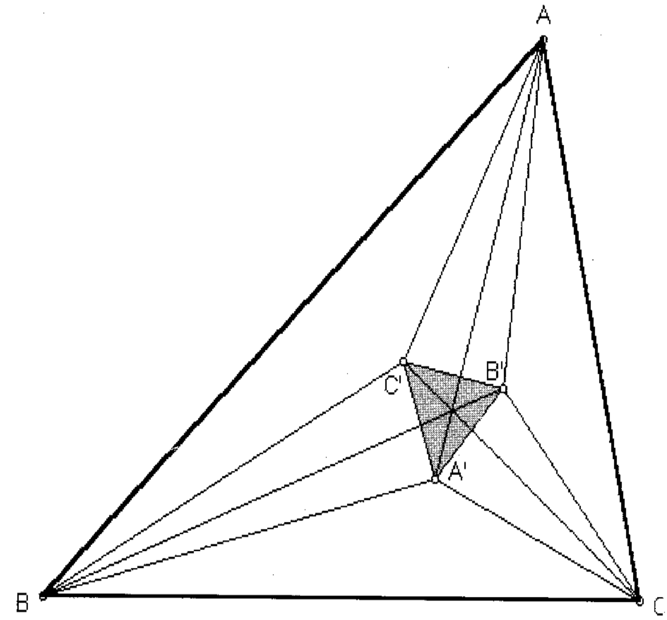
Este es el único punto para el cual la longi-tud de los tres desvíos, A a B via Q, B a C via Q y C a A via Q son iguales. La longitud del desvío de A a B vía Q se define como long(AQ) + long(BQ) – long(AB), de la mis-ma manera definimos las otras longitudes.



Primer y segundo centros de Morley

Ya hemos dicho que desde la Antigüedad clásica se sabe que las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto ¿Qué ocurre con las trisectrices, (semirrectas que dividen a cada ángulo interior en tres partes iguales)?

Pues bien, el teorema de Morley dice que los tres puntos donde se intersecan las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo ABC forman un triángulo equilátero, cuyo centro es llamado primer centro de Morley.



Las trilineares son del primer centro de Morley son:

cos(A/3) + 2cos(B/3) cos(C/3) :
cos(B/3) + 2cos(C/3) cos(A/3) :
cos(C/3) + 2cos(A/3) cos(B/3) :

Estos, como dijimos al comienzo, son sólo algunos de los centros de triángulos que se han definido. Para los interesados en conocer más acerca de este tema les contamos que existe una Enciclopedia de Centros de Triángulos (ver bibliografía) que contiene cientos y cientos de centros diferentes.

* Profesora de Matemáticas y Astronomía egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Bibliografía:

· EUCLIDES - Elementos de Geometría III – V – México D.F., Universidad Nacio-nal Autónoma de México, 1992.
· Triangle Centers:
http://cedar.evansville.edu/~ck6/tcenteers/index.html
· The Enciclopedia of Triangle Centers: http://cedar.evansville.edu/~ck6/encyclopedia/ETC.html
· Akrowne's page – WathMorld:
http://br.crashed.net/~akrowne

Etnomatemática
Bill Barton en Buenos Aires

La investigación antropológica ha presentado evidencia de que muchos grupos culturales diferentes saben *la matemática en formas muy distintas a la matemática académica que se enseña en las escuelas.*
El vocablo Etno hace referencia a grupos culturales identificables, como sociedades nacionales-indígenas (tribus), grupos sindicales, niños de ciertos rangos de edad, sectores profesionales, etc.
A pesar del profundo ejercicio de abstracción que la matemática significa, la Etnomatemática trabaja en un escalón de abstracción anterior ¿Cuál es la manera particular en que estos grupos culturales específicos cumplen las tareas de clasificar, ordenar, contar y medir? En resumidas cuentas, ¿Cómo concibe cada grupo étnico lo que, en particular, nosotros llamamos matemática*?*

por Fernando Chorny*

En noviembre del año pasado recibimos, casi de improviso, la visita de Bill Barton. Vale la pena, además de contar quién es, contar también la manera en que llegó a Buenos Aires para hablarnos de su trabajo y de sus experiencias.

Bill Barton obtuvo su Maestría en Ciencias Matemáticas, en la Universidad de Auckland en 1971. Durante los siguientes 18 años enseñó matemática en la escuela secundaria, en Nueva Zelanda, a veces trabajando en forma bilingüe, entre el inglés y el maorí. En 1981 obtuvo su maestría de Filosofía en Educación, en Massey.
En 1990 se contactó, en la Victoria University de Wellington, con profesionales que estaban investigando acerca del vocabulario matemático maorí y Etnomatemática.
En 1996 completó su Doctorado en Etnomatemática.
Actualmente dirige la Unidad de Educación Matemática en el Departamento de Matemática de la Universidad de Auckland.

Cuando el equipo de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA coordinado por Patricia Sadovsky estaba desarrollando su seminario de Didáctica de la Matemática surgió la pregunta que captaría la atención de Bill Barton: ¿Se ocupa la Etnomatemática de la didáctica? La pregunta fue lanzada a un foro de Etnomatemática que hay en Internet, este espacio virtual no menos abstracto que R^4 en el que las preguntas son arrojadas como botellas al mar y respondidas por los interesados desde cualquier lugar del planeta.

Bill Barton, este agradable neozelandés de hablar pausado y trato cordial, fue sorprendido por la pregunta cuando, casualmente, se encontraba en Brasil, participando de una conferencia sobre Etnomatemática. Con entusiasmo y pleno desinterés, sin dejar ninguna duda acerca de su pasión por la docencia y de su ánimo de comunicar el trabajo desarrollado a lo largo de su carrera, se ofreció a hacer una escala en nuestra ciudad antes de regresar a su lejana isla natal.

Tal vez el acontecimiento no llegó a difundirse a tiempo y sin duda Bill Barton habría merecido un auditorio más numeroso en la segunda de las dos charlas que dio el día 13 de noviembre, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires[1]. El encuentro, con no más de quince personas como público, se desarrolló en un ambiente familiar, donde hubo lugar para las preguntas y el diálogo.

