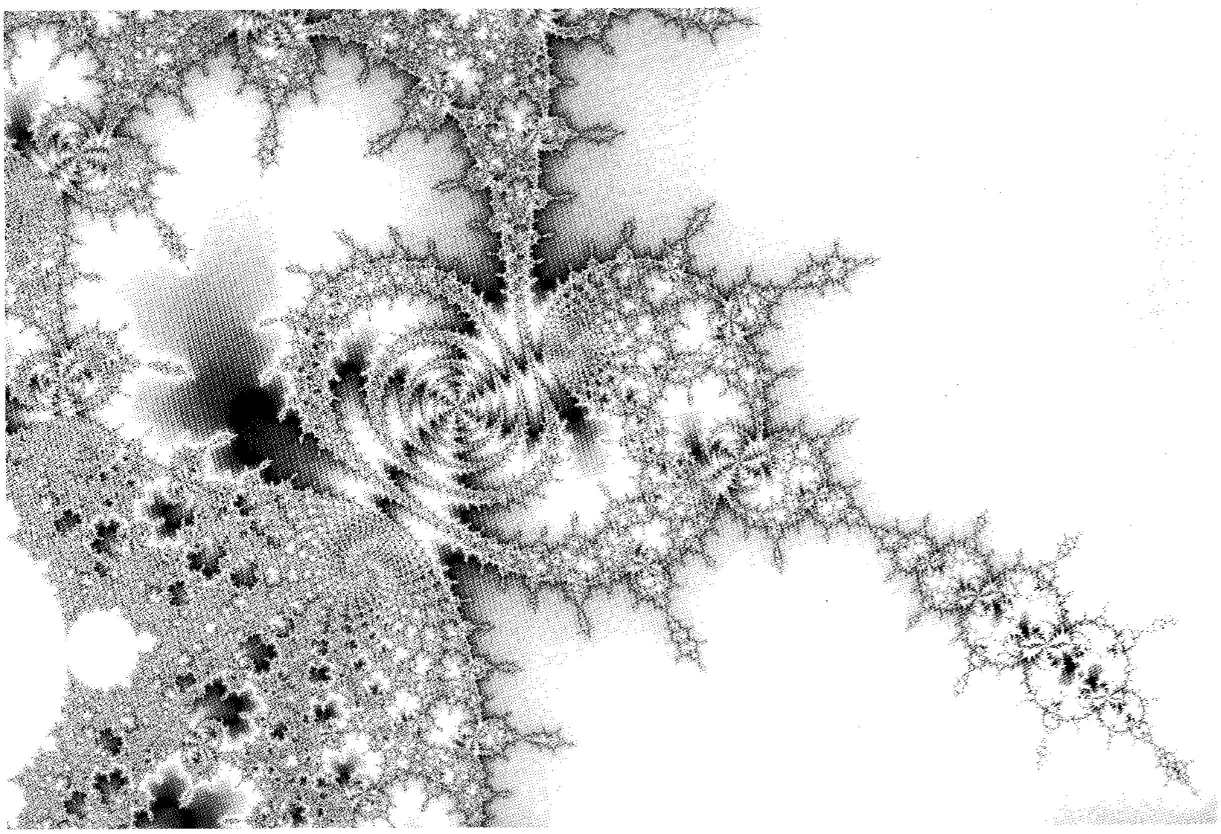
Axioma

La revista de los profesores y estudiantes de Matemática



Fractales: El monstruo matemático

ISSN 1515-744X
9 771515 744000

Año 3 - Número 15

Aχioma Nº 15

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de Matemática, de venta exclusiva por suscripción. Hecho el depósito que marca la Ley.

Directores y Propietarios
Fernando Chorny
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Gustavo Ernesto Piñeiro
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Pablo Bonucci
Jorge Martínez

Imagen de tapa
Marcos Donnantuoni con el programa XaoS, de Jan Hubicka

Dirección postal
Av. Belgrano 2654 - 1º "6"
(1096) Buenos Aires
Argentina

Correo electrónico
axioma@nalejandria.com

En internet
www.nalejandria.com/axioma

Impresión y distribución
Agencia Periodística Cid
Avda. de Mayo 666, Capital Federal, Argentina.

Una publicación de
NAL Educativa S.A. (Nueva Alejandría)
Uruguay 1112; Piso 6
Capital Federal (C1016ACD),
Argentina
Teléfono: 5811-0121

Registro de la Propiedad Intelectual Nº 867689. ISSN: 1515-744X

Editorial

Algunas veces nos tildan de empecinados. ...Y está muy bien. Lo somos, lo admitimos. Somos irremediables soñadores, pero con los pies sobre la Tierra.

Muchas de nuestras jornadas laborales nos producen desazón o angustia por motivos innecesarios de enumerar entre colegas. Se suma a esta situación que, cada vez con mayor frecuencia, se nos acercan alumnos con problemas tan serios y tan graves que nos hacen cuestionar nuestro objetivo: ¿para qué enseñamos Matemática?

Se puede responder con varios criterios; nosotros optamos por éste: la escuela secundaria tiene como principal objetivo lograr la inserción de los jóvenes en la sociedad contemporánea, deben aprender técnicas y adquirir conocimientos que les permitan lograr su desarrollo como individuos con discernimiento, capaces de analizar la realidad y transformarla con su acción. Cualquiera sea la situación personal de cada uno de ellos, todos tienen que tener la posibilidad de delinear su destino.

Nosotros, desde nuestro hacer cotidiano, tenemos la obligación (y el compromiso moral) de ayudarlos en su desarrollo, poniendo a su disposición todas las herramientas con las que contamos. En definitiva, queremos poder transmitirles el bagaje cultural que los transformará en personas libres.

Desde nuestra revista seguimos bregando por compartir con todos ustedes nuestra preocupación por la enseñanza de la Matemática, en la creencia de que este ida y vuelta nos enriquece mutuamente.

Sumario

Julio/ Agosto de 2001

Combinatoria (Tercera parte)

Cerramos en este artículo el desarrollo de temas de combinatoria que hemos iniciado en Axioma 13. Estudiaremos en esta ocasión la diferencia que existe entre la distribución de objetos distinguibles e indistinguibles.

por *Gustavo Piñeiro* *

En estos últimos años, debido principalmente a razones económicas, muchas de las otrora grandes salas de cine de Buenos Aires han sido subdivididas y en esos mismos edificios, conviven ahora tres, cuatro o hasta cinco salas de cine mucho más pequeñas que la original.

Situémonos con la imaginación en uno de estos multicines el cual, supondremos, está dividido en cuatro salas. En la Sala 1 se exhibe la película *Axioma*. En la Sala 2 se exhibe *Axioma II, el regreso*. En la Sala 3 se exhibe *Axioma III, el nuevo regreso* y en la Sala 4, *Axioma IV, el último regreso (por ahora)*.

Por motivos que no se nos permite revelar, el precio de la entrada no es el mismo para las cuatro salas. El precio, de hecho, aumenta con el número de sala, de tal modo que la Sala 1 es la más barata y la Sala 4 la más cara.

Una vez situados mentalmente en este escenario, enunciemos dos problemas enmarcados en él.

Problema 1: Siete amigos llegan a la entrada del multicine. No todos necesariamente desean ver la misma película. Estos siete amigos, por otra parte, están unidos entre sí por lazos de amistad de diferentes intensidades de tal suerte que algunos de ellos, creemos, hasta tal vez se resignarán a ver una película no tan deseada sólo por el placer de compartir las butacas con tal o cual amigo.

Tras estas disquisiciones casi fraternales nos preguntamos ¿de cuántas maneras diferentes pueden distribuirse los siete amigos entre las cuatro salas?

Problema 2: A través de la ventana de su oficina, el dueño del multicine observa que siete personas están entrando al edificio (son los siete amigos del problema anterior, aunque él no lo sabe). Pensando en las diferentes recaudaciones que puede obtener de esas entradas se pregunta ¿de cuántas maneras diferentes pueden distribuirse esas siete personas en las cuatro salas?

Comentario: ¿Cuál es la diferencia que existe entre el Problema 1 y el Problema 2? ¿Acaso, dejando de lado las acotaciones marginales, no formulan ambos la misma pregunta (de cuántas maneras pueden distribuirse siete personas en cuatro salas)? ¿Se trata entonces del mismo problema con diferentes disfraces?

La respuesta a esta última pregunta es que no. No es el mismo problema con diferentes disfraces, sino que, muy por el contrario, se trata de dos problemas muy diferentes que conducen, como veremos, a resultados muy diferentes. El hecho crucial es que, en el segundo problema, para el dueño del multicine la identidad de los siete amigos es indiferente. Cuando el dueño piensa en las formas en que pueden distribuirse en las salas, sólo le interesa saber cuántos de ellos irán a la Sala 1 (la más barata), cuántos a la Sala 4 (la más cara) y cuántos a cada una de las otras dos. No le interesa saber quiénes son en particular los que están en cada sala.

Es indistinto para él si los dos que van a la Sala 1 son Pedro y Juan o si son María y Juan, sólo es importante que ha vendido dos entradas para la Sala 1.

La situación es muy diferente en el primer problema. Para los amigos allí descriptos es muy importante la cuestión de quién va a cada una de las salas. No es para nada equivalente que quienes vayan a la Sala 1 sean Pedro y Juan, o que quienes vayan a esa sala sean María y Juan. Para ellos es casi un dato menor que en ambos casos habrá dos personas en la Sala 1.

En lenguaje técnico, se dice que para el dueño del multicine los siete amigos son **indistinguibles**. Esto no significa que el dueño sea incapaz de distinguir uno de otro, sino que tal distinción le es indiferente, sólo le interesa el número de personas que haya en cada sala, no sus identidades.

Las soluciones

Resolvamos ahora los dos problemas planteados.

Solución del problema 1: Para mayor simplicidad designemos a los amigos con las letras A, B, C, D, E, F y G.

¿Cómo se puede expresar una distribución de estos siete amigos en las cuatro salas? Simplemente debemos anotar, uno a continuación del otro, los números de las salas que ha elegido cada uno. Por ejemplo 1211334 representará la situación en la cual A va a la sala 1, B a la sala 2, C y D a la sala 1, etc.

Puede aplicarse aquí el Principio General de Enumeración (P.G.E.), que ya hemos enunciado y discutido en las dos notas previas. El P.G.E. nos dice en este caso que el número total de formas diferentes en que los siete se pueden distribuir en las cuatro salas es $4^7 = 16.384$.

Solución del problema 2: Como en la solución anterior, designemos inicialmente a los amigos con las letras A, B, C, D, E, F y G, y expresemos cada elección como una sucesión de siete números entre 1 y 4.

Nos encontramos entonces con una situación que ya hemos discutido en la segunda nota de esta serie. No podemos aplicar directamente el P.G.E. dado que el orden en que se escriben los números no es relevante. Para el dueño del cine la distribución 1211334 es equivalente a 1334121, pues en ambos casos la cantidad de personas en cada sala es la misma. Sin embargo, tampoco podemos aplicar el razonamiento que hemos expuesto dos meses atrás para solventar esta situación. En efecto, aquel razonamiento consistía en reunir en grupos a todas las secuencias de números que, a los efectos del Problema 2, representasen una misma solución (por ejemplo, 1211334 y 1334121 estarían en el mismo grupo).

En los ejemplos que vimos en aquella ocasión todos los grupos estaban formados por la misma cantidad de elementos. Luego podríamos dividir la cantidad total obtenida en el Problema 1 por la cantidad de elementos que hubiera en cada uno de los grupos formados. El resultado de esta división sería la respuesta a nuestro problema.

Lamentablemente, este razonamiento no puede aplicarse aquí, porque los grupos no tendrían la misma cantidad de elementos. Por ejemplo, la solución 1111111 formaría en sí mismo un grupo, mientras que 1111112 integraría por su parte un grupo de siete elementos (junto con 1111121, 1111211, etc.). La solución real del Problema 2 se obtiene mediante un razonamiento diferente.

Dado que los siete amigos son indistinguibles, los representaremos mediante símbolos idénticos, por ejemplo siete ceros:

0 0 0 0 0 0 0

Para describir una distribución de los amigos en las cuatro salas insertamos entre los ceros tres segmentos verticales.

Los ceros que queden a la izquierda del primer segmento representarán a las personas que eligieron la primera sala. Los que queden entre el primero y el segundo segmento representarán a quienes eligieron la segunda sala y así sucesivamente. Por ejemplo la siguiente disposición

0 | 0 0 | 0 0 0 | 0

indica que una persona eligió la Sala 1, dos la Sala 2, tres la Sala 3 y uno la Sala 4. Por otra parte la disposición

0 0 0 0 0 0 0 | | |

indica que todos han elegido la Sala 1.

Al construir las distintas disposiciones debemos ubicar diez símbolos, tres de los cuales son segmentos y siete son ceros. Si numeramos las posiciones que ocupan los símbolos comenzando desde la izquierda y del 1 al 10, entonces cada disposición quedará bien definida una vez que hayamos decidido dónde van colocados los segmentos.

En el primero de los ejemplos que se ven más arriba, los segmentos ocupan las posiciones 2, 5 y 9; mientras que en el segundo ejemplo ocupan las posiciones 8, 9 y 10. La cantidad de elecciones posibles de posiciones para los segmentos (y en consecuencia la cantidad de disposiciones diferentes de los diez símbolos) es igual a $\binom{10}{3} = 120$. Observemos que $10 = 7 + 4 - 1$, siendo 7 la cantidad de amigos y 4 la cantidad de salas. Observemos también que $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$.

