Aχioma

La revista de los estudiantes y profesores de matemática

Noviembre / Diciembre de 1997 **Año 2 - Nº 9**

Aχioma N° 9

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Directora
Gisela Serrano de Piñeiro

Propietarios
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro
Jorge Martínez

Colaboraron en este número
Pablo Ingrassia
Mónica Micelli
Josefina Elisa Palombella

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Registro de la Propiedad Intelectual N° 867689.

Suscripción por 5 números (incluye gastos de envío): $11.-

Ejemplar suelto: $ 2.-

Ejemplar atrasado: $ 2,20

Impreso en letra & color ediciones, en diciembre de 1997 Tel: 343-0278

Editorial

Con éste, nuestro último número del año, queremos despedirnos hasta el próximo mes de marzo de 1998.

Nuevos ímpetus nos permitirán encarar algunas de las tareas propuestas por nuestros lectores: organizar talleres de resolución de problemas, dirigidos tanto a docentes como a alumnos de los profesorados, desarrollar algunos temas que hacen a nuestra práctica cotidiana en el aula, lograr información de cursos, becas de perfeccionamiento y acreditación en el exterior y toda otra información que haga a nuestro desenvolvimiento profesional y académico.

Además, les contaremos nuestra experiencia en el Seminario Internacional que tuvo lugar en Bariloche y en el que participaron algunos de los docentes que todos quisiéramos tener más cerca, más a menudo.

Saludamos fraternalmente a todos y cada uno de quienes colaboran permanentemente con nosotros y a los que nos alientan, cada minuto, a proseguir con responsabilidad y esfuerzo, no exentos de alegría, estas páginas.

Sumario

Noviembre / Diciembre de 1997

Año 2 - N° 9

Apuntes sobre...

Caos y Fractales (Tercera parte)

"Los fractales revelan un nuevo orden de la naturaleza, susceptible de ser modelado matemáticamente. Abren nuestros ojos a pautas que, de otra manera, podrían considerarse sin forma. Dan lugar a nuevas cuestiones y proporcionan nuevas clases de respuestas. Los fractales reflejan la verdadera textura de la realidad."

I. Stewart, ¿Juega Dios a los dados?

El espacio de fases.

Imaginemos que acabamos de lanzar verticalmente un cohete y que estamos interesados en estudiar su avance hacia el espacio. Podemos, por ejemplo, hacer periódicas mediciones de su velocidad y obtener así los valores v_0, v_1, v_2,... Sin embargo, la velocidad en sí misma no es suficiente para tener una descripción precisa de la evolución del cohete; necesitamos conocer también a qué altura se encuentra en cada uno de esos instantes. A estas alturas podemos llamarlas h_0, h_1, h_2,...

En cada momento, el estado del cohete queda descripto por un par ordenado de números (v,h), el primero de los cuales indica su velocidad (1) y el segundo su altura. Gráficamente cada uno de estos estados puede representarse como un punto en el espacio euclídeo bidimensional. La evolución del cohete en su avance hacia el espacio dibujará entonces una curva en dicho espacio.

En la **Figura 1** se ve una posible evolución del estado del cohete.

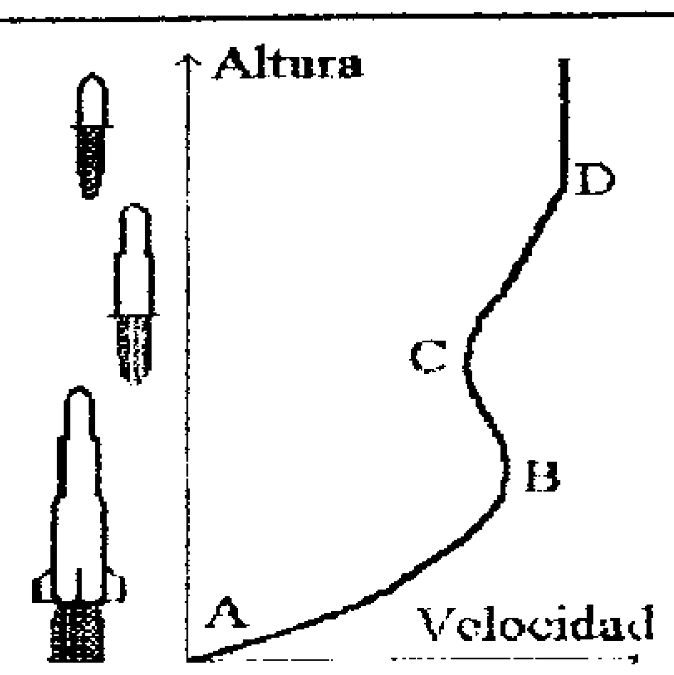


Figura 1

Entre A y B la nave ha despegado de la plataforma de lanzamiento y su velocidad aumenta rápidamente. En B se consume la primera etapa y la velocidad se reduce un poco por efectos de la gravedad. En C interviene la segunda etapa y la velocidad vuelve a aumentar, hasta llegar a D, donde el cohete se libera del tirón de la Tierra y la velocidad se hace constante.

El espacio que contiene todas las variables necesarias para representar la evolución de un sistema físico cambiante (un *sistema dinámico*) se denomina el *espacio de fases* de ese sistema.

En el ejemplo del cohete, el espacio de fases que hemos mostrado está en verdad extremadamente simplificado. En efecto, el cohete ocupa en realidad una posición en el espacio **tridimensional**, de modo que, en lugar de indicar solamente su altura, podríamos requerir una representación que nos muestre las **tres** coordenadas espaciales de su posición.

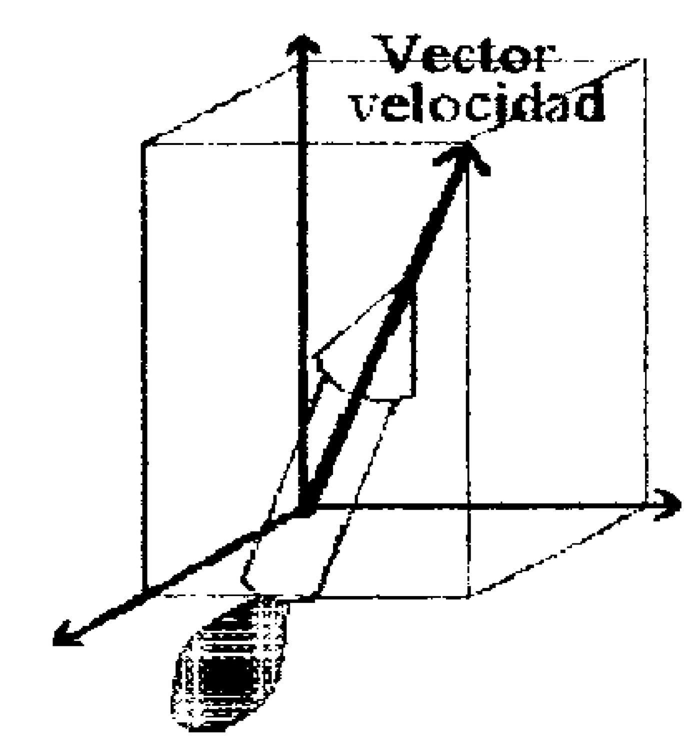


Figura 2

Por otra parte, puede ocurrir que el avance del cohete no sea perfectamente vertical. En ese caso su velocidad tendrá componentes horizontales y ésta deberá entonces representarse también como un vector de tres componentes (ver **Figura 2**).

En conclusión, el espacio de fases del cohete sería hexadimensional, ya que cada estado del mismo debería representarse mediante seis números: tres de ellos para las coordenadas espaciales y otros tres para las componentes del vector velocidad. Aunque este espacio hexadimensional ya no pueda ser representado gráficamente, su tratamiento matemático es totalmente análogo al del espacio de dos dimensiones. Sistemas dinámicos más complejos pueden requerir un espacio de fases de gran número de dimensiones.

Atractores.

Los sistemas dinámicos más simples son aquellos que tienen un comportamiento periódico, es decir, que vuelven una y otra vez a su condición inicial. Estos sistemas dinámicos dibujan en el espacio de fases una curva cerrada.

Un ejemplo familiar de sistema dinámico periódico es el péndulo. Imaginemos que éste se balancea hacia arriba y a la derecha perdiendo velocidad al moverse. En el punto más alto de su movimiento se detiene por un instante infinitesimal y luego vuelve a caer. En el punto más bajo del recorrido alcanza su máxima velocidad. Luego continúa subiendo hacia la izquierda hasta detenerse por un instante en el punto más alto; entonces cae y comienza una nueva oscilación. En ausencia de rozamiento este movimiento se repetirá una y otra vez sin detenerse.

Como el péndulo está limitado a moverse de un lado a otro los científicos dicen, filosóficamente, que tiene "un sólo grado de libertad" (sólo se requiere un número para caracterizar su posición, por ejemplo, el ángulo que forma con la vertical). El cohete, en cambio, que puede desplazarse en cualquier dirección en el espacio tiene *tres* grados de libertad.

Tracemos el camino o trayectoria del péndulo en el espacio de fases:

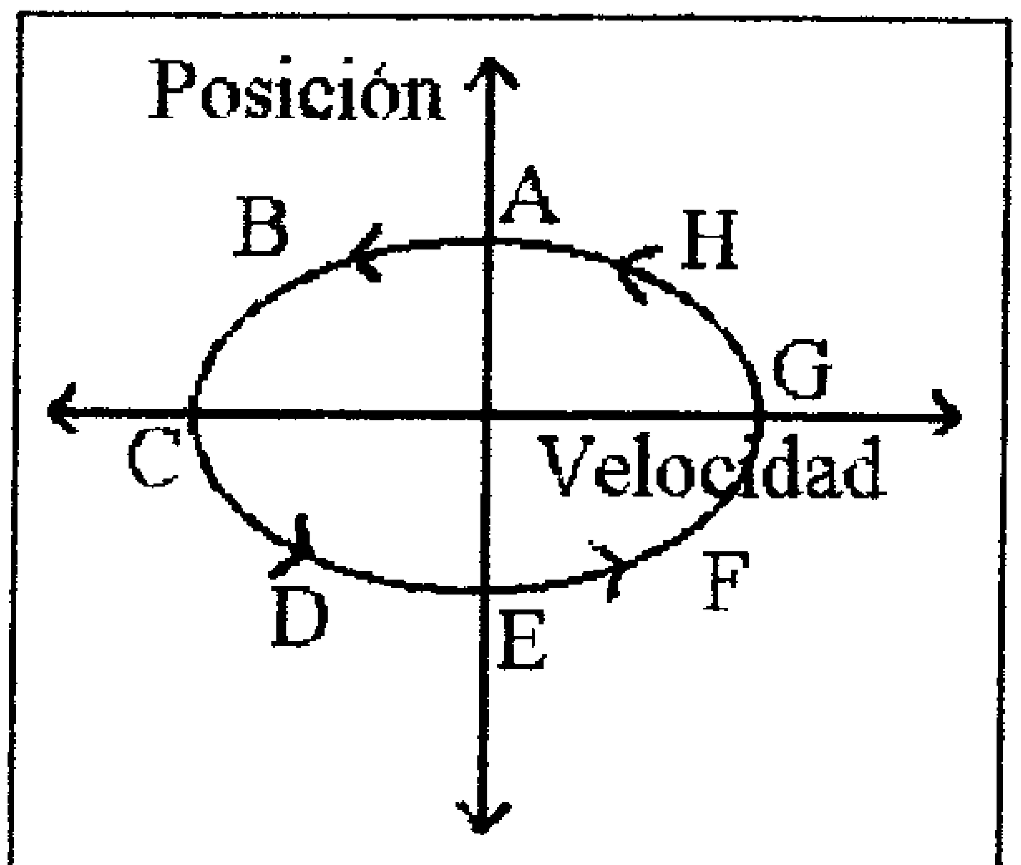


Figura 3

La posición se indica mediante el ángulo que el péndulo forma con la vertical (negativo hacia la izquierda y positivo hacia la derecha). La velocidad se considera positiva o negativa, según en qué dirección oscila el péndulo. En el punto A del espacio de fases el péndulo se encuentra en el extremo derecho de la oscilación (a la máxima distancia de la vertical y con velocidad cero). Por su parte el arco B representa la caida del péndulo hasta llegar al punto C, en que éste se encuentra en la vertical (la posición en ese punto es cero) y la velocidad es máxima. El arco D representa el ascenso del péndulo hacia la izquierda. En el punto E se encuentra ya en el extremo izquierdo y nuevamente se detiene. El lector podrá sin dificultad completar la interpretación del movimiento del péndulo que representan los arcos F y H, y el punto G.

Si damos al péndulo un empujón más fuerte desde el principio, su altura máxima será mayor. En el mismo espacio de fases podemos dibujar al péndulo recibiendo empujones iniciales de diversa potencia (ver **Figura 4**):

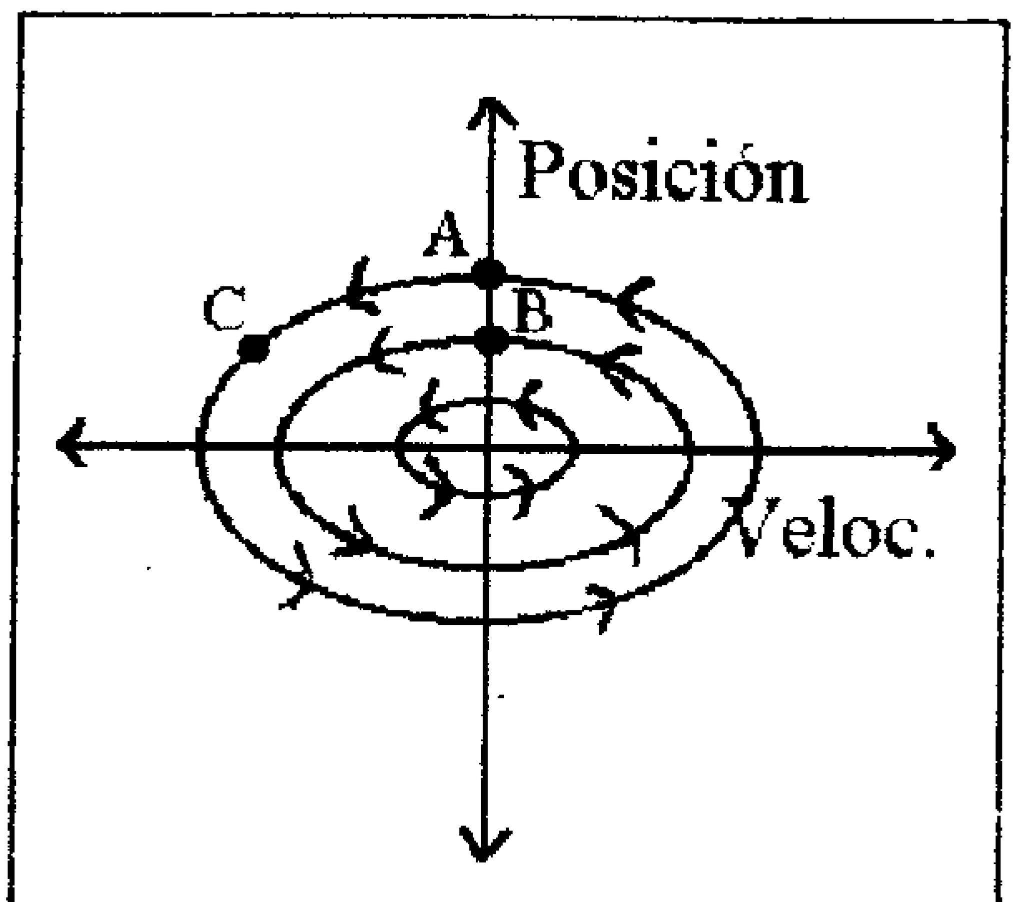


Figura 4

A partir de las condiciones iniciales representadas por el punto A (estas condiciones son: cierta inclinación hacia la derecha y velocidad inicial cero) el péndulo recorrerá una y otra vez la trayectoria descripta por la mayor de las elipses de la **Figura 4**. Notemos que, a partir de las condiciones indicadas por el punto C (es decir, una menor inclinación hacia la derecha, pero una cierta velocidad inicial) el péndulo recorrerá exactamente la *misma* trayectoria; en otras palabras, alcanzará hacia la derecha la misma inclinación que en el punto A.

Si, en cambio, las condiciones iniciales son las del punto B (velocidad inicial cero y una inclinación hacia la derecha menor que en el caso de A) la trayectoria del péndulo en el espacio de fases será una elipse más pequeña.

La representación completa de un sistema dinámico en el espacio de fases consta de todas las trayecrias que éste puede recorrer a partir de las diferentes condiciones iniciales posibles. En el caso del péndulo sin rozamiento esta representación consiste en una familia infinita de elipses concéntricas.

En circunstancias comunes, sin embargo, los péndulos sufren la fricción y la resistencia del aire; van perdiendo velocidad y finalmente se detienen. Este proceso de deterioro de un movimiento periódico también puede representarse en el espacio de fases (ver **Figura 5**). El péndulo comienza su oscilación en A (es decir desde cierto ángulo a la derecha y a velocidad cero). En B ha alcanzado la vertical y la velocidad es máxima. En C se halla en el extremo izquierdo de la oscilación, pero la amplitud del ángulo que forma con la vertical es ahora menor con respecto al ángulo inicial (en otra palabras C está más cerca del origen que A). En la siguiente oscilación hacia la derecha (punto E) la amplitud es aún menor; mientras que el punto central representa al péndulo en posición vertical y con velocidad cero (el péndulo está en reposo):

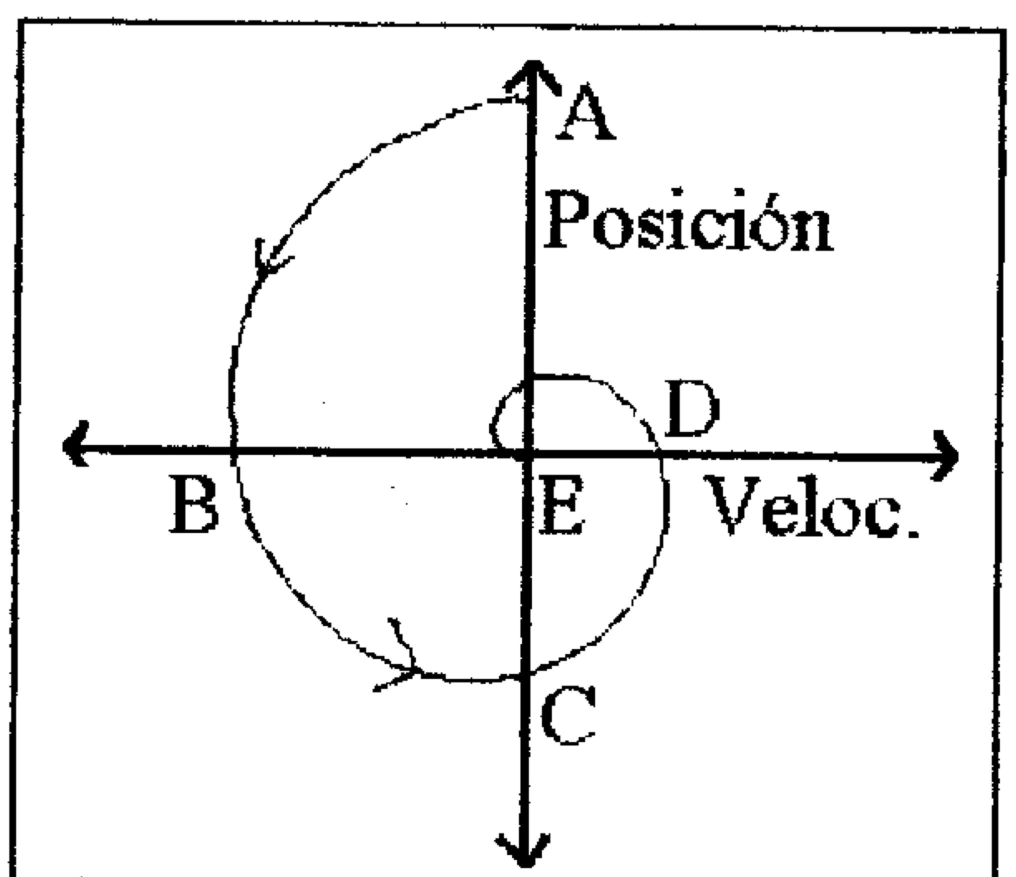


Figura 5

Como el punto central parece atraer hacia sí a la trayectoria, se lo llama un *punto atractor*.