Barton explicó con paciencia y claridad, en un inglés claro y pausado, los detalles de su experiencia trabajando con los maoríes. (La mención del idioma no es anecdótica, sino que, por el contrario, está relacionada con uno de los temas centrales de su exposición.)
Axioma tuvo la oportunidad de asistir a esta charla, para comunicarla a sus lectores. Lo que vie-

ne a continuación es una síntesis reorganizada de los temas a los que Bill Barton se refirió; un cóctel de "apuntes tomados en clase", traducción del inglés e interpretación personal...

Matemática y cultura

¿Qué es la Etnomatemática?, comienza preguntándose Bill Barton y adivinando que se trata de la pregunta que todos los presentes nos estamos haciendo. Bien. En principio "Etnomatemática" no es *algo*. Es más bien una palabra que expresa un deseo, una intención de hablar acerca de *matemática* y *cultura* en conjunto. Hay distintos grupos de especialistas interesados en unificar estos dos temas. Hay quienes están interesados por razones educativas, otros por razones filosóficas, político-culturales o puramente matemáticas. Estos especialistas trabajan desde áreas muy diferentes y, para Bill Barton, *Etnomatemática* es la palabra que han acuñado para poder referirse a eso que hacen.

¿A qué se puede deber esta intención de vincular matemática y cultura? En parte a que el desarrollo de la matemática y de su enseñanza está –en forma desapercibida para nosotros, si no nos detenemos a reflexionar sobre ello– impregnada de la cultura europea occidental. En efecto, teniendo en cuenta la manera en que la matemática se ha desarrollado como parte de la cultura de la humanidad, puede demostrarse que ha sido básicamente un desarrollo del pensamiento europeo que ha alienado a grupos particulares e ignorado las ideas propias de otras culturas.

El tema de la invasión y el sometimiento de una cultura por otra es una problemática central para los grupos que trabajan en Etnomatemática desde una visión político-cultural.

Una típica situación problemática para ellos sería la siguiente. En Nueva Zelanda los diseños artesanales maoríes aparecen en la decoración de los edificios comunales. En estos diseños es inmediato descubrir patrones de simetrías axiales y centrales, rotaciones, desplazamientos, que permiten hacer un análisis geométrico de su construcción[2], siempre que se los estudie desde nuestra geometría occidental. Pero el hecho de que los patrones de simetría puedan descubrirse entre los diseños elaborados por la cultura maorí no hace a una matemática maorí. La polémica se genera entre quienes están de acuerdo con el uso de ese material, que según ellos acerca a los niños a su cultura, agrega colorido al aula y permite que los niños dibujen esos diseños manteniéndolos vivos y aquellos que opinan que se está maltratando un material cultural que no fue diseñado para ese fin; un material que tiene un significado cultural muy profundo, cuya importancia es mayor que la de la matemática. Cada diseño tiene un significado cultural e histórico que le habla a un grupo particular de gente acerca de su propia historia; usarlos para otros fines es trivializarlos. Además la mayoría de los maestros de matemática son europeos, no maoríes, y que usen simbología maorí para enseñar matemática a los maoríes no puede dejar de ser al menos polémico.

Una problemática de la que se ocuparían los que trabajan en Etnomatemática desde el punto de vista de la enseñanza podría ser:
1) ¿Puede la Etnomatemática ayudar a los niños indígenas y a otros grupos minoritarios a aprender matemática?
2) ¿Puede la Etnomatemática ayudar a todos los niños a aprender matemática?

En Brasil y en Alaska se están desarrollando sendos programas educativos. En Brasil, de donde provenía Barton al llegar a Buenos Aires, se trabaja con las comunidades de los Sin Tierra. Los maestros hacen una tarea muy sincera y genuina con la comunidad y, fundamentalmente, sin propósitos ocultos. Acompañan a las personas en sus actividades y los conceptos matemáticos son extraídos de las actividades propias de la gente y puestos en evidencia a medida que van surgiendo.

La experiencia en Alaska es aún más interesante. Allí se está trabajando con mucho cuidado y respeto por la cultura de la población Inuit, en la cual los niños están muy inmersos ya que no hablan inglés como primera lengua y están poco influenciados por la cultura europeo–americana, a causa de las distancias geográficas. En estas condiciones, poder enseñar matemática requiere de una instancia previa que es la de ayudar a que entiendan qué es la matemática. Explicar que la matemática es nuestra manera de entender el mundo, nuestra manera de organizar las cantidades, pero que hay ciertos aspectos del modo en que hemos desarrollado todo esto que son muy extraños a su cultura. Para poder mostrarles lo que es la matemática en el contexto de su propia cultura es necesario poder dilucidar en qué forma su cultura simboliza el espacio, el número, el trabajo con los números y con las relaciones.

Así, en los primeros años de escuela los niños no hacen nada relacionado con la matemática como nosotros lo entendemos, sino que trabajan con su cultura en los modos como ella simboliza el número, el espacio, etc. y aprenden que así como existe una formulación del espacio y del número en su cultura, otras culturas lo hacen de otro modo, y en una en particular hay algo que se llama "matemática" que mucha gente entiende y que es bueno que ellos también.

Los niños llegan así a la matemática entendiendo de qué se trata.

Al menos esta es la teoría; el programa se está desarrollando bien y por ahora se verifica que la situación es mejor que antes. El tiempo permitirá sacar conclusiones, corregir, rever. Lo importante es que se trabajó con los maestros autóctonos y fueron ellos quienes desarrollaron el material desde sus concepciones que, como en todas las culturas, están íntimamente ligadas a su idioma.

La matemática según la estructura de un idioma. Una cuestión semántica

Bill Barton se incluye a sí mismo en el grupo de los que, a partir de la Etnomatemática, abordan primordialmente el estudio de la matemática. Cuando se refiere a su experiencia, prefiere no hablar de "matemática", porque es una palabra demasiado cargada de connotaciones para la generalidad a la que él pretende arribar en su trabajo con otras culturas. Él prefiere referirse con un término que ha creado: QRS (significa Quantity–Relationship–Space, aunque alguno de los oyentes bromeó sugiriendo que parecía el nombre de un triángulo, por tratarse de tres letras consecutivas del alfabeto). Ésta es una forma de referirse a la matemática en un sentido más amplio, el que no está contaminado de la concepción europeo-occidental.