Conviene tener presente la siguiente fórmula, que resulta de la generalización del razonamiento anterior: si queremos distribuir n elementos indistinguibles en k recipientes (habitaciones, salas, etc.) entonces las maneras en que esto puede hacerse es igual a $\binom{n+k-1}{k-1}$ ó $\binom{n+k-1}{n}$

Una nueva visita al cine

Problema 3: Regresemos a la situación del Problema 2. El dueño del multicine mira por la ventana y se pregunta ¿de cuántas maneras pueden distribuirse esas siete personas si cada una de las salas debe recibir a al menos uno de ellos?

Solución: Para asegurarnos de que ninguna de las salas quedará vacía, ubiquemos inicialmente a una persona en cada una de ellas:

0 | 0 | 0 | 0

Dado que son todos indistinguibles entre sí, entonces no interesa quiénes son los cuatro ubicados. Sólo resta ubicar los otros tres. Por lo tanto, la cantidad total de distribuciones equivale a la cantidad de formas de distribuir sólo **tres** personas en cuatro salas. Aplicando la fórmula anterior, vemos que la respuesta es $\binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$.

Problema 4: Regresemos a la situación del Problema 1, en la cual es relevante la identidad de las personas. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los siete amigos si cada una de las salas debe recibir a al menos uno de ellos?

Comentario: Resulta poco conveniente repetir en este caso el razonamiento que hemos usado en el problema anterior. Veamos qué ocurre al intentarlo.
Tal como hemos hecho antes, designemos a los amigos con las letras A, B, C, D, E, F y G. Recordemos asimismo que cada distribución en las cuatro salas puede representarse con una serie de siete números entre 1 y 4.

Procuremos seguir la idea de la solución anterior y, en consecuencia, ubiquemos inicialmente a cuatro personas en sendas salas. Esto equivale a asignar a alguna de las letras un número 1, a otra un número 2, a otra un 3 y a otra un 4. Una vez asignadas esas primeras personas, distribuimos a las restantes en cualquiera de las salas.

Una aplicación sencilla del P.G.E. nos indica que la cantidad total de formas de distribuir a las personas en las cuatro salas (de modo que haya al menos una persona en cada sala) es igual a:

(cantidad de formas de asignar a los cuatro primeros) x (cantidad de formas de asignar a los restantes)

¿De cuántas maneras podemos asignar a los cuatro primeros? Esto implica a su vez dos elecciones. Primero hay que elegir cuáles son las cuatro personas que se distribuye en primer lugar, y luego hay que elegir en qué sala es colocada cada una de ellas. La primera elección nos abre $\binom{7}{4}$ = 35 posibilidades, la segunda 4! = 24. Por lo tanto las primeras cuatro asignaciones pueden hacerse de 35 x 24 = 840 modos posibles.

Quedan 3 personas para asignar en las salas. Hallar la cantidad de modos diferentes de hacerlo equivale a resolver el Problema 1 para el caso en que hay sólo tres personas. Por lo tanto los modos de distribuir a estas tres personas es igual a $4^3 = 64$.

La respuesta final del problema sería entonces 840 x 64 = 53.760.

Aunque de apariencia convincente, esta solución es errónea. Esto resulta evidente si recordamos que la cantidad **total** de maneras de distribuir a las siete personas en las cuatro salas es 16.384. La cantidad de distribuciones en las que ninguna sala queda vacía no puede ser mayor que este número.

¿Cuál fue nuestro error?

Hemos dicho en la primera nota que al resolver un problema de combinatoria debemos suponer que estamos construyendo el conjunto cuyos elementos estamos contando. El cálculo final debe ser el reflejo del método de construcción.

En nuestro caso el método de construcción de cada elementos se realiza en tres etapas. En la primera elegimos cuatro personas. En la segunda etapa les asignamos los números del 1 al 4. En la tercera, finalmente, asignamos números a las restantes tres personas.

Mostremos dos ejemplos. En el primero de ellos, elegimos en primer lugar las personas A, B, C y D; les asignamos, en ese orden, los números 1, 2, 3, y 4, mientras que a todos los restantes les asignamos el número 4. El elemento así construido es 1234444.

En el segundo ejemplo elegimos a A, B, C y E. Les asignamos respectivamente los números 1, 2, 3 y 4, mientras que a los restantes les asignamos el número 4. El elemento así obtenido es nuevamente 1234444.
Puesto que en cada uno de los ejemplos hemos hecho elecciones diferentes, nuestro cálculo considera a los dos elementos obtenidos como diferentes. Sin embargo, en ambos casos el elemento obtenido es el mismo.

En otras palabras, nuestro cálculo incluye elementos repetidos. Tampoco en este caso es posible solventar el problema de las repeticiones mediante el recurso de agruparlas. La solución correcta se obtiene en realidad de una manera completamente diferente. Pero antes de explicarla, debemos introducir un nuevo principio.

Inclusión - Exclusión

Si A es un conjunto finito, llamemos #A a la cantidad de elementos (o cardinal) de A.

Si A y B son dos conjuntos finitos que no tienen elementos en común, entonces es claro que: $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Si los conjuntos tienen elementos en común, entonces en la suma #A + #B estos elementos son contados dos veces (primero como elementos de A y luego como elementos de B). Por lo tanto, para compensar, los elementos de la intersección deben ser restados. Entonces:

$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

El razonamiento se generaliza para tres conjuntos de la siguiente manera:

$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

Para justificar esta fórmula observemos que en la suma #A + #B + #C cada uno de los elementos de $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$ es contado dos veces. Por lo que debemos restarlos una vez cada uno. Ahora bien, los elementos de $A \cap B \cap C$ han sido contados tres veces en #A + #B + #C, y a su vez han sido restados tres veces en $- \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C)$, por lo tanto deben ser sumados una vez para compensar.

Si generalizamos aún más la idea para aplicarla a n conjuntos finitos cualesquiera, obtendremos el llamado Principio de Inclusión - Exclusión (P.I.E.), cuyo enunciado es el siguiente:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos cualesquiera entonces el cardinal de $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$ se calcula del siguiente modo:

$\#(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n+1} c_n$, donde:

$c_1 = \#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n$.
$c_2 = \#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \ldots + \#(A_{n-1} \cap A_n)$.
$c_3 = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_5) + \ldots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)$.
$c_n = \#(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$.

Notemos que en el cálculo de c_k aparecen $\binom{n}{k}$ sumandos.

La solución

Resolvamos ahora el Problema 4. Se trata, recordemos, de hallar todas las formas de distribuir siete personas en las cuatro salas, suponiendo que es importante la identidad de quién queda en cada una y con la condición adicional de que en cada sala debe haber al menos una de las personas. Resolveremos el problema de la siguiente manera: a la cantidad total de las formas de distribuir a las siete personas en las cuatro salas (que sabemos que es 4^7) le restaremos la cantidad de todas las distribuciones en las cuales alguna de las salas queda vacía.

Llamemos A_1 al conjunto de todas las distribuciones en las cuales la Sala 1 queda vacía (admitiendo que puede quedar vacía además alguna de las otras salas). De la misma manera llamamos A_2 al conjunto de todas las distribuciones en las cuales la Sala 2 queda vacía. Análogamente definimos A_3 y A_4.

Entonces el conjunto de todas las distribuciones en las cuales alguna de las salas queda vacía es $A_1 A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Si representamos a cada distribución como una serie de siete números entre 1 y 4, A_1 es el conjunto de todas las series en las cuales no aparece el número 1, es decir, las series que se pueden formar usando los dígitos 2, 3 y 4. Aplicando el P.G.E. vemos que $\#A_1 = 3^7$.

De la misma manera $\#A_2 = \#A_3 = \#A_4 = 3^7$.

Ahora bien, $A_1 \cap A_2$ es el conjunto de todas las series que se pueden formar usando los dígitos 3 y 4. Por lo tanto $\#(A_1 \cap A_2) = 2^7$. Este mismo número es el cardinal de $A_1 \cap A_3$, $A_1 \cap A_4$, etc.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ es el conjunto de todas las distribuciones en las cuales todas las personas ingresan en la Sala 4, por lo tanto $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1$. El mismo cardinal corresponde a $A_1 \cap A_2 \cap A_4$ y a $A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Finalmente, es fácil ver que $\#(A_1 A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$.

Aplicando el P.I.E. vemos que $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4.3^7 - 6.2^7 + 4 = 7.984$.

La respuesta del Problema 4 es entonces 16.384 - 7.984 = 8.400.

Ocho cartas

Veamos como cierre una nueva aplicación del P.I.E.

Problema 5: Una secretaria debe colocar ocho cartas diferentes en ocho sobres, también diferentes, que ya llevan escritos los nombres de los destinatarios. Para ahorrar tiempo, la secretaria decide colocar las cartas en los sobres completamente al azar. Nos preguntamos entonces ¿de cuántas maneras pueden quedar distribuidas las cartas en los sobres?

Solución: Numeremos del 1 al 8 a cada una de las cartas que deben ser colocadas en los sobres. Cada distribución de las cartas puede anotarse como una permutación de estos números, en la cual convenimos que el primer número corresponde a la carta que va en el sobre de la carta 1, el segundo número corresponde a la carta que va en el sobre de la carta 2, etc. Así por ejemplo, 42135687 significa que la carta 4 está en el sobre 1, la carta 2 está en el sobre correcto, etc.
De este modo, la cantidad total de formas de distribuir las cartas es 8! = 40.320.

Problema 6: En la situación del problema anterior ¿cuántas maneras hay de distribuir las cartas de tal modo que ninguna de ellas quede en el sobre correcto?

Solución: Como en el Problema 4, a la cantidad total de distribuciones le restaremos la cantidad de todas aquéllas en las cuales al menos una carta queda en el sobre correcto.

Llamemos A_1 al conjunto de todas las distribuciones de las cartas en las cuales la carta 1 queda en el sobre correcto. Llamemos A_2 al conjunto de todas las distribuciones en las cuales la carta 2 queda en el sobre correcto, y así sucesivamente. Debemos calcular entonces $\#(A_1 \cup ... \cup A_8)$ y restarlo de 8!.

A_1 es el conjunto de todas las permutaciones en las cuales el 1 queda fijo en el primer lugar. Debemos permutar entonces los otros siete números, por lo tanto $\#(A_1) = 7!$. El mismo cardinal corresponde a A_2, A_3, etc.

$A_1 \cap A_2$ es el conjunto de todas las secuencias en las cuales los números 1 y 2 están fijos en sus lugares. Sus elementos se obtienen permutando los otros seis números, en consecuencia $\#(A_1 \cap A_2) = 6!$. El mismo cardinal corresponde a todas los otros conjuntos que se obtienen como la intersección de dos de los conjuntos.

Generalizando, la intersección de k conjuntos corresponde a todas aquellas permutaciones en las cuales k números están fijos. Por lo tanto el cardinal de esa intersección será igual a (8 - k)!.

Recordemos además que hay $\binom{8}{k}$ maneras diferentes de elegir k conjuntos. Es decir, hay $\binom{8}{2}$ formas de intersecar dos conjuntos, $\binom{8}{3}$ formas de intersecar tres conjuntos, etc.

Por lo tanto, aplicando el P.I.E la solución del problema resulta ser la siguiente:

$$8! - \#(A_1 \cup ... \cup A_8) =$$

$$8! - \binom{8}{1}(8-1)! + \binom{8}{2}(8-2)! - \binom{8}{3}(8-3)! + \binom{8}{4}(8-4)! - \binom{8}{5}(8-5)! + \binom{8}{6}(8-6)! - \binom{8}{7}(8-7)! + \binom{8}{8}(8-8)!$$

$$= 8!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right) = 14.833.$$

Comentario: Podemos generalizar fácilmente el problema anterior, extendiendo su solución al caso de n cartas.

Si distribuimos n cartas al azar en n sobres entonces la cantidad total de distribuciones en las cuales ninguna de ellas queda en el sobre correcto es igual a:

$$n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Se deduce inmediatamente que, si se distribuyen al azar n cartas, la **probabilidad** de que ninguna de ellas quede en su sobre es igual a $\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$.

Esta probabilidad se obtiene dividiendo el resultado anterior por n!, la cantidad total de formas de distribuir las cartas.

Por otra parte, a partir del desarrollo en serie de Mac Laurin de la función $y = e^x$ se puede demostrar fácilmente que cuando n tiende al infinito la expresión anterior tiende a e^{-1}. Por lo tanto, si tenemos una cantidad grande de cartas y las distribuimos al azar, la probabilidad de que ninguna de ellas quede en su sobre correcto es aproximadamente igual a 0,37.

Este resultado es curioso, ya que intuitivamente resulta muy difícil imaginar que la probabilidad tenderá a e^{-1}. Como muchos otros, este es otro de los casos en los cuales la matemática nos ofrece resultados que contradicen la intuición.

* Lic. en Cs. Matemáticas - U.B.A.