Una de las caracteristicas más importantes de un sistema dinámico es su comportamiento a largo plazo. Éste nos puede brindar una comprensión global de la naturaleza del sistema. Por ejemplo, a largo plazo, el sistema dinámico representado en la **Figura 5** se detiene, se estabiliza en un punto. El sistema dinámico de la **Figura 4** sigue siempre un movimiento periódico. Ambos son sistemas dinámicos cuyo comportamiento global a largo plazo es perfectamente predecible.

En la **Figura 6** se ve la representación gráfica en el espacio de fases de algunas de las trayectorias de un hipotético sistema dinámico. Se observan aquí dos puntos atractores: A y B. A partir de las condiciones representadas por los puntos C o D el sistema evoluciona hasta detenerse en A. Desde E, en cambio, el sistema evoluciona hasta B. Si las condiciones iniciales son las de F entonces, tras un corto tiempo, el sistema entra en una fase de comportamiento periódico.

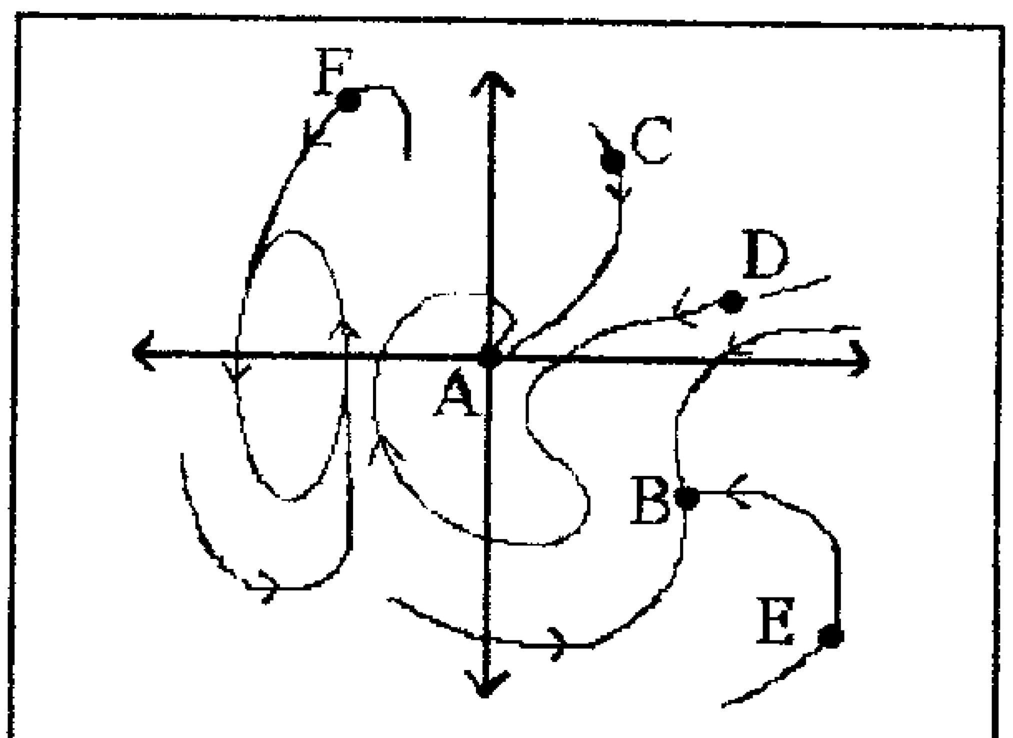


Figura 6

A largo plazo, el sistema estará, o bien estacionado en las condiciones de A, o bien estacionado en las condiciones de B, o bien oscilará dentro de las condiciones descriptas por la elipse que aparece a la izquierda en la figura.

Se llama en general *atractor* a todo conjunto del espacio de fases que sea estable a largo plazo. Cualquiera sea el estado inicial del sistema, tarde o temprano ingresará en un atractor y ya no saldrá de allí

Puede ocurrir también que el estado del sistema converja al atractor cuando el tiempo tiende al infinito, acercándose a él tanto como se quiera, pero sin alcanzarlo en ningún tiempo finito.

Un *punto atractor* es, desde luego, un caso particular de atractor. En la **Figura 4** cada una de las elipses representadas es un atractor. En la **Figura 6**, los atractores son los puntos A y B y la elipse a la izquierda de la figura. *El* atractor de un sistema dinámico es la unión de todos sus conjuntos atractores. Como es evidente, el comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico está totalmente caracterizado por su atractor.

Caos casero.

En lo que sigue, para simplificar un poco la situación, vamos a considerar un sistema dinámico *discreto*. Es decir, supondremos que el tiempo no transcurre en forma continua, sino que tenemos instantes aislados (que nombraremos 0, 1, 2, 3, 4, 5,....) sin que exista

ningún tiempo intermedio entre ellos. Para tener la máxima simplicidad posible, supondremos además que nuestro sistema dinámico tiene solamente un grado de libertad, es decir que su posición en un cierto instante puede describirse totalmente mediante un único número. (2)
Llamemos x_n a la posición del sistema en el instante n y supongamos que su evolución está descripta por la siguiente ley: la posición en el instante n+1 se calcula como

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n)$$

donde k es una constante que puede tomar valores en el intervalo [2,4].
El espacio de fases del sistema tendrá dos dimensiones: una para indicar el valor de k y otra para indicar la posición (ver **Figura** 7).

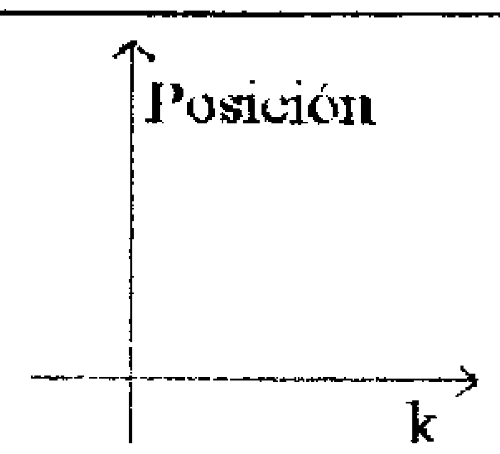


Figura 7

Observemos que, dado que el tiempo es discreto, el sistema "salta" de un estado a otro sin transición, por lo que la representación gráfica de una trayectoria en el espacio de fases no será una curva sino un conjunto de puntos aislados.
Por ejemplo, si k=2 y x_0=0,4 el sistema recorre las siguientes posiciones (truncando los números en la décima cifra decimal):
$x_0 = 0,4$ $x_1 = 0,48$
$x_2 = 0,4992$ $x_3 = 0,49999872$
$x_4 = 0,5$ $x_5 = 0,5$
A partir de n = 4 el sistema se estabiliza en la posición 0,5. El punto de coordenadas (2; 0,5) es entonces un *punto atractor* en el espacio de fases de nuestro sistema dinámico.
La representación gráfica de esta evolución del sistema constaría de los puntos (2;x_0), (2,x_1),...,(2,x_4); sin embargo, como estamos interesados fundamentalmente en estudiar los atractores, sólo representaremos el punto (2,x_4).
Puede demostrarse que para cada valor de k entre 2 y 3 el sistema tiene un único punto atractor: (k;0,5). En la **Figura 8** se ve la representación gráfica de esta situación (en la que para no perjudicar la visibilidad, la escala en el eje vertical no es la misma que la del eje horizontal).

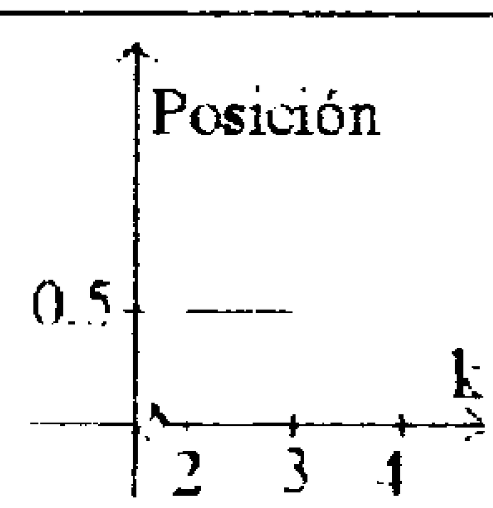


Figura 8

Imaginemos a un matemático que acaba de exponer ante cierto público su demostración de que para k=3 las posiciones del sistema convergen a 0,5. Imaginemos también que algún espectador le pide una demostración práctica del hecho. Nuestro científico accede con gusto y, confiadamente, anuncia que tomará x_0 = 0,4. Dice también, con mucha sensatez, que para abreviar la escritura truncará los números en el tercer decimal. Toma una calculadora y anota en el pizarrón los resultados que va obteniendo:

0,4 - 0,72 - 0,606 - 0,717
0,609 - 0,714 - 0,612 - **0,711**
0,615 - 0,711 - 0,615 - ....

El sistema entra en un ciclo formado por dos puntos (ciclo de período dos). Por lo tanto, el conjunto formado por (3; 0,615) y (3; 0,711) es un *conjunto atractor* del sistema.
"¡Un momento!", dice el espectador que pidió la demostración práctica (del que ya sospechamos que es un físico que se infiltró en la conferencia), "¿No era que las posiciones convergían a 0,5? ¿No es {(3; 0,5)} el *único* conjunto atractor si k=3?"
Desde luego que el matemático no se deja vencer tan fácilmente. Atribuye el extraño comportamiento del sistema al excesivo truncamiento de los decimales y, acto seguido, anuncia que volverá a hacer los cálculos con x_0 = 0,4, pero ahora truncando en el cuarto decimal:

0,4 - 0,72 - 0,6048 - 0,717 -
0,6087 - 0,7146 - 0,6117 -
0,7125 - 0,6144 - 0,7107

El sistema oscila hacia arriba y hacia abajo, pero los valores en cada oscilación son menores que en la oscilación previa. El matemático se siente ahora más tranquilo ya que, sin duda, al cabo del tiempo las oscilaciones se irán aproximando a 0,5.
La centésima posición es 0,6424 y luego sigue:

0,6424 - 0,6894 - **0,6423 - 0,6894 - 0,6423 - 0,6894 - ....**

¡El sistema vuelve a entrar en un ciclo! Peor aún ¡en un ciclo completamente diferente del anterior! ¿Cómo es posible que, comenzando con el **mismo número** aplicando una y otra vez **la misma función** lleguemos a **dos ciclos diferentes** cuando, además, se supone que todas las posiciones deben converger a 0,5?

Si tomamos cinco cifras decimales, al cabo de unos 430 pasos, el sistema entra en el ciclo: 0,67806 - 0,65487.

"Damas y caballeros", anuncia el físico triunfante, mientras al matemático lo llevan dos enfermeros, "estamos aquí, cara a cara, frente al fenómeno del **caos**".

Debemos en verdad hacer justicia al matemático y decir que su afirmación era realmente correcta: para k=3 todas las posiciones *convergen* a 0,5. Sin embargo para que esta convergencia sea observada en los ejemplos concretos, se deben hacer los cálculos con *todos* los decimales todo el tiempo.

Ahora bien, cuando se trabaja en la predicción del clima mediante métodos numéricos (ver Aχioma N° 8) el estado de la atmósfera se describe mediante una serie de números que dan el valor de las diversas variables significativas del sistema (velocidad y dirección del viento, temperatura, etc.). Cada uno de estos conjuntos de datos forman las coordenadas de un punto en el espacio de fases de la atmósfera.

Para estimar el estado atmósferico algunos instantes después se va aplicando sucesivamente, a partir de los datos iniciales, una misma función (tal como hacíamos en nuestro pequeño sistema dinámico).

Las funciones que se utilizan en la predicción del clima son mucho más complejas y su sensibilidad a los pequeños cambios por redondeo son mucho mayores (recuérdese lo dicho en Aχioma N° 8 para el clima simulado de Edward Lorenz). Además no resulta posible trabajar todo el tiempo con todos los decimales debido a que, en primer lugar esto exigiría una precisión infinita en la medición de las condiciones atmosféricas y, en segundo lugar, se requerirían computadoras con memoria ilimitada. Ambas condiciones son *teóricamente* irrealizables.

Sin embargo, parece quedar todavía una esperanza; ya que después de todo el matemático pudo *demostrar* (independientemente de toda precisión en la medición o en el cálculo) que si k=3 las posiciones convergerán a 0,5. Por lo tanto para k=3 el sistema *es* completamente predecible. ¿No se podría trabajar en la predicción del clima con métodos teóricos análogos, que sean independientes de la precisión de los cálculos?

Hasta donde se conoce actualmente, la respuesta es que no se puede. La evolución de la atmósfera se describe mediante *ecuaciones diferenciales.* Aún para simulaciones sencillas del clima estas ecuaciones resultan de una complejidad tal que es imposible (**teóricamente** imposible) hallar sus soluciones exactas. Salvo condiciones muy idealizadas (que no se dan en la realidad), el único modo de intentar predecir el comportamiento a largo plazo del sistema es mediante métodos numéricos (ver Aχioma N° 8 y también Aχioma N° 5), por lo que toda esperanza de predecir el clima con precisión a largo plazo es vana.

Veremos en la próxima sección que, inclusive para nuestro pequeño y sencillo sistema dinámico, toda esperanza de predecibilidad se pierde si consideramos valores de k mayores que 3.

Atractores extraños.

Analicemos entonces el comportamiento del sistema dinámico de la sección anterior cuando k es mayor que 3.

Si tomamos por ejemplo k=3,2 al cabo de un tiempo el sistema quedará oscilando entre dos valores. Se trata, en apariencia, del mismo comportamiento que hallamos en nuestros ejemplos para k=3. Sin embargo, mientras que en aquel caso se trataba de una consecuencia de los errores de redondeo, cuando k=3,2 este ciclo de dos números es *real*, refleja el verdadero comportamiento del sistema. Para 3,2 hay un atractor formado por dos puntos.

Si se incrementa k a 3,5 el atractor de período dos también se hace inestable y aparece un ciclo de período cuatro. En 3,56 el período se duplica nuevamente y tenemos un atractor de ocho puntos. En 3,567 el atractor tiene ya 16 puntos, y a medida que k se incrementa la longitud de los períodos se va duplicando progresivamente: 32, 64, 128,.. En el valor máximo k=4, cualquiera sea el x_0 inicial, los sucesivos valores de x_n recorrerán densamente todo el intervalo [0,1]. Esto significa que prefijado un punto $x \in [0,1]$, si se espera el tiempo suficiente, los valores de x_n pasarán tan cerca de x como se quiera. *Todo el intervalo* ha llegado a ser un atractor.

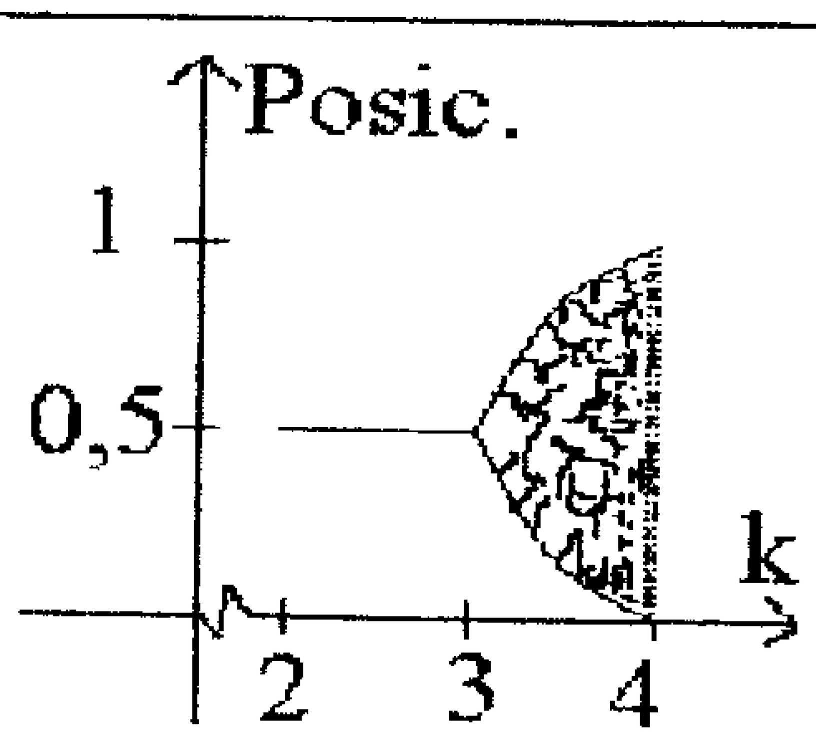


Figura 9

Si representamos gráficamente en el espacio de fases los datos anteriores, observaremos un atractor cuya estructura es esencialmente similar a la del *árbol binario* descripto en la primera nota de esta serie (ver Aχioma N° 7).

El atractor del sistema en el espacio de fases es un *fractal*. Al mismo tiempo, cuando k es mayor que 3 el sistema aumenta exponencialmente su sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales (y a los errores por redondeo), en otras palabras se vuelve *caótico*.

Esta aparición simultánea de un sistema caótico y de un atractor fractal no es casualidad ya que, en general, **el atractor en el espacio de fases de cualquier sistema dinámico caótico tiene estructura fractal**.

Debemos decir que en el caso de nuestro pequeño sistema dinámico el atractor es aún más complejo de lo que hemos indicado. En efecto, por ejemplo para k=3,835 aparece un período de orden *tres* y si k se va incrementando *muy* lentamente van apareciendo ciclos de períodos 6, 12, 24, etc. Para k=3,739 el período es cinco e, incrementando k muy lentamente se produce una nueva duplicación: ciclos de período 10, 20, 40, etc. (Se observará que la sensibilidad extrema no se refiere sólo al valor de x_0 sino también al valor de k).

El atractor del sistema no se parece en verdad al árbol binario, sino más exactamente a una superposición de infinitos fractales cuya estructura es similar a la del árbol binario.

Si un sistema dinámico tan sencillo puede dar lugar a una estructura tan compleja, el lector tal vez pueda imaginarse la complejidad que pueden alcanzar sistema dinámicos como los que representan el estado de la atmósfera o del sistema solar.

El microclima simulado de Lorenz tiene también, desde luego, un atractor fractal (en su espacio de fases, que es de tres dimensiones), conocido como el *atractor de Lorenz*.

En el comienzo de los estudios sobre el fenómeno del caos, a estos atractores se les dio el nombre de *extraños* (debido, por supuesto, a sus muy raras propiedades). Este nombre es tan acertado que, hoy en día, se sigue usando la expresión **atractores extraños** para referirse a los atractores fractales de los sistemas caóticos.

La topología y Poincaré.

En 1887, el rey Oscar II de Suecia ofreció un premio de 2500 coronas a quien fuera capaz de responder a la pregunta: ¿es estable el sistema solar?

Henri Poincaré (1854 - 1912), para muchos el matemático más brillante de su época, intentó resolver el problema del rey Oscar. No lo logró, pero lo atacó con tanta profundidad y tanto genio que el premio le fue concedido de todos modos. Para abordar el problema del rey Oscar Poincaré creó la *topología* (a la que él llamó *analysis situs*, estudio de la posición) y posteriormente la aplicó a muchos problemas físicos extraordinariamente complejos.

