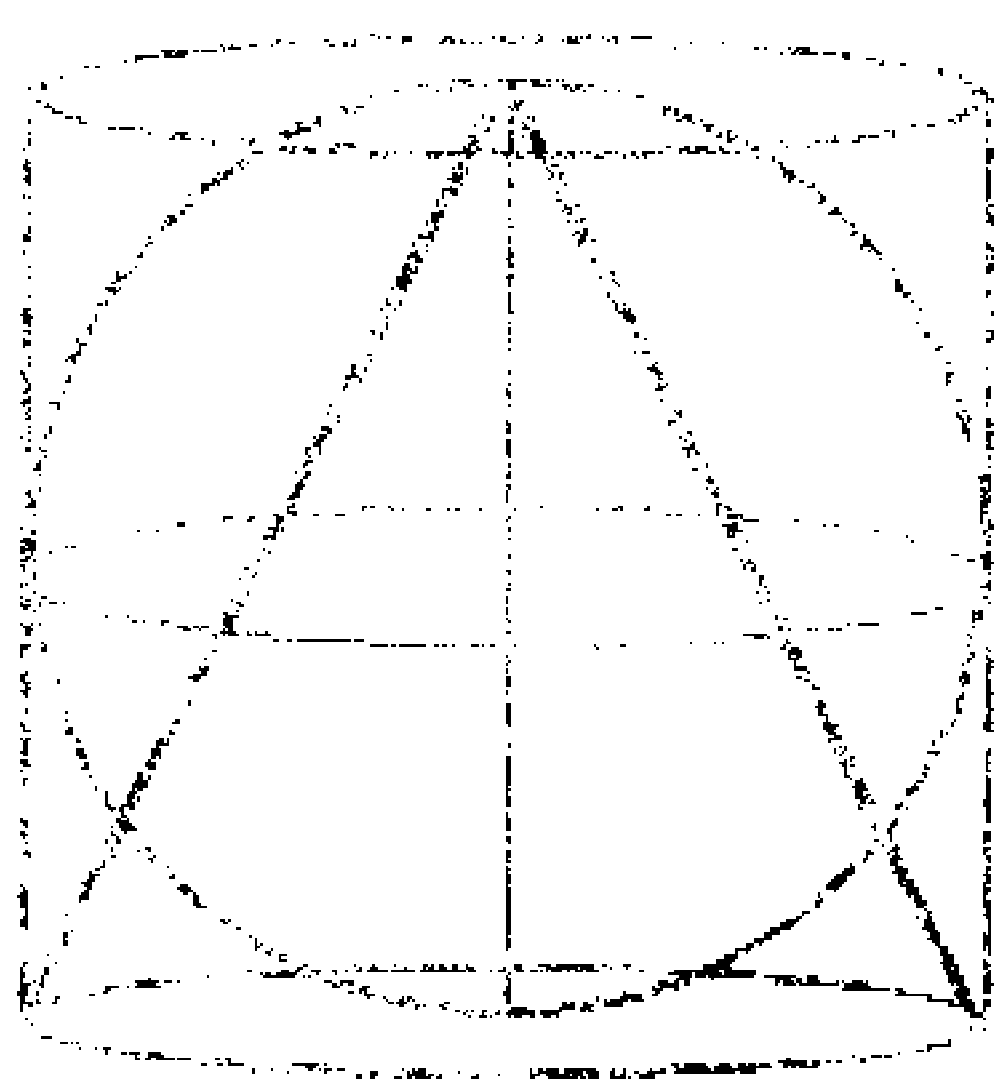
Axioma

La revista de los estudiantes del Profesorado de Matemática Dr. Joaquín V. González

"Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo."

Arquímedes



GRANDES MATEMATICOS

([illegible])

Septiembre/Octubre de [illegible]

Año [illegible] Nº [illegible]

Aχioma Nº 3

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Staff

Raquel Kalizsky
Andrea Morales
Claudio Salpeter
Gisela Serrano de Piñeiro

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro

Dirección postal

Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Impresa en:
El Apunte - Junín 735 - Bs. As.

Sumario:

Editorial

Continuamente, quienes hacemos Axioma, nos preguntamos a quiénes está dirigida realmente la revista.

Quizás, a quienes buscan encontrar ciertos datos históricos sobre la Matemática y los matemáticos. Innumerable bibliografía podría tranquilamente satisfacer sus deseos.

Tal vez, a quienes quieran hallar problemas para resolver; demás está decir que con gran facilidad se encuentran por doquier.

Lo mismo ocurre con las curiosidades, aunque a priori menos accesibles, o con la información de lo que sucede en el Departamento de Matemática del Instituto.

Es posible que interese la reunión de todos estos temas en un solo medio.

No lo sabemos.

Pero sí sabemos a quiénes nos gustaría realmente dirigirnos. Y es a aquéllos que no se conforman con lo aprendido en el aula, a aquéllos que en su corazón está latente el vehemente deseo de aprender, de conocer, de "buscar".

Asimismo no quisiéramos que Axioma se transforme en un mero "boletín informativo" con fríos conocimientos archivados para siempre en sus páginas. Si no, por el contrario, que sirva de medio activo para que, alumnos y profesores, podamos confrontar, investigar, debatir, intercambiar ideas, conceptos, problemas, etc., y sobre todo, reflexionar acerca del estado de la enseñanza de la matemática.

Es evidente que esta publicación no colmará plenamente, ni mucho menos, las distintas espectativas, pero esto sólo se debe a nuestra incapacidad en poder transmitir lo que con tanta pasión sentimos.

Septiembre/Octubre de 1996

Año 1 - Nº 3

Congruencias, Rotaciones y Simetrías Axiales

En la presente sección trataremos, a lo largo de varias notas, temas que nos atraen por su importancia y por su riqueza. Hoy finalizaremos con el tema "congruencias", iniciado en Aχioma Nº 1.

Recordemos de las notas anteriores que decimos que un número a es congruente a b módulo m si y sólo si b-a es múltiplo de m; y en ese caso escribimos $a \equiv b\ (m)$. Por ejemplo, $11 \equiv 3\ (4)$ ya que 11-3 = 8 es múltiplo de 4.

Por otra parte, como ya sabemos, todo número entero tiene en la división por 4 uno (y sólo uno) de los siguientes restos: 0, 1, 2 ó 3. Como consecuencia de ello, todo número entero es congruente módulo 4 a uno y sólo uno de esos números. Decimos que el conjunto $\{0,1,2,3\}$ es un *sistema de representantes* de la congruencia módulo 4.

A partir de estos cuatro números podremos ahora construir una suma muy peculiar. A fin de recordar que ella está construida en base a la congruencia módulo 4 usaremos el símbolo $\oplus_4$ para designarla.

¿Cuánto debe ser $2 \oplus_4 3$? Puesto que $2+3 \equiv 1\ (4)$ entonces definiremos

$$2 \oplus_4 3 = 1$$

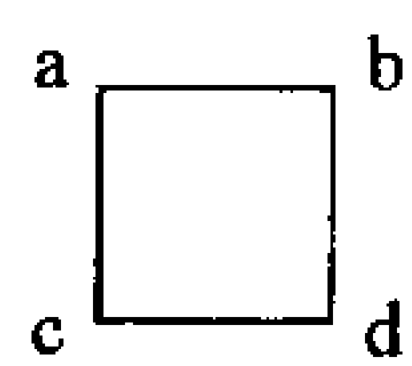
Del mismo modo, como $2+2 \equiv 0\ (4)$, entonces será $2 \oplus_4 2 = 0$. Una *tabla* de la operación permitirá resumir en forma conveniente toda la información necesaria.

Reproducimos entonces a continuación la tabla correspondiente a esta operación de suma módulo 4:

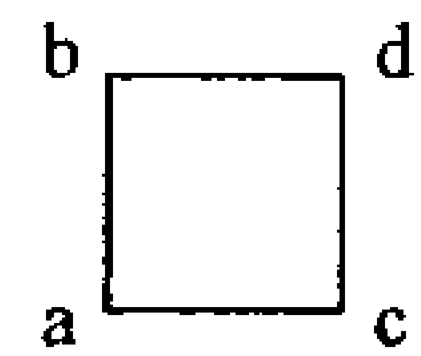
$\oplus_4$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Esta construcción parece tal vez a primera vista un poco rebuscada. Sin embargo, resultará mucho más natural si se la compara con la siguiente situación geométrica.

Consideremos un cuadrado de vértices abcd.