Ecuaciones cúbica y cuártica (Primera parte)

Cotidianamente trabajamos en el aula con problemas que desembocan en ecuaciones cuadráticas y aplicamos una clásica fórmula resolutoria para hallar sus raíces. En la primera de las dos entregas que conforman esta nota, analizamos los pormenores históricos que dieron lugar, en la Italia del Renacimiento, al hallazgo de la fórmula resolutoria para la ecuación polinómica de tercer grado. En el próximo número de Axioma discutiremos esta solución y nos ocuparemos también de la ecuación polinómica de grado cuatro.

por *Fernando Chorny* *

Es el día esperado. Las calles angostas de la ciudad se van poblando con una multitud entusiasta que se dirige hacia el lugar del encuentro. Se escuchan cantos y gritos de arenga. Los más fanáticos enarbolan banderas y estandartes y –en el extremo de la exaltación– vociferan insultos feroces contra el bando adversario. Corren las apuestas y la discusión acerca del desenlace está en boca de todos. Algunos –la gran mayoría– no comprenden exactamente lo que va a ocurrir, pero saben que habrá una contienda; y una mezcla de morbo y desenfreno (curioso fenómeno social) los dispone a la expectativa, deseando una disputa que desemboque en lo violento.
Estamos en Venecia. Corre el año 1535.

–Lei, mio caro señore, se dice matemático e conocere questa ciencia. Ma guarda che, sotto la mia manga, tengo 30 problemi che io ho risolto con moltiísima faccilitá e che creo seranno molto difficiles per la sua povera testa.

Estalla el rugido de la parcialidad, acompañando con una ovación el golpazo de guante. El otro, el oponente, otorga un largo rato de silencio que se le vuelve en contra, soportando la presión de un público impaciente. Podemos imaginarlo garabateando un papel o, tal vez, concentrado, con la vista perdida hacia los activos engranajes de su cerebro. Después de un par de horas, con un balbuceo que no es culpa de los nervios y que despierta más de una burla mal intencionada, se rearma vigorosamente y expone de un tirón la respuesta a todos y cada uno de los interrogantes.

–E questo, señori –agrega en tono jactancioso y socarrón–, no é obra di maggia, se no di una difficile adversario e nel suo capomaestro potranno imaginare. Lei puó, con i sui rudimentario sapere rispondere a questi 30 problemi che io li propongo?

Nueva ovación. Golpes de cacerolas, gritos salvajes y alguna mano que –no necesariamente libre de pecados– arroja un tomate desde el anonimato. La cancha se ha inclinado para el otro lado y no volverá a emparejarse. **Niccolò Tartaglia** ha echo uso de un algoritmo oportuno que ha descubierto y que nadie más conoce y no sólo ha encontrado las raíces de treinta ecuaciones cúbicas sino que ha planteado otra treintena, cuya distinta naturaleza ha excedido el alcance de los métodos conocidos por **Anton Maria Fior**. Este último se retira derrotado y humillado. Tartaglia es el flamante campeón entre los algebristas del Renacimiento.

Si bien el diálogo es una versión libre, no difiere en gran medida de lo que describen los historiadores, basados muchas veces en los relatos que los propios protagonistas han hecho sobre estos debates públicos que practicaban los matemáticos italianos del siglo XVI.
La primera lectura que atinamos a hacer acerca de este público escandaloso y de los no menos escandalosos contendientes que sostenían estos debates, dispara una sentencia terminante contra los valores de una sociedad a la que juzgamos como menos civilizada que la nuestra. A este respecto es muy interesante el comentario de George Sarton en su libro *Seis alas*: ¿Es menos civilizado el público del Renacimiento aclamando al campeón de álgebra que un público actual aclamando a un campeón de boxeo?
Así como el atleta se entrena en el salto, la carrera o la lucha, empujado por el ánimo competitivo y por el hambre de gloria, de la misma forma, fue un espíritu casi deportivo el que –a fuerza de disputas y deba-

tes– empujó a un puñado de italianos, aproximadamente entre los años 1510 y 1580 hacia la solución definitiva de las ecuaciones cúbica y cuártica: "Investigaré para ser el mejor, para ganar fama y dinero".

Por otra parte, cuando un problema es identificado como tal por la comunidad matemática de una época, todo aquél que trabaja en su resolución es consciente del significado histórico que puede tener la hazaña de resolverlo. Cuando los resultados parciales comienzan a aparecer cada vez con mayor precisión, llega un momento en que el escenario está invadido por la sensación de que el hallazgo de una solución definitiva es inminente.

Para los matemáticos italianos del Renacimiento, publicar las soluciones de las ecuaciones cúbica y cuártica significaba ganarse un lugar en la historia. Pero también era resignarse a compartir la solución con los demás y renunciar, por lo tanto, al monopolio de un saber que garantizaba el triunfo en todos los debates.

El saldo de esta disyuntiva, según veremos, es una ecuación cúbica y una cuártica resueltas y un mérito finalmente compartido por unos cuantos matemáticos geniales, arrogantes y mezquinos.

La ecuación cúbica

¿Qué es resolver la ecuación? Dada la ecuación polinómica de tercer grado, se trata de encontrar una fórmula que, en pasos finitos, mediante sumas, restas, productos, cocientes, potencias y raíces, con los coeficientes de la ecuación como operadores, devuelva los ceros de la ecuación dada.
Un ejemplo que tenemos muy a mano es la fórmula

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que permite resolver la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$. Esta fórmula resolutoria (que resulta de completar cuadrados y despejar la incógnita en la ecuación anterior) es, a esta altura, un conocimiento de carácter más escolar que matemático. Casi cualquier estudiante la sabe aplicar (aunque casi ninguno la sepa deducir). Es decir, se trata de un saber que llega a formar parte muchas veces de ese paquete de frases hechas, incluido en el bagaje de cualquier estudiante que haya pisado una escuela secundaria. ("El agua es H_2O"; "Había amado es el pretérito pluscuamperfecto de amar" y "The cat is under the table" son otros ejemplos.)

Para resolver la ecuación cúbica, al igual que ocurre con la ecuación cuadrática, resultan más sencillos aquellos casos en los que la ecuación es incompleta, esto es cuando alguno de los coeficientes no principales es nulo.[1]
Según refieren los historiadores, el primero que obtuvo un método para resolver una ecuación cúbica fue el boloñés **Scipione dal Ferro** (1465-1526), trabajando con el problema *cubo más cosas igual número* (ver recuadro: Álgebra retórica y sincopada)
Su yerno y sucesor en la cátedra de la Universidad de Bologna, **Annibale Della Nave**, habría recibido como herencia una famosa libreta (jamás hallada) que contenía esta información. El segundo heredero de dal Ferro fue el ya nombrado Anton Maria Fior, quien lleno de entusiasmo y con la solución de $x^3+px=q$ en su poder salió corriendo a desafiar a Tartaglia. Pero este último, como ya vimos, estaba preparado para la embestida.

Cuando Tartaglia tenía sólo diez años, las tropas francesas al mando de Gastón de Foix invadieron Brescia violentamente atacando inclusive a mujeres y niños. El pequeño Niccolò recibió una cruel golpiza y como secuela de aquel hecho traumático quedó tartamudo durante el resto de su vida. Fue apodado Tartaglia (el que balbucea) y ése fue el nombre con el que trascendió, siendo su verdadero apellido desconocido incluso para él mismo.

Resístase el lector (sobre todo si es docente) y no peque de falaz infiriendo que un gran matemático se construye con unos cuantos azotes.

La curiosidad por el problema de las ecuaciones cúbicas había llegado a Tartaglia a través de **Zuanne de Tonini da Coi**. Éste le había planteado una serie de problemas que desembocaban en esta clase de ecuaciones y Tartaglia había encontrado la manera de resolverlos, que memorizó en forma de tercetos, según se muestra en el apartado en la página 12 y según se desarrolla en detalle a continuación:

Resolución de la ecuación

Sea la ecuación $x^3+px=q$. (i)
Llamemos $x=a-b$ (*)
Reemplazando en (i) tenemos

$(a-b)^3 + p(a-b) = q$; desarrollando el cubo

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + pa - pb = q$ de donde

$a^3 - b^3 + (a-b)(p - 3ab) = q$

Como a y b no están determinados, podemos exigir la condición

$$ab=\frac{p}{3} \qquad \text{(ii)}$$

con lo cual se anula el segundo término y tenemos

$$a^3-b^3=q \qquad \text{(iii)}$$

Elevando al cubo ambos miembros en (ii) resulta

$$a^3-b^3=\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad \text{(ii)'}$$

Llamando $a^3=u$ y $b^3=v$ se tienen las relaciones que Tartaglia detalla en sus tercetos:

$$u-v=q \qquad \text{(iii)'}$$

$$uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad \text{(ii)''}$$

$$x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v} \qquad \text{(iv)}$$

Las ecuaciones (iii)' y (ii)'' forman un sistema que desemboca en una cuadrática –cuya solución ya se conocía desde la Antigüedad– que el lector puede resolver fácilmente (hágalo), cuyas soluciones son:

$$u=\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \quad \text{y} \quad v=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

Con lo que, por (*), resulta

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad \text{(R)}$$

El lector puede verificar también que considerando la segunda solución de la cuadrática se obtiene una expresión idéntica esta última. La discusión de la fórmula (R) tiene que ver con los posibles valores del discriminante $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ y será analizado con detalle en la segunda entrega de esta nota. Por ahora, nos limitaremos a realizar dos observaciones:

a) Es evidente que si $p>0$ resulta $\Delta>0$ y, en este caso, la solución real es única. (las otras dos raíces son complejas conjugadas).

b) Puede ocurrir que sea $\Delta<0$. Este caso, que involucra el manejo de números complejos en los pasos intermedios de la resolución, escapaba, desde ya, al alcance de Tartaglia. (Ármese el lector de lápiz, papel, una calculadora y un poco de paciencia para hacer cuentas, y busque las tres raíces reales de la ecuación $x^3+(-2)x=1$

Ésta era, entonces, la limitación del método propuesto por Tartaglia. Sin embargo, fue con este hallazgo que Tartaglia consiguió responder los problemas de Fior en el histórico debate público de 1535. El as en la manga con que lo puso en jaque y lo derrotó finalmente fue la solución de la ecuación cúbica incompleta $x^3+bx^2=c$, que trataremos junto con la solución de la ecuación general, en la segunda parte de esta nota.

El triunfo de Tartaglia hizo eco. La noticia llegó a Milán, a oídos de **Gerolamo Cardano**, un médico, matemático, filósofo, astrólogo y científico en general, además de autor prolífico. Cardano estaba entonces escribiendo su Ars magna, un tratado general que reuniría los conocimientos de Álgebra de la época, y la solución de una ecuación cúbica era un bocadillo de su agrado. En seguida se puso en contacto epistolar con Tartaglia y logró convencerlo de que viajara a Milán para comunicar su hallazgo, cosa que Tartaglia hizo (acaso ingenuamente) ante el juramento *ad sacra Dei evangelia* por parte de Cardano, comprometiéndose éste a no publicar antes que Tartaglia los conocimientos en cuestión.

Tal vez Niccolò Tartaglia debió imaginar que un hombre de ciencia como Cardano, competitivo y arrollador, no se acordaría demasiado de Dios, llegada la hora de entregar sus manuscritos en la apenas centenaria imprenta de tipos móviles.

*Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. «Dr. Joaquín V. González»

(1) En la cuadrática serían los casos $ax^2+b=0$, $x^2+c=0$ y $ax^2=0$.

Álgebra retórica y sincopada

Es importante observar que los matemáticos del Renacimiento desarrollaron el álgebra remando contra la dificultad de una notación rudimentaria e ineficaz.

Dice Eric Temple Bell(*): *"Todo impaciente estudiante de matemáticas, de ciencia o de ingeniería que está cansado de introducir símbolos algebraicos, tendría que probar de desenvolverse sin ellos durante una semana".* Un ejemplo claro de álgebra retórica es la solución de la ecuación $x^3+px=q$ que Tartaglia escribe en tercetos y comunica a Cardano. Obsérvese el nombre *"cosa"* con que se designa a la incógnita en el término lineal de la ecuación. A la derecha aparece la traducción en la simbología actual.

Cuando el cubo con las cosas después	x^3+px
Se iguala a cierto número discreto	$=q$
Existen otros dos que difieren en éste.	$u-v=q$
Entonces tendrás esto por regla:	
Que su producto siempre sea igual	$uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3$ (I)
Al tercio cubo de las cosas notas.	
La diferencia luego general	
De sus lados cubos bien restados	$x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$
Valdrá tu cosa principal.	

Se recomienda al lector verificar esta solución sustituyendo la incógnita de la ecuación original $x^3+px=q$ por su valor en función de u y v, según (II) y teniendo en cuenta también la relación (I).

El álgebra sincopada es un paso posterior en la evolución de la notación y, por lo tanto, también en la evolución del álgebra misma, ya que las limitaciones del simbolismo ponen cota también al desarrollo de la teoría.

Es interesante comparar la evolución histórica del simbolismo algebraico con las dificultades que los estudiantes van teniendo en el arduo camino que recorren hasta llegar a dominarlo. El álgebra sincopada aparece en los primeros usos que los estudiantes le dan a los símbolos +, -, ., ÷, <, >, =, etc. Es una mezcla entre abreviatura y verdadero significado lógico. Por ejemplo, el signo "+" utilizado para expresar 6 es + grande que 5 y no como operador binario: 6+5=11. Llegar a concebir que -b puede ser un número positivo o que la división no es otra cosa que multiplicar por un inverso $(a \div b = a.\frac{1}{b})$ es un largo proceso histórico que se reedita en el aula.

Así, Tartaglia considera como casos distintos cubos más cosas igual a número ($x^3+px=q$), cubo igual a cosas más número ($x^3=px+q$) y cubos más número igual a cosas ($x^3+q=px$).

(*) En "LA REINA DE LAS MATEMÁTICAS", de la obra "SIGMA, EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS". (ver bibliografía).

Bibliografía

- MIELI, Aldo, *Panorama general de Historia de la Ciencia, V*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1952
- NEWMAN, James R., *Sigma, el mundo de las Matemáticas*, Barcelona, Grijalbo, 1997.
- REY PASTOR - BABINI, *Historia de la Matemática*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1951
- SARTON, George, *Seis alas*, Buenos Aires, Eudeba, 1965
- SEVERI, Francesco, *Lecciones de Análisis*, Barcelona, Labor S.A., 1951

Homenaje

Nuestros años de estudio y de docencia nos han puesto en contacto permanente con personajes que protagonizaron los momentos más admirables en la creación y en el descubrimiento matemático. Con el tiempo nos dimos cuenta de que, a pesar de conocerlos sólo a través de la literatura, sentíamos verdadero afecto por ellos; afecto que hemos querido plasmar en un homenaje sencillo. Escribimos, entonces, una serie de sonetos dedicados, de los cuales hoy ofrecemos el primero a nuestros lectores. Con toda intención, hemos omitido el nombre del homenajeado...

El arcano Universo fue tu objeto;
la belleza del número, tu musa.
Tu saber es la fábula inconclusa
encerrada en un círculo incompleto.

Entre esferas de danza tan confusa,
entre pares, amigos y secretos,
sorprendiste a los trémulos catetos
cortejando a la esquiva hipotenusa.

Trágica y griega resultó la trama:
con su horrendo ropaje irracional
el hallazgo de Hypaso cobró fama.

Un naufragio creyó esconder al Mal...
Intentaron que ardiera entre las llamas...
¡Necios griegos!, el monstruo era inmortal.

Fernando Chorny
Claudio Salpeter

El monstruo matemático

"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son circunferencias y una corteza de árbol no es lisa, como tampoco es cierto que la luz viaje en línea recta." - Benoit Mandelbrot –
En la presente nota se pretende acercar al lector a uno de los modelos matemáticos más sorprendentes existente en la actualidad.

por *Pablo Bonucci* *

Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), matemático y astrónomo francés conocido por sus exitosas aplicaciones de la teoría de la gravitación universal de Newton a los movimientos planetarios en el sistema solar y precursor póstumo del cálculo de probabilidades, expresó claramente la siguiente sentencia: *"Una mente que conociera en un momento dado todas las fuerzas que actúan en la naturaleza y las posiciones relativas de los seres que forman parte de ella, y que fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis todos los datos, podría resumir en una sola fórmula el movimiento de los cuerpos más grandes del universo, así como el del átomo más ligero: para una mente como esta nada sería incierto; y tanto el futuro como el pasado serían presente ante sus ojos".* Esta idea resume la postura ontológica del Determinismo, corriente del pensamiento que expresa que cada hecho ocurrido o por ocurrir se puede predecir ya que se conoce el movimiento de cada partícula o molécula. Cada suceso pasado, presente o futuro (la o es inclusiva) está determinado por una ecuación, o mejor dicho, "Metaecuación" descriptora del movimiento de las cosas en cada instante de tiempo. La aceptación de esta postura puede llegar a ser abrumadora: cada acto estaría unívocamente establecido por esta súper ecuación que al reemplazarla con los valores adecuados nos indicaría la acción hecha o por hacer. Esta concepción contrae posturas antagónicas como la del libre albedrío, por ejemplo. Sin ahondar en posturas filosóficas las cuales escapan a este texto, cabe mencionar el aporte más importante que nos legó la genialidad de Inmanuel Kant (1724 - 1804) y que se condensa en dos ideas: "*Das ding an sich*" y "*Das ding for mich*", las cuales expresan " La cosa en sí" y "La cosa para mí". Con estos supuestos, el filósofo nos expresa la imposibilidad de conocer un fenómeno tal como es, sino sólo como aparece ante nosotros; o sea, como percibimos dicho fenómeno, y esta percepción puede diferir de la realidad.

Muchos fenómenos observados a simple vista o sin el detenimiento apropiado pueden parecer descriptores de un comportamiento caótico, en cambio, si se realiza un estudio más detallado, encontramos en ellos, ciertas regularidades y propiedades antes inexploradas.

Ciertos entes matemáticos aparentemente caóticos pueden ser los llamados objetos fractales, de los cuales no expondremos una descripción íntegra de todos los aspectos de su naturaleza; sólo recordaremos la definición de fractal:

Un fractal es un conjunto auto-similar cuya dimensión de capacidad es distinta a su dimensión topológica (para una mejor comprensión del tema fractales ver los números 7, 8 y 9 de la revista AXIOMA.)

En particular estudiaremos la manera en que se genera el fractal denominado: Conjunto de Mandelbrot, en honor a su descubridor Benoit Mandelbrot en los años 1974 /75; y llamado también "El monstruo matemático" debido a la dificultad en su estudio y a la genial inventiva de los matemáticos.

La función generadora

Supongamos que nos encontramos estudiando una simple función, $F(z) = Z^2 + C$ siendo C y Z números complejos. Debe considerarse a nuestra función como recursiva, es decir, se repite un mismo proceso varias veces. Para adoptar una nomenclatura más comprensible llamaremos Z_{n+1} a $F(z)$, y Z_n a Z; con este cambio de nombres nuestra función (también llamada *mapa*) pasa a escribirse $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$.
Este tipo de mapas (también llamados funciones) opera de la siguiente manera: si $z_0 = 0$ y $C = 2$, tendremos entonces:

$F(0) = 2$
$F(1) = 3$
$F(3) = 11$
$F(11) = 123, Etc.$

Con nuestra nomenclatura designamos: z_0;
z_0; $z_1 = F(z_0)$; $z_2 = F(z_1)$; $z_3 = F(z_2)$....

Es decir, a cada z_n obtenido, nuevamente se aplica el campo y se genera z_{n+1}; y así sucesivamente (o indefinidamente...)

Con nuestro cambio tenemos el conjunto de valores $\{z_0;\ z_1 = f(z_0); z_2 = f(z_1);\ z_3 = f(z_2)...\}$ al que llamaremos Órbita de z_0.

Antes de acceder a un primer análisis del comportamiento del conjunto de Mandelbrot, necesitaremos acordar algunos conceptos fundamentales:

Primero el de Divergencia, para ello veamos un ejemplo sencillo: dadas las sucesiones de números: 1, 2, 3, 4, 5... ó; 2, 4, 8, 16... se dice que divergen o son divergentes; pues no existe número entero el cual no sea superado por algún término de estas sucesiones. Extendiendo este concepto al campo complejo se puede saber si una sucesión es divergente si se verifica:

$$\forall k \in \Re, \exists N \in Z / |z_n| > k; \forall n \geq N$$

Para aclarar esta idea consideraremos una sucesión que no diverge y otra que sí. Por ejemplo la sucesión 1, i, -1, -i, 1,... es convergente, pues $Z_n = 1$ (recordando que la norma de un número complejo es $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $Z = x + yi$). Mientras que la sucesión i, 2i, 3i, 4i... con $Z_n = ni$; diverge, ya que $z_n = n$ es tan grande como se quiera, eligiendo n lo suficientemente grande.

Ahora necesitamos definir Punto Fijo. Se llama punto fijo de una órbita de z_0 bajo la acción del mapa F a todos los puntos x que cumplen: $F(x) = x$, $(x_{n+1} = x_n)$.

Un ejemplo: Dado el campo $x_{n+1} = x_n^2$, y luego igualando a cero tenemos $x_n^2 - x_n = 0$, luego los puntos fijos del campo son $x = 0$ y $x = 1$.

Si aplicamos el campo a los puntos fijos obtenemos:

Con $x_0 = 0$

$x_1 = F(x_0) = F(0) = 0$
$x_2 = F(x_1) = F(0) = 0$
$x_3 = F(x_2) = F(0) = 0$ Etc.

Con $x_0 = 1$

$x_1 = F(x_0) = F(1) = 1$
$x_2 = F(x_1) = F(1) = 1$
$x_3 = F(x_2) = F(1) = 1$ Etc.

Vemos claramente que las órbitas convergen en dichos puntos.

Por último definimos Órbitas Periódicas; decimos que una órbita es periódica si se cumple en un campo $F(x)$ que: $F^i(x_0) = x_0$, en donde "i" es la cantidad mínima de veces que se aplica el mapa al punto para volver a obtener dicho punto, siendo "i" la Periodicidad de la órbita. Un ejemplo (como se está haciendo costumbre) aclarará las cosas:

Sea el campo, $(x_{n+1} = x_n^2 - 1)$ y tomando $x_0 = 0$ obtenemos:

$F^1(x_0) = F^1(0) = -1$
$F^2(0) = F^1(-1) = 0$
$F^3(0) = F^1(0) = -1. Etc.$

Notamos que la órbita de cero bajo el campo F tiene periodicidad 2 (i = 2. según nuestra notación). Estas órbitas también convergen como es fácil de verificar.

Proponemos, como ejercicio para el lector, analizar las órbitas y obtener los puntos fijos del campo $x_{n+1} = 2x_n + 3$ tomando $X_0 = 0.5$

Cabe señalar que en los campos pueden coexistir órbitas periódicas, no periódicas, órbitas que divergen y que no divergen.

El conjunto Mandelbrot

Ahora estamos en condiciones de definir el conjunto de Mandelbrot, al que llamaremos M:

El conjunto de Mandelbrot consiste en todos los valores complejos de C cuyas órbitas de 0 (cero) bajo *la acción del campo* $Z_{n-1} = Z_n^2 + C$ *correspondiente no divergen, es decir no escapan al infinito.*

En símbolos:

$$M = \left\{ C \in Complejos / f(z_n) \xrightarrow{no} \infty \right\}$$

(f *es el mapa* Z_{n+1})

Es decir, son los valores de C que NO hacen tender el mapa al infinito, partiendo de un valor llamado semilla (o punto de inicio). Para una mayor comprensión, analizaremos algunos valores de C en particular y determinaremos si pertenecen o no al conjunto M:

Si C = 0 entonces:

$Z_0 = 0; Z_1 = 0; Z_2 = 0; \ldots$ lo cual implica que

$Z_n = 0; \forall n \geq 0$ o sea: f no diverge. Luego,

$C = 0 \in M$

Si C = -2 entonces:

$Z_0 = 0; Z_1 = -2; Z_2 = 2; Z_3 = 2; Z_4 = 2; \ldots$ lo cual implica que $Z_n = 2; \forall n \geq 2$ o sea: f no diverge. Luego, $C = 2 \in M$.

Si C = i, entonces:

$Z_0 = 0; Z_1 = i; Z_2 = -1 + i; Z_3 = -i; Z_4 = -1 + i;$
$Z_5 = -i \ldots$

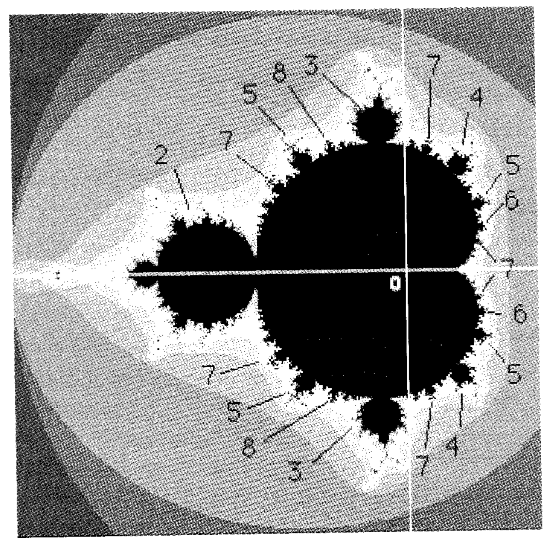
Lo cual implica que $|Z_n| \leq \sqrt{2}; \forall n$ o sea: f no diverge. Luego, $C = i \in M$.

Si C = 1 entonces:

$Z_0 = 0; Z_1 = 1; Z_2 = 2; Z_3 = 5; Z_4 = 26; Z_5 = 677 \ldots$

Lo cual implica que $Z_n \geq cualquier$ K, si se toma n lo suficientemente grande, o sea: f diverge. Luego, $C = 1 \notin M$.

Si este análisis, el de asignar valores a C, se repitiera con todos los puntos del plano complejo se obtendría el conjunto de valores de Mandelbrot, el cual tendría el siguiente aspecto:



Conjunto de Mandelbrot

Observación: Los números señalados en la figura indican algunas zonas dentro del conjunto que corresponden al mismo periodo de órbitas.

Vemos que la definición del conjunto de Mandelbrot proporciona un algoritmo para obtener dicho conjunto. Consideremos un cuadrado en el plano complejo, centrado en el origen, con lados de longitud 4. Ubiquemos un conjunto de puntos uniformemente distribuidos dentro de este cuadrado, cada uno de ellos deberá ser considerado un valor complejo de C; luego, para cada valor, analizamos si la órbita correspondiente de $Z_0 = 0$ converge o no. Si converge, pintamos el punto de negro, en caso contrario lo coloreamos de colores menos oscuros dependiendo esto último de la rapidez con que diverja. En este ítem es necesario contestar algunas posibles preguntas, a saber: ¿cómo analizamos si una órbita diverge?, ¿todas las órbitas divergen con la misma rapidez?, es decir, con el mismo número de iteraciones, ¿y si nos cansamos de hacer cuentas antes de descubrir si la órbita diverge?

