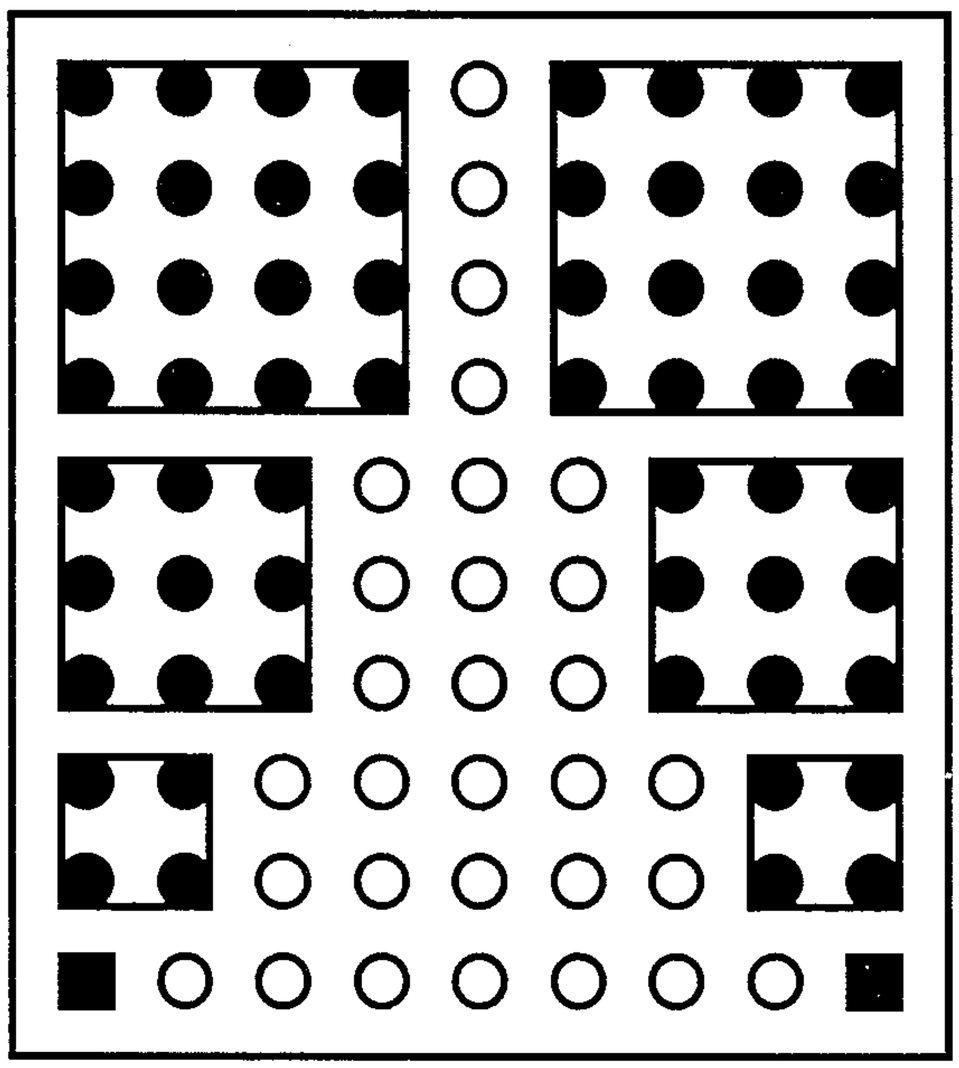
Aχioma

La revista de los estudiantes y profesores de matemática



Uno, dos, tres,... ¿qué sigue?
(página 14)

Marzo / Abril de 1998 **Año 2 – Nº 10**

Aχioma Nº 10

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Directora
Gisela Serrano de Piñeiro

Propietarios
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro
Jorge Martínez

Colaboraron en este número
Yanina Martínez

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Correo electrónico
pineiro@datamarkets.com.ar

La responsabilidad sobre las opiniones vertidas en notas firmadas es exclusiva de sus autores. Se autoriza la reproducción parcial o total de las notas con la condición de citar la fuente.
Registro de la Propiedad Intelectual Nº 867689.

Suscripción por 5 números (incluye gastos de envío): $11.-

Ejemplar suelto: $ 3.-

Ejemplar atrasado: $ 3.-

Editorial

Renovados por el descanso estival, iniciamos un nuevo año lectivo.

También Aχioma se ha renovado, ya que contamos ahora con una dirección de correo electrónico, un sitio dentro de una página WEB y una lista, PROMAT, la que esperamos se transforme en un foro de discusión de los temas tratados en la revista.

Esta sensación de crecimiento, abonada por la llegada de pedidos de suscripción de lugares tan diversos como España, República Dominicana, Italia, Cuba, Brasil, Uruguay, resulta contradictoria; choca con nuestra dura realidad. No podemos acercarnos a los miles de docentes y estudiantes de nuestro país. ¿Debido a qué? Todavía no tenemos una respuesta clara a este cuestionamiento. Descartamos que el costo de la revista (que apenas cubre la impresión) sea un motivo valedero. Aún así, seguimos haciendo planes con la esperanza de poderlos concretar.

En nuestro próximo número informaremos el cronograma de actividades para este año. Esperamos que nos acompañen.

Sumario

Apuntes sobre..	2	**Correo de lectores**	22
Historia	6	**En el aula**	23
Curiosidades	14	**Problemas**	30
Seminario en Bariloche	18	**Información**	32
Didáctica	20		

Marzo / Abril de 1998

Año 2 - Nº 10

Apuntes sobre...

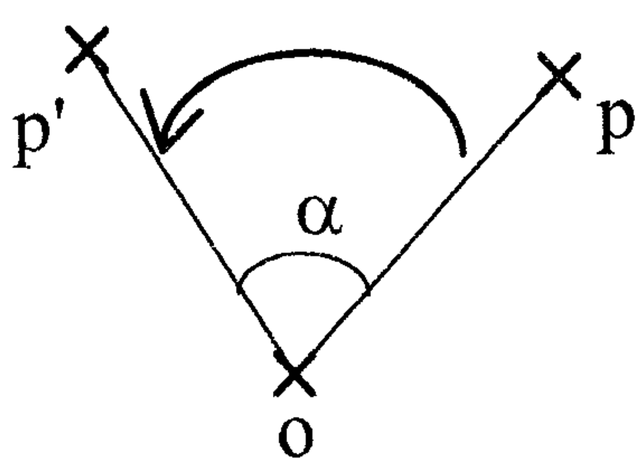
Matrices y Movimientos (Primera parte).

Los "movimientos rígidos", rotaciones, simetrías y traslaciones, son estudiados en el colegio secundario sin un claro motivo para ello. En esta sección, en tres notas, comentaremos algunos hechos destacables acerca de ellos y trataremos de ilustrar la importancia de su estudio.

Los relojes analógicos (actualmente en franco retroceso frente a los relojes digitales) nos dan una clara y cotidiana muestra del movimiento de *rotación*. En cualquier período de 15 minutos, por ejemplo, el minutero del reloj efectúa una rotación de amplitud 90° (o $\pi/2$, si hablamos en radianes) en sentido *negativo*.

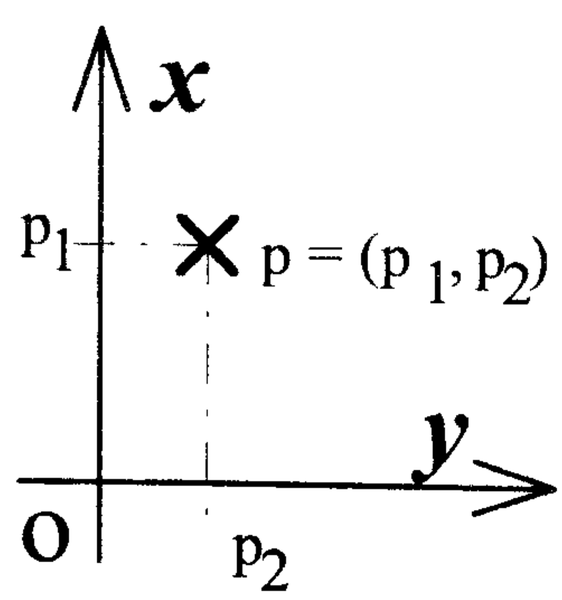
En general, una rotación con centro **o**, en la que se ha fijado una amplitud α y un sentido de giro, es una función que a todo punto p del plano le hace corresponder un punto p', de modo que:

$$\overline{op} = \overline{op'} \text{ y } \widehat{pop'} = \alpha$$



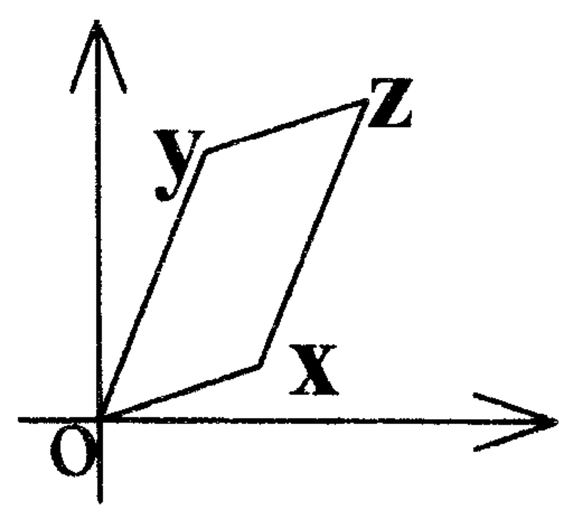
Para indicar la rotación de centro **o** y, por ejemplo, una amplitud de 30° en el sentido contrario a las agujas del reloj, escribimos **R**(**o**,30°). Si el sentido es el de las agujas del reloj, escribimos **R**(**o**,-30°).

Nuestro primer objetivo es estudiar con más detenimiento este movimiento de rotación. Resulta entonces indispensable establecer una nomenclatura para los puntos del plano. Fijemos para ello un par de ejes cartesianos, ***x***, ***y***, a partir de los cuales cada punto quedará caracterizado por un *par ordenado* de números reales.



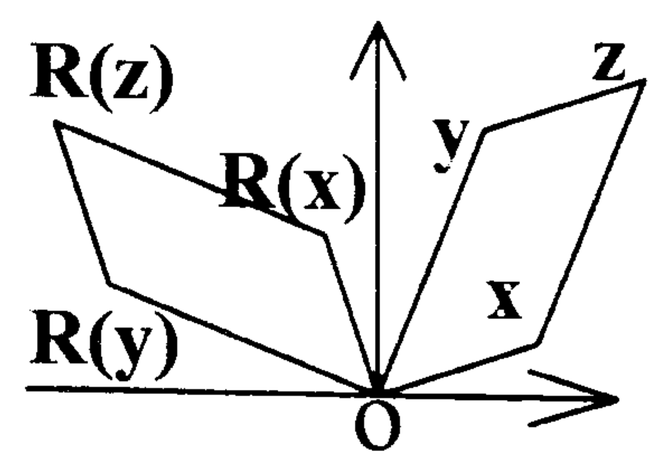
Por cuestiones de simplicidad, en todos los ejemplos de rotaciones que veamos en esta primera nota supondremos que el centro de rotación **o** es el punto (0,0).

Consideremos dos puntos **x** e **y** del plano con coordenadas **x**=(x_1,x_2) e **y**=(y_1,y_2). Llamemos **z** a la suma de ambos, **z**=**x**+**y**=(x_1+y_1, x_2+y_2).



Como es bien sabido, gráficamente este punto **z** se obtiene mediante la *regla del paralelogramo*, según la cual **z** com-pleta el paralelogramo cuyos otros tres vértices son **x**, **y**, **o**.

Efectuemos una rotación con una cierta amplitud, y un determinado sentido de giro. Llamaremos **R**(**x**) a la imagen del punto **x** por esta rotación. Asimismo llamaremos **R**(**y**) y **R**(**z**) a los transformados de **y**, **z**, respectivamente. Observemos que **R**(**o**) = **o**.



Como el paralelogramo **xyoz** rota rígidamente, entonces los puntos **R**(**x**), **R**(**y**), **R**(**z**) y **o** son, también ellos, vértices de un paralelogramo. Por lo tanto:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}) = \mathbf{R}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{y})$$

Puesto que **z** = **x** + **y**, podemos decir que hemos probado gráficamente que en toda rotación **R** con centro **o**=(0,0) se verifica que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{R}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{y}) \quad (1)$$

Dejamos como ejercicio para el lector la tarea de dar una justificación gráfica para la siguiente propiedad: si **R** es una rotación con centro

o=(0,0), **x** es un punto del plano y k es un número real cualquiera entonces:

$$\mathbf{R}(k.\mathbf{x}) = k\mathbf{R}(\mathbf{x}) \qquad (2)$$

Cualquier función del plano en sí mismo que verifique simultáneamente las propiedades (1) y (2) se denomina una transformación lineal.
La importancia de estas dos propiedades quedará manifiesta en la observación siguiente. Sea $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ un punto genérico del plano, entonces es claro que:

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

En virtud de (1) y (2) se tiene que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{R}(1,0) + x_2\mathbf{R}(0,1)$$

Esta expresión nos dice que para calcular las coordenadas de **R(x)** es suficiente con conocer únicamente a **R**(1,0) y **R**(0,1) (y al propio **x**, por supuesto). Es decir, las imágenes del (1,0) y del (0,1) determinan completamente cuál es la imagen de cualquier otro punto **x** del plano.
Digamos que **R**(1,0) tenga coordenadas (a,b). Análogamente, supongamos que **R**(0,1) tiene coordenadas (c,d). Luego:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = x_1(a,b) + x_2(c,d)$$
$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = (ax_1+cx_2,\ bx_1+dx_2) \qquad (3)$$

Consideremos la *matriz* A de dos filas y dos columnas, definida del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

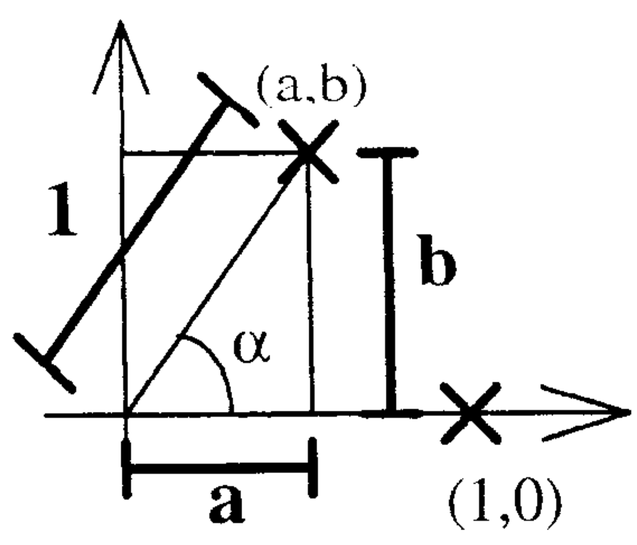
Si recordamos el modo de multiplicar matrices, notaremos que:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Por un abuso de notación, admitamos que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es otra forma de escribir el punto (x_1,x_2). En consecuencia, la igualdades (3) y (4) nos dicen que si $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ entonces:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La matriz A se denomina la *matriz de la transformación lineal* o, en este caso, la *matriz de la rotación*. Sea α el ángulo que corresponde a la misma, siendo α positivo o negativo dependiendo del sentido de giro. ¿Cómo podemos calcular los coeficientes a, b, c, d?
Recordemos que (a,b) se obtiene rotando el punto (1,0).



El gráfico precedente demuestra que **a = cos(α)** y que **b = sen(α)**. En el dibujo se ha supuesto que α es un ángulo positivo y menor que un recto. Sin embargo, el razonamiento es válido para **cualquier** valor de α. Entonces:

$$a = \cos(\alpha) \qquad b = \operatorname{sen}(\alpha)$$

Dejamos como tarea para el lector demostrar que:

$$c = -\operatorname{sen}(\alpha) \qquad d = \cos(\alpha)$$

Por lo tanto, la matriz de la rotación de ángulo α (donde el signo de α está adaptado al sentido de giro) está dado por:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Como muestra, si $\alpha = -90^\circ$ (o $\alpha = -\pi/2$), como en el ejemplo inicial del minutero del reloj, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dejemos aquí un ejercicio para el lector: calcule las coordenadas de todos los vértices del hexágono regular cuyo centro es el punto (0,0) y uno de cuyos vértices es el punto (1,1).