Pensemos en todas aquellas rotaciones que tienen la propiedad siguiente: la imagen del cuadrado por esa rotación queda totalmente superpuesta con la figura original. Un ejemplo es la rotación de 90º en sentido antihorario (sentido positivo), la cual produce el siguiente efecto:



La llamaremos la rotación 1R (un recto).

Es interesante señalar que la rotación 1R produce en el cuadrado el mismo efecto que la rotación en sentido horario (sentido negativo) de 270º. A esta última rotación podemos llamarla -3R (tres rectos en sentido negativo). O sea que, a los efectos de las rotaciones del cuadrado, podemos enunciar que **1R = -3R** (entendiendo por esto que las rotaciones 1R y -3R producen la misma imagen o, si se quiere, la misma permutación de vértices). Nótese que, paralelamente, es cierto que $1 \equiv -3(4)$.

Por otra parte, la rotación 4R (360º en sentido positivo) deja al cuadrado en su posición original (no produce efecto alguno). Decimos entonces que 4R=0 (con 0 indicaremos la rotación nula, o si se prefiere, la rotación de ángulo 0º). Si volvemos a comparar con la congruencia módulo 4, observaremos que $4 \equiv 0(4)$.

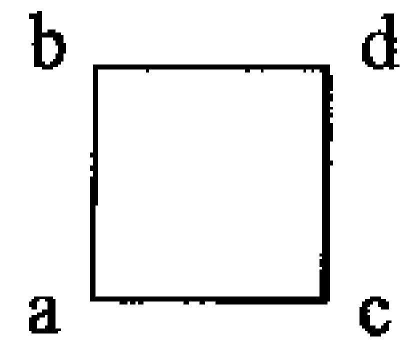
A poco de pensarlo caeremos en la cuenta de que estas aparentes coincidencias no son tales en realidad. En efecto, se tiene que:

> Si a y b son números enteros entonces $a \equiv b(4)$ si y sólo si aR y bR producen en el cuadrado la misma permutación de vértices.

Dejamos como ejercicio al lector el demostrar la afirmación anterior.

Si seguimos reflexionando acerca de las rotaciones del cuadrado, no dejaremos de notar que la rotación de 180º en sentido positivo (o 2R) equivale a efectuar sucesivamente dos rotaciones de 90º. En otras palabras, 1R+1R=2R. Donde aquí el símbolo "+" debe entenderse en el sentido de "se efectúa primero una rotación y luego la otra".

Otro ejemplo. Si efectuamos primero una rotación de 270º e inmediatamente a continuación una de 180º, el cuadrado resultante será el siguiente:



Es decir, el mismo cuadrado que obteníamos al efectuar la rotación de 90º en sentido positivo. En otras palabras, 3R+2R=1R. Notemos que, al mismo tiempo, $3 \oplus_4 2 = 1$. Ésto no es una coincidencia. En efecto:

> Si a, b y c son números enteros, entonces aR+bR=cR si y sólo si
> $a \oplus_4 b = c$

Si construimos una tabla de esta *suma de rotaciones*, veremos que tiene exactamente la misma forma que la tabla de la suma módulo cuatro:

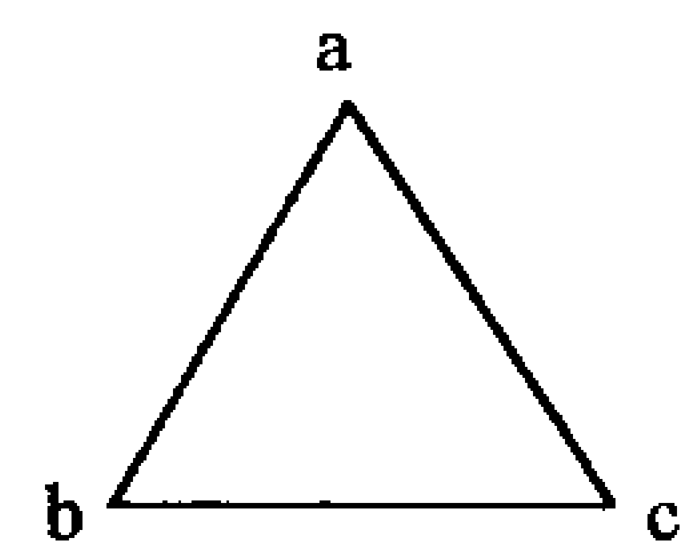
	0	**1R**	**2R**	**3R**
0	0	1R	2R	3R
1R	1R	2R	3R	0
2R	2R	3R	0	1R
3R	3R	0	1R	2R

Podemos decir entonces que ambas operaciones son *isomorfas* (de *iso*, que significa igual).

La suma módulo cuatro, que tan rebuscada pudo parecer en una primera lectura, resultó ser en definitiva una manera alternativa de referirse al proceso de efectuar una rotación del cuadrado a continuación de otra.

¿Podemos repetir este proceso para otras figuras?

Analicemos por ejemplo el caso de un triángulo equilátero.



La menor rotación en sentido positivo que admite la figura es la de 120º. Llamaremos A=120º y consideraremos, en forma análoga a lo hecho anteriormente, las rotaciones 1A, 2A, 3A, etc. (o sea, 120º, 240º y 360º en sentido positivo respectivamente). Y también las rotaciones -1A, -2A, etc.

Es claro que 3A=0 y que 4A=1A. Observemos que hay en realidad básicamente tres rotaciones diferentes: 0, 1A y 2A. Toda otra rotación es equivalente a una de estas tres. Decimos entonces que el conjunto {0,1A,2A} es un *sistema de representantes* de las rotaciones del triángulo equilátero.

En la congruencia módulo 3, el conjunto {0,1,2} es un sistema de representantes. Resulta evidente entonces que la suma de rotaciones del triángulo equilátero debe relacionarse con la suma módulo

3 y que, por ejemplo, si 1A+2A=0 entonces deberá ocurrir que $1 \oplus_3 2 = 0$; lo que a su vez es coherente con el hecho de que $1 + 2 \equiv 0(3)$.

Dejamos para el lector la tarea de construir la tabla de la suma módulo 3 (definida en el conjunto $\{0,1,2\}$) así como la tabla de la suma de rotaciones del triángulo equilátero (definida en el conjunto $\{0,1A,2A\}$). Podrá verificarse fácilmente que ambas operaciones son isomorfas.

Desde luego que todo esto se extiende perfectamente a polígonos regulares de m lados. De modo tal que la suma de las rotaciones de un tal polígono se corresponde con la suma módulo m.

Por otra parte, la suma no agota todos las posibilidades de efectuar *operaciones módulo m*. Veamos qué ocurre, por ejemplo, con la multiplicación.

Consideremos el sistema de representantes de la congruencia módulo 8 (formado por todos los números enteros de 0 a 7). Por distintos motivos será interesante restringir el estudio solamente a aquellos números que sean *coprimos* con 8 (es decir, que no tengan divisores positivos en común con él, salvo el 1). Nos quedaremos entonces con el conjunto $\{1,3,5,7\}$, al cual llamaremos U_8.

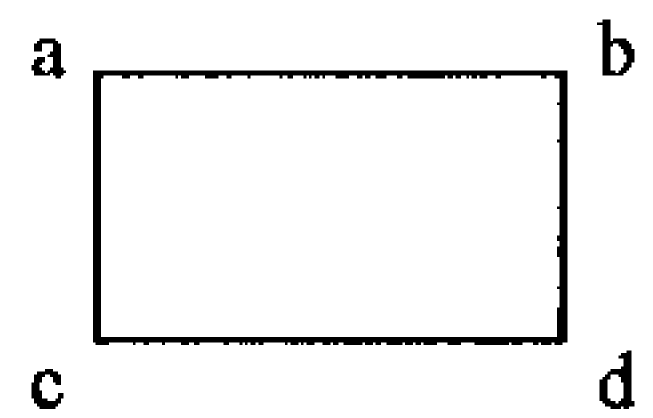
Más en general denominaremos U_n al conjunto formado por todos los números enteros de 0 a n-1 que sean coprimos con n.