¿Es realmente el de la matemática un lenguaje universal y objetivo? Bill Barton nos muestra que no lo es. Él, junto con otros colegas, necesitó diez años para estudiar y desarrollar el idioma maorí y así poder aspirar a enseñar matemática a los maoríes en su propia lengua. Esto no significa traducir al maorí los vocablos matemáticos, como quien los traduce del francés al alemán; significa traducir a la concepción del mundo que tiene la cultura maorí lo que la matemática misma significa. La estructura, la sintaxis, la constitución de una lengua hacen posible o imposible definir conceptos de cierto nivel de abstracción. La universalidad de la matemática encuentra sus límites cuando, al estar todo pensamiento inevitablemente expresado a través de un lenguaje, resulta haber pensamientos que determinados lenguajes no pueden expresar.

Tratemos de entender esto con un ejemplo. Un concepto básico de la geometría, como es la ubicación espacial, puede no ser tan simple, según el idioma con el que se desee explicar. En español o en inglés, una persona comunica a otra la ubicación de un objeto con una expresión que involucra al que habla, pero no al que escucha. En los idiomas de la Polinesia hay una diferencia sustancial, porque la referencia en cuanto a la posición espacial de un objeto es siempre relativa, siempre abarca los puntos de vista del que habla y del que recibe el mensaje. Si el Sr. K informa al Sr. P acerca de la ubicación de un reloj en la pared, lo involucra en su mensaje, de tal manera que la información sobre la posición del reloj está en función de las posiciones tanto del Sr. K como del Sr. P. Y ellos, que organizan su pensamiento a partir de su idioma de la Polinesia, no pueden concebir un mensaje sobre la ubicación del reloj que no varíe a medida que ellos cambian de posición. A nosotros el manejo del espacio cartesiano, donde impera un punto de vista único, no nos genera conflictos porque está relacionado con la manera en que hablamos. Así como hablamos, así también entendemos la existencia. Esto puede resultar complejo, porque Barton intenta hacernos comprender las dificultades de un idioma sin mostrarlas explícitamente; se debe limitar a intentar describirlas.

Hay un ejemplo interesante que puede resultar algo más explícito. El mismo tiene que ver con el lugar que la sintaxis de cada idioma le otorga a sus vocablos. En español y en inglés el número suele tener el lugar de un adjetivo. Así, en la oración "Las tres botellas están en la mesa" la palabra "tres" es un adjetivo que indica cuántas son las botellas. En el discurso matemático, el número frecuentemente toma el lugar del sustantivo, porque es el "protagonista" del que se habla al mencionar sus propiedades. "Tres es impar" o "Tres es el supremo del conjunto A" serían algunos ejemplos. Fuera del discurso matemático podría pensarse en una jerarquización sintáctica que diera a "tres" el lugar de sustantivo. Para la oración anterior esto sería (el ejemplo en español es algo grotesco e imperfecto) "Las tres son botellas en la mesa". Sin embargo, lo que Barton y sus colegas descubrieron al estudiar la lengua maorí e involucrarse en la noción de número que podían tener los estudiantes de matemática maoríes es que "tres" no ocupaba el lugar de un adjetivo ni de un sustantivo, sino el de un verbo. Jugando otra vez con una traducción imposible, la versión maorí de la oración anterior sería: "Las botellas *tresean* en la mesa."

Esta forma del lenguaje determina, sin duda, las posibilidades de que la matemática se desarrolle en cierta dirección. La organización lógica de un razonamiento también está limitada por las posibilidades que ofrece cada idioma.

En los idiomas indoeuropeos tendemos a argumentar de manera lineal cuando decimos: Si p entonces q. En el idioma maorí se argumenta de manera diferente. Podría decirse que de manera circular o más bien emparentada con un concepto de familia; algo como: "esta idea y esta idea tiene la apariencia de esta idea", armando más bien sistemas posibles más que llegadas únicas con status de verdad. Las llegadas o conclusiones derivadas de esta otra manera de argumentación dependen de la familia de ideas con las que se empieza a argumentar, lo cual la hace más flexible, menos determinista y por lo tanto más relativa.

Así, podemos concluir que la matemática es absoluta por la manera en que nosotros hablamos. Nuestra visión podría ser más relativista si habláramos de otro modo y como consecuencia tal vez nuestra matemática sería relativista.

Esto no debe ser entendido como una crítica a nuestra matemática, a nuestro idioma o a nosotros mismos, sino que apunta a ayudar a entender un poco más a qué se refiere la Etnomatemática.

Acerca de la matemática aplicada

Las reflexiones de Bill Barton acerca de la Etnomatemática y su misión no se detienen en estas especulaciones casi filosóficas. Las aplicaciones de la matemática para resolver problemas prácticos también están, junto con la naturaleza misma de estos problemas, ligadas a la visión del mundo propia de cada cultura.

Según cuenta Barton, los navegantes de la Polinesia tienen interesantes conocimientos ancestrales acerca de la navegación, gracias a los cuales son capaces de hacer largas travesías por el Océano Pacífico y mantener el curso, sin ayuda de brújula y sin depender de una noche despejada que les permita consultar las constelaciones estelares. Lo que los polinesios han desarrollado es una capacidad que los europeos desconocen. Son capaces de leer en el oleaje cuatro direcciones que dan cuenta de la dirección en que se desplazan. Pueden hacerlo en la oscuridad, sin ver el cielo, tan sólo guiados por la sensación que reciben del movimiento del barco.

Por otro lado, que nos es más conocido, los navegantes europeos se ayudaron en sus largas travesías desarrollando las ideas de latitud y longitud e invirtieron mucho dinero y trabajo intelectual en desarrollar relojes, compases e instrumentos astronómicos que pudieran ser llevados en los barcos. Como sabemos, la historia desemboca en el desarrollo de satélites artificiales que determinan la posición y resuelven el problema de la navegación en forma definitiva.

El Titanic sabía exactamente cuál era su posición, pero no sabía que también estaba el iceberg. La pregunta de Barton es ¿Qué habría pasado si una cierta cantidad de energía matemática y dinero se hubiera orientado hacia el estudio de las marejadas, oleajes y a la resolución del comportamiento de las olas? Quizás en ese caso, tendríamos un pequeño instrumento en el barco que podría ir resolviendo las olas que vienen hacia él en distintas direcciones y así poder situar islas próximas y también icebergs no registrados.

Con este ejemplo, estamos en presencia de lo que sería una idea matemática que no se ha desarrollado simplemente porque la matemática no ha ido en esa dirección.

Comprender la visión de la Etnomatemática que Bill Barton nos ofrece va más allá de trabajar con las limitaciones y dificultades que otras culturas puedan tener para aprender *nuestra* matemática. Podemos tomar conciencia repentina del enorme abanico inexplorado si, abstrayéndonos de nuestra propia estructura cultural y considerando que para "hacer" matemática se necesita un idioma, somos capaces de preguntarnos: ¿De qué matemáticas maravillosas nos estaremos privando en un momento en que un idioma único (como otrora lo fue el latín) está deviniendo más y más en el lenguaje de la ciencia?

* Profesor de Matemáticas y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Instrumentos de la Astronomía Antigua

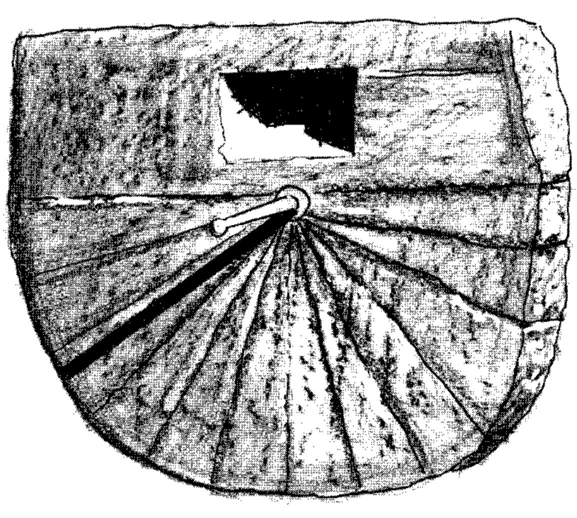
Andrea Morales*

La aguja del cuadrante solar o gnomon proyecta sombras sobre el suelo, según las posiciones de los astros y el sol en el curso del año. Se reconocen en esas proyecciones algunos acontecimientos del cielo. La luz que llega desde lo alto escribe sobre la Tierra o la "página de un dibujo que imita su paso, y representa sus formas y sus lugares reales en el Universo".
Así es como presenta Michel Serres en su libro "Historia de las Ciencias" a ese verdadero instrumento de investigación científica, que mostraba un modelo del mundo y que a su vez era un grandioso observatorio.

Según Heródoto, parece ser que los griegos heredaron de los babilonios el gnomon.
Eran lecciones comunes de la astronomía griega remontar de las sombras o de las imágenes reproducidas modelos del mundo.

El gnomon expresaba entre los griegos el ángulo recto o plomada.
Se fijaba sólidamente una varilla medida en posición vertical, en el centro de un plano horizontal bien pulido y sin ningún obstáculo circundante, a fin de que la sombra pudiera verse claramente desde la salida del sol hasta su puesta.

El astrónomo observaba la sombra durante el año, veía que alcanzaba cada día un mínimo, y ese mínimo variaba de un día a otro, y que llegaba al valor más corto en una época del año (solsticio de invierno) y al más largo seis meses después (solsticio de verano).



Cualquier astrónomo, ya fuera babilonio, egipcio, chino o griego, si hacía diariamente tales observaciones, podía plantearse numerosas cuestiones: ¿Por qué la sombra del mediodía crecía durante seis meses, desde su longitud mínima hasta la máxima, para invertir luego el proceso, y así sucesivamente año tras año? ¿por qué la del mediodía era siempre la más corta del día? y ¿cómo comparar los acimutes de las sombras con sus longitudes?. Observarían que las posiciones extremas de la sombra hacia el oeste, a la salida del sol, en ambos solsticios, podía señalarse, y la posición media entre esos dos extremos (oeste exacto) correspondía a los equinoccios.

El cálculo de las latitudes a partir de las sombra del Sol en los solsticios y en los equinoccios, primer vínculo matemático entre la astronomía y la geografía, dio lugar, por otra parte, al establecimiento, por Ptolomeo o antes por Hiparco, de lo que la antigüedad llamó tablas de cuerda: largas listas de relaciones entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos y la de sus ángulos. En estas tablas puede leerse el nacimiento de la trigonometría.

Ahora tratemos de interpretar algunas de las cuestiones que se habrían planteado astrónomos de aquellas épocas.

Puntos cardinales

El sol alcanza su altura máxima al mediodía y esa altura está en el punto medio del arco descripto por el camino del sol. Sea cual fuera ese arco su punto medio pertenece a la línea Norte Sur. Por lo tanto, la prolongación de la sombra proyectada en el mediodía nos indica la dirección Norte-Sur. ¿En qué sentido estará el norte? ¿qué otra variable tendremos que tener en cuenta para hallarlo?

Una vez localizada la línea Norte Sur, el Este y el Oeste quedan determinados por la perpendicular a esa línea.

Momentos del Día

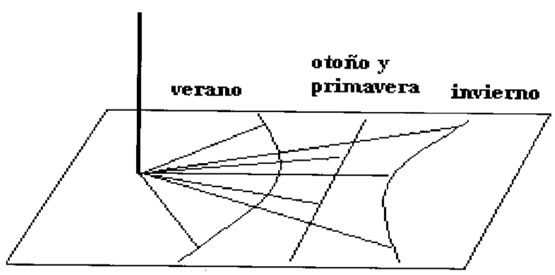
Para interpretar en este instrumento el momento del día correspondiente a la mañana tendremos que ob-

servar el sector de sombras hacia el oeste de la línea de mediodía.
De la misma manera el indicador de la tarde nos lo dará el sector de sombras hacia el Este de la línea del mediodía.

Estaciones

Las sombras varían a lo largo del año porque varía el ángulo de incidencia del sol y el registro de sombras se repite en cada verano, otoño, invierno y primavera. En invierno las sombras son largas y las horas de sol son escasas.

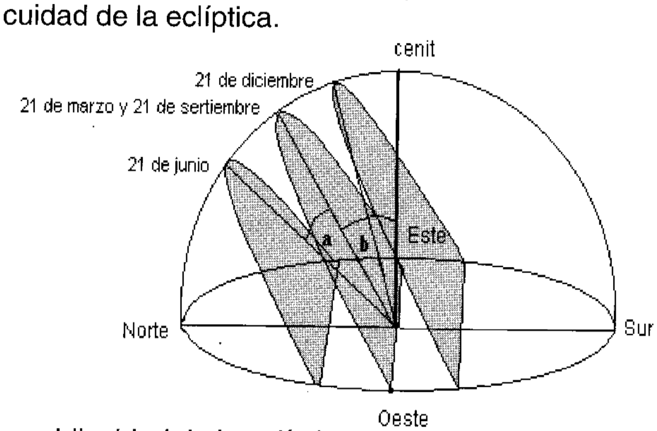
En Otoño al igual que en primavera, las sombras comienzan a acortarse y se prolonga la duración de las horas de sol.
En verano las sombras son más cortas y la duración del día es mayor que el de la noche.



Para una medición rigurosa, es conveniente acortar los intervalos de observación y aumentar la cantidad de registros. Cuantas más veces se reduzcan las observaciones y cuanto más frecuentes sean las mediciones, más preciso será el estudio.

Latitud

La varilla apuntando hacia el cenit, forma con el plano del ecuador un ángulo determinado que no es más que la latitud.
Esta idea de latitud terrestre es posterior a la de oblicuidad de la eclíptica.

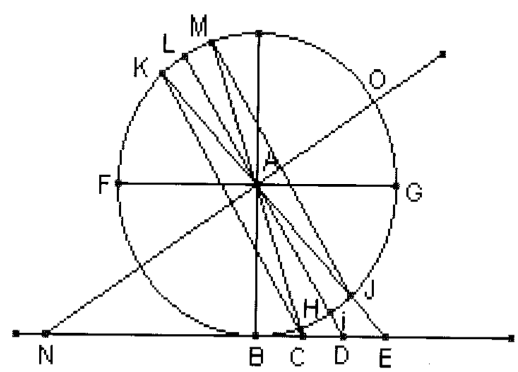


a= oblicuidad de la eclíptica
b=latitud Eclíptica

Se puede observar que el sol se desplaza diariamente en un plano y describe un semicírculo de este a oeste. La inclinación de ese plano respecto del horizonte, varía diariamente: es mínima en el solsticio de invierno (cuando la sombra del gnomon resulta más corta) y es máxima en el solsticio de verano (la sombra al mediodía más larga).
Ese plano adopta su posición media en los equinoccios. El ángulo entre las dos posiciones extremas del plano solar (eclíptica) es el doble del que llamamos la oblicuidad de la eclíptica.

La ciencia moderna se sorprende de que haya podido existir, tan antiguamente , una astronomía sin vista ni mirada como la contemporánea. La siguiente figura, que relaciona los conocimientos matemáticos con los astronómicos, nos muestra una evidencia de ello:

AB representa la varilla del gnomon, BC mide la sombra que produce el sol a mediodía en el solsticio de verano, BE el solsticio de invierno, BD la sombra equinoccial. La línea FG representa el horizonte .
MJ y KH siguen los trópicos y LI el ecuador, así como NO perpendicular a este, el eje del mundo. El ángulo ENO igual a BAD da exactamente la latitud del lugar y el ángulo DAE, igual a DAC, la inclinación de la eclíptica, estimada en 24º.



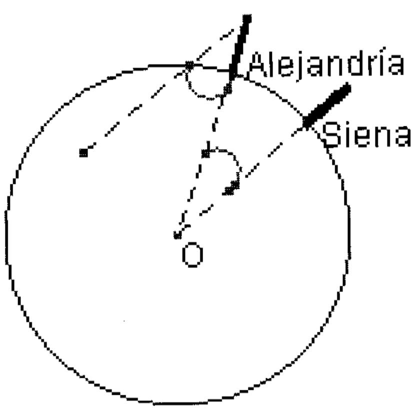
Una vasta información acerca de estos temas fue descubierta en una remota Antigüedad. Fueron grandes estudiosos: Anaximandro, Vitruvio (arquitecto romano del siglo I antes de Cristo), Piteas de Marcella (navegante y geógrafo griego del siglo IV antes de Cristo, Ptolomeo, Hiparco.
Tales escribió dos libros sobre los equinoccios y los solsticios.
Oinópides dio la estimación de la inclinación de la eclíptica.

Este gráfico es una suma de hallazgos en la historia de la ciencia griega, pero, cada generación, desde el siglo V, dedujo de él al menos una línea.

Un ejemplo muy preciso de la utilidad del gnomon entre los griegos lo demuestra el gran hallazgo que hizo Eratóstenes de la longitud entera del meridiano terrestre.

Coloca uno en Siena, Egipto, cerca de la primera catarata del Nilo, ciudad situada sobre el trópico de Cáncer.
En este lugar no se produce sombra a mediodía del día del solsticio de verano. El mismo día a la misma hora, Eratóstenes mide el ángulo que hace el sol con otro gnomon situado en la ciudad de Alejandría, que él suponía situado sobre el mismo meridiano. Los dos ángulos internos de la figura son iguales, y miden aproximadamente 7º entonces el que ha medido vale la quincuagésima parte de un círculo.

Por lo tanto, multiplica la distancia de Alejandría a Siena por cincuenta para obtener la longitud del meridiano completo que es aproximadamente de unos 40.000 kilómetros.



El reloj de Sol

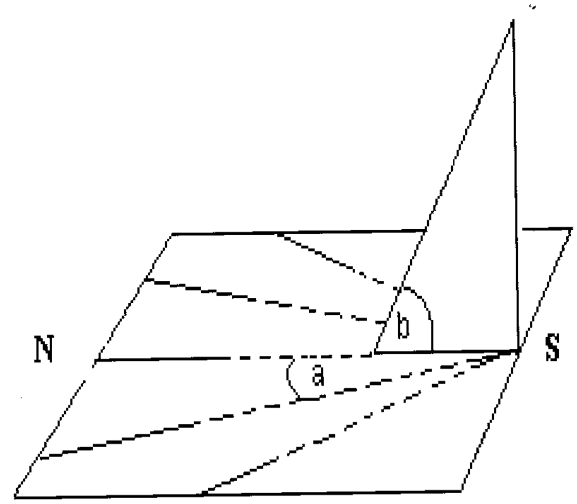
El gnomon no sirve tanto para indicar la hora que como para construir un modelo geométrico del Universo. Para medir el tiempo debería darnos la posibilidad de marcar todos los días la hora exacta.

Como ya se observó, el gnomon, proyecta sombras que cambian de lugar según la época del año. Esto se debe a que el Sol describe distintos arcos aparentes en el cielo, y esta apariencia es consecuencia de que el eje de rotación de la Tierra se encuentra inclinado con respecto al plano de la órbita.

Por lo tanto, la dificultad que tiene el gnomon es que marca un desplazamiento de las sombras a lo largo de año. Esto se supera inclinando la varilla de manera que quede paralela al eje de rotación, entonces, a medida que el eje terrestre toma distintas posiciones respecto del Sol, el nuevo instrumento también lo hace.

Para lograr que nuestro reloj quede paralelo al eje, se inclina la varilla con un ángulo igual al de la latitud que corresponde a la localidad donde nos encontramos. También hay que orientarla alineada con la línea Norte-Sur.

En su recorrido aparente, el sol, se desplaza 15º por cada hora. Por lo tanto tendremos que marcar sobre el cuadrante, con la ayuda de un transportador, una línea cada 15º, de esa manera las líneas serán las indicadoras de las horas.



a = 15º b = 35º 19' 12" (latitud en Buenos Aires)

* Profesora de Matemáticas y Astronomía egresada del I.S.P. «Dr.Joaquín V. González».

Bibliografía:

- SARTON George, Historia de la Ciencia, Cambridge, 1952.
- SERRES Michel, Historia de las Ciencias, Edit. Bordas, París, 1989.

Comentarios de textos

por Jorge Martínez *

***Las ciencias formales y el método axiomático*, Gregorio Klimovsky. Editorial AZ, 2000, 62 páginas.**

En este texto, Klimovsky ha elegido como hilo conductor de su discurso a cinco preguntas esenciales:
¿Qué tipo de "objetos" estudia la Matemática?
¿Cuál es la fuente del Conocimiento de tales "objetos"?
¿Cómo se obtienen nuevos conocimientos en Matemática?
¿Cómo se enseña Matemática?
¿Cómo se vincula a la Matemática con el mundo real?
El autor historia con erudición, las respuestas "clásicas" desde Ahmes (papiro Rhind) hasta Kant, pasando por Pitágoras, Platón, Aristóteles y Euclides.
En el capítulo III (breve, pero potente), se describe con justeza, el problema crítico de la aparición de las geometrías no euclideanas, continuando en el capítulo IV con la naturaleza de los sistemas axiomáticos.
El capítulo fundamental es el V, cuyo nombre es, en si mismo, una definición: "Nuevas respuestas a cinco preguntas".
A modo de final, un breve capítulo dedicado a las escuelas matemáticas (logicismo, intuicionismo y formalismo) lleva a la lógica conclusión de que las respuestas dadas a esas preguntas han generado distintas visiones de la Matemática.
Esta obra es sin dudas, un notable complemento de dos anteriores trabajos de Klimovsky: "Las desventuras del conocimiento científico" y "La Teoría de conjuntos y los fundamentos de las Matemáticas", e interesará seguramente a los profesores de Matemática y al público en general interesado en una visión global del funcionamiento de esta, por su gran claridad y precisión conceptual.
Nota de la redacción: *Gregorio Klimovsky nació en Buenos Aires en 1922 y estudió matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, donde llegaría a ser Decano. Como matemático, Klimovsky, en colaboración con el matemático Jorge Bosch, fue el principal responsable de introducir en nuestro país la teoría axiomática de conjuntos. Los actos de su vida demuestran coherencia con su prédica constante desde las aulas sobre la necesidad de ética científica y social. Actualmente, Klimovsky es uno de los intelectuales de referencia para temas relacionados con la política científica nacional, la sociología de la ciencia y su filosofía.*

***El Universo y la taza de té*, K.C. Cole. Ediciones B, Barcelona, 1999. 262 páginas.**

K. C. Cole es una importante autora de libros y artículos de divulgación científica. Obtuvo en 1995 un premio otorgado por el American Institute of Physics que la consideró como "la mejor escritora sobre ciencia" de ese año.
Este libro está dedicado a presentar la relación entre la Matemática y el mundo actual y dado que se trata de un ensayo de divulgación para público en general, la autora no abusa de tecnicismos y muy por el contrario esclarece frecuentemente al lector sobre los conceptos matemáticos en cuestión.
Distribuido en una introducción y cuatro partes, este libro intenta revelar en 262 amenísimas páginas la conexión entre la Matemática y lo social desde novedosos puntos de vista. En la introducción, Cole nos pone en contacto con las aplicaciones de la Matemática que explican por ejemplo las relaciones entre personas o el riesgo calculado o bien, las estadísticas de la salud. Las cuatro partes que siguen giran en torno a tres temas básicos: Interpretación matemática del mundo Físico, del mundo Social y la Matemática de la "Verdad".
A veces, nos formulamos preguntas como, ¿Es justo tal o cuál sistema de elecciones?, ¿Lo es un acuerdo de divorcio?, ¿Responde la Matemática a las necesidades cuantitativas de otras ciencias?. Quizás, arroje luz esta opinión de la autora: "Como las Matemáticas exponen tan bien la verdad, resulta curioso comprobar con cuanta frecuencia se las emplea para perpetuar equívocos y mentiras (...). Confiamos en que de conseguir expresar los problemas en términos numéricos, tal vez surja la verdad."
Tiene particular encanto el capítulo XIV, dedicado a las simetría y la belleza, a su vez se destaca en el, los trabajos de Emy Noether sobre el tema y su utilización en la Teoría de la Relatividad.
En resumen, un libro actual, de lectura amigable, dinámica, entretenida, que expresa con precisión lo que el hombre debería esperar hoy de la ciencia y en modo muy especial, de la Matemática.

* Profesor de Matemática, egresado del I.E.S.Nº2 "Mariano Acosta"

Enseñanza de la Matemática en un medio computarizado

por Lic. José Manuel Ruiz Socarras*

En la medida que los estudiantes tienen acceso a la tecnología computarizada es frecuente encontrar como hay un mayor rechazo a querer estudiar métodos de cálculo , los cuales lógicamente son engorrosos y largos. Evidentemente es más cómodo realizar un cálculo aritmético con la calculadora , así como también lo es hallar raíces reales y complejas de una ecuación polinómica de grado elevado a través de un asistente matemático, por ejemplo el Matlab.

Es que ciertamente la tecnología computarizada una de las ventajas que tiene es que simplifica el trabajo del hombre , de ahí que esta sea una de las razones por la que su uso es tan aceptado. Los profesores de todos los niveles de enseñanza estamos ante un nuevo problema : qué enseñar y qué pretender que aprenda el estudiante en un mundo donde los medios tecnológicos computarizados se imponen cada vez más. En particular los profesores de Matemática enfrentamos otro problema que no es nuevo , pero que con el uso de la tecnología computarizada cobra mayores dimensiones y es el general y tradicional rechazo del estudiante al contenido matemático, al que ahora se añade el que los estudiantes se cuestionen el por qué aprender un contenido matemático si el problema se puede resolver más fácil en la máquina.

La solución a estos problemas está primero en que los profesores aceptemos que ciertamente la enseñanza de la Matemática hoy día en que se cuenta con un notable desarrollo de la tecnología computarizada no puede ser la misma que cuando no se contaba con ella y por lo tanto tiene obligatoriamente que cambiar , es decir no podemos seguir con una enseñanza tradicional en un contexto contemporáneo , al que corresponde una enseñanza también contemporánea, pero lo segundo que tenemos que tener en cuenta es que el estudiante comprenda que es el hombre quien crea la máquina y por tanto por muy potente que esta sea, a quien se lo debemos es al intelecto y a la capacidad de creación del hombre.

Por eso , para disponer de una tecnología computarizada desarrollada se requiere de un hombre capaz de crearla , de ahí que ese hombre necesite estudiar Matemática porque el pensamiento matemático contribuye al desarrollo del pensamiento creativo y además porque cómo programar la máquina para que ejecute un determinado algoritmo si no conocemos dicho algoritmo.

Lógicamente no todos los estudiantes van a ser futuros creadores de tecnología computarizada, pero si queremos producir esa tecnología evidentemente hay que formar el personal que sea capaz de producirla.

En caso contrario tendremos que invertir en importar esa tecnología de países en donde si se forman personas para crearla.

Por otra parte, el disponer de dicha tecnología para la enseñanza de la Matemática , obliga a no priorizar , como tradicionalmente ocurría , el desarrollo de las habilidades de cálculo normal y comenzar a priorizar como no ocurría tradicionalmente , habilidades tales como : modelación matemática , cálculo computacional, determinación de condiciones de existencia y unicidad de la solución de un problema e interpretación de la solución del mismo.

Se trata pues de cambiar la enseñanza de la Matemática para lograr un equilibrio y armonía entre el contenido objeto de estudio y el uso de la tecnología computarizada como instrumento de trabajo para alcanzar dicho objeto de estudio y no tomar posiciones absolutas ni extremas. No olvidar nunca que la máquina por perfecta que esta llegue a ser siempre es creada por el hombre. Y para terminar los dejo con un Problema de Programación Lineal que ejemplifica la necesidad del conocimiento matemático humano en la solución de un problema a pesar de que se disponga de potentes asistentes matemáticos computarizados.

El ejemplo se trata de un problema donde la solución óptima del modelo creado utilizando la vía computacional del asistente matemático Matlab es $x = 2000/22 = 90.90$, $y = 1800/11 = 163.63$, sin embargo la solución óptima del problema es $x = 90$, $y =.164$ pero no ninguno de los siguientes pares de valores : x = 91 , y = 164 ; x = 91 , y = 163 y x = 90 , y = 163.

El problema es el siguiente : Una empresa produce dos tipos de productos denominados I y II, los cuales pueden elaborarse en cierto equipo de dicha empresa.

La elaboración de estos artículos requieren de dos tipos de materias primas importadas, A y B en la proporción siguiente : para producir una unidad del producto I se requieren de 3 t. de la materia prima del tipo A y de 2 t. de la materia prima del tipo B, mientras que para producir una unidad del producto II se requieren de 2 t. de la materia prima del tipo A y de 5 t. de la materia prima del tipo B.

Debido a cierta dificultad en la adquisición de la materia prima necesaria , la empresa sólo podrá disponer de 600 t. de la materia prima A y 1000 t. de la materia prima de B durante el año. Se conoce además que la ganancia neta realizada por la empresa es de $ 1000 por cada unidad del producto I y $ 1500 por cada unidad del producto II y se desea conocer cuáles son las cantidades que deben producirse si se quiere maximizar la ganancia neta total.

El modelo matemático del proc ma es máx z = 10x + 15y cor restricciones 3x + 2y £ 600 . + 5y £ 1000 , x ³ 0 , y ³ 0 do x es la cantidad que debe proc cirse del producto I y y es la ca tidad que debe producirse del p ducto II.

Bibliografía
Revista Cubana de Educaci Superior. Vol. X , No. 1 , 199 « Sobre la enseñanza de la Inge niería. El Informe Technion . García del Portal , Jesús. P. 67- 77.

*Profesor de Matemática
Universidad de Camagüey
Cuba.

Humor

Correo de Lectores

La profesora Mercedes Ocampo, desde San Salvador de Jujuy, nos envía las siguientes líneas:

Sres. Revista Axioma:

Recibí de manos de la vicedirectora de mi colegio, quien en febrero concurrió al Curso de Rectores en Bs.As., el número promocional de la revista Axioma. Me pareció una propuesta muy interesante para quienes ejercemos la docencia en matemática.

Deseo suscribirme y realizar algunos aportes.

Hace un tiempo leí en un libro de primer año el siguiente Criterio de Divisibilidad del número 7, del que no conozco su demostración. Lo enseño desde hace cinco ó seis años en 1º año y actualmente también en 7º grado, con excelente aceptación por parte de los chicos.
Para saber si un número es múltiplo de 7:
1) Tapamos la cifra de las unidades
2) Restamos, del número dado, el doble del número que tapamos
3) Si esa diferencia es múltiplo de 7, entonces el número original es múltiplo de 7

Ejemplo: ¿1 579 858 es múltiplo de 7?

157 985 – 16 = 157 969
15 796 – 18 = 15 778 (aplico de nuevo el criterio)
1 577 – 2 = 1 561 (aplico de nuevo el criterio)
156 – 2 = 154 (aplico de nuevo el criterio)
15 – 8 = 7

Por lo tanto, 1 579 858 es múltiplo de 7. En efecto, 1 579 858 = 7 x 225 694.

Un día, inventando ejercicios de Potenciación, dicté: $3^3 + 4^3 + 5^3$, cuando mis alumnas dijeron: 216. Respondí "NO", pensando que era dificilísimo que la suma de cubos diera otro cubo (esto me pasó antes de que se demostrara que el último Teorema de Fermat). Se me aceleró el pulso cuando pensé en Fermat, pero ¡Oh! ¡Desilusión! Fermat hablaba de dos términos y no de tres. Todo ocurrió en un instante. Revisé los cálculos, estaban bien: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, hermosa relación, parecida a $3^2 + 4^2 = 5^2$ ¿Es sólo casualidad? Eso me sigo preguntando todavía.
La relación que de casualidad descubrí me permite crear ejercicios, sobretodo para "invitar" a equivocarse con la radicación y la propiedad distributiva.
Hallar $\sqrt[3]{216 - 64 - 27}$ o, con decimales, hallar $\sqrt[3]{0{,}3^3 + 0{,}4^3 + 0{,}5^3}$.

- Lo que sigue se me ocurrió a partir de los criterios de divisibilidad. Dado que 11 = 10 + 1 y que el criterio de divisibilidad del 11 indica tomar las cifras alternadas, sumarlas, restar esas sumas y ver si se obtiene un múltiplo de 11 para concluir que el número dado es múltiplo de 11, pienso en el número 1001 = 1000 + 1, aplico el criterio análogo del 11 pero tomando números de tres cifras en vez de una cifra, y si el resultado es múltiplo de 7, 11 o 13, el número original también lo es.
El criterio funciona, aunque para 11 y 7 ya existen otros más sencillos. Éste es útil para 13.
<u>Ejemplo</u>: Averiguar si 6 683 274 es múltiplo de 13.
Formo los números de 3 cifras, de derecha a izquierda (si no se completan las tres cifras coloco ceros a la izquierda):
006 683 274
Sumo en forma alternada los números así formados:
274 + 6 = 280 y 683
Resto estas sumas en el sentido posible:
683 – 280 = 403
Averiguo si esta diferencia es múltiplo de 13:
403 = 13 . 31
Concluyo: el número dado es múltiplo de 13.Efectivamente, 6 683 274 = 13 . 514 098.

Si 403 hubiese sido múltiplo de 7 o de 11, lo sería también el número original.

Los felicito por la propuesta de la revista Axioma. Espero que me mantengan comunicada. Atte.,

No hemos podido, por razones de espacio, transcribir la totalidad de tu carta. Te agradecemos las molestias tomadas para escribirla y las ideas expresadas en ella.
Con respecto a la extraordinaria relación $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, los matemáticos G. H. Hardy y E. M. Wright, en su conocido libro An Introduction to the Theory of Numbers, en las páginas 199-201, resuelven la ecuación diofántica . Otra solución particular de la ecuación, dada por estos autores y distinta a (3,4,5,6), es (1,6,8,9), pero, claro está, de menor atractivo. Por otra parte, en la República de Platón se menciona, aunque en forma más oscura, al número perfecto de la generación divina, que es el 6 = 1 + 2 + 3, y al número humano que es (*Leyendo a Euclides*, Beppo Levi).

Problemas y juegos de ingenio

En esta sección ofrecemos problemas e invitamos al lector a compartir con nosotros sus soluciones (totales o parciales) como así también otros problemas que desee proponer. Nuestra dirección postal es: Dorrego 2646 - 9º E - C.P. 1425 - Ciudad de Buenos Aires - Argentina y nuestro e-mail: axioma@nalejandria.com
Los problemas todavía no resueltos, de números anteriores, siguen vigentes y a la espera de la luz que pondrá fin a las tinieblas de la incertidumbre.

1. *Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro:*
Tome una calculadora científica. Asegúrese de que esté en modo DEG. Teclee el primer número que le pase por la mente. Oprima, en ese orden, las teclas sin, cos, sin. Déjeme pensar... el visor muestra un número muy cercano a 0,01745. ¿Cómo pude adivinar el resultado?

2. *Fuente: "Magic Tricks Card Shuffling and Dynamic Computer Memories" – S. Brent Morris .*
Suponga que usted tiene una máquina de barajar cartas y un mazo de 52 cartas, numeradas del 1 al 52 y ordenadas según la sucesión natural 1, 2, 3, ..., 52.
Esta máquina recibe el mazo así ordenado y, después de barajar, lo devuelve en el orden 1, 27, 2, 28, 3, 29, ..., 26, 52.

Primera pregunta: ¿Cuántas veces como mínimo habrá que procesar el mazo por la máquina de barajar para que vuelva a quedar en el orden inicial?
Puede haber una variante en el funcionamiento de la máquina de barajar, de tal manera que tome un mazo en el orden 1, 2, 3, ..., 52 y lo devuelva en el orden 27, 1, 28, 2, 29, 3, ..., 52, 26

Segunda pregunta: ¿Cuántas veces como mínimo habrá que procesar el mazo por esta nueva máquina de barajar para que vuelva a quedar en el orden inicial?

Tercera pregunta: ¿Qué criterio de permutación para una nueva máquina de barajar requerirá repetir el proceso el mayor número de veces para devolver el mazo en el mismo orden que al principio?

3. *Fuente: Stan Wagon (Macalester College)*
¿Existe algún conjunto finito de puntos en un plano (3 ó más puntos) tales que tres cualesquiera de ellos no estén alineados y que para tres puntos cualesquiera, el centro de la circunferencia que los contiene pertenezca también al conjunto?
Por ejemplo, el conjunto formado por los vértices de un triángulo equilátero no sería una respuesta correcta ya que el centro de la circunferencia que pasa por ellos (el circuncentro del triángulo) no pertenece al conjunto.

4. *Fuente: Ken D. Boklan (Baltimore, MD), American Mathematical Monthly, Problem 956, 1998.*
Una progresión aritmética es una sucesión tal que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre constante. Aquí hay algunos ejemplos de progresiones finitas que comparten una propiedad: en cada una de ellas el k-ésimo término es la potencia k-ésima de un entero positivo.

{1}
{1, 4}
{23, 25, 27}
Encuentre una progresión más extensa con estas características.

5. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola*
Encuentre todos los valores reales de a, para cada uno de los cuales
$f(x)=a\,\mathrm{sen}(4x)-10x+\mathrm{sen}(7x)+4ax$
decrece en todos los puntos y no tiene puntos críticos.