Pasemos ahora a considerar dos rotaciones, una de ellas de ángulo α y la otra de ángulo β, $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{o},\alpha)$, $\mathbf{R'}=\mathbf{R}(\mathbf{o},\beta)$, donde α y β son positivos o negativos dependiendo de los respectivos sentidos de giro.
Llamemos **R"** a la *composición* de ambas rotaciones:

$$\mathbf{R''} = \mathbf{R} \circ \mathbf{R'}$$
$$\mathbf{R''}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{R'}(\mathbf{x}))$$

Para aplicar la función **R''** a un punto **x** del plano obtenemos en primer lugar el vector **R'(x)** y a éste le aplicamos luego la función **R**. Un poco de reflexión convencerá al lector de que la función **R''** no es otra que la rotación de centro **o** y ángulo $\alpha + \beta$.

$$\mathbf{R''} = \mathbf{R}(\mathbf{o},\alpha + \beta)$$

Cada una de estas tres rotaciones tendrá, desde luego, su correspondiente matriz. Sean A,B,C las matrices de **R**, **R'** y **R''** respectivamente. Consideremos además un punto arbitrario del plano, $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$. Sabemos que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R'}(\mathbf{x}) = B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R''}(\mathbf{x}) = C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Llamemos **y** al vector **R'(x)**, cuyas coordenadas serán $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$. Entonces:

$$B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \mathbf{R''}(\mathbf{x}) &= \mathbf{R}(\mathbf{R'}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{y}) \\ &= A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= AB\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquiera sea **x**, se verifica la siguiente igualdad:

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Donde AB indica el producto de la matriz A por la matriz B. Dejamos como tarea para el lector la demostración de que si la igualdad (5) es válida para todo punto **x** del plano entonces:

$$C = AB \qquad (6)$$

Tomando en cuenta el ángulo que corresponde a cada una de las rotaciones representadas por estas matrices, podemos decir que:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Mientras que C es la matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\mathrm{sen}(\alpha+\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Al efectuar el producto de A por B, el coeficiente superior izquierdo de la matriz producto se calcula de la siguiente manera:

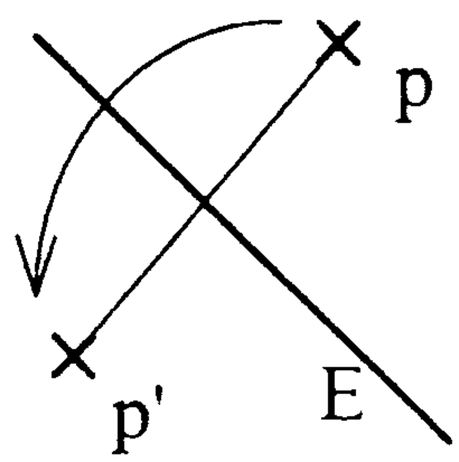
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$$

Dado que AB = C, el cálculo precedente debe ser igual al coeficiente superior izquierdo de la matriz C. Por lo tanto:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta).$$

Por lo tanto, mediante razonamientos algebraicos y geométricos, hemos probado la fórmula para el coseno de la suma de dos ángulos.
Del mismo modo, calculando el coeficiente inferior izquierdo del producto AB y comparándolo con el coeficiente análogo de la matriz C, el lector no tendrá mayores dificultades en demostrar la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos.

El segundo movimiento que vamos a estudiar es la *simetría axial*. Para hallar el simétrico o imagen del punto p del plano respecto de la recta E, trazamos la perpendicular a E por p y luego determinamos p', de modo tal que p y p' se encuentren a la misma distancia de E.



Al estudiar la situación en el contexto de un par de ejes cartesianos. supondremos que la recta E pasa por el origen de coordenadas.
Concretamente la recta E tendrá una ecuación del tipo $x_2=mx_1$, donde m es algún número real. A la simetría axial de eje E la indicaremos como $\mathbf{S_E}$.
Un razonamiento geométrico completamente igual al que hemos efectuado para las rotaciones nos permitiría deducir que, si **x** e **y** son dos pun-

tos cualesquiera del plano y k es un número real cualquiera, entonces:

$$\mathbf{S_E(x+y) = S_E(x) + S_E(y)}$$
$$\mathbf{S_E(kx) = k\, S_E(x)}$$

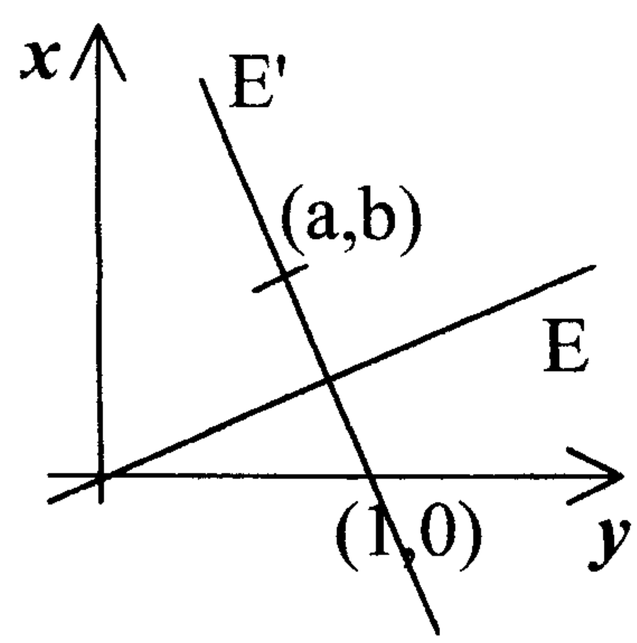
Es decir, la simetría axial de eje E (si E pasa por el origen de coordenadas) es también una transformación lineal.
Por lo tanto, para cada recta E con ecuación $x_2=mx_1$, existe una matriz A tal que:

$$\mathbf{S_E(x)} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Donde $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ es un punto genérico del plano. La matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Donde, análogamente a lo visto en el caso de las rotaciones, se tiene que $(a,b)=\mathbf{S_E}(1,0)$ y $(c,d)=\mathbf{S_E}(0,1)$.
Atacaremos a continuación el problema de calcular estos coeficientes.



En el gráfico precedente E' es la recta perpendicular a E que pasa por el punto (1,0). Dado que E tiene ecuación $x_2=mx_1$, y suponiendo que $m\neq 0$, el lector no tendrá dificultades en comprobar que la ecuación de E' es:

$$x_2 = -\frac{1}{m}x_1 + \frac{1}{m}$$

Llamemos (a',b') al punto de intersección de las rectas E y E'. Para calcular las coordenadas de este punto de intersección es necesario resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Dejamos a cargo del lector la verificación de que las soluciones que se obtienen son las siguientes:

$$a' = \frac{1}{m^2+1} \qquad b' = \frac{m}{m^2+1}$$

Debemos observar ahora que (a,b), (1,0) y (a',b') son tres puntos alineados y que éste último equidista de los otros dos. En consecuencia (a',b') es el punto medio del segmento que determinan (a,b) y (1,0) y por lo tanto se tiene que:

$$a' = \frac{a+1}{2} \qquad b' = \frac{b}{2}$$

De estas igualdades deducimos inmediatamente que:

$$a = \frac{2}{m^2+1} - 1$$
$$b = \frac{2m}{m^2+1}$$

Para calcular las coordenadas del punto (c,d) se procede de manera similar, pero comenzando con el punto (0,1) en lugar del (1,0). La realización de estos cálculos queda a cargo del lector, quien no tendrá dificultades en obtener que:

$$c = \frac{2m}{m^2+1}$$
$$d = \frac{2m^2}{m^2+1} - 1$$

Por lo tanto la simetría axial de eje E tiene la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{M} - 1 & \frac{2m}{M} \\ \frac{2m}{M} & \frac{2m^2}{M} - 1 \end{pmatrix}$$

donde $M = m^2 + 1$.
Resulta curioso e interesante observar que, aunque en nuestros cálculos hemos supuesto que $m\neq 0$, la expresión precedente para la matriz de $\mathbf{S_E}$ es válida igualmente cuando m=0. La verificación de este hecho es la última tarea que les dejaremos hoy a nuestros lectores.

Gustavo Piñeiro*

* Licenciado en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* AMENEDO, Mariana; CARRANZA, Susana; DIÑEIRO, María Teresa; GRAU, Jorge; LATORRE, María Laura - *Matemática 2* - Ed. SANTILLANA.

Problemas clásicos (última parte)

Después de siglos de investigación y de vanos esfuerzos por resolverlos, surgió la sospecha de que los problemas clásicos griegos podrían llegar a ser, tal vez, irresolubles. Fue entonces que los matemáticos se propusieron investigar la cuestión de cómo sería posible probar que un problema no puede resolverse.

Introducción

En los primeros años del siglo XIX, el matemático italiano *Ruffini* (1765-1822) y el prodigio noruego *N.H.Abel* (1802-1829) concibieron la idea revolucionaria de *probar la imposibilidad* de resolver la ecuación algebraica general de grado n por medio de radicales (hasta las de cuarto grado sí pueden ser resueltas por radicales, es decir, que las raíces de la ecuación se obtienen a partir de operaciones racionales -adición, sustracción, multiplicación o división- o de las extracciones de raíces cuadradas, cúbicas o cuartas). Es decir, la pregunta era si podía hallarse la solución a aquellas ecuaciones, utilizando únicamente operaciones racionales y radicales. Responder a esta cuestión llevó al gran desarrollo del álgebra moderna y de la teoría de grupos, iniciado por Ruffini, Abel y *Galois* (1811-1832). [Puede verse un artículo sobre la vida de este último matemático, como así también la demostración de su teorema más importante, en Axioma N°6, págs.13-23]

En cuanto a los problemas clásicos, la cuestión radicará, en principio, no en ver la imposibilidad de la construcción, sino en determinar qué características deben reunir para ser *construibles con regla y compás* (a partir de aquí, cuando hablemos de problemas construibles, nos estaremos refiriendo a problemas construibles con regla y compás). La clave para encontrar aquellas *características,* reside en trasladar el problema geométrico al lenguaje algebraico.

Debemos antes recalcar que aquí no se trata de dibujar figuras con cierto grado de exactitud, sino el de demostrar tal imposibilidad teóricamente. No entender esta cuestión teórica de las construcciones ha engendrado hasta hoy innumerables trisectores de ángulos y cuadradores de círculos.

Antes de ir a cada problema específico debemos hacer unas cuantas consideraciones preliminares.

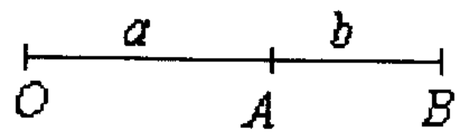
Construcciones básicas y concepto de cuerpo

En todo problema de construcción geométrica se tiene cierto conjunto de segmentos rectilíneos $a,b,c,\ldots$ y se pide construir uno o más segmentos $x,y,z,\ldots$. Los segmentos requeridos pueden ser lados de un triángulo a construir, radios de círculos, coordenadas cartesianas de ciertos puntos.

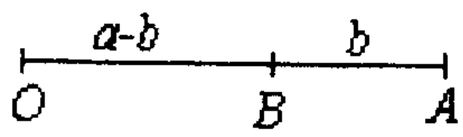
Supongamos que sólo se pide construir un segmento x. Se trata entonces de hallar una relación (ecuación) entre la cantidad pedida x y las dadas: a, b, $c,\ldots$ Después, hay que hallar x resolviendo esa ecuación, y por último, determinar si tal solución, obtenida mediante procesos algebraicos, es construible con regla y compás.

Algunas de las operaciones algebraicas más sencillas corresponden a construcciones geométricas elementales. Dados dos segmentos a y b (medidos con un segmento unidad dado), es fácil construir $a+b$, $a-b$, ra (siendo r cualquier número racional), a/b y ab.

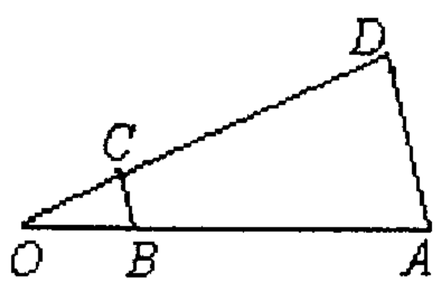
Para construir a+b trazamos una recta y llevamos con el compás las distancias $OA=a$ y $AB=b$; entonces $OB=a+b$



Para a-b, llevamos $OA=a$ y $AB=b$ en sentido opuesto a OA; entonces $OB=a-b$.



Construyamos ahora ra, con r racional. Supongamos que queremos construir $3a$, esto es, simplemente, $a+a+a$. En forma análoga, construimos pa, siendo p cualquier entero. Supongamos ahora que queremos construir $a/3$. Llevamos $OA=a$ sobre una recta y dibujamos una segunda recta por O, como muestra la figura que sigue. Sobre esta última recta llevamos un segmento arbitrario $OC=c$ y construimos $OD=3c$. Unimos A con D y trazamos desde C una recta paralela a AD, que corta a OA en B.

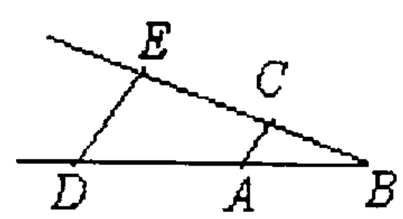


Como $\frac{OD}{OC}=\frac{OA}{OB}$, se tiene entonces:

$$\frac{3c}{c}=\frac{a}{OB}\Rightarrow OB=\frac{a}{3}$$

De igual modo es posible construir a/q, siendo q cualquier entero distinto de cero. Puede entonces construirse ra, siendo r un racional de la forma p/q, con p y q enteros, q distinto de cero.

Podemos recurrir ahora, para construir ab y a/b, y como simple curiosidad, a René Descartes (1596-1650), quien en 1637 publica su famoso tratado *Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias*. En 1673 se publica un apéndice del Discurso: *La Géometrie*. El segundo capítulo de este apéndice se titula: *Cómo pueden efectuarse geométricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas*, y en él el matemático francés explica: *Sea por ejemplo, AB la unidad, y que sea preciso multiplicar BD por BC. Tan sólo tengo que unir los puntos A y C, y trazar luego DE paralelamente a CA, siendo BE el producto de esta multiplicación.*



O bien-continúa Descartes-, *si hay que dividir BE por BD, uno los puntos E y D y trazo AC paralelamente a DE, siendo BC el producto de esta división*.[Puede consultarse en SIGMA *El mundo de las matemáticas*, de James R. Newman, págs.162-178, las ocho primeras páginas, en francés y en español, de la primera edición de *La géometrie*.]

Como acaba de verse, a partir de segmentos dados, medidos por números reales $a, b, c,...$, podemos, por sucesivas aplicaciones de estas construcciones geométricas, construir cualquier cantidad que sea expresable mediante $a, b, c,...$ en forma racional, es decir, por medio de la aplicación reiterada de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones. El conjunto de todas las cantidades que pueden 6[1]obtenerse en esta forma, a partir de $a, b, c,...$, es un *cuerpo numérico*. Se dice en este caso, que el cuerpo está *generado* por los números dados $a, b, c,..$ Demos pues, la definición formal de este concepto.

Cuerpo numérico: Es un conjunto de números tal que la suma, la diferencia, el producto y el cociente (excluída, por supuesto, la división por cero) de dos o más números cualesquiera del conjunto pertenece, a su vez, al conjunto.

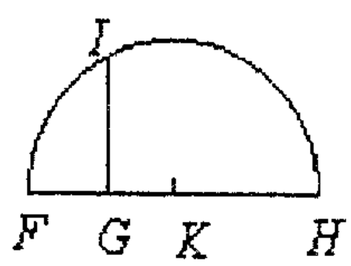
Los números racionales, los números reales y los números complejos son ejemplos de cuerpos. No lo son, en cambio, el conjunto de los enteros, el de los reales positivos ni el de los imaginarios puros. [¿y el de los irracionales?]