Es posible definir en U_8 un *producto módulo 8*. La definición, fácil de imaginar, es la siguiente: $a \otimes_8 b = c$ si y sólo si $ab \equiv c(8)$. Reproducimos seguidamente la tabla correspondiente a esta operación:

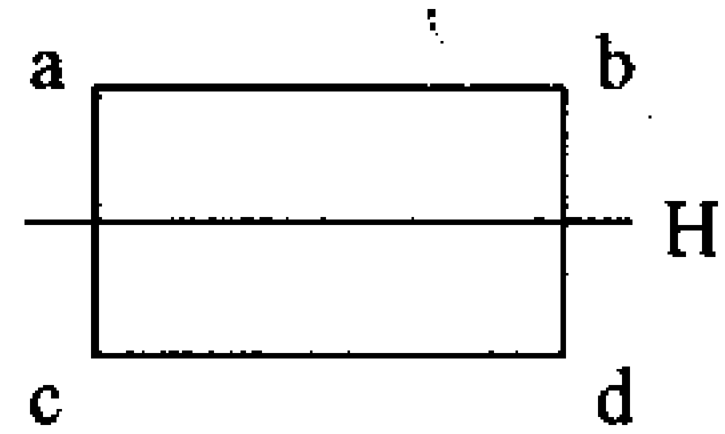
$\otimes_8$	**1**	**3**	**5**	**7**
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

¿Tiene también esta operación una "versión geométrica"? La respuesta es afirmativa, según veremos a continuación.

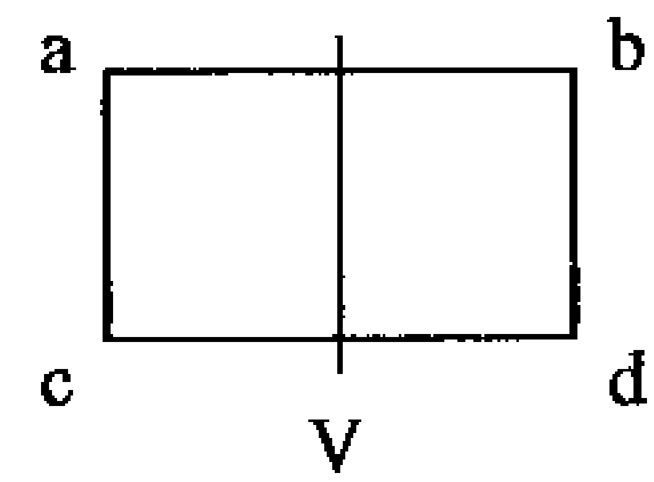
Consideremos un rectángulo como el que se ve más abajo:



Esta figura tiene dos ejes de simetría. Uno horizontal:



Y otro vertical:



El rectángulo admite las simetrías axiales correspondientes a estas dos rectas. Llamaremos a estas simetrías H y V coincidentemente con los nombres que dimos a los ejes. El rectángulo admite además una rotación de 180°, a la que llamaremos R.

Es posible definir una *suma* de movimientos del rectángulo. Entendiendo que H+V, por ejemplo, consiste en efectuar primero la transformación H y luego la V. Es fácil verificar que H+V=R.

Nótese que si efectuamos dos veces consecutivas la simetría H, obtenemos nuevamente la figura original. Diremos entonces que H+H=N, siendo N el movimiento nulo. Se reproduce a continuación la tabla correspondiente a la suma de movimientos del rectángulo, definida en el conjunto $\{H,V,R,N\}$.

	N	**H**	**V**	**R**
N	N	H	V	R
H	H	N	R	V
V	V	R	N	H
R	R	V	H	N

¿Esta operación es isomorfa a la multiplicación módulo 8? Si vinculamos a N con el 1; H con el 3; V con el 5 y R con el 7, entonces vemos que la respuesta es afirmativa.

Como problema para el lector le sugerimos que defina en el conjunto $U_5=\{1,2,3,4\}$ la multiplicación módulo 5 y busque para ella una interpretación geométrica.

Antes de finalizar, precisemos con un poco más de detalle el importante concepto de isomorfismo.

Un conjunto en el que hay definida una operación (de modo tal que siempre que operemos con dos elementos del conjunto el resultado vuelva a caer en el mismo conjunto) se denomina un *monoide*. El conjunto {0,1,2,3} con la suma módulo 4 o el conjunto de los movimientos del rectángulo con su suma son ejemplos de monoides.

En rigor es más correcto hablar de isomorfismos entre *monoides* más bien que de isomorfismos entre operaciones (aunque la idea, intuitivamente hablando, es la misma). Precisaremos el concepto.

Digamos que en el conjunto $A=\{a,b,...\}$ está definida la operación $\oplus$ y que en el conjunto $A'=\{a',b',...\}$ está definida la operación $\otimes$.

Los monoides A y A' se dicen isomorfos si existe una correspondencia F biyectiva entre A y A' de modo que si x, y, z son elementos de A tales que $x \oplus y = z$ entonces $F(x) \otimes F(y) = F(z)$.

Como ejemplo, observemos que cuando estudiamos el rectángulo dijimos que *vinculábamos* a N con 1, H con 3, etc. Lo que hicimos, en verdad, fue definir una función biyectiva entre {N,H,V,R} y {1,3,5,7} siendo F(N)=1, F(H)=3, etc. de modo que, por ejemplo, N+H=H y $1 \otimes_8 3 = 3$.

Un último problema. El conjunto {0,1,2,3} con la suma módulo 4 y el conjunto U_8 con el producto módulo 8. ¿Son monoides isomorfos? La respuesta es que no. Dejamos que el lector investigue los motivos.

Cuando la operación es asociativa, admite un elemento neutro y todo elemento tiene inverso, el monoide recibe el nombre de *grupo*. Si además es conmutativa, entonces se denomina *grupo conmutativo* o *grupo abeliano*.

Todos los monoides que analizamos en esta nota son en realidad grupos abelianos.

Finaliza aquí nuestro estudio del tema *congruencias*, pero esto no significa de ninguna manera que el tema haya quedado agotado. El tema tiene múltiples ramificaciones, hacia la teoría de grupos (vinculado con la geometría, como ya vimos) o con la teoría de números. Se relaciona también con la teoría de polinomios y con otros muchos capítulos de la matemática que sería muy extenso listar aquí.

Como último comentario, muchos elementos que cotidianamente nos rodean se vinculan estrechamente con el tema *congruencias*. Observe por ejemplo las dos últimas cifras de un reloj digital, ¿nunca notó que se van sumando según la congruencia módulo 60? En efecto, al sumar un minuto a 59 obtenemos 0. ¿Qué otros elementos puede Ud. encontrar?

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* GENTILE, ENZO - *Aritmética Elemental* - Washington, D.C., Serie de Matemática Monografía Nº 25 -O.E.A., 1985.
* GENTILE, ENZO - *Aritmética Elemental en la Formación Matemática* - Buenos Aires, O.M.A., 1991
* GENTILE, ENZO - *Notas de Algebra I* - Buenos Aires, EUDEBA, 1988.
* PAPY, GEORGES - *Grupos* - Buenos Aires, EUDEBA, 1976.

Arquímedes

(Primera parte)

Es el año 214 a.C. Roma y Cartago están luchando en las devastadoras guerras púnicas. Siracusa, capital de Sicilia y aliada de Cartago, es sitiada por el general romano Marcelo. El ataque se produce desde el mar. La ciudad va a ser tomada ..., pero de pronto, una lluvia de gigantescos bloques de piedrâ, que ninguna fuerza humana podría haber movido, caen desde los muros hundiendo y destrozando las naves enemigas. El pánico se apodera de los romanos; pensaban combatir contra hombres y se encontraron con dioses de cien brazos. Marcelo y sus hombres buscan una explicación, y así llegan a saber que un solo ser combate contra ellos, un anciano solitario de setenta y cinco años de edad. Su nombre es Arquímedes, es el más grande de todos los matemáticos griegos y uno de los más grandes de todos los tiempos.