Es imprescindible en el análisis de la divergencia de las órbitas, la velocidad del cálculo numérico brindada por las computadoras, debido a que el número de iteraciones que podemos llegar a necesitar para descubrir si una órbita diverge o no puede llegar a ser extremadamente grande, dependiendo del valor de C que hayamos escogido.

Si tomáramos $C = 1.01i$, y nos preguntásemos si diverge o no, el análisis sería el siguiente:

$Z_0 = 0 + 0i$; (semilla)	$Z_0 = 0$
$Z_1 = 0 + 1.01i$;	$Z_1 = 1.01$
$Z_2 = -1.020 + 1.010i$;	$Z_2 = 1{,}436$
$Z_3 = 0.021 - 1.051i$;	$Z_3 = 1.051$
$Z_4 = -1.103 + 0.967i$;	$Z_4 = 1{,}467$
$Z_5 = 0.282 - 1.124i$;	$Z_5 = 1.159$
$Z_6 = -1.183 + 0.375i$;	$Z_6 = 1.241$
$Z_7 = 1.258 + 0.122i$;	$Z_7 = 1.264$
$Z_8 = 1.569 + 1.318i$;	$Z_8 = 2.049$
$Z_9 = 0.725 + 5.144i$;	$Z_9 = 5.195$

Hasta aquí observamos que las iteraciones se mantienen dentro de valores relativamente chicos. Pero en la siguiente iteración se observa un considerable aumento de la norma:

$Z_{10} = -25.935 + 8.465i$; $\quad Z_{10} = 27.281$

Y en la undécima iteración observamos que:

$Z_{11} = 600.96 - 438.05i$

$Z_{11} = 743.671 \to \infty$ (tiende al infinito)

Estos resultados nos indican que, recién luego de 11 iteraciones podemos empezar a sospechar que la órbita diverge y por lo tanto $C = 1.01i \notin M$.

Como no todas las órbitas divergen con igual rapidez (número de iteraciones), aquellas que lo hagan más rápidamente, en el gráfico, se las coloreará de tonos más claros y las que necesiten un gran número de iteraciones para que nos demos cuenta que sus normas tienden al infinito, serán pintadas de tonos más oscuros.

Para decidir si una órbita diverge o no debemos adoptar un criterio, denominado Criterio de Escape. Suponiendo que, si la órbita de 0 bajo $Z^2 + C$ sale del círculo de radio 2 centrado en el origen entonces, esa órbita definitivamente tiende al infinito, trataremos de comprender esta idea determinando el conjunto de valores C para los cuales sus órbitas, que llamaremos $Q_c(z)$, tienen un punto fijo. Denotemos este conjunto con C_1 y enfaticemos que éste, es un subconjunto de puntos del plano complejo.

Z_c se llamará el correspondiente punto fijo para Q_c cuando C pertenezca a C_1. Luego, Z_c deberá satisfacer el siguiente par de ecuaciones:

$$Q_c(Z) = Z^2 + C = Z \qquad (1)$$

$$Q_c'(Z) = 2Z \leq 1 \qquad (2)$$

La primera ecuación contempla los puntos fijos antes mencionados y la segunda indica que los puntos Z_c están situados dentro del disco limitado por la circunferencia de radio $1/2$. Podemos observar lo antedicho, teniendo en cuenta lo siguiente:

$$2Z = 2Z = 2 \;\; x^2 + y^2 \leq 1;$$

luego despejando obtenemos, $x^2 + y^2 \leq 1/4$ ecuación ésta del círculo centrado en el origen de radio $1/2$, y sintetiza la condición de convergencia de una función recursiva (la cual no demostraremos para no dispersar el tema). Es obvio que, en Z_c el campo no diverge.

Si escribimos la ecuación (2) con notación exponencial (la cual determina a todo complejo utilizando la norma y el argumento φ de dicho número); obtenemos la siguiente:

$$Z = \frac{1}{2}\rho . e^{i\varphi} \qquad (3)$$

en donde $\varphi = arcsen\left(\frac{y}{\rho}\right)$.

Luego, al introducir la condición (3) en la ecuación (1), y despejando C obtenemos:

$$\left(\frac{1}{2}e^{i\varphi}\right)^2 + C = \frac{1}{2}e^{i\varphi}$$

$$\frac{1}{4}e^{2i\varphi} + C = \frac{1}{2}e^{i\varphi}$$

y finalmente,

$$C = \frac{1}{2}e^{i\varphi} - \frac{1}{4}e^{2i\varphi}$$

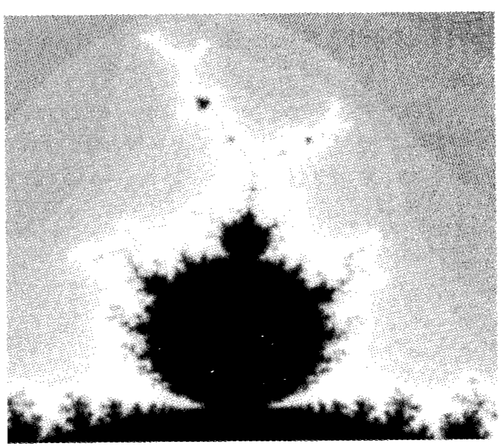
Con este cambio en la notación se puede considerar a C como función del parámetro φ, y se expresa:

$$C = \xi(\varphi) = \frac{1}{2}e^{i\varphi} - \frac{1}{4}e^{2i\varphi}$$

Esta curva se denomina *Cardioide* Principal y es el límite de la región grande y negra visible en el gráfico del conjunto. El interior de esta región es el conjunto de valores de C para los cuales Q_c tiene puntos fijos. La región visible justo a la izquierda de la cardioide principal indicada con 2, y representada en el gráfico posterior, está limitada por la ecuación:

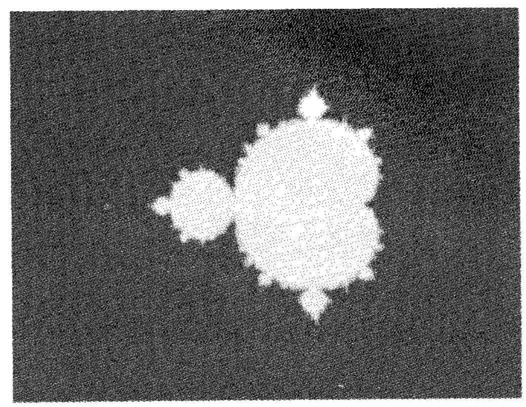
$$Z + 1 = \frac{1}{4}$$

Esta es la ecuación del círculo centrado en X = -1, y de radio $\frac{1}{4}$.



Ampliación de la zona 2 de la gráfica del Conjunto de Mandelbrot

Se podría argumentar que estos criterios no son válidos, puesto que consideramos sólo valores de C que cumplen con la condición de estar dentro del disco mencionado. Sin embargo se ha comprobado que todo el conjunto de Mandelbrot reside dentro de éste; y por lo tanto estos son los únicos valores de C que necesitamos analizar.
El tremendo grado de complejidad de este ya famoso conjunto de puntos complejos, mantuvo en vilo a la comunidad científico-matemática hace poco menos de tres décadas y se especula que hasta el día de hoy, no se han agotados todos sus misterios.
Dejamos al lector una imagen completa (para que pueda admirar y deleitarse sin molestos comentarios) del increíble conjunto de Mandelbrot.



Por último, como se dijo, la complejidad del gráfico del conjunto, se contradice con la simplicidad de la ecuación que lo describe, sin embargo este modelo matemático (que en el presente artículo pretendimos analizar) conlleva en sí el esfuerzo común de matemáticos y computadoras. Pues, sin estas últimas hubiera sido muy difícil alcanzar el grado de evolución al que ha llegado el cálculo numérico, pero que sin los primeros se hubiera tornado imposible.

Bibliografía

· DEVANEY, R. L, *A first course of chaotic dynamical systems*, Addison Wesley 1992.
· EGUEZ, - R. E. IBÁÑEZ; -M. J. FUNES, - H. N. ALONSO, · R. N. HEIT. *Naturaleza fractal.* Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Salta 1999.
· MANDELBROT, Benoit, *Los objetos fractales*, Tusquets, España 1993.
· STEWART, Ian, *De aquí al infinito*, Crítica, Grijalbo, España 1998.

* Profesor en Matemática y Astronomía, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

El ubicuo Fibonacci y el problema 3n + 1

La sucesión de Fibonacci es bien conocida por casi todos los aficionados a la Matemática Recreativa. Abundan en la literatura los estudios de sus propiedades así como los ejemplos de su vinculación con distintos fenómenos de la Naturaleza. Mostraremos en esta ocasión una nueva e inesperada aparición de los ubicuos números de Fibonacci.

por *Gustavo Piñeiro* *

Todos los aficionados a la Matemática Recreativa han oído hablar alguna vez de la sucesión de Fibonacci, que es aquella que comienza con 1, 1, ...y en la que cada término a partir del tercero es igual a la suma de los dos precedentes.

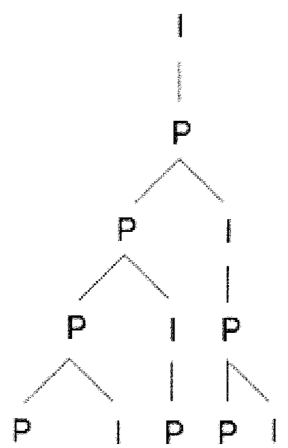
Si llamamos F_n al n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci, las condiciones que definen a la sucesión pueden expresarse de la siguiente manera:

$F_1 = 1 \quad F_2 = 1$
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, si $n \geq 3$

Es bien sabido que esta sucesión nació a la vida como solución de uno de los problemas incluidos en el *Liber abaci*, famosa obra escrita a principios del siglo XIII por Leonardo de Pisa (también conocido, precisamente, como Fibonacci). Nos resultará de utilidad analizar brevemente el problema en cuestión. Su enunciado, según registra la historia, es el siguiente: "¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes una pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?"

En otras palabras, tenemos inicialmente una pareja de conejos inmaduros. Cada pareja inmadura alcanza la madurez en el término de un mes, e inmediatamente se reproduce generando una nueva pareja de conejos inmaduros. Esta pareja madura a su vez en un mes, momento en el que se reproduce y así sucesivamente.

La manera en la que se van generando las parejas puede verse cómodamente en un diagrama de árbol:



En el diagrama, cada letra I indica una pareja inmadura de conejos y cada letra P indica una pareja madura (P es la inicial de "padres").

En cada fila horizontal del esquema se ven las parejas existentes en un determinado mes. En el primer mes hay una pareja inmadura. En el segundo mes tenemos más la pareja formada por sus primeros hijos.

Es fácil ver que la cantidad de parejas de conejos en el mes n-ésimo es exactamente igual a F_n. Por lo tanto la respuesta al problema planteado en el *Liber Abaci* es $F_{12} = 144$.

Más allá de su relación con la solución del problema de los conejos, la fama de la sucesión de Fibonacci se debe a su obstinación por aparecer una y otra vez en los lugares más inesperados.

Por ejemplo, Martín Gardner nos cuenta en su libro *Circo Matemático* (Madrid, Alianza Editorial, 1968) que ciertas variedades de girasoles tienen en su flor dos haces de espirales logarítmicas llenas de semillas (uno de los haces está formado por espirales que giran en sentido horario y el otro por espirales que giran en sentido inverso).

Ahora bien, las cantidades de espirales que forman esos haces son siempre números de Fibonacci consecutivos.
Otro ejemplo, que citamos de *La*

magia de la matemática de Theoni Pappas (Buenos Aires, Juegos & Co., 1998), es el siguiente: "Tome una rama de un cerezo, un olmo o un peral (o de muchas otras plantas). Elija una hoja y, mientras asciende por la rama, cuente el número de hojas que encuentra hasta llegar a una que esté exactamente en línea con la elegida inicialmente.

Suponiendo que ninguna ha sido arrancada, la cantidad total de hojas contadas es un número de Fibonacci." Nos cuenta también Theoni Pappas que en muchas variedades de flores las cantidades de pétalos son siempre números de Fibonacci.

Podríamos prolongar a lo largo de páginas y páginas los ejemplos tomados de la literatura sobre apariciones inesperadas de la sucesión de Fibonacci. Pero es nuestra intención presentar aquí un nuevo ejemplo. Un ejemplo que, hasta donde sabemos, nunca ha sido mencionado anteriormente, de aparición inesperada de esta ubicua sucesión. Para ello comenzaremos exponiendo un problema matemático que aún no ha podido ser resuelto.

El problema 3n + 1

Llamemos N al conjunto de todos los enteros positivos N = {1, 2, 3, 4,...} y sea $f : N \to N$ la función definida del siguiente modo:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si n es par} \\ 3n+1 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Por ejemplo,

$f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 10$.

Elijamos un número n_0 cualquiera, digamos por ejemplo $n_0 = 5$, y apliquémosle la función f. A la imagen obtenida apliquémosle nuevamente la función y así sucesivamente. Obtendremos de esta manera una sucesión de números enteros que, en el caso de $n_0 = 5$ es la siguiente:

5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1,...

Si comenzamos con $n_0 = 7$:

7, 22, 11. 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,...