Después de Poincaré, el estudio de la topología se volvió cada vez más abstracto, más alejado de la realidad y de las aplicaciones prácticas. Los físicos de la generación posterior a Poincaré la consideraron una rama *inútil* de la matemática.

Pero ahora la situación ha cambiado nuevamente y, casi exactamente un siglo después de su creación, la topología vuelve a estar en el centro de las discusiones de los físicos de avanzada. Porque es mediante el estudio de las propiedades *topológicas* de los atractores extraños como se puede llegar a tener una esperanza de comprender el comportamiento de los sistemas caóticos.

Cuando la dinámica es caótica, la evolución del sistema sólo puede predecirse exactamente si las condiciones iniciales se conocen con precisión infinita. Por el contrario es posible hacer predicciones muy precisas, no del comportamiento exacto del sistema a largo plazo, sino de su naturaleza cualitativa general. Por citar un ejemplo, no se puede predecir la temperatura que hará dentro de un mes, pero quizás sea posible determinar con exactitud si el planeta globalmente está sufriendo un recalentamiento o un enfriamiento (aunque quizás no pueda decirse qué tan rápido ocurrirá).

Muchas veces ocurre que si se ejecuta la misma simulación numérica de un sistema dinámico, partiendo de los mismos valores y calculando con la misma precisión, pero en dos computadoras de *marca* diferente se llega a resultados completamente distintos (por diferencias en el sistema operativo de las computadoras). Si estuvieran prediciendo el tiempo, una de ellos predeciría lluvias y la otra una sequía.

Si cien personas dibujan el atractor de Lorenz, muy probablemente llegarán a conjuntos de puntos diferentes. Sin embargo, no importa con qué método hayan hecho los cálculos, todos verán la misma forma básica. Es decir, todos verán formas *topológicamente equivalentes* del atractor. Es por esa razón que las leyes físicas relativas a los sistemas dinámicos caóticos deberán formularse en términos de las propiedades topológicas de sus atractores extraños, ya que son éstas, en verdad, las propiedades que pueden llegar a verificarse experimentalmente.

La topología y los fractales (dos *abstracciones* matemáticas) resultan ser la clave del comportamiento de casi todo lo que nos rodea.

Cerraremos con una cita de Richard Voss, experto en computadoras y pionero en el estudio de los fractales, quien ha escrito:

"Las mentes imaginaron monstruos extraños sin equivalente en la naturaleza. Habiendo descubierto estos monstruos y habiéndose felicitado ellos mismos por su creatividad superior a la de la naturaleza, los matemáticos desterraron a estas bestias patológicas a un zoo matemático. No podían imaginar el uso y el interés de los científicos de la naturaleza por sus creaciones. La naturaleza, sin embargo, no podía ser menos que ellos."

Notas: (1) Físicamente resulta más adecuado trabajar con el *momento* o *impulso* (que es el producto de la masa por la velocidad) que simplemente con la velocidad. Sin embargo, para nuestros propósitos esta consideración no es esencial.

(2) Aunque pueda parecer que estas simplificaciones son demasiado extremas, hay en verdad sistemas dinámicos cuyo estudio es de interés y que responden a las características especificadas. Por ejemplo, supongamos que estamos estudiando la evolución del número de individuos en una cierta población (animal, vegetal o humana) en la que los cambios son lo suficientemente lentos como para que sea razonable realizar solamente un recuento de población cada año. Por lo tanto, a los efectos del estudio de este sistema dinámico, el tiempo transcurre en forma discreta (ya que se hacen mediciones en instantes aislados y no interesa lo que ocurre en los tiempos intermedios) y su estado (la cantidad de individuos) se describe con un único número.

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* BRIGGS, JOHN; PEAT, DAVID - *El espejo turbulento* - Barcelona, Salvat, 1994.
* EKELAND, IVAR - *Al azar* - Barcelona, Editorial Gedisa, 1991.
* STEWART, IAN - *¿Juega Dios a los dados?* -Barcelona, Grijalbo Mondadori, 1991.

Los problemas de aprendizaje en el nivel medio

El 1° de octubre próximo pasado, la Comisión de Cultura del Departamento de Matemática del I.S.P. "Joaquín V. González", convocó a una charla informal sobre metodología, dirigida esencialmente a los alumnos de 3° y 4° año.
Con la presencia de los profesores de la especialidad de ambos años y turnos, Gustavo Barallobres, María José Guasco, María Cristina Maristany y Fabián Valiño (actualmente de licencia en el cargo), se dio inicio a la misma, actuando como moderadora la Prof. Aída Rotbart, especialista del área Ciencias de la Educación.
La masiva presencia del alumnado, sin precedentes, demostró la inquietud y el grado de angustia que provoca el acercamiento a la etapa de culminación de los estudios realizados: el ejercicio de la profesión docente, lo que es sinónimo de poner a prueba los conocimientos adquiridos, ser capaz de elaborar otros nuevos y avanzar, con la experiencia cotidiana, en el replanteo de soluciones nuevas a viejos problemas que, cada día, se han ido agudizando por motivos propios y ajenos a la ciencia Matemática.
Transcribimos sólo el mensaje inicial con que abrieron la charla los integrantes del panel.

Aída Rotbart: Como es una charla informal, tal el título de la convocatoria, vamos a tratar de unificar preguntas sobre una problemática que nos está preocupando a todos, a saber, ¿cómo respondemos a las dificultades de la realidad educativa en lo concerniente al aprendizaje de la matemática?
Dicho en otros términos ¿qué nos pasa cuando nos enfrentamos con el aula y las dificultades que esa aula nos está ofreciendo? Para eso, nadie mejor que los profesores de Metodología que están orientando el trabajo de ustedes, o la puesta en verdad de los aprendizajes recibidos en el Instituto.
Claro que hay dos verdades; una, la que formulamos desde la teoría y otra, la que contrasta con la realidad general: social, política, educativa... Para empezar con las preguntas va a intervenir la Prof. María Cristina Maristany

María Cristina Maristany: Lo que quiero comentar, primero, es que todas las apreciaciones que voy a hacer son solamente apreciaciones desde la tarea, tanto de profesora de educación media como profesora de práctica; no tengo como sustento ningún trabajo teórico propio de investigación en el terreno educativo acerca de la problemática. Así que les voy a hablar desde la observación directa y sí, he leído trabajos de personas que se dedican a hacer este tipo de investigaciones. Hecha esta salvedad, quiero comentar que las dificultades que se observan en el aula tienen que ver, en primera instancia, con una realidad (como dijo aquí la profesora) de la cual la escuela es un espejo. En esa realidad, el conocimiento como tal se encuentra desvalorizado. Los bienes se consideran generalmente como bienes de consumo, y estas cuestiones tienen que ver con las actitudes que tienen los alumnos en general frente al aprendizaje de todas las materias. Cuando se trata especialmente de aprender matemática las dificultades pasan (dicho por los propios alumnos, a los que he consultado especialmente en estos días, al saber que íbamos a tener esta charla) porque ellos hacen una distinción, entre lo que es aprender y lo que es entender (hablé con alumnos de primero hasta de quinto año) y ponen el acento en que **en la disciplina matemática**

hay que entender. Entonces, yo he preguntado ¿cómo es eso? ¿cómo es que no entienden? Parecería que aunque hay muchos trabajos realizados sobre la didáctica de las ciencias sociales, todavía se conserva más la acumulación de datos del tipo memorístico en esas disciplinas que en las disciplinas que tienen una aplicación, donde los alumnos tienen que desentrañar una información, establecer relaciones, sacar sus conclusiones, validar sus resultados. Los alumnos presentan dificultad en cuanto a lo vasto que es el contenido matemático y se olvidan de conocimientos que han sido tratados en las clases. Les cuesta, en algunas oportunidades, recortar el dominio de aplicación de alguna propiedad o de alguna relación. En otras, profundizan exclusivamente en algún aspecto de un concepto y les cuesta hacer funcionar ese concepto en cuanto a otras propiedades que a lo mejor no son las que ellos reconocen hasta ese momento. La mayoría de las dificultades, tienen que ver fundamentalmente con dos cuestiones: con esa cuestión de que **el alumno quiere aprobar las materias y no le interesa aprenderlas sino aprobarlas para verse promovido o terminar su ciclo medio**. Y también, con esta cuestión de que **tiene que conocer temas muy vastos** y algunas veces, según cuentan los propios alumnos, les cuesta, frente a la lectura de un problema, empezar a trabajarlo, o sea, saber por dónde. Saben que una cuestión matemática se puede resolver por distintos caminos. Algunos de ellos comentan que el hecho de existir diferentes posibilidades para acceder a un resultado o a una justificación, los desorienta y hacen que les cueste empezar a trabajar en algo. Si uno les da alguna punta para empezar, a lo mejor lo hacen.

Todas estas cuestiones tienen relación directa con la forma en que se enseñan los temas. Los alumnos se olvidan y nosotros, muchas veces, no hacemos una integración constante de los contenidos que se van desarrollando como para tenerlos todos presentes, poniendo el acento en el que se está tratando en ese momento, pero de alguna manera evocando constantemente aquellas cuestiones que no se están tratando.

Con respecto a que recortan un aspecto de un concepto, creo que pasa exactamente lo mismo. Para prevenir esto, una de las cuestiones cuando se enseña cualquier contenido, es tratar de buscar todas las formas que puede asumir ese concepto cuando se lo pone en juego en distinto tipo de problemas. Otra cuestión que facilita la no pérdida del concepto es trabajarlo desde distintos puntos de vista, lo que llamamos de alguna manera los marcos: trabajarlo desde lo algebraico, desde lo geométrico, desde lo físico, con representaciones. Les cuesta validar, se confunden la demostración con la ejemplificación.

Todo esto, vuelvo a insistir, creo que tiene relación con la practica

También insistimos en que, muchas veces, **hay una disociación entre los criterios que se usan en la evaluación y los criterios que se usan durante el período de aprendizaje.** Cuando existe esa disociacion se tiene en cuenta un resultado que apunta solamente a un mecanismo y se deja de lado todo el proceso que hizo el alumno y no se tiene en cuenta que un concepto no queda acabado de conocerse en uno de los cursos, sino que se retoma en otro para profundizarlo, para intensificar su estudio y para ir viendo algunas cuestiones que fueron quedando en el camino. Al mismo tiempo, exigencias que se tienen durante el aprendizaje, en cuanto al razonamiento, fundamentación, o justificación y demás, quedan de lado por cuestiones de tipo "práctico" durante las evaluaciones.

Gustavo Barallobres: Lo que quería decir es que la pregunta tal cual como fue planteada, *por qué los alumnos tienen dificultades de aprendizaje en las matemáticas o por qué razón,* yo no la puedo responder. Es bastante complicado responderla porque creo que **habría que definir qué quiere decir dificultad de aprendizaje** y creo que definir qué quiere decir esto, está muy vinculado con qué significa para cada uno de nosotros el aprendizaje. La problemática está muy ligada a la relación que se da alumno-docente y las concepciones de cada uno de ellos. Es decir, qué significa para un docente enseñar y qué significa para un docente, y también para el alumno, aprender. Me gustaría decir algunas cosas que, me parece, permiten distinguir qué sería, desde nuestro punto de vista, una dificultad de aprendizaje. A lo mejor es otra cosa de la que estoy hablando; yo no voy a dar respuesta al porqué pero me parece que para dar respuesta al porqué primero hay que saber qué significa una dificultad o, por lo menos, desde esta línea, qué es una dificultad en el aprendizaje. Me parece que una línea en la que nosotros nos ubicamos para entender qué es una dificultad de aprendizaje requiere primero tener una idea de qué es el error y cuál es la función que cumple el error en las clases de matemática. Habitualmente, el error está considerado como algo malo o como algo que hay que evitar y a nosotros nos parece que esto no es así. Es decir, el error puede ser un punto de partida y a veces **el error es inevitable; no depende pura y exclusivamente de un problema del alumno sino que está metido dentro del proceso de construcción del conocimiento.** Pongo un ejemplo que ya lo trabajé bastante pero que es el más conocido o el habitual: cuando los chicos aprenden los números naturales en la escuela primaria, aprenden que la multiplicación agranda, independientemente de que el maestro se los diga o no. Está probado que aún en clases donde el maestro no habló sobre que multiplicar agranda, los alumnos se forman esa concepción; ahora, cuando nosotros pasamos a los racionales, eso no funciona más. Entonces ahí aparece como un error y no fue posible evitarlo; es decir, estaba metido en esta construcción interna del conocimiento. Si el docente asume como postura que ése es un error, que la culpa es del alumno porque no entiende nada, es desconocer que este error es inevitable que aparezca y es desconocer que hay que hacer algo para que, si no aparece, provocarlo y rechazarlo. Entonces, me parece que este es un punto esencial: entender o poder distinguir cuándo una dificultad está colocada en el alumno y cuándo una dificultad puede ser producto de un proceso en la construcción del conocimiento. También me parece importante, desde el trabajo que nosotros hacemos, que es, a grandes rasgos, inventar, crear o diseñar un medio artificial donde, de alguna manera, el alumno interactúa con este medio para producir respuesta a ciertos problemas. Para nosotros el conocimiento surge a raíz de alguna pregunta o algún cuestionamiento o algún problema que le da sentido. Pero, desde este punto de vista, el aprendizaje es local. Esto significa que se opone a una concepción de aprendizaje habitual, que es que el docente decidió un día enseñar inecuaciones y que lo que enseñó ya se tiene que aprender o es acabado. Es decir, es muy difícil, desde el punto de vista del docente, admitir que lo que está enseñando puede ser provisorio y que puede funcionar por un tiempo pero que en un determinado momento, puede no funcionar más. Voy a poner un ejemplo concreto: yo estoy trabajando ahora en un curso con inecuaciones; empezamos trabajando con ecuaciones y pasamos a trabajar con inecuaciones. Pensamos que hacer un trabajo previo con todo el tema de leyes (que si yo multiplico a ambos miembros de una desigualdad por un negativo cambia, etc.) podían ser elementos para trabajar el tema de las inecuaciones; no para trabajar solamente el algoritmo sino justificar por qué una inecuación se resuelve de una manera o de otra. Y sin embargo nos dimos cuenta que cuando le presentamos a los chicos una inecuación, fueron por un camino totalmente distinto al que nosotros habíamos pensado.

...Nosotros comenzamos trabajando con otro ejemplo: $-3.x < 6$ (1) y después $-3.x+5 < 6 + 5$. Lo que los pibes se dieron cuenta es que, en el fondo, primero resolvían una igualdad y que a partir de tener la igualdad ellos decidían cuales eran mayores y cuales eran menores. Ahora, esto es válido solamente si las dos son lineales; si no son lineales este método no funciona y éste es el punto clave. Es decir, si yo como docente acepto que hoy, y con lo que conocemos y con lo que tenemos, esto puede ser válido a pesar de que más adelante este mismo método, cuando aparezca otra problemática puede quedar destruído; si yo acepto esto, me puedo ubicar dentro de esta concepción de aprendizaje. Para nosotros esto es un conocimiento que hoy es válido y es provisorio pero que mañana puede ser destruído. Yo creo que esto es muy importante, porque cuando uno le presenta al chico, después, $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ y quiere usar el mismo método, ahí va a aparecer necesariamente un error porque él viene trabajando con (1). Si uno no entiende que ese error vuelve a ser un problema de aprendizaje del alumno es muy difícil analizar dichos problemas. Quería decir que la didáctica, o por lo menos lo que yo conozco de ella, hoy no está en condiciones de dar respuestas a estos problemas. La didáctica, y esto lo quiero decir en el sentido que de alguna manera nos alivia, trata problemas vinculados con un conjunto de personas, con una clase y con una organización particular de la clase, pero no trata problemas individuales de aprendizaje de cada uno de los alumnos. Entonces, en ese sentido, todavía no hay posibilidades de respuesta. Sí creo que, a pesar de esto, una de las tareas nuestras como docentes, debería o podría ser, frente a una dificultad específica, algunas de las cuales comentó la profesora, intentar indagar por qué esta dificultad se produce. Es decir, si uno intenta indagar desde dónde puede llegar a venir esta dificultad, uno puede armar algún tipo de actividad para trabajar justamente con esta dificultad. Si uno no indaga esto, la respuesta habitual que se escucha en el aula es "...Y, tendrías que ir a un profesor particular". Pareciera ser que lo que hay que hacer es más de lo mismo y no buscar la problemática o la raíz que causa este problema y a lo mejor lo que hay que trabajar es otra cosa. No es más de lo mismo que se está haciendo, porque el profesor particular lo que hace es darle mucho más de lo mismo. Es decir, es muy difícil que él sea el que se encargue de indagar, porque quien conoce la historia del alumno es el que está con él en el aula.

Fabián Valiño: Yo tenía algo que decir encuanto al tema del conocimiento matemático y temí quedar fuera de contexto de esta charla sobre las dificultades del aprendizaje de la matemática. Pero ahora el Prof. Barallobres me dio justo el pie para comenzar a trabajar con este tema. Nosotros, como docentes, lo primero que tenemos que tener en claro es que sabemos que hoy los chicos no tienen interés, sabemos de la cultura "light", sabemos de la cultura del "zapping", donde el chico usa el control remoto, cada cinco minutos pasa a otra cosa, está acostumbrado a eso. El problema es qué hacemos para revertir eso o cómo hacemos carne propia eso. Y entonces, lo que se me ocurrió pensar era hoy hablar sobre tres tipos de conocimientos al que el alumno se tiene que enfrentar sí o sí, que son: un conocimiento cotidiano, que es el conocimiento que tenemos todos, el conocimiento que nos sirve, el conocimiento con el cual trabajamos en la vida, el conocimiento con el cual sobrevivimos (porque ustedes saben bien que cuando compran una licuadora o cuando compran una procesadora dice: prenda el botón, toque tal cosa, enchufe tal otra, ponga, pero cuando uno nace no tiene un instructivo de cómo vivir, porque sino sería facilísimo); otro conocimiento, que es el escolar y otro conocimiento, que es el científico. Lo que pretendemos nosotros como docentes es transformar ese conocimiento escolar en conocimiento científico, vía matemática, como siempre. El problema es si eso es tan fácil como parece, y el problema es qué tan malo es el conocimiento cotidiano, qué tan bueno es el conocimiento científico y entre medio todas esas relaciones que se forman. En cuanto al conocimiento cotidiano, no tengo mucho que decir: en realidad, está formado por estas teorías que los teóricos llaman implícitas que son las teorías del hacer cotidiano, que me sirven, como ya dije antes, para la vida. Pero ese mismo conocimiento cotidiano que tiene el hombre de la calle, el hombre común, cuando el chico entra al colegio (que también es hombre de la calle como tal) pretendemos que se transforme en conocimiento científico, y aquí surgen grandes problemas, ¿por qué? Podemos pensar que la labor que realiza el científico es la misma que nosotros, como docentes, podemos transmitirle a nuestros alumnos. Es decir, el alumno tiene que construir un conocimiento que le es distinto. Nosotros, como docentes, tenemos que partir de lo que él tiene para llegar a lo otro. El problema es cuáles son estas herramientas y el problema es ¿podemos hacerlo siempre? Independientemente de las dificultades de los aprendizajes, la ciencia matemática es difícil por sí. La ciencia matemática, ustedes lo saben mejor que yo, trabaja sobre entes ideales -no hay entes concretos, no hay triángulos, no hay el número uno, el número cuatro-. Hasta que el chico entiende eso pasan muchísimos años, si lo entiende. Entonces, pretendemos nosotros formar "científicos de las matemáticas" cuando el chico termina su secundario. Primero: yo creo que lo que pretendemos ahí es dar una visión simplificada, recortada y hasta incluso falseada de lo que es la ciencia. ¿Simplificada por qué? Porque estoy seguro que el chico no tiene el mismo contexto que tuvo el científico para construir; falseada, porque creemos que la ciencia es absoluta, las leyes científicas son algo que comienzan y que terminan y llegan a un punto, a un climax donde ya no hay más discusión. Hoy en día, y ya desde hace unas cuantas décadas, los filósofos de la ciencia encontraron que esa idea de ciencia que proponía Mario Bunge, de ciencia aséptica, que no contamina ni se contamina, está muy lejos de ser cierta. Hoy en día estamos hablando de rupturas epistemológicas, la ciencia crece por falsaciones, por encontrar errores que es lo que dijo Gustavo, "el error hace crecer a la ciencia". Entonces lo que yo quería transmitirles hoy es lo siguiente: ese constructo que es la ciencia, los docentes ¿estamos en este momento capacitados para transformar ese conocimiento cotidiano que tiene el alumno en conocimiento científico? ¿Nos faltan algunas herramientas o de pronto, lo que estamos enseñando en el colegio no es importante?. Esta cuestión va un poquito más allá de la pregunta de los aprendizajes, porque tenemos que tener en cuenta que el chico viene con un bagaje de conocimientos, bueno, malo, sirve o no sirve. Es lo que dice muy claramente Sábato cuando intenta explicar lo que sucede con la trasposición didáctica (que para los que no oyeron hablar, es cómo hacemos para bajar esos contenidos científicos al aula) y cuenta que un chico le decía: "Quiero que me explique la Teoría de la Relatividad". "Bueno, la Teoría de la Relatividad vincula espacio, tiempo con unas geodésicas, bla, bla, bla, bla". El chico dice: "No entendí nada". Va simplificando, en sucesivas explicaciones, la teoría. Y el chico dice: "Entendí perfectamente". A lo cual el otro responde: "Perfecto, pero esa no es la Teoría de la Relatividad". Entonces, la idea que quería dejar es que tenemos tres conocimientos y no podemos llegar a pensar que el conocimiento escolar es un mero pasaje de un conocimiento cotidiano, de un bagaje que tiene el chico a un conocimiento científico. Hay muchos pasos que al chico le están faltando, muchos pasos que nosotros, como docentes, no sabemos a veces transmitir. Está lo que se llama el método genético: cómo el científico hace para llegar a la formulación, hay toda una serie de construcciones que llevan a ese procedimiento. El problema es, y lo dejo como una pregunta ¿podemos siempre pasar del conocimiento cotidiano al científico, vía conocimiento escolar, independientemente de las dificultades que ocasione el aprendizaje de la matemática como ciencia?

