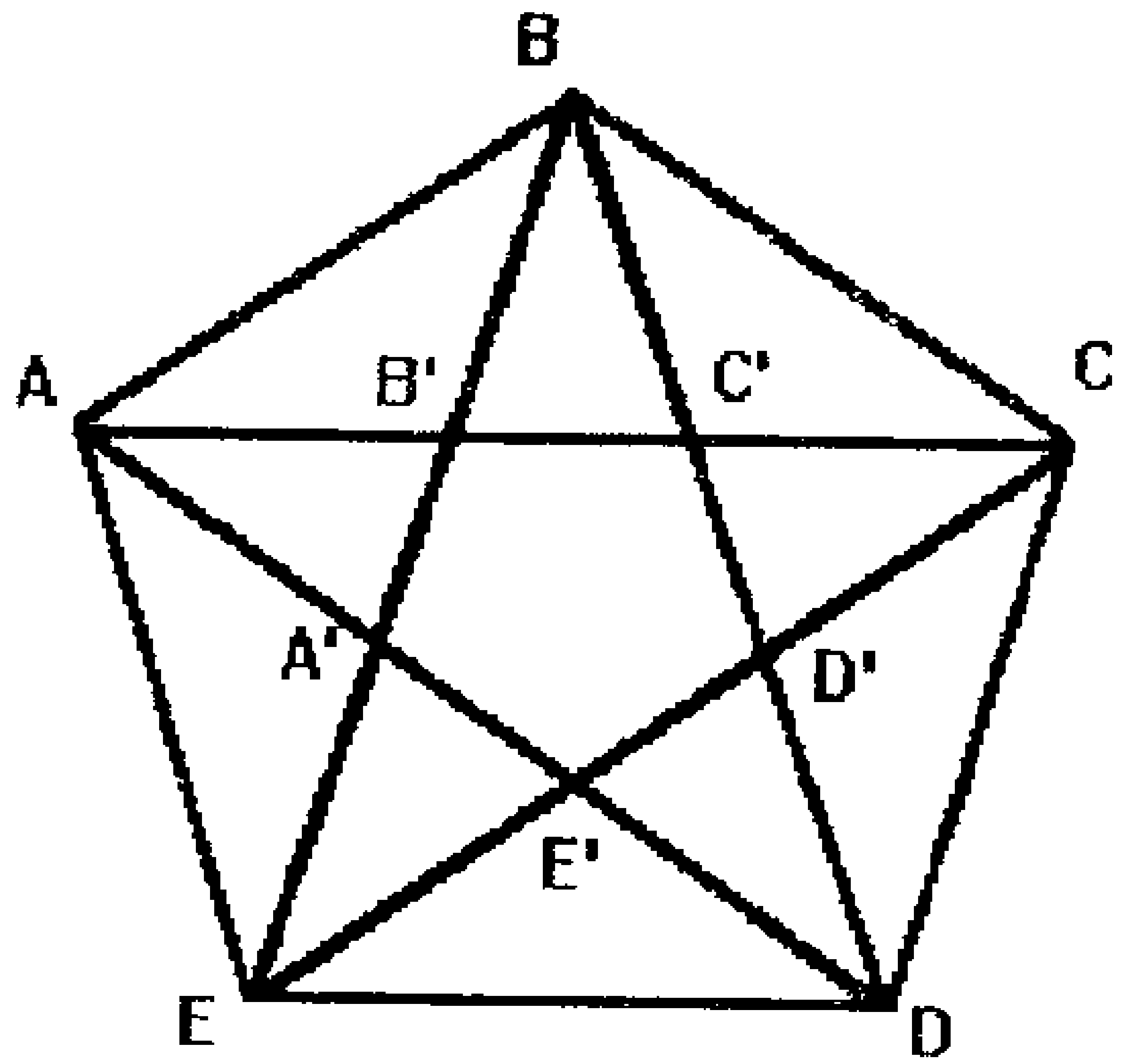
Aχioma

La revista de los estudiantes del Profesorado de Matemática del Joaquín V. González



GRANDES MATEMATICOS: Pitágoras

(Página 4)

Mayo/ Junio de 1996

Año 1 - N° 1

Aχioma N° 1

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.
Invitamos a los lectores a que nos hagan llegar sus propuestas y comentarios.

Staff y colaboradores

Daniela Bottala
Raquel Kalizsky
Andrea Morales
Gustavo Piñeiro
Claudio Salpeter
Gisela Serrano de Piñeiro

Dirección postal

Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Sumario:

Editorial

No fue sencilla la tarea que nos propusimos.

Elaborar el número uno de Aχioma nos llevó más tiempo y más trabajo del que nos imaginamos en un principio. Sin embargo, la pasión volcada por cada uno de sus integrantes nos motivó, día a día, a mantenernos en este objetivo con enorme entusiasmo.

Nuestro ansiado deseo es poder compartir, a través de estas páginas, con alumnos y profesores, la búsqueda del arte matemático: descubrir sus misterios, conocer e interpretar a sus artífices, cuestionar, investigar, crear, en fin, como bien dice Enzo Gentile "hacer matemática".

Creemos que sólo de esta manera, podremos transmitir a nuestros alumnos o futuros alumnos la belleza e importancia de la "reina de las ciencias".

Lejos de estar satisfechos con el trabajo realizado, nos sentimos en la obligación de trabajar con muchas más fuerzas en la edición de los próximos números de Aχioma.

Cabe decir aquí que la colaboración de alumnos y profesores, en cuanto a notas, sugerencias, críticas, etc. serán, más que bienvenidas, bendecidas.

Mayo/Junio de 1996

Año 1 - N° 1

Congruencias: Idea general y definiciones básicas

En esta sección desarrollaremos, a lo largo de varias notas, temas que nos atraen por su importancia y riqueza. Comenzaremos con "congruencias".

Es un día lluvioso y Aldo y Bruno, hermanos gemelos, han pasado toda la tarde en casa jugando hasta el hartazgo a todo tipo de juegos. Hacia el anochecer, los dos están silenciosos y quietos pues no saben qué hacer a continuación. De pronto Aldo reúne 25 monedas, las coloca sobre la mesa y acto seguido le propone a su hermano el siguiente juego.

Alternadamente, cada uno de los dos irá retirando monedas de la mesa. Cada jugador podrá en su turno tomar una, dos o tres monedas a su elección. Quien se lleve la última moneda será el ganador.

Acuerdan que, por razones alfabéticas, será siempre Aldo quien retire la primera moneda.

Juegan muchas veces durante esa tarde, y también durante los días y años siguientes. Aldo es inevitablemente el ganador en todos los casos. "¿Por qué ocurre esto?" se preguntaba Bruno una y otra vez. Trataremos aquí de darle una respuesta.

Para lograrlo, imaginémonos primeramente que el juego ya está terminando y que quedan sobre la mesa una, dos o tres monedas. En esta situación es evidente que a aquél a quien le toque jugar será el ganador.

Si en cambio quedan sobre la mesa cuatro monedas, un poco de reflexión nos muestra que aquél a quien le toque jugar acabará perdiendo.

La estrategia que sigue Aldo para asegurarse la victoria consiste en retirar en su turno tantas monedas como para dejar siempre sobre la mesa una cantidad que sea múltiplo de 4.

Por ejemplo, como comienzan con 25 monedas, su primera jugada consiste en retirar una sola, dejando de este modo 24.

Cuando a Bruno le toca jugar tiene siempre frente a él una cantidad de monedas que es múltiplo de 4. Como esa cantidad va disminuyendo, en algún momento llegará a ser exactamente *igual* 4 y en ese instante (como ya dijimos) Bruno se encontrará en situación perdedora.

Pero ¿es siempre aplicable la estrategia de Aldo? ¿Es cierto que dada cualquier cantidad de monedas es siempre posible quitar una, dos o tres de ellas de modo tal de dejar sobre la mesa una cantidad que sea múltiplo de cuatro?

La respuesta a estas preguntas es afirmativa, pero antes de extendernos sobre ellas, pongámonos de acuerdo acerca del significado de algunos términos.

> **Definición:** Diremos que un número entero es *múltiplo de 4* si puede escribirse de la forma 4k, donde k es algún número entero.

Así por ejemplo 12 es múltiplo de 4 pues 4.3=12. La definición es válida inclusive para números negativos; -24 es 4.(-6) y por lo tanto es también múltiplo de cuatro. El cero también lo es ya que 4.0 = 0.

> **Definición:** En general un cierto número se dirá que es *múltiplo de m* si puede escribirse de la forma mk donde k es un número entero.

Como caso especial, el cero es múltiplo de cualquier número m, ya que m.0=0. El número m por otra parte es siempre múltiplo de sí mismo, ya que m.1=m.

Supongamos que sobre la mesa hay una cierta cantidad de monedas, que llamaremos a. Si efectuamos la división entera de a por 4, y llamamos k al cociente y r al resto, entonces $a=4k+r$, donde r sólo puede valer 0, 1, 2 o 3.

Por ejemplo, al comenzar el juego $a=25$; y si dividimos 25 por 4 entonces el cociente es 6 (es decir $k=6$), el resto es igual a 1 y tenemos que 25= 4.6 + 1.

Nótese además que $a-r = 4k$. Esto nos dice que si a la cantidad a le quitamos tantas monedas como el resto de la

división de a por 4, entonces lo que quedará sobre la mesa es una cantidad de monedas, $a - r$, que es múltiplo de 4.
La estrategia de Aldo se reduce entonces a tomar en su turno tantas monedas como el resto que se obtiene al dividir por 4 la cantidad que haya sobre la mesa.
Para Aldo, entonces, las distintas cantidades de monedas se dividen en cuatro categorías.
En primer lugar las cantidades que, según su estrategia, lo fuerzan a quitar una sola moneda. Es decir las cantidades que tienen resto 1 al dividir por 4.
La segunda categoría corresponde a los números que tienen resto 2 y la tercera corresponde a los que tienen resto 3. La cuarta categoría corresponde a los números "perdedores", los múltiplos de 4, es decir corresponde a los números que tienen resto 0.

Definición: Diremos que dos números enteros a y b son *congruentes módulo 4* si ambos pertenecen a la misma categoría, es decir si tienen el mismo resto al dividir por 4.

Es también correcto decir, alterando el orden de las palabras, que a es congruente a b módulo 4. Por ejemplo 25 y 9 son congruentes módulo 4. Lo mismo ocurre con 16 y 24.
Supongamos que dos números enteros a y b tienen el mismo resto en la división por 4 (llamémoslo r) y que los cocientes son k y q respectivamente. Entonces $a=4k+r$ y $b=4q+r$. Tenemos así que $a-b=4(k-q)$.
Es decir, la *diferencia* entre a y b es múltiplo de 4. Esta observación nos permite dar una nueva definición de congruencia, que es en realidad equivalente a la anterior.

Definición (bis): Diremos que dos números enteros a y b son *congruentes módulo 4* si $a - b$ es múltiplo de 4.

Con mayor generalidad:

Definición: Dado m un número entero, diremos que dos números enteros a y b son *congruentes módulo m* si $a - b$ es múltiplo de m.

Por ejemplo, 23 y 3 son congruentes módulo 4, ya que 23-3 = 20. Nótese que también 23 y 3 son congruentes módulo 5. Del mismo modo, 45 y 31 son congruentes módulo 7 (pues 45-31=14) y también son congruentes módulo 2 o módulo 14.
La definición es válida también para valores negativos. Por ejemplo, 13 y -5 son congruentes módulo 9 pues:

$$13-(-5)=13+5=18$$

Notación: La frase *a y b son congruentes módulo m* suele escribirse del siguiente modo:
$a \equiv b\,(m)$ ó $a \equiv b\,(\text{mód } m)$

Tenemos entonces que, por ejemplo, $23 \equiv 3\,(4)$, que $20 \equiv 0\,(4)$ y también que $13 \equiv -5\,(9)$.
¿Es cierto que $7 \equiv 7\,(23)$? La respuesta es que sí, ya que 7-7 es 0 y 0 es múltiplo de 23. Ocurre en realidad lo siguiente:

Propiedad 1: Cualesquiera sean los números enteros a y m vale que $a \equiv a\,(m)$.