Para $n_0 = 39$ obtenemos:

39, 118, 59, 178, 89, 268, 134, 67, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

¿Será cierto que, cualquiera sea el n_0 inicial, la sucesión generada siempre acaba por entrar en el ciclo 4, 2, 1, 4, 2, 1,...? Utilizando computadoras se ha podido comprobar que hasta $n_0 = 10^{12}$ la respuesta es afirmativa, pero ¿será cierto *siempre*, para cualquiera de los infinitos valores de n_0 posibles? Aunque se conjetura que sí, hasta ahora nadie ha podido demostrarlo.

El problema 3n + 1, tal como algunos lo llaman, que pide demostrar que, cualquiera sea el n_0 inicial, la sucesión acabará por entrar en el ciclo 4, 2, 1, 4, 2, 1...., forma parte de esa selecta lista de problemas matemáticos de enunciado sencillo, que hasta ahora nadie ha podido resolver, como la Conjetura de Goldbach o el de los primos gemelos.

Desde luego no intentaremos aquí resolver el problema 3n + 1, pero sí podemos analizar la siguiente cuestión: si quisiéramos demostrar que todas las sucesiones entran en el ciclo 4, 2, 1, 4, 2, 1,... ¿qué estrategia deberíamos seguir para lograrlo? Es decir, ¿qué resultados intermedios deberíamos demostrar?

La estrategia

Si n_0 es el número inicial elegido entonces la sucesión formada a partir de él tiene la siguiente forma general:

$n_0, f(n_0), f^{(2)}(n_0), f^{(3)}(n_0),...$

Donde $f^{(f)} = f \circ f \circ ... \circ f$ (f compuesta consigo misma k veces).

Para resolver el problema 3n + 1 deberíamos demostrar básicamente dos hechos.

Enunciaremos a continuación el primero de ellos.

Hecho 1: Cualquiera sea el valor n_0 la sucesión n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$, $f^{(3)}(n_0)$,... es acotada. Es decir, para cada n_0 existe un M (que depende de n_0) tal que para todo k, $f^{(k)}(n_0) \leq M$.

Asumamos que el **Hecho 1** es verdadero y llamemos M a la menor de las cotas superiores posibles (es decir, M es el mayor de los términos de la sucesión iniciada con n_0).

Es interesante notar que el valor de M varía muy erráticamente, en función de n_0. Veamos, como ejemplo de ello, la siguiente tabla, donde se muestra el valor de M para cada n_0 comprendido entre 1 y 30.

La tabla muestra también la cantidad de veces que debe aplicarse la función f hasta llegar a obtener por primera vez el número 1 (esta cantidad se indica como k):

n_0	k	M
1	0	4
2	1	4
3	7	16
4	2	4
5	5	16
6	8	16
7	16	52
8	3	8
9	19	52
10	6	16
11	14	52
12	9	16
13	9	40
14	17	52
15	17	160
16	4	16
17	12	52
18	20	52
19	20	88
20	7	20
21	7	64
22	15	52
23	15	160
24	10	24
25	23	88
26	10	40
27	111	9232
28	18	52
29	18	88
30	18	160

Ejercicio para los lectores: Demuestren que el valor de M es siempre par.

Una consecuencia inmediata del **Hecho 1** es que, a partir de algún punto, la sucesión n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$, $f^{(3)}(n_0)$,... comienza a repetirse cíclicamente.

Demostremos esta última afirmación. Asumamos que el Hecho 1 es cierto y sea M el mayor de los términos de la sucesión que comienza con n_0. Entonces todos los términos de la misma estarán contenidos en el conjunto {1, 2,..., M}; y, dado que la sucesión n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$, $f^{(3)}(n_0)$,... es infinita, necesariamente deberán existir dos términos de ella que sean iguales. Es decir, existen números k, j diferentes tales que $f^{(k)}(n_0) = f^{(j)}(n_0)$.

Llamemos p = j - k, afirmamos que, a partir de $f^{(k)}(n_0)$ la sucesión se vuelve cíclica y que el período tiene longitud p. Para demostrarlo, hay que ver que para todo r > k, $f^{(r+p)}(n_0) = f^{(r)}(n_0)$.

En efecto, sea r = k + q. Tenemos:

$$\begin{aligned} f^{(r+p)}(n_0) &= f^{(k+q+p)}(n_0) \\ &= f^{(j+q)}(n_0) \\ &= f^{(q)}(f^{(j)}(n_0)) \\ &= f^{(q)}(f^{(k)}(n_0)) \\ &= f^{(q+k)}(n_0) \\ &= f^{(r)}(n_0) \end{aligned}$$

Luego $f^{(r+p)}(n_0) = f^{(r)}(n_0)$, como queríamos demostrar.

Los ciclos

Acabamos de ver que una consecuencia del **Hecho 1** es que toda sucesión n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$, $f^{(3)}(n_0)$,... es cíclica. Para resolver el Problema 3n + 1 habría que ver que ese ciclo es necesariamente el ciclo 4, 2, 1, 4, 2, 1,...

Enunciamos entonces el segundo hecho que habría que probar para resolver el problema 3n + 1:

Hecho 2: El único ciclo que puede aparecer en una sucesión de la forma n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$, $f^{(3)}(n_0)$,... es 4, 2, 1, 4, 2, 1,...

Si pudiéramos demostrar los **Hechos 1** y **2** habríamos resuelto el Problema 3n + 1, y nuestro nombre quedaría para siempre registrado en los libros de historia de la Matemática.

Analizaremos después qué estrategia puede seguirse para demostrar el **Hecho 1**, nos concentraremos primeramente en estudiar qué estrategia puede seguirse para demostrar el **Hecho 2**.

Se trata entonces de determinar qué ciclos pueden aparecer en la sucesión n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$, $f^{(3)}(n_0)$,... Supongamos que ella entra en algún momento en un ciclo de longitud 2. Digamos que este ciclo está formado por los números a y b. Es decir, a partir de alguno de sus términos la sucesión se transforma en a, b, a, b,.... Observemos que b = f(a) y que a = f(b) = f(f(a)) = $f^{(2)}(a)$, luego a = $f^{(2)}(a)$. Además se puede probar fácilmente que b = $f^{(2)}(b)$.

Definición: si $g: A \to A$ es una función, decimos que x es un punto fijo de g si y sólo si g(x) = x.

Por lo tanto, hemos visto que si a y b forman un ciclo de longitud 2 entonces tanto a como b son puntos fijos de la función $f^{(2)}$.

Análogamente puede probarse lo siguiente: si a_1, a_2,..., a_r forman un ciclo de longitud r de una sucesión del tipo n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$,... entonces cada uno de los números a_j es punto fijo de la función $f^{(r)}$. La demostración se deja como ejercicio para los lectores.

Por lo tanto, para estudiar los ciclos de n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$,... debemos analizar los puntos fijos de las funciones f, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$,...

Puntos fijos

Antes de analizar los casos de $f^{(2)}$, $f^{(3)}$,... comencemos por preguntarnos: ¿tiene la función f algún punto fijo?

Para responder esta primera pregunta, debemos resolver la ecuación f(n) = n, con $n \in N$.

Recordemos la definición de la función f:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si n es par}\\ 3n+1 & \text{si n es impar}\end{cases}$$

Debemos considerar entonces dos posibilidades: que n sea par, o que sea impar.

Si n es par, la ecuación f(n) = n se transforma en $\frac{n}{2}$ = n, que no tiene solución en N. Si n es impar, la ecuación se transforma en 3n + 1 = n, que tampoco tiene solución en N. Por lo tanto f no tiene puntos fijos.

Para analizar los puntos fijos de $f^{(2)}$ necesitamos conocer las fórmulas que definen a esta función.

Si n es par entonces f(n) = $\frac{n}{2}$. Si además n es múltiplo de 4 entonces $\frac{n}{2}$ vuelve a ser par y, en consecuencia, f(f(n)) = $\frac{n}{2}$.

Pero si n es par y no es múltiplo de 4, entonces $\frac{n}{2}$ es impar y f(f(n)) = $\frac{3}{2}n+1$.

Por otra parte, si n es impar entonces f(n) = 3n + 1. Es interesante notar que si n es impar entonces 3n + 1 es necesariamente par, por lo que f(f(n)) = $\frac{3n+1}{2}$.

Por lo tanto:

$$f^{(2)}(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}\ \text{si}\ n=4m\\ \dfrac{3n+2}{2}\ \text{si}\ n=4m+2\\ \dfrac{3n+1}{2}\ \text{si n es impar}\end{cases}$$

Para determinar si $f^{(2)}$ tiene puntos fijos debemos plantear las siguientes ecuaciones:

$\frac{n}{4}$ = n (con n múltiplo de 4)

$\frac{3}{2}n+1$ = n (con n par, pero no múltiplo de 4)

$\frac{3n+1}{2}$ = n (con n impar)

Es fácil comprobar que ninguna de las tres ecuaciones tiene solución en N. Por lo tanto $f^{(2)}$ no tiene puntos fijos y, consecuentemente, cualquiera sea el n_0 inicial, la sucesión n_0, $f(n_0)$, $f^{(2)}(n_0)$, $f^{(3)}(n_0)$,... nunca entrará en un ciclo de longitud 2.

Para demostrar el **Hecho 2** habría que probar que la ecuación $f^{(k)}(n)$ = n sólo tiene solución para k = 3 y además que $f^{(3)}(n)$ = n tiene como únicas soluciones los números 1, 2 y 4. Esto último es fácil de probar y, de hecho, en el siguiente apartado será dejado como tarea para los lectores.

El regreso de Fibonacci

Una pregunta que surge naturalmente es ¿cuántas ecuaciones debemos plantear para comprobar si $f^{(k)}$ tiene puntos fijos? En otras palabras ¿cuántas fórmulas diferentes aparecen en la definición de $f^{(k)}$?

Llamemos P(n) (P de par) e I(n) (I de impar) a las siguientes expresiones:

P(n) = $\frac{n}{2}$

I(n) = 3n + 1

Por lo tanto:

$$f(n)=\begin{cases}P(n)\ \text{si n es par}\\ I(n)\ \text{si n es impar}\end{cases}$$

Observemos que al aplicar la función P a un n par el resultado puede ser par o impar, mientras que al aplicar la función I a un número impar el resultado siempre será par.

Repitamos, utilizando este nuevo lenguaje, el cálculo de f(f(n)).

Si n es par, f(n) = P(n). El número P(n) puede ser par o puede ser impar, por lo tanto, f(f(n)) será, respectivamente, igual a P(P(n)) o I(P(n)). Si n es impar f(n) = I(n) y como este último número es par entonces f(f(n)) = P(I(n)).

Por lo tanto, como ya habíamos visto, f(f(n)) requiere de tres fórmulas diferentes para ser calculado: PoP, IoP y PoI.

Las fórmulas correspondientes a $f^{(3)}$ se generan a partir de las de $f^{(2)}$ del siguiente modo:

El resultado de aplicar PoP puede ser tanto par como impar por lo tanto PoP aporta dos fórmulas a $f^{(3)}$: PoPoP e IoPoP

El resultado de aplicar IoP es siempre par, por lo que IoP aporta una única fórmula: PoIoP.

El resultado de aplicar PoI puede

ser par o impar, por lo tanto PoI aporta dos fórmulas: PoPoI e IoPoI.

La función $f^{(3)}$ requiere entonces para su cálculo de cinco fórmulas y, consecuentemente, la ecuación $f^{(3)}(n) = n$ se descompone en cinco ecuaciones:

PoPoP(n) = n IoPoP(n) = n
PoIoP(n) = n PoPoI(n) = n
IoPoI(n) = n

Dejamos como tarea para los lectores la comprobación de que sólo tres de esas ecuaciones tienen solución y que las soluciones correspondiente son 1, 2 y 4 (los números que constituyen el ciclo de longitud 3 de f).

Generalizando lo que acabamos de ver en los ejemplos, deducimos que cada una de las fórmulas de $f^{(k)}$ está determinada por una sucesión de k letras en la que aparecen pes e íes y donde se debe cumplir únicamente la siguiente restricción: a la izquierda de cada I sólo puede aparecer una P. Es fácil generar estas sucesiones a partir de un diagrama de árbol:

P I
P I P
P I P P I
P I P P I P I P

Si comenzamos a descender por el árbol desde la primera línea, las letras que vayan apareciendo van generando cada sucesión de pes e íes desde la derecha hacia la izquierda. Invitamos a los lectores a que identifiquen en el árbol las cinco sucesiones que corresponden a $f^{(3)}$.

El hecho de que a la izquierda de una I debe aparecer una P se refleja en el hecho de que, en el árbol, debajo de cada I sólo hay una P (y nunca otra I).
Si regresamos al principio de la nota veremos inmediatamente que el árbol que muestra la generación de las fórmulas de $f^{(k)}$ es básicamente el mismo que el árbol que muestra la propagación de los conejos.

La única diferencia consiste en que éste tiene en su inicio dos líneas más que aquél. Por lo tanto la cantidad de fórmulas en $f^{(k)}$ es siempre un número de Fibonacci: la cantidad de fórmulas en $f^{(k)}$ es F_{k+2}.

La sucesión de Fibonacci ha vuelto a aparecer.

Cómo ganar fama

Decíamos que para resolver el problema 3n + 1 hay que demostrar los **Hechos 1** y **2** antes enunciados. Hemos ya indicado qué debe buscarse para demostrar el **Hechos 2**, nos referiremos ahora brevemente al **Hechos 1**.

Recordemos que éste expresa que cualquiera sea el valor n_0 la sucesión $n_0, f(n_0), f^{(2)}(n_0), f^{(3)}(n_0), \ldots$ es acotada. Es decir, para cada n_0 existe un M (que depende de n_0) tal que para todo k, $f^{(k)}(n_0) \leq M$.