María José Guasco: Primero voy a aclarar lo mismo que aclararon algunos de los colegas: yo no tengo respuesta, no sé, no puedo contestar a la pregunta, a pesar de que yo la sugerí, les dije que no sabía de qué manera podíamos aclarar que, seguramente, no íbamos a poder responderla. Lo que busqué fueron algunos pequeños ingredientes, algunos factores que podrían influir en esas dificultades. No pensé mucho en lo que dice Fabián Valiño porque me parece, como él mismo lo dijo, que en ese caso estamos enfocando, ¿cómo enseñamos nosotros? Yo me pregunto si no hay dificultades en el aprendizaje que están un poco fuera, o que son un poco extrañas a cómo enseñamos nosotros. Por otra parte, para tratar de ir buscando esos ingredientes o pequeñas, respuestas traté de separar un poco lo que puede ser una dificultad de aprendizaje, de cualquier asignatura de la escuela media, de historia, de biología, de lengua, etc. con lo que puede resultar una dificultad que se presenta especialmente en el aprendizaje de la matemática. Parecería que la cultura "light", el "zapping", el desinterés, por otra cosa que no sea el, "bueno, yo quiero aprobar la materia", es lo que más les interesa; además, lo presionan en la casa "¿Y? ¿aprobás o no aprobás? ¿cuántas vas a tener para marzo? ¿vas a repetir o no?" Parecería ser que eso es común también en las otras disciplinas de la escuela media. Sin embargo, matemática tiene en algunos momentos, dentro de la enseñanza, dentro del aprendizaje, para los alumnos, para los padres, para las familias, características especiales. Si Fulanito va mal en historia... y bueno, lo pongo a estudiar, lo encierro, después le hago las preguntas o le pongo un profesor particular para que le tome la lección y Fulanito, tenemos alguna posibilidad o alguna garantía de que va a aprobar. Que le vaya mal en Matemática es una desgracia familiar, porque es distinto; primero, el padre no se siente capaz de decir lo pongo a estudiar y después le tomo, salvo que tenga una preparación o una facilidad especial para la Matemática.

...Pensar, comparar, analizar, conjeturar, en Historia o en Geografía o en Literatura, etc. también se convierte en una materia difícil, con dificultades que esa enseñanza tradicional no tenía. Pero Matemática siempre presentó dificultades para el aprendizaje, antes y ahora. O sea, a mí me parece que las dificultades en Matemática no son sólo aquí y ahora. Son, por un lado, más o menos de siempre, y por otro lado, no sé si es un consuelo, pero parecería que de muchos países. Uno lee las revistas sobre educación matemática francesa y expresan el mismo desconsuelo que nosotros, que uno evalúa y los chicos no han aprendido nada. Yo traté de buscar dos o tres ingredientes o pequeños factores: unos, los busqué dentro de las características propias de la Matemática, algunas de las cuales he nombrado. La Matemática es una ciencia formal, es casi la única ciencia formal que los chicos van a estudiar en la escuela, a lo sumo tendrán un poquito de lógica en quinto año y aparece mucho más tarde, nadie pretende que aprendan lógica a los 12 años; sí pretendemos que aprendan matemática y desde mucho antes y me parece bien, no estoy diciendo que no. Es una ciencia abstracta, es una ciencia que se maneja con estructuras, yo quería leer lo que dijo el profesor belga Servais hace 20 años: *"La Matemática es la más abstracta de las actividades mentales, la más virtual respecto a lo concreto, es la más lógica, la más relacional, vacía de contenido, la más esquemática, la más formal, por sus figuras, sus diagramas sus formalismos, sus algoritmos, la más sistemática y más organizada de forma hipotético-deductiva"*. A lo mejor es un poco exagerada, lo de "vacío de contenido" es muy propio de los años en que lo escribió; a lo mejor hace demasiado hincapié en lo formal, pero la matemática sigue siendo una ciencia formal y eso implica una dificultad que está más allá de otras dificultades que pueden presentar otras ciencias. No digo que sea más difícil, porque si uno captó eso a lo mejor es más fácil estudiar Matemática que estudiar Historia en serio; pero es un hecho que esto presenta una dificultad grande para los chicos. Por otro lado, no sé si soy clara con eso, pero me parece que a veces lo que los chicos no captan es que tienen que captar una estructura hasta en lo pequeño...

Otra característica de la Matemática es que es acumulativa. Es muy difícil si uno, en algún momento de su estudio se atrasó por diversas razones que después pueda entender lo que sigue; es muy difícil en

Matemática entender una parte, un capítulo si uno no entiende algo de los otros. Por supuesto, yo no quiero decir que las demás ciencias no lo son, yo no sé cómo estudiar la Geografía Económica si no conozco el clima, el tipo de suelo, etc. de un país, pero es menos acumulativa. Uno puede en Física estudiar Calor sin haber estudiado Electricidad u Óptica, es un hecho, es así. Matemática resulta acumulativa y si uno se perdió después es más difícil. Son dos características de la Matemática que me parece que pesan en las dificultades de aprendizaje. Otra causa podría estar en los contenidos que nosotros elegimos enseñar y, en ese sentido, creo que no hemos cambiado mucho respecto de cómo enseñábamos antes; cambió el enfoque de la enseñanza de la Biología, de la enseñanza de la Historia, etc. pero no ha cambiado mucho el de la Matemática. Pero esto no pasa por si vamos a enseñar conjuntos o no vamos a enseñar conjuntos. Viene por otro lado. Cada vez más, la Matemática que estamos enseñando es casi toda "algebrizada" que en la práctica no quiere decir que estamos enseñando Álgebra, quiere decir que estamos enseñando algoritmos algebraicos de resolución. Entonces uno dice: "No, ahora voy a enseñar geometría", entonces dice: "Si el ángulo alfa mide $2x+5°$ y el ángulo suplementario vale $4x+25°$ ¿cuánto vale x y cuánto valen los ángulos?" O sea, uno puede decir, yo que no entendía ecuaciones ahora tengo que volver a plantear una. Por un lado está bien, si la Matemática es acumulativa uno tiene que relacionar las cosas, pero parecería que toda nuestra enseñanza gira alrededor de las operaciones o de lo algoritmos algebraicos. En 3° año uno factorea polinomios, en 1° ya le dijeron que aprendiera el cuadrado de un binomio y la diferencia de cuadrados; en 5° dice: no, Trigonometría y Análisis. ¿Qué ve de Trigonometría? Y..., especialmente identidades trigonométricas, y otra vez, factorear y sacar denominador común; la diferencia es que ahora no son polinomios pero hay que hacer lo mismo. ¿Qué ve de Análisis? Calcule límites indeterminados: entonces hay que factorear el numerador y el denominador, simplificar, y a ver si así me sale. O sea, parecería que de todo lo que tenemos que enseñar nosotros, en vez de abrir el espectro, lo cerramos y todo termina siendo un "cálculo algebraico". Probabilidades, no está, o está poco y cuando está, "demuestre que el número combinatorio no sé cuanto es igual a..."

Entonces, yo no le doy a cada alumno la oportunidad de decir: "Bueno, está bien, en esto tengo dificultades, pero esto otro me gusta, me engancha". Hay chicos que se enganchan más fácil con una parte, pero nosotros no diferenciamos las partes y al mismo tiempo tampoco integramos conocimientos. Pero hay una cosa que tienen en común: es que siempre terminamos en un cálculo algebraico. A mí me parece que **el no abrir el espectro condena a que aquél que tiene dificultad en el cálculo algebraico no puede hacer nada de Matemática** y el que aprendió el cálculo algebraico y fue bueno en eso, hagan la prueba y pregúntenle diez años después y si estudió otra cosa, dice: "pensar que yo era bueno, pensar que no me acuerdo de nada". ¿Qué quedó? ¿qué conceptos hay detrás de ese trabajo que hacemos? Ni siquiera, a lo mejor, el concepto de que muchas situaciones se pueden traducir simbólicamente por medio de una ecuación; si uno después tiene suerte y se acuerda de cómo resolverla puede llegar a resolver la situación.

Hay muchas otras causas, elegí algunas que creo tienen influencia en las dificultades del aprendizaje.

Es un gran honor para Aχioma poder brindar un espacio de reflexión sobre la práctica docente, tan alejada, por lo general, de los asépticos y maravillosos libros y/o cursos de didáctica a nuestro alcance.
Deseamos que la nueva sección que hoy inauguramos, **En el aula**, *resulte de gran utilidad a todos aquellos que, preocupados por lograr un mejor proceso de aprendizaje, investigan métodos, proponen y prueban técnicas diversas, y lo que es más importante, comparten con nuestros lectores sus experiencias cotidianas al frente del aula.*
Como es habitual, los invitamos cordialmente a participar con sus inquietudes, a hacérnoslas llegar para su publicación y ¿por qué no? generar un debate cuyo resultado siempre será positivo, en tanto y en cuanto posibilite el acercamiento entre colegas enfrentados a un único y mismo problema: los qué, cómo y para qué en Matemática.
Damos paso a continuación, a la primera colaboración recibida, titulada:

Sobre el uso de problemas prácticos en la enseñanza

El objetivo de esta breve nota es mostrar una serie de problemas prácticos que pueden ser resueltos con conocimientos muy elementales de matemática, y no por ello dejan de ser interesantes.
He aquí los problemas que seleccioné:

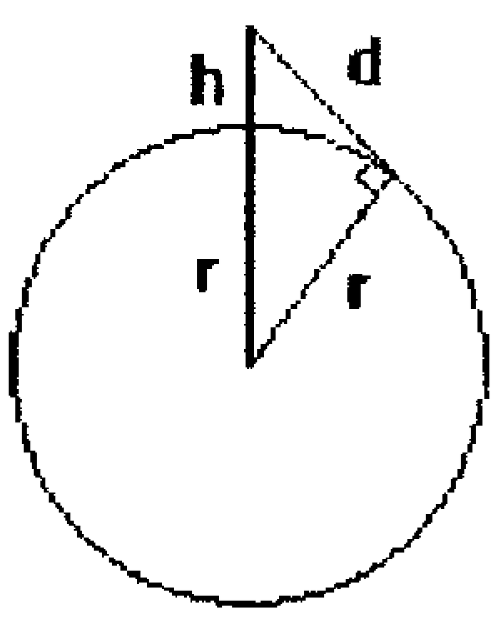
1) Determinar la fórmula que permite calcular el precio de venta de cierta mercadería y factorizarla. Tener en cuenta:
-el costo de la mercadería (C).
-el margen de ganancia, expresado como un porcentaje del costo (M).
-el I.V.A., calculado tanto sobre el costo como sobre la ganancia (I).
-el precio de venta (V).

La fórmula pedida es:
$V=C+M.C+I.C+I.M.C$

Vale la pena hacer que los alumnos encuentren la expresión y vean la conveniencia de factorizarla.
En este problema puede apreciarse la utilidad del factoreo de polinomios con varias "letras".

2) Calcular a qué distancia se halla el horizonte.

Si se hace un esquema, puede apreciarse enseguida el triángulo rectángulo y la lógica aplicación del teorema de Pitágoras.



$(r+h)^2=d^2+r^2$
donde $r = 6.300$ km

Antes que los alumnos comiencen a resolver el problema no estaría mal hacerlos estimar dicha distancia a modo de juego y ver qué tanto se acercan al resultado correcto.
Una vez planteada la relación pitagórica se puede preguntar:
- ¿Se puede despreciar h?
- ¿Varía mucho d, si se estima h en 1,5 m o en 1,7 m.?

3) Averiguar si la población mundial cabe en la superficie de la provincia de Buenos Aires.

Datos:
-superficie de la provincia: 307 000 km².
-cantidad de gente: 6 000.000 000

Todo consiste en averiguar que superficie le corresponde a cada habitante, para lo cual hay que dividir la superficie entre la gente.

$$\frac{307.10^9 m^2}{6.10^9} \cong 50 m^2$$

Como puede verse todos los habitantes del planeta caben en nuestra provincia, suponiendo que toda su superficie sea habitable.

Este problema sirve para que

el alumno pueda tener un mejor manejo de números grandes, que se escapan de la escala que manejamos habitualmente. Es más, en todas las disciplinas en las que se manejan números muy grandes o muy pequeños se usan este tipo de comparaciones.
Además el problema relaciona SIMELA y notación científica.

4) Una señora tiene que preparar una mamadera. En la lata de leche en polvo dice por cada medida de leche, se necesitan 30 ml. de agua. La mamadera está graduada en cm^3. ¿Cómo hace la señora?

La señora piensa: Las botellas de 1 litro dicen 1.000 cm^3, entonces 1 cm^3 es la milésima parte de 1 litro. Además 1 ml. también es la milésima parte de 1 litro.
Por lo tanto 1 cm^3 es equivalente a 1 ml. Entonces por cada medida de leche deben ponerse 30 cm^3 de agua.
Este problema apunta a descubrir las relaciones entre las medidas de capacidad y volumen.

Josefina Elisa Palombella*

* Prof. de Matemática y Astronomia, egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Pitágoras vuelve al ataque

Esta demostración es atribuida al matemático árabe Thabit ben Qurrah, nacido en Siria en el 836 d.C. y muerto en Bagdad en el 901.
Se basa en el análisis de la figura I, en la que se observa que el cuadrado más grnade, que aparece apoyado sobre uno de sus vértices, es el que tiene como lado la hipotenusa del triángulo rectángulo sombreado, mientras que los dos cuadrados más pequeños, que aparecen en la base de la misma, corresponden a los que se construyen tomando como lados los catetos de dicho triángulo.

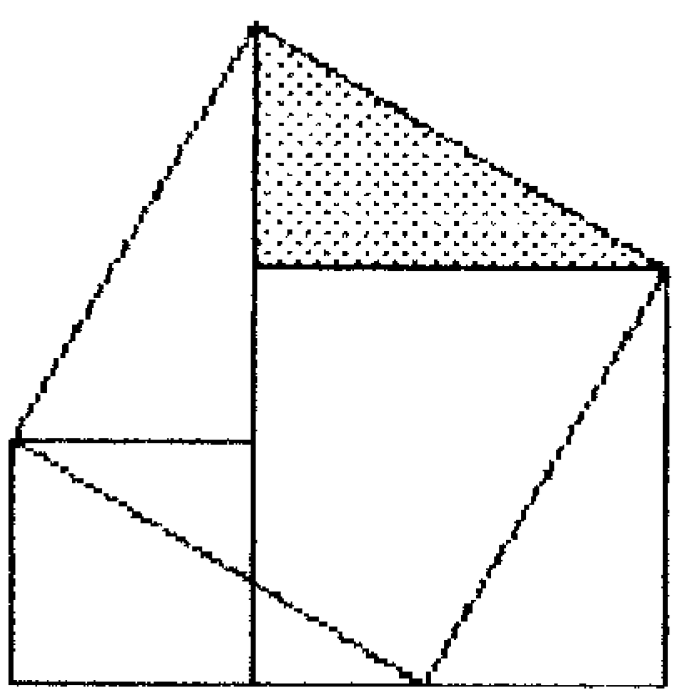


Figura I

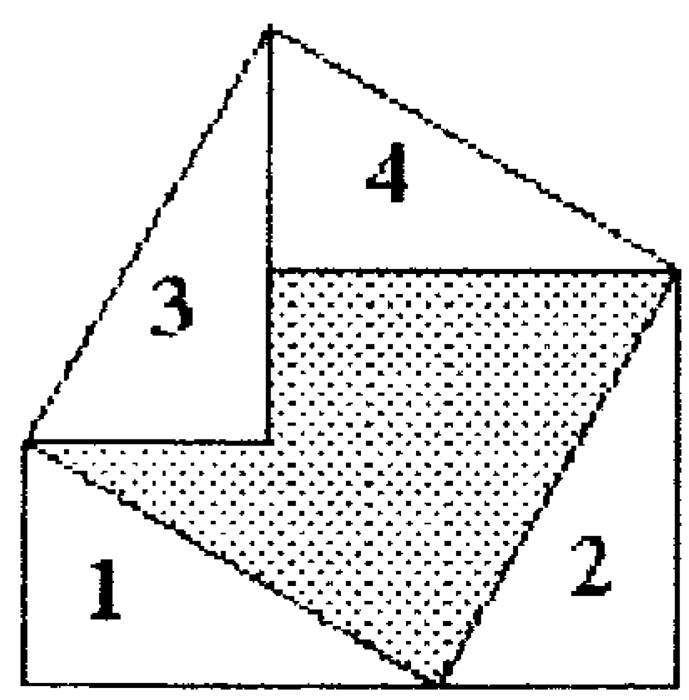


Figura II

La demostración puede resumirse en la siguiente forma: el cuadrado construido sobre la hipotenusa y la unión de los cuadrados construidos sobre los catetos tienen en común la parte sombreada de la Figura II. Los triángulos 1, 2, 3 y 4 tienen la misma área, pues todos son congruentes entre sí. Si a la figura sombreada le agregamos los triángulos 1 y 2, obtenemos una figura cuya área coincide con la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, mientras que si le agregamos los triángulos 3 y 4, obtenemos el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Extraído de *El teorema de Pitágoras*, de Edgardo N. Güichal - Universidad Nacional del Sur - 1994.