Supongamos ahora, sólo por sencillez, que se nos da únicamente un segmento inicial, cuya longitud es uno. Podemos construir, con regla y compás, en la forma que se vio anteriormente, todos los números que pueden deducirse de la unidad mediante las sucesivas operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Pero todos estos números constituyen, ni más ni

menos, que el conjunto de los números racionales, es decir, todos aquellos números de la forma p/q, con p y q enteros, con $q \neq 0$.

Es posible demostrar que todo cuerpo contiene al cuerpo de los racionales. Esto es en efecto así, observando que, dado un cuerpo F y un elemento $a \in F$, con $a \neq 0$, el número $a/a=1$ pertenece a F (por ser F un cuerpo); y a partir de 1 se obtienen, como ya se mencionó, todos los números racionales.

Veamos ahora una nueva construcción. Dado un segmento k, puede también construirse, utilizando sólo la regla y el compás, el segmento $\sqrt{k}$. Recurramos para ello nuevamente a Descartes: *O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, le añado FG (*que es la unidad*) a continuación y, dividiendo FH en dos partes iguales, con centro en K* (que es el punto medio*), trazo el círculo FIH y luego la perpendicular por G hasta I, siendo GI la raíz buscada.*



Consideraremos ahora ciertos números que posteriormente nos serán de gran utilidad.

Sea k un número racional tal que $\sqrt{k}$ no lo sea. Ya teniendo construido $\sqrt{k}$, podemos construir, con regla y compás, todos los números de la forma $p+q\sqrt{k}$ con p y q racionales. No es difícil demostrar que estos números reales forman un cuerpo numérico. Deberíamos demostrar para ello, que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números cualesquiera de dicha forma, es un número de la misma forma, tarea que encomendamos al lector. Puede probarse que si $x=a+b\sqrt{2}$, en donde a y b son racionales, entonces x^m, en donde $m \in N$, puede expresarse en la forma $p+q\sqrt{2}$, donde p y q son racionales. (Extraído de G. H. Hardy: *"Curso de Análisis Matemático"*, Ed. Nigar, 1962, pág.20*)*

Hemos de notar que el cuerpo que forman estos números $p+q\sqrt{k}$ incluye al cuerpo de los racionales (sólo bastaría tomar $q=0$). Sin embargo, es menos amplio que el de los números reales.

Llamaremos al cuerpo de los racionales F_0 y al cuerpo de los números $p+q\sqrt{k}$, p y q racionales, F_1.

Construcciones con regla y compás

Cada construcción con regla y compás consiste en una sucesión de operaciones de las enumeradas a continuación: 1) unir dos puntos por una recta; 2) hallar el punto de intersección de dos rectas; 3) trazar una circunferencia de radio y centro dados; 4) hallar los puntos de intersección de una circunferencia con otra circunferencia o con una recta.

Considerando puntos como pares ordenados, con coordenadas en un cuerpo arbitrario F, vamos a ver que si unimos dos puntos por una recta, ésta tiene coeficientes en F; y si intersecamos dos rectas con coeficientes en F, su punto de intersección tiene coordenadas en F. Veamos esto.

Sean (a_1,b_1) y (a_2,b_2) las coordenadas de dos puntos de F, en donde a_1, a_2, b_1, b_2, pertenecen a F. La ecuación de la recta que une dichos puntos es:

$$(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

Sus coeficientes son expresiones racionales formadas por números de F y, dado que éste es un cuerpo, también pertenecen a F.

Por otra parte, si se tienen dos rectas: $\alpha x+\beta y-\gamma=0$ y $\alpha' x+\beta' y-\gamma'=0$, con coeficientes de F, las coordenadas de su punto de intersección, resolviendo el sistema, son:

$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},$$

$$y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$ Pero x e y son entonces números de F, con lo cual, con el uso de la regla sola (que permite resolver las operaciones 1) y 2) mencionadas más arriba), no saldremos del cuerpo F.

Por ejemplo, las rectas $x+\sqrt{2}y-1=0$ y $2x-y+\sqrt{2}=0$ tienen coeficientes de la forma $a+b\sqrt{2}$, a y b racionales. Hallando la intersección de ambas, resultan las siguientes coordenadas: $x=\frac{1}{7}-\frac{5}{14}\sqrt{2}$ e

$y = \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{2}$, que son de la forma $a + b\sqrt{2}$.

Otro ejemplo podría ser hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1;\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2};1-\sqrt{2})$. Dejamos al lector la tarea de verificar que los coeficientes de tal ecuación son de la forma $a + b\sqrt{2}$, a y b racionales.

Pero qué sucederá si además de la *regla* utilizamos el *compás*. Elijamos un elemento k perteneciente a F, y de modo tal que $\sqrt{k} \notin F$ (F podría ser el cuerpo F_0 de los racionales, y $k=2$. Así, $k \in F$ pero $\sqrt{k} \notin F$). Entonces podemos construir $\sqrt{k}$ con el compás (como ya se vio) y, por lo tanto, todos los números $p + q\sqrt{k}$, p y q elementos arbitrarios de F. Ya habíamos visto que estos números forman un cuerpo. A este cuerpo lo designaremos F', que contiene al cuerpo original F. F' se dice que es una extensión de F, y F un subcuerpo de F'.

Lo que el compás realiza en una construcción es definir coordenadas de puntos como intersecciones de una circunferencia y una recta, o de dos circunferencias (es decir, las operaciones 3) y 4) mencionadas más arriba).

La circunferencia de centro $(x_0;y_0)$ y radio r tiene como ecuación $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$; luego, si x_0, y_0 y r pertenecen a un cuerpo F, la ecuación de tal circunferencia podrá escribirse en la forma $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$, con coeficientes α, β, γ en F.

Si tenemos ahora dos puntos cuyas coordenadas están en F, vimos que la recta $ax+by+c=0$ tiene los coeficientes a, b, c también en F. Resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

de donde sigue la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, cuyos coeficientes $A = a^2 + b^2$, $B = 2(ac + b^2\alpha - ab\beta)$ y $C = c^2 - 2bc\beta + b^2\gamma$ están en F. La solución viene dada por la fórmula $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, que es de la forma $p + q\sqrt{k}$, con p, q, k pertenecientes a F. Una fórmula análoga nos da la coordenada y del punto de intersección. Así, hemos intersecado una recta y una circunferencia con coeficientes en F, y el punto de intersección encontrado tiene coordenadas en F'.

Por otra lado, si tenemos dos circunferencias

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

restando la segunda ecuación de la primera, se obtiene: $2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma') = 0$, que puede resolverse junto con la ecuación de la primer circunferencia, como anteriormente se hizo. Así, en este caso, también las coordenadas de los puntos de intersección tienen la forma $p + q\sqrt{k}$, con p, q, k pertenecientes a F, es decir, que son puntos pertenecientes a F'.

De esta manera, hemos probado que mediante una sola aplicación del compás (para hacer $\sqrt{k}$) obtenemos números de la forma $p + q\sqrt{k}$, con p, q, k en F, habiendo extendido el cuerpo F a otro más amplio F'

Números construibles

Hemos probado así que todo paso en una construcción geométrica (trazado de la recta que une dos puntos, de la circunferencia de centro y radio dados, o determinación de la intersección de dos rectas o dos circunferencias conocidas) puede, producir cantidades del cuerpo ya conocido o, mediante la construcción de una raíz cuadrada, dar lugar a un nuevo cuerpo ampliado de números construibles.

Podemos describir ahora la totalidad de los números construibles. Partimos de un cuerpo dado F_0, definido por cantidades iniciales dadas; por ejemplo, el cuerpo de los números racionales. A continuación, mediante el agregado de $\sqrt{k_0}$, donde $k_0 \in F_0$, pero $\sqrt{k_0} \notin F_0$, formamos el cuerpo ampliado F_1, de números construibles, que consta de todos los números de la forma $a_0 + b_0\sqrt{k_0}$, con $a_0, b_0 \in F_0$. Después se define F_2, una nueva extensión de F_1, como el conjunto de todos los nú-

meros de la forma $a_1 + b_1\sqrt{k_1}$, siendo $a_1, b_1 \in F_1$, y $k_1 \in F_1$, pero $\sqrt{k_1} \notin F_1$. Repitiendo este proceso, puede obtenerse un cuerpo F_n después de n agregados de raíces cuadradas.

Así, números construibles son aquellos y sólo aquellos que pueden hallarse mediante una tal sucesión de cuerpos ampliados, esto es, que pertenecen a un cuerpo F_n del tipo descrito.

Por ejemplo, deseamos ver si el número $\sqrt{6+\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}}$ es construible con regla y compás, o sea, si encontramos un cuerpo F_k al cual dicho número pertenezca. Entonces, sea F_0 el cuerpo de los racionales. Elijamos $k_0=2$, obteniendo el cuerpo F_1, que contiene el número $1+\sqrt{2}$. Tomemos luego $k_1 = 1+\sqrt{2}$, y obtengamos de este modo el cuerpo F_2, que contiene al número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Sea ahora $k_2=3$, obteniendo el cuerpo F_3, que contiene al número $\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$. Elijamos ahora $k_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$. Así, el número $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5$ pertenece al cuerpo F_4. Por último, sea $k_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}$, con lo que $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}}$ está en F_5. Además $\sqrt{6}=\sqrt{2}\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ están en F_3 y, por lo tanto, en F_5. Así que $\sqrt{6}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}}$ está en F_5, en consecuencia, es construible. Dejamos como ejercicio verificar que los números $\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ y $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{11}}{1+\sqrt{7-\sqrt{3}}}$ son construibles.

[En "Curso de Análisis Matemático" de G. H. Hardy, Pág. 61, el autor propone construir el siguiente número $\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{17+3\sqrt{11}}{17-3\sqrt{11}}}-\sqrt{\dfrac{17-3\sqrt{11}}{17+3\sqrt{11}}}}$]

Algunos Teoremas

Por último, vamos a demostrar algunos teoremas que nos llevarán, por fin, a la resolución de los problemas clásicos.

1) Los números del cuerpo F_0, el cuerpo de los números racionales, son raíces de ecuaciones lineales con coeficientes racionales.

Dem.: Todo número de F_0 tendrá la forma $x=\dfrac{p}{q}$ con $p \in \mathrm{Z}$ y $q \in \mathrm{Z}-\{0\}$. Es decir, $qx-p=0$.

Así $x \in F_0$ es una raíz de una ecuación lineal con coeficientes racionales.

2) Los números del cuerpo F_1, son raíces de ecuaciones cuadráticas con coeficientes racionales.

Dem.: Todo número de F_1 tendrá la forma $x = a + b\sqrt{k}$, con a, b, k en F_0, es decir, racionales.

De aquí resulta $x - a = b\sqrt{k}$. Elevando ambos miembros al cuadrado, resulta: $x^2 - 2ax + (a^2 - b^2k) = 0$, que es una ecuación cuyos coeficientes están en F_0.

Así $x \in F_1$ es una raíz de una ecuación de grado 2 con coeficientes racionales.

3) Los números del cuerpo F_2, son raíces de ecuaciones de cuarto grado con coeficientes racionales.

Dem: Todo número de F_2 tendrá la forma $x = p + q\sqrt{w}$, siendo p, q, w en F_1, es decir, $p = a + b\sqrt{s}$, $q = c + d\sqrt{s}$, $w = e + f\sqrt{s}$, con a, b, c, d, e, f, s racionales.

Entonces

$x - p = q\sqrt{w} \Rightarrow$

$x^2 - 2px + p^2 = q^2 w$. Reemplazando ahora los valores de p, q y w se obtiene una expresión de la forma $x^2 + ux + v = \sqrt{s}(rx+t)$, con u, v, s, r y t racionales. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos $(x^2+ux+v)^2 = s(rx+t)^2$, que es una ecuación de cuarto grado con coeficientes racionales.

Así, hemos demostrado que los números de F_0 son raíces de ecuaciones de grado $1=2^0$, los de F_1 son raíces de ecuaciones de grado $2=2^1$, los de F_2 son raíces de ecuaciones de grado $4=2^2$. En general, se tendrá que:

Los números de F_k son raíces de ecuaciones de grado 2^k, con coeficientes racionales.

Veamos un ejemplo de esta última proposición. Sea el número $x=\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{2}}$. Puede verse que $x \in F_2$. Esto es en efecto así, pues $3+\sqrt{2} \in F_1$, con lo que $\sqrt{3+\sqrt{2}} \in F_2$. Además, como $\sqrt{2} \in F_1$, entonces $\sqrt{2} \in F_2$. Luego, $\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{2}} \in F_2$.
Vamos a comprobar que x es raíz de una ecuación algebraica de grado 2^2. Partamos entonces de la siguiente igualdad: $\left(x-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}\right)^2$.
Haciendo algunas transformaciones sencillas, llegamos a que $x^2-1=\sqrt{2}(1+2x)$. Elevando al cuadrado ambos miembros, resulta: $\left(x^2-1\right)^2=2(1+2x)^2$, que es una ecuación algebraica de cuarto grado con coeficientes racionales.
Dejamos como ejercicio al lector verificar que $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ pertenece a F_3 y es raíz de una ecuación de grado *8* con coeficientes racionales.

Un Teorema sobre ecuaciones cúbicas

Consideremos la ecuación cúbica $x^3+ax^2+bx+c=0$, con *a, b, c* racionales. Y sean x_1, x_2 y x_3 sus raíces. Sabemos que la ecuación puede factorearse de la siguiente manera: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Desarrollando convenientemente esta expresión, obtenemos:

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+$$
$$+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$$

En consecuencia, resulta: $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b$ y $x_1x_2x_3=-c$. Con estas consideraciones, demostremos el siguiente teorema: *Si una ecuación cúbica de coeficientes racionales no tiene ninguna raíz racional, entonces ninguna de sus raíces es construible partiendo del cuerpo racional F_0.*
Haremos la demostración por el absurdo.
Supongamos que x es una raíz construible de la ecuación cúbica anterior. Entonces x pertenece a un cuerpo F_k deducido (como se vio) del cuerpo racional, mediante sucesivas ampliaciones F_0, F_1, ..., F_k. obtenidas por adjunción de raíces cuadradas. Supondremos que k es el menor entero tal que x esté en algún F_k.
k debe ser mayor que cero pues el teorema dice que la ecuación no tiene raíces racionales. Así, x puede escribirse en la forma $x=p+q\sqrt{w}$, *con p, q, w* pertenecientes a F_{k-1}, pero con $\sqrt{w} \notin F_{k-1}$.
Ahora, si $x=p+q\sqrt{w}$ es raíz de una ecuación cúbica entonces $y=p-q\sqrt{w}$ también lo es.
Sustituyendo, a continuación, en la ecuación cúbica original, resulta:

$$\left(p+q\sqrt{w}\right)^3+a\left(p+q\sqrt{w}\right)^2+$$
$$+b\left(p+q\sqrt{w}\right)+c=0$$

Desarrollando convenientemente esta última expresión, se obtiene otra de la forma $P+Q\sqrt{w}=0$, en donde

$$P=p^3+3pq^2w+ap^2+$$
$$+aq^2w+bp+c$$

y

$$Q=3p^2q+q^3w+2apq+bq.$$

Como P y Q pertenecen a F_{k-1} y $\sqrt{w}$ no, se tiene que *Q=0*, pues si Q fuera distinto de cero, se tendría que $\sqrt{w}=-\frac{P}{Q}$, que no es posible, pues $-\frac{P}{Q} \in F_{k-1}$ y $\sqrt{w}$ no.
Así que, como *Q=0*, debe pasar que *P=0*. Pero entonces $P-Q\sqrt{w}=0$ también.
Si sustituimos ahora x por $p-q\sqrt{w}$ en la ecuación cúbica, se obtendrá una expresión de la forma $P-Q\sqrt{w}=0$. Por lo tanto, $y=p-q\sqrt{w}$ es también una raíz de la ecuación cúbica, como queríamos ver.
Ahora bien, $x-y=\left(p+q\sqrt{w}\right)-\left(p-q\sqrt{w}\right)$
Desarrollando el segundo miembro, se llega a $x-y=2q\sqrt{w}$. Aquí se ve que $x-y$ no puede ser cero, pues sólo podría serlo si *q=0*, pero si así fuera se tendría que *x=p* pertenecería a F_{k-1} y no a F_k, como se había supuesto.
Así es que $x-y \neq 0$, con lo que $x \neq y$.
Anteriormente habíamos expresado que $x_1+x_2+x_3=-a$, siendo x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación cúbica

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Si $x_1 = x$ y $x_2 = y$, se tiene que $x + y + x_3 = -a$ y de aquí $x_3 = -a - x - y$. Pero, dado que $x + y = 2p$, resulta $x_3 = -a - 2p$.

Como $\sqrt{w}$ ha desaparecido, $x_3 \in F_{k-1}$. Pero esto contradice la hipótesis de que k es el menor número entero tal que algún F_k contiene a una raíz de la ecuación cúbica. En consecuencia, la hipótesis es absurda, y no hay ninguna raíz de aquella ecuación que pertenezca a algún cuerpo F_k.

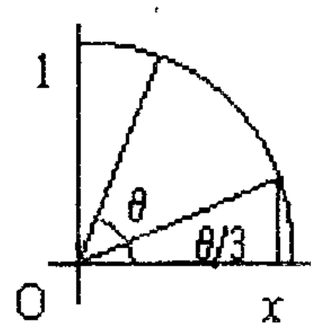
Vayamos ahora a cada problema en particular.

La duplicación del cubo

Recordemos que este problema pedía construir un cubo de volumen doble del de uno dado. Si el cubo dado tiene una arista de longitud unidad, se trata de encontrar una arista x tal que se verifique: $x^3-2=0$, que es una ecuación cúbica con coeficientes enteros. Las únicas raíces posibles racionales de dicha ecuación son: $\pm 1, \pm 2$. Como ninguno de estos valores satisface la ecuación, ésta carece de raíces racionales. Luego, por el Teorema anterior, no tiene raíces construibles con regla y compás.

La trisección del ángulo

Podemos ver este problema, considerando en un sistema de ejes cartesianos una circunferencia de radio unidad, y un ángulo θ, el cual queremos trisecar. Se trata de construir entonces $\theta/3$ o, lo que es lo mismo, hallar la coordenada x del punto $cos(\theta/3)$. Pongamos, además, $\cos\theta = a$.



Mediante la fórmula trigonométrica del $cos(\theta/3)$, podemos escribir la siguiente relación:

$$a = \cos\theta = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),$$

es decir, $4x^3-3x-a=0$.

O sea, el problema de la trisección conduce a construir una solución de una ecuación cúbica. Para probar que, en general, esto no puede hacerse, basta encontrar un ángulo para el cual no pueda efectuarse, pues un método válido de construcción debería servir para todo ángulo. Tomemos, por ejemplo, $\theta=60°$, entonces $a=cos60°=1/2$ y la ecuación cúbica se convierte en $4x^3-3x-1/2=0$, esto es, $8x^3-6x-1=0$, que como se ve, es una ecuación algebraica con coeficientes enteros. Por lo tanto, las únicas raíces racionales posibles son: ± 1; $\pm 1/2$; $\pm 1/4$; $\pm 1/8$. Como puede verificarse fácilmente, ninguno de estos valores es raíz de la ecuación anterior. En consecuencia, la misma carece de raíces racionales. Luego, no tiene raíces construibles con regla y compás.

Queda entonces definitivamente probada la imposibilidad de la trisección del ángulo con regla y compás.

La Cuadratura del Círculo

Este es un problema mucho más difícil que los anteriores. Como sabemos, se trata de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo de radio unidad por ejemplo. Esto equivale a encontrar el lado x del cuadrado tal que $x^2=\pi r^2=\pi$, lo que conduce a $x = \sqrt{\pi}$, lo que conduce a $\sqrt{\pi}$.

Este segmento $\sqrt{\pi}$ será construible, siempre y cuando π sea construible. Pero todos los números construibles son algebraicos (ver recuadro), es decir, números que satisfacen a ecuaciones algebraicas de coeficientes enteros. En consecuencia, basta probar que el número π no es algebraico, es decir, que es *trascendente*.

En 1844, el matemático J. Liouville (1809-1882) demuestra la existencia de números trascendentes, demostración que permite construir ejemplos de tales números. La construcción de Liouville es muy complicada, sin embargo, un ejemplo sencillo ilustrativo de número trascendente es 0,1001000100001... Demostrar que un número real, tal como e o π, es trascendente, suele ser muy difícil.

Debieron transcurrir treinta años para que un matemático francés, Charles Hermite (1822-1901), consiguiera en 1873, siguiendo los pasos de Liouville, demostrar que el

número e es trascendente. Para el número π todavía había que esperar.
El suizo-alemán Johann H. Lambert (1728-1777) y el francés Legendre (1752-1833) habían demostrado, en 1770 y en 1794 respectivamente, que tanto π como π^2 eran irracionales.
Por fin, en 1882, F. Lindemann (1852-1939) demuestra, de manera concluyente, la trascendencia de π.
De esta manera, se daba por terminada la vieja cuestión de la cuadratura del círculo.

Número Algebraico: Un número algebraico es cualquier número x, real o complejo, que satisface a una ecuación algebraica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

($n \geq 1$, $a_n \neq 0$), y donde los coeficientes a_i son enteros.

Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un número algebraico, pues satisface la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
De esta manera, toda raíz de una ecuación de coeficientes enteros de grado 3°, 4°, 5° o superior, es un número algebraico, sean o no expresables dichas raíces mediante radicales.
Podría pensarse que todo número real es algebraico, sin embargo, esto no es así. Georg Cantor (1845-1918) demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Como el conjunto de los números reales no es numerable, de ello resulta la existencia de números reales no algebraicos. A estos números se los llama *Trascendentes*.
Demostremos ahora el siguiente importante resultado:

Teorema: *Todos los números construibles son algebraicos.*
Dem: Ya hemos demostrado que todo número construible satisface una ecuación algebraica de coeficientes racionales. Multiplicando por algún valor conveniente esta ecuación, pueden convertirse sus coeficientes en enteros, con lo que queda demostrado el teorema

Claudio Salpeter*

*Profesor de Matemática,
egresado del I.S.P.
"Dr.Joaquín V. González"

Bibliografía:

COURANT-ROBBINS- *Qué es la Matemática* – Madrid, Aguilar, 1964

El trigesimoséptimo número perfecto conocido es $a_1 + b_1\sqrt{k_1}$ y tiene 1.819.050 dígitos.
Pocos días atrás, Roland Clarkson --un estudiante de 19 años de California State University Dominguez Hills-- descubrió el mayor número primo conocido hasta el presente usando su Pentium 200 Mhz durante 46 días con un programa escrito por George Woltman y un 'software' de trabajo en red concebido por Scott Kurowski.

Información adicional puede encontrarse en:
http://www.utm.edu/research/primes/notes/3021377/
http://www.mersenne.org/3021377.htm

Uno, dos, tres,... ¿qué sigue?

En esta sección trataremos sobre diversos temas matemáticos que esperamos sirvan tanto para el enriquecimiento personal como para ser llevados al aula.

Imaginemos el siguiente truco de adivinación del pensamiento. En lugar de pedirle a alguien que piense un número, vamos a pedirle que piense u-na fórmula. Para simplificar, nos limitaremos a las fórmulas cuadráticas, es decir, fórmulas del tipo $ax^2 + bx + c$. Su-pongamos que ha pensado $5x^2 + 3x - 7$. Dándole la espalda para no ver las operaciones que ha de realizar, le pedimos que sustituya la letra "x" por 0, 1 y 2 y que nos dé los valores que toma la expresión en cada caso. Estos valores son -7, 1 y 9. Haciendo unos pocos cálculos, podemos co-nocer fácilmente la fórmula pensada.

El método es sencillo. Se disponen en fila los valores que nos han dado. Inmediatamente debajo se anotan en otra fila las diferencias entre cada par de números adyacentes, restando siempre el número de la derecha menos su vecino inmediato de la izquierda. En una tercera fila se escriben las diferencias de los números de la segunda fila:

-7 1 19

8 18

10

El coeficiente de x^2 en la fórmula buscada es siempre igual a la mitad del número que figura en la parte más baja de la tabla. El coeficiente de x se obtiene restándole al primer número de la fila central la mi-tad del que se encuentra en la parte inferior de la tabla. Y el término independiente es, sim-plemente, el primer número de la primera fila. Dejamos como tarea al lector demostrar todas estas afirmaciones.

Hemos aplicado en este ejemplo el **cálculo de diferencias finitas**, rama poco conocida de la Matemática, pero en ocasiones de gran utilidad. El cálculo de diferencias finitas, que ocupa una posición intermedia entre el Álgebra y el Cálculo Diferencial, se originó en el *Methodus Incremento-rum*, un tratado publicado en-tre 1715 y 1717 por Brook Taylor (a quien se debe el "polinomio de Taylor" del Cálculo). Tras haber sido de-sarrollado entre otros por Le-onhard Euler, apareció en 1860 la primera obra importante dedicada al tema, escrita por George Boole, que es famoso por haber creado la Lógica Simbólica. Los libros de Álgebra del siglo pasado solían incluir algunas nociones de este cálculo, pero con el correr del tiempo pasó de moda.

Si F(x) es una función de la que sólo conocemos los valores F(0), F(1), F(2),...,F(m); el objetivo del cálculo de diferencias finitas es deducir, a partir de las operaciones que describiremos a continuación, información acerca de la función desconocida F(x).

Las operaciones son las siguientes: ubicamos los valores F(0), F(1), F(2),...,F(m) en u-na primera fila:

F(0) F(1) F(2) ... F(m)

En una segunda fila colocamos las diferencias sucesivas de estos valores:

F(1)-F(0) .... F(m)-F(m-1)

En una tercera fila escribimos las diferencias de los números de la segunda fila (restando siempre cada número menos su vecino de la izquierda). En una cuarta fila colocamos las diferencias de los números de la tercera fila, y así sucesivamente.

Supongamos que F(x) sea una función polinómica, digamos por ejemplo $F(x) = x^3 - x + 1$. En este caso, la primera fila estará formada por los números:

1, 1, 7, 25, 61, 121,...

Las siguientes filas serán:

0, 6, 18, 36, 60,...

6, 12, 18, 24,...
6, 6, 6,...

Como se observa, la cuarta fila está formada exclusivamente por números 6. ¿Se llegará siempre a una fila formada por una sucesión constante? Si F(x) es una función polinómica, la respuesta a esta pregunta es afirmativa. En efecto, sea F(x) un polinomio de grado N:

$$F(x) = \alpha_N x^N + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Llamemos a_0, a_1, a_2,... a los números que aparecen en la primera fila. La sucesión de los a_n tiene entonces término general igual a:

$$a_n = F(n) = \alpha_N n^N + ... + \alpha_1 n + \alpha_0$$

Si b_0, b_1, b_2,... son los números de la segunda fila, entonces la sucesión de los b_n tiene término general igual a:

$$b_n = a_{n+1} - a_n = [\alpha_N(n+1)^N + ... + \alpha_1(n+1) + \alpha_0]-[\alpha_N n^N + ... + \alpha_1 n + \alpha_0]$$

Si desarrollamos la expresión anterior, llegaremos a que b_n tiene un término general polinomial de grado N-1.

$$b_n = \beta_{N-1} n^{N-1} + ... + \beta_1 n + \beta_0$$

De modo similar se deduce que los números de la tercera fila forman una sucesión cuyo término general es polinomial de grado N-2. La fila N-ésima se forma con una sucesión que tiene un término general poli-nomial de grado 1. Digamos que la fila N-ésima esté for-mada por los números x_0, x_1, x_2,... entonces x_n tiene una fórmula que es un polinomio lineal en la variable n:

$$x_n = \gamma_1 n + \gamma_0 \qquad (\gamma_0, \gamma_1 \in \Re)$$

Si, finalmente, y_0, y_1, y_2,... son los números de la fila N+1 entonces:

$$y_n = x_{n+1} - x_n = [\gamma_1(n+1) + \gamma_0]-[\gamma_1 n + \gamma_0] = \gamma_1$$

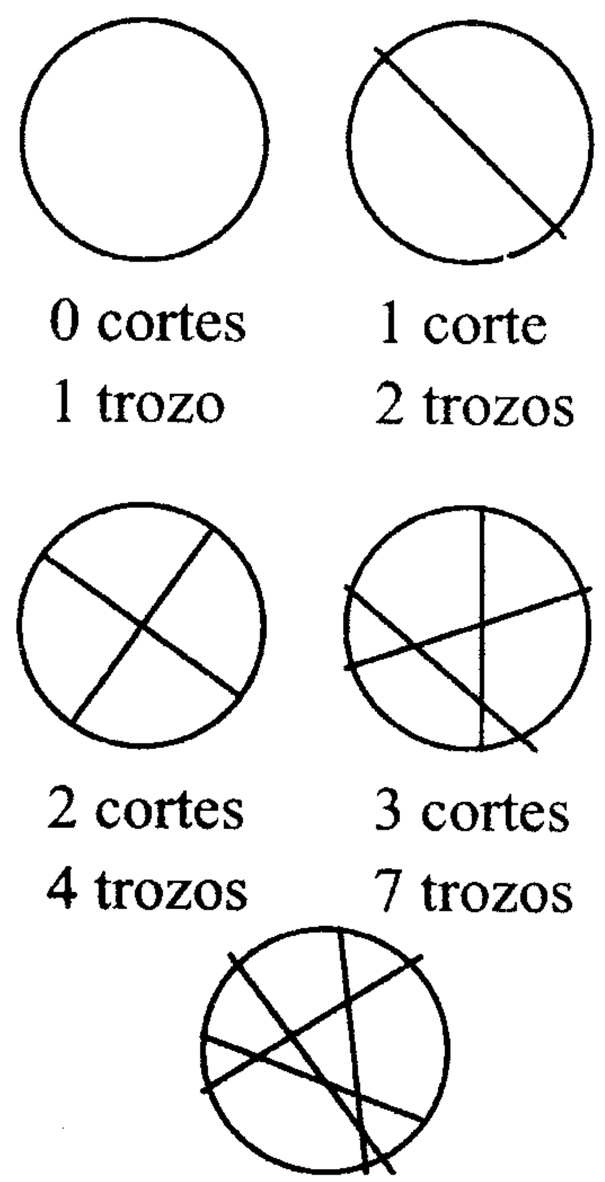
Es decir, la fila N+1 es constante. Además, igual que en el truco de la adivinación del pensamiento, es posible reconstruir esta función polinómica. Podemos utilizar para ello la siguiente fórmula, descubierta por Isaac Newton:
Sea, como antes, a_0 el primer número de la primera fila (es decir $a_0 = F(0)$); sean b_0 el primer número de la segunda fila, c_0 el primer número de la tercera fila, etc. Entonces:

$$F(x) = a_0 + b_0 x + c_0 \frac{x(x-1)}{2} + d_0 \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} + ...$$

Si la función no es polinómica, entonces bien puede ocurrir que nunca se llegue a una fila constante. Por ejemplo para $F(x) = 2^x$ las filas sucesivas quedan formadas del siguiente modo:

1, 2, 4, 8, 16,...
1, 2, 4, 8, 16,...
1, 2, 4, 8, 16,...

Veamos un ejemplo de aplicación a un problema tomado de la matemática recreativa. La pregunta a responder es la siguiente ¿Cuál es el máximo número de trozos en que puede dividirse una tarta mediante n cortes rectos, cada uno de los cuales corta a todos los demás?
Es evidente que este número es función de n. Si esta función no es demasiado complicada, quizás el método de diferencias finitas nos ayude a determinarla empíricamente.
Si no se efectúa ningún corte, la tarta permanece entera y se tiene en consecuencia un solo trozo. Un corte proporciona dos trozos, dos cortes nos dan cuatro trozos, etc.



La primera fila de valores comienza entonces con:

1, 2, 4, 7, 11, ...

Construyendo las filas si-guientes, mediante el método de las diferencias sucesivas, obtenemos:

1, 2, 3, 4, ...
1, 1, 1, ...

Como la tercera fila parece hacerse constante, podemos conjeturar que la fórmula que nos da la cantidad de trozos es un polinomio de grado 2. Al aplicar la fórmula de Newton para obtener dicho polinomo debemos observar que $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$, y que todas las demás filas estarían formadas exclusivamente por ceros, por lo que podemos ignorar los coeficientes desde d_0 en adelante. La fórmula de New-ton nos da:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

Si escribimos la fórmula en función de n, la cantidad de trozos para n cortes sería:

$$F(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

(Dejamos como tarea para el lector la verificación de que para n=0, n=1, n=2, n=3 y n=4 la fórmula nos da los valores hallados empíricamen-te).

¿Hemos encontrado la fórmula que da el máximo número de trozos de tarta que se pueden obtener con n cortes? Lamen-tablemente, lo más que pode-mos decir es: "probablemente sí".

¿A qué se debe esta incerti-dumbre? A que dada cualquier sucesión finita de números hay una infindad de funciones que pueden generarlas. Esto equi-vale a decir que, dado un nú-mero finito de puntos en el plano, hay un número infinito de curvas que pasan por todos ellos. Tomemos por ejemplo la sucesión 0, 1, 2, 3, ... ¿Cuál es el siguiente término? La conjetura más natural es 4. De hecho, si se aplica la técnica de las diferencias finitas, la fórmula de Newton nos dirá que el término n-ésimo de la sucesión es justamente n. Pero la fórmula:

$$n + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

genera también una sucesión que comienza con 0, 1, 2, 3,..., pero que en este caso continúa con 5, 10, 21,... y no con 4, 5, 6,...

Unos cuantos ensayos con lá-piz y papel bastarán para con-vencernos de que cinco cortes determinan como máximo 16 trozos de tarta. Este es el nú-mero previsto por la fórmula, y esta concordancia aumenta la probabilidad de que sea correcta. Pero mientras no la demostremos rigurosamente (lo que en este caso no es demasiado difícil), no pasará de ser una buena conjetura.

Estos métodos presentan una notable semejanza con los uti-lizados en las ciencias experi-mentales para descubrir sus le-yes. De hecho, son muchas las situaciones en las que sería posible aplicar el método de diferencias finitas para estu-diar los fenómenos físicos y las leyes que los rigen.

Supongamos, por ejemplo, que un físico estuviera inves-tigando por primera vez la caí-da de los cuerpos. Observaría que en un segundo una piedra cae 4,9 m.; en dos segundos 19,6 m. y así sucesivamente. Las distintas observaciones para 0, 1, 2, 3 y 4 segundos respectivamente serían las si-guientes:

0 4,9 19,6 44,1 78,4

Aplicando el método de diferencias finitas obtendría:

4,9 14,7 24,5 34,3
9,8 9,8 9,8

Las mediciones experimen-tales no serían, evidentemente, exactas; pero a pesar de eso los números de la última fila tampoco serían muy diferentes de 9,8. Así pues, nuestro fí-sico llegaría a la conjetura de que la distancia recorrida por un cuerpo que cae está des-cripta por una función cua-drática. Aplicando la fórmula de Newton llegaría a que una piedra recorre $4{,}9x^2$ metros al caer libremente durante x se-gundos. Ahora bien, no es seguro que ésta sea la ley de caída de los cuerpos. La fór-mula obtenida es sólo la fun-ción más sencilla que con-cuerda con los datos observa-dos. Aunque observaciones posteriores la confirmen, no se puede tener la certeza absolu-ta de que una nueva obser-vación no nos obligará a revi-sarla o inclusive a abandonarla completamente. En palabras de George Polya: "La Natu-raleza puede respondernos 'sí' o 'no', pero

una respuesta nos la susurra, mientras que con la negativa nos atruena. Sus 'sí' son provisionales, sus 'no', definitivos."

Para finalizar, utilicemos el cálculo de diferencias finitas para conjeturar una fórmula que nos dé la suma de los cuadrados de los primeros n enteros no negativos. Es bien sabido que:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

¿Cuánto vale $0^2 + 1^2 + \ldots + n^2$? Si aplicamos el cálculo de diferencias finitas obtenemos para la primera fila:

0, 1, 5, 14, 30, 55, ...

Las filas siguientes son:

1, 4, 9, 16, 25,...
3, 5, 7, 9,...
2, 2, 2,...

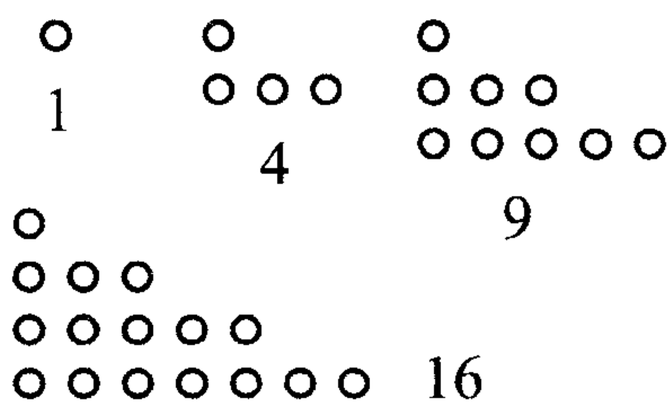
Conjeturamos entonces que se trata de una función de grado tres. De la fórmula de Newton obtenenos:

$$F(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

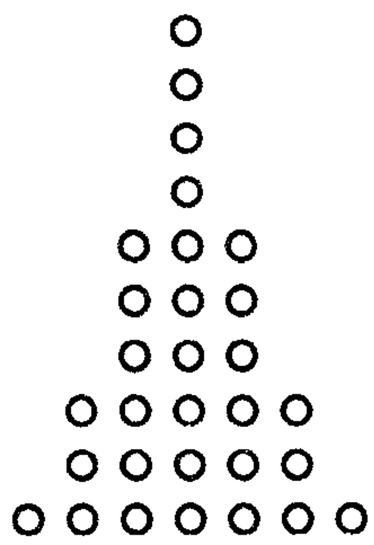
Sin embargo, como ya quedó dicho, para tener la certeza absoluta de que esta función es verdaderamente la buscada, debemos dar una demostración rigurosa de ella. Tanto en este caso, como en el problema de los cortes de la tarta, esta demostración puede hacerse fácilmente por **inducción completa** (para una descripción de este método véase, por ejemplo, la nota **In-vestigando a Fibonacci** en Aχioma N° 5).

Expondremos aquí otra demostración, cuya rigurosidad es tal vez muy discutible, pero que resulta quizás mucho más clara a simple vista.

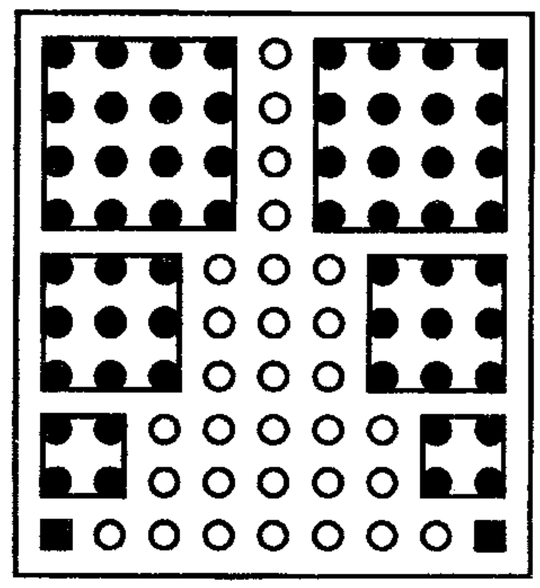
Fijémonos en los cuadrados de los primeros cuatro números naturales. Cada uno de ellos puede representarse como la suma de enteros impares con-secutivos. En el gráfico que a-parece más abajo, el 1 se re-presenta con un "punto blan-co", el 4 con 1+3 puntos, el 9 con 1+3+5 y el 16 con 1+3+5+7.



En estas formaciones la fila de 7 puntos aparece una sola vez. Hay dos filas de 5 puntos, tres filas de 3 y cuatro "filas" de un punto. Estas diez filas pueden apilarse poniendo en la base la más larga, sobre ella las dos filas de cinco puntos, aún por encima de éstas las filas de tres puntos y, coronando el "rascacielos", las cuatro filas de un punto:



Añadiendo a cada lado del rascacielos formaciones cuadradas de puntos negros que correspondan a 1^2, 2^2, 3^2 y 4^2 podemos formar un rectángulo cuya altura es igual a 10 y cuya base es igual a 9:



La misma construcción puede hacerse para cualquier valor de n. La altura del rectángulo resultante es n(n+1)/2 y la base es 2n+1. Como el rascacielos representa exactamente un tercio del rectángulo, entonces la suma de los cuadrados de los números de 0 a n es igual a:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

como habíamos conjeturado.

Gustavo Piñeiro*

* Lic. en Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* GARDNER, MARTIN - *Circo matemático* - Madrid, Alianza Editorial, 1983.
* GARDNER, MARTIN - *Nuevos Pasatiempos Matemáticos* - Madrid, Alianza Editorial, 1982.

Seminario en Bariloche

La semana del 17 al 21 de noviembre se llevó a cabo en la ciudad de San Carlos de Bariloche el seminario internacional de Matemática organizado por la OMA, en esta nota trataremos de revivir junto a nuestros lectores algunas experiencias que nos dejó este gustoso viaje.

Entre lagos y montañas, con imponentes paisajes, a unos 100 km de San Carlos de Bariloche, ya se vivenciaba en el micro un clima matemático. Se escuchaba una voz joven preguntar: "¿Cuál es la fórmula del volumen de la esfera?" y alguien le respondía: "Cuatro tercios de pi por radio al cubo". Viajaban con nosotras profesores, estudiantes del profesorado y chicos de colegios de diferentes lugares, ansiosos por llegar a las Jornadas de Resolución de Problemas.

A lo largo de la semana se realizaron varias actividades: diferentes seminarios para profesores, maestros y estudiantes del profesorado, los cuales tuvieron muy buena crítica por su nivel; provechosas y emocionantes conferencias de distinguidos docentes que hicieron caer más de una lágrima y provocar risas en sus irónicas charlas; y las olimpíadas que reunieron un sorprendente número de alumnos de colegios de todo el país, donde la entrega de premios fue muy emotiva.

Los seminarios comenzaban a las 9 de la mañana con una previa caminata por la costanera (10 cuadras). Algunos de ellos fueron: "Problemas en los retículos cuadriculados y cúbicos", . "Elementos de la Teoría de Grafos con aplicaciones en la enseñanza de la Matemática en la Escuela Media", "Aventuras en 3D", "Cabri-Géomètre", y muchos otros. El seminario al que asistimos nosotras fue: "Teoremas Heterodoxos" y lo dictó el profesor Miguel de Guzmán.

En este curso tuvimos la ocasión de contemplar, como lo dijo el propio Guzmán, aquellos teoremas que han marcado un claro cambio de rumbo en la evolución de la Matemática.

Los progresos matemáticos más trascendentes a lo largo de la historia, así como en la ciencia en general, son el resultado de contradicciones frontales de una época determinada y constituyen una fuente de enriquecimiento y profundización del quehacer matemático.

A lo largo del curso no vimos todas las demostraciones de los antes mencionados teoremas. A veces el profesor nos sugería alguna idea para que tratemos de llegar a una demostración y luego la discutíamos entre todos. También discutíamos cuáles eran los conceptos que entraban en conflicto. En otros momentos las clases eran más bien expositivas debido a su complejidad y extensión. Sin lugar a dudas, uno de los objetivos del curso fue motivar a los estudiantes a investigar sobre alguna cuestión que les haya atrapado.

Los teoremas propuestos en el seminario por el profesor se dividieron en cuatro secciones:

-Los teoremas relacionados con el *infinito*, como por ejemplo: los Pitagóricos, con el problema de la inconmensurabilidad; Zenón y sus paradojas; Galileo diciendo "no hay más números que cuadrados perfectos"; Cantor, con la imposibilidad de numerar los puntos de un segmento.

-*Los problemas clásicos*: Duplicación del cubo; Trisección del ángulo; Cuadratura del círculo; y la imposibilidad de demostrar que el quinto postulado de Euclides es consecuencia de los otros.

-Los relacionados con *el Análisis Elemental* (que algunos nos parecieron novedosos y para nada elementales) como por ejemplo el que dice: "Es posible construir una curva continua que llena un cuadrado" o "Es imposible cubrir la esfera con pelos tangentes a ella de modo que la dirección de los pelos varíe de forma continua" y quizá alguno más conocido por nosotros "Es posible definir sobre un intervalo una función monótona acotada con un número infinito de saltos".

-Y algunos Teoremas Heterodoxos variados y curiosos como: "Es imposible construir un mapa que no se pueda colorear con cuatro colores", "Es imposible pintar las aristas del grafo completo de 5 vértices con dos colores sin que resulte al menos un triángulo del mismo color", "Que una curva simple cerrada separa el plano en dos regiones es claro pero necesita

demostración (Jordan)", y muchos otros.
Invitamos a nuestros lectores a elegir uno de los temas nombrados e investigar sobre el mismo. En próximos números de Aχioma se publicarán conclusiones de algunos de estos temas.

El último día del seminario, entre festejos y apurones, el profesor nos pudo responder algunas inquietudes que a continuación transcribimos:

-¿Cree usted que la utilización de la Historia de la matemática en el secundario es una opción para la motivación de los alumnos o más bien una herramienta para la construcción de los diferentes temas?
A mí me parece que la Historia se debería desarrollar cuando hace falta, y cuando viene bien para explicar los diferentes conceptos. De manera que sería más bien un historia de las ideas. Pero la historia de las ideas a veces es descarnada, quizá vendría bien una historia donde se vea cómo realmente evoluciona con todas las variables. Y eso no es solamente períodos de tiempo, lugares o países, nombres y fechas, sino que son personas en una época y con ciertas dificultades, que desde luego dan ese sabor humano mucho más cercano que simplemente las ideas abstractas.
Por eso es importante especificar las épocas, las personas, las dificultades que tuvieron, etc. Es una historia conjunta.
También creo que es importante escoger los personajes más importantes de esta historia para darle más calor a aquellos temas que se estén tratando.

¿La investigación en Matemática cree usted que es importante en la formación de profesores?
Sí, por supuesto que sí. A mí me parece que pueden darse muchas desviaciones de las finalidades que se deberían tener para la formación de profesores y por eso es un tema delicado.
La educación matemática es muy variada, pues puede servir para muchas cosas, se pueden pretender diferentes objetivos de lo que es la enseñanza de la matemática.
Viene bien pensar qué es lo que se quiere hacer.
En concreto me parece que en general hay pocos países en que la enseñanza de la Matemática es utilizada como lo que debería ser, que es un instrumento para la formación del alumno tanto en enseñanza primaria como en secundaria.

Entonces, ¿podríamos decir que debería investigar con un objetivo casi único: la formación del alumno?
Podríamos decir que sí. La enseñanza de la matemática se está utilizando un poco como sistema de selección, como formación previa a la Universidad, otro poco como técnica en concreto para lo que venga después. Yo creo que para los chicos de 16, 17,18 años la finalidad de la docencia debería ser la formación del alumno y no del preuniversitario, la formación del pensamiento, de la personalidad, para una formación integral, teniendo en cuenta el desarrollo de los diferentes valores que la sociedad debe tener.
No es necesario saber tanta técnica de matemática, rutinas concretas, algoritmos, cuentas..., sino mucho más que eso, una manera de pensar, que ojalá los políticos y muchos profesionales la tuvieran. Una manera sobria de pensar que no esté condicionada, es decir "amor a la verdad", y con cierta humildad aprender a decir "no me sale", como pasa en matemáticas, y tratar de resolver el problema de manera consistente donde se planifique bien. Es decir, que la matemática proporciona cosas más profundas y el hacer matemática en el aula es abrir las puertas a pensar.

Nos gustaría que tomen como incentivo esta nota para no dejar pasar la oportunidad de asistir a este tipo de eventos y sobre todo promocionarlos para que se puedan llevar a cabo en nuestras instituciones organizando olimpíadas, conferencias, talleres etc, que hacen tan bien a la formación de un buen docente.

Yanina Martínez*
Andrea Morales*

*Alumna de 4° año del I.S.P.- "Joaquín V. González".

ALGUNOS ¿POR QUÉ?¿CÓMO? ¿QUÉ? ¿PARA QUÉ? SIEMPRE ACTUALES

En muchísimas ocasiones conversamos con otros colegas sobre la mejor manera de lograr el aprendizaje de determinados conocimientos. En algunas oportunidades nos ponemos de acuerdo, en otras no tanto; pero siempre está presente en dicha discrepancia una mucho mayor y de fondo que tiene que ver con los cómo, qué y para qué de las matemáticas y las respuestas que cada uno elaboramos al respecto.

También los alumnos son partícipes de esta discusión, mostrando actitudes facilistas cuando intentamos explicar temas cuya cotidianeidad no es evidente y les requiere algunos esfuerzos.

Sin embargo, "el razonamiento sencillo de la matemática escolar, si se lo presenta convenientemente, puede ser comprendido por cualquier mente normal. Cuesta creer que alguien que realmente carezca de tal capacidad podría dar prueba de tenerla para los razonamientos mucho más difíciles que exige cualquier problema de los que se presentan en la vida."

Este pensamiento pertenece al profesor J.W.A. Young, quien, hace más de 90 años, a la ya conocida pregunta: ¿Y este aprendizaje, para qué sirve?, respondía de la siguiente manera:

"¿Va a ser Ud. abogado? ¿Cómo podría aprender a analizar un complicado caso legal, si no puede aprender a analizar una sencilla proposición geométrica? ¿Estudia Ud. historia? ¿Cómo puede determinar la influencia de Napoleón en el desarrollo del mundo, si es incapaz de determinar la influencia de un coeficiente en una relación sencilla de álgebra? ¿Es Ud. un lingüista? ¿Cómo va a traducir una obra maestra, con sus millares de sutiles acepciones en una y otra lengua, si no puede aprender a expresar un sencillo enunciado en los símbolos matemáticos correspondientes? ¿Va a ser Ud. médico? ¿Cómo va a diagnosticar y eliminar una enfermedad, con sus síntomas oscuros, ambiguos, complicados, si le faltan las facultades necesarias para diagnosticar y eliminar las incógnitas de una ecuación elemental?".

Tenemos la impresión, en general, de que hoy resulta mucho más difícil que en el momento en que fue escrito esto, encontrar las contestaciones adecuadas. Nuestro entorno social, político, económico, intelectual, dista mucho del de principios de siglo. Consecuentemente, los valores y los bienes sociales han variado su cotización en el mercado. La educación, en particular, sufre un proceso de devaluación constante que genera una parte sustancial del cuestionamiento por parte de nuestros alumnos, sobre la necesidad del estudio de diversos temas. La lectura de la magnífica obra "Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática en la escuela primaria y secundaria", escrita en 1906 por este doctor en filosofía y profesor emérito de Pedagogía Matemática de la Universidad de Chicago, me resultó altamente esclarecedora, por lo que quiero seguir compartiendo con Uds. los conceptos más relevantes allí vertidos.

Hoy asistimos, con diverso grado de compromiso, a la discusión sobre la controvertida reforma educativa. Su objetivo esencial es adecuar la política educacional del país a los dictámenes económicos del Banco Mundial. Esta "adecuación", presentada oficialmente como la necesaria y única respuesta a la globalización de la economía mundial, dista profundamente de los objetivos que se formulara la educación de nuestro país a principios de siglo. Propone un modelo de egresado para el cual el " *Poder Ejecutivo Nacional, a través del ministerio específico, deberá... contribuir con asistencia técnica para la formación y capacitación técnico-profesional en los distintos niveles del sistema educativo, en función de la reconversión laboral de las empresas industriales, agropecuarias y de servicios.*" (Ley Federal de Educación - Cap. I, art.53, inc. m).

Debido, precisamente, a las presiones y cambios que estamos sufriendo, es oportuna la consideración que sigue:

"La necesidad de aclarar a otros el valor de la materia que uno enseña puede ser

ocasional, pero la de que todo maestro comprenda perfectamente cuál es la función que desempeña su materia en el plan de estudios, y de que la mantenga constantemente en su pensamiento como motivo determinante de todo su trabajo, es permanente y fundamental."

Con respecto a los alumnos, también hace un valioso análisis que me parece fundamental compartir en nuestras charlas de presentación de la materia, al inicio del año lectivo.

"No solamente es deber del maestro saber por qué figura su materia en el plan de estudios, sino también es privilegio del alumno considerar esta misma cuestión."

"Algunos alumnos juzgan, sin duda, al proceso completo de la educación (o de una materia en particular) como un conjunto de tareas, en cierto modo indefinida, destinada a complacer a otros, y consideran que su propio interés está en evadir, en cuanto sean capaces, la ejecución de tales tareas. Otros se dan cuenta, más o menos clara y conscientemente, que su propio bien es el objetivo final, y siguen resignadamente, con la habitual sumisión a la autoridad de padres y maestros, el camino que se les ha trazado. Otros aún, pueden dar un paso más allá y preguntar cómo la educación en general, o cualquier rama de estudios en particular, puede tener algún valor para ellos."

Ante estas perspectivas, Young plantea la importancia de que el docente se sienta en condiciones de aceptar estos cuestionamientos; es una forma de los alumnos de alejarse del rol de meros espectadores, para comenzar a transformarse en sujetos activos de la enseñanza.

En el prólogo a la edición de 1947 de Editorial Losada, el profesor Emanuel S. Cabrera, nos introduce en la discusión sobre la importancia de los métodos de enseñanza implementados, priorizando "el método heurístico (palabra de origen griego que significa *yo encuentro*), el método del redescubrimiento de la verdad científica por parte del propio alumno (que) es, además, el único capaz de transformar el estudio de la materia en algo agradable para la mayoría de los estudiantes. Es el único capaz de destruir los falsos prejuicios sobre la facilidad o dificultad innata para esta ciencia."

Anticipando el planteo con el que Young recorre medularmente el libro, el prof. Cabrera da una explicación sobre las razones de su preferencia por este método y lo ventajosa que resulta su utilización. Dice así: "A los que no se han dedicado a la enseñanza o aún a los que se han encontrado satisfechos con la forma expositiva de enseñar, la pretensión de que los jóvenes sean capaces de redescubrir las propiedades y definiciones les puede parecer una empresa descabellada. Sin embargo, toda la historia de la ciencia nos dice que los descubrimientos más trascendentales fueron fruto de observaciones simples de hechos que miles de observadores tuvieron delante de sus ojos, pero que los prejuicios y el dogmatismo, que se infiltran también en la ciencia, disimularon mediante el predominio de la opinión de las "autoridades" que acallara sus propias interpretaciones".

Una reflexión final acerca de los modos de enseñanza: ¿cuál es el mejor?, ¿por cuál optamos?. Ninguno es suficientemente bueno o malo. No existe un modo permanente para tratar una materia o un tema cualquiera; el mejor modo será aquél que permita el mayor progreso en el conocimiento de la matemática. Al decir de Young "Si el modo empleado es tal que con él no progresa el alumno más de lo que progresaría sin el maestro, este último, tan pronto como lo advierta, debe condenar ese modo bajo esas circunstancias."

Un ejemplo final que ilustra lo expuesto hasta aquí:

"Permítaseme ofrecer un ejemplo de lo que llamo métodos opuestos de educación. Supongamos que el libro disponible para la enseñanza fuera esa excelente pero abstrusa obra llamada la *Guía de los ferrocarriles de Bradshaw*. El maestro moderno haría un esquema completo y complicado. Se dedicaría largo tiempo al análisis de cada oración del libro; se sumaría, se restaría y se dividirían todas las cifras. Elaborarían lindos problemitas: Si el expreso de las 11hs 40min viaja a 80 km/h desde Paddington a Swindon y sufriera un accidente a mitad de camino ¿a qué hora lo

alcanzaría el tren de las 12hs 15min? y así de lo demás. Pero además –y éste sería el ejercicio más valioso de todos– se aprenderían de memoria largas listas de trenes con los nombres de las paradas y los precios de los boletos de primera clase.

Un educador genuino lo haría de una manera mucho más sencilla. Diría a los alumnos que busquen un buen tren de Birmingham a Newcastle. Cada alumno tendría libertad de encarar el problema a su modo y esta tarea, si se efectúa con éxito, serviría mucho para desarrollar las facultades del pensamiento". Extraído de Gorst, Harold E. *Curse of Education,* Londres, 1901.

Raquel S.Kalizsky *
*Prof. de Matemática, egresada del I.S.P. "Dr. J. V. González"

Nota: los subrayados son nuestros.

Correo de lectores

Agradecemos profundamente los elogios (desmedidos, a nuestro entender) y las muestras de cariño recibidas de nuestros lectores. Es indudable que sin su aliento, muchas de las tareas emprendidas no llegarían a su fin. Sabemos el esfuerzo que significa para cada uno de los que nos escribe, distraer su tiempo de las obligaciones. Deseamos fervientemente que se sientan recompensados al leer nuestras páginas.

18 de Diciembre de 1997.

Queridos amigos de Axioma:

En primer término quiero felicitarlos por su trabajo en la revista, es admirable el tesón que ponen para llevarla adelante. Imagino las horas de trabajo que lleva la investigación y preparación de los artículos que presentan, las discusiones, los acuerdos y desacuerdos, en otras palabras, la organización de la revista en sí misma. ¡Los felicito! (sobre todo si consideramos que la remuneración económica no debe alcanzar sus expectativas).

Pero el objetivo de mi carta no es halagarlos sino hacerles un pedido. El Profesorado Joaquín V. González es una institución a la que tengo mucho afecto y respeto, y de la cual no he podido separarme completamente. Soy adscripta del Prof. Martínez en la Cátedra de Análisis I y cada vez que puedo asisto a las conferencias que la Comisión de Cultura organiza.

Durante este año, el primero en el que me he desempeñado como profesora, han surgido en mí muchas dudas sobre diferentes temas metodológicos, dudas que aparecen cuando se está frente al aula en la tarea diaria, que no se presentan cuando se cursan las distintas materias curriculares. Fue allí donde noté que no hay en el Profesorado un ámbito en el que el egresado pueda discutir estos temas, intercambiar opiniones, asesorarse. Un lugar donde los egresados dialoguen con los alumnos del profesorado y transmitan las experiencias adquiridas tanto dentro como fuera del Instituto.

Hasta ahora nunca había comprendido del todo la presencia de los graduados en distintas instituciones. Hoy puedo decir que, no sólo la comprendo sino que la considero imprescindible dentro del Profesorado de Matemática, ya que somos nosotros los que estamos empapados en las distintas problemáticas del Instituto.

Me gustaría que con el apoyo de Uds., quienes ya han logrado un nombre y un prestigio entre alumnos y profesores, se busquen los medios para crear una Comisión de Graduados.

Espero que esta idea les guste y la compartan. Y como no quiero olvidar en qué época del año estamos, les deseo muchas felicidades en estas fiestas.

Carolina G. Ruggeri

Gracias a nuestros amigos de Letra & Color por sus buenos augurios para 1998.

Polinomios

Los polinomios suelen suscitar injustificados temores en el aula. A continuación les transcribo los apuntes que preparé pensando en mis clases sobre el tema; en ellos intento destacar la importancia del mismo. Ensayo un nuevo enfoque, que evita especialmente poner el acento en los "casos de factoreo"; en cambio, trato de explicar por qué es importante factorizar las expresiones polinómicas. Por razones de espacio, no puedo adjuntar muchos ejemplos de ejercitación; sin embargo algunos otros ejercicios sobre el tema aparecerán en nuestro próximo número. No digo que el enfoque propuesto por esta nota logrará despejar todas las dificulatdes acerca de cómo exponer el tema, pero creo que vale la pena acercarse a esta nueva visión de los POLINOMIOS.

En su *Introductio in analysis infinitorum* (1784, dos volúmenes) Euler utiliza el concepto de función (cuyo símbolo f(x) también le pertenece) en la forma que conservó mucho tiempo: función de x es toda expresión analítica de esta variable obtenida mediante una combinación finita o infinita de símbolos algebraicos o trascendentes (esta distinción también es de Euler). A veces dio también otra acepción de función, al referirse a toda relación entre x e y tal que se represente en el plano mediante una curva trazada a "mano libre", es decir una curva continua dentro de la acepción vulgar de continuidad.

Definición de función en la actualidad: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Una función de A en B es una correspondencia que a *cada* elemento de A le asigna un *único* elemento de B.

Esta definición seguramente ya te es conocida. La recordamos, pues hablaremos ahora de una familia de funciones particulares: las llamadas POLINÓMICAS.

¿Para qué sirven?
Las funciones polinómicas nos permiten predecir fenómenos. Cuando se estudia un fenómeno, contar con la función que lo describe es contar con una herramienta poderosísima para predecir o pronosticar qué va a ocurrir. En muchos casos, no es simple encontrar esta función; se suele buscar entonces una función sencilla como, por ejemplo, una función polinómica lineal que nos describa aproximadamente el comportamiento del fenómeno que se quiere estudiar.

Definición: Se llama **polinomio** en una indeterminada a una expresión de la forma:

$$a_0 + a_1 . x + a_2 . x^2 + ... + a_n . x^n$$

en la que a_0, a_1, a_2, ..., a_n, son los COEFICIENTES, x es la INDETERMINADA y

$x^2 = x.x$

$x^3 = x.x.x$

.....

$x^n = x.x.x....x$ (n factores)

Estudiaremos polinomios cuyos coeficientes son números reales. Al escribir esta expresión suponemos que a_n es distinto de cero. Decimos que n es el GRADO del polinomio y que a_n es su COEFICIENTE PRINCIPAL y que a_0 es su TERMINO INDEPENDIENTE.

Observación: El polinomio nulo NO tiene GRADO.

La palabra polinomio significa "muchos términos". A los polinomios se los suele indicar con una letra mayúscula, P, Q, R, etc. y se suele indicar también entre paréntesis su indeterminada o sus indeterminadas: P(x), Q(z), R(x,y).

1) Encuentra los valores de a, b, c y d, para que los polinomios P y Q sean iguales.

a) $P(x)= -3.x^3 - \frac{\sqrt{2}}{2}.x + 2$

$Q(x)= a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$

b) $P(x)= a.x^3 - 3.x^2 - b.x + c$

$Q(x)= b.x^3 + b.x^2 + d.x + 2.a$

2) Escribe dos polinomios del grado indicado, y tales que todos los coeficientes de P sean racionales y los de Q irracionales.
a) grado 0 b) grado 2

3) a) Escribe un polinomio de grado 1, cuyo término independiente sea 0, y cuyo coeficiente principal sea -3. ¿Es único? ¿Cuántos hay que cumplan estas condiciones?
b) Escribe un polinomio de grado 4, cuyo coeficiente principal sea 2, el término independiente sea 3, y los demás coeficientes sean nulos. ¿Cuántos hay que cumplan estas condiciones?

Para poder trabajar con polinomios debemos poder operar con ellos. Por suerte, las operaciones entre polinomios son muy similares a las que realizamos con números enteros. Esto se debe a que ambos conjuntos, el de todos los polinomios y el de los números enteros, tienen la misma estructura, son "anillos euclídeos".

Operaciones con polinomios

* Adición, sustracción y multiplicación

$S(x)= -5.x^3 + 3.x^2 - x + 2$
$T(x)= 2 . x^2 + 5$

S + T $= -5.x^3 + (3 + 2).x^2 - x + (2 + 5)$
$= -5.x^3 + 5.x^2 - x + 7$

S - T $= -5.x^3 + 3.x^2 - x + 2 - (2.x^2 + 5)$
$= -5.x^3 + (3 - 2).x^2 - x + (2 - 5)$
$= -5.x^3 + x^2 - x - 3$

S . T $= (-5.x^3 + 3.x^2 - x + 2) . (2.x^2 + 5)$
$= -5.x^3.x^2 - 5.x^3.5 + 3.x^2.2.x^2 + 3.x^2.5 - x.2.x^2 - x.5 + 2.2.x^2 + 2.5$
$= -5.x^5 - 25.x^3 + 6.x^4 + 15.x^2 - 2.x^3 - 5.x + 4.x^2 + 10$
$= -5.x^5 + 6.x^4 - 27. x^3 + 19.x^2 - 5.x + 10$

* División
Como ya dijimos, podemos hacer un paralelo con los números enteros. ¿Cómo hacemos para dividir 7 : 2? Si recordamos el algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} -\ 6 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

por lo cual 7 = 3 . 2 + 1, donde sabemos que el RESTO <u>debe</u> ser menor que el DIVISOR.

