Aχioma

La revista de los estudiantes y profesores de matemática

Galois, el maldito.

(Página 13)

Mayo/Junio de 1997 **Año 2 - N° 6**

Aχioma Nº 6

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Directora
Gisela Serrano de Piñeiro

Propietarios
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro
Jorge Martinez

Colaboraron en este número
Gustavo Krimker

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Suscripción por 5 números (incluye gastos de envío): $11.-

Ejemplar suelto: $ 2.-

Ejemplar atrasado: $ 2,20

Editorial

Hemos cumplido un año. Aunque quizás este lapso no represente mucho tiempo, para nosotros fue un largo camino. Y lo decimos no sin cierto orgullo. Es justo reconocer, a la vez que resulta una obviedad, que sin nuestros lectores tal camino hubiese sido imposible de recorrer.

Quisiéramos aprovechar esta nota editorial para decirles una vez más que Aχioma está abierta a recibir todo tipo de notas, comentarios, críticas, sugerencias, etc., que nos hagan llegar.

Hemos de agradecer muy especialmente a todos aquellos que han colaborado con nosotros a través de notas, dibujos, comentarios y resoluciones de los problemas propuestos. Compartimos con todos ellos el inmenso placer que proporciona llevar a cabo un desafío.

Por último, no podemos dejar de señalar nuestra profunda preocupación por la suerte que correrán los institutos terciarios, señeros en la formación de docentes secundarios y universitarios que han honrado las aulas de nuestro país. Es tarea de todos, desde el lugar que cada uno ocupa, defender la especificidad de la carrera docente y la institución donde ésta se realiza.

Sumario

Mayo / Junio de 1997

Año 2 - Nº 6

Ecuaciones Diferenciales (Tercera Parte)

En la presente sección trataremos, a lo largo de varias notas, temas que nos atraen por su importancia y por su riqueza. Hoy finalizaremos con el tema Ecuaciones Diferenciales, iniciado en Aχioma Nº 4.

Nuestro objetivo en esta oportunidad es exponer algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. El fin es mostrar que constituyen una herramienta poderosa y hasta indispensable para la descripción de muchas situaciones reales y concretas.

Vayamos en primer lugar a la Biologia y supongamos que estamos interesados en analizar la evolución de una cierta población animal. Para ello consideramos la función **y(t)** que a cada instante **t** de tiempo le hace corresponder el número de individuos que existen en ese momento.

Las unidades en las que se mide el tiempo dependerán de la especie estudiada. Si se trata de una población de bacterias, entonces quizá será razonable medir el tiempo en minutos u horas; en cambio si se trata de una población de leones, parece más razonable que el tiempo se mida en años.

Determinemos arbitrariamente un instante inicial **t = 0**. De esta forma **y(0)** es la *población inicial*, o el número de individuos que hay al comenzar el análisis. Para fijar ideas, digamos que elegimos medir el tiempo en años. De esta forma, **y(1)** es el número de individuos que existe al cabo de un año e **y(1,5)** es la población al cabo de un año y medio.

Si durante el primer año la población aumentó un 25% diremos entonces que la *tasa de crecimiento* durante ese primer año fue de 0,25. En general, la tasa de crecimiento durante el periodo comprendido entre **t** y **t + Δt** será igual a:

$$T_{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)}$$

Si la población inicial es **y(0) = 2500** y al cabo de dos años hay 3500 individuos (o sea **y(2) = 3500**) entonces la tasa de crecimiento (tomando **t = 0** y **Δt = 2**) es:

$$T_2 = \frac{3500 - 2500}{2500} = 0{,}4$$

En otras palabras:

$$y(2) = y(0) + 0{,}4y(0)$$

Aunque la tasa de crecimiento en esos dos años haya sido 0,4 no sabemos en verdad si el crecimiento siguió a lo largo de ese tiempo un ritmo constante. Podemos considerar entonces la *tasa de crecimiento promedio*, que es igual a la tasa de crecimiento dividida por el lapso transcurrido. En el ejemplo precedente este cálculo da como resultado 0,2. En general la tasa promedio será igual a:

$$T_m = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)\Delta t}$$

La tasa de crecimiento instantánea (o simplemente *tasa de crecimiento*) resultará ser igual al límite de T_m cuando Δt tiende a cero. El lector comprobará fácilmente que, suponiendo que **y(t)** sea derivable, entonces la *tasa de crecimiento* es igual a:

$$T = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

Al estudiar la evolución de una población animal, el simple sentido común nos dice que las posibilidades de desarrollo de la misma dependen en verdad de una multitud de factores, tales como la disponibilidad de alimento o de espacio, la existencia de predadores, etc.

Como primera aproximación consideremos un modelo más simplificado. Supongamos que estamos estudiando una especie aislada, que carece de predadores y que dispone de alimento en abundancia y de espacio vital ilimitado.

En estas condiciones el número de individuos que nace en una generación depende esencialmente de la cantidad de individuos adultos que existían en la generación precedente. Por lo tanto, *la tasa de crecimiento de la población será constante*. En otras palabras, se verificará que:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k_0$$

Deducimos así que la función **y(t)**, que describe la evolución de la población, satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(t) - k_0\, y(t) = 0 \qquad (^1)$$

Si $y_0 = y(0)$ es la población inicial entonces, mediante un razonamiento similar al desarrollado en la primera nota de esta serie (véase Aχioma N° 4) podemos llegar a la conclusión que:

$$y(t) = e^{k_0 t}$$

Las suposiciones que hemos hecho acerca de la especie estudiada (ausencia de predadores, alimento ilimitado, etc.) constituyen una simplificación extrema y, en general, se apartan drásticamente de la realidad. El análisis de este modelo se justifica, sin embargo, porque se ajusta razonablemente bien a la evolución de ciertas poblaciones humanas. En particular, el modelo permite dar una explicación para el crecimiento exponencial de las mismas.

Aún manteniendo las suposiciones anteriores, normalmente resulta mucho más realista asumir que, después de alcanzar un cierto número, los individuos comenzarán a competir entre sí por alimento y hábitat. El modelo más simple que se adapta a esta condición es de la forma:

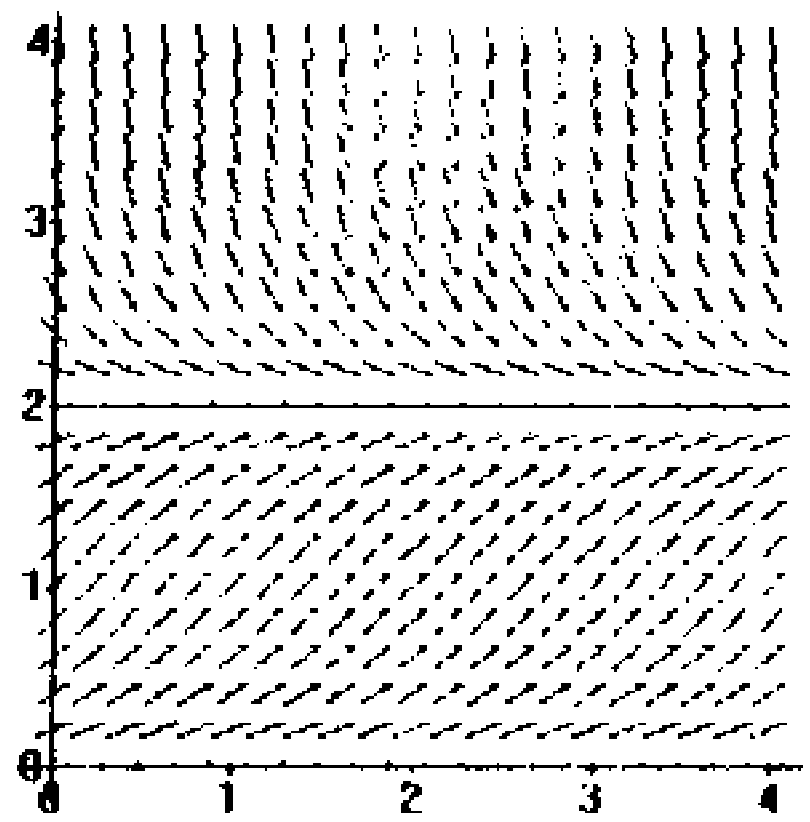
$$y'(t) = [b - a y(t)]\, y(t) \qquad (^2)$$

Donde **a** y **b** son constantes positivas. Nótese que si en el instante t_0 el valor de $y(t_0)$ supera la cantidad crítica b/a entonces $y'(t_0)$ es negativa y la población disminuye. Por el contrario, si $y(t_0)$ es menor que b/a entonces $y'(t_0)$ es positiva y la población aumenta. Esta reflexión parece decirnos que la población tenderá a estabilizarse en el valor b/a.

Para dar un ejemplo concreto, digamos que **y(t)** mida la cantidad de individuos en unidades de mil y que a = 1 y b = 2. Tenemos entonces la ecuación:

$$y'(t) = [2 - y(t)]\, y(t) \qquad (^3)$$

Usando las técnicas comentadas en la nota anterior (véase Aχioma N° 5), podemos construir el siguiente gráfico aproximado de las *curvas integrales* de la ecuación:



Se observa claramente que todas las curvas esbozadas tienden asintóticamente al valor y = 2. En otras palabras, la población tiende a estabilizarse en un número de 2000 individuos *(población de equilibrio)*. En verdad la reflexión hecha más arriba es correcta: toda solución **y(t)** de la ecuación **(²)** verifica que su valor tiende a **b/a** cuando **t** tiende a infinito.

Un modelo aún más complejo podría involucrar a dos especies, A y B, que convivan en el mismo hábitat. Sea **x(t)** la función que describe la evolución de la especie A y sea **y(t)** la función que describe a la población de B. Digamos por ejemplo que sus relaciones mutuas quedan descriptas por las relaciones:

$$(^4)\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

¿Qué indican estas ecuaciones? De la primera de ellas deducimos lo siguiente. Cuando la población B tiene un número de individuos que supera al triple de A, o sea, cuando y(t) > 3x(t), entonces x'(t) es negativa y la población de A disminuye. Por el contrario, si $y(t) < x(t)$ entonces la segunda ecuación nos dice que y'(t) es negativa y es la población de B la que disminuye. En síntesis, a cada especie le conviene que la otra no prospere. En otras palabras, las ecuaciones nos describen el comportamiento de dos especies que *compiten* por su supervivencia.

Matemáticamente hablando, (4) es un **sistema de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas**. Para resolverlo hay que hallar dos funciones, x(t) e y(t), que satisfagan simultáneamente las dos condiciones indicadas.

El lector puede verificar fácilmente que, cualesquiera sean los números α y β, las funciones

$$x(t) = -\alpha e^{4t} + \beta e^{t}$$
$$y(t) = \alpha e^{4t} + 2\beta e^{t}$$

son soluciones del sistema (4). Si se deseara determinar efectivamente los valores de α y de β, sería necesario conocer las poblaciones iniciales $\mathbf{x(0)} = \mathbf{x_0}$ e $\mathbf{y(0)} = \mathbf{y_0}$. Podríamos entonces plantear el sistema

$$(5) \quad \begin{cases} x_0 = -\alpha + \beta \\ y_0 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

cuyas incógnitas son, justamente α y β. Por ejemplo si $\mathbf{x(0) = 1}$ e $\mathbf{y(0) = 2}$ entonces las ecuaciones para α y β quedan

$$(6) \quad \begin{cases} 1 = -\alpha + \beta \\ 2 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

Los valores que se obtienen de (6) son $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, por lo que las funciones resultan ser:

$$x(t) = e^{t}$$
$$y(t) = 2e^{t}$$

Esta solución indica que ambas especies, a largo plazo, van a prosperar. Dejamos como ejercicio al lector verificar que, por el contrario, si $\mathbf{y(0) > 2x(0)}$ entonces la población A acabará por extinguirse.

Aunque no hayamos agotado totalmente las aplicaciones a la Biología, abandonemos ahora este campo para ir en busca de otras áreas en las que las ecuaciones diferenciales resultan también de extrema utilidad.

Sería casi redundante referirse a las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a la Física, ya que, históricamente, surgieron justamente como una herramienta matemática para describir las leyes de esta ciencia. Tanto es así que muchos libros de texto, al referirse al tema "Ecuaciones Diferenciales", lo llaman simplemente "Ecuaciones de la Física Matemática".

Citemos tan sólo un ejemplo sencillo de aplicación (sin duda conocido por el lector). Sea **y(t)** la función que describe la posición de un cuerpo que cae en el vacío por efecto de la gravedad. En estas condiciones la aceleración del cuerpo es constante o, en otras palabras:

$$y''(t) = g \qquad (7)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad. La expresión (7) no es otra cosa que una ecuación **diferencial de segundo orden**. Es bien sabido (y fácil de verificar) que si $\mathbf{y(0) = y_0}$ es la posición inicial e $\mathbf{y'(0) = v_0}$ es la velocidad inicial entonces la solución de la ecuación es:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g\, t^2$$

Veamos así que la conocida fórmula para el para la posición de un cuerpo dotado de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, surge simplemente de la resolución de una ecuación diferencial.

Notemos que en este último ejemplo, para determinar unívocamente la solución, no basta con conocer la posición inicial $\mathbf{y(0) = y_0}$, sino que también es necesario saber la velocidad inicial $\mathbf{y'(0) = v_0}$. En general, para determinar unívocamente la solución de una ecuación diferencial de orden n, debe conocerse, para algún instante $\mathbf{t_0}$, los valores de $\mathbf{y(t_0)}$, $\mathbf{y'(t_0)}$, $\mathbf{y''(t_0)}, \ldots \mathbf{y^{(n-1)}(t_0)}$.

Sería muy fácil citar abundantes ejemplos de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a la Química, la Meteorología, la Geología, o la Economía

Casi todas las ramas de la ciencia o de la industria las utilizan como una de sus herramientas fundamentales. Pero, por razones de espacio, habremos de contentarnos con mencionar solamente una de sus más sorprendentes utilidades: las ecuaciones diferenciales aplicadas al trabajo policial.

Citamos a continuación un artículo aparecido en el diario La Nación de Buenos Aires, en octubre de 1995, bajo el título *"...Y ahora dígame que usted no fue"* y que llegó a la redacción de Aχioma por gentileza de la profesora María Selva Fernández Moreno.

En los Ángeles (EEUU), dos hombres estaban acusados de asesinato. Sentenciarlos hubiera podido ser fácil: una cámara de video instalada en una estación de servicio había filmado el forcejeo completo, que culminó con los disparos fatales. Pero la imagen era tan borrosa que no se podía identificar claramente quién había atacado a quién.

El artículo de La Nación, firmado por David P. Hamilton (redactor de *The Wall Street Journal*), cuenta que los investigadores del caso recurrieron a la firma Cognitech Inc., una pequeña compañía armada con una nueva técnica para realzar imágenes borrosas.

El video mejorado de Cognitech mostraba claramente a los sospechosos empujando a la víctima boca abajo contra el suelo y disparándole a la cabeza. Ante esta evidencia, los dos acusados se declararon culpables.