El número irracional

A más de uno se le puso la piel de gallina cuando aquel 16 de julio de 1969 se encendieron los motores del Saturno V, en el cual viajaban tres hombres, de lo cuales dos, cuatro días después, caminarían sobre la Luna. Sí, ustedes lo han oído bien, la Luna: un cuerpo de más o menos 6376 km. de diámetro, separado algo así como 384.000 km. de la Tierra y en continuo movimiento.

¡Y qué decir del Taxi Espacial! Lanzado como un cohete al espacio, permanece en órbita alrededor de la Tierra durante un tiempo determinado. Cuando se decide su retorno se encienden los cohetes de frenado, que le hacen perder velocidad, con lo cual el transbordador pierde altura e ingresa a la atmósfera en un ángulo determinado, ya que un exceso o un defecto en la graduación haría que la nave, literalmente, rebotara y se perdiera en el espacio, o bien cayera en picada, incinerándose. Y lo más increíble de toda esta "operación transbordador" es que aterriza como un avión, planeando desde su ingreso a la capa gaseosa, debido a que sus motores no le sirven. Después de algunos minutos, aterriza increíblemente sobre una pista ya determinada.

Toda esta aventura, que a uno le cuesta creer cuando la ve en la televisión o cuando la lee en alguna revista, ya se ha llevado a cabo antes del lanzamiento; sí, en los papeles y computadoras. Fórmulas, gráficos que marean, datos que dan vértigo, son la espina dorsal de los cientos de ingenieros que dan vida a estos monumentales proyectos. Y si uno se detiene a leer algo en ese "mare magnum" científico verá con asombro cifras exorbitantes, muchas comas, muchos ceros, muchos pero muchos decimales; el único vestigio de número natural será, quizá, el que sirva como indicador del número de página al final de la hoja.

Y es que, como vivimos en un espacio curvo, en constante movimiento y, en este caso, tratándose de cuerpos esféricos (o casi esféricos) como lo son la Tierra y la Luna, para casi cualquier cálculo de medición necesitaremos del número π, que no es 3,14; ni 3,1416; ni 3,14159265; ni 3,141592653 58979323846264338327950284 19716939937510...; es π, un "número irracional".

Pero, **¿qué es un número irracional?** Es un número que presenta tantos decimales como uno quiera, pero con la particularidad de que no sigue ningún patrón o período determinado. Por lo tanto, debido a la naturaleza del número irracional, debe buscarse un símbolo que lo represente, ya que no alcanzaría ni todo el papel que existe en la Tierra para escribirlo. Con el número π tenemos ese ejemplo.

Pero también hay otros números irracionales, como $\log_9 73{,}16$; $12/\sqrt{7}$; $\sqrt[5]{-117}$; $\sqrt{2}$; y tan feos de escribir como

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Y en todos los órdenes de la vida, cuanta mayor precisión necesitamos en el desarrollo de un cálculo, mayor cantidad de decimales tendremos que pedirle al número irracional (que por ser número irracional garantiza tenerlos).

Por ejemplo, para enviar el primer hombre a la Luna se exprimió al número π hasta la friolera de 400 decimales.

Entonces es necesario conocer a este nuevo especimen, echar un vistazo a sus propiedades y aprender a manejarlo; saber que los números irracionales, como los ya estudiados números racionales, completan un importante campo numérico conocido como $\mathcal{R}$, el conjunto de los "números reales".

Porque no debemos olvidar que en el nuevo siglo que se avecina, el tema de la ecología seguirá siendo prioritario; y si queremos hacer algo por la ecología, tenemos que entender la Naturaleza, y ella se maneja en números reales. Por eso se dice que la naturaleza es sabia.

Pablo Ingrassia*

* Prof. de Matemática y Astronomía, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Los problemas clásicos griegos (segunda parte)

En el anterior número de Aχioma nos ocupamos de las cuadraturas de las lúnulas con regla y compás, a partir de las cuales se pensó, erróneamente, que podía obtenerse la cuadratura del círculo. Vimos también un par de métodos para realizar esta última construcción, aunque, claro está, "violando las reglas de juego".
En el presente artículo analizaremos los otros dos problemas clásicos griegos: la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

La duplicación del cubo

Origen del problema
El problema en sí, consiste en construir, exclusivamente con regla y compás, un cubo cuyo volumen sea igual al doble del volumen de un cubo dado. Es decir, dado un cubo de arista a, se trata de construir un cubo de arista x tal que $x^3 = 2a^3$.
Este problema tiene un origen mítico. Dos leyendas describen su nacimiento. Una de ellas cuenta que los habitantes del pueblo de Delos, desolados por la adversidad y por las pestes, acudieron al oráculo de Delfos (lugar sagrado griego, cuyo oráculo era consultado por interesados de todas las zonas del mundo griego. Así, los sacerdotes de este santuario adquirieron gran caudal de información y una considerable influencia política) para suplicar ayuda. El oráculo les informó que la ira de los dioses sólo quedaría aplacada si el altar, erigido en Delos en honor a Apolo, se duplicaba. Como el lector ya lo habrá imaginado, este altar tenía la forma de un cubo. Los habitantes de Delos enviaron delegados a Platón en la Academia para pedirle la solución del problema. Platón respondió que el dios no pedía la solución del problema, sino que quería advertir con ello a los griegos que pusieran más atención en las matemáticas y no descuidaran la estereogeometría (geometría de cuerpos tridimensionales).
La cuestión es que el altar se duplicó; sin embargo, su volumen había aumentado ocho veces en lugar de dos, razón ésta suficiente para que la peste no cesara.
La otra leyenda aparece relatada en una carta que Eratóstenes (276-194 a.C.) enviara a Tolomeo III Evergetes (245 a.C.), en donde muestra que el problema de la duplicación del cubo era famoso en Atenas mucho antes del oráculo que se dio a los de Delos. Relata así que un poeta trágico (¿Eurípides?) lo llevó a la escena en una tragedia perdida: el rey Minos (de Creta), en el acto de ordenar la construcción de una tumba para su hijo Glauco y, advirtiendo que la tumba tenía en cada uno de sus lados una longitud de 100 pies, exclamó: *Escaso espacio, en verdad, concedéis a un sepulcro real. Duplicadlo, conservando siempre la forma cúbica; duplicad de inmediato a cada uno de sus lados.*
El rey Minos, como los habitantes de Delos, también se equivocaba.
Lo cierto es que los griegos sabían duplicar el cuadrado con regla y compás, pues el problema se reducía a hallar *una media proporcional* entre dos segmentos, es decir, $\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab$. Tomando $b=2a$, se tiene $x^2 = 2a^2$, y así se obtenía un cuadrado de área doble de otro dado. El segmento x era fácilmente construible (ver Aχioma Nº 8).
Era natural, a la vez que tentador, suponer que la determinación de *dos medias proporcionales* entre dos segmentos, podría permitir la dupli-

cación del cubo. Parece ser que Hipócrates de Quíos se dio cuenta de que hallando las dos medias proporcionales,

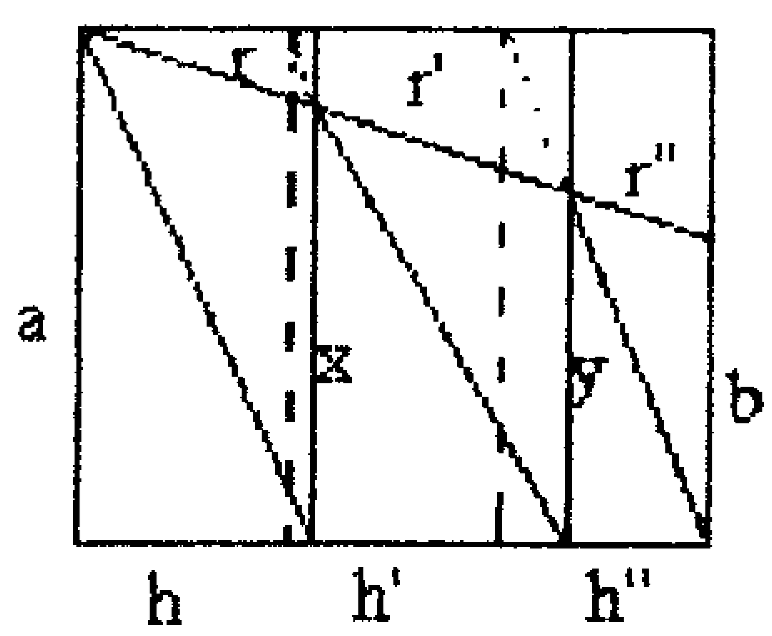
esto es: $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, entonces $x^3=a^2b$, y tomando $b=2a$, se tendría: $x^3=2a^3$. Pero claro, el problema se transforma en otro tan difícil, quizá, como el primero, a saber: hallar las dos medias proporcionales x e y.

El nuevo problema planteado por Hipócrates, esto es, hallar las dos medias, no puede resolverse con regla y compás.

En la carta mencionada de Eratóstenes, éste no sólo da la historia del problema sino también los intentos realizados por sus predecesores. Pappus (matemático y comentador griego de la segunda mitad del siglo III) designó al instrumento que Eratóstenes acompañó a la solución de la intercalación de dos medias proporcionales entre dos segmentos dados: el *mesolabio*.

El mesolabio

Se componía de tres marcos rectangulares iguales, provisto cada uno de una de sus diagonales. Esos marcos podían deslizarse: el primero sobre el segundo, el tercero debajo del segundo. Si se realizaba un desplazamiento tal que los extremos visibles de las diagonales aparecieran alineados, los montantes de los marcos determinaban la proporción que resolvía el problema de Delos.



[El dibujo precedente, tal vez no muestre con claridad el movimiento explicado. El lector puede comprobarlo si construye los tres marcos rectangulares y los superpone].

Esto en efecto es así, teniéndose en cuenta que si a, x, y, b son los montantes y h, h', h'' las bases de los marcos, resultan las siguientes proporciones a partir de la semejanza de las dos ternas de triángulos:

$$\frac{a}{x}=\frac{h}{h'}=\frac{x}{y}=\frac{h'}{h''}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{r}{r'}=\frac{y}{b}=\frac{r'}{r''}$$

Estas proporciones determinan:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

Como ya fue insinuado, muchos matemáticos "lograron" la duplicación, no sólo en forma ingeniosa sino, fundamentalmente, aportando nuevos elementos geométricos, que dejarían como saldo enormes progresos en aquella ciencia.

La duplicación tridimensional

La primer duplicación del cubo conocida fue la de Arquitas de Tarento (ver recuadro más abajo) aunque, no está de más decirlo, sin respetar la restricción impuesta por los griegos.

Arquitas da una solución tridimensional, la cual puede explicarse utilizando la notación actual de la geometría analítica (tomada de Historia de la Matemática, Carl Boyer, pág. 105):

Si a es la arista del cubo que se desea duplicar, se deben considerar tres circunferencias de radio a con centro en el punto (a,0,0), situadas cada una de ellas en un plano perpendicular a uno de los ejes de coordenadas. Por la circunferencia perpendicular al eje OX se traza el cono circular de vértice el origen (0,0,0); por la circunferencia situada sobre el plano OXY se considera el cilindro circular recto de eje paralelo al eje OZ, y se hace girar, por último, la circunferencia situada en el plano OXZ alrededor del eje OZ engendrando de esta manera un toro. Las ecuaciones de estas tres superficies son, respectivamente, $x^2=y^2+z^2$,

$2ax=x^2+y^2$,

$(x^2+y^2+z^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$

cuya intersección determinan la ecuación $x^3=2a^3$, obteniéndose así la duplicación buscada.

Arquitas de Tarento

Cuando en el año 500 a.C. se produce la muerte de Pitágoras, sus ideas comienzan a divulgarse a través de muchos de sus discípulos. A uno de

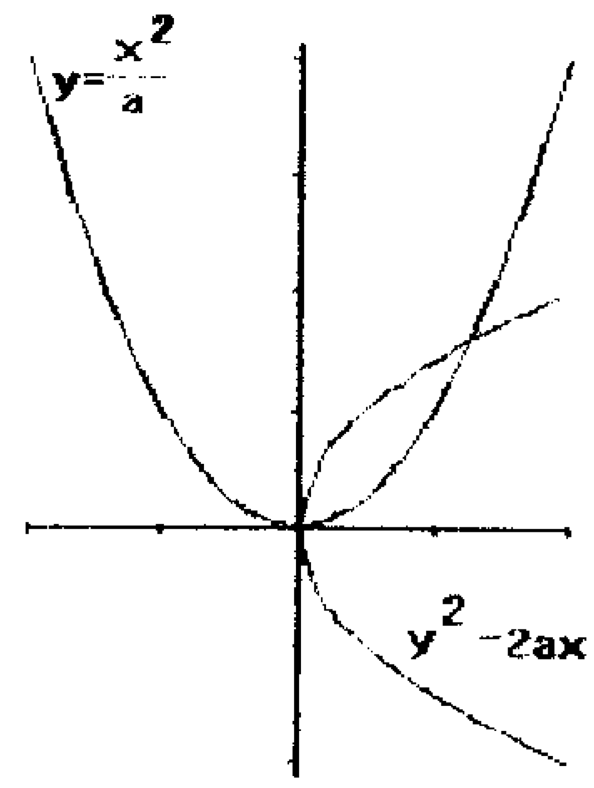
ellos, Filolao de Tarento, se le atribuye haber escrito la primera exposición del pitagorismo (parece ser que éste fue el libro en el que Platón obtuvo sus conocimientos sobre la escuela pitagórica).
Uno de los discípulos de Filolao fue Arquitas de Tarento, quien nació alrededor del año 428 a.C.
Arquitas gobernó Tarento y parece ser que su gobierno fue justo y mesurado, pues consideraba a la razón como una fuerza dirigida al mejoramiento social. Fue elegido también general durante muchos años y nunca fue derrotado. Se dice que era bondadoso y amante de los niños, para los que inventó un juguete llamado *carraca de Arquitas* y una paloma mecánica de madera.
Arquitas, como buen pitagórico, situó a la aritmética por encima de la geometría. Escribió sobre las aplicaciones de las medias aritméticas, geométricas y armónica, a la música. Prestó mucha más atención que sus predecesores a esta última. Consideraba que ésta debería jugar un papel más importante que el de la literatura en la educación de los niños.

Las cónicas de Menecmo
Uno de los más grandes matemáticos griegos de la antigüedad ha sido Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), cuya obra no es valorada, tal vez, lo suficiente. Este matemático dejó dos discípulos: los hermanos Menecmo y Dinostrato. De éste último hemos hablado en el número anterior de Aχioma, en ocasión de referirnos a su cuadratura del círculo. Por su parte, Menecmo se encargó de buscar curvas que tuvieran la propiedad, expresada por Hipócrates de Quíos, en la

proporción $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$ que,

como se vio más arriba, llevaba a la duplicación del cubo. Así, Menecmo (quien fuera maestro de Alejandro Magno y a quien se le atribuye la célebre respuesta a la pregunta del conquistador acerca de si existía algún atajo para acceder a la geometría: *"¡Oh, rey! Para viajar por el país hay caminos reales y caminos para los ciudadanos comunes, pero en la geometría hay un único camino para todos"*) descubrió que había toda una familia de curvas con aquella propiedad, y que podían obtenerse con un mismo método: cortando un cono circular recto con un plano perpendicular a su generatriz. Es decir, Menecmo descubrió lo que más tarde se denominarían *elipse*, *parábola* e *hipérbola*.
Con estas curvas, el discípulo de Eudoxo logró entonces, la duplicación del cubo. Si se utiliza notación actual, la duplicación se logra, intersecando las siguientes dos

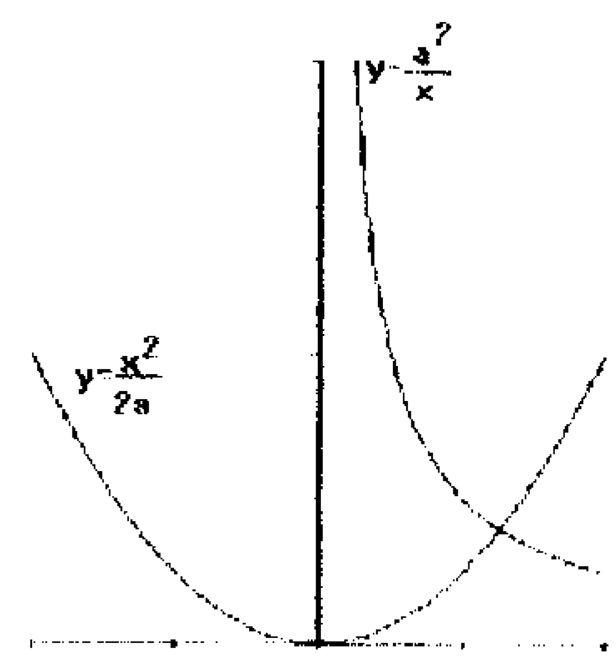
prábolas: $y=\frac{x^2}{a}$ e $y^2=2ax$.



Intersecando dichas curvas, resulta $x^3=2a^3$, que es lo que se buscaba.
Menecmo obtuvo la duplicación intersecando también una parábola y una hipérbola. Si se quiere duplicar un cubo de arista a, basta buscar la intersección entre la parábola

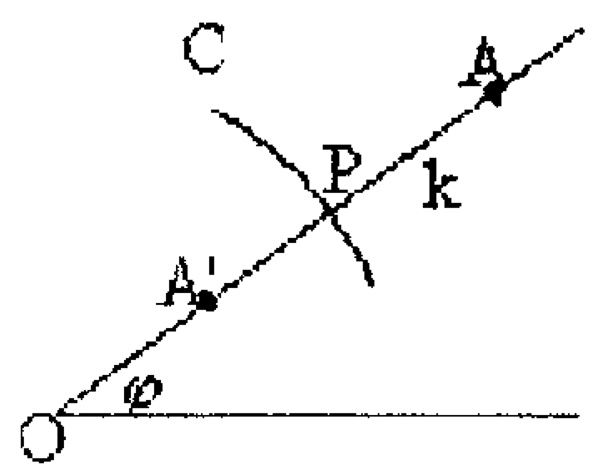
$y=\frac{x^2}{2a}$ y la hipérbola

$y=\frac{a^2}{x}$.

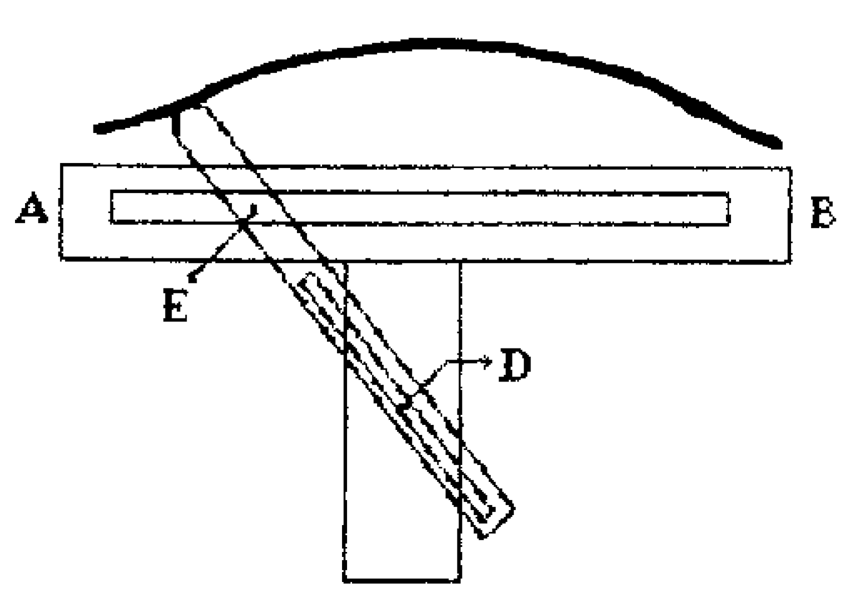


La concoide de Nicómedes
A mediados del siglo III a.C. un matemático griego llamado Nicómedes construye una curva llamada *concoide* o cocloide (de *kóchlos*, concha), con la cual puede resolverse el problema de la duplicación del cubo y, como veremos más adelante, también el problema de la trisección del ángulo.