Sabemos que $24 \equiv 4\,(5)$, pues 24-4=20 y 20 es múltiplo de 5, ya que 5.4=20.
¿Es cierto que $4 \equiv 24\,(5)$? La respuesta es sí, debido a que 4-24=-20 y -20 es múltiplo de 5, pues 5.(-4)=-20.
Observemos que si un número entero p es múltiplo de m, entonces -p también lo es. En efecto, si p se escribe como m.k, entonces -p se escribe como m.(-k).
Luego, si a-b es múltiplo de m, también b-a lo será. En otras palabras tenemos:

Propiedad 2: Cualesquiera sean a y b números enteros, si $a \equiv b\,(m)$ entonces $b \equiv a\,(m)$.

En las próximas entregas de esta sección estudiaremos nuevas propiedades de la congruencia y veremos cómo ésta resulta una herramienta sumamente poderosa para trabajar con los números enteros.

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

PITAGORAS Y LA ESCUELA PITAGORICA

Los primeros conocimientos matemáticos de los que se tiene noticia, sólo estaban orientados por puntos de vista puramente prácticos. Pueblos como los babilonios, los egipcios o los hindúes ya conocían unos cuantos resultados aritméticos y geométricos, pero su teoría se caracterizaba por el tanteo y la inducción, despreocupándose por su validez general. A partir del siglo VI a.C. aparece en escena una nueva cultura que cambiaría el rumbo de las matemáticas: la cultura griega, uno de cuyos máximos exponentes fue la Escuela Pitagórica.

Orígenes del mundo griego

Las primeras grandes civilizaciones en suelo europeo las encontramos en la costa oriental del mar Mediterráneo. A mediados del segundo milenio a.C. florece una cultura extendida en la Grecia continental y en las islas del mar Egeo, en especial en la isla de Creta. Se trata del período micénico en la península y el minoico en Creta, en el suntuoso palacio real de *Cnossos* (2000 a.C.), cuyo lenguaje (llamado Lineal A), con excepción del sistema de numeración, aún no ha sido descifrado.

Estas culturas fueron invadidas por los *eolios*, *jonios* y *aqueos* (protagonistas estos últimos de las famosas guerras de *Troya*, hacia el 1200 a.C.), y más tarde por los *dorios*.

Luego, y durante cerca de medio milenio, la historia enmudece respecto de los pueblos egeos.

Mientras tanto los *fenicios* establecen en las costas del Mediterráneo un activo intercambio comercial, fundando allí numerosas colonias, e introduciendo, además, el alfabeto.

El mundo griego abarcaba entonces la región comprendida entre los mares Egeo y Jónico, y las colonias establecidas en las costas de los mares Negro y Mediterráneo. Y fue precisamente en las ciudades que se encontraban fuera del Peloponeso donde surgiría la matemática griega.

Pitágoras de Samos

En el siglo VI a.C. un comerciante griego nacido en *Mileto*, llamado *Tales*, comenzaría a transformar la matemática en la ciencia deductiva que hoy conocemos. En sus viajes a las tierras del Nilo, Tales entra en contacto con el saber egipcio, y luego regresa a su tierra natal para convertirse en uno de los siete sabios de Grecia.

Se cree que entre sus discípulos se hallaba un personaje semilegendario, uno de los más importantes hombres de ciencia de la Grecia antigua; aquél que dio nombre al teorema más famoso, quizá, de toda la matemática: **Pitágoras**.

Es poco lo que se conoce de este maestro griego. Se sabe que en la Antigüedad se escribieron unas cuantas biografías, pero todas ellas se han perdido. No existe ninguna obra escrita por él; la información que se tiene está basada en una tradición que ha persistido a través de los años.

Nació alrededor del año 569 a.C. en la isla de *Samos*, colonia jónica de griegos en las costas del mar Egeo. Ésta era una potencia comercial en creciente progreso. Por aquel entonces, *Policrates*, su dictador, había destruido el poder de la aristocracia terrateniente y gobernaba la isla con el apoyo de los comerciantes.

Es probable que Pitágoras haya realizado viajes a Egipto, Babilonia y la India, donde habría entrado en contacto con los saberes matemáticos y religiosos de aquellos lugares. Es destacable el hecho de que fuera contemporáneo de Buda, Confucio y Lao-Tsé.

Al regresar luego a Samos y encontrarla dominada por los persas, decide emigrar al sur de Italia, la llamada Magna Grecia. Se establece, entonces, en la ciudad de *Crotona*, la "ciudad esotérica", una de las más florecientes colonias griegas.

Allí comienza a disertar sobre filosofía y matemática. A su cátedra acuden entusiastas de todas las clases, incluso lo hacen las mujeres, quienes tenían prohibido, por ley, asistir a reuniones públicas. Entre estas mujeres se encontraba *Theano*, la joven y hermosa hija de su posadero *Milo*, con la cual se casó. Theano escribió más tarde una biografía de su esposo que desgraciadamente se ha perdido.

La Escuela Pitagórica

La influencia de este gran maestro fue tan notable, que los más interesados de sus discípulos se constituyeron gradualmente en una sociedad o hermandad. Se los conoció como la **Escuela Pitagórica**.

La comunidad pitagórica fue una hermandad religiosa dedicada a la práctica del ascetismo y al estudio de las matemáticas. Los miembros de esta fraternidad se comprometían, con un solemne juramento, a mantener en secreto las enseñanzas de la Escuela. Éstos debían hacer examen de conciencia diariamente. Creían en la inmortalidad del alma y en su transmigración, con el resultado de que no debería ser sacrificado ningún animal ante el temor de que pudiera ser la nueva morada del alma de un amigo muerto. Así, a sus miembros se les imponía un severo régimen vegetariano.

La particularidad del sistema pitagórico fue encontrar en las matemáticas una clave para resolver el enigma del Universo y un instrumento para la purificación del alma. *Aristóteles* sintetizó la labor de los pitagóricos con las siguientes palabras: "los pitagóricos se dedicaron primero a las matemáticas, ciencia que perfeccionaron y, compenetrados con ésta, imaginaron que los principios de las matemáticas eran los principios de todas las cosas." Todos los descubrimientos que la Escuela realizaba eran atribuidos al mismo Pitágoras, por lo que resulta casi imposible diferenciar lo producido por él y lo elaborado por sus alumnos.

Los pitagóricos fueron los primeros en establecer la *demostración* en la matemática, mediante el razonamiento deductivo. A ellos se les debe, incluso, la misma palabra *Matemática* que, según la acepción más difundida, significa "ciencia por excelencia"; matemáticos eran los miembros científicos de la secta. Se clasificó a la Matemática, además, en cuatro ramas: aritmética, geometría, música y astronomía, clasificación que se mantuvo durante más de dos milenios en lo que constituyó el famoso *Quadrivium* de las ciencias.

A causa del poder político que adquirió, contraria a las ideas democráticas de la época, la Escuela Pitagórica fue objeto de sospechas por todos los que no formaban parte de ella. En el año 501 a.C. se produce una revuelta popular e incendian la casa de Milo, que por aquel entonces ocupaba la hermandad. Perece allí, un gran número de sus miembros más notables. Pitágoras hubo de refugiarse en *Tarento* y después en *Metaponto*, donde un año después fue asesinado en otra conmoción popular. A pesar de la muerte de Pitágoras y de la destrucción de su Escuela en Crotona, sus discípulos se reorganizaron en Tarento, formando una nueva escuela que continuó durante 100 años.

Entre los principales sucesores de Pitágoras se encontraban *Hipaso*, *Filolao* y *Arquitas*.

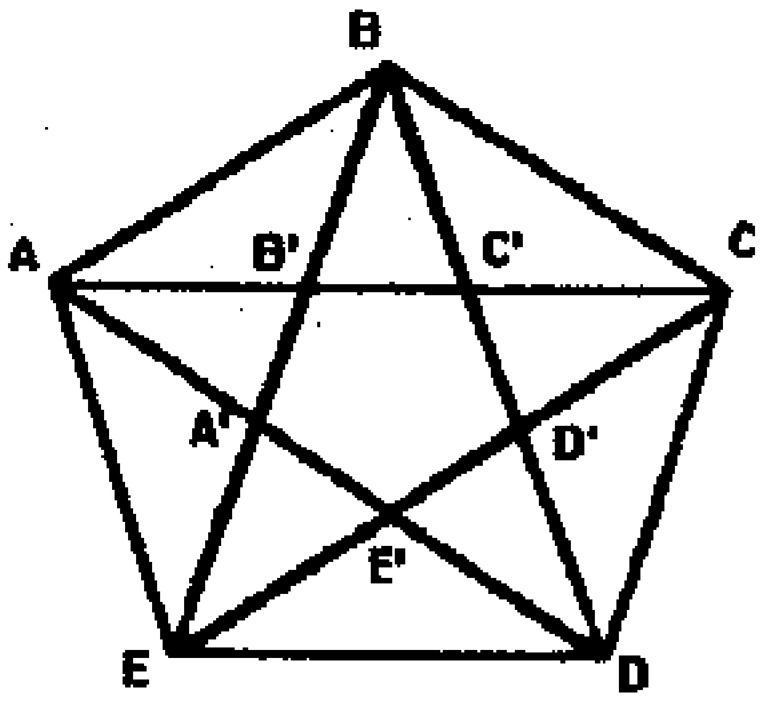
Más tarde, cuando los miembros de la sociedad se dispersaron, la regla del silencio cayó en desuso y se divulgaron sus doctrinas. El primer libro lo escribió Filolao en el 370 a.C.. Sin embargo, la gloria de todos los descubrimientos que se realizaban seguían siendo patrimonio de su fundador.

La estrella pentagonal

El símbolo distintivo de la hermandad fue la estrella pentagonal, que ellos llamaban pentagrama. Este emblema es la figura que resulta al trazar las cinco diagonales de una cara pentagonal de un dodecaedro regular.

El pentágono estrellado ya había aparecido con anterioridad en el arte babilónico.

Una propiedad importante del pentagrama es relatada por Carl Boyer en su "Historia de la Matemática": "Si comenzamos por un pentágono regular ABCDE y trazamos las cinco diagonales, éstas se cortarán en los puntos A'B'C'D'E' que forman otro pentágono regular. Observando que el triángulo BCD', por ejemplo, es semejante al triángulo isósceles BCE, y teniendo en cuenta también los varios pares de triángulos congruentes que aparecen en la figura, resulta fácil ver que los puntos A'B'C'D'E' sobre las diagonales las dividen de una manera sorprendente. En cada caso, uno de estos puntos divide a una diagonal en dos segmentos distintos y tales que la razón de la diagonal completa al mayor de los dos segmentos es la misma que la de éste al segmento menor. Esta subdivisión de la diagonal es la conocida *sección áurea* de un segmento."



El "Número"

Los pitagóricos le adjudicaron especial importancia al **número**. Esto se refleja en las siguientes palabras de Filolao: "y, en verdad, todas las cosas que se conocen poseen número, pues ninguna cosa podría ser percibida ni conocida sin éste." El mismo Pitágoras declaraba: "Dios es, en efecto, número.", y por número se refería al número natural común.

Pero para los pitagóricos, no sólo todas las cosas poseen número, sino que los números son concebidos como cosas; las expresiones: "números cuadrados" o "números triangulares", no son metáforas; esos números son, efectivamente, ante los ojos y ante el espíritu, cuadrados y triángulos.