En los últimos años, el análisis de filmaciones en video de delitos y accidentes se ha convertido en un gran negocio para Cognitech, una más entre un puñado de compañías que aplican técnicas matemáticas avanzadas para mejorar la calidad de las imágenes de video. La técnica, basada en la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales, "suaviza" la interferencia y otras distorsiones de la imagen, a la vez que retiene las características clave que definen, por ejemplo, un rostro.

El fundador de Cognitech, Leonid Rudin, estudió las ecuaciones diferenciales utilizadas para describir matemáticamente las explosiones sónicas y otros tipos de ondas de choque que viajan a través de líquidos o gases. Estas ecuaciones son particularmente efectivas para describir objetos con orillas o bordes muy definidos. Rudin supuso que podrían también describir los bordes reales de los objetos o los rostros oscurecidos por una imagen.

A partir de ello propuso un método para mejorar imágenes, que es aproximadamente análogo a tomar una foto de la Tierra desde un satélite e intentar dibujar líneas topográficas que representen las características geográficas principales.

En esencia, las ecuaciones suponen un perfil lógico para los bordes que se ven en cada cuadro de video y toman en cuenta la naturaleza de las distorsiones causadas por problemas de enfoque, la refracción atmosférica, el ruido electrónico y otros factores que distorsionan la imagen. La computadora halla sucesivas aproximaciones para la solución de las ecuaciones, y cada una de ellas realza más y más las curvas que definen los bordes de los objetos y rostros hasta darles una definición tal que permita su identificación.

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* ENGEL, ALEJANDRO - *Elementos de Biomatemática*- Whasington D.C., O.E.A., 1978.
* KISELIOV, A.; KRASNOV M.; MAKARENKO, G. - *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* - Perú, Editorial Latinoamericana, 1987.
* PISKUNOV, N. - *Cálculo Diferencial e Integral* - U.R.S.S., Mir, 1983.

Resolución de la ecuación cuadrática

La solución de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ está dada, como se sabe, por la fórmula resolvente $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. A pesar del desconocimiento de la misma, ya los antiguos sabían resolver ecuaciones de segundo grado. Muchos pueblos se ocuparon de ellas: los babilonios, los griegos, los chinos, los hindúes y los árabes. El objeto de este breve estudio es mostrar las diversas resoluciones dadas por estas culturas.

Las civilizaciones mesopotámicas

Estas civilizaciones, llamadas en forma genérica babilónicas, datan del cuarto milenio antes de nuestra era. Los documentos matemáticos conocidos corresponden principalmente a la época comprendida entre el 2000 y el 1200 a.C.
En el año 1930 el alemán Otto Neugebauer descubre que los babilonios ya manejaban con gran soltura las ecuaciones cuadráticas en algunos de los textos más antiguos que se conocen.
Por ejemplo, en un problema encontrado en una tablilla se pedía hallar el lado de un cuadrado, sabiendo que su área menos el lado era igual a 870. Esto conducía a la ecuación: $x^2 - x = 870$.
Su resolución venía explicada en la forma siguiente: *"Toma la mitad de 1, que es 0,5, y multiplica 0,5 por 0,5, que es 0,25; suma este número a 870, lo que da 870,25. Este es el cuadrado de 29,5; ahora suma 0,5 a 29,5, cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado."*
La solución dada por los babilonios es la que se obtiene aplicando la fórmula

$x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} + \frac{p}{2}$, que da una raíz de la ecuación $x^2 - px = q$.
En otro texto babilónico se explica la forma de hallar la solución a la ecuación $11x^2 + 7x = 6,25$. Ellos convierten esta ecuación en la forma $x^2 + px = q$. Para ello multiplican a ambos miembros por 11, resultando la siguiente expresión:
$(11x)^2 + 7(11x) = 68,75$, que si se reemplaza $y = 11x$, queda en la forma buscada, y cuya solución está dada por la fórmula $y = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.
En una tablilla cuneiforme de la colección de la Universidad de Yale se pide resolver el siguiente sistema:

$$x + y = 6,5$$
$$xy = 7,5$$

Las instrucciones dadas por los babilonios fueron las siguientes:
Hállese primero $\frac{(x+y)}{2} = 3,25$ *y a continuación:* $[\frac{x+y}{2}]^2 = 10,5625$
Entonces:

$[\frac{x+y}{2}]^2 - xy = 3,0625$ y

$$\sqrt{[\frac{x+y}{2}]^2 - xy} = 1,75$$

Pero

$$1,75 = \sqrt{[\frac{x+y}{2}]^2 - xy}$$
$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy-4xy}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{4}}$$

$$= \sqrt{[\frac{x-y}{2}]^2} = \frac{x-y}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 3,25 + 1,75 = 5$$

y

$$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 3,25 - 1,75 = 1,5$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene fácilmente que x = 5 e y = 1,5.

Estos valores de x e y son las dos raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 7,5 = 6,5x$, es decir, una ecuación del tipo $x^2 + q = px$.

Así, en la época antigua y hasta comienzos de la edad moderna, las ecuaciones cuadráticas se clasificaron en tres tipos:

$1) x^2 + px = q$

$2) x^2 = px + q$

$3) x^2 + q = px$

Todos estos tipos de ecuaciones se hallan en los viejos textos babilónicos de hace unos 4000 años.

Es de notar que los babilonios no hacían demostraciones generales de sus resultados. En los problemas se indicaban instrucciones verbales al lector para que éste logre llegar a la solución. Si en alguna ecuación existía más de una solución positiva, el calculista babilonio no lo advertía, pues estos problemas eran artificiales y sus soluciones estaban preparadas de antemano, y eran esas las que se buscaban y no otras.

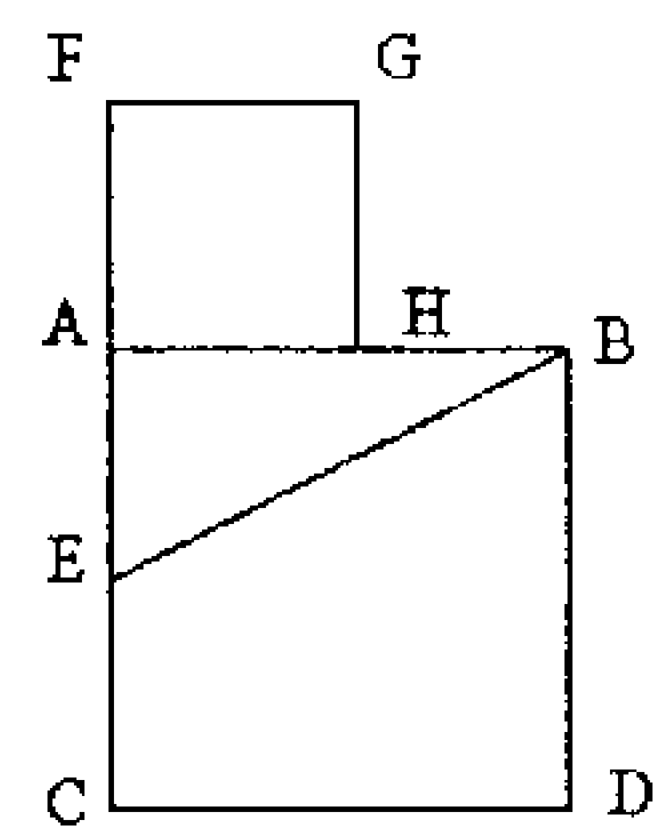
Los griegos

Hasta el año 1900 se atribuían los comienzos del álgebra al griego Diofanto (siglo III d.C.), más de dos mil años después que los babilonios llegaron a sus mejores resultados. Los griegos de los siglos VI y V a.C. conocían lo hecho por los babilonios en álgebra. Sin embargo, no intentaron desarrollarla, ni siquiera usarla, hecho que no deja de sorprender, ya que los matemáticos griegos de aquellos tiempos figuran entre los seres humanos más inteligentes que hayan vivido nunca. Los babilonios sobresalían en el cálculo numérico, pero eran deficientes en lógica y geometría, en donde sí sobresalían los helenos.

Los griegos (salvo Diofanto) utilizaron la geometría para llegar a soluciones de ecuaciones cuadráticas.

Conocida era entre los pitagóricos (ver Axioma 1 "Pitágoras y la Escuela Pitagórica") la sección áurea, es decir, la división de un segmento x en dos partes p y q, tales que la razón de x a p es igual a la razón de p a q. Esto es: x/p = p/q siendo x=p+q.

La construcción que se requiere para dividir a un segmento en esta forma es equivalente a la resolución de la ecuación cuadrática: $x^2 = px + p^2$. Esta es una ecuación cuadrática del tipo 2) dada por los babilonios. Es posible que Pitágoras haya aprendido de ellos a resolverla algebraicamente. Sin embargo, si p es un número racional entonces no existe ningún número racional x que satisfaga la ecuación. La solución es irracional. Parece dudoso que Pitágoras se haya dado cuenta de este hecho. Probablemente la haya resuelto por algún método geométrico. En los "Elementos" de Euclides (Libros II y VI) se explica el siguiente método (Extraído de "Historia de la matemática", de Carl B.Boyer): Sobre el lado AB se construye el cuadrado ABCD. El punto E divide a AC en dos partes iguales. Se traza el segmento EB y se prolonga el segmento CEA hasta F, de manera que EF=EB. Por último, se obtiene el punto buscado H completando el cuadrado AFGH. Como puede comprobarse en la figura que sigue, H resuelve el problema, pues AB/AH=AH/HB.



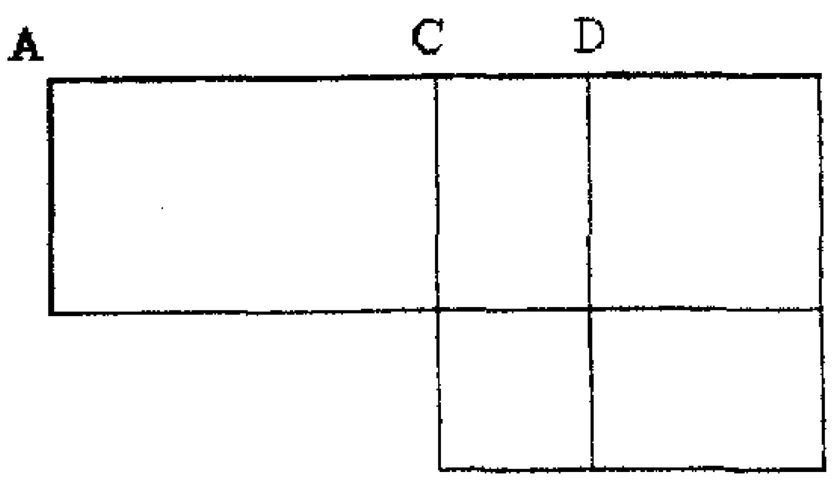
Muchas veces suele decirse

que los griegos no conocían el álgebra. Sin embargo, en el Libro II de los Elementos de Euclides aparece un álgebra geométrica, que les servía más o menos para los mismos fines que nuestra álgebra simbólica.

En el Libro II, en la proposición 5 se dice: *si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad*, proposición que, aunque no lo parezca, es equivalente a la expresión:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

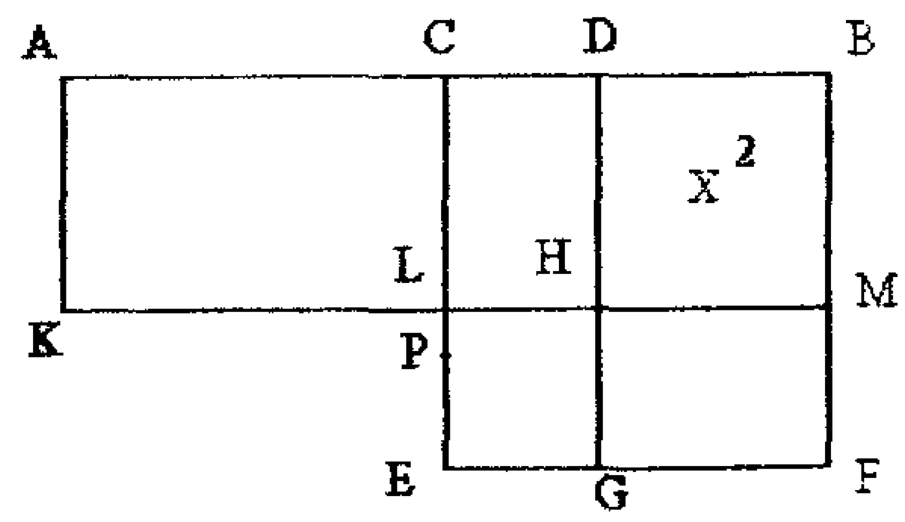
El diagrama utilizado por Euclides en esta proposición fue el siguiente:



Si AC=CB=a y CD=b, el teorema dice que $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$.

Dejamos a cargo del lector la verificación geométrica de este resultado.

Los algebristas geométricos griegos utilizaron frecuentemente figuras análogas para dar solución a los problemas cuadráticos. Por ejemplo, si querían construir un segmento x que cumpla la condición $ax - x^2 = b^2$, donde a y b son segmentos tales que $a>2b$, dibujaban la línea AB=a y hallaban su punto medio C. Luego trazaban una perpendicular CP de longitud igual a b; con centro en P y radio a/2 dibujaban una circunferencia que corte a AB en un punto D. Entonces construían sobre AB un rectángulo ABMK de anchura BM=BD y completaban el cuadrado BDHM. Este cuadrado es el área x^2 que cumple la condición expresada por la ecuación cuadrática.



(Esta construcción fue extraída de "Historia de la matemática", de Carl B.Boyer).

La demostración de esto viene dada por la proposición anterior (la II.5), según la cual es claro que el rectángulo ADHK es igual al polígono cóncavo CBFGHL, es decir, difiere de $(\frac{a}{2})^2$ en el cuadrado LHGE cuyo lado es, por construcción, $CD = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b^2}$.

De esta última igualdad y del hecho que $CD = \frac{a}{2} - x$, se tiene que

$CD^2 = (\frac{a}{2} - x)^2 = (\frac{a}{2})^2 - b^2$,

con lo que se obtiene la ecuación dada: $ax - x^2 = b^2$.

De una manera análoga, se resuelve la ecuación cuadrática $ax + x^2 = b^2$.

En el período que va del 300 al 200 a.C. hubo tres matemáticos griegos que sobresalieron por encima de todos los demás de su tiempo: Euclides, Arquímedes y Apolonio. Este último (262-190 a.C.) era conocido en la antigüedad como "El Gran Geómetra". Gran parte de su obra ha desaparecido, entre ellas un libro sobre secciones en una razón dada, donde se trataban los diversos casos de un problema general: dadas dos rectas y un punto sobre cada una de ellas, trazar por un tercer punto dado una recta que corte a las anteriores en segmentos (medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados) que estén en una razón dada. Este problema es equivalente a resolver una ecuación cuadrática del tipo $ax - x^2 = bc$.