Contexto histórico

En el siglo III a.C. Roma ya se había convertido en una potencia mundial. Con Italia unificada bajo su poder, los romanos disputan el dominio del Mediterráneo a los estados helénicos y a Cartago. Esta útima, sin duda su principal enemigo, era desde el siglo IV a.C. la ciudad más rica de la región. Bajo su control se hallaban Cerdeña, Córcega, el noroeste de África, el oeste de Sicilia y el sur de España.
El encuentro entre ambas potencias generan las famosas guerras púnicas.
En la primera (264-241 a.C.), Roma desplaza a los cartagineses de Sicilia, conquistando así su primera provincia de ultramar, con excepción de Siracusa, que se mantenía como estado independiente, pues su rey Hierón II se había convertido en aliado de Roma. Más tarde los romanos conquistan Córcega y Cerdeña.
En la segunda guerra púnica (218-201 a.C.) Roma es al principio doblegada (con las victorias del general cartaginés Aníbal, en especial la masacre de Cannas en el 216 a.C.). Esta guerra tuvo su principal escenario en España; sin embargo, se extiende nuevamente a Sicilia pues, después de la muerte de Hierón, Siracusa se pasó al bando cartaginés. La ciudad resiste el largo sitio que le impone Marcelo, pero cae en el año 212 a.C.
La victoria final es para Roma, que ha ocupado España y logra dominar el Mediterráneo occidental.
Aunque el poder político y militar era romano, la cultura en el Mediterráneo en el siglo III, en especial la científica, continuaba siendo griega.
Las campañas de Alejandro Magno (334-323 a.C.) habían transformado al mundo griego, al hacer posible el acceso a los recursos del Medio Oriente. Surgen nuevos centros intelectuales; entre ellos, la famosa ciudad de Alejandría, fundada por el mismo Alejandro en el 332 a.C.
En aquella ciudad se construyen la Biblioteca y el Museo, a los que concurren centenares de sabios y estudiantes de todo el mundo. A este ambiente científico de Alejandría se vincula el gran Arquímedes.

La Matemática del siglo III a.C.

A principios del siglo III a.C. surge, también vinculado al ambiente alejandrino, el famoso Euclides, autor de los *Elementos*, obra que fue y es la "Biblia de la geometría elemental".

Los Elementos contienen gran parte de los conocimientos matemáticos griegos acumulados durante los tres siglos anteriores, ordenados según el método euclídeo, que en la actualidad se denomina método axiomático. Éste consiste en explicitar previamente los supuestos e hipótesis básicos (postulados) sobre los que se construirá la ciencia, y luego construir ésta en forma rigurosamente deductiva.

Los Elementos comprenden trece libros. Los Libros I, II, III y IV incluyen las proposiciones más importantes de la geometría plana elemental referidas a triángulos, paralelogramos, equivalencias, teorema de Pitágoras, circunferencias e inscripción y circunscripción de polígonos regulares.

En el Libro V se definen y estudian propiedades de la proporcionalidad entre magnitudes en general, no específicamente geométricas.

El Libro VI trata de la teoría de las semejanzas de polígonos.

Los Libros VII, VIII y IX se refieren a la aritmética, a la teoría de números naturales (divisibilidad, descomposición en factores primos, progresiones geométricas, entre otros).

El Libro X comprende proposiciones sobre los números irracionales en las que sólo intervienen raíces cuadradas.

El Libro XI se ocupa de las propiedades de rectas y planos perpendiculares y paralelos, ángulos triedros, paralelepípedos.

El Libro XII contiene propiedades de geometría plana y del espacio, apareciendo el método de exhaución, del que hablaremos en el próximo número de Axioma, atribuido a Eudoxo. En este libro se demuestra, por ejemplo, la proporcionalidad entre las áreas de los círculos y las de los cuadrados construidos sobre sus diámetros, y entre los volúmenes de las esferas y los de los cubos construidos sobre sus diámetros.

Por último, el Libro XIII se ocupa de la construcción de los poliedros regulares inscriptos en una esfera, demostrando finalmente, que no puede haber más que cinco poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Sin embargo, los Elementos no contenían toda la matemática conocida en aquella época.

Con los Elementos podían compararse segmentos y, por lo tanto, medir lados y perímetros de polígonos y figuras, pero en cambio no había en ellos ningún intento de rectificar, es decir, de medir la circunferencia o arcos de circunferencias. Se podían calcular superficies de polígonos, pero no de cilindros, conos y esferas. Se podían medir volúmenes de paralelepípedos, prismas, pirámides y poliedros, pero no de esferas, cilindros o conos.

Hubo además, fuera de los Elementos, tres problemas clásicos en la geometría griega: la duplicación del cubo (es decir, construir un cubo cuyo volumen sea el doble de uno dado), la trisección del ángulo (es decir, dividir un ángulo en tres partes iguales), y la cuadratura del círculo (es decir, construir un cuadrado de área equivalente a la de un círculo de radio dado). Los griegos no pudieron resolver estos problemas con los recursos de la geometría euclídea, es decir, con regla y compás. Sin embargo, los resolvieron por otros medios, aunque tal resolución no será tratada en el presente escrito.

El problema de la cuadratura del círculo, en sus intentos infructuosos para resolverlo con regla y compás, trajo aparejado algunos aportes positivos, como por ejemplo, las tres lúnulas cuadrables de Hipócrates de Quío. Esto es, tres figuras limitadas por arcos de circunferencias tales que, mediante construcciones con regla y compás, podían determinarse figuras poligonales equivalentes.

Otro hecho que no figuraba en los Elementos es el descubrimiento de las secciones cónicas, es decir, las curvas obtenidas mediante la intersección de un plano con un cono circular recto. Tales secciones se denominan actualmente: parábola, elipse e hipérbola. El descubrimiento de las cónicas se atribuye a Menecmo, discípulo de Eudoxo.

Pero había además en el siglo III a.C. conocimientos de aritmética práctica, que comprendían el sistema de numeración y las reglas operatorias elementales con números enteros y

fraccionarios.
Existían también conocimientos de geometría esférica, aunque éstos formaban parte de la astronomía.

Aspectos Biográficos

Los datos biográficos de la vida de Arquímedes se conocen a partir de fragmentos de diferentes autores, en especial, de historiadores de las guerras púnicas.
Según Eutocio, comentarista griego del siglo VI d.C., un contemporáneo de Arquímedes, Heracleides, escribió una biografía de aquél: "Vida de Arquímedes", pero que, lamentablemente, se ha perdido.
No existe ningún escrito que hable acerca del nacimiento de Arquímedes. Sin embargo, puede deducirse que fue en el año 287 a.C. en Siracusa, ya que, según el filósofo Proclo, murió en la caída de aquella ciudad y ésta ocurrió en el 212 a.C., y, de acuerdo con Tzetzes, gramático bizantino del siglo XII, vivió 75 años.
Hijo del astrónomo Fidias, de quien heredara su vocación científica, Arquímedes estaba vinculado a la familia real, ya fuera por amistad o por parentesco.
De joven estudió en Alejandría. Sus maestros fueron los sucesores de Euclides: Conon de Samos, y a la muerte de éste, Dositeo de Pelusa y Eratóstenes. Hay quienes afirman, incluso, que estudió con el mismo Euclides.
A su regreso a Siracusa dedicó toda su vida a la investigación científica.
La vida de Arquímedes estuvo plagada de anécdotas más o menos verosímiles, deformadas, a veces, por la imaginación popular.
En su "Vida de Marcelo", Plutarco se ocupa bastante de Arquímedes, en especial de su intervención en la defensa de la ciudad de Siracusa. En una parte de su relato Plutarco expresa: "Así pues, cuando los romanos atacaron por ambos lados, hubo consternación en los siracusanos, y un silencio de terror, porque creían que no podían hacer nada contra aquella fuerza y poder. Pero Arquímedes lanza sus máquinas, e inmediatamente llegan a las tropas de tierra tiros de todas clases y piedras de enorme tamaño, que caen con una fuerza y una velocidad increíbles; nada detiene su peso, caen innumerables sobre los que se encuentran debajo y desbaratan las líneas. De repente saltan unas antenas por encima de las murallas que, apoyándose en un peso, empujan algunas de las naves y las hunden al fondo; otras, con garfios de hierro semejantes al pico de las grullas, son estiradas hacia arriba por la proa para luego hacerlas caer verticalmente por la popa, o mediante maromas enlazadas desde dentro, las hacen girar para que choquen contra las rocas y los escollos que salen bajo la muralla, destrozándolas, con gran daño de los tripulantes. A menudo, un barco levantado en el aire sobre el mar, suspendido y girando, era un espectáculo de horror, hasta que sus hombres se tiraban y se dispersaban como de una honda, vaciándolo, y luego caía sobre la muralla o se deslizaba por haberse soltado del garfio que lo retenía. La máquina que Marcelo hacía avanzar desde la plataforma se llamaba sambuca, porque tenía un cierto parecido de forma con el instrumento musical (la sambuca era un instrumento musical triangular con cuatro cuerdas). Cuando el navío aún se encuentra a distancia de la muralla, le tiran una piedra de diez talentos de peso, después de ésta una segunda y una tercera, las cuales, cayendo con gran estrépito y oleaje, destrozan la base de la máquina y sacuden y desmontan el tramado de la plataforma, de modo que Marcelo, perplejo, se aleja rápidamente con las naves, y ordena a los de tierra que se retiren.
En un consejo de guerra se acuerda acercarse de noche, si es posible aún, a las murallas; porque las cuerdas que usa Arquímedes tienen fuerza para hacer volar hacia lo alto los disparos que tira, pero de cerca son totalmente ineficaces, ya que no hay distancia para el golpe. Parece, sin embargo, que Arquímedes había preparado para esto, tiempo atrás, movimientos de aparatos adecuados para toda distancia, y tiros cortos y lanzas no grandes, pero numerosos y continuos, con escorpiones de corto alcance, pero que podían golpear de cerca, dis-