El número es definido, desde el punto de vista geométrico, como una suma de puntos representados en el espacio, y las figuras (líneas, superficies o volúmenes), que están constituidas por esos puntos materiales llamados *mónadas*, también representan números. De esta manera, identificaron al número *uno* con el punto, al *dos* con la línea, al *tres* con la superficie, y al *cuatro* con el volumen, de acuerdo con el número mínimo de puntos necesarios para definir cada una de esas dimensiones.

Según Filolao, el número tiene dos formas propias: el *impar* y el *par*. Existía una tercer especie: el *par-impar*. Esta última denominación, que ha sido aplicada algunas veces a la unidad, designa también los números pares, como el seis y el diez, que a la primer bisección dan números impares.

Los pitagóricos clasificaron a cada número considerando sus divisores, pero exceptuando al mismo número (es lo que se llamará sus partes alícuotas) y sumándolos. Esta suma será, en general, mayor o menor que el mismo número, que será llamado, en consecuencia, *abundante* o *deficiente*. Por ejemplo, 12 es abundante, porque la suma de sus partes alícuotas es: $1+2+3+4+6=16$. En cambio el 8 es deficiente, pues $1+2+4=7$.

Pero existen ciertos números en los cuales la suma de sus partes alícuotas dan como resultado el mismo número. Estos números eran llamados *perfectos*.

Por ejemplo:

$6=1+2+3$ $\quad 28=1+2+4+7+14$

$496=1+2+4+8+16+31+62+$
$+124+248$

Dice *Euclides*: "partiendo de la unidad, se forma la progresión geométrica de razón 2, y si la suma de sus términos es un número primo, el producto de este número primo por el último término de la progresión es un número perfecto." Por ejemplo:

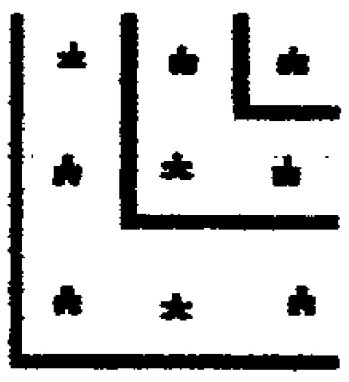
$1+2+4+8+16=31$ y 31 es un número primo. Luego, $31.16=496$, que es un número perfecto.

Ciertos números que también llamaron la atención de los pitagóricos, fueron los números *cuadrados*. Estos se formaban tomando a la unidad como punto de partida y agregando a ésta la serie ascendente de los números impares. La progresión aritmética que así se forma goza de la propiedad de que en cada uno de los pasos de su construcción en que uno se detenga, la suma de la unidad y de los números impares constituye un número cuadrado. Por ejemplo:

$1+3=4$ $\quad 1+3+5=9$

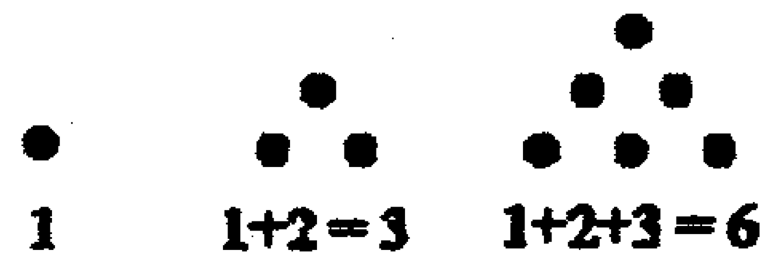
$1+3+5+7=16$

Todos los números cuadrados están dados por este proceso de formación. Además, la adición sucesiva de un número impar permite pasar de un cuadrado al cuadrado siguiente (por ejemplo, si a la serie 1+3 le sumo 5, se pasa del cuadrado 4 al cuadrado 9). Así, todo número impar se define como la diferencia de dos superficies cuadradas que tienen respectivamente por lados dos enteros consecutivos. Utilizando el ejemplo anterior: 1+3+5=9 ; luego 9 - 4 = 5. El número impar 5 es la diferencia de dos cuadrados, 9 y 4, que tienen por lados dos enteros consecutivos, 3 y 2. A tal número impar se lo llamó *gnomon*. Geométricamente hablando el gnomon es un borde rectangular de brazos iguales en forma de L, añadido a un determinado cuadrado para formar el cuadrado siguiente:



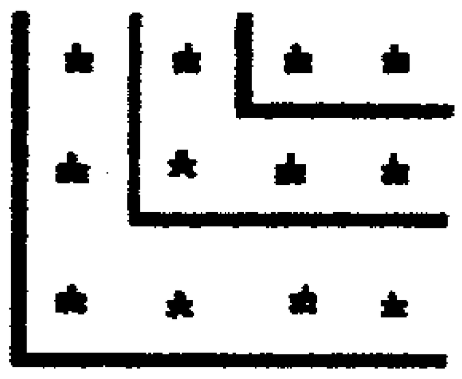
Esta definición geométrica explica la constitución interna del número impar; él es la suma de un cuadrado de lado igual a la unidad y de dos rectángulos iguales cuyo lado menor es también igual a la unidad.
Por ejemplo:
5=1+2+2 7=1+3+3
9=1+4+4

Los pitagóricos descubrieron también que, a partir de la suma de los números naturales, era posible representar puntos que denotaban la unidad, dispuestos en forma de triángulo. De esta manera, y sumando tales puntos se obtenían los números *triangulares*, como por ejemplo, el 1, el 3, o el 6:



También existían los números *pentagonales*, *hexagonales*, etc..
Si, por otra parte, sumamos los números pares consecutivos, obtenemos una serie de números llamados *oblongos*, en donde cada uno es el doble de un número triangular. Esta serie constituye sumas de progresiones aritméticas que son al mismo tiempo productos de dos factores, y por consiguiente, superficies. Uno de los factores es igual a la mitad del último número par de la progresión. El otro es el primer factor aumentado en uno.
Por ejemplo:
2+4=6 6=2.3
2+4+6=12 12=3.4
2+4+6+8=20 20=4.5

La superficie tiene pues sus dos lados desiguales, por lo que se llama heterómaca o rectangular.



Llamaron números *amigos* a aquellos en donde cada uno era igual a la suma de los divisores del otro. Por ejemplo: 220 y 284, pues 220=1+2+4+71+142, que son los divisores de 284 y 284=1+2+4+5+10+11+20+ +22+44+55+110, que son los divisores de 220.
La palabra *número* se usaba sólo para los enteros positivos. A las fracciones se las consideraba como una *razón* o *relación* entre dos números enteros . Tal como lo expresaba Euclides (Elementos Libro III): "Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo."
No cabe duda que la más famosa realización de los pitagóricos la constituye el llamado **Teorema de Pitágoras**, sin el cual no es posible concebir la Matemática en el sentido más amplio de la palabra.
El enunciado del Teorema es conocido por todos: "en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."
Los egipcios ya conocían esta relación en los triángulos de 3, 4 y 5 unidades de longitud. Los hindúes también la conocían para los triángulos de 5, 12 y 13 unidades. Pero fue Pitágoras el primero que enunció y demostró el Teorema para todos los triángulos rectángulos. De acuerdo con un relato, cuando Pitágoras descubrió este admirable resultado, en su alborozo, sacrificó un buey, aunque esto es bastante improbable dadas sus estrictas reglas vegetarianas.
Los pitagóricos encontraron la formación de ciertas ternas de números que cumplen el teorema:

$$\frac{m^2-1}{2}\,,\ m\ ,\ \frac{m^2+1}{2},$$

con m entero impar.
Pitágoras aprendió en Babilonia tres medias: la aritmética, la geométrica y la armónica.

Dados dos números a y c, la media aritmética es un número b tal que:

$$b=\frac{a+c}{2}$$

Del mismo modo, la media geométrica es un número b tal que:

$$b=\sqrt{ac}$$

Así como también, la media armónica es un número b tal que:

$$b=\frac{2ac}{a+c}$$

Los pitagóricos también conocían la "Proporción Perfecta" o "Divina Proporción", que relaciona dos de las medias: el primero de dos números es a su media aritmética como su media armónica es al segundo de ellos:

$$\frac{a}{\frac{a+c}{2}}=\frac{\frac{2ac}{a+c}}{c}$$

La "música" pitagórica

La contribución de los pitagóricos a la **música** es sumamente interesante. Demostraron que los intervalos entre notas musicales pueden ser representados mediante razones de números enteros, utilizando una especie de guitarra con una sola cuerda, llamada *monocordio*. Éste poseía un puente móvil que al desplazarse producía, en ciertas posiciones, notas que, comparadas con la emitida por la cuerda entera, resultaban más armoniosas que otras. El más básico de tales intervalos es la octava. En el monocordio es el intervalo entre la nota emitida por la cuerda entera y la emitida por otra de longitud igual a su mitad. Es decir, cuando la cuerda tiene longitud 1/2 de una determinada nota base, suena una octava más alta que la nota original. Si su longitud es 3/4 de la primitiva, la cuerda emite la cuarta de la nota base, y si su longitud es 2/3 de la inicial, la nota que suena es la quinta de la nota base. Partiendo de una nota base DO se tiene el siguiente esquema:

DO(base) RE MI FA(cuarta) SOL(quinta) LA SI DO

Según el relato de *Boecio*, un escritor que vivió en el siglo VI de la era cristiana: "Pitágoras, obsesionado por el problema de explicarse matemáticamente los intervalos fijos de la escala, al pasar frente a una herrería, le llamó la atención la musicalidad de los golpes de los martillos sobre el yunque. Entró y observó largamente. Luego, al experimentar, utilizó cinco martillos. El peso de cuatro de ellos estaba en la proporción de 12, 9, 8 y 6. El quinto, cuyo peso no correspondía a relación numérica alguna con el resto, era el que echaba a perder la perfección del repiqueteo. Fue retirado, y Pitágoras volvió a escuchar. El mayor de los martillos, cuyo peso era doble del más pequeño, daba la octava más baja. Como los pesos de los otros dos martillos (9 y 8) correspondían a las medias aritmética y armónica respectivamente de los primeros pesos (12 y 6), pensó que aquellos dos martillos le darían las otras notas fijas de la escala."

Cosmología

La **cosmología** de los pitagóricos es muy curiosa e importante. Describía el Universo en términos numéricos.
Así, "las matemáticas -según explica Farrington- contribuían a mantener el alma de los adeptos libre de contactos con lo terreno y material, y se adaptaban al temperamento cambiante de un pueblo en el que el desprecio por el trabajo manual se hermanaba con el incremento de la esclavitud."
Los pitagóricos definieron, aunque no probaron, que los cuerpos celestes eran esferas perfectas, que describían órbitas perfectamente circulares, teniendo aquí la palabra perfecto, significación moral y matemática.
Según Aristóteles, los pitagóricos creían que todo el cielo era una escala musical y un número, y que los movimientos de los cuerpos celestes originaban sonidos acordes, aunque inaudibles; la razón por la cual no los oímos, de acuerdo con una versión, reside en que estamos habituados a ellos desde nuestro nacimiento.
Según Filolao, el centro del Universo es una masa invisible de fuego y la Tierra gira en torno a él, así como los

demás cuerpos celestes, el Sol y la Luna. Pero introduce un segundo cuerpo invisible, la *Anti-Tierra*, que gira alrededor del fuego central, interior y opuesto a la Tierra. Observando desde el centro hacia el exterior se tendría: el fuego central, luego la Anti-Tierra, a continuación la Tierra y exteriormente a ésta, la Luna, el Sol y los planetas.

De acuerdo con Aristóteles la Anti-Tierra es un artilugio que los pitagóricos utilizaron para hacer coincidir sus teorías con sus propios argumentos matemáticos y opiniones. Como sostenían que el número diez era sagrado y los cuerpos que se mueven en los cielos son nueve (la esfera de las estrellas fijas, considerada como uno; dos planetas inferiores: Mercurio y Venus; tres planetas superiores: Marte, Júpiter, Saturno; el Sol, la Luna y la Tierra), para satisfacer esa condición, inventaron un décimo, la Anti-Tierra.