El fructífero período de la matemática griega del siglo III a.C. fue seguido por una época de decadencia que no se recuperó hasta mediados del siglo III de la era cristiana. De estos tiempos el más importante algebrista griego es Diofanto de Alejandría, al que se lo suele llamar el padre del álgebra. La obra más importante que se conoce de este autor es *Arithmetica*, que es un tratado originalmente en trece libros, de los que sólo han sobrevivido los seis primeros. Esta obra está dedicada casi completamente a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas. Debido al énfasis que se pone en la *Arithmetica* en la solución de problemas indeterminados, la teoria que se ocupa de estos temas se suele conocer con el nombre moderno de análisis diofántico. Y como estas materias forman parte de la *Teoría de números* más bien que del álgebra elemental, no resulta muy adecuado considerar a Diofanto como el padre del álgebra. Aunque sí puede asignársele tal condición si se lo ve desde el punto de vista de la novedosa notación que empleó en su tratado, en donde aplica una cierta simbología semejante a la actual.

La *Arithmetica* es una colección de 150 problemas. En los que intervienen ecuaciones cuadráticas con dos raíces positivas, se da solamente la mayor, y las raíces negativas, obviamente, no se consideran. Diofanto resuelve problemas con varias incógnitas expresándolas en términos de una sola de ellas. Por ejemplo, para calcular dos números tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208, los números desconocidos no se representan por x e y, sino por 10+x y 10-x, con lo que sólo deberá verificarse que $(10+x)^2+(10-x)^2=208$. Luego x=2 y los números buscados son 8 y 12.

Los chinos

La época más brillante de la matemática china tuvo lugar durante el siglo XIII. Sin embargo, han llegado hasta nosotros relativamente pocos de los tratados que circularon en aquel tiempo.

Uno de los matemáticos más importantes de esa época fue Chu Shih-Chieh que floreció hacia los años 1280-1303. Vivió en Yen-shan, cerca de Pekín, pero parece ser que estuvo viajando durante veinte años como sabio errante, y que se ganaba la vida enseñando matemáticas. Escribió dos tratados: el *Suan-hsueh ch'i-meng* o *Introducción a los estudios matemáticos* y, de mayor interés matemático, el *Ssu-yuan yu-Chien* o, como el lector ya debe intuir, *Espejo Precioso de los Cuatro Elementos*. Los cuatro elementos a que se refiere el titulo, cielo, tierra, hombre y materia, representan las cuatro incógnitas de una ecuación.

En este libro se estudian ecuaciones de grados tan altos como 14. Chu Shih-Chieh explica aquí su método de transformación para ecuaciones: el *fan fa*, método que suele conocerse en Occidente con el nombre de método de Horner, matemático inglés que vivió medio milenio más tarde. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$x^2+252x-5292=0$, Chu Shih-Chieh obtiene primero, por tanteo, la aproximación x=19. Comprueba entonces que la ecuación tiene una raíz entre x=19 y x=20. A continuación utiliza el *fan fa*, en este caso la transformación $y=x-19$. De esta manera, obtiene la ecuación $y^2+290y-143=0$, que tiene una raíz entre y=0 e y=1. El valor aproximado de dicha raíz es $y=\frac{143}{1+290}$, y por lo tanto, el correspondiente valor de x es $\frac{5672}{291}$.

Los hindúes

En el siglo VII encontramos un matemático hindú llamado Brahmagupta que hizo importantes contribuciones al álgebra. Su obra más conocida se llamó *Brahmasphuta Siddhanta*. Aquí aparecen soluciones generales de ecuaciones cuadráticas, incluyendo las dos raíces, aún en casos en que una de ellas sea negativa; de hecho, la primera vez que aparece sistematizada la aritmética de los números negativos y del cero es en Brahmagupta. Es oportuno aclarar con respecto al cero que los griegos, a pesar de tener un concepto de la nada o el vacío, nunca lo interpretaron como un número, tal como sí lo hicieron los hindúes. Sin embargo, hay que decir también que Brahmagupta afirmó que 0:0=0.

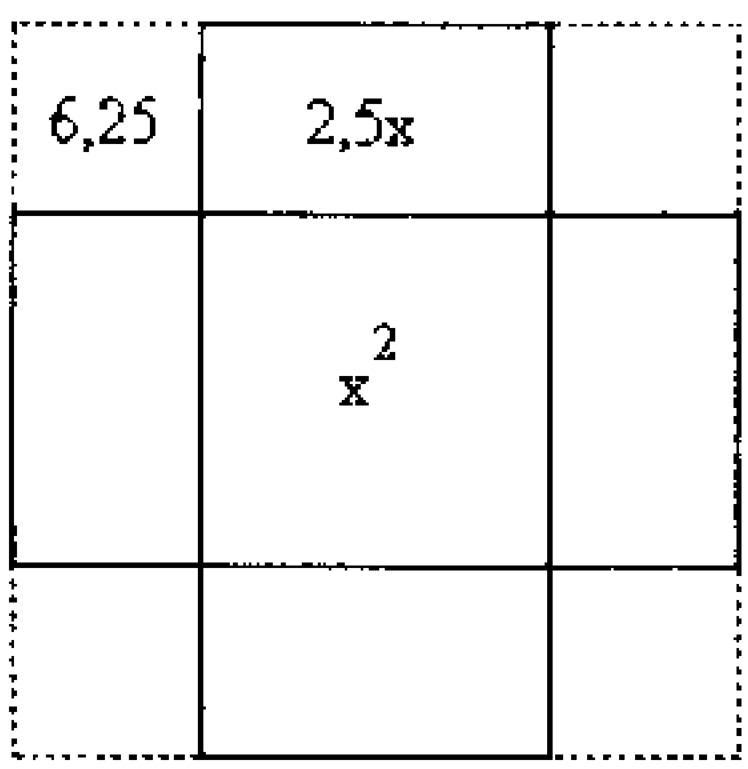
Sin duda, el más importante matemático del siglo XII fue un hindú: Bhaskara (1114-1185), quien completó algunos de los huecos que había dejado Brahmagupta. El más famoso libro de Bhaskara se

llama *Lilavati*, obra que contiene, entre muchos otros, numerosos problemas con ecuaciones cuadráticas. En esta obra se advierten influencias de la matemática griega, de la árabe y de la china.
Los hindúes vieron claramente la diferencia entre números positivos y negativos, interpretándolos como créditos y débitos que distinguían simbólicamente, hecho que les permitió unificar las ecuaciones cuadráticas en un solo tipo, cualesquiera fueran los coeficientes, y admitir soluciones negativas, aunque sin tomarlas en consideración.

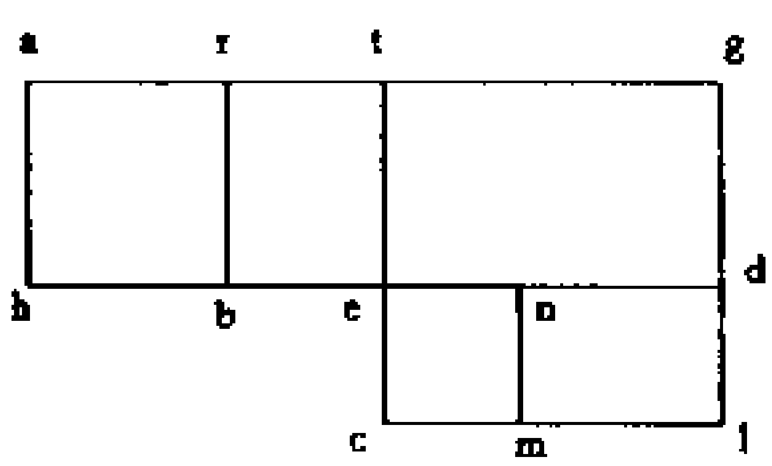
Los árabes

Durante la segunda mitad del siglo VIII, Bagdad se había convertido en la capital cultural del Islam. Era la nueva Alejandría. En los primeros años del siglo IX surge en aquella ciudad un matemático cuyo nombre iba a ser muy popular en la baja Edad Media: Mohammed Ibn-Musa Al-Khowarizmi (780-846). Su obra más importante fue *Al-jabr wa'l muqabalah.* De su nombre y del título de su obra derivan, respectivamente, las palabras algoritmo y álgebra.
En el *Al-jabr* se encuentran soluciones geométricas y numéricas a las ecuaciones cuadráticas, y demostraciones geométricas de esas soluciones. Al-Khowarizmi expone, en seis breves capítulos, la solución de los seis tipos de ecuaciones que resultan al considerar simultáneamente los tres posibles tipos de cantidades: cuadrados, raíces, números (es decir, x^2, x y *números*).
En el capítulo I se da el caso de los cuadrados igualados a raíces, para lo cual se dan los siguientes ejemplos: $x^2 = 5x$, $\frac{x^2}{3} = 4x$ y $5x^2 = 10x$. Las soluciones dadas son, respectivamente, x=5, x=12 y x=2. La raíz x=0 no se reconoce como tal.
En el capítulo II se ve el caso en que los cuadrados son iguales a números (es decir, $ax^2 = c$, que tiene solución $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$).
El capítulo III resuelve el caso en que las raíces son iguales a números ($bx = c$), mostrando nuevamente tres ejemplos.
Los capítulos IV, V y VI se ocupan de la resolución de los tres casos clásicos que presentan las ecuaciones cuadráticas completas: 1) cuadrado y raíz igual a número, 2) cuadrado y número igual a raíz, y 3) raíz y número igual a cuadrado. Las soluciones consisten en recetas para completar el cuadrado, aplicadas a ejemplos concretos.
En el capítulo IV $(ax^2 + bx = c)$ se muestra: $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ y $(\frac{1}{2})x^2 + 5x = 28$.
En el capítulo V $(x^2 + c = bx)$ se da un sólo ejemplo: $x^2 + 21 = 10x$, del que se calculan, sin embargo, las dos raíces, x=3 y x=7, obtenidas a partir de la regla $x = (\frac{b}{2}) \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$. Se llama aquí la atención sobre lo que actualmente nosotros conocemos como discriminante: *Debes comprender también que cuando tomas la mitad de las raíces en esta forma de la ecuación y multiplicas esta mitad por ella misma, si lo que resulta u obtienes de la multiplicación es mayor que las unidades mencionadas anteriormente que acompañan al cuadrado, entonces tienes realmente una ecuación.*
En el capítulo VI $(bx + c = x^2)$ se vuelve a dar un único ejemplo, $3x + 4 = x^2$. Al-Khowarizmi advierte aquí que si el coeficiente de x^2 no es uno, entonces se debe reducir, en primer lugar, la ecuación a esta forma, dividiendo a ambos miembros por dicho coeficiente. La solución está dada por la fórmula $x = (\frac{b}{2}) + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c}$.
Los seis tipos de ecuaciones que se han descripto agotan todas las posibilidades de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva.
En el capítulo VI Al-Khowarizmi agrega: *Ya hemos dicho lo suficiente, en lo que se refiere a los números, acerca de los seis tipos de ecuaciones. Ahora es necesario, sin embargo, que demostremos geométricamente*

la verdad de los mismos problemas que hemos explicado con números. Puede notarse a partir de este párrafo la influencia griega, aunque la demostración geométrica que encontramos en el Algebra no tiene demasiado que ver con la matemática clásica griega.
Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2+10x=39$ Al-Khowarizmi traza un cuadrado para representar a x^2 y sobre los cuatro lados de este cuadrado construye cuatro rectángulos de 2,5 unidades de ancho cada uno:



Para completar el cuadrado mayor que incluye a todos ellos hay que añadir los cuatro cuadrados menores de las esquinas (que aparecen punteados), cada uno de los cuales tiene un área de 6,25 unidades, es decir, un total de 25 unidades. De esta manera, se obtiene un cuadrado mayor de área total $x^2+10x+25=39+25=64$.
En consecuencia, el lado de este cuadrado mayor debe ser igual a 8 unidades. Si a este resultado se le resta dos veces 2,5, o sea, 5 unidades, se obtiene finalmente x=3 como solución, demostrando así que la solución hallada en el capítulo IV era correcta.
Para la demostración de la ecuación del capítulo V, $x^2+21=10x$, Al-Khowarizmi dibuja un cuadrado *arbh* que representa a x^2 y un rectángulo *brgd* que representa 21 unidades. Entonces el rectángulo total que comprende el cuadrado *arbh* y el rectángulo *brgd* debe tener como área 10x, luego el lado *ag* o *hd* debe medir 10 unidades. Si trazamos entonces las mediatrices *te* de los lados *ag* y *hd*, y la extendemos hasta c de manera que *tc* *tg*, y completamos los cuadrados *tclg* y *cmne*, entonces el área del *trbe* es igual al área del *mndl*; pero el cuadrado *tglc* mide 25 y el polígono *tenmlg* 21 (pues es igual al rectángulo *brgd*). Por lo tanto, el cuadrado *necm* mide 4 y su lado *ec* 2. Como *ec* *be* y *he*=5, se tiene que *x*=*hb*-*he-be*=5-2=3, lo que demuestra que la solución aritmética dada en el capítulo V es correcta. Para la otra solución de esta ecuación, x=7, se da una figura un poco modificada.



Finalmente el resultado del capítulo VI se demuestra análogamente.
Hace no muchos años se publicó en Turquía un libro escrito por Abd Al-Hamid Ibn-Turk titulado Sobre las necesidades lógicas en las ecuaciones mixtas. Esta obra es muy parecida al Algebra de Al-Khowarizmi y se publicó más o menos en la misma época, probablemente incluso antes. Allí se dan el mismo tipo de demostraciones geométricas y en un caso el mismo ejemplo $x^2+21=10x$. Además se demuestra, mediante figuras geométricas, que una ecuación cuadrática no tiene solución cuando su discriminante es negativo.
En forma similar a Al-Khowarizmi, otro matemático árabe, Omar Khayyam (1050-1125), también se ocupó de las ecuaciones cuadráticas, dando las dos soluciones: aritmética y geométrica. A Omar Khayyam se lo recuerda en Occidente como uno de los más grandes poetas persas. Es autor de la famosa poesía filosófica *El Rubaiyat.*

René Descartes

El creador de la Geometría Analítica, el francés René Descartes (1596-1650) es autor del primer texto matemático que puede leerse sin dificultades de notación: La géométrie. En el Libro I de esta obra hay una serie de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas geométricamente. Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2=ax+b^2$, Descartes indica: trácese un segmento LM de longitud b, y levántese en L un segmento

NL perpendicular a LM y de longitud a/2. Con centro en N dibújese la circunferencia de radio a/2 y trácese la recta MN, que corta a la circunferencia en O y en P.

Entonces x=OM es el segmento buscado. Descartes ignora la raíz PM de la ecuación porque es "falsa", es decir, es negativa. En forma análoga se dan construcciones para $x^2 = ax - b^2$ y para $x^2 + ax = b^2$.