puestos de modo que el enemigo no pudiera verlos.
Así pues, cuando llegan los romanos creyéndose inadvertidos, se encuentran de nuevo con muchos tiros y golpes, piedras que les caen encima de la cabeza perpendicularmente, y flechas de todas partes de la muralla, con lo que se retiran. E igualmente, cuando se alinean de nuevo a distancia, les llegan más disparos, que dan a los que se retiran, causando gran destrucción entre ellos, y grandes choques de las naves, sin que puedan responder a los enemigos. Arquímedes había fabricado, en efecto, la mayoría de las máquinas bajo la muralla, y parecía que los romanos luchaban contra dioses, porque miles de males se vertían sobre ellos desde lo invisible.
Sin embargo, Marcelo escapa y, bromeando con sus artífices e ingenieros, dice: '¿No acabaremos de guerrear contra este Briareo de la geometría, que nos hunde en el mar con nuestras naves y ha expulsado a golpes de vara con vergüenza nuestra sambuca y rebasa a los monstruos míticos de cien manos, lanzando a la vez sobre nosotros tantos tiros?' Porque, de hecho, todos los restantes siracusanos eran el cuerpo del aparato de Arquimedes, y era una el alma que lo movia y lo giraba todo; las otras armas permanecían inmóviles, sólo las de él usaba en aquel momento la ciudad, tanto para el ataque como para la defensa. Finalmente, viendo Marcelo que los romanos se habían vuelto tan temerosos que si veían apuntar por encima de la muralla un trocito de cuerda o de madera gritaban que Arquímedes movía alguna máquina contra ellos y daban media vuelta y huían, desistió de todo combate y asalto, dejando al tiempo el resto del asedio".
Pero estas máquinas nada significaban para Arquímedes, sino que , como afirma Plutarco, "habían sido diseñadas meramente como accesorios divertidos de su geometría". Geometría que lo llevara a compenetrarse tanto en sus demostraciones que, según se cuenta, sus parientes tenían que llevarlo al baño a la fuerza, pues frecuntemente se olvidaba de ello, lo mismo que de las horas de comer. Y cuando se bañaba, mientras se le aplicaban los ungüentos, trazaba sin cesar líneas en la arena y murmuraba palabras ininteligibles.
La anécdota más conocida de Arquímedes es narrada por Vitrubio en "Sobre la Arquitectura": "Arquímedes hizo muchos inventos admirables y variados, pero de todos, el que voy a exponer me parece que manifiesta una sutileza infinita. Cuando Hierón reinaba en Siracusa, por los éxitos logrados en sus empresas, se propuso ofrecer en un cierto templo una corona de oro a los dioses inmortales; contrató el trabajo a un precio estipulado, y pesó una exacta cantidad de oro que dio al contratista. El artesano entregó, en la fecha acordada y con satisfacción del rey, una pieza de orfebrería exquisitamente terminada, viéndose que el peso de la corona correspondía exactamente al del oro entregado. Sin embargo, hubo indicios después, de que le habian quitado oro a la corona, y añadido una parte igual de plata. Indignado Hierón por la ofensa, y sin encontrar la manera de poder probar el hurto, rogó a Arquímedes que estudiara el asunto. Mientras se ocupaba en esto, Arquímedes fue por casualidad al baño público y, al introducirse en la bañera, se dio cuenta de que salía tanta agua fuera de ésta como parte de su cuerpo había entrado. No se quedó así, sino que, saltando fuera de la bañera movido por la alegría, y yendo desnudo hacia su casa, gritaba diciendo que había encontrado lo que quería. Porque mientra corría clamaba, en griego, ¡Eureka! ¡Eureka!
Se dice que entonces, siguiendo su descubrimiento, hizo dos masas de peso igual al que tenía la corona, una de oro y la otra de plata. Después llenó de agua hasta el borde un vaso amplio. En el puso la masa de plata, lo que hizo salir una cantidad de agua igual al volumen de esa masa. Sacó entonces la masa y volvió a llenar el vaso con una igual cantidad de agua que había salido y que se preocupó de medir. De este modo, encontró cuánta agua correspondía a la masa de plata. Una vez sabido esto, puso igualmente la masa de oro en el vaso lleno y, después de quitarla, añadió

por el mismo motivo el agua que faltaba, encontrando que no era la misma que antes, sino menos, y la cantidad de menos era el exceso de una masa de plata, con el mismo peso, sobre una base de oro. Después de llenar de nuevo el vaso, puso en el agua la corona misma, y encontró que correspondía más agua a la corona que a la masa de oro del mismo peso; reflexionando, pues, sobre el hecho de haber más agua para la corona que para la masa, halló que había mezcla de plata en el oro, y puso en claro el hurto del contratista".

Otra famosa anécdota de Arquímedes es la que se refiere a la célebre frase del siracusano narrada por Pappus: "Dadme un punto de apoyo y levantaré al mundo". Por su parte, Plutarco se refiere a ella del siguiente modo: "Arquímedes, pariente y amigo del rey Hierón, le había escrito que es posible, con una fuerza dada, mover un peso dado. Y dicen que, movido de manera juvenil por la fuerza de la demostración, afirmó que si dispusiera de otra Tierra, una vez pasado a ella podría mover la primera. Hierón se maravilló y le pidió que pusiera en marcha el problema y le mostrara algo grande movido por una fuerza pequeña. Arquímedes hizo remolcar a tierra una nave real de tres palos con gran esfuerzo y muchos brazos; introdujo en ella una multitud de hombres y la carga ordinaria y, sentado a distancia, movió sin esfuerzo y tranquilamente con la mano izquierda un sistema de cables y poleas y acercó el barco tan lisamente y sin obstáculos como si corriera por el mar. Atónito el rey y viendo el poder de la máquina, convenció a Arquímedes para que le construyera máquinas de ataque y defensa para todo tipo de asedios".

La muerte de Arquímedes fue narrada de diferentes maneras. Al respecto Plutarco relata: "...aprovechando una fiesta de los siracusanos en honor de Artemisa, en la que se habían dedicado al vino y a las diversiones, no sólo se apodera de la torre (Marcelo) sin que se den cuenta, sino que, antes de despuntar el día, llena también de soldados la muralla y penetra en la Hexápila. Cuando los siracusanos empiezan a moverse y a alarmarse por el ruido, Marcelo ordena que suenen las trompetas por todas partes, lo que aterroriza y hace huir a todos, como si ya estuviese tomada toda la ciudad. Sin embargo, quedaba la parte más fuerte, más bella y más amplia, llamada Acradina, que estaba fortificada por el lado de la ciudad exterior, una parte de la cual se llama Neápolis y la otra Nique. Ya en posesión de estas partes, Marcelo pasa por la Hexápila al apuntar el día, entre las felicitaciones de sus oficiales. Dicen, sin embargo, que él, viendo desde arriba la ciudad bella y espaciosa, derramó muchas lágrimas, al pensar con dolor en lo que iba a pasar, cuando en poco tiempo cambiaría de aspecto y de forma, saqueada por la soldadesca. Porque entre sus oficiales nadie se atrevía a oponerse a las demandas de los soldados que pedían el pillaje; incluso muchos le instaban para que fuera incendiada y arrasada. Pero Marcelo no quiso oír esta propuesta y, muy a pesar suyo, permitió que se hiciera presa del dinero y de los esclavos. En cuanto a las personas libres, dio órdenes de que no fueran molestadas, ni se matara o ultrajara, o se esclavizara a ningún siracusano. Sin embargo, a pesar de haber procedido con moderación, creía que el destino de la ciudad era lastimoso y, en medio de tanta alegría, su alma mostraba tristeza y conmiseración al ver que en un momento se desvanecía tal prosperidad y esplendor.