Veamos como trabajar con POLINOMIOS

$S(x)= -5.x^3 + 3.x^2 - x + 2$; $T(x)= x^2 + 5$. Entonces **S(x) : T(x)**

$$\begin{array}{r|l} -5.x^3 + 3.x^2 - x + 2 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\ -5.x^3 \qquad - 25.x & -5.x + 3 \\ \hline 3.x^2 + 24.x + 2 & \\ -\ 3.x^2 \qquad + 15 & \\ \hline 24.x - 13 & \end{array}$$

Por lo tanto:
$-5.x^3 + 3.x^2 - x + 2= (-5.x + 3).(x^2 + 5) + (24.x -13)$
donde el grado del polinomio resto, debe ser menor que el del polinomio divisor S o bien el polinomio resto debe ser el polinomio nulo.
En general: Dividir un polinomio S por un polinomio T siendo $grS \geq grT$ y $T \neq 0$. Significa hallar los polinomios Q y R tales que verifiquen:
a) S = Q . T + R
b) gr R < gr T o bien R = 0

1) Dado $Q(x)= 5.x^3 + 3.x^2 + x + 2$, encuentra $P \in R[x]$, o sea el conjunto de los polinomios con coeficientes reales, tal que:

a) gr(P.Q)= 4 y el coeficiente principal de P es 2.
b) gr(P.Q)= 5 y todos los coeficientes de P son iguales.

2) Efectúa las siguientes operaciones:
a) $(x + 2)^2 =$ b) $(x - 5)^2 =$
c) $(-\frac{1}{3}x - \frac{3}{4})^2 =$ d) $(-\frac{\sqrt{3}}{5}x^2 + \sqrt{12})^2 =$
e) $(x+5)(x-5)=$ f) $(3x^3 - 2)(3x^3 + 2)=$
g) $(x - 5)^3 =$

3) Halla el cociente y el resto de la división de P por T, y completa:
a) $P(x) = 2.x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$
$T(x) = x^3 + x^2 + 2 . x + 1$,
$P(x) = T(x) . ... + ...$ ¿Es T(x) divisor de P(x)?

b) $P(x) = x^3 - 1$ $T(x) = x - 1$
$P(x) = T(x) . ... + ...$ ¿Es T(x) divisor de P(x)?

c) $P(x) = x^2 + 4.x + 4$ $T(x) = x + 2$
$P(x) = T(x) . ... + ...$ ¿Es T(x) divisor de P(x)?

4) Un industrial vende x de sus productos según la función de venta $V(x)= x^3 + 3.x^2 + x + 2$, donde x representa la cantidad de productos vendidos. A su vez, el costo de producir x de sus productos está dado por la función de costo $C(x)= x^2 - x + 2$. a) ¿Cuánto cobra este industrial por la venta de 100 artículos?, ¿y por 20?; b) ¿Cuáles son sus costos en cada caso? ¿cuál es su ganancia neta en cada caso?; c) Encuentra una función que le dé la ganancia neta para una cantidad cualquiera de artículos.

¿Qué significa que un número sea cero o raíz de un polinomio? Simplemente que si P(x) es un polinomio y reemplazamos x por un número concreto, "la cuenta" (o sea su imagen) nos dé cero. O lo que es lo mismo, a es cero o raíz de P(x) si y sólo si P(a)=0.

Por ejemplo:
x = 2 es raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 4.x + 4$ pues $P(2) = 2^2 - 4.2 + 4 = 0$.
En cambio, x = 3 no es raíz de P(x) pues $P(3) = 3^2 - 4.3 + 4 = 1$

Propiedad de las raíces
El Teorema del resto es importante, principalmente, porque nos permite, conociendo una raíz de un polinomio, rebajar su grado en una unidad.

Teorema del Resto

El resto de la división P(x) : (x - a) con P(x) $\in$ R[x] y a $\in$ R coincide con el número P(a).

Demostración: Sabemos que P(x) : (x - a) significa encontrar Q(x) y R(x) que cumplan:
$P(x) = Q(x) . (x - a) + R(x)$ con $R(x) = 0$ o bien gr $R(x) < 1$

Luego calculamos P(a), reemplazando x por a.
$P(a) = Q(a) . (a - a) + R(a)$

$P(a) = R(a)$ y R(a) es un número real ya que su grado es 0.

Por lo tanto, el valor de P(a) coincide con el del resto de la división P(x) : (x - a)

Corolario: Sea k $\in$ R, k es raíz de P(x) $\in$ R[x] si y sólo si x - k divide a P(x).
(Intenta demostrarlo)

Por ejemplo: Tomemos el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, podemos verificar fácilmente que x=1 es raíz del polinomio (mas adelante veremos cómo hallar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros). Utilizando el corolario del teorema del resto, sabemos que x-1 debe dividir a P(x). Efectuamos la división y obtenemos

$$
\begin{array}{l|l}
\;\; x^3 + 4 . x^2 + x - 6 & x - 1 \\
\hline
-\; x^3 - x^2 & x^2 + 5 . x + 6 \\
\hline
\quad 5 . x^2 + x - 6 & \\
\quad -\; 5 . x^2 - 5 . x & \\
\hline
\qquad 6 . x - 6 & \\
\qquad -\; 6 . x - 6 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Luego: $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x^2 + 5x + 6)$
Si queremos encontrar la/s raíces restantes podemos trabajar con $x^2 + 5x + 6$. Comprobamos que x=-2 es raíz y utilizando nuevamente el corolario del teorema del resto, tendremos que $x^2 + 5x + 6$ es divisible por x+2. Luego obtendremos dividiendo: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.
Con lo cual pudimos factorizar P(x) y ahora se ven claramente sus tres raíces:
$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$.

¿Por qué es importante demostrar?
Muchas veces la intuición nos engaña. Por más que verifiquemos que una propiedad se cumple en muchos ejemplos siempre puede existir uno donde no se cumpla. ¿Cómo podemos estar se-

guros que eso no va a pasar? La única forma de asegurarnos de que eso no pase es haciendo una demostración la cual prueba la veracidad de la propiedad en todos los casos y esto no puede hacerse tomando números particulares.
Por ejemplo:
* 2 es par, $2^2 = 4$ es par. 4 es par, $4^2 = 16$ es par. ¿Es cierto que el cuadrado de un número par es un número par?

* $(2 + 0)^2 = 2^2 + 0^2$. $(0 + 3)^2 = 0^2 + 3^2$. ¿Es cierto que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?

La matemática es la única ciencia que nos permite hacer demostraciones exactas. Si no las hacemos, perderemos la mejor ocasión para adquirir la noción de lo que es un pensamiento riguroso. Faltos de esta noción adolesceremos siempre de la falta de un punto de comparación para juzgar el valor de "las demostraciones" que nos propondrá la vida moderna.
En matemática todo se puede demostrar, muchas veces no lo hacemos, pues se requiere de conceptos que no están a nuestro alcance.

1) Aplica el teorema del resto para obtener el resto de la división de P por T, sin efectuar la división.
a) $P(x) = x^{20} - x^{15} + 3.x^3 + 2$; $T(x) = x+1$

b) $P(x) = 2.x^8 - 2.x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$
$T(x) = x - \sqrt{3}$

c) $P(x) = 6.x^3 - x^2 + 5.x - 8$; $T(x) = 3.x + 6$

2) Decide, sin efectuar la división, si T es divisor de P.
a) $P(x) = 2.x^3 + x^2 + x - 1$ $T(x) = x - \frac{1}{2}$

b) $P(x) = x^7 + x^6 - 7.x^4 - 8.x^3 - 8.x$
$T(x) = x + 2$

Si recordamos cuando trabajamos con números enteros, cada uno se puede descomponer como producto de sus factores primos (por ejemplo: $12 = 2^2 . 3$) en forma única. Lo mismo ocurre con los polinomios, pero ¿qué es un polinomio primo?
Un **polinomio es primo o irreducible** si sólo puede expresarse como producto de dos polinomios, uno de los cuales es de grado 0.

Por ejemplo:
1) El polinomio $x^2 - 4$ no es irreducible, pues además de poderse escribir como multiplicación de un polinomio por uno de grado 0:

$$2.(\frac{1}{2}.x^2 - 2)$$

también se puede escribir como multiplicación de dos polinomios de grado mayor que 0:

$$(x-2).(x+2).$$

2) El polinomio $5.x + 2$ es irreducible.

3) El polinomio $x^2 + 5$ es irreducible.

Observación: Los polinomios de grado 0 y el polinomio nulo no son primos ni compuestos. ¿Cuál es el equivalente de esta observación en el conjunto de los números enteros?

Para que, al igual que en los enteros, la descomposición en factores primos sea única, se definen los polinomios mónicos, que son aquellos cuyo coeficiente principal vale 1. Podemos enunciar el:

Teorema Fundamental de la Aritmética (para polinomios):

Todo polinomio de grado mayor que cero y distinto del polinomio nulo se representa como producto de polinomios mónicos, irreducibles en R[x] en forma única.

Dos observaciones importantes:
* Todo polinomio de grado 1 es irreducible.
* Todo polinomio P(x) con grP > 0, es irreducible o es divisible por un polinomio irreducible.

Factorización

Si se tiene expresada una ecuación como producto de factores primos (es decir factorizada) es una gran ayuda para resolverla, pues se obtienen las raíces en forma inmediata.

Por ejemplo si debemos resolver la siguiente ecuación: (x-1)(x-2)=0.
Sabemos que en los números reales vale que una multiplicación es cero si y solo si alguno de los factores es cero. Por lo tanto en nuestro ejemplo, o bien x-1=0 o x-2=0. Para que x-1=0, x puede tomar un único valor x=1, lo mismo ocurre en el caso de x-2=0 donde x=2. Luego las raíces del polinomio (x-1)(x-2) son 1 y 2, o sea el conjunto solución de la ecuación (x-1)(x-2)=0 es {1; 2}

En general, no es fácil encontrar las raíces de un polinomio. Evariste Galois (matemático francés, 1811-1832) demostró que es IMPOSIBLE encontrar una fórmula para hallar dichas raíces en polinomios de grado 5 en adelante. Con lo cual, como tantas otras veces en matemática, tenemos que resignarnos y saber que no encontraremos "fórmulas mágicas" que nos den los resultados. Tendremos que razonar y sobre todo trabajar, para obtener resultados.

¿Cómo factorizar un polinomio P(x)?

* *Si conocemos una de sus raíces*, utilizando el corolario del teorema del resto podemos hallar un polinomio de la forma x - k , con k $\in$ R tal que P(x) = Q(x) . (x - k).
Por ejemplo: $P(x) = x^2 - 1$ entonces x = 1 es raíz de P(x), luego, $(x^2 - 1) : (x - 1)$ tiene resto cero y podemos encontrar un polinomio Q(x) tal que $x^2 - 1 = Q(x) . (x - 1)$.

Luego $x^2 - 1 = (x + 1) . (x - 1)$
donde (x - 1) y (x + 1) son polinomios irreducibles ya que tienen grado 1.

* *¿Qué ocurre si no conocemos las raíces?* A continuación daremos un teorema que nos permite encontrar <u>TODAS</u> las raíces racionales de un polinomio P(x) con coeficientes enteros.

<u>Teorema de Gauss</u> (Carl Frederich Gauss, matemático 1777-1855)

Si p y q son enteros, no nulos, sin divisores comunes entre sí excepto 1 y -1 (o sea p y q son coprimos), tales que el número racional $\frac{p}{q}$ es raíz de P(x) entonces a_0 es múltiplo del entero p y a_n es múltiplo del entero q.

Por ejemplo: Si $P(x) = 8 . x^3 + 22 . x^2 - 7. x - 3$

Divisores de a_3 : 1; -1; 2; -2; 4; -4; 8; -8
a_0 : 1; -1; 3; -3

Las posibilidades de a_0/a_3 son: 1; -1; 1/2; -1/2; 1/4; -1/4; 1/8; -1/8; 3; -3; 3/2; -3/2; 3/4; -3/4; 3/8; -3/8.

O sea, si P(x) tiene raíces racionales ellas deben ser alguno de los números antedichos. Evaluando el polinomio P(x) en dichos números podremos saber cuáles, si las hay, son raíces de P(x).
En este caso las raíces son: { -1/4; 1/2; -3}

Si conocemos las raíces podremos factorizar el polinomio:

$$P(x) = 8 . (x + \frac{1}{4}) . (x - \frac{1}{2}) . (x + 3)$$

1) Halla las raíces reales de P.

a) $P(x)= (x - 1).(x - 2)$
b) $P(x)= (x - \sqrt{3}).(x + 3)$
c) $P(x)= x.(x + \frac{2}{3})$
d) $P(x)= (2x + \sqrt{2}).(3x + \frac{1}{4})$

2) Factoriza P en R[x] y halla las raíces reales de P.

a) $P(x)= x^2 - \frac{8}{3}x - 1$
b) $P(x)= (x^2 + 5x).(x^2 + 1)$
c) $P(x)= 4 . x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$
d) $P(x)= (3x+5).(2x^2 - 8)$ e) $P(x)= x^4 - 16$

3) Encuentra las tres raíces reales de P, y factoriza P, si sabes que -2 es una de sus raíces.
$P(x)= x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

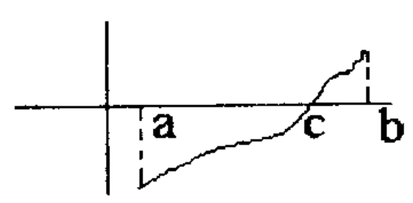
4) Si la única raíz real de $P(x)= x^3 - a \cdot x^2 + x - a$ es 2, el valor de a es:
a) -2 b) 2
c) 4 d) ninguna de las alternativas anteriores

Veremos ahora **cómo aproximar raíces de un polinomio**.

El Teorema de Gauss nos da una manera de hallar todas las raíces racionales de un polinomio P(x), pero ¿qué ocurre con las raíces irracionales? ¿cómo encontrarlas? Si bien no hay un mecanismo que nos permita encontrar el valor exacto de dicha raíz irracional, podemos aproximar su valor tanto como querramos. Para ello utilizaremos un método fundamentado en el siguiente:

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en $[a;b] \subset R$ (los polinomios son funciones continuas en los reales) y el signo de f(a) es distinto del signo de f(b), entonces existe un $c \in (a;b)$ tal que f(c)=0.



Valiéndonos de este resultado podemos aproximar el valor de las raíces de un polinomio.
Como ejemplo, hallemos con error menor que 0,1 la raíz de: $P(x)= x^3 + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 6$ si sabemos que se encuentra en el intervalo (1;2)

$P(1) < 0$ y $P(2) > 0$, o sea estamos en las condiciones requeridas para aplicar el teorema.

1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
-				-	+					+

Por lo tanto, la raíz que buscamos es aproximadamente 1,4. Si quisiéramos encontrarla con error menor que un centésimo debemos subdividir el intervalo (1,4 ; 1,5) en diez y volver a estudiar el signo de la función en cada uno de dichos intervalos; obtendremos que la raíz buscada se encuentra en el intervalo (1,41 ; 1,42), o sea es aproximadamente 1,41. Este procedimiento lo podemos repetir cuantas veces querramos obteniendo cada vez mejores aproximaciones de la raíz buscada.

Ejercicio: Aproxima con error menor que 0,01, un cero de f en el intervalo (1,2) siendo:

$$f(x) = -x^3-3x+5.$$

Corolario del Teorema de Bolzano: Si conocemos dos raíces consecutivas de una función, la imagen de los números reales comprendidos entre éstas serán, o bien todas positivas o todas negativas. ¿Por qué?, argumenta a favor de esto. (Sugerencia, haz un gráfico).