****

Finalmente cabe aquí hacerse una pregunta. Las soluciones de los seis tipos de ecuaciones dadas por los árabes, ¿encuentran soluciones negativas?

La respuesta podría ser claramente no, si nos remitimos a la no mención de ello que realizaron tanto Al-Khowarizmi, Khayyam y el resto de los matemáticos árabes.

Sin embargo, puede analizarse el hecho de la siguiente manera. Supongamos que -r (r positiva) es la raíz negativa de $x^2 + bx = c$. Entonces $(-r)^2 + b(-r) = c$ o $r^2 = br + c$. Así r es una raíz positiva de $x^2 = bx + c$. Es decir, el valor absoluto de la raíz negativa de $x^2 + bx = c$ es la raíz positiva de $x^2 = bx + c$ y viceversa.

También los valores absolutos de las raíces negativas de $x^2 + bx + c = 0$ son las raíces positivas de $x^2 + c = bx$ (esto puede fácilmente verificarse).

En este sentido, entonces sí las soluciones geométricas halladas por los árabes encuentran todas las raíces reales de todas las ecuaciones cuadráticas. Los usuarios de estos métodos no hallaron raíces negativas porque ellos no las concebían.

Claudio Salpeter*

*Prof. de Matemática, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Bibliografía:

* BELL, E.T. - *Historia de las matemáticas* - México, Fondo de Cultura Económica, 1985.
* BOYER, CARL B - *Historia de la matemática* - Madrid, Alianza Universidad Textos, 1994.
* COLERUS, EGMONT - *Historia de la Matemática* - Buenos Aires, Progreso y cultura, 1943.
* COLLETTE, JEAN-PAUL, *Historia de la Matemática* - México, Siglo XXI, 1985.
* REY PASTOR, J - BABINI, JOSE - *Historia de la matemática (vol.1)* - Barcelona, Gedisa, 1985.

¡Ah!, pero mis Cálculos, según dice la Gente,
han hecho cuadrar el Año con el Ritmo
de los Hombres, ¿eh?
Si esto es así, en el Calendario nos tropezamos
con un Mañana que aún no ha nacido,
y un Ayer que ya ha muerto.

Rubaiyat de **Omar Khayyam**

La breve vida de un matemático genial

GALOIS, EL MALDITO

Veintinueve años atrás, cuando las paredes "prohibían prohibir", el fantasma de un joven matemático de principios del siglo pasado recorría las aulas y las calles del Mayo francés. No por casualidad, **Evariste Galois** resucitaba una vez más para erigirse como bandera en la turbulencia de la lucha estudiantil.

Nacido el 25 de octubre de 1811 en Bourg-La-Reine y muerto trágicamente a los veinte años, Galois no sólo ocupa un lugar privilegiado entre los grandes matemáticos de todos los tiempos, sino que, además, fue un alto exponente del científico comprometido con las ideas y problemas de su época, "*...el único que actuó primordialmente como un militante revolucionario*", según escribiera **Cora Sadosky** en el prólogo a la edición castellana del libro "*El elegido de los dioses*" de **Leopold Infeld.**

Luego de ser cuidadosamente preparado por su madre, **Adèlaide-Marie Demante**, Galois ingresa en 1823 al Louis-le-Grand, el más distinguido de los colegios reales, por el que también pasaron figuras como **Robespierre** y **Víctor Hugo.** Como ellos, Evariste combatió la monarquía y la tiranía.

En este mismo colegio, donde discutía apasionadamente sobre la situación política de Francia, llegan a sus manos obras de **Legendre** y **Lagrange**, sumergiéndolo para siempre en el maravilloso mundo de "*la reina de las ciencias*". Pronto percibirá tanto la belleza y armonía de la geometría, como el estado caótico en que se encontraba el álgebra. Decidido a convertirse en un gran matemático, prepara su ingreso a la Escuela Politécnica, hija de la Revolución y orgullo de Francia, que alguna vez fuera dirigida por **Gaspar Monge**.

En 1828 fracasa en el examen de ingreso, pero ya se encuentra trabajando en las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algebraica pueda resolverse por radicales.

Un año después, publica su primera monografía: "*Demostración de un teorema sobre las fracciones continuas periódicas*". Asimismo, envía a la Academia de Ciencias sus resultados sobre la solubilidad de las ecuaciones algebraicas, de la cual -tal como le sucederá con una segunda monografía- nunca obtendrá respuesta.

No es la primera vez que **Cauchy**, uno de los matemáticos más importantes de la época y miembro de la Academia de Ciencias, pierde un trabajo de algún joven matemático. Un manuscrito de **Niels Henrik Abel**, enviado a la Academia y que Legendre pasara a Cauchy para que lo estudiase, hubiese corrido la misma suerte de no ser por las presiones del cónsul de Noruega en París. Obviamente el manuscrito apareció entre los papeles de Cauchy, aunque demasiado tarde pues Abel había fallecido.

La vida de Galois está signada por la incomprensión, la persecución y la tragedia. En julio de 1829 recibe uno de los golpes más duros: su padre, **Nicolás Gabriel Galois**, alcalde de Bourg-La-Reine, se suicida tras una campaña de calumnias contra su persona dirigida por los jesuitas. Poco tiempo después, fracasa por segunda vez en el ingreso a la Escuela Politécnica pues, cansado de "*las estúpidas preguntas*" de su examinador, decide arrojarle la esponja borradora, cerrando así, definitivamente, toda posibilidad de acceso a la misma.

En febrero de 1830 ingresa a la Escuela Preparatoria. Los días de Galois comienzan la cuenta regresiva. Le restan sólo dos años, cortos pero intensos. En París circulan rumores de revolución. Mientras el pueblo levanta barricadas y combate en las calles, la burguesía planifica el derrocamiento del reinado de la aristocracia para erigir el suyo. El 28 de julio de 1830, la bandera tricolor flamea sobre Nôtre Dame y la Marsellesa se canta nuevamente. Por estos días, Evariste se integra a la Sociedad de los Amigos del Pueblo, donde se agrupan los sectores republicanos más radicalizados. Al poco tiempo **Carlos X** es desterrado para que asuma **Luis Felipe**, el duque de Orléans.

La Escuela Preparatoria es ahora la Escuela Normal y Galois comienza, en diciembre, a cursar su segundo año, no ya para estudiar, sino para agitar los ideales republicanos. Es inmediatamente expulsado como consecuencia de una carta suya publicada en el periódico la "Gazette des Ecoles".

Sin perder tiempo, se incorpora rápidamente a la Guardia Nacional de Artillería, donde por entonces se concentraba una gran cantidad de militantes republicanos.

Sin embargo, pese a que dedicó sus mayores esfuerzos a la actividad política, no descuidó sus investigaciones matemáticas. A principios de enero de 1831 da un curso de Álgebra, que duró sólo tres clases debido a la deserción de sus oyentes. En él expone, además de sus nuevas teorías, importantes reflexiones filosóficas acerca de las ciencias y de la matemática en particular, donde resalta el carácter humano y colectivo de la actividad científica, valorizando el papel de la solidaridad entre los científicos en lugar de la competencia y rivalidad.

El 16 de enero, impulsado por su amigo **Chevalier**, envía un nuevo trabajo a la Academia, que titula "*Sobre las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales*"

El 9 de mayo protagoniza un hecho que quedará registrado en las *Memorias* de **Alejandro Dumas**. Ese día se ofreció, en el salón del restaurante Vendanges de Bourgogne un banquete en honor a diecinueve republicanos, miembros de la ya disuelta Guardia Nacional, que fueron liberados tras la acusación de conspirar contra el rey Luis Felipe. Galois, irritado por considerar a varios de los invitados como falsos republicanos, propone un brindis por Luis Felipe levantando su copa, en la que introduce furiosamente un puñal. La policía, que contaba con espías en la reunión, lo detiene al día siguiente bajo la acusación de amenazar la vida del Rey. Sometido a juicio, el jurado lo declara finalmente inocente.

Exactamente cuarenta y dos años después de la toma de la Bastilla, el 14 de julio de 1831, Galois y su compañero **Duchatelet**, son detenidos por vestir el uniforme de la Guardia Nacional, cuando se dirigían, junto a otros republicanos, a plantar árboles en memoria de la libertad. Trasladado a la prisión de Saint-Pelagie, permanece allí durante tres meses bajo prisión preventiva y luego es condenado a seis meses más. A los pocos días de llegar a la prisión, el 30 de julio, estalla en la pared de la celda un disparo, que se supone iba dirigido contra Evariste.

Estando en prisión recibe una carta de la Academia, donde le explican que a pesar de los esfuerzos realizados no han podido comprender las demostraciones enviadas por él. En realidad, no existía en aquel momento un matemático en Francia capaz de comprender las ideas que surgían de ese genio.

En marzo de 1832 es trasladado al sanatorio de la calle de l'Oursine y el 29 de abril recobra su libertad.

Al mes es retado a duelo, a raíz de una aventura amorosa. La noche anterior al mismo, Galois conciente de su inminente muerte, escribe varias cartas, entre ellas una dirigida a sus compañeros republicanos en la cual se disculpa por jugarse la vida a causa de una *"infame coqueta"* en lugar de perderla por la patria; y otra, a Auguste Chevalier, en la que sentará las bases de la matemática moderna, condensando todos sus nuevos descubrimientos de una manera desesperada, acosado por el escaso tiempo que le queda. En ella pide a su amigo que le haga conocer sus resultados a **Gauss** o a **Jacobi** para que den una opinión *"no respecto de la verdad sino de la importancia de los teoremas".* Al día siguiente es gravemente herido durante el primer duelo, quedando abandonado en esas condiciones. Encontrado por un campesino, muere en el hospital Cochin, el 31 de mayo de 1832.

Una gran cantidad de indicios permiten deducir que Evariste fue víctima, en realidad, de un plan para asesinarlo elaborado por la policía del rey, teoría que sostuvo durante toda la vida su hermano **Alfred Galois.**

Sin lugar a dudas, Evariste Galois fue un ser con concepciones increíblemente avanzadas para su tiempo. Como político fue un incansable defensor de las banderas republicanas y de la causa de su pueblo; como matemático, un genio incomprendido, un poeta, un arquitecto que intentó edificar esta ciencia basándose en su belleza.

Resumiremos a continuación los puntos esenciales del más importante de sus trabajos matemáticos.

Escribe Julio Rey Pastor en Análisis Matemático I: *"La ecuación de primer grado se resuelve por operaciones racionales; si sólo se admite esta clase de operaciones racionales, la ecuación general de segundo grado resultaría irresoluble. Si se admiten raíces cuadradas, se puede resolver la ecuación de segundo grado, pero no la de tercero, pues ésta exige raíces cúbicas... Se ha visto como se logra la resolución de la ecuación de cuarto grado con radicales de segundo y tercer grado, no siendo extraño que no aparezcan raíces de cuarto grado, pues estas se reducen a dos extracciones de raíces cuadradas.*

Parecería natural, pues, que las ecuaciones de quinto grado fueran resolubles con radicales de segundo, tercer y quinto grado..." y así sucesivamente. *"Tal fue el problema que se propusieron los algebristas de los siglos XVI, XVII y XVIII fracasando en su empeño"*

Sea **P** un polinomio de segundo grado con coeficientes racionales, es decir, $P = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Es bien sabido que si α es una raíz de P entonces:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (1)$$

Donde $D = b^2-4ac$. Nótese que, tal como dice Rey Pastor, la igualdad (1) expresa a α mediante la aplicación sucesiva de operaciones racionales (suma, resta, producto, cociente, potenciación) y además radicación.

Aunque la resolución de la ecuación de segundo grado es conocida desde tiempos remotos (véase la nota "Resolución de la ecuación cuadrática" en este mismo número de **Aχioma)** fue recién en el siglo XVI que Tartaglia dio la resolución de la ecuación de grado tres. Si $P = x^3 + bx^2 + cx + d$, Tartaglia descubrió que el cambio de variables $y = x + b/3$ transforma la ecuación:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

en la expresión:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (3)$$

(Donde **p** y **q** son números racionales). Es claro que α es solución de (3) si y solamente si α-b/3 es solución de (2). De este modo, no perdemos generalidad si suponemos desde el principio que:

$$P = x^3 + px + q$$

Si $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2$ y $D = (q^2/4) + (p^3/27)$, entonces las fórmulas de Tartaglia para expresar a las raíces de P son:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{D}}$$
$$\alpha_2 = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{D}}\,\omega + \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{D}}\,\omega^2$$
$$\alpha_3 = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{D}}\,\omega^2 + \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{D}}\,\omega$$

(Los números $\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{D}}$ y $\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{D}}$ pueden ser quizá complejos, en ese caso deben ser elegidos de forma tal que su producto sea un número real).

Un polinomio P se dice que es **resoluble por radicales** si es posible expresar sus raíces a partir de ciertos números racionales mediante la aplicación sucesiva de las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación.

La expresión (1) da una forma de resolver por radicales cualquier polinomio de grado dos. Las fórmulas de Tartaglia resuelven por radicales los polinomios de grado tres. El matemático italiano Ferrari (contemporáneo de Tartaglia) logró dar la resolución por radicales de la ecuación de cuarto grado.

El genial trabajo de Evariste Galois demostró que no es posible hallar una fórmula general que calcule las raíces de polinomios de grado mayor o igual que 5 a partir de sus coeficientes (y otros números racionales constantes), mediante la aplicación de las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación..

Es importante destacar que lo que decimos es que resulta imposible hallar una **fórmula general** para resolver por radicales polinomios de grado $m\geq 5$. Esto significa que para todo $m\geq 5$ existe siempre **algún** polinomio de grado m que no es resoluble por radicales. Sin embargo esto no quiere decir que no existan algunos polinomios de grado 5 (o mayor) que, por el contrario, sí lo son.

Por ejemplo, dejamos como ejercicio para el lector demostrar que el polinomio de grado seis:

$$P = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x+1$$

es resoluble por radicales.

Le damos algunas sugerencias para resolver el ejercicio. El lector podrá observar que P es divisor del polinomio x^7-1. Deduzca de ello que si ω es una raíz de P entonces $\omega^7 = 1$. Pruebe luego que $\omega + 1/\omega$ es raíz del polinomio $Q = x^3 + x^2 - 2x - 1$. De esto último, deduzca que ω puede expresarse a partir de números racionales utilizando suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación.

Indicaremos por $\mathcal{Q}$ al conjunto de los números racionales. Denominaremos como **C** al conjunto de los números complejos. Si $\Re$ es el conjunto de los números reales, nótese que $\Re\subset\mathbf{C}$. Llamaremos $\mathcal{Q}[x]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales.

Un polinomio $P\in\mathcal{Q}[x]$ de grado m se dice que es *irreducible* (en $\mathcal{Q}[x]$) si no puede escribirse de la forma P = Q.R, donde Q y R son polinomios de grado menor que m. El concepto de *irreducible* es para los polinomios el análogo del concepto de *primo* para los números enteros.

Supongamos que el polinomio P con coeficientes racionales y de grado m tiene como raíces a los números complejos (diferentes entre sí) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

La demostración de Galois consiste en utilizar estas raíces para asignar al polinomio P un grupo (conocido en la actualidad como el *grupo de Galois* de P) y luego verificar que el polinomio es resoluble por radicales si y sólo si el grupo que le corresponde tiene una cierta propiedad (la cual especificaremos más adelante).

Como veremos, en la construcción del grupo de Galois juega un papel central el concepto de *automorfismo*.

Una función $\Phi: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ se dice que es un ***automorfismo*** si verifica las siguientes condiciones:

1) Φ es biyectiva.
2) $\Phi(1) = 1$
3) $\Phi(z + w) = \Phi(z) + \Phi(w)$
4) $\Phi(zw) = \Phi(z)\Phi(w)$

La función identidad, $\Phi(z) = z$ o la conjugación, $\Phi(z) = \bar{z}$ son dos ejemplos de automorfismos. Si impusiéramos como condición adicional que Φ fuera una función continua, entonces estos serían los únicos ejemplos existentes en **C**. Es posible demostrar, sin embargo, que existen infinitos automorfismos no continuos. A los efectos de este trabajo, nos interesan por igual tanto los automorfismos continuos como los que no lo son.

Sea $\Phi: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ un automorfismo. Dejamos como tarea al lector demostrar las siguientes propiedades:

1) $\Phi(0) = 0$
2) $\Phi(-z) = -\Phi(z)$
3) $\Phi(z^{-1}) = \Phi(z)^{-1}$
4) $\Phi(z^n) = \Phi(z)^n \quad \forall\, n \in \boldsymbol{Z}$
5) $\Phi(r) = r \quad \forall\, r \in \boldsymbol{Q}$

Destaquemos que la última propiedad nos dice que un automorfismo Φ deja *fijo* a todo número racional. Como consecuencia general, si $z \in \boldsymbol{C}$, estas propiedades imponen grandes restricciones a los valores que puede tomar $\Phi(z)$. Por ejemplo, sea **i** la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). Luego:

$$i^2 = -1$$
$$\Phi(i^2) = \Phi(-1)$$
$$[\Phi(i)]^2 = -1$$

Por lo que sólo puede ser, o bien $\Phi(i) = i$, o bien $\Phi(i) = -i$. Es decir, aunque hay infinitos automorfismos, en todos ellos sólo hay dos posibles imágenes para el número complejo **i**.

Sea Φ un automorfismo cualquiera. Volvamos al polinomio P con coeficientes racionales, de grado m, cuyas raíces son los números complejos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

$$P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

Sea α_r una de las raíces de P, entonces:

$$0 = a_0 + a_1\alpha_r + \ldots + a_m(\alpha_r)^m$$

Aplicando Φ a ambos miembros se obtiene:

$$\Phi(0) = \Phi[a_0 + \ldots + a_m(\alpha_r)^m]$$

$$0 = a_0 + a_1\Phi(\alpha_r) + \ldots + a_m[\Phi(\alpha_r)]^m$$

$$0 = P[\Phi(\alpha_r)]$$

Este último renglón demuestra la siguiente proposición (que es esencial para nuestro propósito):

Proposición 1: si α_r es una raíz de P entonces $\Phi(\alpha_r)$ es también una raíz de P.

Nótese que si $\mathbf{P} = x^2 + 1$ (cuyas raíces son **i** y **-i**) entonces la **Proposición 1** nos dice que $\Phi(i) = \pm\, i$, tal como ya habíamos deducido.

Como consecuencia de la **Proposición 1**, podemos decir que todo automorfismo induce una biyección del conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ en sí mismo. Por ejemplo, si $\mathbf{P} = x^2 + 1$, el conjunto en cuestión es $\{i, -i\}$. Si Φ_1 es la identidad y Φ_2 es la conjugación, entonces Φ_1 induce la biyección:

$$i \to i \qquad -i \to -i$$

Mientras que Φ_2 induce la biyección:

$$i \to -i \qquad -i \to i$$

Cualquiera de los infinitos restantes automorfismos de **C** induce una u otra de estas dos biyecciones.

Adoptemos la siguiente convención para indicar a las biyecciones del conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ en sí mismo. Digamos, para ejemplificar, que n = 4. Entonces cada biyección será nombrada mediante una 4-upla ordenada. De modo tal que, por ejemplo, (1,2,4,3) denotará la biyección:

$$\alpha_1 \to \alpha_1 \qquad \alpha_2 \to \alpha_2$$
$$\alpha_3 \to \alpha_4 \qquad \alpha_4 \to \alpha_3$$

(La n-upla muestra en qué orden aparecen los índices de la derecha). La 4-upla (1,2,3,4) corresponde a la función identidad.

Hemos dicho entonces que todo automorfismo Φ induce una biyección del conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ en sí mismo. Es importante aclarar que, en muchos casos, los automorfismos no llegan a inducir **todas** las biyecciones posibles.

El conjunto de las biyecciones de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, junto con la operación de composición de funciones, constituye un **grupo** (el grupo de las *permutaciones* de $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$). Puede demostrarse con relativa facilidad que el subconjunto formado por todas aquellas biyecciones que son inducidas por los automorfismos es un **subgrupo** del mismo.

Observemos finalmente que el grupo de permutaciones de $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ es naturalmente isomorfo al grupo de las permutaciones de $\{1,...,n\}$. Por ejemplo, en el caso n = 4, la 4-upla (1,2,4,3) puede usarse tanto para indicar la biyección

$$\alpha_1 \to \alpha_1 \qquad \alpha_2 \to \alpha_2$$
$$\alpha_3 \to \alpha_4 \qquad \alpha_4 \to \alpha_3$$

como la biyección:

$$1 \to 1 \qquad 2 \to 2$$
$$3 \to 4 \qquad 4 \to 3$$

Llamemos S_n al grupo de las permutaciones de $\{1,...,n\}$. La construcción anterior hace corresponder a cada polinomio P (con n raíces diferentes) un subgrupo del grupo de permutaciones de $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$. Éste puede verse a su vez como un subgrupo del grupo de las permutaciones de $\{1,...,n\}$. Observemos finalmente que todo subgrupo es, en sí mismo, un grupo.

Definición: El grupo (a la vez subgrupo S_n) que, según la construcción anterior, le corresponde al polinomio P se denomima el **grupo de Galois de P sobre $\mathbb{Q}$** y lo indicaremos por $G(P,\mathbb{Q})$ o G(P).

Como ejemplo calculemos el grupo de Galois del polinomio $P = x^4-2$, que es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y que tiene como raíces:

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2} \qquad \alpha_2 = -\sqrt[4]{2}$$
$$\alpha_3 = i\sqrt[4]{2} \qquad \alpha_4 = -i\sqrt[4]{2}$$

Si Φ es un automorfismo entonces $\Phi(\alpha_1)$ puede ser igual a cualquier α_r ($1 \le r \le 4$), mientras que, como ya sabemos, $\Phi(i) = \pm\, i$. Como todas las raíces pueden construirse a partir de **i** y de α_1, la observación precedente nos permite caracterizar todas las biyecciones que son inducidas por los automorfismos. En efecto, supongamos, por ejemplo, que Φ es un automorfismo tal que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_3$ y $\Phi(i) = -i$ entonces:

$$\Phi(\alpha_1) = \alpha_3$$

$$\Phi(\alpha_2) = \Phi(-\alpha_1) = -\Phi(\alpha_1)$$
$$= -\alpha_3 = \alpha_4$$

$$\Phi(\alpha_3) = \Phi(i\alpha_1) = \Phi(i)\Phi(\alpha_1)$$
$$= -i\alpha_3 = \alpha_1$$

$$\Phi(\alpha_4) = \Phi(-i\alpha_1)$$
$$= \Phi(-i)\Phi(\alpha_1) = i\alpha_3 = \alpha_2$$

Todos los automorfismos tales que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_3$ y $\Phi(i) = -i$ inducen la biyección (3,4,1,2). Dado que hay cuatro valores posibles para $\Phi(\alpha_1)$ y dos para $\Phi(i)$, entonces los automorfismos inducen sólo 8 de las 24 biyecciones de $\{\alpha_1,..., \alpha_4\}$ en sí mismo. Dejamos como tarea para el lector hallar las siete biyecciones restantes (una de las cuales, desde luego, es la identidad).

(**Nota:** decimos en el ejemplo precedente que $\Phi(\alpha_1)$ puede ser igual a cualquier α_r, $1 \le r \le 4$. Si bien es cierto que, por la **Proposición 1**, $\Phi(\alpha_1)$ debe ser igual a algún α_r, no es evidente a priori que para *todo* r exista un automorfismo Φ tal que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_r$. Tampoco es evidente que deba existir necesariamente un automorfismo Φ tal que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$ y $\Phi(i) = -i$ simultáneamente. Sin embargo, todos los hechos mencionados son ciertos. Por razones de espacio, no nos resulta posible exponer completamente la teoría que lleva a justificar estas afirmaciones.)

El grupo G(P) es, por supuesto, siempre finito. Se verifica, además, el hecho siguiente:

Proposición 2: Si P es irreducible de grado m, entonces P tiene exactamente m raíces diferentes y además m es divisor del cardinal de G(P).

Como ya dijimos, el trabajo de Galois consiste en equiparar la resolubilidad por radicales de P con una cierta propiedad del grupo G(P). Estableceremos a continuación de qué propiedad se trata.

Sea G un grupo multiplicativo cualquiera. Consideremos D(G) el subconjunto de G formado por todos aquellos elementos $g \in G$ que pueden escribirse como $g = aba^{-1}b^{-1}$ para ciertos $a,b \in G$. Expresado simbólicamente:

$$D(G) = \{g \in G / \exists a,b \in G: g= aba^{-1}b^{-1}\}$$

Si G es un grupo abeliano (es decir conmutativo) entonces es obvio que D(G) consta únicamente del elemento neutro del grupo (al que indicaremos por I). Pero si G no es abeliano, entonces D(G) puede contener muchos otros elementos, aparte del neutro. Más aún, dejamos como ejercicio al lector demostrar que D(G) = {I} si y sólo si G es abeliano.

Aunque en muchos ejemplos D(G) es un subgrupo de G, hay en cambio otros grupos en los que esto no ocurre. Llamaremos **grupo derivado de G** al menor de los subgrupos de G que contiene a D(G). En otras palabras el grupo derivado (al que indicaremos por G') es el subrupo de G *generado* por D(G).

Como ejemplo, calculemos el grupo derivado de S_3 (el grupo de las permutaciones de {1,2,3}). Este grupo está formado por seis elementos, que indicaremos por:

$\tau_1 = (1,3,2)$ $\tau_2 = (3,2,1)$
$\tau_3 = (2,1,3)$ $\rho_1 = (2,3,1)$
$\rho_2 = (3,1,2)$ $I = (1,2,3)$

Las permutaciones τ_1, τ_2 y τ_3 se denominan *trasposiciones*, ρ_1 y ρ_2 se denominan *triciclos*. El lector podrá verificar fácilmente que cada trasposición es la inversa de sí misma y que cada triciclo es el inverso del otro.

El producto de dos triciclos (iguales o no), o bien es igual a I, o bien es igual a otro triciclo. El producto de dos trasposiciones es, o bien un triciclo, o bien I. El producto de un triciclo y una trasposición es una trasposición.

Cuando efectuamos un producto del tipo $\mathbf{aba^{-1}b^{-1}}$ el resultado es siempre, o bien I, o bien un triciclo. En efecto, si **a** es una trasposición y **b** es un triciclo, entonces **ab** es una trasposición y lo mismo ocurre con $\mathbf{a^{-1}b^{-1}}$, por lo que $\mathbf{aba^{-1}b^{-1}}$ es en definitiva un triciclo (o I).

El lector puede verificar que la misma conclusión se obtiene si **a** y **b** son ambas trasposiciones o ambos triciclos. Por ejemplo, $\tau_1\tau_3\tau_1^{-1}\tau_3^{-1} = \tau_1\tau_3\tau_1\tau_3 = \rho_1$.

En definitiva, se deduce que $D(S_3) = \{I,\rho_1,\rho_2\}$. En este caso, $D(S_3)$ es un subgrupo de S_3, por lo que:

$$(S_3)' = \{I,\rho_1,\rho_2\}$$

Ya que G' es en sí mismo un grupo, podemos repetir en G' la misma construcción del grupo derivado. Obtemos así el grupo derivado de G', o sea (G')' = G". Dado que G" es también un grupo, podemos repetir a partir de él la misma construcción, obteniendo de esta forma el grupo $(G")' = G^{(3)}$.

Construimos de esta manera una cadena descendente de subgrupos de G:

$$G \supseteq G' \supseteq G" \supseteq ... \supseteq G^{(n)} \supseteq ...$$

llamada la *serie central descendente* de G.

Por ejemplo, para S_3, se puede verificar fácilmente que $(S_3)'$ es conmutativo, por lo que $(S_3)" = \{I\}$. A partir de $(S_3)"$ la serie central descendente de S_3 se *estabiliza* (es decir, se hace constante).

$$S_3 \supseteq (S_3)' \supseteq \{I\} \supseteq ... \supseteq \{I\} \supseteq ...$$

Es evidente que si G es finito, entonces la serie central descendente tarde o temprano terminará por estabilizarse. Sin embargo, puede ocurrir que se estabilice sin llegar a {I}. Esto sucede cuando existe un natural n tal que:

$$G^{(n)} \neq \{I\} \qquad [G^{(n)}]' = G^{(n)}$$

Definición: Un grupo G se llama **resoluble** si y sólo si su serie central descendente se estabiliza en el subgrupo {I}. En otras palabras, G es resoluble si y sólo si existe un natural **n** tal que $G^{(n)} = \{I\}$.

Proposición 3: Si G es un grupo resoluble entonces todo subgrupo de G es también, él mismo, un grupo resoluble.

Dejamos como tarea para el lector dar una demostración de la **Proposición 3**. También le dejamos el siguiente ejercicio: demostrar que si $P = x^4-2$ y $G = G(P)$ es su grupo de Galois entonces $G'=\{I, (2,1,4,3)\}$ y $G'' = \{I\}$, por lo que G(P) es resoluble.

El ejemplo antes desarrollado, en el que vimos que $(S_3)'' = \{I\}$, nos permite afirmar que S_3 es también un grupo resoluble. Todo grupo abeliano es, por supuesto, resoluble. Veamos a continuación un grupo que no lo sea.

En S_n se llaman, en general, *trasposiciones* a todas aquellas permutaciones que *intercambian* dos elementos entre sí y dejan fijos a los demás. Es decir, son trasposiciones todas aquellas biyecciones τ de $\{1,...,n\}$ tales que existen números r,s con $1 \leq r < s \leq n$ que verifican:

$$\tau(r) = s \quad \tau(s) = r \quad \tau(k) = k$$
$$\text{si } k \neq r, k \neq s$$

(Compárese con el análisis anterior de S_3. El lector podrá verificar que, en ese ejemplo, cada τ_k es una trasposición que deja fijo al número k).

Se llama n-ciclo a toda permutación que actúa de la siguiente manera: asigna el 1 a un número r, r a un número s, y así sucesivamente, recorriendo todo el conjunto $\{1,...,n\}$ hasta volver al 1. Los *triciclos* nombrados en el ejemplo de S_3 son sus 3-ciclos.

Proposición 4: Si p es primo entonces un p-ciclo y una trasposición cualesquiera generan S_p.

Proposición 5: Si G es un subgrupo de S_n y p es un número primo que es divisor del cardinal de G entonces G contiene un p-ciclo.

Es fácil demostrar que toda permutación de S_n puede escribirse como producto de trasposiciones. Aunque esta escritura no es única, sí es cierto que en dos escrituras diferentes de una misma permutación la cantidad de trasposiciones tiene siempre la misma paridad (siempre es par o siempre es impar).

Se llaman *permutaciones pares* a aquellas que se escriben como producto de una cantidad par de trasposiciones. El conjunto formado por todas las permutaciones pares es un subgrupo de S_n, llamado A_n (el subgrupo *alternado* de S_n).

Proposición 6: Si $n \geq 5$ entonces $(S_n)' = A_n \neq \{I\}$ y $(A_n)' = A_n$.

Una consecuencia importante de la **Proposición 6** es la siguiente:

Proposición 7: Para todo $n \geq 5$ S_n no es un grupo resoluble.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el teorema fundamental de este trabajo:

Teorema: Un polinomio $P \in \mathbb{Q}[x]$ con n raíces diferentes es resoluble por radicales si y sólo si su grupo de Galois G(P) (que es subgrupo de S_n) es resoluble.

Es fácil ver que S_2 es resoluble; ya hemos probado además que S_3 es resoluble. Dejamos como tarea para el lector el probar que S_4 es también resoluble. Una consecuencia (por otra parte ya conocida) de ello es que todo polinomio de grado 2, 3 o 4 es resoluble por radicales.

El polinomio $P = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x+1$, que es resoluble por radicales, tiene como grupo de Galois un subgrupo conmutativo (y por ende resoluble) de S_6.

Veamos ahora un ejemplo de un polinomio de grado 5 que no es resoluble por radicales. Sea $P = x^5-6x+3$, polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y que, en consecuencia, tiene cinco raíces diferentes en $\mathbb{C}$ (recordemos que $\mathfrak{R} \subset \mathbb{C}$). Analicemos cuántas de ellas son en verdad raíces reales.

El lector puede comprobar fácilmente que:

$$P(-2) < 0 \qquad P(-1) > 0$$
$$p(0) > 0 \qquad P(1) < 0$$
$$P(2) > 0$$

Como P(x) es una función continua, deducimos que P tiene al menos tres raíces reales (hemos aplicado aquí el Teorema de Bolzano).

Por otra parte la derivada de P, $P'(x) = 5x^4 - 6$, tiene dos raíces reales. El Teorema de Rolle, que dice que entre dos raíces de P hay al menos una raíz de la derivada, nos permite asegurar, en consecuencia, que P tiene *a lo sumo tres* raíces reales (si P tuviera cuatro o más raíces, la derivada debería tener al menos tres).

En conclusión, P tiene exactamente tres raíces reales, que podemos llamar α_1, α_2, α_3. Las dos raíces restantes, que llamaremos α_3 y α_4, son complejas y una es la conjugada de la otra, $\alpha_3 = \overline{\alpha}_4$ (si z es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces $\overline{z}$ también es raíz).

El objetivo es demostrar que el grupo de Galois de P es igual a S_5. Gracias a la **Proposición 4** basta demostrar de G(P) contiene un 5-ciclo y una trasposición.

Como P es irreducible de grado 5, **la Proposición 2** nos dice que el cardinal de G(P) es múltiplo de 5. Tomando a su vez p = 5 en la **Proposición 5** se deduce que G(P) contiene un 5-ciclo.

Falta ver que G(P) contiene una trasposición. Sea Φ la conjugación $\Phi(z)=\overline{z}$. Analicemos qué permutación induce Φ en el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$.

Como α_1, α_2, α_3, son reales entonces:

$$\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$$
$$\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$$
$$\Phi(\alpha_3) = \alpha_3$$

Además $\alpha_3 = \overline{\alpha}_4$ entonces:

$$\Phi(\alpha_3) = \overline{\alpha}_3 = \alpha_4$$
$$\Phi(\alpha_4) = \overline{\alpha}_4 = \alpha_3$$

Luego Φ induce la permutación (1,2,3,5,4) que intercambia el 4 con el 5 y deja fijos a los otros tres números. La trasposición (1,2,3,5,4) pertenece entonces a G(P).

Hemos visto que G(P) contiene un 5-ciclo y una trasposición. La **Proposición 4** nos permite deducir que $G(P) = S_5$. Como S_5 no es un grupo resoluble entonces P no es resoluble por radicales: sus raíces no pueden escribirse a partir de números racionales utilizando las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación.

Este ejemplo implica que no puede existir para polinomios de grado 5 una fórmula similar a (1) que permita escribir sus raíces a partir de los coeficientes del polinomio utilizando las operaciones ya indicadas.

Para demostrar que no existen fórmulas similares para polinomios de grado mayor o igual que cinco se podría proceder de la siguiente manera. Bastaría hallar una familia de polinomios que abarcara todos los grados mayores que cuatro, y tales que ninguno de ellos sea resoluble por radicales. Como ya se ha dicho en el ejemplo precedente, esto implicaría la imposibilidad de hallar una fórmula general.

Sin embargo, es posible demostrar de un modo mucho más directo que no existe una fórmula para resolver por radicales polinomios de grado mayor o igual que 5. La demostración se basa en una generalización de la teoría que hemos venido exponiendo. Veamos brevemente los puntos fundamentales de esta generalización.

En la expresión (1) las letras a,b,c,α deben ser consideradas en verdad como variables (o *indeterminadas*). La expresión (1) en sí describe la relación que existe entre ellas cuando α representa una raíz del polinomio P y a,b,c representan sus coeficientes.

Sea P un polinomio de grado tres con raíces $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

$$P = x^3 + bx^2 + cx + d$$
$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

El lector puede verificar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$b = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$
$$c = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 \quad (4)$$
$$d = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Las fórmulas de Tartaglia nos dan lo que bien podemos considerar como la relación inversa de (^{4}). Es decir, mientras que (^{4}) nos permite expresar a los coeficientes b,c,d en función de $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; las fórmulas de Tartaglia en cambio nos permiten escribir a las indeterminadas $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ en función de b,c,d (utilizando además solamente suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

Sea P un polinomio de grado m:

$$P = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m)$$

El problema consiste en ver si existe alguna fórmula que exprese a las indeterminadas $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ en función de las indeterminadas $a_0,\dots,a_{m-1}$ utilizando sólo suma, resta, producto, cociente, potencia-ción y radicación. Nótese que entre $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ y $a_0,\dots,a_{m-1}$ existen relaciones similares a (^{4}).

Llamemos $\boldsymbol{Q}(a_0,\dots,a_{m-1})$ al conjunto formado por todas las expresiones que pueden obtenerse a partir de las indeterminadas $a_0,\dots,a_{m-1}$ y de números racionales mediante las operaciones de suma resta, producto, cociente y potenciación (no radicación). Es decir, todos las expresiones que son cocientes de polinomios en las indeterminadas $a_0,\dots,a_{m-1}$. Nótese que $\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{Q}(a_0,\dots,a_{m-1})$.

El conjunto $\boldsymbol{Q}(a_0,\dots,a_{m-1})$ es un *cuerpo*, en el que la suma y el producto se definen en forma natural. El neutro del producto es el número 1 y, por ejemplo, el inverso de $(a_1)^2 + a_2$ es, simplemente $1/[(a_1)^2 + a_2]$. Es menester insistir en que $a_0,\dots,a_{m-1}$ no son *números* sino *variables* que eventualmente pueden ser sustituidas por números; tal como la letra "x" en la expresión $P = x^3 - 3x^2 - 2$.

Análogamente a $\boldsymbol{Q}(a_0,\dots,a_{m-1})$ se define $\boldsymbol{Q}(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$. Las relaciones similares a (^{4}) que existen entre $a_0,\dots,a_{m-1}$ y $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ permiten afirmar que $\boldsymbol{Q}(a_0,\dots,a_{m-1})\subset\boldsymbol{Q}(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$.

Para abreviar, llamemos

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}(a_0,\dots,a_{m-1})$$
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$$

Se trata de ver si las *raíces* de P, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, pueden expresarse a partir de los elementos de $\boldsymbol{K}$ mediante suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación. En otras palabras, estamos en la misma situación analizada anteriormente, pero ahora el papel de los números racionales lo juega el cuerpo $\boldsymbol{K}$ y el de los números complejos lo juega el cuerpo $\boldsymbol{F}$.

Consideremos, tal como hemos hecho antes, automorfismos Φ: $\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{F}$. Es decir funciones biyectivas que verifiquen:

1) $\Phi(1) = 1$
2) $\Phi(p + q) = \Phi(p) + \Phi(q)$
3) $\Phi(pq) = \Phi(p)\Phi(q)$

Donde p,q son elementos de $\boldsymbol{F}$. De todos los automorfismos existentes, restrinjámonos a trabajar solamente con aquellos que verifiquen la propiedad :

4) $\Phi(r) = r \quad \forall\ r\in\boldsymbol{K}$

Si Φ: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ es un automorfismo entonces se *deduce* que $\forall\ r\in\boldsymbol{Q}$: $\Phi(r) = r$, pero si Φ es un automorfismo de $\boldsymbol{F}$ entonces la propiedad 4 debe incluirse como una hipótesis adicional.

Dejamos como ejercicio para el lector demostrar que la propiedad 4 es equivalente a la siguiente propiedad 4':

4') $\Phi(a_k) = a_k \quad (0\leq k\leq m-1)$

Del mismo modo que en la teoría antes desarrollada, se demuestra que si Φ: $\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{F}$ es un automorfismo que verifica la propiedad 4 (o 4') entonces Φ induce una permutación en $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$. El conjunto formado por todas las permutaciones inducidas por estos autmorfismos puede verse como un subgrupo de S_m el cual se denomina *el grupo de Galois* de P sobre $\boldsymbol{K}$, lo indicamos por $G(P,\boldsymbol{K})$.

Afirmar que existe una fórmula que exprese a las raíces de P en función de sus coeficientes usando suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación equivale a decir que $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ son expresables a partir de elementos de $\boldsymbol{K}$ utilizando esas mismas operaciones. En otras palabras, se trata de ver si P es resoluble por radicales sobre $\boldsymbol{K}$.

Desarrollando la misma teoría que antes, pero generalizada a $\boldsymbol{K}$ en lugar de $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{F}$ en lugar de **C** se llega al teorema siguiente:

Teorema: P es resoluble por radicales sobre $\boldsymbol{K}$ si y sólo si $G(P,\boldsymbol{K})$ es un grupo resoluble.

Es interesante (y sumamente importante para nosotros) observar que en las relaciones (4) si se permuta de cualquier modo a las variables $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ entonces las indeterminadas b,c,d permanecen invariantes. Lo mismo ocurre, en general, con todas las relaciones de este tipo. A priori, entonces, *toda* permutación de $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ puede formar parte del grupo de Galois. Esta afirmación nos sugiere el siguiente teorema (aunque esté lejos de demostrarlo):

Teorema: Con las notaciones anteriores $G(P,\boldsymbol{K}) = S_m$.

Como S_m no es un grupo resoluble si $m \geq 5$, los dos teoremas precedentes nos permiten afirmar que si P es de grado mayor o igual que 5 entonces no puede existir ninguna fórmula que exprese a las raíces de P en función de sus coeficientes utlizando las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación.

Dicho sea de paso, dado que S_2, S_3 y S_4 sí son grupos resolubles, el mismo teorema demuestra el hecho (por otra parte ya conocido) que para polinomios de grado 2, 3 y 4 sí debe existir una fórmula que exprese a las raíces en función de los coeficientes utilizando las operaciones tantas veces citadas.

Gustavo Krimker*
Gustavo Piñeiro**

* Profesor de Matemática, egresado del I.S.P. Joaquín V. González.
**Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* BABINI, JOSÉ - *Historia de las ideas modernas en matemática* - OEA, 1980 (Tercer edición).
* BELL, E. T. - *Los Grandes Matemáticos* - Editorial Losada 1948
* GENTILE, ENZO - *Notas de Algebra I* - Buenos Aires, EUDEBA, 1988.
* INFELD, LEOPOLD - *El Elegido de los Dioses* - Siglo XXI - Argentina, 1974 (En esta obra se encontrará, además, una lista de las fuentes y libros más importantes sobre la vida de Galois)
* MERKLEN, HÉCTOR - *Estructuras Algebraicas V (Teoría de Cuerpos)* - Washington D.C., O.E.A., 1979.
* PAPY, GEORGES - *Grupos* - Buenos Aires, EUDEBA, 1976.

...aunque su obra fue anterior a la de la mayoría de los algebristas británicos del gran período 1830-1850, sus ideas no ejercieron ninguna influencia hasta que se publicaron en 1846...Galois estaba tan próximo ya a las posiciones modernas en álgebra y, sin embargo, tuvo tales dificultades para expresarlas, que fue incapaz de hacerse entender por los matemáticos de su época. Últimamente se habla mucho de la "nueva matemática" en la enseñanza, pero lo cierto es que sólo es nueva en el sentido de que las ideas de Galois alcanzaron al fin el reconocimiento y el lugar merecido, más de un siglo después de que el destino lo tratase de una manera tan cruel.

Carl Boyer - "Historia de la Matemática"

Problemas y Juegos de Ingenio

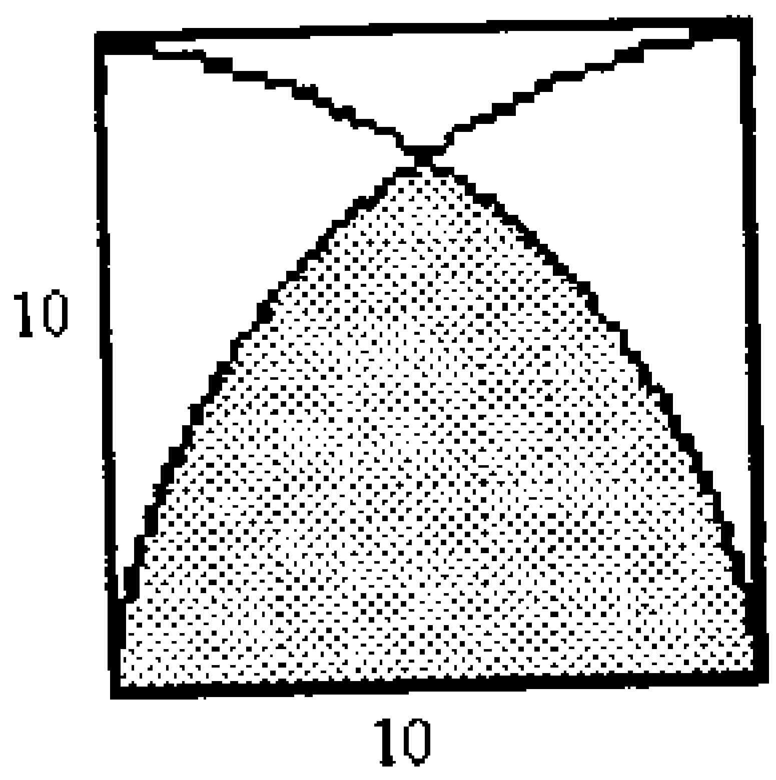
Problemas Propuestos

1. *De Aritmética Elemental - Enzo Gentile - Monografía de la O.E.A.* - ¿Qué dia de la semana fue el 15 de abril de 1707 (nacimiento de Euler)?

2. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola*: Sea f derivable en R tal que: $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

Pruebe que existe $x_0 \in (-1;1)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

3. *De O.M.A.* - Hallar el área sombreada. Las curvas son cuerdas de circunferencias de radio 10.

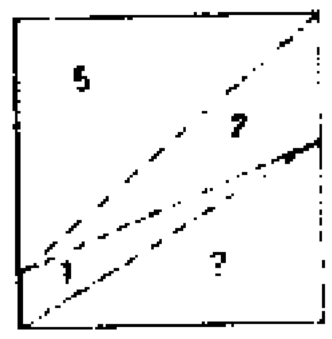


4. *De Probabilidad y aplicaciones estadísticas - Paul Meyer - Ed. Addison-Wesley Iberoamericana* - De 6 números positivos y 8 números negativos se eligen 4 números al azar (sin sustitución) y se multiplican ¿En cuántos casos el producto es un número positivo?

5. *Colaboración de Paola Dogliotti (alumna de 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)* - Distribuir diez monedas sobre cinco rectas de manera tal que a cada recta correspondan cuatro monedas.

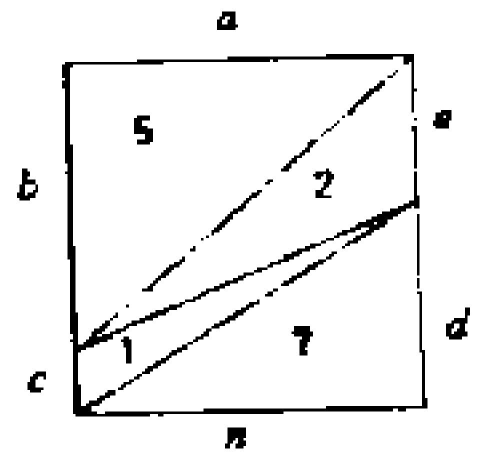
Soluciones a los Problemas de Axioma N° 5:

1. De 120 Acertijos para hacerse el Bocho - Diego Kovács e Iván Skvarca - Ed. de la Urraca - *El cuadrado de la figura está dividido en cuatro triángulos. Tres de ellos tienen área 5, 2 y 1, tal como se indica. Averigüe el área de ?.*



Nos han llegado muchas respuestas a este problema utilizando un sistema de ecuaciones, por razones de espacio, las hemos dividido en dos grandes grupos, según el método que utilizan para resolver este sistema. En unas se encuentran los valores de todas las incógnitas, en las otras se resuelve el problema sin llegar a conocer todos los valores de incógnitas.

**** Respuesta dada por: Fernando Chorny , Patricia Folino (alumnos de 2° y 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González), Prof. Nancy Lizarazu, Gonzalo Píngaro (alumno de 3° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)***



$$\frac{a.b}{2} = 5 \Rightarrow a.b = 10 \Rightarrow b = \frac{10}{a} \qquad (1)$$

$$\frac{e.a}{2} = 2 \Rightarrow e.a = 4 \Rightarrow e = \frac{4}{a} \qquad (2)$$

$$\frac{c.a}{2} = 1 \Rightarrow c.a = 2 \Rightarrow c = \frac{2}{a} \qquad (3)$$

Además por ser un cuadrado, $a = n$ y $a = b + c$
Por lo tanto $b = a\text{-}c$

Además, $b = \dfrac{10}{a}$ por (1)

Luego, $\dfrac{10}{a} = a - c \Rightarrow c = \dfrac{a^2 - 10}{a}$

Pero $c = \dfrac{2}{a}$ por (3), por lo tanto tenemos que

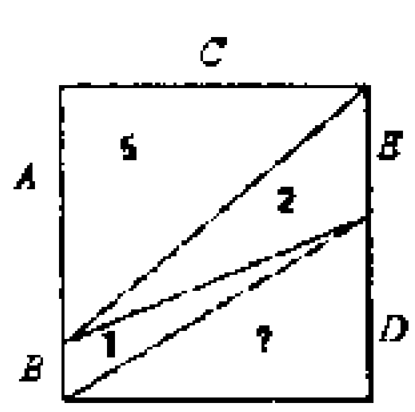
$$\frac{a^2 - 10}{a} = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

Reemplazando en (2) $e = \dfrac{4}{a} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
Por ser un cuadrado, tenemos que $a = d + e$,

luego $2\sqrt{3} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3} + d \Rightarrow d = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

Por lo cual, $? = \dfrac{a.d}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ? = 4$

**** Respuesta dada por: Carla Panichi, Gonzalo Pingaro, Mercedes Gamarra y María Fernanda Fontana (alumnos de 3° y 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)***



Área 1: $1 = \dfrac{B.C}{2}$

Área 2: $5 = \dfrac{A.C}{2}$

Área (1+2): $(1+5) = \dfrac{B.C}{2} + \dfrac{A.C}{2}$

$6 = \dfrac{C}{2}.(A + B)$ pero $A + B = C$

$6 = \dfrac{C^2}{2}$ luego $C = 2\sqrt{3}$

Luego,

Área del cuadrado: C^2
? = Área del cuadrado - (1 + 2 + 5)
? = C^2 - (1 + 2 + 5)
? = $(2\sqrt{3})^2$ - 8
? = 12 - 8
? = 4

**** Respuesta dada por Diego Kovács e Iván Skvarca***
El área de ? es 4. Hay una forma superveloz de hacer el cálculo. Los triángulos de áreas 5 y 1 tienen la altura igual al lado del cuadrado, y la suma de sus bases es también igual al lado del cuadrado. La suma de sus áreas es, por lo tanto, la mitad del área del cuadrado, tal como nos lo dice la elemental fórmula de la superficie del triángulo. El área de los otros dos triángulos tiene que ser la otra mitad. Como 5+1 es 6, 2+? también deberá ser 6. Y ahora es fácil.

2. Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola - *Supongamos que f y g, están definidas en (a;b) y que su suma es una función continua en $x_0 \in (a;b)$. ¿Son o no continuas las funciones f y g en x_0? Justifique.*

**** Respuesta dada por Gonzalo Pingaro (alumno de 3° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)***
Pueden o no serlo, como intentaré demostrar. Con un ejemplo en que lo sean y otro en el que no, me alcanzará.
Primera parte:
Si *f(x)* = *x + 1* y *g(x)* = *x + 2*. Son continuas en cualquier *(a;b)*. Y su suma también lo es.

Segunda parte: Para ello tomaré un valor $c \in (a;b)$

Si $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in (a;c) \\ 2 \text{ si } x \in (c;b) \end{cases}$

y $g(x) \begin{cases} 2 \text{ si } x \in (a;c) \\ 1 \text{ si } x \in (c;b) \end{cases}$

Entonces $(f+g)(x) = \begin{cases} 3 \text{ si } x \in (a;c) \\ 3 \text{ si } x \in (c;b) \end{cases}$

Lo que es lo mismo: $(f+g)(x) = 3$, que es una función contínua.

**** Respuesta dada por Mercedes Gamarra y María Fernanda Fontana (alumnas de 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)***

f y g no tienen que ser necesariamente continuas en x_0. Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$

f está definida en R, y es discontinua.

$$g(x) \begin{cases} 3 & \text{si } x = 2 \\ x+2 & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$

g está definida en R y es discontinua.

$$h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x = 2 \\ 3x+1 & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$

está definida y <u>es continua en R.</u>

**** Respuesta dada por Patricia Folino (alumna de 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)***

a) f y g pueden ser las dos continuas.
Ejemplo:

$f + g: R \to R / (f+g)(x) = 5x + 2$

$f: R \to R / f(x) = 3x - 1$

$g: R \to R / g(x) = 2x + 3$

Aquí son todas continuas en cualquier x_0.

b) f y g pueden ser las dos discontinuas.
Ejemplo:

$$(f+g)(x) \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x \geq 2 \\ 3x+3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$f+g$ es continua entre otros puntos en $x_0=2$, s embargo:

$$f(x) \begin{cases} 4x & \text{si } x \geq 2 \\ 3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 2 \\ 3x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

f y g son discontinua en $x_0=2$.

c) No puede ocurrir que una sea continua y l otra discontinua.

Para que $f+g$ sea continua en x_0 debe cumplirs que:

$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$

Supongamos que f es continua en x_0 y g discon tinua en x_0.

1) Si no existe $g(x_0)$, tampoco existiría $(f+g)(x_0$ y no sería continua.

2) Si el límite de g es infinito también es infinit el de $f+g$.

3) Si los límites laterales de g son distintos también serían distintos los de $f+g$.

4) Si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0)$ entonces lo mism ocurre con $f+g$.

**** Observación extra:***

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) fu quien expuso, con Riemann, la formulación má general de función como correspondencia entr dos conjuntos de números, cualquiera sea e modo de establecer esa correspondencia.

Dirichlet inventó, para sus trabajos con series de Fourier, una función muy particular:
A cada x, número racional, le hacemos corresponder 1.
A cada x, número irracional, le hacemos corresponder 0.
Esta función obviamente no es continua. Pues bien tomemos como f(x) la función descripta por Dirichlet y como g(x) la siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x es irracional} \\ 0 \text{ si x es racional} \end{cases}$$

Luego f y g, están definidas en todos los reales y su suma es una función continua, ya que:

$f(x) + g(x) = 1$ para todo x real.

Sin embargo ni f(x), ni g(x) son funciones continuas.

3. **De La Probabilidad y sus Aplicaciones - Luis Santaló - Ed. Ibero-Americana -** *Sea el segmento AB de longitud unidad. Se da en él un punto X al azar. Hallar la probabilidad de que el producto de los segmentos AX . XB sea mayor que* $\frac{1}{9}$.

* *Respuesta dada por Luis Santaló*

Poniendo x=AX, la condición pedida es que sea $x(1-x) > \frac{1}{9}$. Para que esta condición se cumpla, x debe estar comprendido entre $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}$ y $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}$. La distancia entre estos puntos es $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
Como la longitud total es 1, resulta que la probabilidad buscada vale $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

4. **De ¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos - Raymond Smullyan - Ed. Cátedra -** *El pretendiente tenía que elegir uno de los cofres y si tenía suerte (o inteligencia) elegiría el que tenía el retrato, pudiendo así pedir a Porcia por esposa. Tendría las siguientes inscripciones en los cofres:*

Oro	Plata	Plomo
El retrato está en este cofre.	*El retrato no está aquí.*	*El retrato no está en el cofre de oro.*

Porcia explicó al pretendiente que de los tres enunciados, a lo sumo uno era verdad. ¿Cuál cofre debe elegir el pretendiente?

* *Respuesta dada por Gonzalo Píngaro, Fernando Chorny (alumnos de 3° y 2° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González) y Prof. Nancy Lizarazu.*

El único cofre posible es el de plata, pues si estuviera en el de oro, el enunciado de ese mismo cofre, que dice "El retrato está en este cofre" resulta verdadero; pero también resulta verdadero el enunciado del cofre de plata ("El retrato no está aquí"). Contradiciendo la propuesta de Porcia. Y si estuviera en el de plomo, el enunciado de ese mismo cofre "el retrato no está en el cofre de oro" resulta verdadero, pero también resulta verdadero el del cofre de plata ("El retrato no está aquí") contradiciendo nuevamente a Porcia.
Nos queda solamente la posibilidad de que el retrato esté en el cofre de plata y, evidentemente, lo está, porque con esa ubicación resultan falsos los enunciados del cofre de plata ("el retrato no está aquí") y del cofre de oro ("el retrato está en este cofre") y sólo verdadero el enunciado del cofre de plomo ("el retrato no está en el cofre de oro").

* *Respuesta dada por Paola Dogliotti, , Patricia Folino, Mercedes Gamarra y María Fernanda Fontana (alumnas de 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González)*

Como de los tres enunciados, a lo sumo uno es verdad, existen cuatro posibilidades:
Primero: Que ninguno sea verdadero, lo que es imposible ya que hay una contradicción entre el

primero y el tercero, quiere decir que, si son falsos, (según el primero) el retrato no está en el cofre de oro, y (según el tercero) el retrato está en el de oro.

Segundo: Si la inscripción verdadera es la que está en el cofre de oro, se observa contradicción entre la primera y la segunda, no puede ser que simultáneamente el retrato esté en el cofre de oro (lo que dice el primero) y esté en el de plata (lo contrario de lo que dice el segundo).

Tercero: Si es verdadera la que está en el de plata, estamos nuevamente en el primer caso, hay contradicción entre el primero y el tercero.

Cuarto: Por último, vemos que puede ocurrir que sea verdadera la inscripción del cofre de plomo, y las otras falsas. De esta forma dirían:

* Cofre de oro: el retrato no está en el cofre de oro.

* Cofre de plata: el retrato está en el cofre de plata.

* Cofre de plomo: el retrato no está en el cofre de oro.

En conclusión, el cofre que dice la verdad es el de plomo, pero el que hay que elegir, porque es donde está el retrato, es el de plata.

* *Una de las respuestas dada por Raymond Smullyan*

El enunciado del cofre de oro y el del de plomo dicen lo contrario, luego uno debe de ser cierto. Si a lo sumo uno de los tres enunciados es verdadero el del cofre de plata es falso y por tanto es éste el que tiene el retrato.

Problema pendiente

Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola: *Se tiene un conjunto A de números naturales. El cardinal de A es mayor que 7. El mínimo común múltiplo de todos los números de A es 390. El máximo común divisor de dos números cualesquiera del conjunto es superior a la unidad. El producto de todos los números de A no es divisible por 160 ni es la cuarta potencia de ningún natural. Determine los elementos de A.*

Sabemos que el mínimo común múltiplo de todos los números de A es 390, como 390 = 2.3.5.13, deberemos trabajar con dichos factores para formar el conjunto A.

Además el producto de todos los elementos de A no es divisible por 160, como $160 = 2^5.5$, por lo tanto el factor 2 no puede intervenir en más de 4 elementos de A, o bien no podremos utilizar el 5 en ninguno de los números a formar.