...Pero lo que apenó especialmente a Marcelo fue la desgracia de Arquímedes. Estaba solo, examinando una figura de geometría, entregado de tal forma su pensamiento y sus ojos a la contemplación, que no percibe la irrupción de los romanos ni la toma de la ciudad. De pronto, se le presenta un soldado y le ordena que le siga hacia Marcelo. Arquímedes no quiere hacerlo antes de acabar el problema y establecer la demostración. El soldado se irrita y, desenvainando la espada, lo mata. Otros dicen que el soldado se presentó directamente con la espada para matarlo y Arquímedes, al verlo, le rogó y suplicó que esperara un poco para no dejar la investigación sin terminar y sin demostrar, pero que el soldado, sin preocuparse, lo mató. Una tercera historia dice que llevaba a Marcelo algunos instrumentos matemáticos en una caja: cuadrantes solares, esferas y ángulos adaptados al tamaño del sol para la vista, y que los soldados cayeron sobre él pensando que traía oro en la caja, y lo mataron. Se está de acuerdo, sin embargo, en que Marcelo se apartó del asesino con horror, como de un sacrílego, y que buscó a los parientes para honrarlos".

Una versión algo distinta de su muerte es comentada por Valerio Máximo: "Marcelo, dueño finalmente de Siracusa, no ignoraba que habían sido las máquinas de ese geómetra las que habían demorado tanto tiempo la victoria. Sin embargo, lleno de admiración por ese genio extraordinario, dio orden de conservarle la vida, siendo para él de tanta gloria la conservación de Arquímedes como la toma de Siracusa. Pero mientras Arquímedes, con la vista y la atención fijos en el suelo, trazaba figuras, un soldado que había penetrado en la casa para saquearla, levantó sobre él su espada preguntándole quién era. Arquímedes, totalmente dedicado al problema cuya solución buscaba, no atinó a decirle su nombre sino que, mostrándole con las manos las líneas dibujadas sobre la arena, le dijo: "Por favor, no borres eso". Y el soldado, viendo en esta respuesta un insulto al poder de los vencedores, le cortó la cabeza; y la sangre de Arquímedes se confundió con la labor de su ciencia".

El famoso matemático inglés Alfred North Whitehead (1861-1947) ha señalado al respecto acertadamente: "La muerte de Arquímedes a mano de los soldados romanos simboliza un cambio mundial de primera magnitud. Los romanos eran una gran raza, pero estaban condenados a la esterilidad que acompaña a la calidad práctica. No eran suficientemente soñadores para llegar a nuevos puntos de vista, que podrían proporcionar un control más fundamental sobre las fuerzas de la naturaleza. Ningún romano perdió su vida porque se encontrara absorto en la contemplación de un diagrama matemático".

En otra parte de su relato, Plutarco se refiere al deseo de Arquímedes una vez que ocurriera su muerte: "Autor de muy bellos descubrimientos, se dice que pidió a sus amigos y parientes que pusieran en su tumba, después de morir, un cilindro conteniendo una esfera, con una inscripción que diera la proporción en que el sólido continente excede al sólido contenido". Este pedido fue cumplido. Un siglo y medio después, y cuando los conciudadanos de Arquímedes ya habían olvidado su figura y su fama, la tumba es hallada por Cicerón. El mismo cuenta este hecho: "...Arquímedes, cuyo sepulcro ignorado por los siracusanos, rodeado de zarzas y espesos matorrales hasta el punto de haberse perdido todo rastro de él, yo descubrí siendo cuestor de Siracusa. Yo conocía ciertos versos senarios, copia de otros que habían sido inscriptos en su monumento, los cuales declaraban que había en su sepulcro una esfera con un cilindro. Después de haber recorrido todos los innumerables sepulcros que hay cerca de la puerta de Agrigentum, vi una pequeña columna que no se levantaba mucho de los matorrales, en la cual estaba la figura de una esfera y de un cilindro. Dije entonces a los principales siracusanos que estaban conmigo que creía haber encontrado lo que tanto buscaba. Comenzaron muchos a hacer abrir el camino hasta descubrir el sepulcro. De este modo pudimos penetrar hasta el otro lado de la base. Apareció entonces un epigrama, medio borradas las últimas palabras de los versos. De esta manera, una ciudad de las más ilustres de Grecia, en otros tiempos la más docta, hubiera ignorado el monumento sepulcral de un ciudadano suyo tan ilustre, si no lo hubiese aprendido de un hombre de la pequeña ciudad de Arpinum".

Esta tumba ya no existe. Sin embargo, en las proximidades de Siracusa existe un sitio denominado: "La Tumba de Arquímedes".

Obra de Arquímedes

La extensísima obra de Arquímedes, escrita en dialecto

dórico, siguió rigurosamente el método euclídeo de fijar previamente las hipótesis que postulaba, a las que seguían los teoremas.
Arquímedes escribió más de diez obras que a continuación enumeramos:

1) De la esfera y el cilindro (Libros I y II).
2) De los conoides y esferoides.
3) Medida del círculo.
4) De las espirales.
5) Cuadratura de la parábola.
6) De los equilibrios (Libros I y II).
7) De los cuerpos flotantes (Libros I y II).
8) El Arenario.
9) Del Método.
10) El Stomachion.
11) El Libro de los Lemas.
12) El problema de los bueyes.

Esta imponente obra de Arquímedes aún sería mayor si no se hubiesen perdido algunos de sus escritos.
En el *Arenario*, Arquímedes expresa que había redactado un escrito arimético que envió a Zeusipo: *Los Principios*, que trata sobre la denominación de los números. También en su *Cuadratura de la parabóla*, hace alusión a una o varias obras sobre mecánica. Pappus menciona el título de una de ellas: "*Sobre las balanzas*".
Teón de Alejandría y Olimpiodoro mencionan la existencia de una obra de Arquímedes sobre óptica.
Pappus atribuye al genio de Siracusa una obra sobre los poliedros regulares, enumerando trece poliedros semiregulares, inscribibles en la esfera, que Arquímedes habría descubierto. Los poliedros semirregulares tienen todas sus aristas y ángulos poliedros iguales, mas las caras, que son polígonos regulares, no tienen todas el mismo número de lados.
Hiparco afirma que Arquímedes escribió sobre el calendario y la longitud del año.
Los árabes le atribuyen escritos sobre el cuadrilátero inscriptible, sobre el pentágono regular, sobre las cónicas y sobre la fórmula de Herón, la cual expresa el área de un triángulo conociendo sus tres lados.

De la esfera y el cilindro (Libro I)

Es un complemento de los *Elementos*, en lo que se refiere a la geometría del espacio, pues trata de las áreas y volúmenes de los cuerpos redondos: esfera, cono y cilindro, que Euclides no había considerado en sus libros.
Este libro, precedido por un corto preámbulo a Dositeo, comprende definiciones, postulados, algunos teoremas y corolarios, y cuarenta y cuatro teoremas.
Entre los postulados pueden destacarse dos:
1) "La recta es la más corta entre todas las líneas de iguales extremos" (que difiere de la definición menos clara de recta dada por Euclides: "recta es la línea que yace igualmente respecto de todos sus puntos").
2) "Dadas dos cantidades homogéneas desiguales siempre existe un múltiplo de la cantidad menor que supera a la cantidad mayor". Este es el conocido *Axioma de Arquímedes*:

$$\forall a,b \in R /\ \ a<b,$$
$$\exists\ k \in Z /\ \ k.a>b$$

Sin embargo, el mismo Arquímedes reconoce que esta proposición ya era conocida: "Los geómetras que nos han precedido han hecho igualmente uso de este lema, pues se han servido de él para demostrar que la razón entre las áreas de dos círculos es la misma que las áreas de los cuadrados de sus diámetros, y que la razón de los volúmenes de dos esferas es la misma que la de los volúmenes de los cubos de sus diámetros. Entre los principales teoremas que figuran en este libro, pueden citarse los siguientes:

* La superficie de una esfera es equivalente a cuatro veces su círculo máximo.

$$S = 4.\pi.r^2$$

* Toda esfera es equivalente a cuatro veces el cono cuya base es un círculo máximo y cuya altura es el radio de la esfera.

$$Vol_{esf} = 4.Vol_{cono}$$

$$\frac{4}{3}\pi.r^3 = 4.\frac{1}{3}\pi.r^3$$

* Si un cilindro tiene altura igual al diámetro de la esfera en él inscrita , entonces las superficies y los volúmenes de esos dos sólidos están ambos en razón 3:2.
Si además se considera un cono de igual base y altura que el cilindro, se obtiene la proporción que más enorgullecía a Arquímedes:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 2 : 3 : 1$$