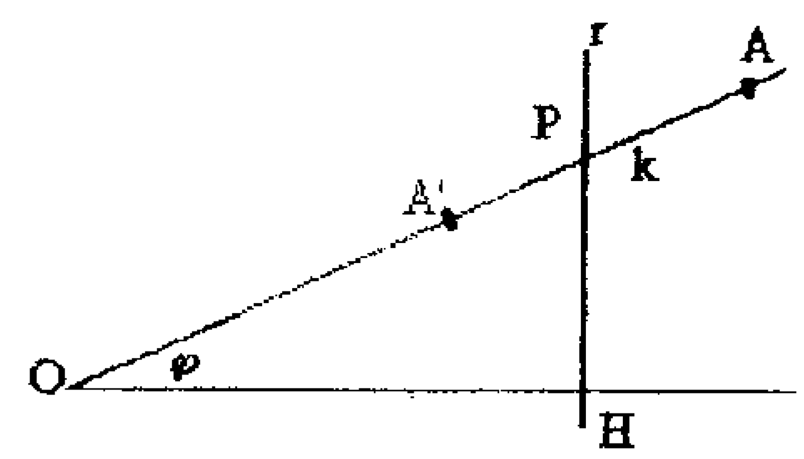
La concoide es una curva que se describe de la siguiente manera: sea C una curva fija y O un punto dado, unamos O con un punto P de la curva y tomemos sobre esta recta y, a partir de P, dos segmentos PA = PA' de una longitud dada k.



Cuando P recorre la curva C, los puntos A y A' describirán cada uno una cierta curva. El conjunto de estas dos curvas se llama concoide de intervalo k de la curva C respecto del punto O.
Utilizando coordenadas polares, si la curva C tiene por ecuación a r = f(φ), la ecuación de la concoide será r = f(φ) ± k.
En "Historia de las Matemáticas I", de Jean-Paul Collette (pág. 140-141), aparece un procedimiento mecánico para trazar la concoide, que está tomado de "A manual of Greek Mathematics", de Sir Tomas L. Heath. AB es una regla. D es, igual que E, una clavija. Cuando el lápiz se desplaza girando alrededor de D y se dirige hacia la derecha siguiendo la clavija E sobre AB, mientras que desciende siguiendo la clavija D, dibuja la concoide MOP:



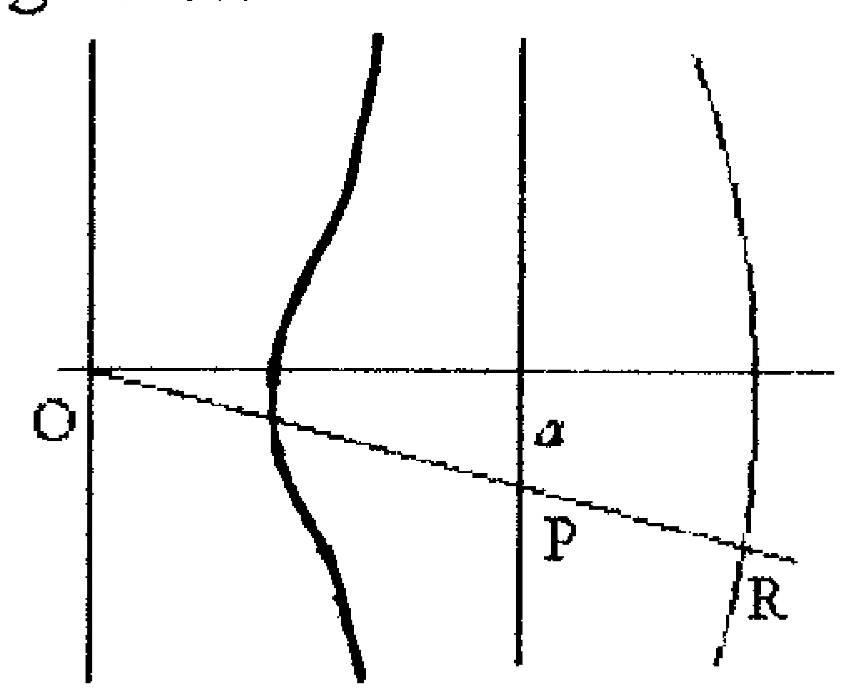
La concoide de Nicómedes (llamada también concoide de la recta) se describe de la siguiente manera: sea r una recta dada o recta base. Tomemos como eje polar a la recta que pasa por O y es perpendicular a r



La ecuación de r será, en coordenadas polares, $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, siendo a=OH (distancia de O a r). La ecuación de la concoide será, entonces,

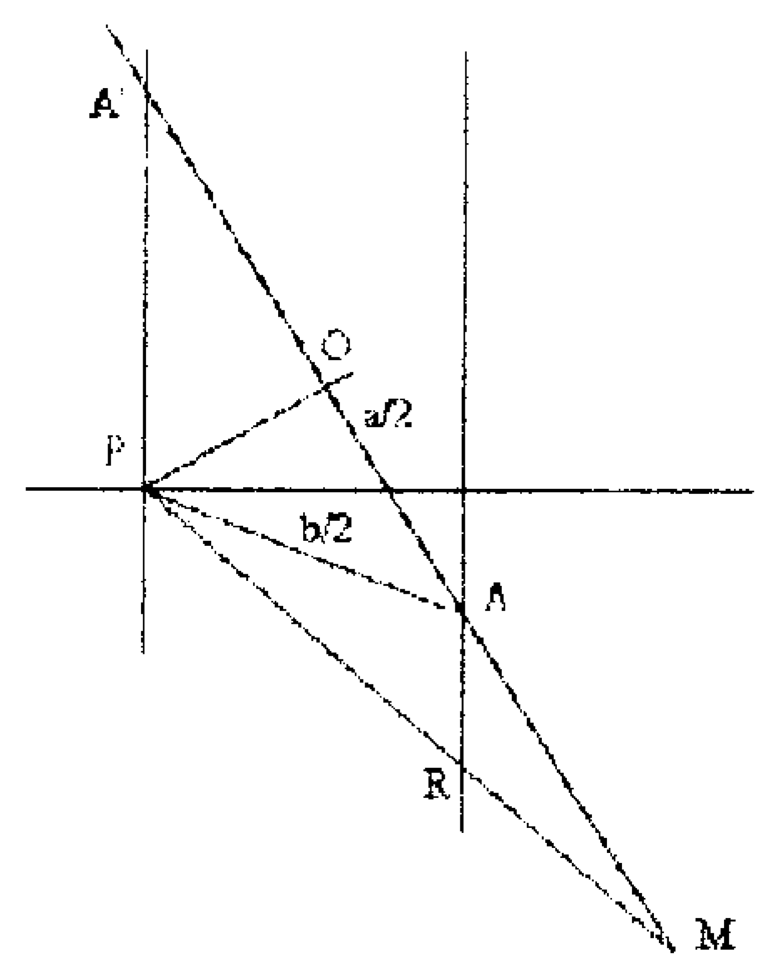
$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm k .$$

Según sea $k>a$, $k<a$ o $k=a$ se obtienen distintas gráficas de la concoide (siendo x=a una asíntota vertical). Por ejemplo, si $k<a$, la gráfica es la siguiente:



Puede verse en el gráfico anterior que si se traza una semirrecta desde O que cruce a la curva y a la recta vertical, determinando los puntos T, P y R, se tiene que TP = PR = k.
Es de notar que, a pesar de las dos ramas de la concoide, Nicómedes sólo consideró la rama de la derecha.
Vamos a ver ahora cómo puede duplicarse el cubo mediante la concoide, advirtiendo que la construcción es algo complicada. Para hacerlo vamos a tratar de intercalar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados a y b, obteniendo así la proporción

$\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$, con lo que el problema estaría resuelto.
Sea POA un triángulo rectángulo con la hipotenusa PA = b/2 y su cateto OA = a/2. Se toma ahora el segmento AA' = 2a y se traza por A una paralela AR a A'P. Sobre OA debe hallarse entonces, un punto M tal que la recta MP determine un segmento MR = PA.



El punto M en cuestión se encuentra sobre la rama derecha de la concoide de polo P, recta base AR y segmento constante k=PA.
Puede comprobarse entonces que PR y AM son las medias proporcionales buscadas. En efecto, si PR = x y AM = y se tiene que

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{PR}{MR} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{x}{b} \quad (1).$$

Por otra parte, si se aplica el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos AOP y MOP, puede obtenerse, luego de algunas transformaciones que $\frac{x}{y}=\frac{y+a}{x+b}$ (2) (el lector desconfiado debería verificarlo).

En (1): $\frac{y+a}{y}=\frac{x+b}{b}$ (3)

De (2) y (3) se tiene que:

$\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$.

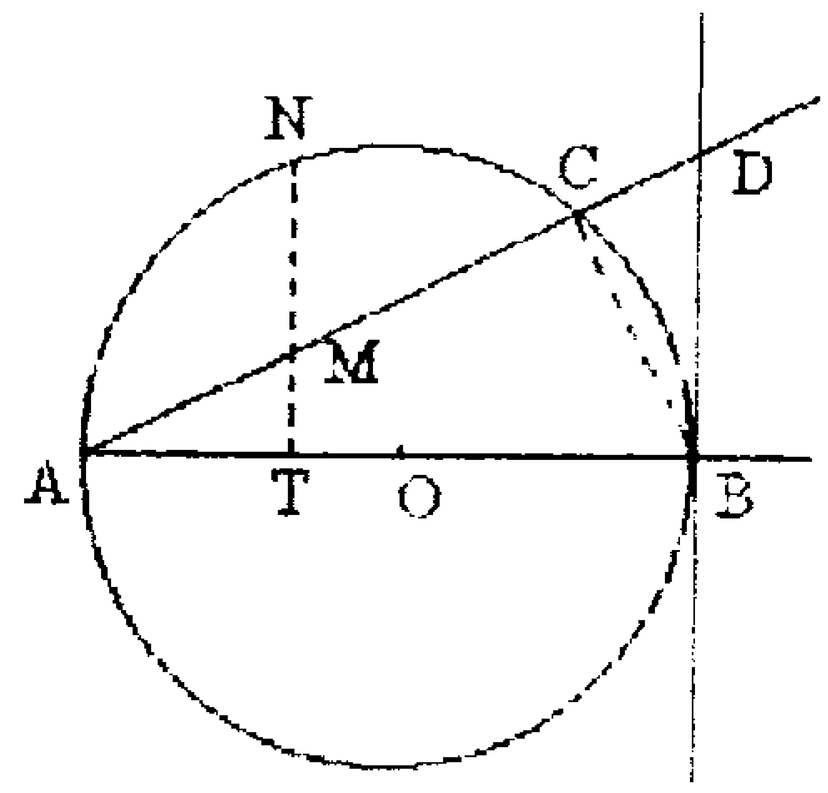
Así, combinando convenientemente esta última expresión

con (1), resulta: $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, y el problema queda resuelto.

La cisoide de Diocles

Diocles fue un matemático griego que vivió a comienzos del siglo I a.C. Determinó las dos medias proporcionales que resuelven el problema de Delos, mediante una curva de tercer grado: la *cisoide*.

La curva se describe de la siguiente manera: sea una circunferencia de diámetro AB=a, en donde se traza la tangente BD en el punto B. Se trazan ahora rectas diferentes que salgan de A y corten a la circunferencia en C, C', C", etc. y a la tangente BD en D, D', D", etc. Si sobre cada secante AC, AC', AC", etc. se toma un punto M tal que AC = MD, el punto M describe la cisoide de Diocles.



Se tiene ahora que

$\frac{AM}{MD}=\frac{AT}{TB}$ y dado que el triángulo AMT es semejante al

ACB, resulta $\frac{AM}{AB}=\frac{AT}{AC}$. De ambas proporciones se obtiene

que: $\frac{AM^2}{AT^2}=\frac{AB}{AB-AT}$.

En virtud de una propiedad de las proporciones se obtiene:

$$\frac{AM^2-AT^2}{AT^2}=\frac{AB-AB+AT}{AB-AT}$$

es decir, $\frac{MT^2}{AT^2}=\frac{AT}{AB-AT}$

(1)

Si se observa que NT es la media geométrica entre AT y AB-AT se tiene: NT^2 = AT(AB-AT) que, combinando con (1), resulta

$$\frac{MT^2}{AT^2}=\frac{AT^2}{NT^2}=\frac{NT^2}{(AB-AT)^2}$$

y, por lo tanto,

$\frac{MT}{AT}=\frac{AT}{NT}=\frac{NT}{AB-AT}$. De esta manera se ha intercalado entre los segmentos MT y AB-AT dos medias proporcionales: AT y NT, a partir de las cuales se resuelve el problema de Delos.

Los antiguos griegos, por último, no pudieron resolver el problema de la duplicación del cubo con regla y compás, pero han producido descubrimientos notables, como las cónicas, en sus denodados intentos.

Hubo un tercer problema a la altura de la cuadratura del círculo y de la duplicación del cubo, que también exigía la regla y el compás, y que tampoco pudo resolverse con esos medios: *la trisección del ángulo.*

La trisección del ángulo

Origen del problema

Este problema se plantea al mismo tiempo que el de la duplicación del cubo, hacia mediados del siglo V a.C. Se trata de construir un ángulo igual a la tercera parte de uno dado. Este problema se resolvía fácilmente para el ángulo recto (puede el lector verificarlo fácilmente, por medio del triángulo equilátero).

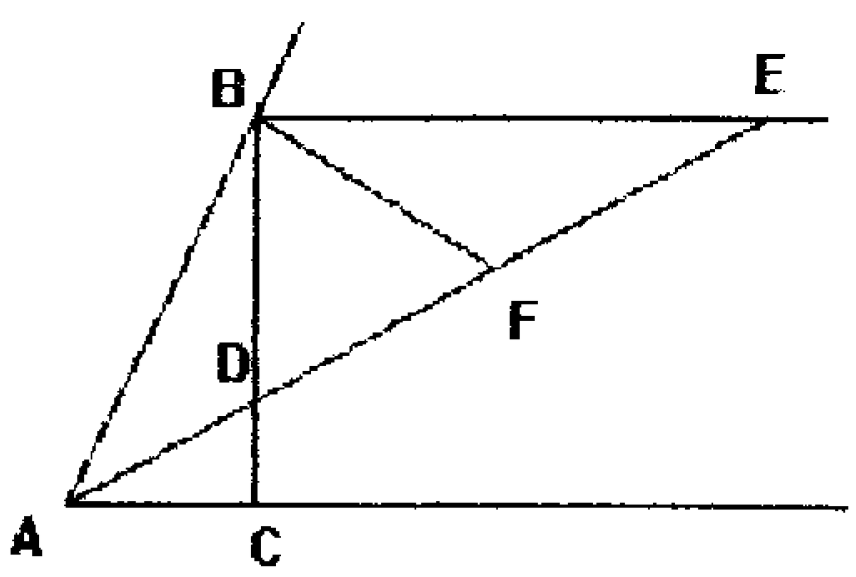
A las primeras generaciones de geómetras les había llamado la atención el estudio de la bisección del ángulo por la importancia que tenía la bisectriz en la investigación de las propiedades de los triángulos, figura fundamental de la geometría euclideana. Así, la bisección condujo a la trisección; la duplicación del cuadrado a la del cubo; y las cuadraturas de figuras rectilíneas a la cuadratura del círculo. Como expresa Abel Rey: *el espíritu sigue una natural inclinación que le hace pasar, no de manera conciente, sino inconcientemente, con incansable constancia, de lo simple a lo complejo.*

El problema de la trisección del ángulo era necesario, además, para la construcción de polígonos regulares inscriptibles de 9 lados o múltiplos de 9.

Primera solución

La primera solución que se ha conservado se remonta a la misma época en que comenzó a preocupar el problema. Esta solución incluía lo que los griegos llamaban *neusis* o intercalación, es decir, la intercalación entre dos líneas dadas de una recta de longitud dada.

Veamos cómo puede trisecarse el ángulo mediante la neusis. Sea un ángulo A cuya trisección se desea realizar. Se traza por un punto B de uno de los lados del ángulo, una paralela al otro lado



Desde B se traza una perpendicular hasta el otro lado, determinando el punto C. Se intercala, entonces, una recta AE, que corte a BC en D, de tal manera que DE = 2 AB. Unimos B con F, punto medio de DE. Es posible demostrar que el ángulo BAF es igual al AFB (a cargo del lector).

Ahora bien, áng BAC=áng BAF + áng CAD.

Pero BAF = AFB = 2 BEF y BEF=CAD. Por lo tanto, BAC = 3 CAD, y así, CAD = BAC/3.

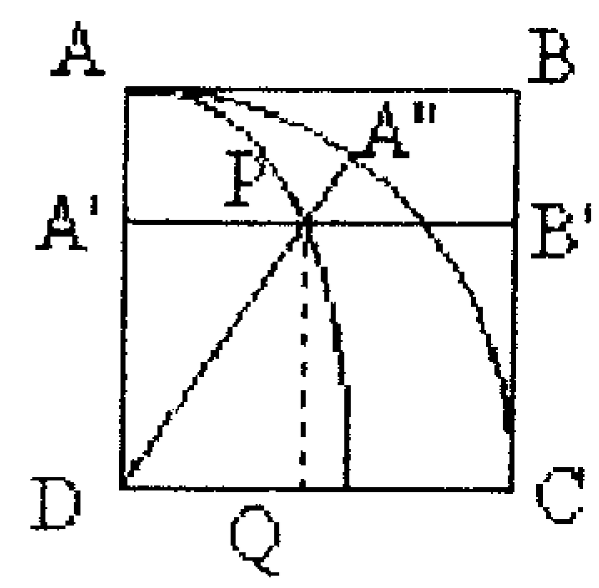
En esta solución se traslada el problema a otro, que implica realizar la neusis. Que pueda trazarse la recta intercalada excede las posibilidades de la regla y el compás; esto sólo puede hacerse con la ayuda de las cónicas, desconocidas en el siglo V a.C.

Si se observa con atención esta construcción se verá que el punto E pertenece a la concoide de la recta BC, con segmento constante igual al doble de AB, con lo que se ve que esta curva también resuelve el problema de la trisección.

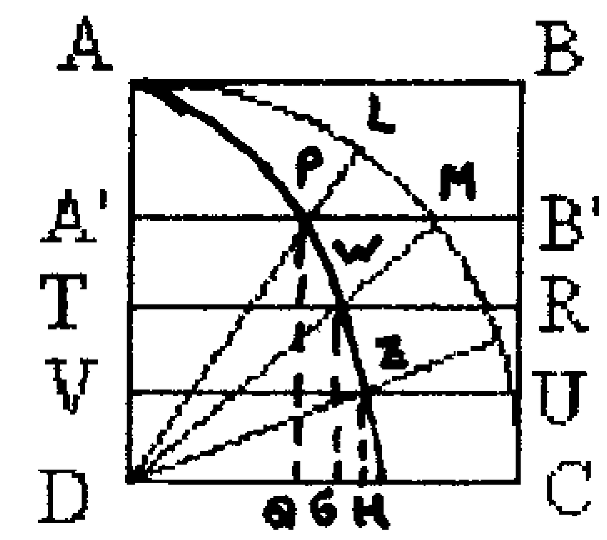
Trisectriz de Hipías

En el anterior número de Aχioma hablamos de un matemático griego llamado Hipías de Ellis. Éste había trazado la primer curva aparte de la circunferencia y la recta, la más tarde denominada, cuadratriz. Esta curva, como se vio, le sirvió a Dinostrato para cuadrar el círculo. Sin embargo, Hipías la concibió como medio para trisecar el ángulo, razón por la cual se la denominó *trisectriz.*

Recordemos que el lugar geométrico de un punto P de la trisectriz estaba dado por la intersección de las rectas AB y AD, a medida que éstas iban trasladándose uniformemente en dirección a BC.