Por otro lado sabemos que de a pares los elementos de A no pueden ser coprimos.

Por último tendremos que no debemos utilizar el 2, 3, 5 y 13 una cantidad múltiplo de 4 veces, para evitar formar una potencia cuarta cuando realicemos el producto de todos los elementos.

Con todas estas condiciones y recordando que por los menos debe tener 8 elementos el conjunto A, tanteamos posibles respuestas, obteniendo finalmente:

A={3.5; 3.13; 5.13; 2.3.5; 2.3.13; 2.5.13; 3.5.13; 2.3.5.13}={15; 39; 65; 30; 78; 130; 195; 390}

¡Hasta el próximo número!

Cuando yo estaba haciendo el doctorado en Princeton, corría por allí la siguiente explicación del significado de la palabra "evidente" según quien fuera el profesor del Departamento de Matemáticas que la utilizara. (En vez de los nombres usaré letras).

Cuando el Prof. A dice que algo es evidente, quiere decir que si te vas a casa y te quedas dándole vueltas dos semanas, al final verás que es verdad.

Cuando el Prof. L dice que algo es evidente, quiere decir que te vas a tu casa, te lo piensas el resto de la vida y *a lo mejor* un día lo ves.

Cuando el Prof. C dice que algo es evidente quiere decir que toda la clase lo sabía ya desde hacía dos semanas.

Cuando el Prof. F dice que algo es evidente quiere decir que probablemente sea falso.

De Raymond Smullyan
"¿Cómo se llama este libro?"

Lecturas Matemáticas

Hoy hablaremos de tres textos de Matemática que consideramos útiles para los que nos interesamos en su enseñanza, por la cantidad de ideas que nos pueden aportar.
Comencemos por un clásico:

1) ¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA? - Courant y Robbins - 4° edición - Ed. Aguilar - Madrid, 1964 - 533 páginas.
Es un libro que se terminó de escribir en 1943 y tuvo (¿tiene?) muchas reediciones tanto en Inglés como en Castellano. Casi toda buena biblioteca Matemática contiene un ejemplar.
Alguien me lo regaló cuando terminaba el secundario, dado que sentía yo una pequeña afición a la Matemática. El texto me impresionó tanto que decidí, al leer las primeras páginas, adoptarlo como guía y texto principal de consulta, cuando hice mis primeras armas en el Profesorado. Desde entonces lo releo a menudo y, si se me permite, quiero aconsejar su lectura a todo aquél que quiera una visión global e integradora de la Matemática.
A mí, al menos, me sirvió para intentar comprender cómo funciona un todo, precisamente en función de sus partes.
Si quiere disfrutar la matemática genuina que desfila por sus páginas, búsquelo y compruebe que Einstein no se equivocó cuando opinó: "Esta obra es una acertada exposición de los conceptos y métodos fundamentales de toda la Matemática".

2) HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS - Andrés Sestier - 2° edición - Editores Limusa-Noriega - México, 1996 - 113 páginas.
Vuelve, remozado y ampliado, el notable librito de Sestier, cuya primera edición barría la historia Matemática hasta fines de la Edad Media. Esta segunda edición llega hasta la era Fermat y creo que Sestier nos debe la continuación futura hasta la matemática del siglo XX. Es posible que el número de páginas parezca pequeño, pero la sabia disposición de los temas y la precisión con que se los explica, aventa inmediatamente ese temor.
Tiene siete capitulos cuyos nombres son toda una definición: Introducción, Numerales, Matemáticas Griegas, Edad Media, El renacimiento del Álgebra, Vieta y por último Fermat.
El libro presenta la génesis de los grandes problemas de la Matemática de siempre: inconmensurabilidad, cuadraturas, el nacimiento del simbolismo, la resolución de ecuaciones, y el detalle claro y fundamentado del nacimiento de la geometria analitica y el cálculo diferencial e integral.
Lo bueno de esta obra se encuentra en la profunda sincronía entre la descripción del hecho matemático y el contexto sociocultural donde esto ocurre. Por momentos sentí la sensación de que al leer la matemática medieval, integraba al mismo tiempo mis ideas (modestas por cierto) sobre la edad Media, gracias a la erudición y sensatez del autor.
El capitulo dedicado a Fermat y su época (quien no sólo brilló en Teoria de Números, sino también en el Cálculo Infinitesimal con protoconceptos sobre la derivada y la integral) es admirable.
En resumen: un pequeño gran libro.

3) DE LOS DEDOS A LA CALCULADORA ("Dalle dita al calcolatore") - Alberto Campiglio y Vincenzo Eugeni - Ed. Paidós - Colección Instrumentos, dirigida por Humberto Eco - 316 páginas. Sobrio, ameno y de lectura sencilla y divertida, este volumen detalla las etapas que configuran la evolución de los sistemas de numeración y cálculo y su relación con el conocimiento general.
En una sucesión de 14 capítulos se describe la génesis de los sistemas numéricos, mostrando la gran variedad de simbolos y tipos de conteo que se usaron desde el antiguo Egipto hasta la América precolombina (es notable el capítulo 10

dedicado a la Matemática maya, azteca e inca).
Lo interesante es que se conecta el desarrollo del Cálculo a través de las épocas, con la ciencia de ese tiempo, en forma admirable; así que la obra reune dos relevantes aspectos: 1) es un libro de Historia de la Matemática en general, 2) Es al mismo tiempo, un ameno resumen de Historia de la Ciencia.
El autor, A. Campiglio, es profesor de Matemática y especialista en proyectos audio-visuales e informáticos para la enseñanza de Matemática, siendo Eugeni especialista en Lingüística e Informática. Me impresionaron vivamente los dos capítulos finales dedicados a las computadoras y su relación con la socied tecnológica de hoy.
Para maestros y profesores interesados Matemática, puede ser una herramienta m valiosa.
Conclusión: excelente texto italiano, bien doc mentado, erudito y de grata lectura, y muy bi traducido, dicho sea de paso.
Para no salirnos de esta atmósfera vivaldiana n despedimos con Auguri per tutti.

Jorge Martíne

* Prof. de Matemática, egresado del I.S.P. "Joaqu V. González"

Seminario

Durante los días 17 y 18 de abril próximo pasado, dictó un seminario sobre *Lenguaje y comunicación entr docentes y alumnos* el Sr. Aldo Borsese, doctor en Química, profesor de la Universidad de Génova, Italia, miembro del CARED - Centro di Ateneo per la Ricerca Educativa e Didattica.
Expuso el grave problema que se suscita en Italia, ya que dicho país no cuenta con institutos terciarios d formación docente. De ahí la necesidad de implementar la reforma educativa en la que están embarcados: creació de la carrera docente como post-grado universitario de dos años de duración. Los profesores actuales so egresados universitarios dedicados a la educación, producto de la falta de oferta laboral que les permita ejercicio de la profesión en el ámbito de la producción industrial. Él mismo se inició de esta manera.
Nos trató de mostrar, a través de una exposición clara y ordenada cómo, a través de su experiencia docente, fu elaborando junto a lingüistas y otros estudiosos del tema, la mejor manera de abordar la comunicación en proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que "representa un problema central en cada situación de adquisición condiciona su calidad misma".
"La comunicación, que constituye el fin esencial del lenguaje, se desarrolla de manera eficaz sólo cuando la percepciones del oyente se traducen en un flujo adecuado de imágenes o ideas o ambas cosas juntas".
De su personal interés por la didáctica de las ciencias, y en particular de la química, al ocuparse de la enseñanz en la escuela primaria se dio cuenta de que "es en la escuela infantil y elemental que nace y se consolida la idea d que los esfuerzos para comprender no tienen ninguna posibilidad de éxito. Y el niño se ve obligado *a aprender* si necesariamente *comprender*. Es, pues, en la escuela primaria que nace cierta disociación y desdoblamiento d individuo, el cual, ya en la escuela, abandona sus propias tentativas de reflexión y comparación con el mund para *comprender* intentando sólo *aprender* lo que quiere el profesor".
La cuestión es ¿cómo revertir esta situación?, ¿qué somos capaces de hacer los docentes para ayudar a nuestro alumnos a superar los frecuentes obstáculos que encuentran leyendo un libro?
Es obvio que hay que comenzar donde se origina el problema, nos dice el Dr. Borsese. No se debe enseñar a lo niños ciencia abstracta porque es imposible transmitirles conceptos sólo utilizando las palabras.
Teniendo en cuenta que "el significado de las palabras se consolida en nosotros a medida que se crean por ella nuevas conexiones con los conocimientos que ya tenemos, una nueva palabra que no alcance a encontrar ningú enlace con conocimientos que ya tenemos, es para nosotros sin significado".
Sería bueno poder transcribir algunos párrafos más de la conferencia. La falta de espacio nos lo impid Agradecemos y valoramos profundamente su visita.

Aχioma cumple un año

¡Qué mejor que dar rienda suelta a la creatividad para festejar que Aχioma está en contacto con Ud. desde hace un año!

A través de estos seis números, hemos logrado contactarnos con gran cantidad de estudiantes, docentes y cultores de nuestra ciencia.

Creemos que es propicia la ocasión para compartir personalmente con todos nuestros amigos una jornada de actividades acordes a los muchos campos con los que la matemática se relaciona: artes visuales, expresiones literarias, resolución de problemas y... ¿por qué no? un brindis de alegría y compromiso con la tarea cumplida.

Nos encontraremos el sábado 31 de mayo, a las 9 horas, en el hall del primer piso del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González" - Av. Rivadavia 3577 - Capital.

Cursos

La Asociación Argentina "Amigos de la Astronomia" funciona en su sede del Parque Centenario de lunes a sábados de 19 a 23 horas. Ofrece, tanto a socios como a no socios:

* Uso de la Biblioteca Pública.
* Participación en Grupos de Trabajo e Investigación, siendo entrenados por observadores experimentados en temas diversos: *cúmulos globulares, radioastronomía, búsqueda de supernovas, etc.*
* Cursos sobre astronomía y ciencias conexas, con aranceles variables entre $12.- y $30.-(socios) o $30.- y $60.- (no socios), dependiendo de la duración del curso, que puede ser entre 1 y 8 meses.
* Programa de observaciones: la Asociación ofrece un cronograma de observaciones por telescopio. para el público en general, sujeto a modificaciones.

Para mayor información dirigirse a Av. Patricias Argentinas 550 - (1405) Buenos Aires. Tel. y fax: 863-3366.

Extensión cultural

El coro del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González" incorpora voces de todas las cuerdas, con o sin experiencia. Ensayos: martes y viernes de 21 a 23 horas en el Salón de Actos. Director: Prof. Diego Hartzstein.

Comisión Cultural

del Depto. de Matemática del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Dio inicio al ciclo de este año 1997, el Director de la Carrera Prof. O. Sardella. Versó su charla sobre la relación entre el arte y la geometría. Gran cantidad de público asistió a la misma.

El ciclo continuará con:

* 22 de mayo - 19 horas - Conferencia sobre "Caos" a cargo del Lic. Devoto, Director del Dpto. de Fisica.

* 12 de junio - 19 horas - Conferencia sobre "Didáctica de la Matemática" a cargo de la Prof. Patricia Sadovsky.

* 2 de julio - 19 horas - Conferencia sobre la enseñanza del Álgebra Lineal en la escuela secundaria a cargo del Prof. Juan Foncuberta.

O.M.A.

El próximo 6 de septiembre se realizará el certamen "El Número de Oro" que convoca a alumnos de los profesorados de Matemática y egresados de esta carrera. Para inscribirse dirigirse a la sede regional correspondiente.

Suscripciones

Informamos a nuestros lectores el éxito de la campaña de suscripción que hemos lanzado con el número 5. No obstante, es nuestro deseo profundizar esta modalidad de distribución, que nos permite llegar a más lectores en forma ágil y continua. Si usted aún no se ha suscripto, envíe el talón adjunto al cheque o giro postal a nuestra casilla de correo.

Correo de lectores

Nuestro profundo agradecimiento a:

* Mercedes Gamarra y María Fernanda Fontana, alumnas de 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González, por enviarnos resoluciones para la sección "Problemas y Juegos de Ingenio" y por las palabras alentadoras que nos dicen.

* Paola Dogliotti, alumna de 4° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González, por sus comentarios sobre Aχioma N° 5 y por su envio: *Curiosidad de algunos números:*
El número 123456789 tomándolo como substraendo del número 987654321, formado por las mismas cifras en orden inverso, da por resto el número 864197532 formado por las mismas cifras ordenadas de otra manera!

* Prof. Sardella por su apunte, por ahora vemos inviable su publicación.

* Pablo Bonucci, alumno de 3° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González quien nos mostró "*Carta de un estudiante a otro*" y nos complacemos en publicarla.

Me gustaría hacerte entender que con tu esfuerzo vas a poder salir adelante, en este país. Quisiera poder decirte que poniendo dedicación en lo que hayas elegido podés abrirte camino en nuestra sociedad. Me daría gusto, que creas que con la verdad y la voluntad podés ganarte el respeto de tus pares. Y me encantaría poder convencerte que con el pensamiento y la palabra se pueden vencer el odio y las armas.
Pero seguramente pensarás, cómo alguien puede mentir tanto, si cada día que pasa te das cuenta que es más difícil mantenerse al margen de la mentira y la violencia, que invade cada una de nuestras actividades, ya sea la más importante o la más insignificante; ya sea desde el que trata de copiarse en un examen hasta el funcionario más corrupto. Sólo hay un paso entre lo bueno y lo malo, y ese paso no es tan grande como parece.
Por eso te pido, te ruego que, elijas la carrera que quieras, seas honesto, no le mientas a tu futuro, dedicate con amor, entusiasmo y honestidad. En cada deber, cada evaluación y en cada acto de tu vida. Sé coherente con tu pensamiento. Esta es la única esperanza que tenemos de conseguir un país en el cual, si algún loco se te acerca y te dice estudiá con esfuerzo, dedicación, verdad, voluntad, amor, entusiasmo y honestidad, no pienses que ese alguien está tan loco.

Pablo Bonucci

* Carla Rosanna Panichi, alumna de 3° año del I.S.P. Dr. Joaquín V. González quien nos envió esta alagadora carta.

Buenos Aires, 5 de abril de 1997

Estimados/as Amigos de Axioma,

Siempre es agradable encontrarse con los temas que tratan en la revista. Me parece muy interesante y valioso, por lo útil, el aporte que nos hacen bimestre a bimestre a quienes estudiamos en el instituto.
En particular los "problemas propuestos" de cada número amenizan mis esperas y me ofrecen la ocasión de salir un poco de los trabajos prácticos que debo resolver para las materias que curso.
Para algunos de ellos envio mis propuestas de solución, las que espero sean correctas.
Sin más que un enorme ADELANTE! me despido con afecto

Carla Rossana Panichi

Próximo Número - Julio/Agosto 1997

Apuntes sobre..., Caos y Fractales.
Grandes Matemáticos: Georg Cantor.
Problemas, Información, Correo de Lectores y mucho más...