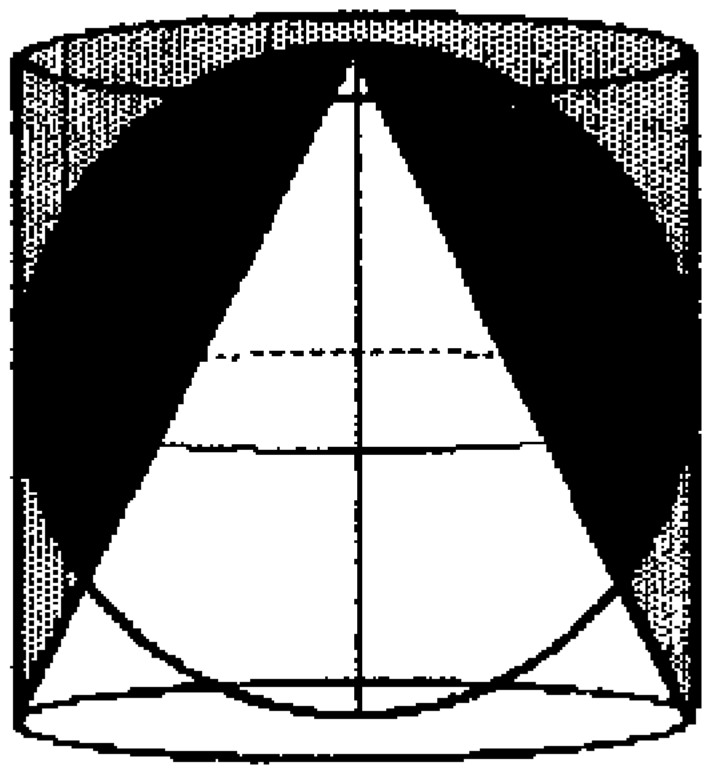
V_1 : volumen de la esfera.
V_2 : volumen del cilindro.
V_3 : volumen del cono.

Es decir, que el volumen de un cilindro es equivalente al volumen de una esfera y media. Y por otro lado, también es equivalente al volumen de tres conos, bajo las condiciones anteriormente mencionadas.
Esto es efectivamente así, si se observa que en la notación actual:

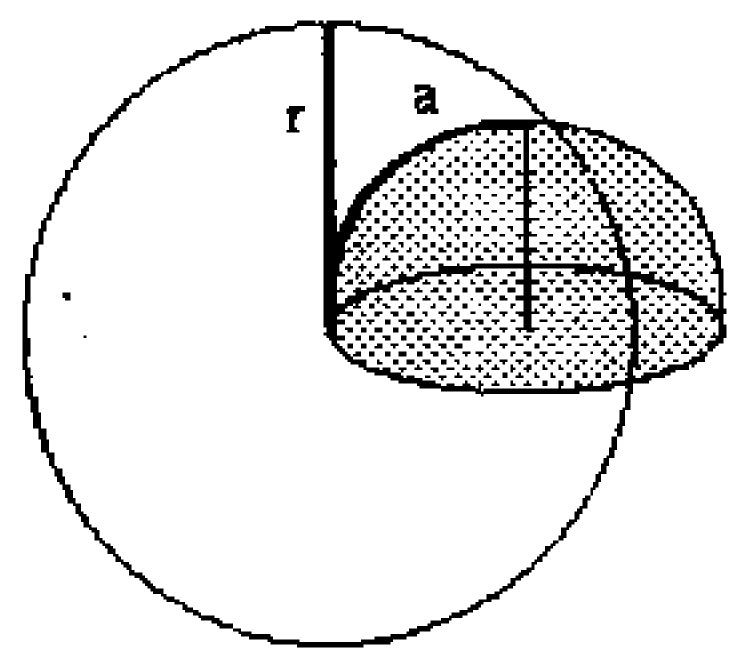
$$V_1 = \frac{4}{3}.\pi.r^3$$

$$V_2 = 2.\pi.r^3$$

$$V_3 = \frac{2}{3}.\pi.r^3$$

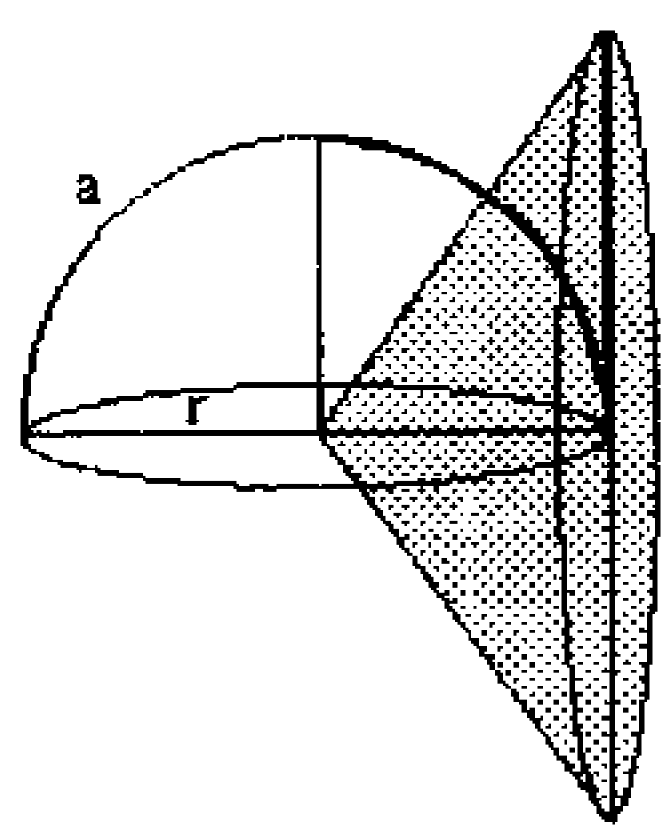


* La superficie de un casquete esférico, exceptuada la base, es equivalente a la superficie de un círculo cuyo radio es el segmento trazado desde el vértice del casquete a un punto cualquiera de la base.



$$S_{casq} = S_{circ} = \pi.r^2 = \pi.a^2$$

* El volumen de un sector esférico es equivalente a un cono cuya base es equivalente a la superficie del casquete del sector y cuya altura es el radio del sector.



$$V_{sector} = V_{cono} = \frac{\pi.r^2.h}{3} = \frac{\pi.a^2.r}{3}$$

De la esfera y el cilindro (Libro II)

Este libro, también precedido por un corto preámbulo a Dositeo, está compuesto por una serie de problemas nada sencillos, que conducen a problemas del mismo tipo que los de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.
Comprende siete problemas y algunos teoremas necesarios para su resolución.
El primero de ellos se refiere a la determinación de una figura plana equivalente a la superficie de una esfera. Su solución es inmediata, pues como dice Arquímedes: "el cuádruplo de su circulo máximo es una figura plana y es equivalente a la superficie de la esfera".
Uno de los más interesantes es el cuarto: "cortar una esfera por un plano de manera que los volúmenes de los dos segmentos esféricos estén entre si en una relación dada". Este problema conduce algebraicamente a la resolución de una ecuación de tercer grado. Arquímedes reduce el problema al de dividir un segmento AB, mediante un punto C, tal que el segmento BC sea a un segmento dado como una superficie dada es al cuadrado construido sobre AC, y anuncia que dará su solución final, pero en ningún manuscrito se encuentra esa solución.

De los conoides y esferoides

Este libro estudia los sólidos obtenidos por rotación, alrededor de uno de sus ejes, de

las tres cónicas: son los que actualmente designamos elipsoide de revolución, paraboloide de revolución e hiperboloide (de dos hojas) de revolución.
Es de destacar en este libro las definiciones que da Arquímedes, en una extensa carta dirigida a Dositeo y que sirve de preámbulo del mismo, acerca de los conoides y esferoides:

* "Si una sección del cono rectángulo (actual parábola) da una vuelta completa alrededor de su eje, la figura engendrada por esa sección se llama conoide rectángulo (paraboloide)."

* "Si se tiene en un plano una sección del cono obtusángulo (actual hipérbola), así como sus rectas más aproximadas (es decir, sus asíntotas), y el plano da una vuelta completa alrededor del eje, la figura engendrada por la sección se llama conoide obtusángulo (hipérbola de dos hojas)."

* "Si una sección del cono acutángulo (actual elipse) da una vuelta completa alrededor de su eje mayor, la figura engendrada por esa sección se llama esferoide alargado, mientras que si gira alrededor de su eje menor se llama esferoide aplanado (elipsoides)."