Observemos que todas las fórmulas que definen a $f^{(k)}$ corresponden a funciones lineales (ya que P e I lo son). Es decir $f^{(k)}(n_0) = a_k n_0 + b_k$, para ciertos números racionales a_k, b_k.

Bastaría probar entonces que existen constantes A y B tales que A es mayor o igual que todos los a_k posibles y B es mayor o igual que todos los b_k posibles.

En ese caso, dado n_0, si tomamos $M = An_0 + B$, se vería inmediatamente que para todo k, $f^{(k)}(n_0) \leq M$.

A su vez, para hallar A y B habría que analizar, en las distintas sucesiones de pes e íes posibles, qué forma toman los números a_k y b_k para así encontrarles una cota superior.

Amigos lectores, la mesa está servida. Les queda ahora a Uds. la tarea (nada simple) de zambullirse en las demostraciones de los **Hechos 1** y **2**. ¿Quién de Uds. logrará resolver el problema 3n + 1? ¿Quién será el que se gane su lugar en la historia de la Matemática? Uds., y sólo Uds., tienen la respuesta.

* Lic. en Cs. Matemáticas - U.B.A.

◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈

Hasta el momento se desconoce si la sucesión de Fibonacci contiene infinitos números primos. Actualmente el mayor que se conoce es F_{81839}

Distancias Astronómicas

¿Cuál es la distancia a los objetos que vemos en el cielo?
Estimar distancias tan grandes resulta poco intuitivo, pero los astrónomos han desarrollado, a lo largo de la historia, una gran variedad de técnicas para enfrentarse al problema.
Se utilizaron una serie de números como el radio terrestre, la distancia a la Luna y el período de traslación de ésta alrededor de la Tierra. La pregunta es ¿cómo se han obtenido estos números?

por *Andrea Morales**

La historia del acceso al conocimiento de la estimación de las distancias extremadamente grandes ha sido larga y fatigosa, fue un proceso escalonado, en el que cada hallazgo se apoyó sobre el peldaño anterior.

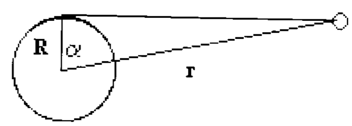
El primer paso fue la determinación del tamaño del globo terrestre.
Como vimos en el número anterior de Axioma, ya en tiempo de los griegos se dio una primera solución a este problema geodésico. Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra en unos 46 190 km, cifra que sobrepasa la medida actual en un 15%, pero esta estimación fue la más precisa que se hizo hasta los tiempos modernos.

El paso siguiente consistió en utilizar este dato del tamaño de nuestro globo para establecer bases de triangulación y poder determinar así la escala de distancias del sistema solar.

Actualmente, el empleo de satélites geodésicos permite la determinación de las medidas de la Tierra con un error inferior al metro.
Básicamente, la Geodesia se ha servido del aproximadamente mismo procedimiento, desde entonces, para establecer la forma del planeta.

Distancia a la Luna

Una pregunta que se habrán hecho los hombres en épocas pasadas es ¿cómo se puede calcular la distancia que nos separa de la Luna?
La respuesta la encontraron con un método similar al que empleó Eratóstenes.
Primero se debe averiguar, por ejemplo, en qué lugar de la Tierra la Luna está saliendo por el horizonte y en qué lugar se halla justo sobre nuestras cabezas.



El triángulo formado por el centro de la Tierra, el lugar donde la Luna es vista en el horizonte y la propia Luna, es rectángulo. Conocemos el radio de la Tierra y podemos estimar el ángulo α que es de 89,05°. Por simple trigonometría tenemos que:

$$r = \frac{R}{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)} = \frac{6300\ \text{km}}{\operatorname{sen}(0.95^\circ)} = 380000\ \text{km}$$

Es obvio que resulta más sencillo de medir si elegimos dos puntos arbitrarios sobre la Tierra a lo largo, aproximadamente, del mismo meridiano, y medimos la diferencia de ángulos que forma la Luna con respecto a la vertical. Como sabemos, el cálculo trigonométrico es apenas un poco más complejo y queda como ejercicio para los lectores.

Distancias en el sistema solar

El conocimiento de la rotación de la Tierra y los movimientos orbitales de ésta y de otro planeta como Venus, por ejemplo, permiten determinar la *paralaje solar*, que en función del valor del radio terrestre se traduce en distancia.
De esta manera, se puede obtener el valor en metros de la *unidad astronómica de distancia* (u.a.) que en sus orígenes representaba el semieje mayor de la órbita terrestre.
El valor encontrado es de unos 149 548 000 km; los métodos utilizados para su determinación conducen a valores algo diferentes y esto hace que para el resto de las distancias astronómicas sea conceptualmente más riguroso expresarlas en u.a., o en sus múltiplos, que en metros, ya que tales dis-

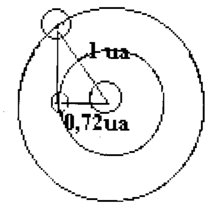
tancias se obtienen como valores relativos al tamaño de la órbita terrestre.

Recordemos las Leyes de Kepler del movimiento planetario. En particular, la tercera ley de Kepler establece la proporcionalidad entre el cuadrado de los períodos siderales de revolución y el cubo del semieje mayor de las órbitas.

La observación astronómica proporciona los períodos orbitales con toda precisión así como la forma de las órbitas, pero no proporciona distancias entre los distintos cuerpos del sistema sino que se obtiene información angular. De esta forma, resulta claro que la tercera Ley de Kepler nos dice que, si se determina una distancia individual en el sistema solar, quedan automáticamente establecidas todas las demás así como la masa solar. Este problema recibe, históricamente, el nombre de *la determinación de la paralaje solar* (ya que lo que se determina, en bastantes casos, es el ángulo con que se vería el radio terrestre desde el centro del Sol).
Se utlilizaron varias técnicas en la historia para acceder al valor de este parámetro; las más modernas incluyen el empleo del radar y de vehículos espaciales, pero para este problema se ha aprovechado cualquier posibilidad que brinda la Ciencia.
La cuestión que surge inmediatamente es, ¿cómo se han obtenido todos esos datos?
La respuesta la encontramos en una larga y meticulosa observación a lo largo de la historia.

En la época de Kepler sólo se conocían cinco planetas, aparte de la Tierra. Kepler introdujo los datos de estos cinco planetas en un sistema solar donde todo estaba en razón de la distancia Tierra-Sol que se toma como la unidad astronómica (*ua*).
Pero si queremos las dimensiones reales tendremos que determinar alguna distancia dentro del sistema solar.
En 1671 un grupo de astrónomos franceses había medido la distancia hasta Marte de manera razonablemente aproximada, utilizando observaciones simultáneas de la posición del planeta visto desde Cayenne (Guayana francesa) y desde París, estableciendo así una escala más precisa para el sistema solar.
Durante mucho tiempo las dimensiones más precisas del sistema solar se basaron en la distancia medida al asteroide Eros, que se acerca cada 44 años dentro de una distancia de unos 22,5 millones de kilómetros. Sin embargo, con el desarrollo de las técnicas de radar se pudo determinar la distancia directamente hasta Venus.

Por supuesto que las medidas de radar exigen el conocimiento de otra medida: la velocidad de las ondas de radio.



Representación de dos posiciones arbitrarias de Venus y la Tierra a lo largo de sus órbitas.

Conocida la distancia Tierra-Venus, en el caso particular en que Venus presenta una fase de media iluminación, se puede relacionar con la *ua* así:

$$d_{T-V}^{2} + (0{,}72\ ua)^2 = (1ua)^2$$

de donde se ha deducido que la *ua*, es decir la distancia Tierra-Sol, es de unos 149,6 millones de kilómetros.
Una vez medida esta distancia, podemos obtener datos tan sorprendentes como el tamaño o la masa solar. El sol presenta un diámetro aparente muy cercano al de la Luna, unos 30' de arco, o medio grado. Al igual que hicimos para la Luna:

radio solar = 149,6 tan[0,25º] = 0,6527 millones de km = 652 700 km.
El radio solar resulta un poco más de 100 veces el radio de nuestro planeta. Si tenemos en cuenta que el volumen es el cubo del radio, el Sol tiene un volumen de 100^3 o un millón de veces mayor que el de la Tierra, es decir, que necesitaríamos un millón de planetas como el nuestro para abarcar todo el volumen solar.

Distancias fuera del sistema solar

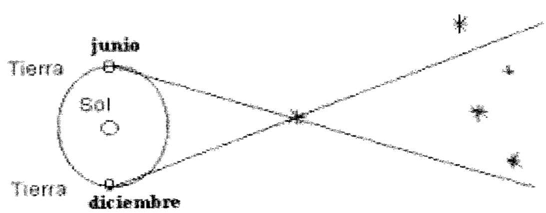
Los griegos asumieron que las estrellas se encontraban en una esfera alrededor de la Tierra con un radio muy grande. ¿Por qué sabían que la distancia debía ser grande? La respuesta es porque no se observa un fenómeno conocido como *paralaje estelar*.

Hagamos la siguiente experiencia: apuntemos con un dedo extendido a un objeto que se encuentre en el fondo de la habitación donde nos hallamos; luego, abramos y cerremos alternativamente cada ojo. Veremos que la posición del dedo parece cambiar con respecto al objeto de fondo. Esto es consecuencia de que los ojos se hallan separados y ven el objeto

desde ángulos diferentes. Por lo tanto, podremos estimar la distancia al dedo midiendo ese desplazamiento aparente o paralaje.
Si nuestros ojos estuvieran más separados, el dedo parecería desplazarse bastante más.
Los antiguos observadores del cielo nunca veían que las estrellas cambiaran de posición. Ese fue un buen argumento en contra del movimiento terrestre.
Pero al aceptar que la Tierra está en movimiento, sólo nos queda la alternativa de explicar la ausencia de paralaje diciendo que las estrellas deben estar muy lejos; pero ¿cuán lejos?

Paralaje Trigonométrica o anual

El método utilizado hasta entonces era el llamado paralaje, un efecto que no está causado por la estrella, sino por el movimiento orbital de la Tierra. Por obra de este efecto, una estrella relativamente cercana parece «desplazarse» sobre el fondo de estrellas más lejanas, en el transcurso de un año.
Este método es el pilar básico de la escala de distancias en astronomía.
Es un método puramente geométrico y prescinde de hipótesis sobre los objetos cuya distancia se desea medir; está basado en la medida de la variación del ángulo de visión de una estrella respecto a las estrellas de fondo, vista desde lados opuestos de la órbita terrestre.



El diagrama muestra a la Tierra en dos posiciones diferentes separadas por un período de seis meses, y el triángulo formado entre esas posiciones y una estrella cercana.

Medir la paralaje

Para medir la paralaje de una estrella es necesario observar la estrella en cuestión desde dos puntos lo más alejados posible entre sí. El mejor procedimiento es aprovechar la traslación de la Tierra alrededor del sol. En efecto, en seis meses, la Tierra recorre la mitad de su órbita, lo que permite obsevar el cielo desde dos puntos separados entre sí 300 millones de kilómetros (el diámetro de la órbita terrestre). Desde estas dos posiciones opuestas se mide la diferencia aparente de posición de la estrella observada respecto a las de las estrellas del fondo, mucho más lejanas. La mitad del ángulo medido es el de la paralaje, que corresponde al ángulo bajo el cual se ve, desde la estrella, el radio de la órbita terrestre.
Puesto que este ángulo es muy pequeño, el seno y la tangente del paralaje se aproximan muy bien por el ángulo de paralaje medido en radianes. Por tanto, la distancia a la estrella puede ser determinada como:

D[en cm] = distancia Tierra-Sol [en cm] / paralaje [en radianes]

Los astrónomos definen la distancia Tierra-Sol como de 1 *ua,* que equivale a 1 496 10^{13} cm y miden los ángulos en segundos de arco. Una estrella con una paralaje de 1" se encuentra a una distancia aproximadamente de 3,08567 10^{18} cm, unidad conocida como *parsec* (abreviado *pc).* Un parsec es la distancia a la que una estrella presentaría un paralaje de un segundo de arco, esto es (1/3600)°. De esta forma se obtiene:

1 pc = 206265 ua.

Una unidad más intuitiva es el tiempo que la luz tarda en recorrer una determinada distancia. La luz tiene una velocidad de unos 300 000 km/s, por lo que recorre la distancia Sol-Tierra en un poco más de 8 minutos. La luz recorre en 1 año unos 10 billones de km; a esa distancia se la conoce como un año-luz, y se abrevia *al.*

1 al = 63 271 ua y 1 pc = 3,26 al

Hoy en día podemos medir paralajes con una precisión de hasta unos 3 milésimos de segundo de arco (gracias a los datos del satélite Hipparcos de la Agencia Espacial Europea), lo que permite calcular la distancia hasta estrellas que no estén mucho más allá de unos 1 000 *al* o 500 pc.
La estrella más próxima a la Tierra que se ha medido es Alpha Centauri, la estrella más brillante de la constelación del Centauro, que presenta un paralaje de poco más de 3/4 de segundo de arco (0,76"), lo que se traduce en una distancia de unos 4,3 *al* o 1,3 pc.

Ninguna estrella conocida tiene un paralaje tan grande como 1".

Paralaje secular

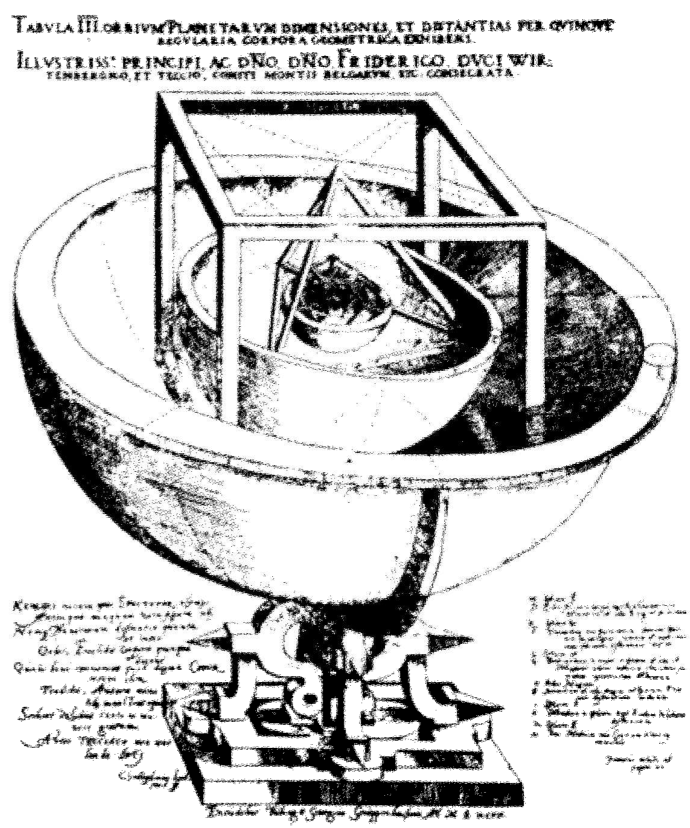
Pensemos que estamos viajando en un tren y atravesamos un bosque. Si conocemos la velocidad del tren podremos deducir la distancia de cada árbol sólo midiendo su velocidad angular respecto a nosotros, o bien observando la posición que ocupan en dos instantes diferentes de tiempo. Esto quiere decir que es lo mismo que emplear el recorrido del tren durante ese intervalo como base de triangulación.
Este es el principio de actuación del método de paralajes seculares: en los trigonométricos, la base de medición es la limitada órbita terrestre; en los seculares es una base de medida tanto más grande cuanto más tiempo se deja transcurrir. En 10 años, la base es unas 40 veces mayor que la que se obtiene con el movimiento de la Tierra alrededor del sol. Luego se aplica el método trigonométrico habitual y se calcula la distancia a la estrella deseada.

El Sol sería nuestro tren, pero las estrellas no son árboles sino las hojas que se mueven cada una con su velocidad; lo único que podríamos hacer es escoger un grupo amplio de hojas (estrellas) de movimiento aleatorio y afirmar así su velocidad en conjunto. Por lo tanto ese grupo de hojas se comportaría como un árbol.
Las paralajes estadísticos y seculares y el método del cúmulo móvil para la ampliación del catálogo de distancias estelares no son métodos tan directos ni tan seguros como las paralajes trigonométricas, pero son también fundamentales ya que no se basan en determinaciones anteriores de distancias ni en correlaciones encontradas entre otros tipos de magnitudes y las distancias (calibraciones) .

Bibliografía

- www.geocities.com/CapeCanaveral/
- www.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/astrofísica/apuntes
- www.pntic.mec.es/recursos
- www.thales.cica.es
- S.A., *El Universo*, enciclopedia de la Astronomía y el espacio, Barcelona, 1997.

* Profesora en Matemáticas y Astronomía egresada del I.S.P. «Joaquín V. González».



Comentarios de textos

por *Jorge Martínez* *

***El hombre que sólo amaba los números (la historia de Paul Erdös y la búsqueda de la verdad matemática)*, Paul Hoffman. Editorial Granica, 2000, 296 páginas.**

Paul Erdös nació en Budapest en 1913 y falleció en Varsovia en 1996. En 1930 se doctoró en Matemática en la Universidad Pázmány Peter y en ese mismo año viajó a Inglaterra a proseguir sus estudios en Manchester. Desde la primera guerra mundial fue muy cambiante la atmósfera política de Hungría . En 1938, Alemania toma el control en Austria y en Hungría se intensifican las restricciones de todo tipo a los ciudadanos de origen judío Es entonces que Erdös decide no regresar a su país natal y se traslada a los Estados Unidos, donde su genio encontraría campo propicio.

Volvería periódicamente a Hungría después de 1948, a visitar a su madre. Este hecho, en vista de la llamada guerra fría, le ocasionó serios problemas con la autoridades de Estados Unidos. Erdos abandonó Estados Unidos en 1954, y dio comienzo a un periplo docente por diversos países (Israel, Holanda, etc), para volver a Estados Unidos en 1963, donde se afincó definitivamente.

Como matemático, Erdös fue esencialmente un resolvedor y planteador de problemas más que un teórico de nota, pero, convencido del valor estético de la Matemática, su mérito más grande es el de haber resuelto estos problemas en forma elegante y sencilla.

Ya a los 18 años, había dado una prueba "simple" de la conjetura de Bertrand de 1845 ("hay al menos un número primo entre n y 2n para n mayor o igual a 2") superando la dificil prueba del gran Chebyshev (1850). Si bien Erdös fue un matemático completo sus numerosas contribuciones a la Matemática del siglo XX deben buscarse en Combinatoria, teoría de grafos y teoría de números.

Uno de sus logros más importantes fue la prueba elegante que dió del teorema del numero primo junto con Atle Selberg en 1949, aventajando a la prueba de Hadamard (1896) que utilizaba números complejos.

Recoremos que este teorema afirma que: "el número de primos menores o iguales que n es aproximadamente n/ln n para n grande) y la prueba de Erdos-Selberg utiliza conceptos elementales del análisis real.

Paul Hoffmann es editor de la Encyclopaedia Britannica y conoció a Erdös en 1986. Hasta su muerte, lo entrevistó a menudo. En 1987, Hoffmann recibió un premio por un artículo sobre Erdös y la Matemática, y al morir Erdös en 1996 decide ser uno de sus biógrafos.

El resultado ha sido este libro, suerte de biografía diacrónica , que sin rehuir el aspecto formal descriptivo de toda biografía, ilustra notablemente sobre la temática abordada por Erdös. En estas páginas desfilan los notables matemáticos del siglo de los cuales Erdös fue amigo o interactuó con ellos.

La sorprendente devoción de Erdös por la Matemática es minuciosamente narrada y es la que da origen al nombre del libro. La amistad del húngaro con Stanilaw Ulam, y con Robert Graham y los problemas que se planteaban mutuamente es el pretexto para que Hoffmann se interne en la cosmovisión aritmética de Erdös.

Los temas que desfilan en este documentado libro son muy variados: desde las fracciones egipcias (Tesis de Graham) hasta el teorema de Fermat. En todos ellos Erdös tuvo algo que decir y lo dijo muy clara y sencillamente, como era su costumbre.

Excéntrico e informal. este prolífico matemático (se le conocen cerca de 700 trabajos) tuvo una vida azarosa pero frugal, dedicada por completo a la Matemática, hecho este que Hoffmann pone de relieve en cada página de esta interesante obra.

"Yo hablaba a menudo con Gödel -recordaba Erdös-. Por cierto era un intelecto notable.....Yo le dije: Usted se hizo matemático, para que la gente lo estudie a usted, no para estudiar usted a Leibniz".

*Profesor de Matemática, egresado del I.E.S. N°2 "Mariano Acosta"

Problemas y juegos de ingenio

Los primitivos matices de la resolución han madurado tras los pálidos toques del pensamiento y las primeras respuestas han ido apareciendo. Como en cada número de Axioma, ofrecemos nuevas situaciones problemáticas y publicamos las soluciones de nuestros lectores. Las mismas son recibidas en nuestra dirección postal: Dorrego 2646 – 9º E – C.P. 1425 – Ciudad de Buenos Aires – Argentina o por e-mail a: axioma@nalejandria.com

Respuestas a problemas anteriores (los problemas no resueltos aún, siguen pendientes y ofreceremos sus soluciones a partir de Axioma 16):

Problema 5 aparecido en Axioma Nº 14 - Colaboración del Profesor Alfredo Cóccola

Encuentre todos los valores reales de a, para cada uno de los cuales
$f(x)= a\,\mathrm{sen}(4x)-10x+\mathrm{sen}(7x)+4ax$ decrece en todos los puntos y no tiene puntos críticos.

Respuesta dada por Mariana Marchisio

$f(x) = a\,\mathrm{sen}(4x) - 10x + \mathrm{sen}(7x) + 4ax$
Para que sea decreciente en todos sus puntos y no tenga puntos críticos, su derivada tiene que ser menor que cero.
$f'(x) = 4a\cos(4x) + 7\cos(7x) - 10 + 4a$
Si el mayor valor de la derivada es menor que cero, toda la derivada es menor.
$4a\cos(4x) + 7\cos(7x) - 10 + 4a \leq 4a + 7 - 10 + 4a$,
porque el primer término puede tomar como valor máximo 4a y el segundo 7 (amplitud).
Entonces $4a + 7 - 10 + 4a < 0$.

Despejando queda $a < \frac{3}{8}$.

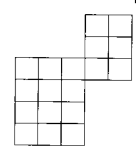
La respuesta es: todos los reales menores que $\frac{3}{8}$

Problemas propuestos

1. *Fuente: Sigbjorn Vik, estudiante de Macalester*
Si un polígono de 10 lados no es convexo puede ocurrir que algunos de sus lados se intersequen. Consideremos los casos en los que cada punto de intersección puede ser una intersección de dos lados, pero no de tres o más. Encuentre el polígono de 10 lados con mayor número de puntos de intersección.

2. *Fuente: International Math Talent Search Round 34*
Bernardo y Josefina viven en las esquinas opuestas de un pueblo cuyo plano aparece ilustrado. Cada uno parte caminando, al mismo tiempo y a la misma velocidad, hacia la casa del otro eligiendo al azar uno de los varios caminos más cortos (de once cuadras). ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren en el camino?

Bernardo



Josefina

3. *Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro*
Demostrar o refutar (mediante un contraejemplo) la siguiente afirmación: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ ($L \in \mathbb{R}$) entonces $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

4. *Fuente: St. Olaf College. Problem of the Week for February 27, 2001*
Damos dos reglas para construir una secuencia infinita de dígitos "1" y "2":
i) La secuencia se construye encadenando piezas de la forma "12" y "112"
ii) Si se reemplaza cada pieza "12" por un "1" y cada pieza "112" con un "2" se obtiene nuevamente la secuencia original
a) Demostrar que las reglas i) y ii) determinan unívocamente la secuencia
b) Hallar el dígito que ocupa el lugar número 1000 en la secuencia.

5. *Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro*
Demuestre que el número de oro φ puede escribirse como $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, es decir, demuestre que $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correo de Lectores

Queridos amigos de Axioma:

En primer lugar quiero felicitarlos y desearles mucha suerte en esta nueva etapa.

Les envío una demostración del criterio de divisibilidad por 7 que pedía la profesora Mercedes Ocampo.

Sea n un entero positivo cualquiera. Queremos probar que "si el número que resulta de restar a n el doble de su última cifra es múltiplo de 7, entonces 7 divide a n".

Sea a la última cifra de n. Por hipótesis, 7 divide $\left[\frac{n}{10}\right] - 2a$, donde [x] denota la parte entera de x. (Si a un número positivo lo dividimos por 10 y después le calculamos la parte entera, lo que hicimos fue quitarle la última cifra.

Ejemplo: $\left[\frac{1593}{10}\right] = [154{,}3] = 154$).

Es decir, por hipótesis, $\left[\frac{n}{10}\right] - 2a \cong 0 \pmod 7$

$10\left[\frac{n}{10}\right] - 20a \cong 0 \pmod 7$

Pero $10\left[\frac{n}{10}\right]$ es igual a $(n - a)$. Entonces

$n - a - 20a \cong 0 \pmod 7$

$n \cong 21a \pmod 7$ y $21a \cong 0 \pmod 7$

Luego, $n \cong 0 \pmod 7 \Rightarrow 7/n$

FIN

Gustavo Krimker
Profesor de Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈◈

El Dr. Enzo R. Gentile (1928-1991), uno de nuestros educadores en Matemática más notables, que enseñó Álgebra y Teoría de Números a varias generaciones de matemáticos a lo largo y a lo ancho del país, sintetizó sabiamente su exitosa experiencia:

«Teoría, ejemplos y resolución de problemas, forman el triángulo de coherencia de toda enseñanza eficaz".

Aχioma

La Revista de los profesores y estudiantes de Matemática

Adelantos Aχioma 16

Apuntes sobre... Lógica (1° parte)

Historia: Ecuaciones cúbica y cuártica (Segunda parte)

Experiencias en el aula: Papiroflexia y Geometría

Comentarios de Textos

Problemas y Juegos de Ingenio: Soluciones

Fue una gran satisfacción publicar en Axioma 14 el material que nuestros lectores nos hicieron llegar. Renovamos la invitación para que envíen sus comentarios, sus críticas; para que discutan los contenidos de los artículos publicados o envíen los suyos propios. En pocas palabras, para que la revista sea también un espacio donde el diálogo aparezca como otro de los tantos caminos que llevan al conocimiento.