La característica más interesante de esta visión cosmológica de los pitagóricos es que retira a la Tierra del centro del Universo. Según Aristóteles, no se consideró a la Tierra lo suficientemente noble para ocupar la posición más importante del Universo.

Misticismo numérico

Los pitagóricos dieron a ciertos números significados que podrían parecer, quizás, caprichosos. Al número uno se lo identificó con la *razón* y se lo consideraba como el origen de todos los números. El dos con la *opinión*, y es el primer número par o *hembra*. El tres es el primer número *macho* o el número de la *armonía*. El cuatro con la *justicia*, inmutable y equitativo. El cinco sugería el *matrimonio*, la unión del primer número par con el primer número impar auténtico. El seis es el número de la *creación*. A la diosa virgen *Atenea* se le atribuyó el número siete, porque el siete es el único de la década que no tiene ni factores ni productos.

El número diez, *tetractys sagrado*, fue un símbolo muy venerado por la hermandad. La virtud de este número reside en que, estando constituido por la suma de los cuatro primeros números: 1+2+3+4, encierra la naturaleza de las diversas especies de números: la de los pares, de los cuales el primero es el dos; la de los impares, de los cuales el primero es el tres; la del par-impar, que es aquí la unidad; la de los cuadrados perfectos, de los cuales el primero es el cuatro. En boca de Filolao, el número diez "es la norma del Universo, la potencia ordenadora de los hombres y de los dioses."

Descubrimiento de los irracionales

Los pitagóricos se esforzaron por alcanzar la armonía en el reino de los números y de este modo lograr abarcar con la mirada todo el Universo, captándolo mediante números enteros. Así podían sentir que se hallaban en los umbrales del misterio de la existencia. Pero una potencia infernal destrozó este sueño implacablemente, a la vez que engendró los más altos hallazgos y de más vasto alcance: **el descubrimiento de los números irracionales**.

El concepto que tenían los helenos de este descubrimiento es ilustrado en el libro décimo de los Elementos de Euclides: "Se dice que el hombre que por primera vez llevó a la luz, desde la oscuridad, el estudio de los números irracionales, pereció en un naufragio. Y esto ocurrió porque lo inexpresable y lo inimaginable debió haber quedado en el misterio. Por esta razón, también aquellos que divulgaron y tocaron esta imagen de lo viviente fueron instantáneamente destruidos y relegados al mismo lugar del surgimiento, donde permanecen apresados para siempre por las olas eternas."

El problema radicó en el hallazgo de magnitudes que no podían ser expresadas en términos de otras, a las que llamaron *inconmensurables*, es decir, imposibles de medir.

Este descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, que hoy en día representan los irracionales, tuvo trágico lugar en el triángulo rectángulo isósceles. Por ejemplo, en el de catetos iguales a 1, el cuadrado de la hipotenusa debe ser igual a 2, ya que $1^2+1^2=2$, y el valor, entonces de dicha hipotenusa es igual, en el modo actual de escritura a $\sqrt{2}$. Pero, por más que se busque todo lo que se quiera, no existe número entero ni fraccionario que multiplicado por sí mismo, reproduzca exactamente el número 2. El número $\sqrt{2}$ es inexpresable. Sin embargo, la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, es decir, la diagonal de un cuadrado, se presenta de un modo tan neto, tan determinado y tan evidente, que no es posible distinguirla de ningún otro segmento de recta.

Sin embargo, actualmente se sugiere que los pitagóricos llegaron a la noción de inconmensurabilidad a través de la figura del pentágono regular, ante la imposibilidad de medir su diagonal con el lado.

También se encontraron magnitudes inconmensurables en las secciones áureas. Esto es, cuando una línea x es dividida en dos partes p y q, tal que la razón de x a la parte p, es igual a la razón de p a la otra parte q. Si lo expresamos en la notación simbólica:

$$x = p + q \quad \text{y} \quad \frac{x}{p} = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow q = \frac{p^2}{x}$$

$$\Rightarrow x = p + \frac{p^2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 = xp + p^2$$

$$\Rightarrow x^2 - px - p^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4p^2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{p \pm p\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La presencia de $\sqrt{5}$ indica la irracionalidad.

Cuerpos cósmicos

Del estudio de los polígonos se llegó al estudio de los cuerpos o poliedros. En la Geometría del espacio sólo existen cinco poliedros regulares. Los tres más simples: el *cubo*, el *tetraedro* y el *octaedro*, ya eran conocidos en el antiguo Egipto. Los pitagóricos descubrieron los otros dos: el *dodecaedro*, compuesto por doce pentágonos regulares; y el *icosaedro*, limitado por veinte triángulos equiláteros.

Parece ser que Hipaso fue el primero que logró inscribir un dodecaedro regular en la esfera. Se cuenta que, en contra de la acostumbrada reserva de los pitagóricos, hizo público este descubrimiento y pereció en el mar a causa de este sacrilegio.

Se designaron a estos poliedros como cuerpos cósmicos. Esta denominación se halla probablemente relacionada con la representación post-pitagórica y atomística de la estructura del Universo. Según esta escuela, los elementos estarían formados por pequeñas partículas, las cuales, en el caso del fuego, tienen la forma de tetraedro; en el aire, octaedro; en el agua, icosaedro; y en la Tierra, cubo. Como la forma del dodecaedro no figura entre las partículas constitutivas de los elementos, se afirmaba que dicha forma servía de plan de construcción del Universo, y hacía las veces de contorno del mismo.

****

La doctrina pitagórica no sólo sucumbió frente a sus propias contradicciones internas, sino también ante las críticas que le dirigieran las doctrinas de la Escuela de *Elea*, cuyo fundador fuera *Parménides*. Entre sus discípulos se encontraba *Zenón* de Elea, uno de los mayores críticos de las concepciones pitagóricas. Sus paradojas (Aquiles y la tortuga, la flecha en el aire, etc.) demuestran los absurdos implicados en la concepción de los cuerpos como suma de puntos, o del tiempo como suma de instantes, o del movimiento como suma de tránsitos de un punto a otro.

Sin embargo, a pesar de que sus descubrimiento matemáticos les sirvieron como confirmación de sus creencias sobrenaturales, dichos descubrimientos constituyen justamente el aporte más valioso de sus pensamientos.

Andrea Morales
Claudio Salpeter

Bibliografía:

* BABINI, José - "Historia sucinta de la ciencia"
* BELL, E.T. - "Los Grandes Matemáticos" - Ed. Losada
* BOYER, Carl - "Historia de las Matemáticas"
* COLLERUS, Egmont - "Historia de la Matemática"
* FARRINGTON, Benjamín - "Ciencia Griega"
* HEIBERG, J.L. - "La ciencia en la Antigüedad clásica"
* LLOYD, G.E. - "De Tales a Aristóteles" - Ed. EUDEBA
* SANCHEZ SARMIENTO, Fernando - "Historia de las Matemáticas"
* TURNBULL, Herbert W. - "Los Grandes Matemáticos" - Ed. Sigma.

La evolución de la enseñanza

(Carta de J. Angel Domínguez Pérez - Correo de Lectores "Cacumen" - España)

La reforma de la enseñanza está lejos de alcanzar unanimidad. A continuación se muestra la evolución de un problema a través de distintos métodos.

Esperamos que esta comparación sirva para la elaboración de una programación transicional, estabilizada, con una movilidad estructural totalizadora en base a una planificación operacional insumida.

La enseñanza en 1950

Un campesino vende una bolsa de papas por \$1000. Sus gastos de producción se elevan a los 4/5 del precio de venta. ¿Cuál es su beneficio?

Enseñanza tradicional 1960

Un campesino vende una bolsa de papas por \$1000. Sus gastos de producción se elevan a los 4/5 del precio de venta, o sea, a \$800. ¿Cuál es su beneficio?

Enseñanza moderna 1970

Un campesino cambia un conjunto P de papas por un conjunto M de monedas. El cardinal del conjunto M es igual a \$1000 y cada elemento que pertenece a M vale \$1.
Dibuje 1000 puntos gordos que representan los elementos del conjunto M. El conjunto F de los gastos de producción comprende 200 puntos menos que el conjunto M. Represente el conjunto F como subconjunto del conjunto M y dé la respuesta a la cuestión siguiente: ¿Cuál es el cardinal del conjunto B de los beneficios? Dibujar B en color rojo.

Enseñanza reformada 1986

* Objetivos para el alumno

1. Memorizar el nombre del profesor.
2. Trasncribir el texto de la pizarra al cuaderno.
3. Utilizar correctamente el papel y el lápiz.
4. Utilizar correctamente la regla y el subrayado.
5. Analizar el texto.
6. Diferenciar las palabras.
7. Seleccionar los datos importantes.
8. Transferir los conocimientos anteriores.
9. Recuperar el tiempo perdido con otros objetivos.
10. Completar la actividad propuesta.

* Objetivos para el profesor

1. Consultar el Manual de Instrucción de Objetivos Tomo IV desde página 85 a página 986.

* Problema: Un campesino vende una bolsa de papas por A1000. Los gastos de producción se elevan a A800 y el beneficio obtenido es de A200.

* Actividades

1. Señala la palabra papas.
2. Discute sobre ella con tus compañeros de grupo.

Enseñanza transformada 1995

el tío abaristo lavriego e intermediario que enriqueció al bender espekulando una volsa de papa.
analisá el testo y de seguido dí lo ke digieras déstos avusos hanti-democráticos.

Mientras lleno el objetivo 17° de la ficha de Información Pedagógica N° 7526, los saludo con compasión.

El Problema de Waring

En esta sección trataremos sobre temas matemáticos no muy conocidos y que esperamos sirvan tanto para el enriquecimiento personal como para ser llevados al aula. Comenzaremos con una nota sobre el problema de Waring.

La Teoría de los Números, la ciencia que estudia las propiedades de los números enteros, es una de las ramas más apasionantes de la matemática. Uno de sus mayores atractivos consiste en que en ella es posible enunciar problemas que, aún cuando no tienen una solución evidente, sí tienen en cambio planteos muy fáciles de comprender.

Muchas de las técnicas que se utilizan para resolver estos problemas son sumamente complejas. Existen, no obstante, problemas no carentes de interés y que quizás aún no han sido exhaustivamente investigados por los especialistas. No es inconcebible que tales problemas puedan tener una solución que utilice solamente conocimientos elementales (aunque entrelazados en forma muy compleja).

Algunas de las cuestiones vinculadas al Problema de Waring y que aún están pendientes de solución pueden quizás ser resueltas en forma elemental.

El número 1 es un cuadrado, ya que $1 = 1^2$. El 2 no lo es, pero puede escribirse como suma de dos cuadrados: $2 = 1 + 1$. El 3 es suma de tres cuadrados. El 4 es en sí mismo un cuadrado y el 5 es suma de dos. ¿Necesitaremos cuatro cuadrados alguna vez? La respuesta es que sí, y muy pronto. El 7 se escribe como suma de cuatro cuadrados $(4 + 1 + 1 + 1)$ y no menos. Que no pueden ser menos de cuatro se comprueba inmediatamente ya que los únicos cuadrados que pueden llegar a usarse son 1 y 4.

A medida que avanzamos por la sucesión de los números cuadrados, 1, 4, 9, 16, 25, 36,... la distancia entre dos consecutivos es cada vez mayor. Esto podría hacernos sospechar que, si ya el 7 requiere una suma de cuatro cuadrados, muy pronto hallaremos un número que sea suma de cinco cuadrados **y no menos**. *Sorprendentemente esto nunca ocurre. A pricipios del siglo XVIII Lagrange demostró que **todo número natural puede escribirse como suma de no más de cuatro cuadrados**. Este hecho había sido anteriormente conjeturado por Fermat.*

Veamos qué ocurre con los cubos. El 7 es suma de siete cubos (siete unos); el 15 requiere ocho cubos y el 23 requiere nueve ¿La cantidad de cubos que se necesitan irá creciendo indefinidamente? Tal vez ello no ocurra y, así como siempre bastan cuatro cuadrados, quizás exista una cantidad de cubos que sirva para todo número natural. De hecho, en 1707 el inglés Edward Waring conjeturó que para cualquier exponente natural n existe una cantidad k tal que todo número natural es suma de a lo más k potencias n-ésimas. Esta conjetura fue demostrada por Hilbert en 1909. Desde entonces se da el nombre de Problema de Waring a la cuestión de determinar exactamente qué valor de k corresponde a cada n.