Luego enuncia 32 proposiciones de las cuales demuestra 12.
Es Arquímedes el primero que determina el área de la elipse, obteniendo el valor $S = a.b.\pi$, donde a y b son los semiejes. También calcula aquí los volúmenes de los tres sólidos de revolución anteriormente mencionados.

Medida del Círculo

Es un breve tratado compuesto sólo por tres proposiciones.
Antes de Arquímedes se sabía que la razón entre el área de un círculo y el cuadrado de su diámetro era constante, pero ésta no se conocía. Con Arquímedes se sabe que también es constante la razón entre el perímetro del círculo y el diámetro.
En efecto, en la tercera proposición Arquímedes afirma: "El perímetro de todo círculo vale el triple del diámetro aumentado de menos de la séptima parte, pero de más de los diez setentiunavos de partes del diámetro". Es decir, si D es el diámetro y P es el perímetro:

$$3\frac{10}{71}.D < P < 3\frac{1}{7}.D$$

$$\frac{223}{71}.D < P < \frac{22}{7}.D$$

De esta manera $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$ constituyen las cotas menor y mayor respectivamente de nuestro actual número π. En realidad, Arquímedes encontró que las cotas eran $3\frac{1137}{8069}$ y $3\frac{1335}{9347}$, pero da, sin embargo, los valores antes mencionados porque, aunque menos aproximados, son más simples.
Para determinar estas cotas, Arquímedes calcula aproximadamente los perímetros de los dos polígonos regulares circunscrito e inscrito, respectivamente, de 96 lados. La determinación del lado del polígono de 96 lados la obtiene partiendo de los hexágonos regulares circunscrito e inscrito respectivamente, y obteniendo dos aproximaciones del irracional $\sqrt{3}$, una por exceso y la otra por defecto: $\frac{265}{153}$ y $\frac{1351}{780}$.
El valor $\sqrt{3}$ surge al averiguar el lado del hexágono circunscrito.
Luego, aplicando las consideraciones geométricas conocidas, que permiten pasar del lado de un polígono regular al del polígono regular del doble número de lados, llega hasta el polígono de 96 lados.
Si se exceptúa el caso del hexágono regular, los lados de esos polígonos son todos inconmensurables con el diámetro, y su medida, respecto del diámetro, se expresa por irracionales cuadráticos.
En esta proposición Arquímedes expresa esas medidas bajo la forma de razones entre números racionales, aproximadas por exceso o por defecto (como ya se ha visto en el caso de $\sqrt{3}$), pero sin indicar en absoluto cómo ha obtenido esos números.
Utilizando este resultado es-

cribe la segunda proposición, que expresa que el área del círculo es equivalente a los $\frac{11}{14}$ del cuadrado circunscrito. En efecto, si R es el radio y S el área, se tiene:

$$S = \pi.r^2$$

$$= \frac{22}{7}(\frac{D}{2})^2$$

$$= \frac{22}{7}.\frac{D^2}{4}$$

$$= \frac{11}{14}.D^2$$

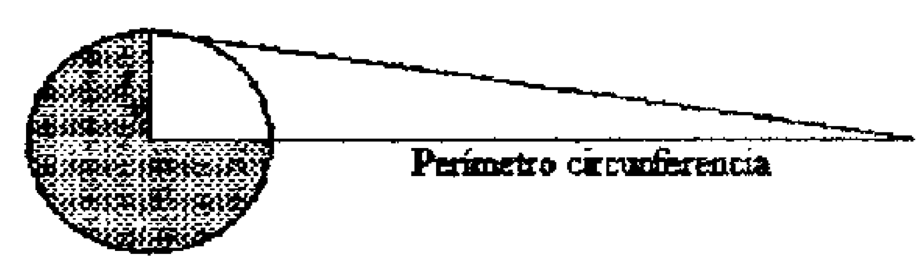
La primera proposición demuestra la equivalencia entre el área de un círculo y el área de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son el radio y el perímetro del círculo, es decir, la circunferencia rectificada. Este problema, por lo tanto, reduce el problema de la cuadratura del círculo al de la rectificación de la circunferencia.

$$Area_{círculo} = Area_{triángulo}$$

$$= \frac{r.Perim_{circunf}}{2}$$

$$= \frac{r.2.\pi.r}{2}$$

$$= \pi.r^2$$



Aquí concluimos esta primera parte de la vida y obra de Arquímedes, que continuaremos en la siguiente entrega de Axioma.

Andrea Morales
Claudio Salpeter

Bibliografía:

* BABINI, JOSE - *Arquímedes* - Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1948.
* COLERUS, EGMONT - *Historia de la Matemática* - Buenos Aires, Progreso y cultura, 1943.
* COLLETTE, JEAN-PAUL, *Historia de la Matemática* - México, Siglo XXI, 1985.
* GAMOW, GEORGE - *Biografía de la Física* - Madrid, Alianza Editorial, 1980.
* NEWMAN, JAMES R. - *Sigma El Mundo de las Matemáticas* - Barcelona, Grijalbo,1994.
* REY, ABEL - *El apogeo de la ciencia técnica griega* - México, UTEHA, 1962.
* REY PASTOR, J. - BABINI, JOSE - *Historia de la matemática (vol. 2.) Del Renacimiento a la Actualidad* - Barcelona, Gedisa, 1985.

Un conocimiento profundo de las cosas
no lo obtendremos ni ahora ni nunca,
en tanto que no las contemplemos
en su crecer desde el principio.

Aristóteles

Sobre dados, marcianos, puertas y automóviles.

En esta sección trataremos sobre temas matemáticos no muy conocidos y que esperamos sirvan tanto para el enriquecimiento personal como para ser llevados al aula. En esta ocasión nos referiremos a algunas situaciones paradójicas relacionadas con las probabilidades.

Un mecanismo que todos conocemos y utilizamos habitualmente para elegir un número al azar es arrojar un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el número 2? Así planteada, la respuesta correcta debe ser "depende". Podría ser que el dado estuviera desequilibrado de modo tal que sea casi imposible que salga el número 2, o bien por el contario que sea casi seguro.

Si el dado es perfectamente equilibrado, es decir si todas las caras tienen la misma chance de salir; entonces la probabilidad de que salga el número 2 (o cualquier otro) es $1/6$.

En efecto, al arrojar el dado tenemos seis resultados posibles. Si hemos apostado al número 2, la definición clásica de probabilidades (dada por Laplace en 1812) dice que nuestra chance de ganar es igual al cociente entre la cantidad de resultados *favorables* (en nuestro caso sólo uno: el 2) y el total de resultados posibles. La probabilidad resulta ser entonces $1/6$, tal como dijimos antes.

Un supuesto en la definición del genial matemático francés es que todos los resultados que puedan llegar a darse sean igualmente probables (es decir, que tengan todos iguales chances de ocurrir). Sin embargo, justamente este supuesto, hace que la definición se vuelva circular y adolezca en consecuencia de una grave falla de lógica.

En efecto, **la probabilidad** de un cierto suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número total de resultados posibles... *siempre que todos tengan la misma chance de ocurrir.* Pero ¿qué significa *la misma chance de ocurrir*? Significa que todos los resultados **tengan igual probabilidad**; y a su vez la probabilidad de un resultado es el cociente entre el número de casos..., etc.

Se impone entonces dar una definición extra-matemática de *equiprobabilidad*; una definición empírica, o una definición que apele a la intuición o a otros recursos. Eso hemos hecho en realidad cuando, al comenzar, discutimos brevemente la diferencia entre un dado equilibrado y uno que no lo es. Hemos apelado, sencillamente, a la intuición.

En general la situación se resuelve simplemente de la siguiente manera: cuando no se posee información suficiente para decidir si los resultados son (o no) igualmente probables, entonces se da por supuesto que sí lo son. Por ejemplo difícilmente un dado sea perfectamente equilibrado, sin embargo (a menos que haya información que sugiera lo contrario) se da por supuesto que sí lo es. Existen, en relación con este criterio, muchas situaciones paradójicas. Analizaremos a continuación dos de ellas.

Para analizar la primera, que es citada por Luis Santaló en su libro "Probabilidad y Aplicaciones", imaginemos una conversación entre dos personas. Aldo, que sostiene el criterio según el cual a falta de información dos sucesos deben considerarse igualmente probables, y Bruno, que trata de refutar esa postura, aduciendo que lleva a contradicciones lógicas.

Bruno pregunta: "¿Cuál es la probabilidad de que haya vida en algún planeta de Alfa Centauri?" A esto Aldo responde que, puesto que no tiene información que le permita decidir, entonces supone que es igual de probable el que haya vida o que no la haya. