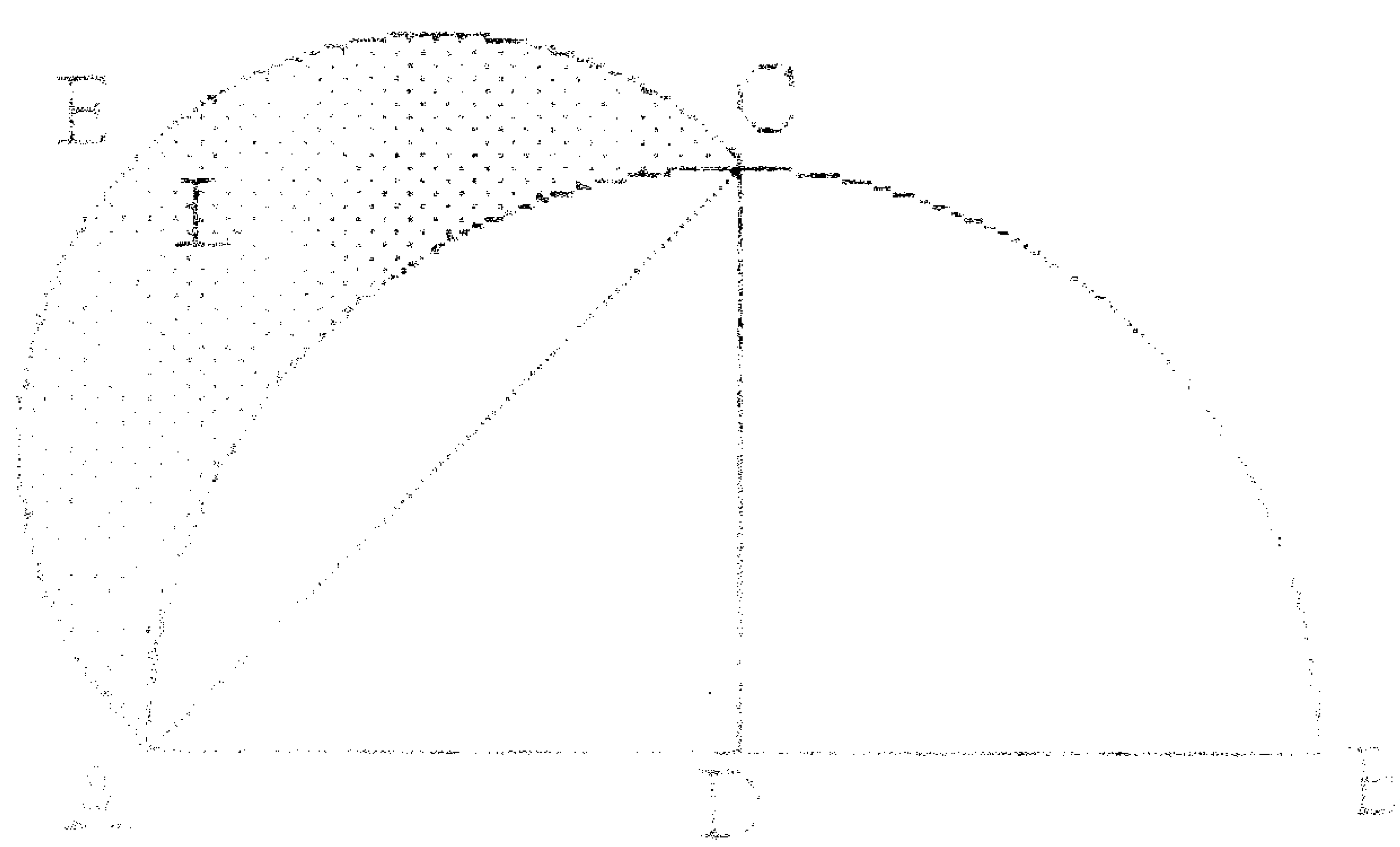
Aχioma

La revista de los estudiantes y profesores de matemática



Los problemas clásicos griegos
(Primera Parte)

Aχioma N° 8

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Directora
Gisela Serrano de Piñeiro

Propietarios
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro
Jorge Martínez

Colaboraron en este número
Francisco Di Giorgio

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Suscripción por 5 números (incluye gastos de envío): $11.-

Ejemplar suelto: $ 2.-

Ejemplar atrasado: $ 2,20

Editorial

Pasa el tiempo y resurgen viejas controversias a medida que crecemos ¿En qué dirección vamos? ¿Hacia qué sectores pretendemos acercarnos?

Podríamos estar tentados de contestar que hacia todos. Tal vez, es lo que más nos gustaría.

Pero es inevitable que nuestros lectores pretendan obtener un material de primerísimo nivel, que demanda un esfuerzo de lectura y comprensión superior al de un trabajo de divulgación.

Creemos que ese es el lugar que queremos que ocupe nuestra publicación, precisamente porque no conocemos otra dirigida a profesores y futuros docentes de Matemática, que abarque aspectos didácticos, históricos o estrictamente teóricos.

Los profesores no somos, ni queremos ser, Matemáticos puestos a enseñar. Defendemos la especificidad de nuestra formación profesional. Queremos ejercer con el más alto nivel de formación científica y con todo el bagaje que los Institutos de Formación Docente tienen en su haber para transmitirnos.

En la lucha por conseguir este objetivo esperamos encontrarnos con nuestros lectores, codo a codo, en todos los rincones.

Sumario

Septiembre / Octubre de 1997

Año 2 - N° 8

Caos y Fractales (Segunda parte)

"El movimiento de una simple ala de una mariposa produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma. O quizás uno que no se iba a formar, se forma."

(I. Stewart, ¿Juega Dios a los dados?)

Megaflop.

Los cálculos para el pronóstico del tiempo deben hacerse como alma que se lleva el diablo. El número de operaciones aritméticas necesarias es astronómicamente grande y el tiempo del que se dispone para realizarlas es muy poco.

La velocidad de un superordenador se mide en *megaflops*. Un megaflop representa un millón de operaciones aritméticas por segundo. El superordenador Control Data Cyber 205 de la Oficina Metereológica de Bracknell, en el norte de Europa, opera a una velocidad máxima de 400 megaflops. En apenas media hora puede dar un pronóstico aceptable del tiempo atmosférico para el día siguiente en toda Europa.

Cada día el Cyber 205 hace la predicción correspondiente a los diez días siguientes. Los primeros cuatro días, los pronósticos resultan bastante precisos, pero después de ese lapso tienden a diferir del tiempo verdadero.

El jueves 15 de octubre de 1987 el noroeste de Europa sufrió el peor temporal de viento y lluvia desde 1703. Sin vergüenza aparente por no haber predicho las peores tormentas de los últimos 285 años, la supercomputadora continuó haciendo pronósticos de **ligeros chaparrones con intervalos de buen tiempo y vientos moderados**.

"Pronosticar el tiempo es una cosa", escribe Ian Stewart en *¿Juega Dios a los dados?*, "pronosticarlo *correctamente* es otra muy distinta".

Podría pensarse que el carácter aleatorio de todo pronóstico del tiempo se debe simplemente a la dificultad para conocer con la suficiente precisión todos los parámetros significativos. Puede suponerse también que, a medida que se hagan mediciones más precisas y se tengan herramientas más poderosas de cálculo, la exactitud de los pronósticos mejorará. Sin embargo hay razones teóricas para creer que existe una limitación fundamental inherente a la precisión con la que podemos pronosticar el tiempo. El comportamiento de cuatro o cinco días, o a lo sumo una semana, es lo más que podemos aspirar a anticipar con cierto grado de exactitud.

El objetivo de esta nota es comentar la naturaleza de estas limitaciones teóricas.

Las ecuaciones.

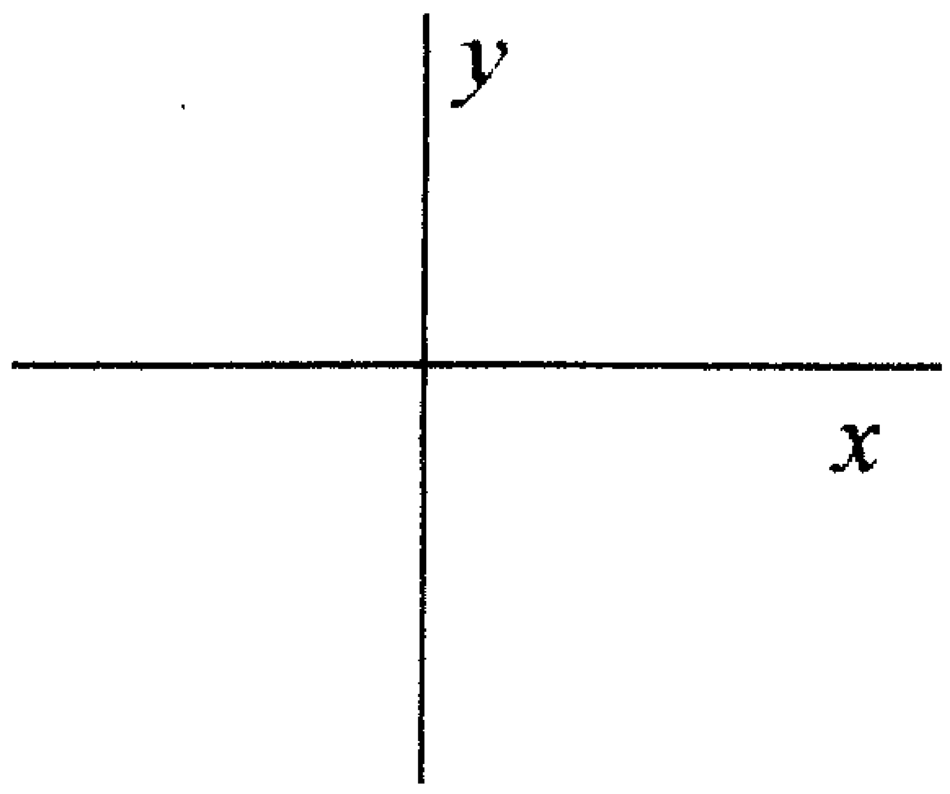
Tratemos de explicar, mediante un ejemplo sencillo, el tipo de cálculos que debe hacer una computadora dedicada a la predicción del tiempo.

La herramienta matemática más importante de todas aquellas que se utilizan para describir la evolución de un sistema físico (como por ejemplo la atmósfera) son las ecuaciones diferenciales. Una breve exposición sobre este tema puede encontrarse en las notas de esta misma sección aparecidas en los números 4, 5 y 6 de Aχioma.

Para simplificar la situación, supongamos que la atmósfera, en lugar de ser tridimensional, fuera bidimensional, plana.

Imaginemos además a las distintas moléculas que forman el aire como bolitas puntuales en movimiento.

Introduzcamos en nuestra atmósfera plana un sistema de ejes cartesianos:



La posición de cada molécula de aire puede expresarse mediante sus coordenadas con respecto a estos ejes.
Convengamos en medir el tiempo en segundos y fijemos arbitrariamente algún instante como el momento $t = 0$.
Si cada una de las moléculas del aire permaneciera inmóvil, la atmósfera estaría completamente en calma, sin vientos ni ningún otro fenómeno. Esta situación no sólo sería poco interesante, sino que además sería muy poco realista.
El aire *real* está en constante movimiento, con corrientes ascendentes, descendentes y vientos cambiantes. Esto significa que si en el instante inicial $t = 0$ una molécula ocupa la posición (x,y); en el instante $t = 1$ ocupará probablemente una posición diferente y aún otra distinta en el instante $t = 2$.
El lector no habrá dejado de advertir que el párrafo anterior está describiendo una función. La misma, en cada instante t nos da la posición de la molécula en ese momento.
Con más precisión, podemos hablar de **dos** funciones. Una de ellas es $x(t)$, la cual en cada instante t nos da el valor de la **primera coordenada** de la posición de la molécula. La otra función es $y(t)$ y nos da la **segunda coordenada** de la posición de la molécula en el instante t.
De este modo $(x(0),y(0))$ será la posición en el instante $t = 0$ (llamada también la posición inicial); $(x(1),y(1))$ será la posición en el instante $t = 1$, etc.
Como ya dijimos, las leyes que describen la evolución del sistema se expresan matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales. Un ejemplo podría ser el siguiente:

$$x' = -y$$
$$y' = x$$

Estas ecuaciones están diciendo que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son tales que la derivada de $x(t)$ es igual a $-y(t)$, y la derivada de $y(t)$ es $x(t)$.
Este sistema ha sido elegido en forma arbitraria, con el único objetivo de brindar un ejemplo que sea sencillo de desarrollar. Las ecuaciones que realmente describen la evolución de la atmósfera son la expresión matemática de las leyes fisicas que la rigen; son altamente complicadas e involucran un número elevado de variables (no solamente tres variables para la posición, sino también variables que describen la temperatura del aire, la humedad, la presión, etc.)
Nuestras ecuaciones, aunque extremadamente sencillas, nos permitirán sin embargo entender la *idea* de los métodos utilizados para la predicción del tiempo mediante ordenadores.

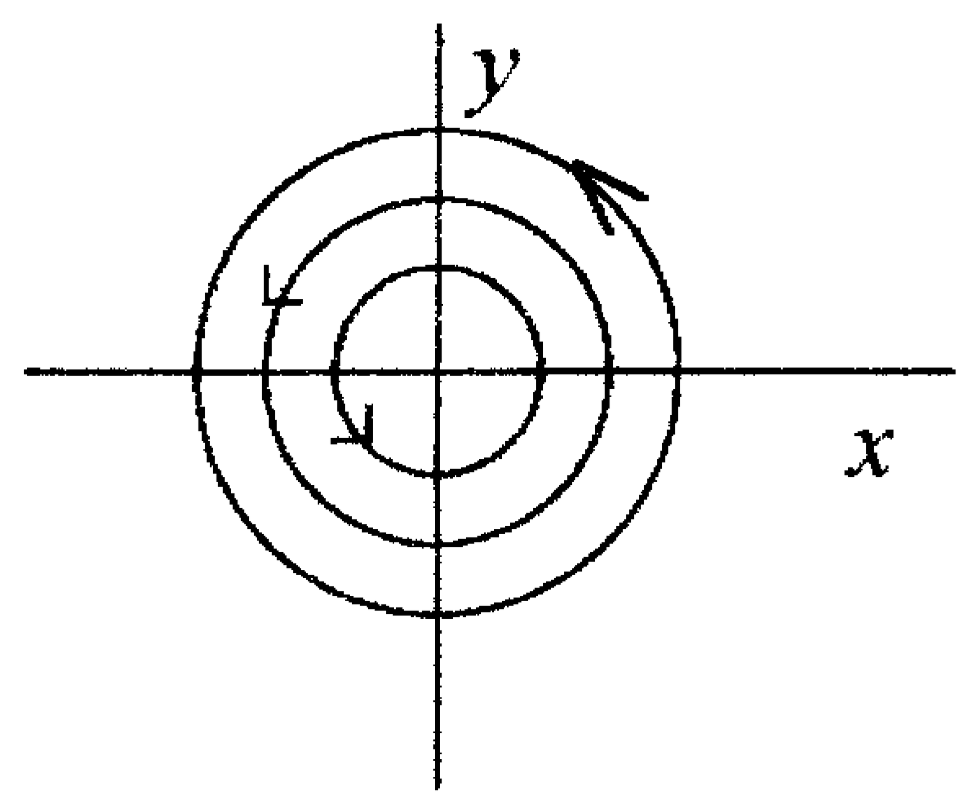
Llamemos $x(0) = \alpha$, $y(0) = \beta$, el lector podrá comprobar fácilmente que las siguientes funciones satisfacen las dos ecuaciones diferenciales anteriores:

$$x(t) = \alpha \cos(t) - \beta \operatorname{sen}(t)$$
$$y(t) = \beta \cos(t) + \alpha \operatorname{sen}(t)$$

Por lo tanto, conocida la posición inicial (α,β) de una molécula, estas funciones nos permiten calcular su posición en cualquier otro instante t.
Observemos que, cualquiera sea el valor de t, se verifica siempre la siguiente igualdad:

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

La distancia desde $(x(t),y(t))$ hasta el origen de coordenadas es siempre igual a la distancia que había en el instante $t = 0$.



Un poco de reflexión nos indica que esto significa que las moléculas se mueven describiendo circunferencias que tienen, todas ellas, su centro en el origen de coordenadas.
Si la evolución de la atmósfera (que habíamos supuesto plana) estuviera descripta por las ecuaciones

$$x' = -y$$
$$y' = x$$

llegaríamos a la conclusión que, en ella, el aire se mueve en remolinos circulares concéntricos.

Ahora bien, las ecuaciones que realmente describen el estado de la atmósfera son realmente mucho más complejas que el sistema que hemos analizado, y en general resulta totalmente imposible dar explícitamente sus soluciones. Es decir, es completamente imposible dar las *fórmulas* de las funciones que describen el movimiento de las masas de aire.

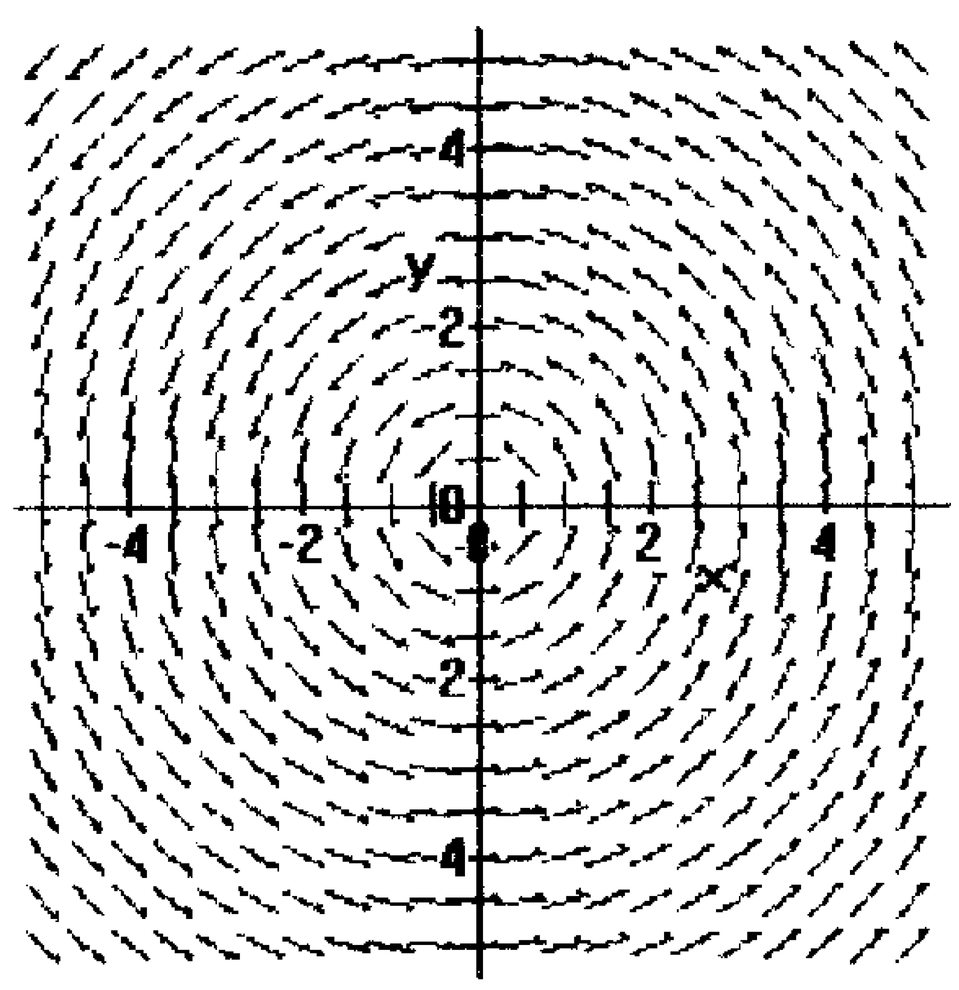
La única manera posible de proceder en esa situación es mediante métodos aproximados (llamados también métodos *numéricos*). En la nota ya mencionada de Aχioma N° 5, se describen algunos de ellos. Recomendamos en particular la lectura de la explicación correspondiente al último de ellos (el llamado método de la poligonal de Euler) ya que los procedimientos numéricos utilizados en la predicción del tiempo tienen en general un mecanismo de filosofía similar al de éste.

Al aplicar un procedimiento numérico, se parte de una posición inicial dada (α,β). Al par de números (α,β) se le aplican ciertas operaciones aritméticas (las cuales dependen de las ecuaciones que se desee resolver). Al aplicar estas operaciones obtenemos la posición aproximada de la molécula un segundo después (o una décima de segundo, o una centésima, o el tiempo que se desee, cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo, más exacta será la aproximación).

Llamemos (α',β') a esta posición aproximada. Al par (α',β') se le aplican las mismas operaciones aritméticas y obtenemos (α'',β''), que es la posición aproximada un segundo después (o el intervalo de tiempo deseado).

Así se continúa y, punto a punto, se va obteniendo una trayectoria aproximada para cada molécula de la atmósfera.

Más abajo puede verse el resultado de resolver numéricamente (mediante una computadora) el sistema que antes analizamos:



Se aprecian claramente las aproximaciones de las trayectorias circulares a las que antes hemos aludido.

En un pronóstico real del tiempo, no se trabaja con pares de números. Como ya dijimos, además de las tres variables que corresponden a la posición (en una atmósfera tridimensional) hay que agregar variables para la presión, la humedad, la temperatura, etc. El procedimiento, sin embargo, es esencialmente similar. Se introducen en la computadora los datos iniciales. El ordenador les aplica una larga serie de complicadas operaciones aritméticas y obtiene las condiciones aproximadas de presión, temperatura, etc. que tendrá la atmósfera un segundo después. Repitiendo una y otra vez este procedimiento, la computadora llega (al cabo de miles de millones de operaciones aritméticas) a dar una estimación del estado de la atmósfera un día después, o dos días, o una semana. Pero, desde luego, sólo se trata de una aproximación.

El efecto mariposa.

En 1963 Edward Lorenz, del M.I.T., publicó un artículo titulado "Deterministic Nonperiodic Flow". Lorenz se había propuesto ser matemático, pero la segunda guerra mundial se interpuso y, en su lugar, llegó a ser meteorólogo. Aunque, de hecho, era todavía un matemático de corazón (la matemática es como una adicción o una enfermedad: uno, verdaderamente, no puede dejarla nunca, incluso si quiere hacerlo). Lorenz publicó su artículo en el *Journal of Atmospheric Science*. Los meteorólogos, que sólo conocían la matemática tradicional, no sabían como utilizarlo. Los matemáticos, que podrían haberlo comprendido, no suelen leer publicaciones sobre meteorología (apenas si tienen tiempo de leer aquellas que corresponden a su propia área). Durante toda una década, el artículo de Edward

Lorenz durmió en la oscuridad. Sin embargo, en sus escasas doce páginas, Lorenz anticipó varias de las ideas fundamentales de la Teoría del Caos.
Lorenz dedicó varios años de estudio al problema de la predicción del clima. Solía construir modelos simplificados de sistemas atmosféricos y dejaba que la computadora calculara, a veces durante días enteros, su evolución futura. El ordenador escribía las trayectorias resultantes en forma de una larga serie de números (en esa época, hacia 1960, no existían aún los sofisticados gráficos de computadora). Sus colegas apostaban acerca de lo que haría a continuación el microclima de Lorenz.
A mediados de 1961 estaba estudiando uno de sus climas simulados. Calculó una solución y quiso estudiar cómo se comportaría en un período de tiempo más grande. En lugar de esperar durante varias horas, anotó los números que había obtenido en la mitad de la ejecución, introdujo la información como un nuevo dato inicial y puso el ordenador a funcionar.
Debería haber ocurrido lo siguiente. En primer lugar, la máquina repetiría la primera mitad de la ejecución original, y luego seguiría a partir de allí. El meteorólogo se fue a tomar una taza de café. Cuando regresó encontró que la primera mitad de la ejecución *no* había repetido la primera mitad de la original. **Empezaban de la misma manera, pero lentamente las dos ejecuciones divergían, hasta que al final no guardaban ningún parecido la una con la otra.**
Lorenz tardó algún tiempo en comprender que la diferencia no se había producido por una falla en la computadora o en el programa. El problema residía en los números que había introducido.
En la memoria del ordenador se almacenaban seis cifras decimales: 0,506127. En la impresión, para ahorrar espacio, sólo aparecían tres: 0,506. Lorenz había introducido los números redondeados suponiendo que la diferencia (una parte entre mil) no tendría consecuencias. Sin embargo, esa pequeña diferencia de redondeo había provocado a la larga un comportamiento completamente diferente del sistema.
Según la manera de pensar tradicional esa pequeña diferencia de redondeo *no debería* haber provocado diferencias significativas. Pero Lorenz comprendió que sus ecuaciones no se comportaban de la manera que esperaría un matemático de mentalidad tradicional.
La idea tradicional es que pequeños errores de medición no generarán errores significativos en las predicciones que hagamos. Cuando se calcula el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, por ejemplo, no se toma en cuenta la influencia gravitacional de Plutón. Esta influencia es extremadamente pequeña y, según la concepción tradicional, se supone que no cambiará significativamente la trayectoria que seguirá la Luna.
Sin embargo, Lorenz descubrió que en muchos sistemas físicos (en realidad en la mayoría de ellos) esta concepción es completamente errónea.
En estos sistemas (ahora llamados caóticos) una influencia casi insignificante trae a largo plazo grandes consecuencias.
Por lo tanto, si al efectuar los cálculos se ignoran todas esas pequeñas influencias, o se las valora de modo incorrecto, las diferencias entre el comportamiento calculado y el comportamiento real del sistema serán inimaginablemente diferentes.
Si se trata de predecir el movimiento de la Luna, el error que se comete al despreciar la influencia de la gravedad de Plutón (o aun la de una galaxia lejana) no será grande si la predicción se limita a unos pocos años, o siglos. Pero al cabo de algunos miles de años, la trayectoria que realmente siga la Luna será muy diferente de la que habríamos esperado.
En cuanto al clima, es posible predecirlo confiablemente con unos pocos días de anticipación. Más allá de ese lapso, los errores producidos por la diferencia de una milésima de grado en la medición de una temperatura, o los causados por no tomar en cuenta el simple aleteo de una mariposa, se habrán multiplicado de tal manera que, sin ninguna duda,

el clima que pronostiquemos será completamente diferente del real.

Lineal vs. no lineal.

Volvamos brevemente al sistema que estudiamos en la sección anterior:

$x' = -y$
$y' = x$

Supongamos que nos muestran, en un gráfico, la posición de una determinada molécula y nos preguntan qué trayectoria seguirá.
Medimos entonces la distancia entre la molécula y el punto (0,0) y, digamos por ejemplo, que la medición nos da que esa distancia es igual a 5. Diremos entonces que la molécula se desplazará siguiendo una circunferencia de ese radio.
Si la verdadera distancia hubiera sido 5,01 en lugar de 5, la trayectoria *real* de la molécula hubiera sido una circunferencia de radio 5,01 en lugar de una circunferencia de radio 5. En este caso un pequeño error de medición habría provocado un pequeño error en la predicción.
El sistema de ecuaciones que hemos estudiado *no* corresponde a un sistema caótico.
En términos matemáticos, las ecuaciones que hemos estudiado constituyen un sistema *lineal* de ecuaciones diferenciales. La palabra *lineal* significa aquí que las funciones incógnitas (x(t) e y(t)) sólo aparecen multiplicadas por constantes y sumadas o restadas; no aparecen multiplicadas entre sí, o elevadas a alguna potencia.
Los sistemas de ecuaciones estudiados por Lorenz eran del tipo:

$x' = ax + by$
$y' = cx - y - xz$
$z' = dz + xy$

donde a,b,c y d son números reales. Como puede apreciarse se trata de ecuaciones *no lineales*. Los sistemas físicos que son descriptos por ecuaciones no lineales suelen tener un comportamiento caótico. En ellos, los más pequeños (y por otro lado inevitables) errores de medición producen a la larga grandes diferencias en la evolución del sistema.
Todo sistema físico con un mínimo de complejidad resulta ser caótico. Si la Tierra y la Luna estuvieran solas en el Universo entonces formarían un sistema estable y predecible (similar a nuestra hipotética atmósfera plana). La introducción meramente de un tercer cuerpo vuelve caótico el sistema; y en el Universo hay en verdad miles de millones de otros cuerpos.

Henri Poincaré lo sabía.

A principios de siglo, el genial matemático francés Henri Poincaré logró prever, gracias a su genial intuición, algunos de los aspectos del Caos. En uno de sus ensayos, titulado *Azar*, escribió:
"Una causa muy pequeña, que escapa a nuestro control, produce un efecto considerable que podemos ver y que decimos entonces que se debe al azar. Si pudiéramos conocer las leyes de la naturaleza y la situación del Universo en un instante inicial, deberíamos ser capaces de predecir exactamente la situación de ese mismo Universo en un instante posterior. Pero, incluso cuando las leyes naturales no presentaran secretos para nosotros, sólo seríamos capaces de conocer la situación inicial *aproximadamente* y puede suceder que ligeras diferencias en las condiciones iniciales produzcan cambios enormes en los fenómenos finales; un ligero error en aquellas implicará un error enorme en éstos."

En la tercera (y última) nota de esta serie veremos nuevos aspectos del fenómeno del Caos. En particular, analizaremos la relación que existe entre éste y los fractales presentados en la nota anterior.

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* BRIGGS, JOHN; PEAT, DAVID - *El espejo turbulento* - Barcelona, Salvat, 1994.
* EKELAND, IVAR - *Al azar* - Barcelona, Editorial Gedisa, 1991.
* STEWART, IAN - *¿Juega Dios a los dados?* -Barcelona, Grijalbo Mondadori, 1991.

La Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática
(Segunda parte)

Continuando con la nota iniciada en Aχioma N° 7, transcribimos a continuación las respuestas dadas por la Prof. Patricia Sadovsky a las diferentes preguntas que se plantearon al finalizar su disertación.

Hay conceptos para los que, a veces, no se tiene en cuenta cuánto tiempo le llevó a la humanidad llegar a ellos pretendiéndose que en el chico pase lo mismo ¿Esto no llevaría a la idea de que hay ciertos conceptos que nos interesan a los matemáticos y no a los estudiantes? Por ejemplo, el concepto de límite es difícil ¿Con qué tendríamos que empezar a contextualizar el tema? ¿Con Newton, hablando de diferenciales?... O en ciertas operaciones con polinomios: a veces, sí están contextualizados, (por ejemplo, si tienen que resolver una ecuación aplicando propiedad distributiva y demás) pero otras veces es casi una imposición: "Bueno, vamos a hacer división de polinomios porque lo tenemos que hacer, está en el programa". Ése es muchas veces el problema. ¿Cómo hacemos para crearle la necesidad al chico? ¡Él puede seguir viviendo tranquilamente sin dividir polinomios!

Muy interesante lo que estás planteando. Hablaste de crear necesidad. Yo creo que la escuela tiene que crear necesidades. Si no, uno podría llegar a una cosa con la que yo no estoy de acuerdo y es que la escuela se tendría que hacer cargo solamente de aquello que espontáneamente le interesa al chico. Esto no es así. Una de las funciones de la escuela es transmitirle a los chicos la cultura de la humanidad y, en este sentido, ampliarle la propia perspectiva y generarle intereses que espontáneamente no tendría si no viniera a la escuela. En este sentido, no comparto la posición que sostiene que a los chicos hay que enseñarles las matemáticas que sirven para la vida cotidiana porque no todo lo que se transmite en la escuela sirve para la vida cotidiana, y si uno se centra en cómo enseñar polinomios y se centra en su utilización en la vida cotidiana, fracasa.

Yo creo que la idea de problema tiene que comportar la idea de desafío intelectual. No es fácil que los chicos entren en el juego del desafío intelectual... Ahora, cuando entran, no importa si el problema es de la vida cotidiana (Hace que salgan).

Este es en parte el desafío de la Enseñanza de la Matemática. Tu pregunta tenía varias partes. Veamos: esto no quiere decir que todo es igualmente interesante para dar; lo que pasa es que son decisiones que escapan, en general, a las posibilidades individuales de un docente. Un docente que recibe un curso y un programa a comienzo de año, en principio, se está comprometiendo a determinadas cosas y sus márgenes de maniobra no son tan amplios.

No puede decidir por sí mismo si va a dar o no un tema. Si lo decide, tiene que tener, como mínimo, el aval de su institución. Cuando hay una decisión institucional, uno se siente más protegido. De todos modos, quiero decir que igual no es sencilla la cosa.

Yo coordino el área de matemática en una escuela secundaria y me he enfrentado con el problema de tomar la decisión de no dar cosas y después, los chicos cambian de colegio y uno se enfrenta con la cultura. No se puede pasar por encima de la cultura individualmente. Esto es *así; también son aprendizajes. Creo que dentro de una institución hay márgenes de decisión y de elección. No son amplísimos, pero hay, teniendo en cuenta que una escuela forma parte de una sociedad y que uno tiene que garantizarle al chico de 3° año de la escuela X, poder cursar 4° año en cualquier escuela del país; en ese sentido, hay un compromiso social ineludible.*

Con estas restricciones, tenemos que abordar la enseñanza desde la perspectiva que yo estaba exponiendo, lo cual no es fácil.

Creo, de todos modos, que si uno no está totalmente ligado a que todas las motivaciones y los problemas tiene que venir desde afuera de la matemática, si es capaz de entender que también la matemática es capaz de provocarle problemas a los chicos, entonces no es algo tan restringido el ámbito de posibilidades. Creo que uno se desespera cuando piensa que tiene que encontrar el ejemplo concreto para arribar a polinomios y no lo encuentra.

Creo que un cambio de perspectiva en el sentido de qué es un problema nos permite tener más opciones.

¿Qué pasa cuando es un alumno o unos pocos los que validan o los que llegan a un resultado? ¿Qué pasa con el resto? Nosotros estamos dando clase y tratamos de que participen; cuando uno responde la respuesta correcta, le decimos: ¡Sí, muy bien, es eso! y damos por sentado que los demás la van a hacer un poco suya porque viene de sus pares.

La práctica de la validación es una práctica a instalar como práctica en sí misma que uno tendría que pensar, en situaciones que sean específicas, de tomar decisiones respecto de la validez de los resultados. Uno tendría que garantizar, por lo menos, que el conjunto de la clase, en ciertas situaciones, accedió a ciertas prácticas, a ciertos modos de producir.

Es imposible pensar que en una clase todos los chicos van a validar en el sentido que uno está pretendiendo y creo que hay una variable, que es el tiempo, que determina que el tiempo de la enseñanza tiene que evolucionar y lamentablemente, el tiempo de la enseñanza es diferente del tiempo del aprendizaje. Sin embargo, el sistema de enseñanza funciona con la ilusión de que esos tiempos son iguales, o sea que, cuando uno terminó de enseñar un tema, los alumnos lo aprendieron. ¡Y esto es totalmente falso! Si uno quisiera ponerse en contra de esta ley de funcionamiento del sistema daría un tema por año, con lo cual, conocería todas las instituciones del país porque lo irían echando... (risas)

En algunas situaciones, esto hay que tolerarlo, (que sean algunos los que arribaron a ciertos resultados) al mismo tiempo que hay que pensar otras situaciones donde se va a proponer como objetivo que todos lleguen y entonces no va a hacer puesta en común o uno podría pensar en una organización de debate donde las ideas se expliciten sin dar, en principio, la palabra a los líderes; que se formulen por escrito y que todos tengan la posibilidad de expresarlas sin que el docente valide o invalide ninguna de la propuestas. O sea, situaciones específicas de debate donde su objetivo va a ser que todos produzcan y generar un debate a partir de las contradicciones que surjan. Y otras situaciones donde tiene que tolerar que ésos que avanzan más rápido comandan de alguna manera la aceleración del tiempo y ¿se puede confiar? No se puede confiar pero tampoco se puede desconfiar totalmente en el sentido que la circulación de los saberes tiene un efecto aún sobre los chicos que no fueron capaces de producirlos. Habría que pensar en situaciones puntuales donde eso que circuló entre unos pocos se ponga a prueba de la mano de muchos, aunque no lo hayan producido ellos; pero que, por lo menos, tengan la oportunidad de ponerlo a prueba en algún problema. Igual no hay respuestas únicas. La diversidad es algo complejo y tiene lugar cuando uno da lugar a las conclusiones y elaboraciones de los chicos. Si uno se para enfrente y habla, no hay ninguna diversidad; en algún sentido es más fácil, nosotros *pensamos que es menos productivo desde el punto de vista del aprendizaje.*

¿En qué sentido habló de entrar en el juego de la demostración? ¿Algo muy formal, con una adaptación, bajarlo a otro nivel?

Que los chicos entiendan la necesidad de demostrar no es equivalente a buscar un camino axiomático riguroso. El sistema axiomático que uno utiliza para que los chicos hagan la demostración es muchísimo más amplio que lo que sería un sistema axiomático...

Además, demostrar no es lo mismo que ser extremadamante formal; estas dos cosas no hay por qué confundirlas. Demostrar es encadenar proposiciones usando las reglas de la lógica como para llegar a una conclusión; no necesariamente esto significa escribir las cosas de una manera muy fomal. La formalización no es equivalente al rigor; algo puede ser riguroso aunque no sea muy formal. Creo que estas cosas hay que discriminarlas y discutirlas en cada caso.

Cuando yo hablaba de entrar en el juego lo que decía era, primero, que los chicos entiendan la necesidad de argumentar versus validar a partir de experimentar, o probar, o medir en un ejemplo, o eso que ellos están dispuestos a hacer en un principio para validar una proposición. Entrar en el juego es aceptar que, en algunas situaciones, eso no alcanza. Y después, ahí, uno se plantea una evolución: ¿qué cosas van a poder demostrar ellos al principio? No van a ser las mismas ni de la misma naturaleza que a las que puedan acceder al final de un proceso de aprendizaje. Aceptar que, si queremos que los chicos entren en el juego de la demostración, no vamos a poder demostrar todo porque no todo va a ser necesario ser demostrado. Las cosas que los chicos ya saben por su experiencia previa, ellos no entienden por qué tendrían que demostrarlas. Por ejemplo, si A=B y B=C y C=D, uno está esperando que los chicos digan que necesariamente es A=D; uno no está esperando que digan por qué A=B. Eso lo está usando y vamos a aceptar porque si así no fuera, estaríamos provocando situaciones para hacerlos entrar en el juego y luego le pondríamos a ese juego reglas contradictorias.

¿Qué manera hay de controlar cuando trabajan en grupo, que todo el grupo avanza y no que resuelven a expensas de uno de ellos?

No tenemos (risotada general del auditorio). *Esto nos lleva a pensar: la estrategia no es todo el tiempo trabajo en grupos, justamente porque no tenemos manera efectiva de garantizar qué aprendió cada uno. Una primera cosa es aceptar que no todo se puede controlar; aceptado esto ¿cómo accedo a producciones individuales de los chicos o en parejas? Como no tenemos manera de controlar en el trabajo en grupo y necesitamos garantizar que todos los chicos produzcan, paso a otras instancias, algunas individuales, otras por parejas y también una instancia individual previa a una instancia grupal. Por ejemplo, que los chicos piensen solos un problema y si este genera diversidad y genera confrontación, que después se reúnan en pequeños grupos a discutirlo pero sobre la base de que cada uno va al grupo con su problema ya pensado. Por supuesto que si el problema no genera diversidad es porque no es interesante, es aburridísimo; estarían haciendo dos veces lo mismo.*

Es muy importante el trabajo en grupo, permite que circulen las ideas de todos los chicos pero también permite que los que no pueden se escuden en los que más pueden. No es ahí donde hay que comprobarlo sino que hay que implementar otras estrategias de interacción.

¿Qué pasa cuando se entrega para hacer un trabajo en grupo y unos terminan rapidísimo y otros no llegan a hacer dos ejercicios?

Hacer este despliegue que yo fui marcando consume muchísimo más tiempo que dar clase de una manera un poco más expositiva. Hay que renunciar a algunas cosas. La puesta en común se justifica cuando la producción fue diversa. Si todos hicieron lo mismo y llegaron ¿cuál sería *la función de la puesta? Me parece una instancia un poquito burocrática. A uno le parece que cierra mejor, que se redondea mejor, pero para los chicos no es una instancia de aprendizaje. Si ya todos resolvieron y no hay confrontación no es un momento interesante de aprendizaje para ellos. Algo que yo tendría en cuenta es seleccionar qué cosas se discuten, no todas son igualmente interesantes.*

Cuando sí se decide hacer una puesta en común hay que tratar de homogeneizar los tiempos. Una pequeña recetita sería, a propósito de ese inconveniente, plantear preguntas adicionales en relación al mismo problema. Es muy difícil cuando los chicos ya saben el problema, volverlos a traer. Cuesta mucho... y tiene su lógica. Si alguien ya salió de un tema y lo cerró, volver a entrar es un juego un poquito pesado.

Para aquellas cosas en las que uno va a estar especialmente interesado, entonces tratar de controlar un poco esta homogeneización dando, en relación al mismo problema alguna relación o alguna cosa que permita profundizar.

Cuando uno le entrega a los chicos esa tira de ejercicios enorme, está provocando mucho ese dispararse que hace que los chicos más rápidos empiezan a hacer y hacer y se van muy lejos, mientras otros van por el problema dos.

Las cosas que uno va a estar interesado en discutir con todos, plantearlas fuera del contexto de esas guías tan largas, o sea, aprovechar el momento en que uno lo plantea para que todos empiecen al mismo tiempo.

<u>Hay cosas que son "el oficio de dar clase" y que no se contestan desde una didáctica científica,</u> se aprenden pero no se pueden enseñar, son conocimiento pero no son saberes, diría Brousseau. Si uno tiene una anticipación de cómo va a plantear esa discusión, anticipa qué preguntas pondrían el dedo en la llaga para todos los chicos y no sólo para aquellos que más lo necesitan, y qué intervenciones va a hacer, está generando mejores condiciones para que todos se sumen al debate.

¿Qué papel juegan actividades que no son tanto de aprendizaje sino de familiarización con la cosa?

Juegan un papel esencial. El hecho que los chicos movilicen ciertas herramientas y empiecen a acceder a un concepto nuevo no significa que eso quede ya totalmente elaborado.

Son condiciones de posibilidad, pero eso nuevo se tiene que transformar en viejo y para que lo nuevo se transforme en viejo, los chicos tienen que vérselas con eso desde distintos costados. En este sentido, las actividades de familiarización, de ejercitación, después, de puesta a prueba de lo que se aprendió son esenciales, no se puede prescindir de ellas si uno aspira a que los chicos reutilicen las cosas.

¿Qué pasa con los ejercicios que son puramente mecánicos si al fin y al cabo los alumnos los dominan, les salen bien, pero no entienden la necesidad de orientarlos para ese otro fin?

No hay una parte que es lo mecánico puro y una que es la que nos permite hacer todo un despliegue más interesante. <u>No hay el sentido por un lado y los algoritmos por el otro; los algoritmos deberían formar parte del sentido</u>. Entendida y comprendida la lógica de esta cuestión, a partir de situaciones, hay que practicarlas. A mí me costó mucho entender y aceptar que esto es así. Tenía una resistencia muy grande a enfrentar a los chicos con cuestiones donde la cosa era, una vez que se entendió, entrar a automatizar estas cuestiones. Por supuesto creo que lo que hay que medir es cómo se distribuye esto en el tiempo y qué cosas se hacen en la clase y qué cosas se hacen afuera. Estas instancias, más de transformar ciertas herramientas en bienes disponibles, es preferible que se hagan afuera y ni siquiera pretender controlarlas adentro de la clase, más allá de un control del tipo: está bien, está mal y punto.

Creo que si se aprenden los algoritmos como parte del sentido después se justifica un poco mejor la utilización de ejercicios más rutinarios.

¿En qué le afecta al profesor el hecho de que, en el mejor de los casos, los alumnos están interesados por el único objetivo que es aprobar la materia, lo que trae como consecuencia que terminado el tema, lo olviden y llegan al límite que en 5° año olvidan todo lo aprendido durante cinco años?

No es tan así. Creo que hay parte de eso; tiene que ver con la cultura, tiene que ver con el momento de los adolescentes. Hay ciertos temas que tienen que plantearse como longitudinales de la escuela. Uno tendría que pensar para los grandes conceptos que atraviesan la escuela secundaria un proyecto coordinado de primero a quinto año, dando la posibilidad de que los chicos reutilicen y crezcan en esas herramientas.

¿Qué es lo que uno se propone que un chico sepa cuando salga de la escuela? Es esencial contestar esta pregunta. En principio, yo, por ejemplo, me propondría que el chico entienda que la matemática sirve para modelizar situaciones y en este sentido, esto tendría que tener un peso de primero a quinto año. Si se olvida la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado, que si no la usa más se la va a olvidar inevitablemente ¿qué importa?, si es capaz de entender que dado un problema puede traducir ese problema en relaciones matemáticas, puede operar con esas relaciones y reinsertar una respuesta en el problema original.

Si pasó por ese proceso, que olvide algunas cosas pareciera que no es tan grave. Ahora, si lo único que hizo fueron algoritmos y se los olvida, se olvida todo. Creo que la escuela es una oportunidad para vérselas con un modo de producir, con un modo de pensar. Lo que tenemos que garantizarles a los chicos es vérselas realmente con ese modo de pensar. Hay cosas que se van a retener porque se van a usar todo el tiempo y hay cosas que se van a olvidar y es inevitablemente así. No hay manera de hacer que se atrapen, lo que no se usa se olvida. De todos modos, si en el momento de aprenderlas se pensaron, la posibilidad de recuperarlas cuando se vuelvan a necesitar es bastante distinta.

Yo diría, no es una aspiración que los chicos se acuerden de todo; es una aspiración que se las vean con un modo particular que ofrece la matemática de pensar la realidad.

En el planteo de tu pregunta también hay una cuestión cultural que tiene que ver con lo que es "el oficio del alumno": el alumno va a la escuela a aprobar, no está tan claro que vaya a aprender. Ahí aparece una cuestión de desafío que no es individual del docente de matemática sino que es institucional y es: cómo logra la escuela conectar a los chicos con los conocimientos; así como entra en el juego de la demostración, cómo entra en el juego del conocimiento. No es algo que se pueda conseguir desde una sola materia; creo que ahí hay proyectos institucionales fuertes para conseguir que los chicos entren en la cuestión del aprender además del aprobar, que está siempre.

Si uno se lo propone así, en general, aparece como una empresa muy difícil; cómo me garantizo pequeños proyectos dentro del conjunto de mi enseñanza, ahí aparece la cosa como un poquito más atrapable.

La escuela es contradictoria, en el sentido que priman más los contenidos que tienen que finalizar a fin de año con 11 unidades en primero, con 12 unidades en segundo, etc., y de lo que habla la didáctica es profundizar el concepto. ¿En qué sentido se puede profundizar el concepto si tenemos que llegar con 12 unidades en cada año y, finalizado el ciclo, con todas las unidades, pero el concepto no?

Estoy de acuerdo, pero son las condiciones. Uno tiene que poder pararse y establecer claramente a qué cosas se pueden dar respuestas y a qué cosas no. En general los programas abarcan o pretenden abarcar más de los que se puede hacer si uno trabaja de esta manera. Yo, por suerte, no tengo nada que ver con ninguna propuesta curricular,

pero, también es una decisión difícil de tomar para quien participa de una reforma el quitar contenidos sin garantizar que los que sí se dan se vayan a abordar de esta manera. Estarías produciendo un vaciamiento.
Esto es una cuestión que pasó; gente que conozco estuvo trabajando en el tema de las reformas.
La respuesta que yo daría, y que tiene un poco que ver con la pregunta anterior, es: todo así no lo puedo dar, entonces elijo algunos temas que voy a trabajar y profundizar porque voy a querer que, en particular, retengan ciertas cosas y renuncio a otros temas y los doy un poquito más formalmente, para que se enteren que eso existe, por si alguna vez lo necesitan saben dónde buscarlo pero renuncio y sé que se lo van a olvidar. O distribuyo a lo largo de los años en qué pongo el acento: si este año fue en funciones en el otro será en geometría.
Hay decisiones a tomar a nivel institucional que tendrían que ser decisiones más amplias que un curso o un año. Pero hay algo que es central: así como no puedo controlar todo el tiempo a todos los chicos, tengo que poder renunciar a eso, tampoco puedo dar todo de esta manera y tengo que poder elegir, tomar decisiones.

Que un chico tome un problema como un desafío intelectual es un sentimiento personal que no se puede imponer, tiene que nacer con el chico. ¿Qué pasa si el chico interiormente no toma el problema como un desafío intelectual, no lo relaciona con la vida cotidiana y aparece la famosa pregunta "¿esto para qué sirve?" que revoluciona toda la clase, uno no sabe qué contestar, porque si contesta que no sirve para nada entonces, para qué lo está enseñando, y tampoco existe una respuesta. ¿Puede el profesor, de afuera, hacer algo para que un problema que no está conectado con la vida cotidiana y que posiblemente el chico no tome como un desafío intelectual, llevarlo hacia ese rumbo?

Varias cosas en relación a lo que decís. El hecho que el problema sea de la vida cotidiana no significa que al chico le vaya a interesar. Esto es una ilusión de los profesores, porque además ¿qué es la vida cotidiana de un chico? Ve tantas horas de televisión, ve las series... <u>La idea de vida cotidiana, del mercado, del patio, del agrimensor, es una idea de los profesores que no tiene que ver con la cotidianeidad de los chicos.</u>
Si nosostros instalamos incertidumbre en relación a un tema, si instalamos un debate entre los chicos se empiezan "a matar" por el hecho de que quieren dirimir una cosa que se les escapa todo el tiempo, que prueban una vez y les da una cosa y prueban otra vez y les da otra. No digo que esto garantiza que todos los chicos vayan a entrar en el juego, pero estás instalando una incertidumbre alrededor de la cual el debate puede ser interesante.
O planteás que hagan una actividad y por estar aplicando mal cierto conocimiento, no lo pueden hacer. Vos les instalás el problema; el problema no va a surgir espontáneamente de ellos.
Lo que vos decís es totalmente cierto: qué cosa es un desafío intelectual es algo personal, pero uno puede ayudar a provocarlo. Esta es una función de la escuela: ampliar la propia perspectiva de lo que es desafiante y del juego en el cual quiero entrar.
Creo que ahí también hay que investigar condiciones y la Didáctica potencialmente podría ofrecer resultados; no tiene muchísimos para ofrecer hoy; hay muchísimas cosas que son objeto de indagación. Cómo desplegamos la situación didáctica, que no es sólo el problema que el chico va a resolver sino la interacción chico-problema-profesor, como para que el aprendizaje se instale sobre una cierta incertidumbre del chico en relación a algo. Creo que la incertidumbre es el corazón de una situación de aprendizaje.
El chico no se formula a sí mismo las preguntas pero si vos no lográs que se las formule el chico no va a aprender; ningún chico puede aprender contra su propia voluntad.

Y ante la pregunta ¿Para qué sirve? ¿qué se le contesta?

Depende en qué contexto... ¡Para pasar de grado! (risas generales) Repito, depende del contexto; lo que uno no puede hacer es mentir, decir que sirve para la vida cotidiana lo que está claro que no. Yo no tendría una respuesta única. A veces les diría: porque yo lo doy y me tenés que obedecer (estruendosas risas de todo el auditorio).

En principio creo que uno tiene que anticiparse a esa pregunta y proponer las cosas de manera tal que haya preguntas propias en eso que uno está...

Muchas veces uno les da respuestas a los chicos a cosas que ellos no se preguntaron. Es ahí donde se produce el "¿para qué sirve?", porque vos les estás diciendo algo que para ellos no es significativo.

Como regla general, lo que hay que ver en cada situación es cómo instalar la pregunta antes de instalar el problema.

Yo me acuerdo que alguna vez en el colegio, preguntaba para qué sirve, a propósito, porque estaba cansada y no tenía más ganas de trabajar. Y sabía que si preguntaba la profesora se iba a poner nerviosa y se dispersaba toda la clase. Una vez pregunté: complejos ¿cómo complejos? ¿a veces imaginarios? Bueno, si son imaginarios no existen. Sí, existen -me contestaba mi profesora- pero se llaman imaginarios. Bueno, si son imaginarios no existen, insistía yo...

¿Cuáles son los criterios de realidad para determinar que algo existe? Ello no está para nada ni elaborado ni discutido con los chicos. Estas discusiones ¿no tendrían que estar en las clases de matemática, respecto de lo que es la naturaleza del conocimiento matemático como para que después, algo como los complejos fueran claros en una discusión de ese tipo?

Si no, es muy difícil introducir algunos temas. En los años superiores sería importante que los chicos tengan acceso a la matemática como un producto cultural, ponerlos en contacto aunque sea con pedacitos de la historia de la matemática y con sus discusiones, para contribuir a que entiendan la naturaleza de esta disciplina.

Sería un objetivo de la enseñanza, más allá de las cuentas y los cálculos.

Agradecemos a la Comisión de Cultura del Dpto. de Matemática del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González" el habernos permitido grabar esta conferencia. Los subrayados son nuestros.

La comprensión de la matemática no puede ser transmitida indirectamente o como un juego sin dificultades, como tampoco pueden adquirir una educación musical, a través de reseñas periodísticas brillantes, aquellos que no han escuchado buena música con frecuencia.

Un contacto real con el contenido de la matemática viva es necesario.

RICHARD COURANT

Algunos conceptos básicos sobre grupos

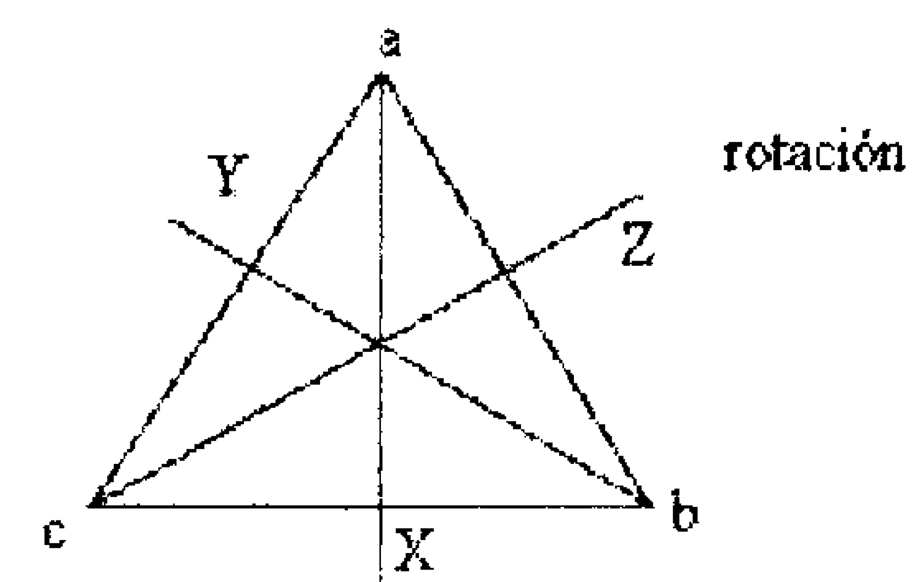
La finalidad de este pequeño artículo es mostrar algunas ideas básicas de la Teoría de Grupos, En muy pocas ciencias se da, como en las fisicomatemáticas, la búsqueda de la belleza en sus teorías.
La teoría de grupos es un buen ejemplo. Ha nacido de la necesidad de encontrar un método para estudiar la simetría de los cuerpos geométricos. No es el lugar para discutir la importancia que ya desde los antiguos griegos se da a la simetría, tal vez una de las más importantes propiedades que debía poseer una figura para ser considerada bella.

En sus comienzos, la teoría se desarrolló solamente como un método auxiliar en la búsqueda de resolución, por medio de radicales, de la ecuación general de quinto grado. Recordemos que a finales del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX, los matemáticos sabían resolver por medio de radicales ecuaciones hasta de grado cuatro. El desafío lo presentaban las ecuaciones de quinto grado, que se resistían a ser solubles por medio de radicales.

El problema fue resuelto por la negativa, por el gran matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) y ampliado por el francés Evariste Galois (1811-1832).

Nuestra motivación para introducirnos en la teoría de grupos será la simetría en las figuras geométricas.

Tomemos, por ejemplo, un triángulo equilátero abc y consideremos las rotaciones respecto de su centro, determinado por la intersección de sus bisectrices. Llamemos I una rotación de 0°, t es de 120° y s es de 240°.



Estas rotaciones producen figuras simétricas a la dada. El conjunto de simetrías producido por las rotaciones es el conjunto formado por $\{I, t, s\}$. Si componemos dos rotaciones cualesquiera del conjunto obtenemos como resultado otra rotación, tal como nos muestra la siguiente tabla:

o	I	t	s
I	I	t	s
t	t	s	I
s	s	I	t

A la tabla de composiciones se la llama **tabla de multiplicar**.

De la observación de la misma, podemos obtener las siguientes conclusiones: no solamente que es cerrada para la composición de rotaciones del triángulo abc (es decir, la composición de dos rotaciones da otra rotación perteneciente al conjunto) sino que podemos probar que es asociativa, tiene elemento neutro (que en este caso es I), y además, para cada uno de los elementos del conjunto existe un elemento inverso. Así, por ejemplo, para el elemento t existe s tal que $t.s=I$.

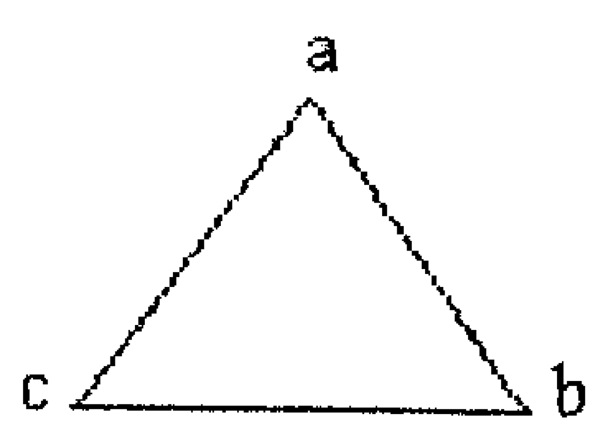
Podemos ampliar este conjunto de simetrías del triángulo equilátero, considerando ahora, además de las rotaciones, las reflexiones x, y, z respecto de las rectas X, Y, Z, respectivamente, que contienen a las bisectrices. Nuestro nuevo conjunto de simetrías ahora es el siguiente $\{I, t, s, x, y, z\}$.

Formemos ahora su tabla de multiplicar.

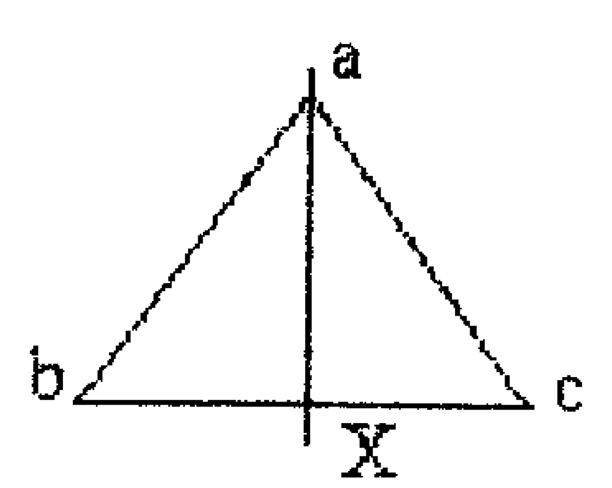
o	I	t	s	x	y	z
I	I	t	s	x	y	z
t	t	s	I	z	x	y
s	s	I	t	y	z	x
x	x	y	z	I	t	s
y	y	z	x	s	I	t
z	z	x	y	t	s	I

Observando esta nueva tabla, podemos apreciar que el conjunto de simetrías es cerrado bajo el producto de funciones al igual que la anterior.

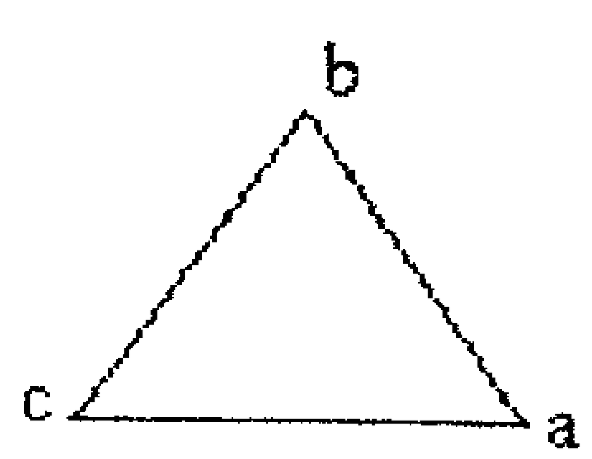
Para calcular, por ejemplo, tox realizamos primero la transformación x y luego t. Así tenemos



bajo la transformación x (reflexión sobre eje X) se transforma en



luego aplicamos t (rotación de 120º) y se transforma en



que a su vez es equivalente a aplicar la transformación z (reflexión sobre el eje Z). Queda claro que $tox=z$. Dejo para el lector probar que la tabla es efectivamente cerrada. Podemos decir que para encontrar el grupo de simetrías de una figura, debemos primero encontrar todas las simetrias y luego realizar todos los productos.

Estamos ahora en condiciones de dar la siguiente **definición de grupo**:

Un grupo $(G,*)$ es un par ordenado formado por un conjunto G distinto de vacío y una operación binaria $*$, tal que satisface los siguientes axiomas:

G_1: La operación * es cerrada en G.
G_2: La operación * es asociativa.
G_3: Existe un elemento e en G tal que para todo elemento x de G, se verifica $e*x=x*e=x$, llamado identidad de G.
G_4: Para cada "a" perteneciente a G, existe b también en G tal que se verifica $b*a=a*b=e$, b es el inverso de a respecto de la operación *.

En consecuencia, podemos probar que el grupo de las simetrías del triángulo equilátero con la composición de funciones (en este caso la composición es *) tiene estructura de grupo.

Otros ejemplos de grupos

Tomemos ahora Z_4 (el conjunto de los restos de dividir por 4, esto es $\{0, 1, 2, 3\}$) y como * la suma ordinaria de enteros. Formemos ahora la tabla correspondiente.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Observación: para formar la tabla hay que tener en cuenta que tomamos los restos de la división por 4, así por ejemplo si calculamos 2+3=5, 5 al ser dividido por 4 tiene resto 1, en consecuencia 2+3=1.
Podemos probar sin mayor dificultad que el par ordenado $(Z_4,+)$ posee estructura de grupo.

Otro ejemplo interesante es el llamado 4-grupo de Klein o V, de la palabra alemana *viergruppe*, cuya tabla es la siguiente.

o	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Si volvemos a $(Z_4,+)$ y tomamos por ejemplo el conjunto formado por el par

$\{0,2\}$ y la suma en Z_4, nos queda la tabla siguiente:

+	0	2
0	0	2
2	2	0

La tabla nos permite afirmar que el par ordenado $(\{0,2\},+)$ es un pequeño grupo de $(Z_4,+)$. Lo mismo sucede en el 4-grupo de Klein si tomamos por ejemplo los subconjuntos $\{e, a\}$, $\{e, b\}$ y $\{e, c\}$, y en el caso del grupo de las simetrías del triángulo equilátero si tomamos $\{I, t, s\}$ como subconjunto de $\{I, t, s, x, y, z\}$. Estas observaciones nos permiten sugerir la siguiente definición de subgrupo de un grupo dado:

Si H es un subconjunto de un grupo G, cerrado bajo una operación binaria * en G y si H es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces H es un subgrupo de G.

No es necesario que dado un subconjunto no vacío H de G se deba probar que se cumplen los cuatro axiomas de grupos, es suficiente probar que: a) para todo a, b de $H \Rightarrow a*b$ está en H y b) si $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$. La ley asociativa no es necesario verificarla, puesto que si G es un grupo se hereda para cualquier subconjunto H de G, en tanto que si $a \in H$ y $a^{-1} \in H \Rightarrow a*a^{-1} \in H$, pero $a*a^{-1} = e$ lo cual asegura que e está en H.

Grupos cíclicos

Consideremos ahora un ejemplo muy familiar para todos: el grupo formado por las potencias de i (recordar que $i^2 = -1$). Su tabla de multiplicar es la siguiente;

·	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Cuando nos encontramos ante un grupo como éste, tal que todos sus elementos se obtienen como potencias de uno de ellos, o dicho de otra forma, que se pueden expresar como potencias de alguno de ellos, se dice que el grupo es cíclico.

En el ejemplo anterior, el grupo es cíclico y está generado por las sucesivas potencias de i. Es decir un grupo G es cíclico si existe a en G tal que,

$G=\{a^n / n \in N\}$ y el elemento a se llama generador del grupo.

En el caso del grupo de las rotaciones del triángulo equilátero considerado más arriba, es claro que tanto t como s generan el grupo.

Orden de los grupos

A la cantidad de elementos que tiene un grupo se lo llama orden de un grupo. Por ejemplo, Z_4 tiene 4 elementos, o sea orden 4 es igual que 4-grupo V de Klein. Es de hacer notar que existen únicamente dos tipos diferentes de estructuras de orden 4, y son, salvo isomorfismos, las dos ya nombradas.

Los grupos pueden ser de orden finito o infinito dependiendo obviamente del carácter del conjunto base. A la vez también un grupo puede ser cíclico de orden finito como los hasta ahora considerados o bien cíclicos de orden infinito como en el caso de los enteros con la suma ordinaria; en este caso los generadores son 1 y -1. Se puede probar muy fácilmente que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico. Nos preguntamos ¿quiénes son los subgrupos cíclicos infinitos de Z? Es claro que serán de la forma nZ, o sea los múltiplos de n; además, podemos decir que nZ y Z son isomorfos. Se deja la demostración a cargo del lector.

Tomemos nuevamente el grupo de todas las simetrías del triángulo equilátero, esto es, el conjunto formado por $\{I, t, s, x, y, z\}$. Veamos cuántos subgrupos se pueden obtener:

1. $\{I, t, s, x, y, z\}$
2. $\{I, t, s\}$
3. $\{I, x\}$
4. $\{I, y\}$
5. $\{I, z\}$
6. $\{I\}$.

Podemos hacer las siguientes observaciones: el grupo tiene orden 6, mientras que el orden de sus subgrupos son 6, 3, 2 y 1 respectivamente, es decir todos divisores de 6. Esto no es casual si no que se puede enunciar como teorema, el famoso Teorema de Lagrange que afirma: Sea G un grupo de orden finito n y H un subgrupo de G, entonces el orden de H divide al orden de G.

Este teorema tiene un hermoso corolario que dice: todo grupo de orden primo es cíclico.

Volviendo a nuestro viejo ejemplo de las rotaciones del triángulo equilátero, hemos visto que los ángulos eran 0°, 120° y 240°, o sea, todos múltiplos de 120°, pero 120° equivale a $\frac{2\pi}{3}$, de donde podemos decir lo siguiente: un ángulo central φ de un polígono regular de α lados viene dado por $\varphi=\frac{2\pi}{\alpha}$, donde las rotaciones de un ángulo 0, φ, 2φ,... , $(\alpha-1)\varphi$ llevan al polígono a coincidir sobre sí mismo.

Ahora bien, supongamos que sumamos en un polígono regular dos rotaciones por ejemplo $p\varphi+q\varphi$; podemos ver que es igual a $r\varphi$, donde r es el resto de dividir p+q por α. De lo dicho podemos decir que a cada elemento $m\alpha$ le podemos asignar un elemento Z_α. Con este resultado concluimos que se llaman grupos cíclicos finitos a los grupos que son isomorfos al grupo de las rotaciones de un polígono regular.

El grupo S_3

Otro grupo que está relacionado con el grupo de las simetrías del triángulo equilátero es el llamado grupo S_3. Este grupo es el que se forma con las permutaciones del conjunto {1, 2, 3}. La cantidad de permutaciones que se pueden formar son 3!=6. Podemos hacer un listado de las permutaciones, estas son:

$$\rho_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\rho_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rho_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mu_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mu_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mu_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

la tabla correspondiente es:

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_2	μ_3	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	μ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_0

Podemos asociar cada una de las ρ_i con las rotaciones y cada una de las μ_i con las reflexiones. Es de resaltar la bella simetría que figura en la tabla.

Podemos ahora hacernos la siguiente pregunta: supongamos que tenemos un grupo de orden 60 ¿es seguro que tiene un subgrupo de orden 15, teniendo en cuenta que 15 es un divisor de 60? La respuesta la ofrece el teorema de Sylow, que dice, si k es una potencia de un primo y tal que divide al orden de G, entonces existe un subgrupo de G de orden k.

Así, por ejemplo, en el caso de orden 60 los subgrupos que tiene seguro son de orden 2, 3, 4 y 5 y no hay más.

La teoría de grupos ocupa hoy un lugar central en la matemática; hemos echado un vistazo superficial a su parte más elemental, pero es suficiente para que el lector aprecie cómo se vinculan ideas de la geometría y de la aritmética de una manera muy sencilla y natural.

La teoría de grupos en estos tiempos infecta prácticamente a toda la matemática, brindando una gran unidad conceptual a la vez que una rara belleza.

Francisco J. Di Giorgio

* Profesor de Matemática.

Problemas Propuestos

1. *De La Geometria en la formación de profesores - Luis Santaló - Red Olímpica*: De un mismo lado de una recta R hay dos puntos dados a y b. Se desea construir el camino de longitud mínima que une a con b, tocando en un punto a la recta R (Herón de Alejandría, siglo II).

2. *Colaboración Prof. Jorge Martinez*: Encontrar el cuadrado más pequeño divisible por 39 y 26.

3. *De Notas de álgebra I - Enzo Gentile - Ed. Colihue EUDEBA*: Calcular en cuántas de las permutaciones de la palabra MURCIÉLAGO las cinco consonantes conservan sus posiciones relativas (es decir, la M debe quedar antes que la R, ésta antes que la C, etc., un ejemplo es UMRICALOEG)

4. *Colaboración Prof. Alfredo Cóccola:* Cite ejemplos de dos funciones h y f, cada una de las cuales no tiene límite en x=0 y tal que su diferencia y su cociente tienen límite en x=0.

5. *Colaboración Gustavo Piñeiro:* Determinar **todos** los enteros positivos x para los cuales $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\ldots}}}}$ es un entero positivo. (**Sugerencia:** ver en esta misma sección la solución del problema 6 de Aχioma N° 7).

6. *Colaboración Gustavo Piñeiro:* ¿Es posible partir al conjunto de los números naturales en una familia **infinita** de subconjuntos **infinitos** tales que dos cualesquiera de ellos sean disjuntos? Si la respuesta es afirmativa, mostrar una partición de ese tipo. Si la respuesta es negativa, **demostrar** que es imposible una partición así.

Soluciones a los Problemas de Aχioma N° 7:

1. Colaboración del Prof. Gustavo Krimker: *Sean f(x) y g(x) continuas en [a,b]. Probar que si* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, *entonces f(x) y g(x) se cortan en un punto interior al [a,b].*

* *Respuesta dada por* ***Verónica Hauresz*** *(alumna de 4° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"):*

Dado que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, entonces por propiedades de las integrales, $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=0$.

Si existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0)-g(x_0)=0$ entonces $f(x_0) = g(x_0)$ con lo que llegaríamos a lo que queríamos demostrar. Supongamos que no existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0)-g(x_0)=0$, entonces (debido a que las funciones son continuas) pueden darse dos posibilidades:

1er caso: $\forall x \in [a,b]$, $f(x)-g(x) > 0$; y como las funciones son continuas, se deduce que $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx > 0$. Luego $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Esto es un absurdo, pues contradice la hipótesis.

2do caso: $\forall x \in [a,b]$, $f(x)-g(x) < 0$; de modo similar al caso anterior, se llega también a un absurdo.

Deducimos entonces que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0)-g(x_0)=0$; como queríamos probar.

Importancia de la continuidad: Si las funciones no son continuas entonces el enunciado del problema es falso, como puede verse en el siguiente ejemplo. Definimos $f:[a,b]\to\mathcal{R}$ como $f(x)=1\ \forall x\in[a,b]$, y $g:[a,b]\to\mathcal{R}$ como

$$g(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<(a+b)/2 \\ 0 & \text{si } x\geq(a+b)/2 \end{cases}$$

Entonces $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx=b-a$, pero $f(x)\neq g(x)\ \forall x\in[a,b]$.

2. Colaboración de **Pilar Balmaceda** - extraído de "La Magia de la Matemática" de Theoni Pappas - Colección De Mente - *La pirámide de los 1*, $1^2=1$, $11^2=121$, $111^2=12321$, etc. ¿Cuándo se termina?

* *Respuesta dada por* ***Verónica Hauresz:***

La pirámide se termina cuando se tienen diez unos, pues al calcular 1111111111^2 se rompe la escalera que antes crecía y decrecía.

3. Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola: *Demuestre que para un número natural cualquiera n el número n^3-n es divisible por 6.*

* *Respuesta dada por* ***Verónica Hauresz:***

Vamos a demostrarlo por *inducción completa*. Llamamos $P(n)$ a la proposición que afirma que 6 es divisor de n^3-n, la que expresamos como $P(n)$: $6|n^3-n$. Para $n=1$ tenemos $P(1)$: $6|1^3-1$, es decir $6|0$, por lo que $P(1)$ es verdadera.
Supongamos ahora que $P(n)$ sea verdadera; queremos demostrar a partir de esta suposición (llamada la *hipótesis inductiva*) que $P(n+1)$: $6|(n+1)^3-(n+1)$ también lo es. Observemos que, por la hipótesis inductiva, existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $n^3-n=6k$; luego:

$(n+1)^3-(n+1)=n^3-n+3(n^2+n)=6k+3(n^2+n)$.

Como para todo $n\in\mathcal{N}$, n^2+n es par (esto puede probarse también por inducción) entonces existe $q\in\mathbb{Z}$ tal que $n^2+n=2q$. En consecuencia:

$(n+1)^3-(n+1)=6k+3(n^2+n)=6k+6q$.

Por lo tanto $P(n+1)$ es válida, como queríamos demostrar.

* *Respuesta dada por* ***Prof. Nancy Lizarazu*** y ***Fernando Chorny*** *(alumno de 3º año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"):*

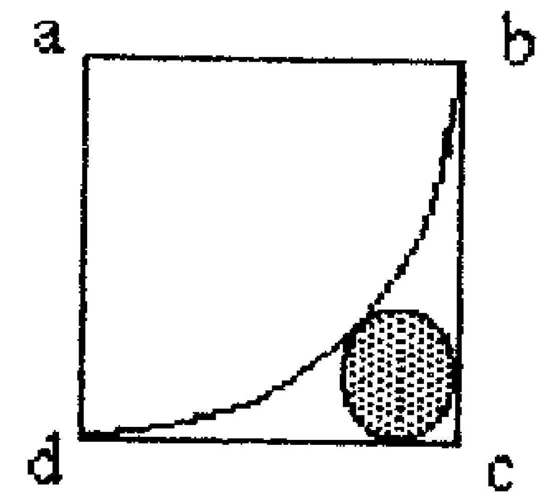
Para que n^3-n sea divisible por 6 debe serlo a la vez por 2 y por 3. Notemos que $n^3-n=n(n-1)(n+1)$.

a) Si n es par entonces $n(n-1)(n+1)$ es par. Si n es impar entonces $(n-1)$ y $(n+1)$ son pares y en consecuencia $n(n-1)(n+1)$ es par.

b) Si n es múltiplo de 3 entonces $n(n-1)(n+1)$ es múltiplo de 3. Si n no es múltiplo de 3 entonces $(n-1)$ o $(n+1)$, alguno de ambos, es múltiplo de 3, y por lo tanto también $n(n-1)(n+1)$ es múltiplo de 3.

De (a) y (b) se obtiene que $n^3-n=n(n-1)(n+1)$ es siempre múltiplo de 2 y de 3, luego es siempre múltiplo de 6.

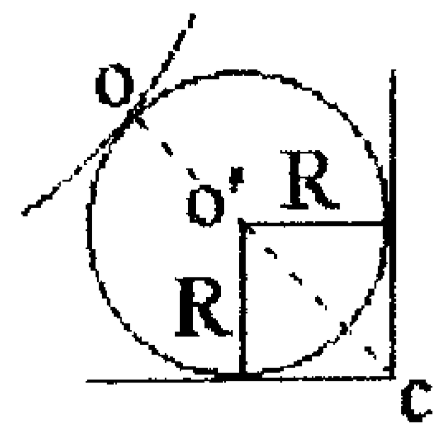
4. Colaboración de **Marcela Bartomeo** - extraído de la O.M.A.: *Hallar el área sombreada en función de L (lado del cuadrado abcd). La circunferencia sombreada es tangente a los lados del cuadrado y al cuarto de circunferencia de centro a.*



* *Respuesta dada por* ***Verónica Hauresz:***

Por el Teorema de Pitágoras, $\overline{ac}^2=L^2+L^2$
$\overline{ac}=\sqrt{2}L$

Llamemos **o** al punto de tangencia de las dos circunferencias, **o'** al centro del círculo sombreado y R a su radio.



Aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{o'c}^2 = R^2 + R^2$$
$$\overline{o'c} = \sqrt{2}R$$

Luego:

$$\overline{ac} - L = \overline{oc}$$
$$\sqrt{2}L - L = R + \overline{o'c}$$
$$\sqrt{2}L - L = R + \sqrt{2}R$$
$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}L = R$$
$$(\sqrt{2}-1)^2 L = R$$

Teniendo el radio del círculo sombreado podemos hallar su área:

$$A = \pi R^2 = \pi(\sqrt{2}-1)^4 L^2$$

5. Colaboración del **Prof. Jorge Martínez**: *Hallar el número natural más grande que dividido por 151 y 202 da el mismo cociente.*

* *Respuesta dada por* ***Verónica Hauresz:***

Sea n el número buscado:

$$n = 151q + r_1 \text{ con } 0 \le r_1 \le 150$$
$$n = 202q + r_2 \text{ con } 0 \le r_2 \le 201$$

$$202q + r_2 = 151q + r_1$$
$$51q = r_1 - r_2$$

Como $q \ge 0$ entonces $r_1 - r_2 \ge 0$ y además $r_1 - r_2 \le 150$.
Luego:

$$0 \le 51q \le 150$$

$$0 \le q \le \frac{150}{51} < 3$$
$$0 \le q \le 2$$

El máximo valor de n se obtiene cuando $q = 2$ y r_1 tiene el mayor valor posible. Luego:

$$n = 151.2 + 150 = 452$$
$$n = 202.2 + 48 = 452$$

Es decir, $n = 452$.

6. Colaboración del Prof. **Jorge Martínez**: *Probar que* $\sqrt{6+\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{\ldots}}}}$ *es un entero positivo. ¿Cuál es?*

* *Respuesta dada por* ***Verónica Hauresz:***

Llamemos $A = \sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{\ldots}}}}$, luego:

$$A = \sqrt{6+A}$$
$$A^2 = 6+A$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos que A=3 o A= -2. Como A es positivo, la segunda solución se descarta y entonces A = 3.

Solución de un problema planteado en el festejo del primer aniversario de **Aχioma:**

Uno de los problemas planteados en el festejo del primer aniversario de Aχioma aparece representado en la figura 1. Allí, abcdef es un hexágono regular y p,q,r,s,t,u son los puntos medios de los lados. El problema pedía demostrar que la figura sombreada es un hexágono regular y además preguntaba qué proporción del hexágono mayor representa.

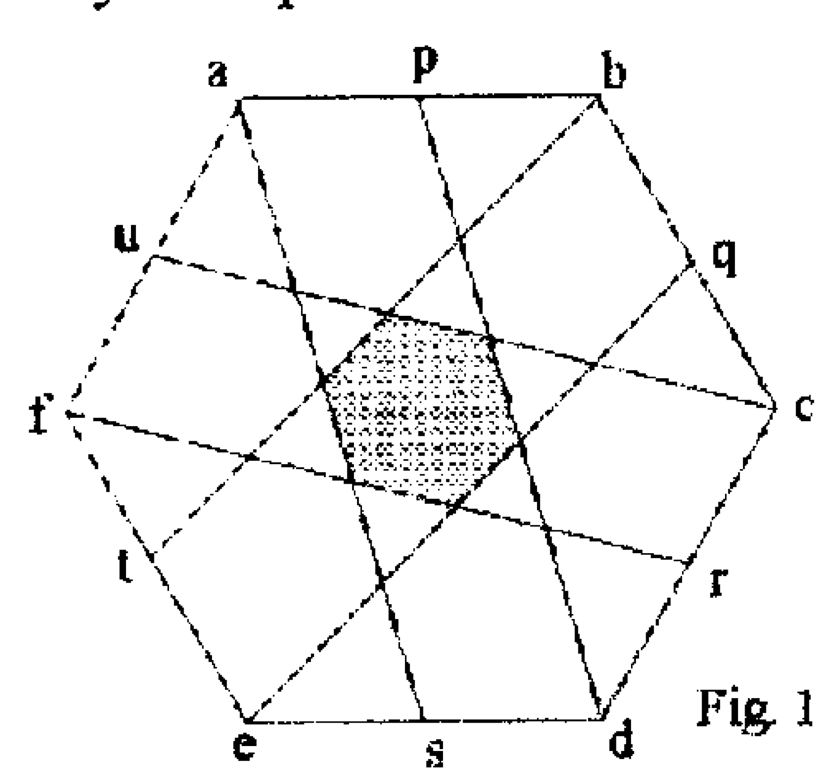


Fig. 1

Por razones de espacio, no desarrollaremos aquí la solución completa. Daremos solamente las pautas básicas que sigue la misma y dejaremos que el lector complete los detalles que considere necesarios.

Para demostrar que la figura sombreada es un hexágono regular, veamos la figura 2.

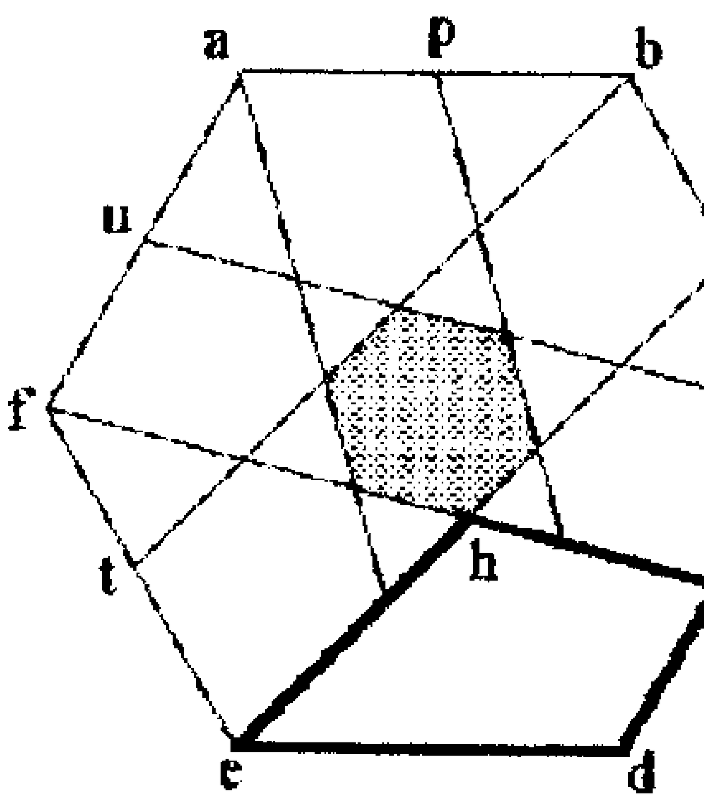


Fig.2

Por construcción el ángulo feq es igual al ángulo frd, digamos que midan α. Luego hed mide $120°-\alpha$. Si miramos el cuadrilátero ehrd vemos que, de sus ángulos interiores, e mide $120°-\alpha$, d mide 120° y r mide α. Como la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero es 360°, se deduce que h mide 120°. Luego (por opuestos por el vértice) el ángulo fhq (uno de los ángulos interiores del polígono sombreado) mide también 120°. Por simetría, se prueba inmediatamente que los seis ángulos interiores del polígono pequeño miden 120° (como los de un hexágono regular). Dejaremos como tarea para el lector completar la demostración de que la figura sombreada es en verdad un hexágono regular. Asimismo le dejaremos como tarea probar que los seis triángulos que se ven a su alrededor son equiláteros y con un área igual a 1/6 del hexágono sombreado.

Nos concentraremos ahora en el problema de calcular el área de la figura sombreada. Trazamos por el vértice f y por el vértice c sendos segmentos paralelos al segmento .bt que vayan hasta el lado del hexágono. Procedemos de modo similar con los cuatro vértices restantes hasta obtener la figura 3.

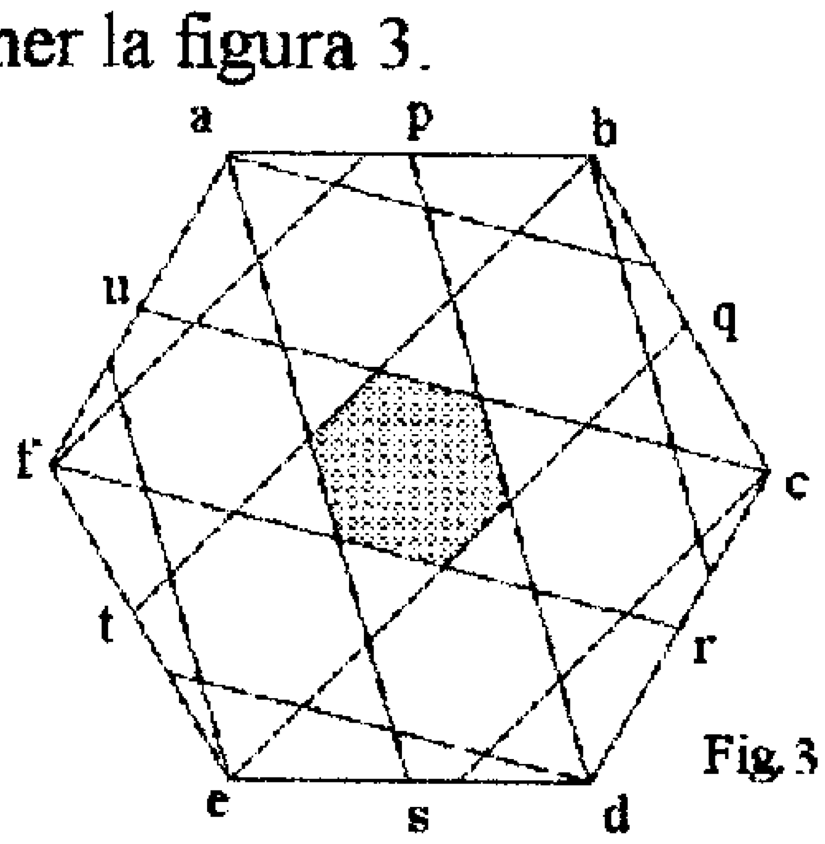


Fig.3

En la figura 4 se puede apreciar que el hexágono que queda determinado por los segmentos de trazo grueso contiene 7 copias del hexágono sombreado y doce triángulos pequeños. Este hexágono de trazo grueso tiene entonces un área que es igual a 9 veces la del hexágono sombreado.

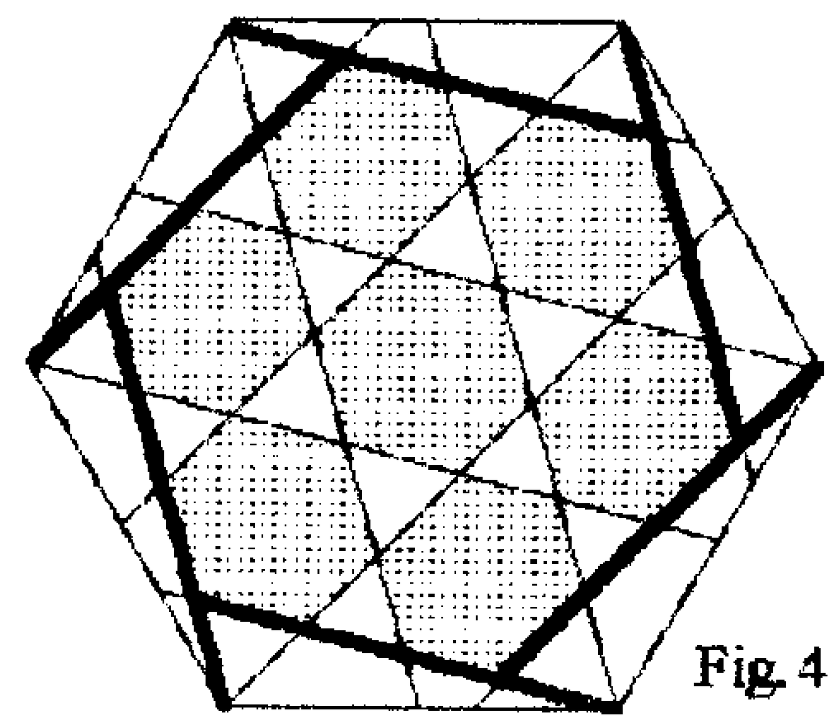


Fig.4

Sólo queda por calcular el área que representan los seis triángulos que quedan dibujados en la periferia. Uno de los cuales se ve en la figura 5:

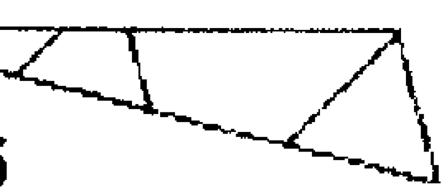


Fig. 5

Cada uno de los triángulos puede descomponerse en tres partes, las cuales, convenientemente reunidas, conforman una figura que representa 2/3 del hexágono sombreado (fig. 6).

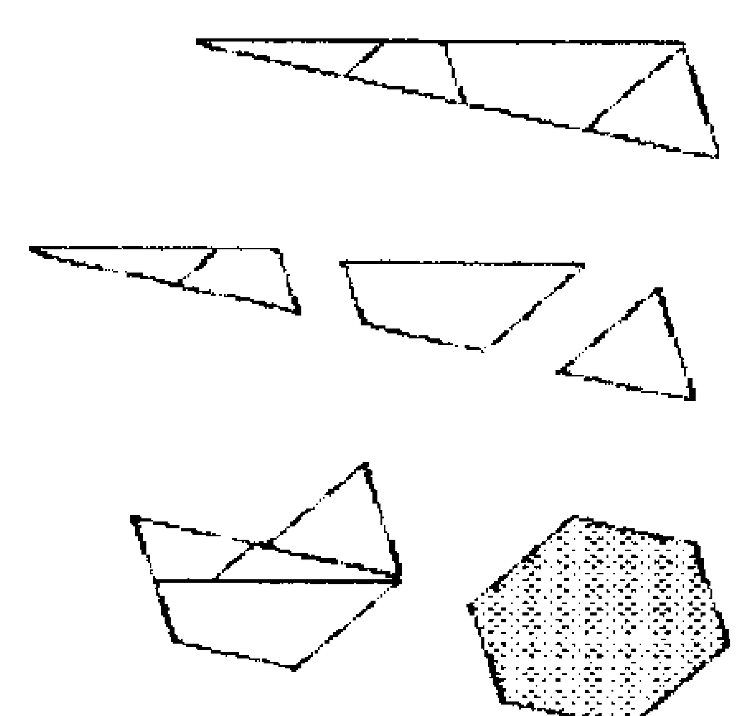


Fig. 6

Los seis triángulos exteriores tienen en conjunto un área que es igual a 6.(2/3) = 4 veces el hexágono sombreado. En consecuencia, el hexágono mayor representa un área que es 9 + 4 = 13 veces el área del hexágono pequeño. O, en otras palabras, el hexágono sombreado tiene un área que es 1/13 del hexágono mayor.

¡Hasta el próximo número!

Lecturas Matemáticas

Hoy nos dedicamos a tres obras:

1) LA TEORIA DE CONJUNTOS Y LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMATICAS - Gregorio Klimovsky - Ed. Universidad CAECE - 1993 - 73 páginas.
La aparición de la teoría de Conjuntos a fines del siglo pasado, causó una profunda conmoción no sólo en la Matemática, sino también en la Lógica. Con esta aparición surgieron nuevos e importantes temas dentro de la Matemática, como ser los Números transfinitos o la Topología general. Este pequeño, pero notable texto, discute las paradojas de la teoría Cantoriana y las ideas que surgieron como consecuencia de los intentos de refundamentarla y librarla de contradicciones. En 73 apretadas y jugosas páginas, el autor analiza la fundamentación epistemológica de la Matemática actual. No faltan las citas históricas y la descripción breve pero precisa de escuelas matemáticas como el logicismo ruselliano y el intuicionismo.
Es un texto muy bien secuenciado y de alta calidad didáctica, por lo que su lectura es, cuando menos, necesaria.

2) HISTORIA DE LAS IDEAS MODERNAS EN MATEMÁTICA - José Babini - Serie de Matemática - Monografía N° 4 de la O.E.A., 1970 - 70 páginas.
Pequeña gran obrita dividida en 10 capítulos magistralmente expuestos por el Prof. Babini, quien ha sido, como se sabe, un gran propulsor de los estudios sobre Historia de la Ciencia en Argentina y en el mundo.
La obra contiene 10 capítulos que nombraremos; a saber:

* Matemática a comienzos del siglo XIX.
* Geometrías no euclideanas.
* Aritmetización del Análisis.
* La teoría de Grupos - Galois.
* Las nuevas álgebras.
* La Lógica matemática.
* El método Axiomátco - Hilbert.
* La teoría de conjuntos - Cantor.
* La cuestión de los fundamentos.
* Las estructuras.

Admirable descripción de la génesis de los conceptos actuales en Matemática, el texto brinda una síntesis acabada de la evolución de los conceptos matemáticos que condujeron a la Matemática al estado en que hoy se encuentra.

3) THE MATHEMATICAL UNIVERSE - William Dunham - Ed. J. Wiley - New York, 1994 - 314 páginas (en inglés).
Para aquellos que leen inglés y les interesa la Matemática y su historia y desarrollo, (aunque no sean especialistas) he aquí un gran texto de divulgación. Es como dice la portada "un viaje alfabético entre las grandes demostraciones, problemas y personalidades de la Matemática". Sus capítulos corresponden cada uno a una letra del alfabeto y son los siguientes: **A**rithmetic, **B**ernoulli trials, **C**ircle, **D**ifferential Calculus, **F**ermat, **G**reek Geometry, **H**ypotenuse, **I**soperimetric problem, **J**ustification, **K**nighted Newton, **L**ost Leibniz, **M**athematical personality, **N**atural logarithm, **O**rigins, **P**rime number theorem, **Q**uotient, **R**ussell Paradox, **S**pherical Surface, **T**risection, **U**tility, **V**enn Diagram, **W**here are the women? (dedicado a mujeres matemáticas), **X-Y** plane, **Z**.
Admirable y muy documentado; la bibliografía que emplea es numerosísima y está separada por temas. No es de lectura complicada y contiene muchas citas originales de diversos autores. El autor, W. Dunham, ha sido premiado por su excelencia en la divulgación de contenidos matemáticos. Si lee inglés, se lo recomendamos.
Hasta la próxima

Jorge Martínez*

* Prof. de Matemática, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Los problemas clásicos griegos (primera parte)

Durante la segunda mitad del siglo V a.C., un pequeño grupo de matemáticos griegos se interesó en algunos problemas de construcción geométrica. Desde aquella época, estos problemas mantuvieron ocupados a numerosísimos matemáticos quienes, a pesar de sus estériles resoluciones, generaron notables progresos en geometría. Estamos hablando de los tres problemas clásicos de la matemática griega antigua: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.
Para hacer tales construcciones, los griegos establecieron una terrible restricción: sólo podían efectuarse con regla y compás. Como se sabe desde el siglo pasado, tales construcciones son imposibles de hacer.

Introducción

Cuando los griegos hablaban de geometría, se referían a construcciones hechas con regla y compás exclusivamente. Andrés Sestier, en su "Historia de las Matemáticas", justifica tal predilección por aquellos elementos, *recordando el instrumento que el hombre dispone desde tiempos inmemoriales para el trazo de rectas y círculos: si no es la cuerda manufacturada, puede ser una liana elástica tendida entre dos puntos, es decir, una recta. Y la misma cuerda, fija en un extremo, puede describir con el otro, una circunferencia.*
A pesar de que los primitivos matemáticos griegos construyeron aparatos capaces de resolver problemas geométricos insolubles con regla y compás, estas construcciones fueron consideradas por Euclides como construcciones mecánicas, y por ende, ajenas a la geometría.
Parece ser, sin embargo, que el gran responsable de tales restricciones fue el maestro de Euclides: Platón. En su "Historia de la Matemática", Carl Boyer menciona a Plutarco quien, en su "Vida de Marcelo", habla de la indignación de Platón ante el uso de artificios mecánicos en geometría. Platón consideraba tal uso como *la simple corrupción y aniquilación del bien que encierra la geometría, volviendo así vergonzosamente su espalda a los objetos incorpóreos de la inteligencia pura.* Según Boyer, la razón de estas limitaciones no fue la sencillez de los instrumentos utilizados para hacer rectas y círculos, sino la simetría de esas curvas. En un círculo, por ejemplo, cualquiera de los diámetros es eje de simetría. En una recta, a cualquier punto se lo puede considerar como centro de simetría.
Así, de todas las figuras geométricas, las más perfectas eran la recta y el círculo; y sus utensillos, la regla y el compás, fueron considerados por Platón como *instrumentos divinos.*

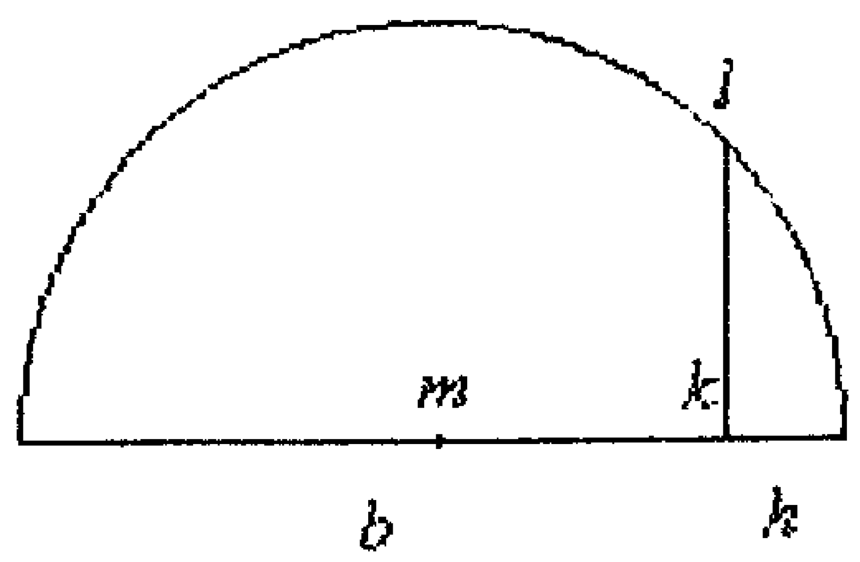
Hecha estas consideraciones, vamos a referirnos primero al más antiguo de los tres problemas clásicos griegos: **la cuadratura del círculo**.

La cuadratura del círculo

Este problema se refiere a la construcción, con regla y compás, de un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.
Por aquel entonces, los griegos sabían cuadrar, con regla y compás, cualquier polígono. El método es sencillo y elegante. Primero se divide al polígono en triángulos y después se cuadra cada triángulo. Es decir, se trata de hallar un número x tal que

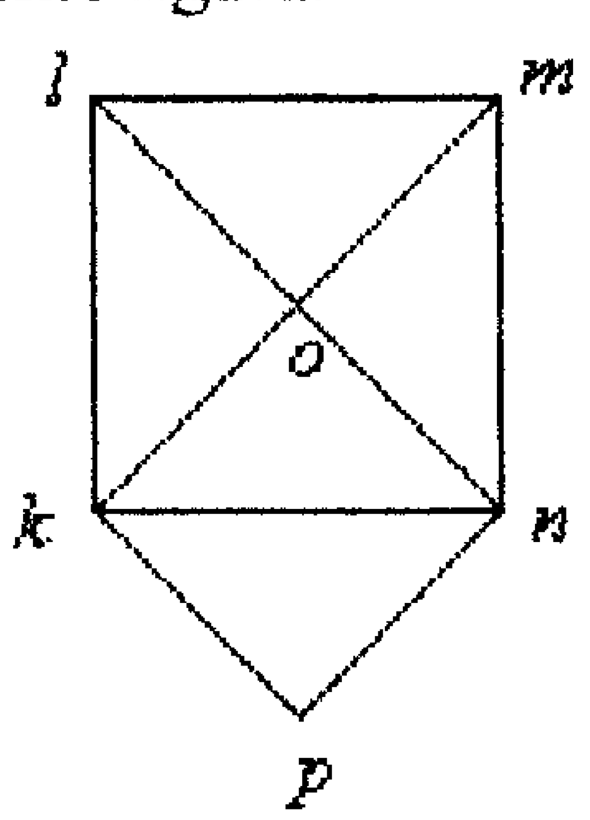
$$x^2 = \frac{bh}{2}.$$

Se comienza entonces, buscando la media proporcional entre b y h, es decir, buscando un número y tal que $\frac{b}{y} = \frac{y}{h}$, o sea, $bh = y^2$. Pero esto equivale a cuadrar un rectángulo de base *b* y altura *h*. Esta construcción puede realizarse del siguiente modo: se trazan los segmentos *b* y *h*, uno a continuación del otro. Se toma su punto medio *m* y se traza el semicírculo como muestra la figura:



Luego se levanta la perpendicular por el punto *k*. Entonces, el segmento *kl* es la media proporcional buscada (dejamos al lector su verificación).

Así, $\frac{b}{\overline{kl}} = \frac{\overline{kl}}{h}$, esto es, $\overline{kl}^2 = bh$. Ya cuadrada el área *bh*, para cuadrar el área *bh/2*, sólo hay que dividir un cuadrado a la mitad. Y esto puede hacerse observando la siguiente figura:



Como fácilmente se verifica (a cargo del lector) el área del cuadrado *konp* es igual a la mitad del área del cuadrado *klmn*. De este modo, $\overline{ko}^2 = \frac{bh}{2}$. Es decir, se pudo construir un cuadrado de lado *ko*, cuya área es igual a la de un triángulo de base *b* y altura *h*.

Una vez cuadrados todos los triángulos se procede a buscar un cuadrado de área igual a la suma de todos los triángulos. Dejamos al infatigable lector la sencilla búsqueda de un procedimiento geométrico que lleve a cabo esta noble tarea.

Parece natural pensar que si los griegos podían cuadrar cualquier polígono con regla y compás, pretendieran cuadrar un círculo.

El problema de la cuadratura del círculo estaba planteado desde hacía mucho tiempo (figuraba ya en el papiro de Rhind), pero se lo resolvía en forma aproximada. Por ejemplo, en dicho papiro se da la siguiente fórmula para el área de un círculo: $\text{área} = (\frac{8}{9}d)^2$, donde d es el diámetro. De aquí resulta un valor para π de 3,16. Se ve entonces, que tomaban un cuadrado de lado 8/9.*d*, cuya área era equivalente a la del círculo de diámetro *d*. Se desconoce si los egipcios tenían conciencia o no de que en tal construcción no había más que una aproximación.

Pero situémonos en la Grecia del siglo V a.C. Uno de los primeros matemáticos que, aparentemente, se ocupó del problema fue Anaxágoras de Clazomene. Según Plutarco, Anaxágoras, estando en prisión (ver recuadro), escribió sobre la cuadratura del círculo. Sin embargo, no hay ningún detalle que se conserve sobre este asunto.

Otro de los matemáticos griegos vinculados al problema fue Hipócrates de Quíos (ver recuadro..., otro recuadro).

<u>Anaxágoras de Clazomene</u>

Aunque nacido en Clazomene (Jonia), Anaxágoras fue un filósofo que vivió en Atenas desde el 480 a.C. aproximadamente, hasta que fue expulsado en el 450 a.C. En esa ciudad, cuya prosperidad y atmósfera intelectual atrajo a pensadores de todas partes del mundo griego, se vivía un clima de gran libertad para la investigación. Esto entraba, a veces, en conflicto con las costumbres establecidas.

No era Anaxágoras de los que estaban dispuestos a dejar la astronomía al criterio de los teólogos. Así, fue encarcelado por afirmar que el Sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo, tan grande por lo menos como todo el Peloponeso, y que la Luna no era más que una tierra deshabitada que recibía y reflejaba la luz del Sol.

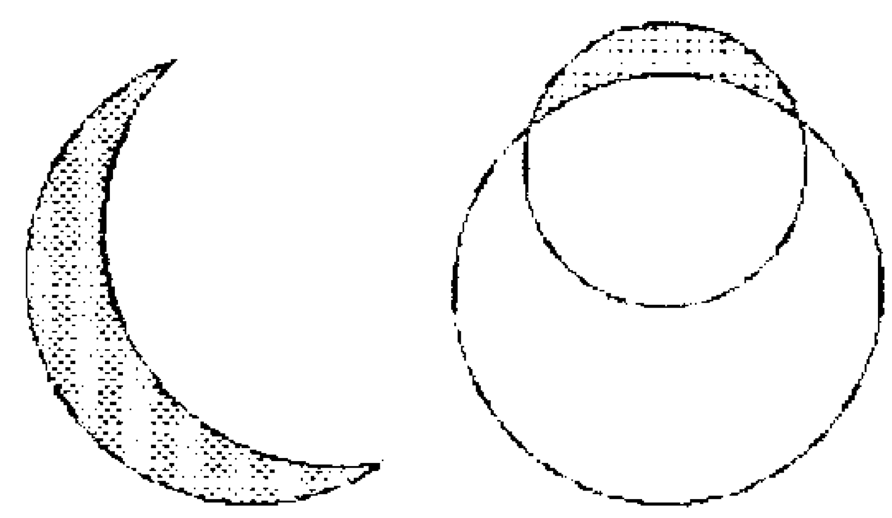
Anaxágoras fue maestro de Pericles, y fue este último quien consiguió, finalmente, liberarlo de la cárcel.

Se cree que Hipócrates, intentando cuadrar el círculo, logró la primer cuadratura de una figura curva: la *lúnula*. Estas cuadraturas son muy significativas ya que permiten apreciar, a la vez que admirar, el gran conocimiento geométrico que poseían los griegos en aquellos tiempos.

Hipócrates de Quíos
Este matemático griego nació en la isla de Quíos (Jonia), lugar que abandonó hacia el 430 a.C. para trasladarse a Atenas en su condición de mercader (no debe confundirse a este Hipócrates con su contemporáneo, el famoso médico Hipócrates de Cos). Según Aristóteles, Hipócrates perdió su dinero en Bizancio por un fraude, aunque algunos dicen que fue atacado y robado por piratas. Como consecuencia de estos hechos, se dedicó al estudio de la geometría.
Hipócrates es el primer geómetra sobre cuyos aportes se posee información confiable. Proclo nos dice que este matemático fue el primero en escribir unos *Elementos de Geometría*, anticipándose en más de un siglo a los Elementos de Euclides. Lamentablemente, aquel escrito se ha perdido.
Lo que se conoce de Hipócrates es un fragmento que Simplicio, comentarista de Aristóteles del siglo VI d.C., dice haber copiado literalmente de la *Historia de la Matemática* de Eudemo (obra también perdida). Este breve pasaje es el que describe las cuadraturas de las lúnulas.

Las lúnulas de Hipócrates

Aunque sin lograr cuadrar el círculo, Hipócrates logra cuadrar recintos limitados por dos arcos de círculos, que por su forma de luna creciente, se los llamó *lúnulas de Hipócrates*. Las lúnulas son partes de círculos; de hecho, el complemento de un círculo respecto a otro es una lúnula.

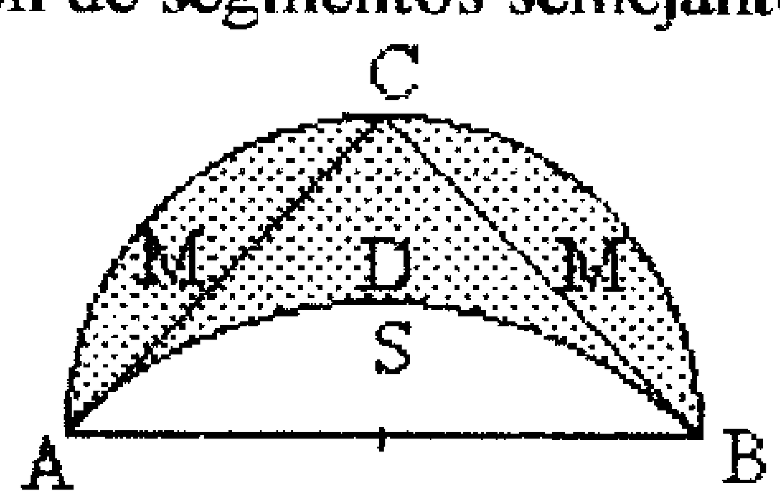


En el texto de Simplicio, Eudemo afirma que Hipócrates logró cuadrar "todas" las lúnulas, dividiéndolas en tres casos, de tal manera que: 1) Su arco exterior sea un semicírculo, 2) Su arco exterior sea mayor que un semicírculo, 3) Su arco exterior sea menor que un semicírculo.
De acuerdo a Eudemo, Hipócrates se basó, para demostrar sus cuadraturas, en la siguiente proposición: *Segmentos semejantes de círculo están entre sí en la misma relación que los cuadrados construidos sobre sus bases* [dos segmentos circulares son semejantes si tienen el mismo ángulo central]. Esta proposición la demuestra apoyándose en otra que ya había demostrado, según Eudemo: *Dos círculos están en la misma relación que los cuadrados construidos sobre sus diámetros* (Siguiendo a Boyer, parece improbable que Hipócrates haya logrado una demostración rigurosa de esta proposición. La misma aparece en el Libro XII.2 de los Elementos de Euclides, y proviene del genial Eudoxo).
Con la notación actual, se observa inmediatamente que dos círculos de radios R y r respectivamente, están entre sí, como los cuadrados de sus

diámetros: $\dfrac{\pi.R^2}{\pi.r^2}=\dfrac{(2R)^2}{(2r)^2}$.
La proposición de los segmentos semejantes de círculo también se observa inmediatamente y la dejamos a cargo del lector.
Volviendo a los tres casos de lúnulas que nombró Hipócrates, vamos a ver cómo demostró éste cada una de ellas.

1) El arco exterior de la lúnula es un semicírculo

Hipócrates circunscribe un semicírculo a un triángulo rectángulo isósceles ACB. Describe luego, sobre la hipotenusa del triángulo, un segmento circular S semejante a los segmentos circulares M determinados por los catetos del mismo triángulo [ver Aclaración para la construcción de segmentos semejantes]



Sea L la lúnula ACBDA y sea T el triángulo ACB; se comprueba entonces que:

$$L + S = T + 2M \qquad (1)$$

Pero como los segmentos circulares S y M son entre sí como los cuadrados construídos sobre sus bases, se tiene que:

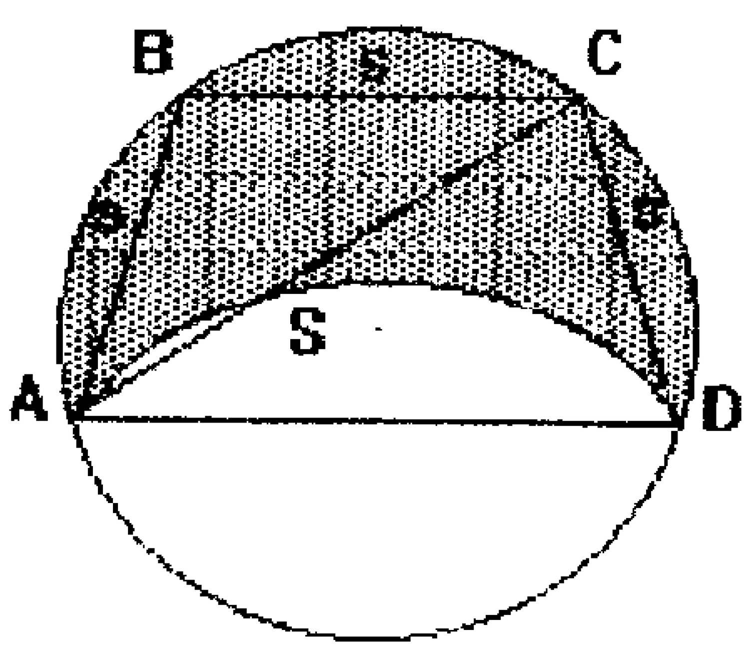
$$\frac{S}{M}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \qquad (2)$$

Por el teorema de Pitágoras, $2\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$, entonces $2=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$, con lo que (2) queda: $\frac{S}{M}=2 \Rightarrow S=2M$.

Por lo tanto, en (1) resulta: L=T, con lo cual la lúnula es equivalente al triángulo ABC y, en consecuencia, al cuadrado de lado $\frac{\overline{AB}}{2}$, como fácilmente se verifica.

2) El arco exterior de la lúnula es mayor que un semicírculo

Para esta cuadratura, Hipócrates construye un trapecio que tiene tres lados iguales (AB=BC=CD), y tal que el cuadrado construido sobre la base mayor AD sea igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los otros tres lados ($AD^2=AB^2+BC^2+CD^2$). Circunscribe entonces un círculo a este trapecio, y construye sobre AD un segmento circular S semejante a los que determinan los otros tres lados iguales [ver Aclaración]



Eudemo explica que el arco exterior (ABCD) de la lúnula es mayor que un semicírculo, pues trazando una diagonal en el trapecio, digamos AC, puede demostrarse que el ángulo ACD es agudo y, por lo tanto, está inscripto en un arco (que es el arco exterior de la lúnula) mayor que un semicírculo ya que, como bien aclara Simplicio, los ángulos inscriptos en los semicírculos son rectos; los inscriptos en arcos mayores que un semicírculo son agudos; y los inscriptos en arcos menores que un semicírculo, son obtusos.

Prosigue Eudemo diciendo que, como en el triángulo ABC el ángulo ABC es evidentemente obtuso y AC se le opone, resulta que $AC^2>AB^2+BC^2$.

Pero entonces se tiene que: $\overline{AC}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AB}^2=2\overline{CD}^2$

Sumando, miembro a miembro $\overline{CD}^2$, en la anterior desigualdad, se obtiene:

$$\overline{AC}^2+\overline{CD}^2>3\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$$

Por lo tanto, AD se opone, en el triángulo ACD, a un ángulo agudo, el ACD.

Tras estas observaciones, Simplicio observa que Eudemo omitió los pasos finales de la cuadratura de la lúnula en cuestión. Los comentadores creen que esto se debió al hecho de que es casi evidente. De todos modos no estará de más deducirlo. Sea L la lúnula ABCDA, y sea T el trapecio ABCD. Se comprueba que:

$$L+S=3s+T \qquad (1)$$

Sabemos, por la proposición preliminar, que:

$$\frac{S}{s}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}\Rightarrow S=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}s \qquad (2)$$

De acuerdo a las hipótesis de Hipócrates, se tiene que:

$$\overline{AD}^2=3\overline{AB}^2$$

Así, en (2):

$$S=\frac{3\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2}s\Rightarrow S=3s$$

Por lo tanto, por la expresión (1) tenemos que L=T.

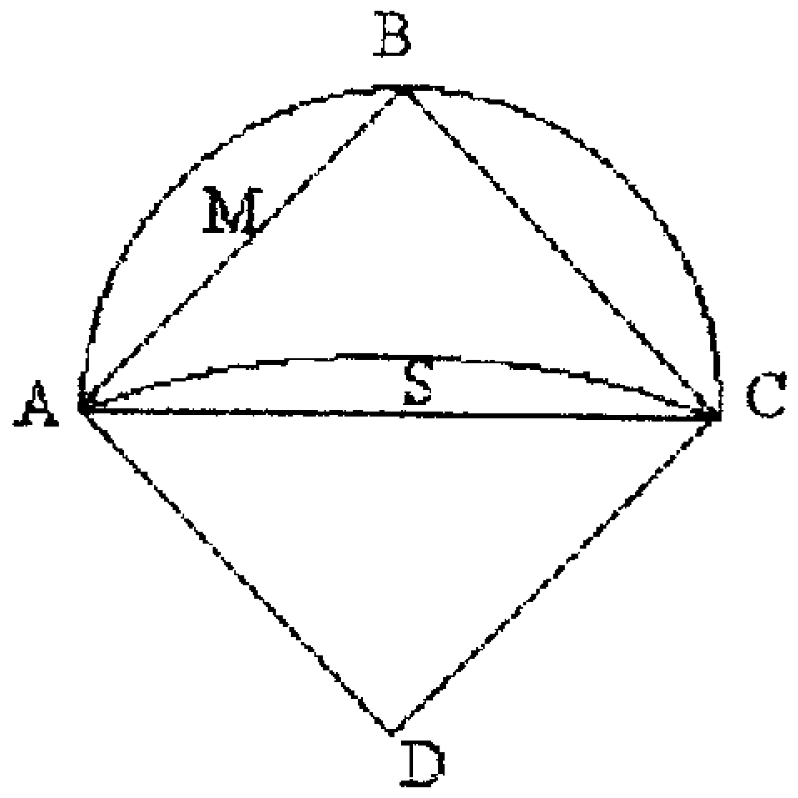
Por último, como se vio en párrafos anteriores, se procede a cuadrar el trapecio T.

3) El arco exterior de la lúnula es menor que un semicírculo

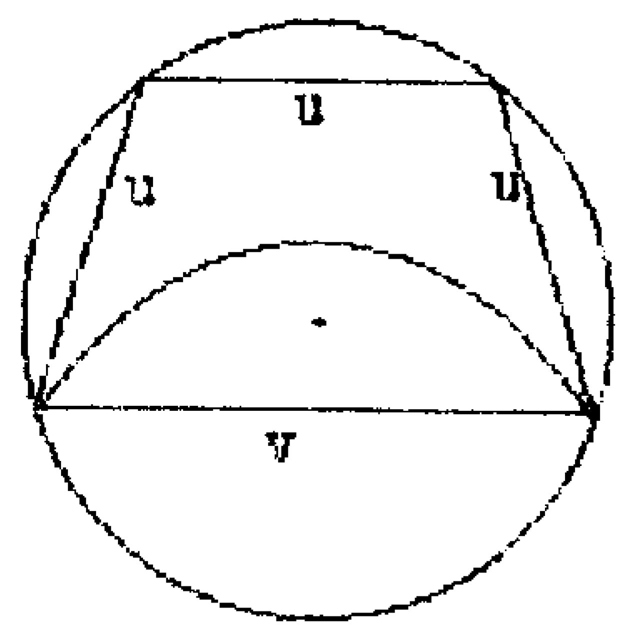
La demostración aquí es algo diferente, aunque sigue los lineamientos de la anterior. Remitimos al lector interesado en ella al libro de Abel Rey citado en la bibliografía de esta nota (pág. 55 y 56).

Aclaración:

Para construir los segmentos semejantes puede, en el primer caso, procederse del siguiente modo. Se quiere que S sea semejante a M (es decir, que tengan el mismo ángulo central). Ya que a M le corresponde un ángulo central recto, se construye S, dibujando el cuadrado ABCD y trazando el arco con centro en D. El ángulo ADC es, obviamente, recto.



En el segundo caso, primeramente debe construirse un trapecio con 3 lados iguales y el cuadrado de la base mayor igual al triplo de la suma de los cuadrados de los otros lados.

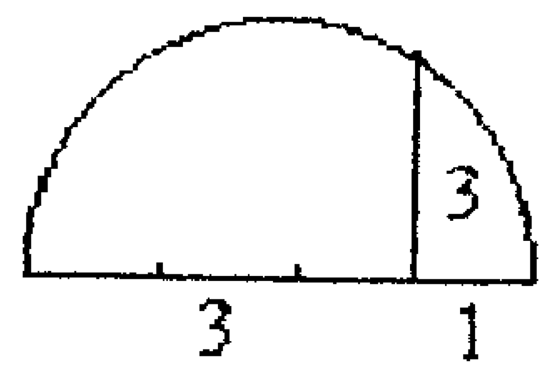


Es decir, dada una longitud v, debe construirse una longitud u tal que

$v^2 = 3u^2$, o sea, $u = \sqrt{\dfrac{v^2}{3}} \Rightarrow$

$u = \dfrac{v}{\sqrt{3}} \Rightarrow u = \dfrac{\sqrt{3}}{3}v$.

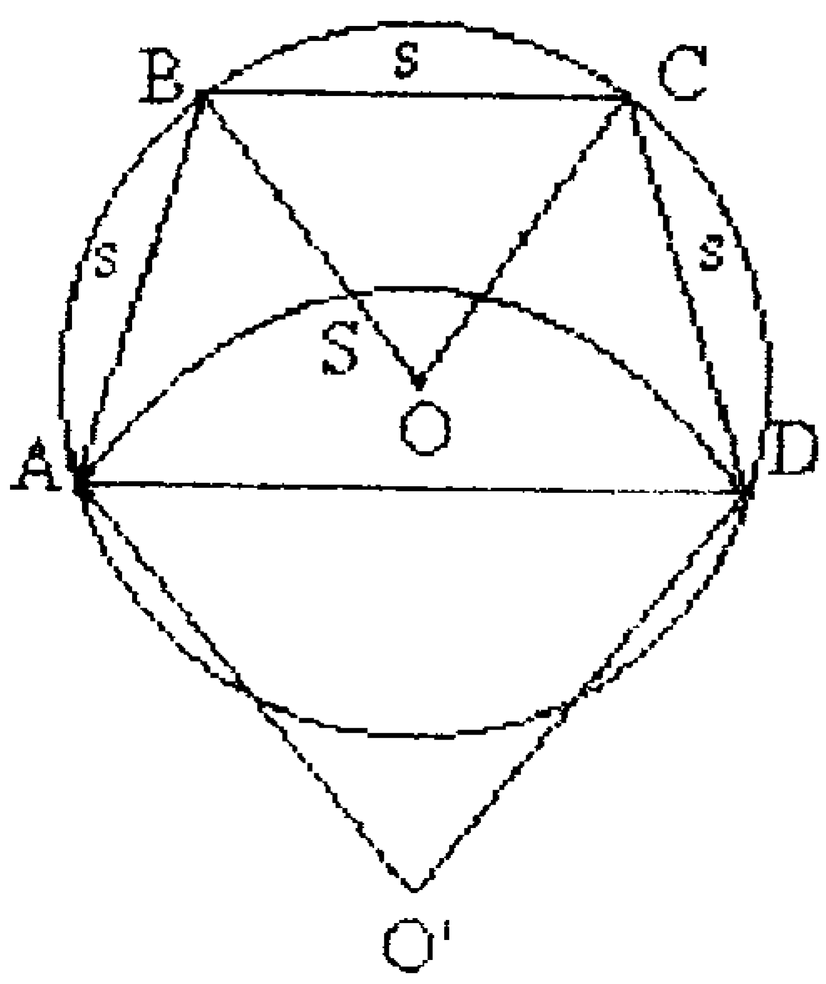
Esta medida u es fácilmente construible con regla y compás. Por ejemplo, sea v=5, entonces $u = \dfrac{\sqrt{3}.5}{3}$. El número $\sqrt{3}$ es la media geométrica entre 3 y 1:



Para hacer el producto $\sqrt{3}.5$ se aplica el Teorema de Thales, es decir, tal producto es el cuarto proporcional entre $1, \sqrt{3}$ y 5, es decir, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{x}$.

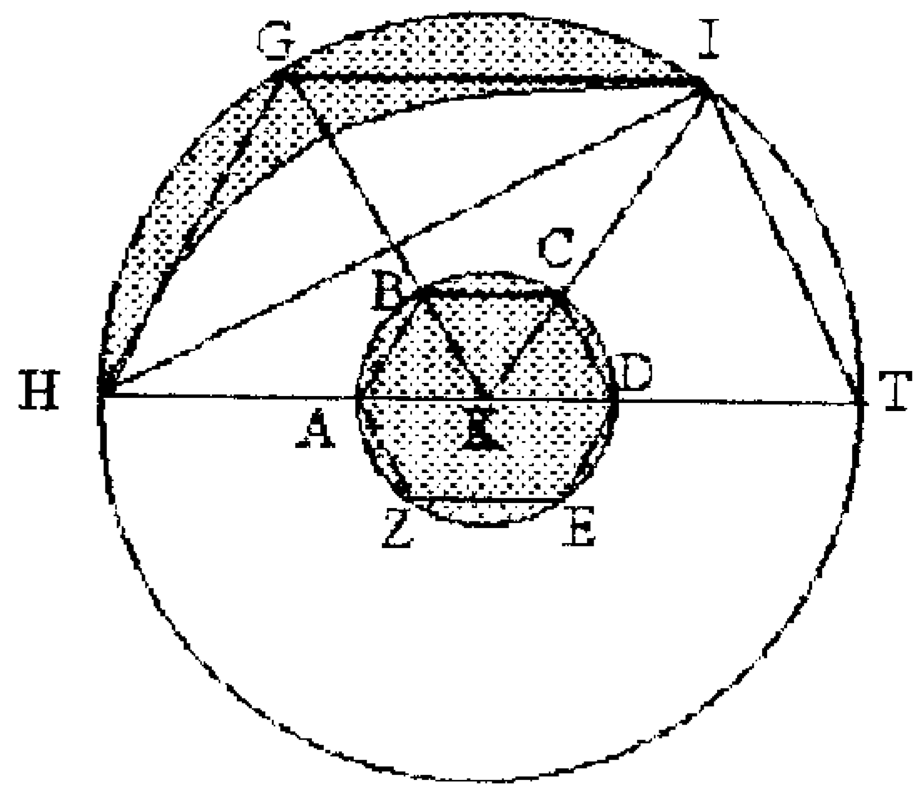
Una vez obtenida esta longitud, sólo resta dividirla en tres partes iguales.

Para construir el segmento circular S semejante a s, basta construir el central correspondiente al arco BC y trazar luego, las rectas AO' y DO', paralelas a BO y CO respectivamente (ver figura de abajo). Con centro en O' y radio O'A se construye el segmento circular buscado.



Hipócrates de Quíos no sólo planteó estos tres casos de lúnulas, sino que también cuadró la suma de una lúnula y de un círculo. Esta demostración es, en mi opinión, de gran belleza.

Se comienza trazando dos círculos con centro en el punto K, de tal manera que el cuadrado del diámetro del círculo exterior sea seis veces el cuadrado del diámetro del círculo interior. Se inscribe, luego, en el círculo interior el hexágono regular ABCDEZ. Se prolonga entonces hasta la circunferencia exterior los radios KB y KC, y se trazan las rectas HG y HI. Finalmente, en HI se describe un segmento circular semejante al segmento circular apoyado en HG.



Entonces, como se sabe que el ángulo HIT es recto, se tiene:

$$HI^2 + IT^2 = HT^2 \qquad (1)$$

y $HT^2 = (2HK)^2$.

Pero $HK = HG$ pues $HGIT$... es un hexágono regular, con lo cual $HT^2 = (2HG)^2 = 4HG^2$ (2). Además $IT = HG$.

Entonces en (1):

$$HI^2 + HG^2 = 4HG^2 \Rightarrow$$
$$HI^2 = 3HG^2 \qquad (3)$$

Ahora bien, como por construcción $HT^2 = 6AD^2$, reemplazando en (2): $4HG^2 = 6AD^2$ (4).

Pero,

$$AD = 2AB \Rightarrow AD^2 = 4AB^2$$

Así, en (4):

$$4HG^2 = 6.4AB^2 \Rightarrow HG^2 = 6AB^2$$

Entonces, en (3):

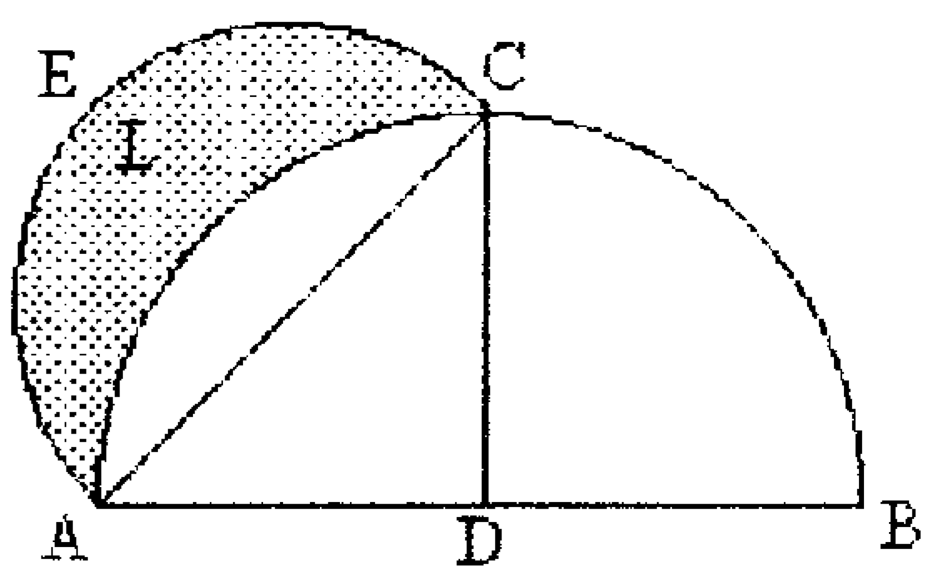
$HI^2 = 18AB^2$ o
$HI^2 = 6AB^2 + 6AB^2 + 6AB^2$ o
$HI^2 = HG^2 + GI^2 + 6AB^2$

Por lo tanto, y de acuerdo a la proposición preliminar de Hipócrates, el segmento circular construido sobre HI es igual a la suma de los segmentos construidos sobre HG y GI, más los seis segmentos construidos sobre AB, BC, CD, DE, EZ, ZA.
Sea entonces L la lúnula HGI.

L = triáng. HGI - seg. HI + seg. HG + seg. GI
= triáng. HGI - (seg. HG + seg. GI + seg. AB +...+ seg. ZA) + seg. HG + seg. GI
= triáng. HGI - 6.seg. AB, BC,..., ZA

Así: L + 6. seg. = triáng. HGI.
Si sumamos a ambos miembros el hexágono AB...Z, se tiene:
triáng. HGI + hexág. A...Z =
= L + 6 seg. + hexág. A...Z
= L + circ. de radio KA

Por lo tanto, al cuadrar luego el triángulo HGI y el hexágono A...Z, quedará cuadrada la suma del círculo y de la lúnula.
De esta manera, nos describe Eudemo tres lúnulas diferentes cuadradas por Hipócrates (además de la cuadratura de la suma del círculo y la lúnula).
Muchos geómetras pensaron que, a partir de las cuadraturas de estas lúnulas, podía llegar a cuadrarse, por fin, el círculo. Aristóteles, en su *Física*, observó que los errores provenientes de una conclusión falsa a partir de principios exactos, deben refutarse. Simplicio y otros comentadores de Aristóteles, como Alejandro de Afrodisia, atribuyeron esta alusión a las cuadraturas de las lúnulas de Hipócrates.
Así, Simplicio, a manera de ejmplo, describe dos lúnulas cuadrables, a partir de las cuales, cuadrará el círculo.
Comienza entonces, considerando la lúnula comprendida entre el arco AC de un círculo de centro D, y el arco de una semicircunferencia construida sobre la cuerda AC, es decir, el lado del cuadrado inscripto en el círculo.



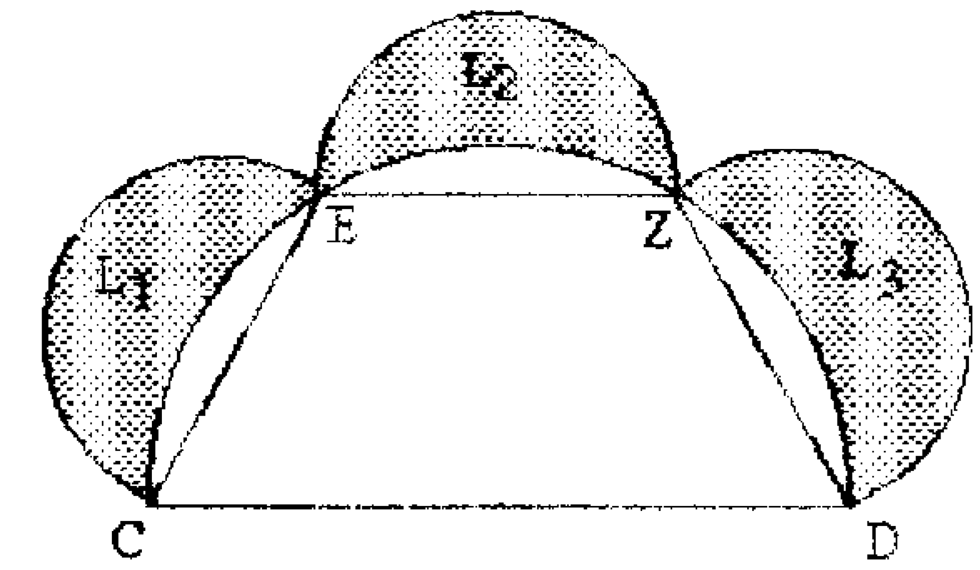
Por Pitágoras, $AB^2 = 2AC^2$ y como "los cuadrados de los diámetros son uno a otro como sus círculos o semicírculos respectivos", se tiene

que: $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{\text{semicirc.}\, ACB}{\text{semicirc.}\, AEC}$,
de donde resulta que:

semicir.ACB=2semicirc.AEC.

De aquí se infiere que:
cuadrante ACD=semicirc. AEC
Si sumamos a ambos miembros la lúnula AEC (que llamaremos L), se tendrá:
cuad.ACD+L=semic. AEC+L
Si restamos ahora el segmento circular sobre AC, resultará:
cuad. ACD + L - seg. AC=
=semicirc. AEC - seg. AC + L
Esto es,
cuad. ACD + L - seg. AC = 2L
Es decir:
cuad. ACD - seg. AC = L, o sea, L = triáng. ACD.

Así, la lúnula es igual al triángulo ACD, y como el triángulo es igual a un cuadrado, la lúnula en cuestión es cuadrable.
Ahora bien, apoyándose en esta cuadratura, Simplicio mostraría cómo **cuadrar el círculo**.
Sea un segmento AB y un semicírculo descripto sobre él. Tracemos CD=2AB y describamos sobre él un semicírculo. Sean CE, EZ y ZD los lados de un hexágono regular inscripto en él. Describamos sobre estos lados semicírculos. Entonces, cada uno de estos semicírculos es igual al semicírculo sobre AB, pues AB es igual al lado del hexágono.



Los cuatro semicírculos son iguales entre sí, y puede escribirse lo siguiente:

semicirc.AB + semicirc.CE + semicirc.EZ + semicirc.ZD =
= 4 semicirc. AB

Como

$$\frac{\text{semicirc. } CD}{\text{semicirc. } AB} = \frac{CD^2}{AB^2} = \frac{(2.AB)^2}{AB^2} = 4$$
$$\Rightarrow \text{semicirc. } CD = 4.\text{semicirc. } AB$$

Entonces:

sem.CD=sem.AB + sem.CE + sem.EZ + sem. ZD

Si restamos a ambos miembros los segmentos circulares sobre CE, EZ y ZD, resulta:

trapecio CEZD = sem.AB + $L_1 + L_2 + L_3$

Si quitamos de ambos miembros la suma de las lúnulas se tendrá:

trapecio CEZD - ($L_1 + L_2 + L_3$) = semicirc. AB

En la demostración anterior vimos que estas lúnulas son cuadrables, es decir, que existe una figura rectilinea igual a cada una de las lúnulas. De esta manera, el semic. AB, que es igual al trapecio CEZD menos una figura rectilínea, es una figura rectilínea. Esta figura puede duplicarse y luego, cuadrarse. Este cuadrado tendrá entonces un área igual a la del círculo de diámetro AB. De esta forma se ha resuelto, por fin, el problema de la cuadratura del círculo.

La demostración es realmente maravillosa..., pero lamentablemente existe un error pues, como se sabe, el círculo no se puede cuadrar.

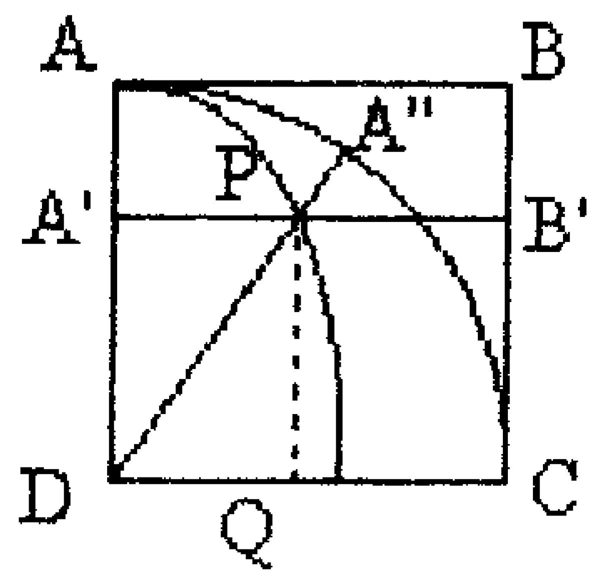
La cuestión estaría en si es posible cuadrar las lúnulas que se hallan sobre los lados del hexágono. Pero escuchemos a Simplicio: *La manera de tratar el problema es ciertamente ingeniosa: pero el error procede de que lo que se ha considerado o aceptado como demostrado, en general, no lo está. En efecto, no se ha demostrado que toda lúnula sea cuadrable, sino únicamente aquella que está construida sobre el lado del cuadrado inscripto en el círculo. Ahora bien, las lúnulas están construidas aquí sobre los lados del hexágono inscripto. La demostración que pretende haber cuadrado las lúnulas es ficticia y no convence de manera concluyente...*

Por lo tanto, las lúnulas cuadrables que hemos visto son casos particulares y excepcionales de lúnulas. En general, la lúnula no es cuadrable, lo mismo que sucede con el círculo. Es de notar que en aquella época se desconocía la imposibilidad de cuadrar el círculo; por ejemplo, Aristóteles habla del problema como no resuelto.

Los griegos no pudieron cuadrar el círculo con regla y compás, pero sí lo hicieron con otros medios. Vamos a ver ahora dos ejemplos de estas construcciones.

Trisectriz de Hipías

En la segunda mitad del siglo V a.C. vivió en Atenas un sofista llamado Hipías, natural de Ellis (ver recuadro). Parece ser que a él se debe la introducción de la primera curva aparte de la recta y la circunferencia. Esta curva se llamó *trisectriz*. La misma se dibuja de la siguiente manera: sea ABCD un cuadrado en donde el lado AB se traslada con velocidad uniforme desde su posición inicial hasta llegar a coincidir con DC, mientras que, durante el mismo intervalo de tiempo, el lado DA gira uniformemente en el sentido de las agujas del reloj desde su posición inicial hasta llegar a coincidir con DC.



Si las posiciones de los dos segmentos móviles en un instante cualquiera vienen dadas por A'B' y DA" respectivamente, y si P es el punto de intersección de A'B' con DA", entonces el lugar geométrico de P a lo largo del movimiento será la trisectriz de Hipías. Con ella se obtiene la siguiente proporción:

$$\frac{AD}{PQ} = \frac{ArcoAC}{ArcoA''C}$$

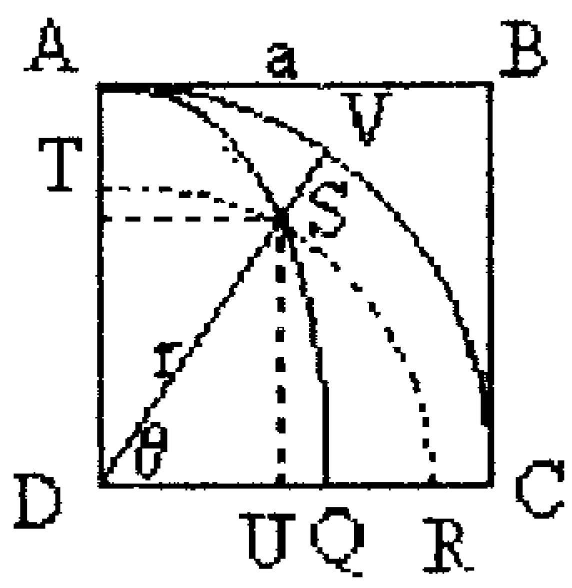
A partir de esta curva es posible trisecar un ángulo, pero nos ocuparemos de tal problema en el próximo número de Aχioma.

Hipías de Ellis

Hipías fue un sofista que nació alrededor del 460 a.C. (los sofistas eran maestros que se ganaban la vida enseñando a sus conciudadanos sobre muy diversos temas). Es uno de los primeros matemáticos del que se tiene información a través de los diálogos de Platón. Éste lo presenta como un sofista típico, insustancial, vanidoso y codicioso. Se dice que tenía una notable memoria, que era hábil en multitud de oficios manuales y que presumía de su inmenso saber. Sócrates lo describía como elegante y erudito, pero jactancioso y superficial. Cabe señalar que Platón siempre se mostró con una actitud irreconciliable hacia los sofistas en general.

A la curva de Hipías se la conoce también con el nombre de *cuadratriz*, ya que, como veremos, puede ser utilizada para cuadrar el círculo. El que se ocupó de esto fue Dinostrato, hermano de Menecmo (este último fue el que descubrió las cónicas). Ambos fueron discípulos de Eudoxo, y vivieron a mediados del siglo IV a.C.

Al parecer, Dinostrato descubrió una propiedad sorprendente del punto Q, extremo de la trisectriz.



Dinostrato afirma que el lado AB del cuadrado es la media proporcional entre el segmento DQ y el arco AC, es decir, $\frac{arcoAC}{AB}=\frac{AB}{DQ}$. La demostración de este teorema, debida probablemente al mismo Dinostrato, nos es transmitida por Pappus, que vivió a principios del siglo IV d.C. Siguiendo a Boyer, vamos a hacer una demostración indirecta, es decir, dada la proporción $\frac{arcoAC}{AB}=\frac{AB}{DR}$, demostraremos que DR no puede ser mayor ni menor que DQ, por lo que debe ser igual. Supongamos que DR>DQ. Tracemos la circunferencia de centro D y radio DR, que cortará a la trisectriz en S y al lado AD en T. Consideremos la perpendicular SU al lado DC por el punto S. Como los arcos de circunferencia correspondientes al mismo ángulo central son entre sí como sus radios, se tiene:

$$\frac{arcoAC}{arcoTR}=\frac{AB}{DR}\Rightarrow\frac{arcoAC}{AB}=\frac{arcoTR}{DR}$$

y como por hipótesis $\frac{arcoAC}{AB}=\frac{AB}{DR}$, se sigue que $arcoTR=AB$. Pero de la propiedad que define la trisectriz se tiene que

$$\frac{AB}{SU}=\frac{arcoAC}{arcoVC}=\frac{arcoTR}{arcoSR}.$$

Luego, si $arcoTR=AB$, entonces debe ser $arcoSR=SU$, lo cual es absurdo, pues la perpendicular es más corta que cualquier otra línea recta o curva que vaya desde el punto S a la recta BC. Así, DR no puede ser mayor que DQ.

Análogamente puede demostrarse que DR no puede ser menor que DQ, con lo que queda demostrado el teorema de Dinostrato, es decir,

$$\frac{arcoAC}{AB}=\frac{AB}{DQ}.$$

De esta manera, conocido Q, se puede hallar el segmento X:

$\frac{X}{AB}=\frac{AB}{DQ}$ con la conocida construcción geométrica del cuarto proporcional. Este segmento X tendrá entonces una longitud igual al arco AC. Ahora bien, aparentemente Dinostrato conocía lo proposición demostrada por Arquímedes en el siglo siguiente: *el área de un círculo es igual a la de un triángulo cuya base es igual a la longitud de la circunferencia y cuya altura es igual al radio* (el lector puede verificar esto sencillamente). Así, si se construye un triángulo de base X y altura AB, el área de este será igual a la del círculo de radio AB. Luego, no hay más que cuadrar dicho triángulo.

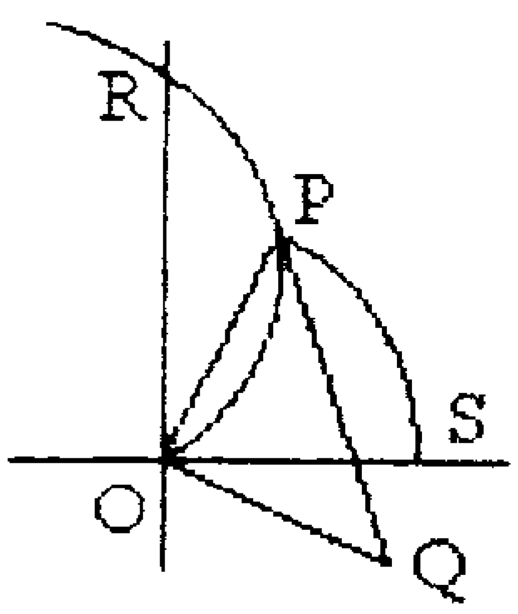
Es necesario aclarar, que siempre estuvo claro para los griegos que esta cuadratura "violaba las reglas del juego, según las cuales sólo se permitía utilizar rectas y circunferencias".

La espiral de Arquímedes

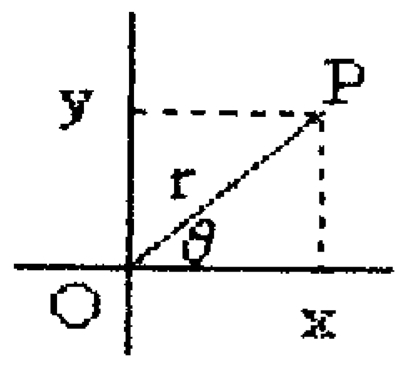
Arquímedes fue otro matemático que se sintió atraído por los problemas clásicos. En su libro *De las Espirales*, Arquímedes se ocupa del estudio de la curva conocida hoy como la *espiral de Arquimedes* (un artículo sobre su vida y su obra aparece en los números 3 y 4 de Aχioma).

Esta espiral se define como el lugar geométrico de un punto del plano que, partiendo del

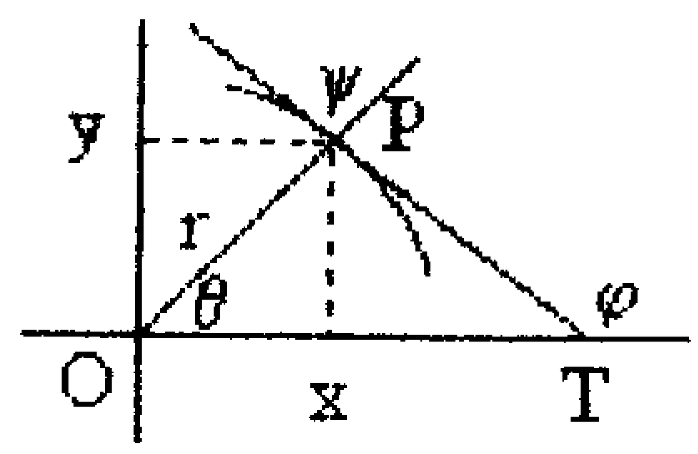
extremo de una semirrecta, se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira, a su vez, uniformemente alrededor de su extremo. La ecuación de esta espiral, en coordenadas polares, es de la forma $r=a.\theta$.
Esta curva, tal como lo demostró Arquímedes, puede servir para cuadrar el círculo. Se comienza trazando por un punto P de la espiral OPR la tangente PQ. Sea Q el punto de intersección de esa tangente con la recta OQ perpendicular a OP. Entonces, demuestra Arquímedes que el segmento OQ es igual a la longitud del arco PS de la circunferencia de centro O y radio OP.



Para poder ver la demostración de este teorema, recurriremos al cálculo infinitesimal. Pero debemos hacer primero algunas consideraciones básicas.
La representación cartesiana consiste en hacer corresponder a cada par de valores (x,y) un punto P del plano, cuya ubicación queda perfectamente definida por esos valores. Pero este punto P también queda determinado cuando se conoce la distancia OP=r y el ángulo θ que forma OP con el semieje positivo de las x.



r y θ son las *coordenadas polares* del punto P. r se llama *radio vector* y θ *argumento*. Al eje Ox se lo conoce como *eje polar*.
Una curva en coordenadas polares está expresada por la función r=f(θ).
Supongamos que tenemos la siguiente curva r=f(θ) dada en coordenadas polares:



Supongamos también que f(θ) es derivable, trataremos de hallar la pendiente de la tangente PT.

Sabemos que $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$.
Dado que $y=r.sen\theta$ y $x=r.cos\theta$, se tiene (1):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r.\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\frac{dr}{d\theta}}{-r.\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\,\frac{dr}{d\theta}}$$

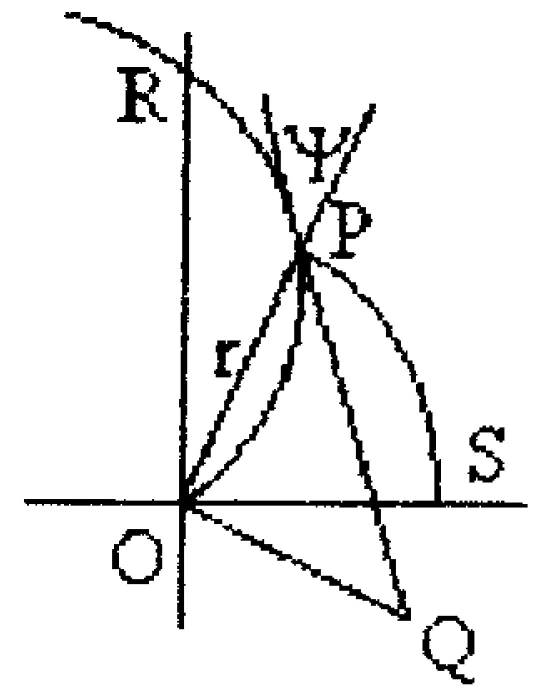
Se ve en la figura que ψ=φ-θ, pues φ es un ángulo exterior del triángulo POT. Entonces obtenemos (2):

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\varphi-\theta) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\varphi.\operatorname{tg}\theta}$$

Reemplazando (1) en (2) y tgθ por $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, se obtiene:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{r}{r'}.$$

Veamos nuevamente la figura de la espiral:



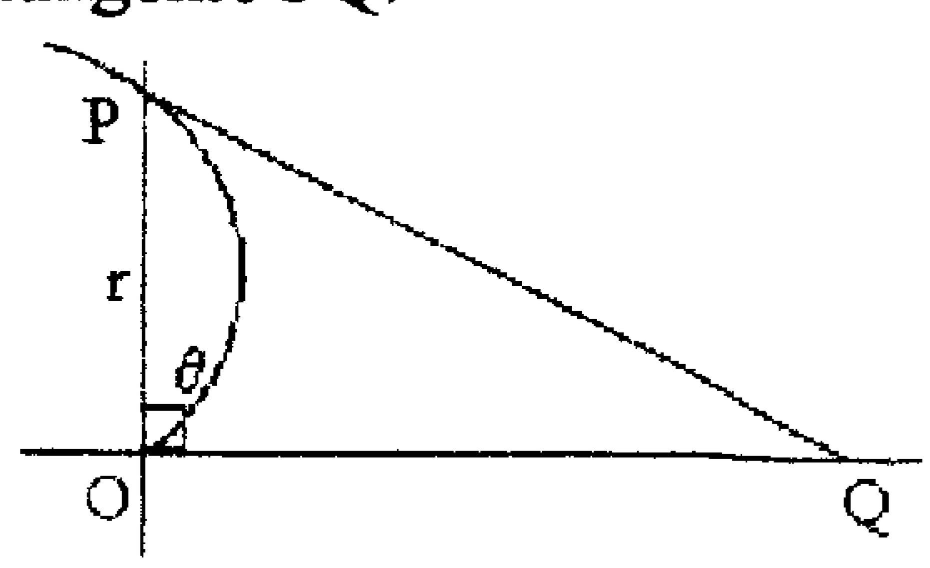
Se ve en la figura que $\operatorname{tg}\psi = \frac{OQ}{r}$. Como vimos anteriormente, $\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{r'}$, por lo que resulta:

$$\frac{OQ}{r} = \frac{r}{r'} \Rightarrow OQ = \frac{r^2}{r'}.$$

La espiral de Arquímedes tiene la forma $r=a.\theta$, con lo cual $r'=a$. Así,

$$OQ = \frac{r^2}{r'} = \frac{a^2.\theta^2}{a} = a.\theta^2 = r.\theta$$

Tomemos ahora el punto P, intersección de la espiral con el eje perpendicular al eje polar Ox y tracemos la recta tangente PQ:



Se deduce entonces que

$$OQ = r.\theta = r.\frac{\pi}{2} = \frac{2.\pi.r}{4}.$$

Es decir, OQ (llamado *subtangente polar*) es igual a la cuarta parte de la circunferencia de radio r, con lo que podemos construir una circunferencia completa haciendo cuatro veces el segmento OQ. Nuevamente, recurriendo a la proposición de Arquímedes (en donde el área de un círculo es igual a la de un triángulo cuya base es igual a la longitud de la circunferencia y cuya altura es igual al radio), se obtiene un triángulo de área igual a la del círculo. Por último, y tal como se vio anteriormente, se puede construir un cuadrado equivalente al triángulo. De este modo, por medio de la espiral de Arquímedes, se ha efectuado la cuadratura del círculo.

En el próximo número de Aχioma hablaremos de los otros dos problemas clásicos griegos: la *duplicación del cubo* y la *trisección del ángulo*; como así también del porqué de la imposibilidad de hacer las tres construcciones con regla y compás.

Claudio Salpeter*

* Profesor de Matemática, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Bibliografía:

* BOYER, CARL B - *Historia de la matemática* - Madrid, Alianza Universidad Textos, 1994.

* REY, ABEL - *La Ciencia en la Antigüedad. "El Apogeo de la Ciencia Técnica Griega. El Desarrollo de la Matemática"* - México, UTEHA, 1962.

* SADOSKY - GUBER - *Elementos de cálculo diferencial e integral* - Buenos Aires, Ed. Alsina, 1970.

* SESTIER, ANDRÉS - *Historia de las Matemáticas* - México, Limusa, 1983.

No nos cansaremos nunca de agradecer a nuestros lectores las cartas de estímulo y reconocimiento que nos envían. Nos reconfortan y nos dan nuevos bríos para seguir trabajando y, sobre todo, nos permiten concretar uno de los objetivos que tenemos en Aχioma: ofrecer un espacio de intercambio para reflexionar acerca de nuestra práctica profesional. Por razones de programación, no hemos podido incluir en este número dos interesantes colaboraciones enviadas por Pablo Ingrassia y Josefina Elisa Palombella. Nos comprometemos a su próxima publicación.
Así es que les decimos ¡gracias! al igual que a Irene Zapico y Verónica Hauresz.

Próximo Número - Noviembre/ Diciembre 1997

Apuntes sobre..., Caos y Fractales (última parte)

Historia: Los problemas clásicos griegos (segunda parte)

El número irracional

Comentarios de textos, Problemas, Información, Correo de Lectores...