En la literatura suele llamarse $g(n)$ a la cantidad mínima de potencias n-ésimas que es necesario sumar para construir cualquier número natural.

Aclaremos un poco el significado de esta definición. Sabemos que todo número natural puede escribirse como suma de a lo más cuatro cuadrados, esto quiere decir que $g(2)$ es cuanto mucho igual a 4. Es decir, cuatro cuadrados bastan, pero quizás alcance con una cantidad menor. Si, por ejemplo, tres cuadrados fuesen siempre suficientes entonces $g(2)$ sería 3 y no 4. Pero ya vimos que tres cuadrados **no son suficientes** (el 7 requiere cuatro). En conclusión g(2) es 4 y no menos. Por otra parte vimos ya que g(3) es mayor o igual que 9 (el 23 requiere nueve cubos). El propio Hilbert demostró que vale la igualdad, g(3) = 9.

Euler, años antes de la demostración de Hilbert, había probado que el valor de g(n) es siempre mayor o igual que:

$$\left[1{,}5^n\right]+2^n-2$$

Donde el corchete indica "parte entera". Algunos matemáticos sospechan que esta fórmula da el valor *exacto* de g(n). Esto es cierto para n = 2 y n = 3. Por otra parte, la fórmula de Euler da una cota de 19 para el valor de g(4). Que valga la igualdad en este caso no ha sido hasta el momento probado ni refutado. Liouville demostró que 53 cuartas potencias son suficientes para escribir cualquier número natural. Desde entonces esta cantidad ha sido mejorada en sucesivas etapas y lo más que se sabe en la actualidad es que g(4) es al menos igual a 23 (H. E. Thomas Jr., 1972). En lo que toca a n = 5, en 1964 Jing-Jung Chen probó que g(5) = 37.

Se sabe que para todo n desde 6 y hasta 200.000 los valores de g(n) correspondientes se ajustan a la fórmula de Euler. En 1957 se probó que sólo puede haber finitos n > 5 para los cuales la fórmula falle, sin embargo la demostración no da ningún método para hallar esos fallos (si es que existen).

Como ya fue dicho, Lagrange probó que todo número natural es suma de cuatro cuadrados como máximo. En realidad, si admitimos la utilización del cero, podemos afirmar que todo número entero no negativo es suma de *exactamente* cuatro cuadrados (por ejemplo $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ y $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$). Esta observación no cambia ningún hecho esencial y nos permitirá expresarnos en forma más simple.

La demostración de Lagrange de que g(2) = 4, si bien usa sólo herramientas elementales, es demasiado extensa para incluirla aquí. Veamos en cambio cómo hizo Liouville para probar que 53 cuartas potencias siempre son suficientes.

Liuoville dió por supuesto el hecho de que todo número entero no negativo es suma de cuatro cuadrados. Utilizó también la siguiente identidad, cuya validez es fácil de verificar:

$$
\begin{aligned}
&6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2=\\
&=(x_1+x_2)^4+(x_1+x_3)^4\\
&+(x_1+x_4)^4+(x_2+x_3)^4\\
&+(x_2+x_4)^4+(x_3+x_4)^4\\
&+(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4\\
&+(x_1-x_4)^4+(x_2-x_3)^4\\
&+(x_2-x_4)^4+(x_3-x_4)^4
\end{aligned}
$$

Sea entonces n un número natural; queremos probar que n es suma de 53 cuartas potencias. Dividiendo a n por 6, podemos escribirlo de la forma $n = 6x + y$, donde y puede valer 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Por ejemplo si $n = 25$, entonces $x = 4$ (el cociente al dividir 25 por 6) e $y = 1$ (el resto de la división).

Empleamos ahora por primera vez el teorema de Lagrange. El número x es suma de cuatro cuadrados, $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Por lo tanto $n = 6x + y = 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + y = 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 + 6d^2 + y$.

Si aplicamos nuevamente el teorema de Lagrange a los números a, b, c y d, cada uno de ellos es entonces suma de cuatro cuadrados:

$$
\begin{aligned}
a&=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\\
b&=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2\\
c&=c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2\\
d&=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2
\end{aligned}
$$

En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
n&=6(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)^2\\
&+6(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)^2\\
&+6(c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2)^2\\
&+6(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2)^2+y
\end{aligned}
$$

La identidad antes mencionada nos dice que cada uno de los cuatro paréntesis del miembro de la derecha es suma de 12 cuartas potencias. El número y (que podía valer de 0 a 5) es suma de cinco cuartas potencias como máximo. En consecuencia, n es suma de 4.12 + 5 = 53 cuartas potencias como máximo.

Como ya fue dicho, todo número natural puede escribirse como suma de nueve cubos. Por otra parte esta cantidad es la mínima necesaria, es decir ocho cubos no alcanzan para todos los números. La razón es que existen números como el 23 y el 239 que realmente necesitan nueve cubos para ser formados (ni el 23 ni el 239 son suma de ocho cubos o menos).

Como también dijimos, el hecho de que 9 sea la cantidad mínima de cubos que se necesitan para formar cualquier número se expresa diciendo que $g(3) = 9$.

Curiosamente, en 1939, Dickson demostró que 23 y 239 son los **únicos** números que requieren realmente nueve cubos y que para todos los demás basta con ocho o menos. Al poco tiempo además se probó que sólo hay 15 números que requieran ocho cubos (15, 22, 50, 114, 167, 175, 186, 212, 231, 238, 303, 364, 420, 428 y 454). Para todos los restantes alcanza con siete o menos.

Todos los números naturales, excepto 17 de ellos, pueden formarse con siete cubos o menos.

El párrafo anterior motiva la definición de *G(n)*, que es la cantidad mínima de potencias n-ésimas que son necesarias para formar todos los números naturales, salvo finitos de ellos.

Así, G(3) sería en principio igual a 7; pues todos los números (excepto 17 de ellos) son suma de siete cubos o menos. Si además ocurriera que **sólo una cantidad finita de números** requiere 7 cubos y que todos los demás se pudieran formar con 6 o menos, entonces el valor de G(3) sería a lo sumo igual a 6. A la fecha no se conoce si G(3) es 7 o si es menor.

Algunos especialistas sospechan que G(3) puede incluso ser igual a 4. Si esto fuese cierto todos los números naturales, salvo finitos, serían suma de 4 cubos. Y en consecuencia existiría un N a partir del cual todos los números serían suma de cuatro cubos o menos.

Los matemáticos ingleses Hardy y Littlewood emplearon métodos nuevos y más complejos para abordar el problema de Waring (la descomposición de números naturales como suma de potencias n-ésimas). Demostraron que todos los números a partir de cierto punto en adelante son suma de 19 cuartas potencias. Dicho de otra forma, sólo hay finitos números naturales que necesiten 20 o más de ellas. El resultado de Hardy y Littlewood establece entonces que G(4) es a lo sumo 19; pero quizás baste con una cantidad menor. En efecto, en 1939 Harold Davenport demostró que G(4) es en realidad igual a 16. Es decir, existe un N a partir del cual todo número natural es suma de 16 cuartas potencias.

Dijimos que Lagrange, en el siglo XVIII, había probado *que todo número es suma de a lo más cuatro cuadrados*. El 7, por ejemplo, necesita verdaderamente esa cantidad. Se tiene que $7 = 4 + 1 + 1 + 1$ y que no es suma de **tres** cuadrados (o menos).

En realidad, son infinitos los números que requieren cuatro cuadrados. Por ejemplo, todo número de la forma $4^n(8m + 7)$ está en esas condiciones. Esto demuestra que $G(2) = 4$. Los valores de G(2) y G(4) son los únicos G(n) conocidos con exactitud hasta la fecha.

Son muchas las variantes y generalizaciones que se han propuesto para el problema de Waring. Una de ellas consiste en permitir sumas y restas de potencias n-ésimas. En muchos casos esto disminuye la cantidad de potencias necesarias para construir un número. Por ejemplo ya fue dicho que el 7 es suma de cuatro cuadrados (y no de menos), pero $7 = 4^2 - 3^2$. La situación del 6, en cambio, no mejora en este caso. El 6 es suma de tres cuadrados ($6 = 4 + 1 + 1$), y si se permiten sumas y restas, la mínima cantidad de cuadrados necesarios sigue siendo tres.

Es fácil probar que todo número se obtiene como suma y resta de a lo más tres cuadrados. Para ello basta observar que si n es par, $n = 2x$, entonces se tiene que $n = x^2 - (x - 1)^2 + 1^2$. Por ejemplo $8 = 4^2 - 3^2 + 1^2$. Nótese que la fórmula anterior da *algún* método para escribir a n con sumas y restas de tres cuadrados a lo más, pero no necesariamente el *mejor* método, pues $8 = 3^2 - 1^2$. Si n es impar, digamos $n = 2x + 1$ entonces $n = (x+1)^2 - x^2$ (para los impares basta con dos cuadrados).

Si en el caso de sumas y restas, llamamos *h(n)* y *H(n)* a los análogos a *g(n)* y *G(n)* entonces se tiene que $h(2) = 3$. Por otra parte, no es difícil ver que $H(2) = 3$ (los números de la forma $8x + 6$ requieren siempre tres cuadrados).

En lo que toca a h(3), se ha probado que todo número puede escribirse utilizando a lo sumo cinco cubos. Hardy y Wright lo demostraron de la siguiente manera.

Puede comprobarse fácilmente que, cualquiera sea el número natural n siempre vale que $n^3 - n$ es múltiplo de 6. Luego vale que $n^3 - n = 6x$ para algún x conveniente. En consecuencia:

$$n = n^3 - 6x = n^3 - (x+1)^3 - (x-1)^3 + x^3 + x^3$$

Esta expresión da una escritura de n como suma y resta de cuatro cubos. Como antes, esta es *alguna* escritura, pero no necesariamente la mejor. Por ejemplo, si $n = 15$ lo anterior nos dice que $15 = 15^3 - 561^3 - 559^3 + 560^3 + 560^3$. Pero en realidad $15 = 2^3 + 2^3 - 1^3$.

No se sabe si en realidad cinco cubos es la cantidad mínima. No se ha encontrado ningún número que no pueda escribirse como suma y resta de cuatro cubos, pero no se ha podido probar que no exista. Es decir, se sabe que h(3) es 4 o 5, pero se desconoce el valor exacto. Muy poco se sabe en realidad sobre los restantes valores de h(k) y H(k).

Inclusive, hay algunos números concretos (y pequeños) de los que todavía se desconoce cuál es su menor descomposición como suma y resta de cubos. Por ejemplo, se sospecha que los números 30, 33, 42, 52, 75 y 84 pueden escribirse como suma y resta de tres cubos. Sin embargo esto no ha sido todavía demostrado ni refutado. Es decir, nadie ha podido encontrar una descomposición de alguno de ellos que use sólo tres cubos, ni tampoco se ha podido demostrar que sea imposible hacerlo.

¿Será posible escribir al número 30 como suma y resta de sólo tres cubos? Parece una pregunta inocente; pero hasta el día de hoy nadie ha podido responderla.

Gustavo Piñeiro*

* Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* Martin Gardner, *Rosquillas Anudadas*, Ed. Labor, Barcelona 1987.

* Hans Rademacher y Otto Toeplitz, *Números y Figuras*, Alianza Editorial, Madrid 1970.

Una anécdota: **Cuando Hardy visitó a Ramanujan (verdadero genio desaparecido prematuramente, usted debería leer relatos de su vida hechos por el mismo Hardy) en su lecho de enfermo en un hospital, le mencionó que había viajado en un taxi cuya chapa era 1729 y que ese número le parecía no tener ninguna propiedad significativa. Ramanujan replicó inmediatamente que 1729 era el menor número positivo expresable como suma de dos cubos positivos en dos formas distintas:**

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

de "Notas de Algebra I" de Enzo Gentile

REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Dr. Enzo R. Gentile

A continuación transcribimos la nota aparecida en "Interacción Nº 9 - Año 6"

1. En la Universidad

La enseñanza de la Matemática, en todos los niveles, está en verdadera crisis. La razón no es muy difícil de precisar. En los países que no poseen ambiente y tradición matemática, la enseñanza consiste en repetir libros formales, con pobre ejercitación y la mayoría de las veces carentes de motivación. El alumno es un mero receptáculo de conocimientos, que difícilmente pueda digerir y que lo llevan rápidamente a la frustración. O sea, su participación es prácticamente nula. En general el espíritu de la Matemática Moderna con sus definiciones y métodos abstractos hace que el alumno desarrolle muy pobremente su capacidad creativa y de trabajo. Por supuesto que en los lugares de fuerte ambiente matemático, los ejemplos, problemas e ideas abundan y favorecen ciertamente el trabajo personal.

Pero en los lugares que eso no ocurre, la enseñanza de materias de ese tipo se hace repitiendo libros, que en gran número son "simplificistas" y donde "todo se entiende" pero nadie conoce un ejemplo en serio (que no sea Z) ni sabe cómo usar esos supuestos teoremas poderosos. La crisis se produce entonces, cuando un gran número de alumnos capaces, con definida vocación matemática, no llegan a manejar resultados y se convierten en repetidores pesimistas, que posteriormente, si realizan tareas docentes, transmitirán ese malestar.

En la enseñanza Teoría y Ejemplos deben ir de la mano. Nada peor que el tratamiento abstracto carente de ejemplificación efectiva. La principal crítica que puede hacerse a la enseñanza de la Matemática en la Argentina es que la misma es esencialmente ABSTRACTA, no hay ejemplos.

Podríamos decir que, en un cierto sentido, muchas Universidades no tienen capacidad para enseñar Matemática, o sea que en rigor, la Matemática es en ellas una verdadera "ilusión". Por supuesto que siempre aparecen, aunque en número reducido, algunos jóvenes talentosos para los cuales cualquier tipo de enseñanza les viene bien. Algunos de estos poseen inmunidad absoluta contra los cursos malos. Sin embargo cientos de jóvenes se pierden en el trayecto, cantidad fabulosa de dinero se gasta y se desvanecen las esperanzas de usar la Matemática en beneficio del desarrollo científico del país. El matemático profesional, es en buena parte responsable de que se halla llegado a esta encrucijada. Difícilmente tratan éstos de preparar cursos motivados, con ejercitación efectiva, cursos encadenados que marquen alguna dirección.

Mientras que los matemáticos que hacen investigación no tengan conciencia de la importancia de desarrollar cursos básicos efectivos encadenados, con meta definida, la Matemática será para muy pocos, y muchos jóvenes se perderán irremediablemente. Sin embargo, es bien sabido que un gran número de estudiantes que no pueden ser considerados de los excepcionales mencionados más arriba, cuando salen a estudiar a otros centros en el exterior, hacen trabajos matemáticos respetables y no pocas veces algunos son verdaderas revelaciones.

Otra parte de responsabilidad también recae en los mismos alumnos. Podríamos decir que cuando éstos tienen gran interés producen un fuerte estímulo en la labor de los profesores y generalmente las cosas andan bien. El profesor se encuentra muchas veces con la indiferencia del alumnado que no desea complicarse la vida estudiando seriamente, pues su interés está puesto en el título, que le brindará la posibilidad de mejorar su posición económica. No criticamos esto, sin embargo, está claro que ello va en detrimento del nivel científico, de la formación de un ambiente de trabajo, y termina por desmoralizar al profesor que decide al fin dedicarse exclusivamente a su trabajo de investigación que le será, sin duda, de mayor utilidad.

2. Enseñanza de la Matemática a nivel medio

La enseñanza moderna de la Matemática ha buscado remediar la precariedad con que el razonamiento se usaba en la enseñanza tradicional. Dicha enseñanza tendía a resolver "problemas tipo". Eso es en alguna medida, útil y no está en nuestro ánimo desmerecerlo. No obstante, el rápido avance de la Matemática hacia otras disciplinas, da lugar a una gran variedad de problemas y hace necesario que se desarrollen métodos generales de trabajo. La idea o filosofía es la de "manejar" más que "aprender". Sin embargo, la dirección de la enseñanza no siguió la vía propia para lograr ese fin; probablemente, debido a que los mismos profesores de corte clásico hayan tenido que producir el cambio.

Por puro instinto de conservación, los maestros se sujetaron a ciertas tablas de salvación (la más típica de todas: el Algebra de Conjuntos), para campear el temporal, y si bien ellos se salvaron, mucha gente joven se perdió y lamentablemente se sigue perdiendo.

Los alumnos de hoy no pueden resolver aquellos problemas tipo; en verdad, no pueden resolver nada.

Por otra parte los matemáticos activos se lavaron olímpicamente las manos de este problema y son, en gran parte, responsables del fracaso.

3. En Matemática hay que hacer.

En toda la historia de la Matemática los matemáticos han publicado teoremas y sus demostraciones. Un teorema no es otra cosa que la resolución de un problema determinado. En la creación matemática, el matemático intuye la validez de afirmaciones y teorías, y con su trabajo trata de dar demostraciones, o en otros casos, buscar ejemplos que muestren su validez. Así se hace la matemática.

"Los matemáticos no estudian" en el sentido que se le da a esa palabra, pues aun cuando quiere conocer algún tema nuevo, el matemático hace. Si se le pregunta a un matemático activo qué es lo que está haciendo, sin duda responderá: estoy tratando de resolver el siguiente problema..., para lo cual estoy intentando probar tal cosa, de generalizar tal otra, de buscar algún ejemplo de..., un contraejemplo a...; no cabe que responda: estoy estudiando teoría de distribuciones o teoría de Galois..., si lo hace deberá ser en un contexto determinado, un medio más que un fin.

Ernst Kummer (1810-1893) dedicó más de 25 años de su vida a la resolución de la famosa conjetura de Pierre de Fermat (1601-1665): Si n es un entero mayor que 2 no existen enteros positivos x,y,z, tales que $x^n + y^n = z^n$. Como es sabido, esta conjetura sigue aún sin resolverse. No obstante, lo importante es la obra de Kummer en esa dirección y la de otros matemáticos del siglo pasado, que constituyen los grandes cimientos de la moderna teoría algebraica de números.

Pensamos que muy raramente en la enseñanza se transmite la actitud de "hacer". Se enseña habitualmente Matemática en la misma forma que Historia, Literatura...: "informando para memorizar". No hay que enseñar Matemática en una forma que no responda a la esencia de "hacer". Hemos hablado de intuir, demostrar.

La enseñanza moderna de la Matemática tiene su punto más vulnerable en que estimula muy pobremente la intuición, e intuición es fecundidad. En matemática hay que "hacer". Como en Música hay que ser ejecutante, en alguna medida.

Pero lo importante, es que hay que "hacer" en todo nivel de trabajo matemático, aun cuando se estudia o se busca nueva información.

El maestro que no "hace" no transmite el verdadero espíritu de la Matemática y entonces la enseñanza "engorda" la mente del joven cuando en realidad debiera desarrollar músculos.

"Estamos intoxicando al alumno con información que no puede digerir y anulando su capacidad creativa".

4. Didáctica.(¿Qué?).

La acepción corriente de este término equivale fundamentalmente a "Claridad de exposición y énfasis en el ordenamiento de los temas". En términos más pedestres: a exponer con buena letra. Muchas veces los alumnos consideran "gran" profesor a aquél que lo hace todo, ordenada, prolijamente: Teorema II, 1. a 5. Corolario II, 1. a 6., etc. aunque en la mayoría de los casos el expositor no presenta ideas fundamentales, ni objetivos, ni ejercitación dura, y sus ejemplos están gastados por el uso constante. En verdad esos profesores destruyen la curiosidad de los alumnos, pues todo está (tan) claro!... y en realidad son pobres expositores que facilitan la formación de una conciencia equívoca de la Matemática. "La Didáctica", en ese sentido, es realmente un vicio de exposición. Es también condenable la actitud del profesor de hacer de la clase un "show" de perfección al desmenuzar un teorema en una serie interminable de lemas para llegar gloriosamente al lema que finaliza la demostración del teorema, pero donde todos olvidaron qué se quería demostrar. Pero que fue "Didáctico" nadie tiene dudas. Digamos con un poco de ironía que "Didáctica" en Matemática es lograr que el alumno resuelva problemas y aún más, que plantee sus propios problemas!. La verdadera potencia de la Matemática es, no olvidar, la creación, verdadero ejercicio de la imaginación; luego, si se quiere, vienen rigor, didáctica, etc.
Sería pues deseable que en la escuela (primaria y secundaria) se hicieran cursos más operativos, pocas definiciones y terminología, evitando toda MATEMÁTICA ABSTRACTA INMOTIVADA, pero con programas y ejercitación bien definidos, en el espíritu de "hacer y manejar". Manejar para resolver. Y fundamentalmente con la participación activa de los alumnos. Es una mala práctica la de hablar todo el tiempo y dejar a los alumnos la tarea de escuchar y sacar apuntes. Alguna medida de diálogo es esencial.

5. Sistemática y Textos Clásicos

Señalemos la necesidad de consultar y trabajar con libros clásicos, donde mucha Matemática se hace "a mano". Libros llenos de ideas, problemas y material para estimular el trabajo creativo. Citemos dos por los cuales profesamos profunda admiración: Algebra, An elementary Text-Book de G. CHRYSTAL (1889), y Pure Mathematics, de G.H. HARDY (1908). Si hojea estos libros no tendrá dudas de qué puede significar Matemática (pura). (En nivel más avanzado nos preguntamos qué libro moderno de álgebra puede superar al Lehrbuch der Algebra de HEINRICH WEBER, publicado en 1894? Respuesta: Ninguno. En un nivel intermedio el libro Algebra de B.L. VAN WAERDEN (1936) no ha sido superado aún, a pesar del gigantesco desarrollo del Algebra en los últimos 30 años).
Nuestra búsqueda de información, y la lectura de algunos textos clásicos nos ha llevado continua y sistemáticamente a efectuar la tal vez obvia reflexión, sobre la importancia tremenda que significa aportar a la Enseñanza de la Matemática, el factor histórico. En efecto, esto no constituye gran novedad. Sin embargo y a manera de ejemplo, notamos que en cualquier curso de Teoría Algebraica de Números rara vez se pone de manifiesto la obra original de Kummer, Dedekind, Kronecker,... o el monumental Zahlbericht de Hilbert. En la enseñanza tradicional de la Matemática se observa claramente la omisión del trabajo original de los grandes matemáticos, sobre todo en lo referente a la preocupación por atacar y elegir tales o cuales vías de resolución.
¡Qué importante estudiar la Matemática conociendo las marchas y necesarias contramarchas en cada etapa del devenir matemático!. Observemos que con la moda de la claridad y de la síntesis nos hemos acostumbrado a recibir y a su vez transmitir información "telegráfica" carente de todo "vibrato".
Por otra parte es bastante irracional desvincularse totalmente del desarrollo histórico. Las definiciones que hoy encontramos escritas con buena letra, fueron en muchos casos, la labor de siglos. La noción

de límite, por ejemplo. Probar que Q (el cuerpo racional) no es coordinable con R (el cuerpo real), cosa que se hace hoy en cualquier curso de Análisis I, le costó a G. Cantor (1845-1918) numerosas demostraciones previas "falsas". En fin, toda la historia del Análisis Clásico y también del Algebra hacen sin duda a la salud de la enseñanza y la investigación. Digamos con Goethe, "la historia de una ciencia es la ciencia misma"...

6. Otros factores relativos a la enseñanza y estudio de la Matemática

Es bien sabido que existe un gran temor (o tal vez diríamos terror) en el aprendizaje de la Matemática. Frecuentemente se lo atribuye a la falta de condiciones "naturales" para estudiar esta disciplina. Nada más sin sentido. En efecto ¿cómo podemos saber si un alumno no tiene condiciones para la Matemática, si la enseñanza, en especial en su nivel formativo, se basa exclusivamente en atiborrarle la mente de fórmulas y definiciones, sin darle la menor posibilidad de pensar? (Sin mencionar la actitud enfermiza de ciertos profesores en el sentido de acallar la curiosidad del alumno, que ridiculizan sus preguntas o se "escapan" por la tangente...). Por otra parte muchas veces se cree que ciertos alumnos tienen reales condiciones para la Matemática por el mero hecho de poder memorizar buen número de fórmulas y repetir definiciones. Para concluir con honestidad que un alumno no tiene condiciones para estudiar Matemática, habría que ofrecerle primeramente, docentes de Matemática. Y así, no quedaría claro que un alumno "no tiene condiciones...".

En Matemática más que condiciones, hacen falta "ganas". Estamos cansados de ver gente "con condiciones" pero estática, que hay que estar empujando todo el tiempo.

Para el estudio de la matemática no hay "receta", excepto la de poder desarrollar una buena capacidad de trabajo. Con una mente normal, trabajo serio y prolongado se llega a "entender" (¡cosa no desdeñable!), hacer y manejar una buena parte de la Matemática. Creer que la Matemática es para mentes especiales es una de las causas del deterioro de la enseñanza, pues despista a gran cantidad de gente "buena". Tenemos ejemplos de gente inteligente, diríamos brillante, que entendía todo, pero que nunca hizo nada. En cambio otros, se diría pobres, que con trabajo serio y paciente han logrado resultados importantes. Digamos que Matemática, más que "virtuosismo" es "transpiración".

Los alumnos se despistan cuando se hace rutinaria, ocultando conciente o inconcientemente su verdadera fuerza y belleza, complicándola inútilmente con fórmulas que nadie sabe de dónde vienen. Por ejemplo, en los textos corrientes, (y sobre todo en los de alto predicamento!) la mayoría de los ejercicios carecen de toda significación y consisten en el uso, al azar, de las distintas operaciones combinadas con raíces, logaritmos, sin ton ni son. Son ejercicios "macabros" que han hecho que a la mayoría de la gente, la Matemática le resulte la materia más odiosa. La verdadera ejercitación atrae y fascina y estoy convencido de que mucha gente sin manifiesta vocación matemática disfrutaría inteligentemente de incursiones en la Aritmética y la Geometría.

La Matemática está al alcance de mucha más gente de lo que se piensa, pero no gratuitamente. Requiere una dosis importante de trabajo individual, realizado pausadamente, sin prisa pero fundamentalmente sin interrupción. Queda sobreentendido la doble dirección y orientación del trabajo.

Hay que lograr, en la enseñanza y en la investigación, que el alumno sienta la sensación de "estar haciendo", pues allí empieza el trabajo efectivo y que rinde sus frutos.

La mayoría de la gente que hace Matemática es gente normal, pero trabaja todos los días, enfrenta las dificultades y hace que éstas sean un desafío antes que un factor de depresión. Este es un hecho curioso y elocuente, el que "estudia" (o sea memoriza) se desalienta con las dificultades, mientras que el que trabaja siente, con ellas, la sensación de estar delante de algo interesante y esto lleva a acrecentar sus fuerzas e interés.

Por otra parte, la Matemática es de tal vastedad que "hay lugar para todos", hay distintos niveles de trabajo pero todos los niveles son importantes. Un investigador modesto puede producir resultados importantes y de gran utilidad a otros niveles "aparentemente" más importantes. Como ocurre en todas las ciencias, los genios son la excepción. Pocos son los elegidos para crear teorías como la de Congruencia o de Galois, pero su uso y aplicación sí compete a mucha gente.

7. Propuesta

El profesor, en todo nivel, debe ser un investigador dedicado no exclusivamente a resolver problemas específicos, sino también a ampliar determinadas áreas profundizando en temas de interés general. Por ejemplo, un profesor secundario puede hacer un tipo de investigación que podríamos llamar "didáctica" (en buen sentido) tomando algún tema como ser: números complejos, aritmética, congruencias, ecuaciones, polinomios, combinatoria. En cualquiera de ellos hay una labor formidable por desarrollar, señalando los resultados fundamentales y sus aplicaciones, reuniendo y clasificando ejemplos, ejercicios y problemas, consultando la bibliografía pertinente. En las conocidas revistas de enseñanza tales como el American Mathematical Monthly, el Mathetics Magazine o el Mathematical Gazete aparecen numerosos trabajos de investigación con resultados originales, siempre en un plano elemental. Su lectura es altamente estimulante y orientadora en el trabajo que es aconsejable realizar. Estas revistas y otras pueden ser consultadas en la Bibliotecas de las Facultades de Ciencias Exactas.

Para dar una idea más concreta podemos agregar que, si tomamos uno de los temas enumerados anteriormente, las posibilidades de hacer Matemática son inagotables. Por ejemplo, con los números complejos se pueden hacer cosas tales como: geometría analítica del plano, grupo de transformaciones rígidas, inversión, grupo de homografías, grupo de raíces de la unidad, construcciones con regla y compás, polígonos regulares y polinomios ciclotímicos, aritmética en enteros de Gauss, etc... y se está de inmediato dentro de la (gran) Matemática.

La investigación didáctica consiste en hacer accesible todo ese material, en buscar la ejercitación adecuada y sobretodo en inventar problemas y ejercicios, en conocer la bibliografía e incursionar posteriormente en temas más avanzados, "vía" las revistas de Matemática.

En nuestra opinión, el profesor que investiga tiene la paz que hace que la enseñanza sea convincente y penetre sin rebotes. La Matemática es difícil pero no imposible, es fácil plantear problemas pero es difícil resolverlos. Resolver un problema elemental puede llevar nuchas horas y también días y a veces no sale. Hay que desterrar la idea en las aulas de que el profesor debe saber y poderlo todo. Eso no existe. En mi opinión, la reforma de la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria sería muy fácil de hacer. A saber, si se propusieran problemas para ir resolviendo durante todo el año, una función importante del profesor sería orientar, escuchar y fomentar la discusión. El alumno debe saber que los ejercicios se resuelven pensando mucho y "a priori" no tienen porqué salirle al profesor. Con esta actitud la enseñanza mejoraría fuertemente y se lograría desarrollar la actitud creativa de los alumnos. Sin embargo, este proyecto es difícil de llevar a cabo. En efecto, no sólo los alumnos esperan que los profesores sepan hacerlo todo, sino que, en general, los mismos profesores lo sienten así, o han terminado por sentirlo así, y entonces los problemas que plantean son sólo los que ellos pueden resolver o resolvieron y eso es extremadamente poco para alimentar a un cúmulo de gente con gran capacidad de trabajo y creatividad. Es entonces fácil dar largas lecciones y enunciados para memorizar y repetir "a lo loro". Triste realidad.

El profesor investigador puede orientar las preguntas de los alumnos, sugerir caminos de ataque y acompañar al alumno en esta tarea tan esencial a su formación, debe enseñar a trabajar pausada pero ininterrumpidamente, a agotar instancias, a encontrar no un ejemplo, sino "todos" los ejemplos. Fomentar la resolución de problemas, esa es la cosa!. Organizar Coloquios para plantear, resolver y discutir problemas. Podríamos decir que, para los fines de la enseñanza, la Matemática es el arte de resolver problemas, o si se quiere, estudiar Matemática es el arte de entender y manejar las nociones teóricas (teoremas) para poder resolver problemas. ¿Qué problemas? Los que aparecen, por ejemplo, en las revistas que mencionamos antes, en numerosas revistas de Matemática, o en competiciones, o en nuestra propia revista de Educación Matemática.

8. Conceptos de tres grandes matemáticos: G. Polyá, D. Hilbert y G.H. Hardy sobre Enseñanza y Aritmética

G. Polyá: "Hay un germen de revelación en la solución de cada problema. Un problema puede ser modesto, pero si desaría su curiosidad poniendo en juego sus facultades inventivas y si usted lo resuelve por sus propios medios puede experimentar la emoción, el goce y el triunfo del descubrimiento. Tales experiencias a cierta edad (de niño o joven), pueden crear un gusto por el trabajo mental e imprimir en la mente un carácter para toda la vida". (Este es un hecho real, los que recordamos a nuestros buenos profesores de Matemática los recordamos no porque nos enseñaron bien logaritmos o divisibilidad, sino por otras razones no tan fáciles de precisar pero que tienen que ver con la creación, la participación, curiosidad. Una buena clase de Algebra, tiene que ver con las puertas que se abren a las inquietudes, a la posibilidad de un trabajo posterior, de otra manera es algo perecedero, mañana ya no existirá).

"El profesor de Matemática tiene pues una gran oportunidad. Si llena su tiempo adiestrando en la rutina, en la trivialidad, termina con el interés del alumno, con lo cual impide su desarrollo intelectual y pierde una verdadera y trascendental oportunidad en su función. Pero si desafía la curiosidad de sus alumnos, proponiendo problemas proporcionales a su capacidad y ayuda a resolverlos con preguntas estimulantes entonces puede conferir gusto y paladar para un pensamiento independiente.

Resolver un problema significa poder salir de una dificultad, apartar un obstáculo, alcanzar una meta que no era "a priori" inmediatamente alcanzable. Resolver un problema es la meta específica de la inteligencia e inteligencia es el don específico de los seres humanos: resolver problemas es la actividad humana por excelencia. Una meta trascendental de la enseñanza es sin duda enseñar, estimular y mejorar la actividad de resolución de problemas en los alumnos. (Resolver un problema es, según G. Polyá un arte práctico, como nadar, tocar el piano, se aprende solamente por imitación y práctica, el maestro debe dar ejemplos para imitar y proponer problemas para practicar). Para llegar a ser un resolvedor de problemas hay que resolver problemas".

David Hilbert: (1862-1946) "La teoría de números es una magnífica estructura, creada y desarrollada por hombres que se destacan como los investigadores más brillantes de las ciencias matemáticas: Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Jacobi, Dirichlet, Kummer, Dedekind, Kronecker. En la teoría de números apreciamos la simplicidad de sus fundamentos, la pureza de sus verdades, la exactitud de sus convicciones. La teoría de números es un modelo para otras ciencias, como la más profunda e inagotable fuente de todo el conocimiento matemático, pródiga en incitaciones a investigar en otras áreas de la matemática, como ser Algebra, Teoría de Funciones, Análisis, Geometría. Además es independiente del cambio de moda y no ocurre, como en otras ramas del conocimiento, en que concepciones o métodos tiene preminencia en un momento y caen en el olvido en otro. En teoría de números los problemas viejos son actuales, algo así como una genuina obra de arte del pasado. Es cierto ahora como antes que Gauss y Dirichlet lamentarán que muy pocos matemáticos profesionales prestan atención y tratan de lograr un goce total de su belleza. Especialmente fuera de Alemania y entre

matemáticos jóvenes el conocimiento de la Aritmética está muy poco diseminado". Hilbert abogaba para que la Teoría de Números se diseminara por todas las naciones y sea cultivada por jóvenes a quienes pertenece el futuro.
Dice Godfrey Harold Hardy (1877-1947) "Pocas cosas hay en el mundo por las cuales tengo tan poco paladar como la pedagogía matemática pero no puedo resistir la tentación de concluir con una lección pedagógica. La teoría elemental de números debería ser uno de los mejores temas para una instrucción matemática temprana. Requiere muy pocos conocimientos previos, el tema que trata es tangible y familiar, los procesos de razonamiento que emplea son simples, generales y pocos, y es única dentro de las ciencias matemáticas por su apelación a la curiosidad natural. Un mes de instrucción inteligente en teoría de números sería dos veces más instructiva, dos veces más útil y por lo menos diez veces más interesante que la misma cantidad de "cálculo para ingenieros". No es matemática de ingenieros que se requiere para entender física moderna y menos aún la que necesitamos en nuestra vida cotidiana, ¡no manejamos coches resolviendo ecuaciones diferenciales!".

9. Un último punto realístico

Finalmente no crea el lector que se nos ha pasado por alto un punto fundamental en esta charla. Tenemos plena conciencia de que nada podrá hacerse sino se ofrecen a los profesores subsidios de investigación, licencia con goce de sueldo para estudiar en la Universidad, medios para asistir a cursos y seminarios y proveerse de revistas y libros. Se necesitan además subsidios para organizar equipos de matemáticos y profesores para escribir y publicar textos.

* El Dr. Enzo Romeo Gentile nació en Buenos Aires el 14 de diciembre de 1928. Después de egresar de la Universidad Nacional de Cuyo en 1957 con el título de Doctor en Matemática, su brillante carrera de investigador y docente se desarrolló en numerosas Universidades del país y del extranjero. Sus trabajos de investigación en diferentes aspectos del Algebra y la Aritmética fueron publicados en revistas nacionales e internacionales. En 1987 fue designado miembro de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Argentina.
El Dr. Gentile falleció el 7 de abril de 1991. De él perdurará, junto a su valiosa producción científica, su apasionada admiración por la armonía y belleza de la Matemática, que generosamente transmitió a colegas y discípulos.

"Yo pregunto si es natural,
si es incluso prudente,
que te hastíes tú mismo y aburras a los estudiantes."

Johann Wolfgang Goethe

Curso de Nivelación 1996: algunas conclusiones...

Después de muchos años un aire fresco sopló sobre el fin del caluroso verano en el I.S.P.: **el curso de nivelación estuvo a cargo de docentes elegidos por concurso de oposición y antecedentes; no fue obligatoria la cursada ni tampoco los exámenes y se contó con la colaboración de ayudantes ad - honorem.**
¿Por qué le damos tanta importancia a estos hechos?
Venimos sosteniendo que todos los cargos docentes deben ser cubiertos por concurso abierto cualquiera sea su nivel. **AUN EL PEOR DE LOS CONCURSOS ES MEJOR QUE LA MEJOR DE LAS DESIGNACIONES "A DEDO".**

También batallamos por incorporar una nueva mentalidad, donde la responsabilidad y honestidad de los alumnos consigo mismos esté por encima de las obligaciones impuestas; donde la toma de conciencia acerca de la calidad y cantidad de conocimientos que se poseen sean suficiente incentivo para seguir asistiendo al curso de nivelación; donde la autoevaluación, finalmente, tenga más peso que la valuación docente. Porque si es verdad que costruimos el conocimiento haciendo, no existe posibilidad alguna de que aprendamos a ser profesores conscientes, con independencia de criterio, objetivos, si no experimentos como alumnos dicho conceptos.
Por último, la presencia de los ayudantes (alumnos con más de 15 materias aprobadas y Metodología I cursada) permitió al curso acceder a mayor cantidad de explicaciones individuales y a aquellos, a prepararse para enfrentar su futuro inmediato: la práctica laboral.

El curso en números

Según los datos aportados por los docentes al frente de los cuatro cursos (dos a la mañana y dos a la noche) sabemos que rindieron y "aprobaron" con 6 puntos o más sobre un total de10:

	Aula 26 T.M.	Aula 28 T.M.	Aula 26 T.N.	Aula 28 T.N.
Primera evaluación	15/58 ~ 26%	12/59 ~ 20%	10/42 ~ 24%	10/49 ~ 20%
Segunda evaluación	27/50 ~ 54%	36/45 ~ 80%	19/29 ~ 65%	16/37 ~ 43%
Rindieron 1° y no 2° ( ) cant. de aprobados	25 (7)	17 (2)	18 (2)	15 (3)
Rindieron 2° y no 1° ( ) cant. de aprobados	17 (7)	3 (3)	5 (4)	3 (1)
Rindieron ambos	34/75	42/62	24/50	34/52

Los resultados son altamente elocuentes.
Nos informan, en un muestreo simple, qué y cuánto saben los egresados de secundaria, hoy.

Objetivos no cumplidos

Es importante dejarlos en claro, para no cometer nuevamente los mismos errores.
En primer lugar, la coordinación no funcionó y cada docente instrumentó el programa

matemáticos jóvenes el conocimiento de la Aritmética está muy poco diseminado". Hilbert abogaba para que la Teoría de Números se diseminara por todas las naciones y sea cultivada por jóvenes a quienes pertenece el futuro.
Dice Godfrey Harold Hardy (1877-1947) "Pocas cosas hay en el mundo por las cuales tengo tan poco paladar como la pedagogía matemática pero no puedo resistir la tentación de concluir con una lección pedagógica. La teoría elemental de números debería ser uno de los mejores temas para una instrucción matemática temprana. Requiere muy pocos conocimientos previos, el tema que trata es tangible y familiar, los procesos de razonamiento que emplea son simples, generales y pocos, y es única dentro de las ciencias matemáticas por su apelación a la curiosidad natural. Un mes de instrucción inteligente en teoría de números sería dos veces más instructiva, dos veces más útil y por lo menos diez veces más interesante que la misma cantidad de "cálculo para ingenieros". No es matemática de ingenieros que se requiere para entender física moderna y menos aún la que necesitamos en nuestra vida cotidiana, ¡no manejamos coches resolviendo ecuaciones diferenciales!".

9. Un último punto realístico

Finalmente no crea el lector que se nos ha pasado por alto un punto fundamental en esta charla. Tenemos plena conciencia de que nada podrá hacerse sino se ofrecen a los profesores subsidios de investigación, licencia con goce de sueldo para estudiar en la Universidad, medios para asistir a cursos y seminarios y proveerse de revistas y libros. Se necesitan además subsidios para organizar equipos de matemáticos y profesores para escribir y publicar textos.

* El Dr. Enzo Romeo Gentile nació en Buenos Aires el 14 de diciembre de 1928. Después de egresar de la Universidad Nacional de Cuyo en 1957 con el título de Doctor en Matemática, su brillante carrera de investigador y docente se desarrolló en numerosas Universidades del país y del extranjero. Sus trabajos de investigación en diferentes aspectos del Algebra y la Aritmética fueron publicados en revistas nacionales e internacionales. En 1987 fue designado miembro de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Argentina.
El Dr. Gentile falleció el 7 de abril de 1991. De él perdurará, junto a su valiosa producción científica, su apasionada admiración por la armonía y belleza de la Matemática, que generosamente transmitió a colegas y discípulos.

"Yo pregunto si es natural,
si es incluso prudente,
que te hastíes tú mismo y aburras a los estudiantes."

Johann Wolfgang Goethe

Problemas y Juegos de Ingenio

En cada número encontrarán algunos problemas que nos parecen interesantes (lo cual de ninguna manera es garantía de que lo sean) cuyas soluciones comentaremos en la siguiente entrega. Esperamos que de esta forma tengan tiempo para pensarlos y enviarnos sus respuestas o intentos de resolución, comentarios y propuestas, ya sean en forma de críticas constructivas o nuevos problemas que a ustedes les parezcan interesantes.

1. *De "Nota 11 - Geometría" O.M.A.* Dado el polígono ABCDE, hallar un cuadrilátero ABCD' que tenga la misma área.

2. *De Enzo Gentile - "Notas de Álgebra I" - Ed. EUDEBA.* ¿Cuántas líneas quedan determinadas en el plano por diez puntos no alineados de a tres?

3. *De Pablo Coll - "Primer Congreso Argentino de Juegos de Ingenio Allen '95" - A.J.I.R.A.* A mi hermano Gustavo, que es diseñador industrial, se le ocurrió fabricar dados que en vez de tener las caras marcadas, tuvieran las aristas marcadas. Una arista podría tener una, varias marcas o ninguna. Las marcas son una muesca que es visible desde las dos caras que comparten la arista. El resultado de la tirada se computa sumando las marcas de las cuatro aristas de la cara que quedó para arriba. ¿Es posible armar un dado con hendiduras para que las caras sumen 1,2,3,4,5 y 6 como en los dados comunes?

4. *De Sam Loyd - "Los Acertijos de Sam Loyd" - Ed. Juegos & Co.* El poeta Longfellow era un buen matemático que a menudo hablaba de las ventajas de ataviar los problemas matemáticos con ropajes atractivos, de modo que apelaran a la fantasía del estudiante en vez de utilizar el lenguaje seco técnico de los libros de texto.
El problema del nenúfar es uno de los varios que Longfellow presentaba en su novela Kavanagh. Es tan simple que cualquiera, incluso alguien sin ningún conocimiento matemático o geométrico, podría resolverlo, pero no obstante ilustra una importante verdad geométrica de una manera que jamás podría olvidarse. He olvidado la enunciación exacta del problema tal como Longfellow me lo describió personalmente durante una discusión acerca del tema, pero se refiere a un nenúfar que crecía en un lago. La flor estaba a un palmo de la superficie del agua, y cuando la brisa la inclinaba rozaba la superficie a dos codos de distancia. A partir de estos datos se podía calcular la profundidad del lago.
Ahora bien, supongamos que el nenúfar está a 10 pulgadas por encima de la superficie del agua, y que si se lo inclinara hacia un lado desaparecería bajo la superficie en un punto situado a 21 pulgadas de donde originalmente estaba. ¿Cuál es la profundidad del lago?

5. *Colaboración del Prof. Gustavo Krimker.* Encontrar el término general de la siguiente sucesión:

1; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0;...

6. *Nos acercaron el siguiente problema:* Una vara está apoyada verticalmente sobre una pared. Su extremo inferior comienza a deslizarse por el piso siguiendo una trayectoria rectilínea perpendicular a la pared. ¿Qué curva describe el centro de la vara?

Respuesta del N° 0:
Es imposible que un caballero o un escudero digan: "Yo soy escudero", porque un caballero emitiría el enunciado falso de que él es escudero, y un escudero no emitiría el enunciado verdadero de que él es escudero. Así, B mentía cuando dijo que A había dicho que él era escudero. Por lo tanto B es escudero. Puesto que C dijo que B estaba mintiendo, y B estaba ciertamente mintiendo, C dijo la verdad, de aquí que se tratara de un caballero. Así pues, B es un escudero y C un caballero. (Es imposible saber lo que es A.)

¡Hasta el próximo número! ¡Felices soluciones!

Correo de Lectores

En esta sección incluiremos sugerencias, críticas, colaboraciones, etc., que nos hagan llegar los lectores de **Aχioma.**

Agradecemos a Andrea Candeias habernos alcanzado dos libros para extraer material, como así también el siguiente problema que le pareció interesante para trabajar con los alumnos:

Dos amigos fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir, uno de ellos preguntó al otro:

-"¿Contaste cuántas gallinas y cuántos conejos había?"

-"No, ¿cuántos?"

-"Averígualo. Había en total 72 ojos y 122 patas."

La presente publicación está avalada por la Asociación Cooperadora del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Próximo Número...

Logaritmos: historia y evolución.

Apuntes sobre..., Congruencias (segunda parte)

Albert Einstein - La educación

Los puentes de Königsberg y la teoría de grafos.

Literatura matemática: Un relato de Borges.

Y mucho más...