Utilicemos ahora esta curva para hacer la trisección. Supongamos que se quiere trisecar el ángulo PDC. Basta dividir al segmento B'C y al A'D en tres partes iguales por medio de los puntos R, U, T y V:



Las rectas TR y VU cortan, respectivamente, a la trisectriz en W y Z. Entonces, las rectas DW y DZ dividen al ángulo PDC en tres partes iguales.

Esto puede verse si se parte de la proporción que queda determinada por la trisectriz:

$\dfrac{AD}{PQ} = \dfrac{arcoAC}{arcoLC}$ y, de la misma manera: $\dfrac{A'D}{WG} = \dfrac{arcoLC}{arcoMC}$ (1). Pero A'D=3.ZH y WG=2.ZH. Por lo tanto, (1) resulta: $\dfrac{3}{2} = \dfrac{arcoLC}{arcoMC} \Rightarrow$

$$arcoMC = \frac{2}{3}arcoLC$$

con lo que el arco LM o el ángulo LDM es la tercera parte del ángulo PDC.

Es interesante notar que la curva de Hipías no sólo permite trisecar al ángulo, sino dividirlo en las partes que se quiera.

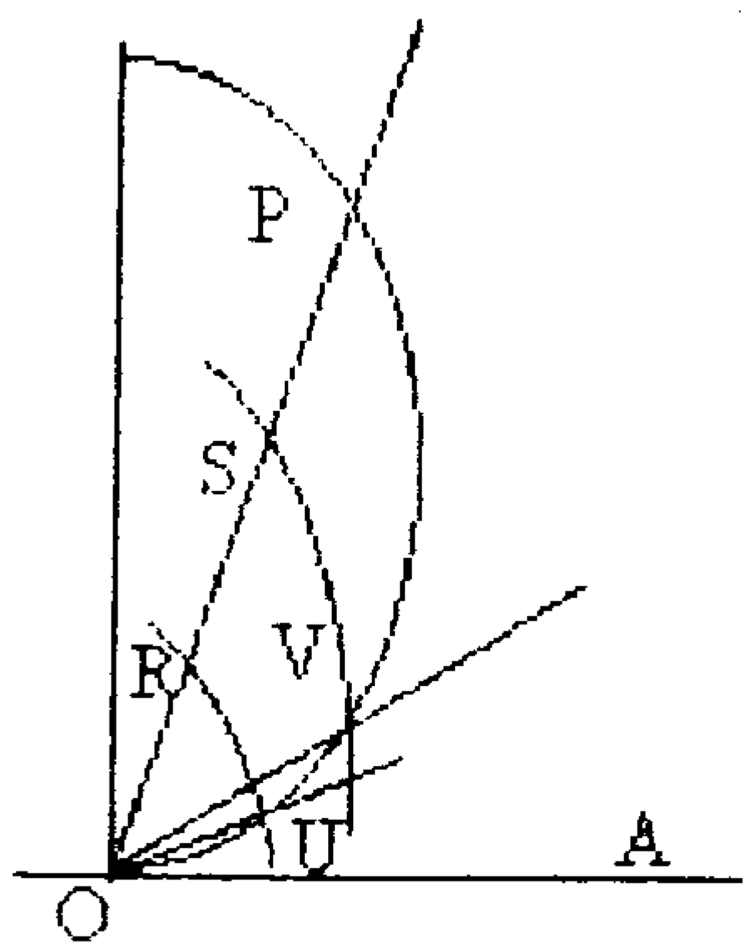
Arquímedes otra vez

Arquímedes, el matemático más grande de la antigüedad, también atacó, como ya se había visto, los problemas clásicos. Cuando hablamos de la cuadratura del círculo mostramos la lograda por el siracusano por medio de su espiral. La misma le sirvió, además, para trisecar el ángulo.

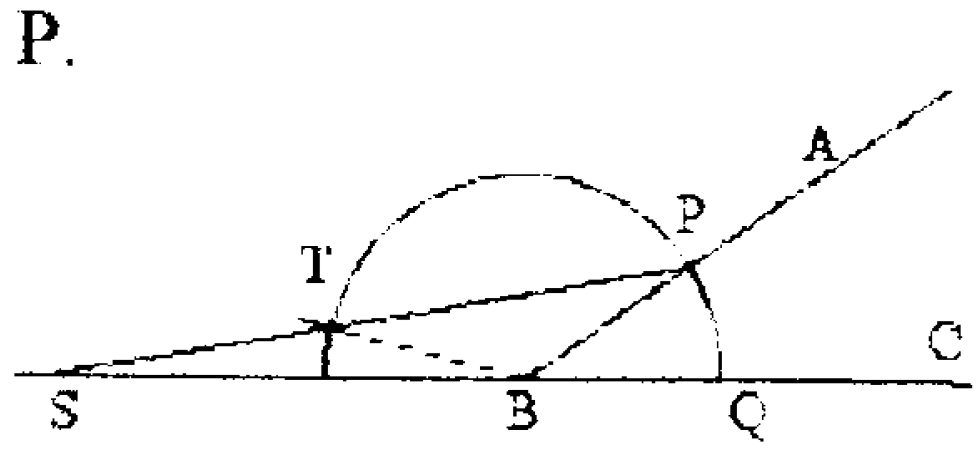
La espiral de Arquímedes responde a la ecuación, dada en coordenadas polares, $r=a\theta$. Esto implica que si P es un punto de la curva, entonces OP=r es directamente proporcional a θ.

Sea T punto medio de OP. Si se traza una circunferencia con centro en O y radio OT, la misma cortará a la espiral en T'. Como OT = r/2 y r = $a\theta$, se tiene que OT = $a\theta/2$. Así, se ha dividido a θ en dos partes iguales.

En forma similar, dividamos al segmento OP en tres partes iguales por medio de los puntos R y S y tracemos dos circunferencias de centro O y radios OR y OS respectivamente. Estas circunferencias cortan a la espiral en los puntos U y V. Entonces las semirrectas OV y OU trisecan al ángulo POA.



Los árabes atribuyen a Arquímedes una hermosa solución del problema. Se encuentra en el *Liber assumptorum* o *Libro de los lemas*. En esta construcción Arquímedes también introduce una neusis. Sea ABC el ángulo que se desea trisecar. Tracemos entonces una circunferencia con centro en B y radio arbitrario que corte a BA en P y a BC en Q, así como a la prolongación de BC en S. Intercalemos ahora un segmento ST igual al radio, entre la anterior prolongación fuera de la circunferencia, en S, y la circunferencia, en T. La prolongación de este segmento intercalado debe cortar, además, a la circunferencia en P.



Como los triángulos STB y TBP son isósceles, se tiene que áng BST = áng BTP/2 = áng TPB/2 y a partir de aquí puede demostrarse fácilmente que áng BST = áng PBQ/3.

****

Con la demostración precedente concluimos esta breve exposición de los problemas clásicos griegos. Es necesario resaltar una vez más que la imposibilidad de resolverlos sólo existe cuando se tienen en cuenta las limitaciones impuestas por los mismos griegos, esto es, la utilización exclusiva de la regla y el compás. La demostración del porqué no pueden realizarse aquellas construcciones sólo con tales instrumentos, la pospondremos hasta el número siguiente de Aχioma.

Claudio Salpeter*

* Profesor de Matemática, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Bibliografía:

* BOYER, CARL B - *Historia de la matemática* - Madrid, Alianza Universidad Textos, 1994.
* REY, ABEL - *La Ciencia en la Antigüedad. "El Apogeo de la Ciencia Técnica Griega. El Desarrollo de la Matemática"* - México, UTEHA, 1962.
* REY PASTOR, J. - BABINI, J. - *Historia de la Matemática Vol. I* - Barcelona, Gedisa, 1984.

¿A qué es igual el siguiente producto infinito $\dfrac{2.2.4.4.6.6.8...}{1.3.3.5.5.7.7...}$?

¿Qué es el amor?

Hoy les escribo porque una noche se me ocurrió esta pequeña historia que, como la definió una compañera del departamento de matemática, es la unión entre matemática y literatura romántica ya que habla de un tema que a todos nos involucra, explicado con alrededor de 70 términos matemáticos (si la leen atentamente los van a encontrar). Como siempre leo la parte de "Literatura matemática" se me ocurrió compartir con ustedes y los lectores esta pequeña locurita. Espero que les guste.

La matemática se encuentra en todos lados y en todo momento de la vida. Veremos esta noche el amor, pero analizado desde el punto de vista de la matemática.

¿Qué es el Amor? ¿No es acaso un sentimiento real con gran parte de irracional, pero para llegar a ser el dominio de la locura (que lo acompaña) se transforma en algo racional; entero además, en todas sus expresiones y sobre todo natural en el ser humano y a la vez algo muy complejo? Para encontrar el Amor, hay que resolver una ecuación que para cada individuo no es igual. Para algunos es una simple ecuación de segundo grado, y para otros resulta una ecuación elevada a la n-ésima y de varias variables; pero la experiencia nos dice que tienen solución, ya que el conjunto nunca será vacío. Dos enamorados no son más que un par ordenado que satisface una función mayorante a todas las restantes, lo que equivale a decir la función del Amor mismo; esa ecuación para la cual habremos distribuido, en especial, asociado y sumado. Esta dupla no está aislada sino que pertenece al plano del Amor (con superficie infinita y sin límite alguno); y donde están graficadas todas las funciones de cada uno y en donde dos rectas no paralelas se intersecan, ahí nace este sentimiento tan poderoso que tiene su raíz en el mismo segundo en que el Universo surgió. Y las fracciones también se ven influidas, ¿o acaso un corazón enamorado no es realmente medio corazón que busca su complemento para ser una unidad total? Además, un anillo nunca puede llegar a ser semejante del sentimiento que intenta representar, ya que el valor absoluto de este amor se hace evidente en dos cuerpos unidos formando uno solo, más allá de poseer curvas diferentes. En ese momento el entorno se esfuma y sólo interesa la mirada del otro.

Pero también existen axiomas matemáticos, que el propio Cupido desconoce. Un ejemplo evidente puede ser: "un minuto está formado por 60 segundos", como todos sabemos. Pero en un beso de pasión, un minuto nos parece eterno, más allá de que los relojes nos digan lo opuesto. Otro ejemplo que contradice la aritmética es "1+1=2", pero en el Amor un cuerpo más otro es igual a uno solo.

Pero aunque haya reglas que nos demuestren lo contrario, no negamos que Cupido al flechar, va resolviendo diferentes combinaciones donde el resultado es una sucesión de felicidad, alegría, amor y tantas cosas bellas. Además, una vez resuelta la ecuación, estos dos sumandos se transforman en factores y un producto se resuelve, aunque para ello no es necesario memorizar ninguna tabla sino solo Amor elevado a la (n+1).

Este análisis puede tal vez parecer frío ante el calor de este importante sentimiento, pero sólo es una tesis sin demostración comprobada y no una tautología.

Mónica L. Micelli*

* Alumna de 1° y 2° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Problemas Propuestos

1. *Colaboración de Gustavo Piñeiro*: Sea $f:[0,1]\to\mathcal{R}$ una función continua tal que $0\leq f(x)\leq 1$ $\forall x\in[0,1]$. Probar que entonces existe algún $x_0\in[0,1]$ tal que $f(x_0)=x_0$.

2. *De "Cómo plantear y resolver problemas" - G. Polya - Ed. Trillas*: En un tetraedro cualquiera, dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son ortogonales. Además, cada una de esas aristas es perpendicular a la línea, de longitud b, que une sus puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b, y demostrar el resultado obtenido.

3. *Colaboración de Gustavo Piñeiro:* Construimos una *cruz suiza* formada por cinco cuadrados de lados unitarios (figura 1).

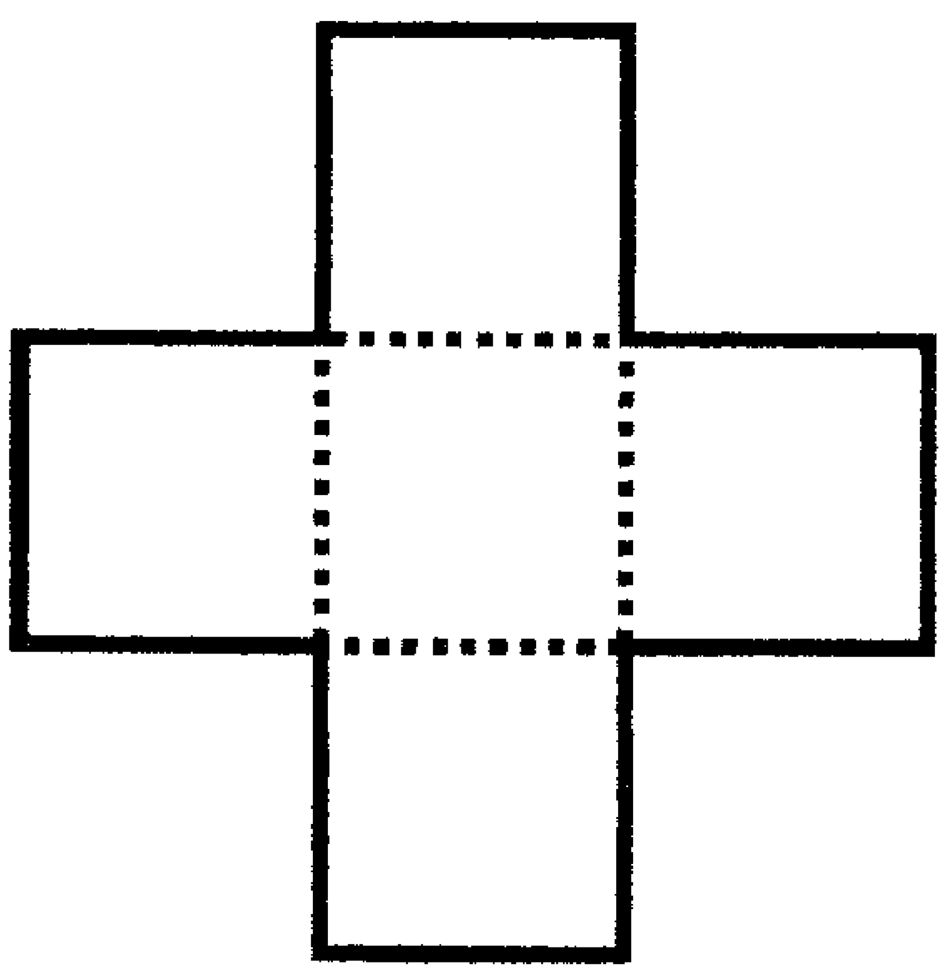


Figura 1

En cada uno de los *ángulos* de la cruz se colocan sendas cruces más pequeñas, cuyos lados miden 1/3. En cada uno de los ángulos de éstas últimas, a su vez, se colocan sendas cruces todavía más pequeñas, de lados igual a 1/9. Así se continúa *hasta el infinito*, colocando cruces cuyos lados miden siempre la tercera parte de los precedentes (figura 2).

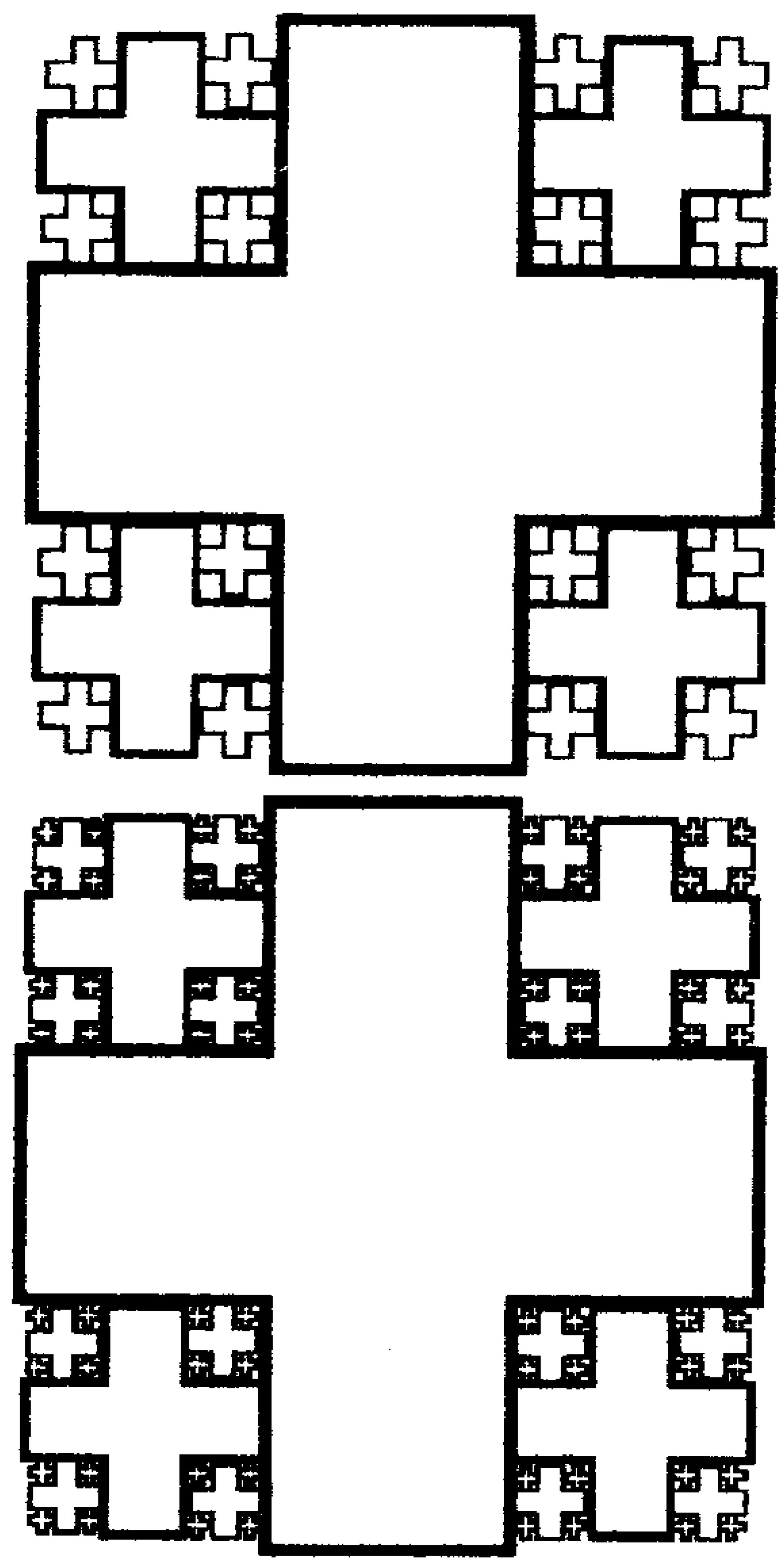


Figura 2

Calcular el área de la figura resultante.

4. *De "La probabilidad y sus aplicaciones" - Luis A. Santaló - Ed. Ibero-Americana*: Sobre una circunferencia se dan 3 puntos X, Y, Z al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo X,Y,Z contenga el centro O?