Cuando uno tiene datos de una observación le interesa obtener una función que le permita predecir, aunque sea a corto plazo qué ocurrirá. Aquí te contamos una forma de obtener un polinomio, llamado POLINOMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE, que contenga a los puntos conocidos:

Supongamos que tenemos los siguientes puntos: (1;2), (3;7) y (4;6) y queremos encontrar una función polinómica que contenga a estos tres puntos (en realidad este mismo procedimiento sirve para cualquier cantidad de puntos).

Encontremos dicho polinomio en forma analítica. Construyamos un polinomio que tenga como raíces a las primeras coordenadas de los puntos (3;7) y (4;6) y que contenga a (1;2). Así obtendremos:
$P_1(x)= k \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$; donde k es un número real que debe cumplir que:
$P_1(1)= k.(1 - 3).(1 - 4)= 2$
Luego, despejando, obtenemos $k= \frac{1}{3}$ y

$P_1(x)= \frac{1}{3} \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$;

En forma análoga construimos otros dos polinomios que contengan al segundo punto y al tercero respectivamente:

$P_2(x)= -\frac{7}{2} \cdot (x - 4) \cdot (x - 1)$;

$P_3(x)= 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$.

Luego si tomamos el polinomio suma $P(x)=P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$, obtenemos lo buscado, un polinomio que contiene a los tres puntos. ¡Verifícalo!

Un tema que suele estar ligado a la factorización son las **expresiones algebraicas racionales**; veamos cómo relacionarlas con lo que veníamos desarrollando.

Como ya hemos mencionado, los polinomios se comportan en forma similar a los números enteros. Seguramente recordarás que a partir p y q, números enteros, se define el conjunto de los números racionales, $\frac{p}{q}$, con la restricción de que q no sea 0 y aprendiste a trabajar con ellos: a sumar fracciones, restarlas, multiplicarlas, etc. Esto mismo puede hacerse trabajando con polinomios. De esta manera podemos definir las expresiones algebraicas racionales como división de dos polinomios y trabajar con ellas tal como hacemos con las fracciones.

Ejemplo:

En enteros: $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2.7+3.5}{5.7}=\frac{29}{35}$; en forma análoga, si operamos con expresiones algebraicas racionales,

$$\frac{x+5}{2x+3}+\frac{2}{x-1}=\frac{(x+5).(x-1)+2.(2x+3)}{(2x+3).(x-1)}=\frac{x^2+8.x+1}{(2x+3).(x-1)}.$$

¡Cuidado!, esto es válido siempre y cuando x no represente los números 1 o -3/2, de lo contrario estaríamos dividiendo por 0 y esto es IMPOSIBLE.

O bien si los denominadores tienen factores comunes, en enteros: $\frac{2}{15}+\frac{3}{35}=\frac{2.7+3.3}{3.5.7}=\frac{23}{105}$.

En forma análoga si operamos con expresiones algebraicas racionales,

$$\frac{x+5}{2x+2}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{(x+5).(x-1)+2.2}{2(x+1).(x-1)}=\frac{x^2+4.x-1}{2.(x+1).(x-1)},$$

siempre y cuando x no sea -1, ni 1.

1) Efectúa las operaciones indicadas:

a) $\frac{7-x^2}{x^2-1}+\frac{x^2-x-6}{(x-1)(x+1)}=$

b) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=$

c) $\frac{x+2}{x^2}-\frac{x-1}{2.x^3}=$

d) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x-1}=$

2) Decide si los ejercicios siguientes están bien o mal realizados:

a) $\frac{3x+6}{7x+14}=\frac{3(x+2)}{7(x+2)}=\frac{3}{7}$

b) $\frac{3x+6}{7x+14}=\frac{3+6}{7+14}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$

c) $\frac{3x+6}{7x+14}=\frac{3x+3}{7x+7}=\frac{3(x+1)}{7(x+1)}=\frac{3}{7}$

Gisela Serrano de Piñeiro*

*Profesora egresada del I.S.P. - "Dr. Joaquín V. González"

Bibliografía consultada:

* CARIONE, Noemí; CARRANZA, Susana; DIÑEIRO, María Teresa; LATORRE, María Laura; TRAMA, Eduardo - *Matemática 3* - Ed. SANTILLANA.
* CHIARI, Jorge; LAPLAGNE, Eduardo; WYKOWSKI, Ana - *Guía de Matemática III* - Ed. ITINERARIUM
* DE GUZMÁN, Miguel; CÓLERA, José - *Matemáticas I* - C.O.U. - ANAYA
* GENTILE, Enzo - *Notas de Álgebra I* - Ed. EUDEBA
* NORIEGA, Ricardo - *Cálculo diferencial e integral* - Ed. DOCENCIA
* VARELA, Leopoldo; FONCUBERTA, Juan A. - *Matemática Dinámica 3* - Ed. KAPELUSZ

Problemas Propuestos

1. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola*: La suma de tres números naturales es mayor que su producto, y la suma de dos de dichos números es igual a 33. Encuentre los tres números

2. *Colaboración de Gustavo Piñeiro*: Un número x es el a% del número A y el b% del número B. Calcular qué porcentaje representa x del número A+B.

3. *De "Snark" - lista de e-mail*: ¿Puede un número compuesto por 100 ceros, 100 unos y 100 dos ser un cuadrado perfecto?

4. *Colaboración de Gustavo Piñeiro:* Resolver

$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

Nota: En el miembro de la izquierda hay una cantidad infinita de equis.

5. *De "La probabilidad y sus aplicaciones" - Luis A. Santaló - Ed. Ibero-Americana*: Demuestre que la probabilidad de que un número entero dado al azar no contenga la cifra 6 es igual a cero.

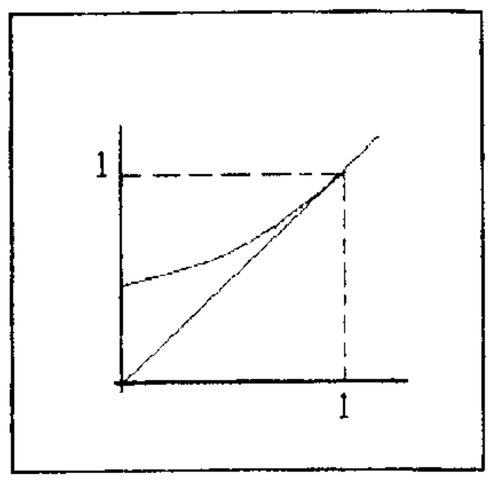
Soluciones a los Problemas de Axioma Nº 9:

1. Colaboración de Gustavo Piñeiro: *Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $0\leq f(x)\leq 1$ $\forall x\in[0,1]$. Probar que entonces existe algún $x_0\in[0,1]$ tal que $f(x_0)=x_0$.*

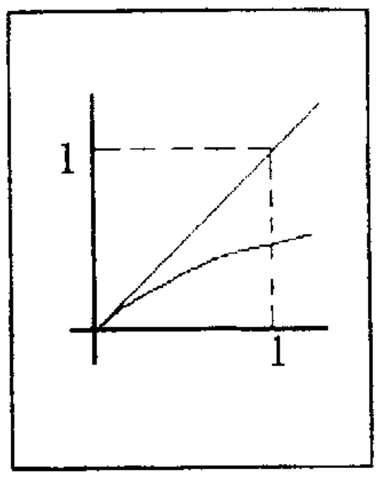
Si f(0)=0 o bien f(1)=1 ya está.
Si esto no ocurre, entonces f(0)>0 y f(1)<1.
Definamos una función g(x) = f(x) - x.
g(x) es continua, pues es resta de funciones continuas.
Luego g(0) = f(0) - 0 > 0 y g(1) = f(1) - 1 < 1.
Por el teorema de Bolzano existe x_0 tal que $g(x_0)= 0$ esto implica que $f(x_0) - x_0 = 0$ y por lo tanto $f(x_0) = x_0$, como queríamos demostrar.

Esta solución fue enviada por la Prof. J. E. Palombella; es una demostración "charlada":

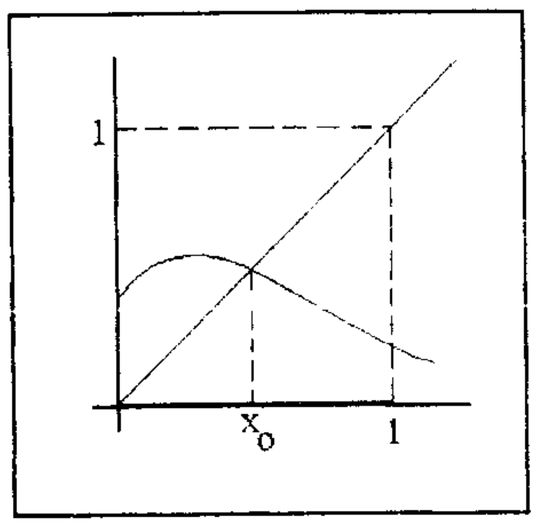
1° caso: Si f(x) se mantiene por encima de la recta y = x, forzosamente ha de ser f(1)=1 y entonces x = 1 es el punto fijo



2° caso: Si f(x) se mantiene por debajo de la recta y = x, forzosamente ha de ser f (0) = 0 y entonces x = 0 es el punto fijo.

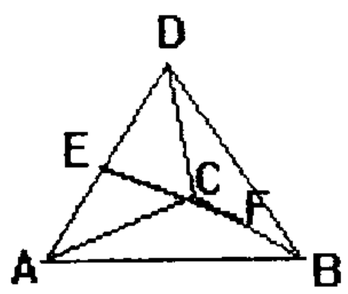


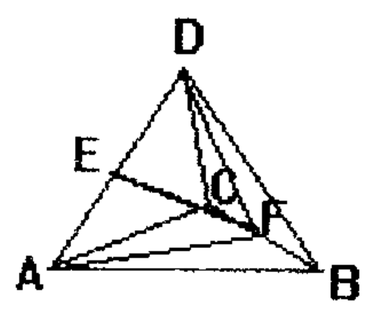
3° caso: Si f(x) corta a la recta y = x, debe existir x_0 tal que $f(x_0)=x_0$ y entonces $x = x_0$ es el punto fijo.

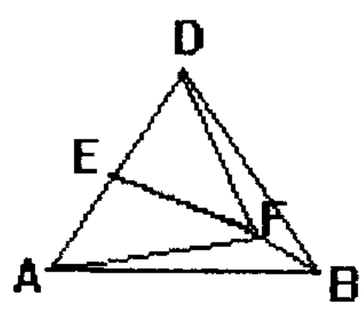


2. De "Cómo plantear y resolver problemas" - G. Polya - Ed. Trillas: *En un tetraedro cualquiera, dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son ortogonales. Además, cada una de esas aristas es perpendicular a la línea, de longitud b, que une sus puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b, y demostrar el resultado obtenido.*

Sabemos que AD=CB=a y que EF=b. Cortemos el tetraedro en dos partes, tomando como plano de corte el que contiene a AD y a EF.

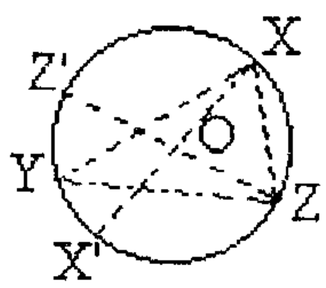






Determinemos el volumen de uno de estos cortes.

Superficie de la base (triáng. AFD): $\frac{a.b}{2}$

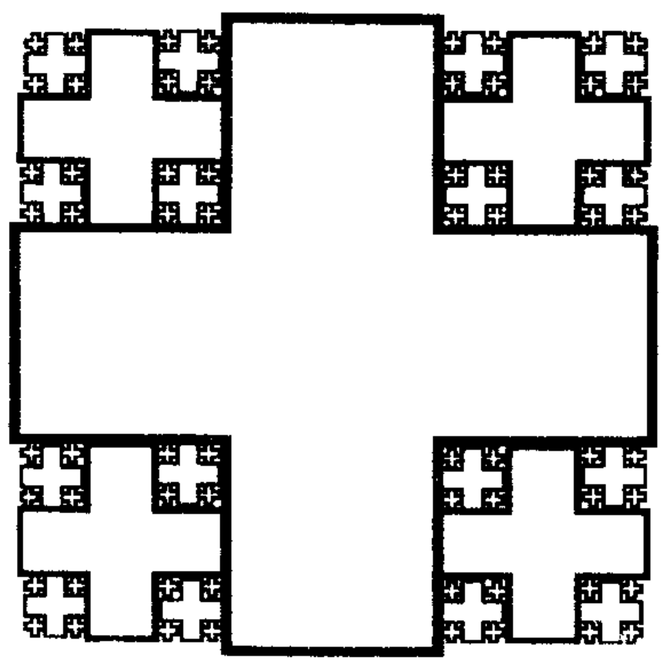


El ángulo EFB es recto, pues FB y AD son ortogonales según el enunciado.

Por lo cual el volumen está dado por: $\frac{1}{3}.\frac{a.b}{2}.\frac{a}{2}$

y por lo tanto, el volumen pedido es:

$$Vol = 2.\frac{1}{3}.\frac{ab}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2b}{6}$$



3. *Colaboración de Gustavo Piñeiro:*

Calcular el área de la figura resultante.

Área de la 1° cruz: 5 . 1

Área de la 2° cruz: $5 . \frac{1}{3^2}$ (de estas hay 4).

Área de la 3° cruz: $5.\frac{1}{9^2}$ (de estas hay 16).

Área de la 4° cruz: $5.\frac{1}{27^2}$ (de estas hay 64).

Y así sucesivamente. Por lo tanto, el área total de la figura es:

$$5.(1+\frac{4}{3^2}+\frac{4^2}{3^4}+\frac{4^3}{3^6}+\ldots)=5.\sum_{i\in N_0}\left(\frac{4}{9}\right)^i=5.\frac{1}{1-\frac{4}{9}}$$

Lo que nos da 9.

Observación: Vale la pena notar que 9 también es el área del cuadrado en el que está contenido nuestro gráfico.

4. De "La probabilidad y sus aplicaciones" - Luis A. Santaló - Ed. Ibero-Americana: *Sobre una circunferencia se dan 3 puntos X, Y, Z al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo X,Y,Z contenga el centro O?*

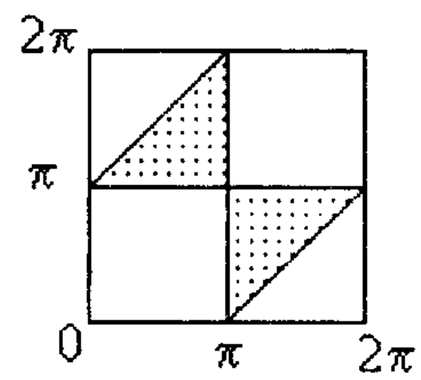
El punto Z puede ser cualquiera; sea Z' su diametralmente opuesto. Fijado X y siendo X' su opuesto, para que el triángulo XYZ contenga a O, Y debe estar en el arco Z'X' (ver figura)

Representemos como coordenadas rectangulares de un plano los valores x=ángulo ZOX, y=ángulo ZOY, que determinan X e Y. Para que Y esté en el arco Z'X' se deben cumplir las condiciones

$\pi < y < \pi + x$ para $0 \le x < \pi$

$x - \pi < y < \pi$ para $\pi \le x < 2\pi$

Por lo tanto, los puntos favorables son los correspondientes al área punteada en la figura.



Dividiendo esta área por la total del cuadrado de lado 2π resulta que la probabilidad buscada vale 1/4.

5. Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola: *Dé un ejemplo de dos funciones periódicas definidas en R, cuyo período sea t y cuyo producto sea una función periódica de período t_1 tal que $0<t_1<t$*

Sea g(x) = sen x y f(x) = cos x. Ambas funciones tienen período 2π.

Tomemos el producto h(x) = sen x . cos x. Realizando un estudio de esta función podemos ver que tiene período π.

¡Hasta el próximo número!