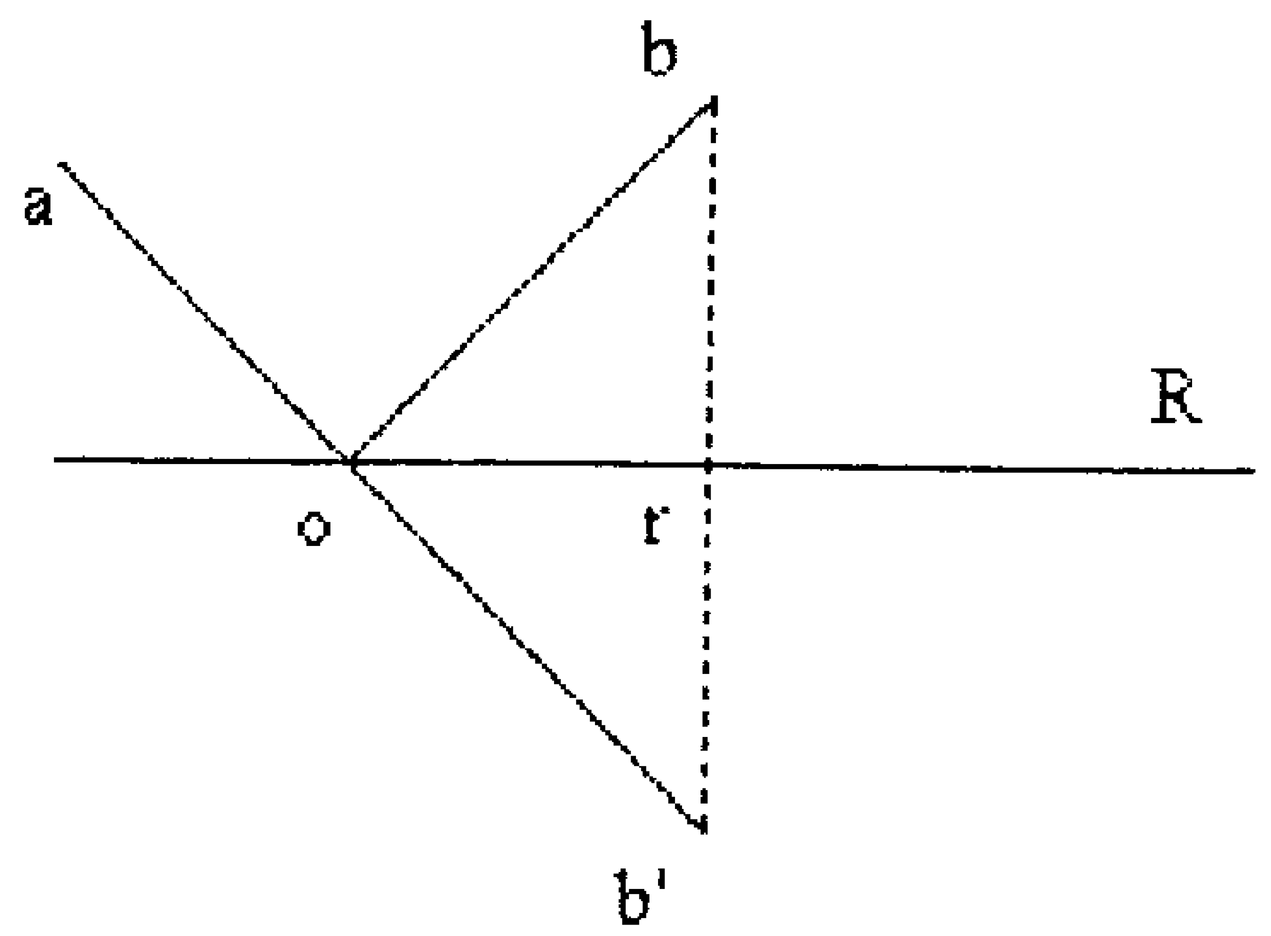
5. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola*: Dé un ejemplo de dos funciones periódicas definidas en R, cuyo período sea t y cuyo producto sea una función periódica de período t_1 tal que $0<t_1<t$

Soluciones a los Problemas de Axioma N° 8:

1. De La Geometría en la formación de profesores - Luis Santaló - Red Olímpica: *De un mismo lado de una recta R hay dos puntos dados a y b. Se desea construir el camino de longitud mínima que une a con b, tocando en un punto a la recta R (Herón de Alejandría, siglo II).*

** Respuesta dada por **Marcela Bartomeo** (alumna de 2° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González):*

"El camino más corto entre dos puntos es la línea recta", pero resulta que acá tenía que ser el camino más corto pero formado por 2 segmentos que forman un ángulo.
Ahora, para salvar este problema podemos hacer una simetría axial de uno de los puntos respecto de la recta; y luego los unimos ¡por una línea recta! El último paso es unir el punto de intersección de la recta ab' con R y el punto b. Pero dejemos de hablar, esto es más fácil de ver en un gráfico:



Los triángulos orb' y orb son congruentes por corresponderse en una simetría axial; entonces $\overline{ob'} =_c \overline{ob} \Rightarrow \overline{ao}, \overline{ob}$ es el "camino" más corto para ir de "a" a "b" tocando en un punto a la recta R.

2. Colaboración Prof. Jorge Martínez: *Encontrar el cuadrado más pequeño divisible por 39 y 26.*

** Respuesta dada por **Marcela Bartomeo y Verónica Hauresz** (alumna de 4° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González):*

Primero descomponemos 39 y 26 en factores primos.
$39 = 3 \cdot 13$
$26 = 2 \cdot 13$
Tenemos que encontrar un número R tal que $26/R^2$ y $39/R^2$ esto significa que:
$R^2 = 26.k_1$ y $R^2 = 39.k_2$ donde k_1 y k_2 son números enteros.

Como R está elevado al cuadrado, entonces su descomposición en factores primos nos va a dar factores con exponente par. Además el mínimo común múltiplo entre 39 y 26 tiene que ser divisor de R^2. O sea, $78/R^2$. Y como lo que estoy buscando es el menor R^2 posible, éste sería $78^2 = 6084$.

3. De Notas de álgebra I - Enzo Gentile - Ed. Colihue EUDEBA: *Calcular en cuántas de las permutaciones de la palabra MURCIÉLAGO las cinco consonantes conservan sus posiciones relativas (es decir, la M debe quedar antes que la R, ésta antes que la C, etc., un ejemplo es UMRICALOEG)*

** Respuesta dada por **Marcela Bartomeo**:*

Primero vamos a numerar la posición de cada letra dentro de la palabra, de la siguiente forma:

M U R C I E L A G O
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Vamos a considerar las vocales y las consonantes por separado.
Las posiciones de las vocales van a ser siempre permutaciones de 5 elementos, o sea 5!, ya que van a ocupar los lugares que dejen libres las consonantes y no tienen ninguna restricción.
Ahora, con las consonantes es distinto. Consideremos el caso en el que la M ocupa el lugar 1. Tengo 9 lugares posibles para ubicar las otras 4 consonantes (las vocales, como ya dijimos, ocupan los lugares restantes). Como estas cuatro consonantes tienen que estar en un solo orden determinado es lo mismo que decir que el orden no interesa. Pongamos un ejemplo:

M _ _ R _ C _ L G _
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Este es el orden correcto. Al ir cambiando el orden de las cuatro últimas quedaría:
M _ _ R _ C _ G L _
M _ _ C _ R _ G L _
M _ _ C _ R _ L G _
M _ _ G _ L _ R C

$M \_ \_ G \_ L \_ C R$
$M \_ \_ L \_ G \_ C R$
$M \quad L \quad G \quad R C$ etc., etc., hasta completar las 24.

Como la única que nos interesa es la primera, entonces todas las permutaciones posibles, en cada posición, no las tomamos en cuenta, por lo tanto estamos hablando de combinaciones de 9 elementos (posiciones) tomándo de a 4 (consonantes), o sea:

$M_1 = C_9^4 \ . \ 5!$

Cuando M ocupa el segundo lugar, como todas las consonantes deben seguirla a ella tenemos:

$M_2 = C_8^4 \ . \ 5!$ y así sucesivamente...

$M_3 = C_7^4 \ . \ 5!$

$M_4 = C_6^4 \ . \ 5!$

$M_5 = C_5^4 \ . \ 5!$

$M_6 = C_4^4 \ . \ 5!$ y aquí paramos, este caso es en el que todas las consonantes están al final de la "palabra" y las únicas que cambian de posición son las vocales.

Sumemos todos los casos:

$$C_9^4\ 5! + C_8^4\ 5! + C_7^4\ 5! + C_6^4\ 5! + C_5^4\ 5! + C_4^4\ 5! =$$

$$= 5!\ \left(\frac{9!}{4!.5!} + \frac{8!}{4!.4!} + \frac{7!}{4!.3!} + \frac{6!}{4!.2!} + \frac{5!}{4!.1!} + \frac{4!}{4!.0!}\right) =$$

y haciendo cuentas llegamos a: 30240 permutaciones en las condiciones del problema.

** Respuesta dada por **Verónica Hauresz**:*

Como las letras son todas diferentes debemos elegir las 5 posiciones para las consonantes y el resto permutarlas indistintamente:

$$N = \binom{10}{5} . 5! = \frac{10!}{5!} = 30240$$

4. Colaboración Prof. Alfredo Cóccola: *Cite ejemplos de dos funciones h y f, cada una de las cuales no tiene límite en x=0 y tal que su diferencia y su cociente tienen límite en x=0.*

** Respuesta dada por **Marcela Bartomeo**:*

Primero supongamos que h y f son distintas; de lo contrario, se cumple siempre que el límite del cociente es 1 y el de la resta 0; por lo tanto no tendría sentido.

Los ejemplos más sencillos que se me ocurrieron son:

$$h(x) = \frac{x-1}{x} \quad \text{y} \quad f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{x-1}{x}}{-\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \to 0} [-x+1] = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{x-1}{x} - \left(-\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right] = 1$$

** Respuesta dada por **Verónica Hauresz**:*

$$h(x) = \ln(2x) \quad \text{y} \quad f(x) = \ln(x)$$

$$h(x) = f(x) = \frac{1}{x^n}$$

** Respuesta dada por **Patricia Folino** (Prof. de Matemátca egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González)*

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x \le 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Destacamos que en este ejemplo los límites no existen, no porque sean infinitos, sino porque no coinciden los límites laterales.

5. Colaboración Gustavo Piñeiro: *Determinar **todos** los enteros positivos x para los cuales*

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\ldots}}}}$ *es un entero positivo. (**Sugerencia:** ver en esta misma sección la solución del problema 6 de Aχioma Nº 7).*

* *Respuesta dada por* ***Marcela Bartomeo y Verónica Haurezs****:*
Utilizando la sugerencia (¡gracias!), solución del problema 6 de Aχioma 7, tenemos:

$A=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\ldots}}}}$ entonces $A=\sqrt{x+A}$

$\Rightarrow A^2 = x + A$, luego $A(A\text{-}1)=x$
Por lo tanto todos los *x*, enteros, posibles, son aquellos que son iguales al producto de 2 enteros consecutivos.

6. Colaboración Gustavo Piñeiro: *¿Es posible partir al conjunto de los números naturales en una familia infinita de subconjuntos infinitos tales que dos cualesquiera de ellos sean disjuntos? Si la respuesta es afirmativa, mostrar una partición de ese tipo. Si la respuesta es negativa, demostrar que es imposible una partición así.*

* *Respuesta dada por* ***Marcela Bartomeo****:*
¡Sí! ¡¡¡¡Sí, es posible!!!!. Pero primero hablemos de notación. A cada subconjunto de N lo voy a nombrar N_i, donde i va a ser un número primo. Además los vamos a ir "armando" de manera que "i" vaya creciendo y tome <u>todos</u> los valores de números primos. Empezamos:

$N_1 = \{x / x \text{ es primo}\} \cup \{1\} = \{1,2,3,5,7,11,13,\ldots\}$

$N_2 = \{x / x \text{ es múltiplo de 2 y } x \notin N_1\}$

$N_3 = \{x / x \text{ es múltiplo de 3 y } x \notin (N_1 \cup N_2)\}$

$N_5 = \{x / x \text{ es múltiplo de 5 y } x \notin (N_1 \cup N_2 \cup N_3)\}$

....

$N_i = \{x / x \text{ es múltiplo de i y } x \notin \cup N_j \text{, j y i primos y } j < i\}$

* *Respuesta dada por* ***Verónica Hauresz***

Sí! Veamos esta partición:

$A_1 = \{2; 2^2; 2^3; 2^4; \ldots\}$

$A_2 = \{3; 3^2; 3^3; 3^4; \ldots\}$

$A_3 = \{5; 5^2; 5^3; 5^4; \ldots\}$

....

$A_n = \{p_n^i \,/\, p_n \text{ es el n-ésimo primo e i} \in N\}$

y sea R= $N - \bigcup_{i \in N} A_i$
Todos los A_i son evidentemente infinitos. Analicemos R.
{2.3; 2.3.5; 2.3.5.7; ...} ⊂R y es infinito; entonces R es infinito y es obviamente disjunto con todos. Además $R \cup \bigcup_{i \in N} A_i = N$ por cómo fue construido.

¡Hasta el próximo número!

Se cuenta que Diderot fue a visitar la Corte rusa, invitado por la Emperatriz. Su conversación era muy liberal, y comunicaba a los muchachos más jóvenes de la corte un cierto ateísmo airoso. Los consejeros le comunicaron a la Emperatriz la necesidad de atajar tal exposición de doctrina. Ésta utilizó una estratagema. Hizo saber a Diderot que un ilustre matemático había conseguido demostrar por álgebra la existencia de Dios, y que, si se le permitía, deseaba presentarle su demostración. Diderot aceptó de buen grado. Aunque se pasa por alto el nombre del matemático, éste era Euler, quien, dirigiéndose a Diderot, anunció solemnemente, con tono de perfecta convicción: Monsieur, $\frac{a+b^n}{n} = x$, luego Dios existe; ¡respóndame! Diderot, para quien el álgebra era chino, quedó atónito y desconcertado mientras se desencadenaba una lluvia de carcajadas a su alrededor. Solicitó repentinamente un permiso para regresar a Francia que le fue concedido sin tardar.

Comentarios de textos

Hoy comentamos 3 interesantes libros:

1) HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS -Jean Paul Collette - 2 tomos - Ed. Siglo XXI - 1985.
Un gran texto, muy bien documentado, con profusa bibliografía de consulta, que barre todas las épocas de la matemática en 22 capítulos (11 en cada tomo). Abarca desde la Matemática prehistórica hasta la Matemática de principios del siglo XX. Los temas son claramente explicados y no faltan las referencias históricas a cada época y sus personajes. Al final de cada capítulo se proponen ejercicios claves para entender el tema. Muy inspirado en el texto de Boyer, es, sin embargo, un libro con un enfoque muy personal y erudito.
El primer tomo llega hasta la matemática renacentista, el 2° tiene un magistral comienzo en la época de Descartes y Fermat. Son 954 páginas de gran altura y provecho, pues en esta obra no sólo se aprende historia de la Matemática, también se aprende Matemática y mucha. En resumen, muy recomendable texto, con algunas perlas muy marcadas y notables, una de ellas es el Capítulo 7 del 2° tomo dedicado a Cauchy y a Gauss.

2) TEORIA DE LAS CATÁSTROFES - Alexander Woodcock - Monte Davis - Ed. Cátedra Colección Teorema - 183 páginas.
La teoría de catástrofes fue desarrollada en sus inicios por René Thom el notable matemático francés. En este claro libro, los autores desarrollan la teoría catastrófica, que, como se sabe, funciona mediante la transformación de conceptos abstractos en unas formas geométricas muy particulares (las "catástrofes"). Este texto es una buena introducción al tema y a sus aplicaciones y para su lectura sólo se requiere algunos conocimientos de Álgebra y de Cálculo, junto con los conceptos fundamentales de la Física elemental (Equilibrio y potencia). La teoría de las catástrofes, aún de las elementales, apunta hacia las aplicaciones, sobre todo en Biología, Física, Sociología, Economía y Psicología. En resumen: Un buen libro de Divulgación (no técnico) sobre esta teoría matemática, abundante en ejemplos e ilustraciones. Recomendable.

3) LÓGICA -Hebe T. Rabuffetti - Colección Temas de Álgebra - Editorial El Ateneo - 99 páginas.
Pequeña obra de la autora de los célebres Cálculo I y Cálculo II, este libro ofrece una descripción simple y completa de los métodos de la lógica elemental. Dividido en 8 capítulos; el primero trata del Cálculo proposicional, y en él se definen las conectivas lógicas y las tablas de verdad correspondientes. El segundo capítulo trata de las tautologías usuales y su aplicación al cálculo de fórmulas lógicas. El tercer capítulo es esencial, pues discurre sobre el razonamiento deductivo y trata interesantes temas relacionados con la Matemática: método directo, indirecto, reducción al absurdo y consistencia de un conjunto de premisas. En el cuarto se describe la aplicación de los llamados diagramas eulerianos en la validación de razonamientos. En el quinto capítulo se enseña a construir el circuito lógico asociado a una fórmula. Los últimos tres capítulos son casi mprescindibles pues se refieren a las lógicas multivalentes y al manejo de los cuantificadores universal y existencial en los esquemas proposicionales de una o dos variables. ¿Cuánta lógica necesita un profesor de Matemática? No lo sé; pero, estoy seguro de que un mínimo indispensable, puede ser encontrado en este sencillo y ordenado texto, que además presenta una colección de ejercicios muy interesante, con todas las soluciones.
Hasta la próxima

Jorge Martínez*

* Prof. de Matemática, egresado del I.S.P. N° 2 "Mariano Acosta".

Correo de lectores

* Recibimos, cuando ya se había cerrado la edición, la solución a uno de los problemas planteado en Aχioma N° 6, respondido por nuestra fiel seguidora, la ahora Prof. Patricia Folino. Le enviamos calurosas felicitaciones por su graduación y le auguramos los mejores éxitos en su futuro profesional.

* Al N° 8 de Aχioma, adjuntamos un pequeño cuestionario del cual hemos recibido, por ahora, muy pocas respuestas.
Agradecemos especialmente los elogiosos conceptos vertidos por la Prof. Adriana Tuliano al enviarnos las suyas y le aclaramos, al igual que a otros lectores que también nos reclaman los números atrasados, que del 1 al 4 inclusive, están agotados.

* Por segundo año consecutivo, nuestra lectora, y estudiante del Profesorado Joaquín V. González, Alicia Verónica Hauresz, fue premiada por su participación en el IV Certamen para profesores y estudiantes de profesorado, "El Número de Oro". El premio consistió en una beca para asistir al Seminario Internacional organizado por la O.M.A. en Bariloche, el cual contó con la participación de Claudi Alsina y Miguel de Guzmán entre otros. ¡Felicitaciones Vero!

* Felicitamos a nuestro colaborador Pablo Ingrassia quien ha iniciado el dictado de un curso de Astronomía.

* Agradecemos a Marité su apunte sobre fractales.

Como ya lo hemos mencionado, se llevó a cabo en la ciudad de Bariloche el Seminario Internacional de Matemática organizado por la O.M.A. Numerosos alumnos y profesores de todo el país se hicieron presentes en el mismo. Aχioma no podía estar ausente. Nuestra afamada corresponsal Andrea Morales, junto a su auxiliar Yanina, supieron, con el equipo al hombro, tomar impresiones cabales del clima matemático allí vivenciado. Grabaron conferencias, resolvieron problemas, cambiaron puntos de vista con otros participantes, interpelaron sin pudor ni miramientos a Miguel de Guzmán, "descansaron", y, por sobre todo, promocionaron la revista. En nuestro próximo número, usted, amigo lector, podrá disfrutar y conocer de todos los pormenores acaecidos en el mencionado Seminario (contado por sus protagonistas).

Próximo Número - Marzo/ Abril 1998

Apuntes sobre..., Matrices y movimientos.

Historia: Problemas clásicos, última parte.

Curiosidades: Uno, dos, tres... ¿qué sigue?

Comentarios de textos, Problemas, Información, Correo de Lectores...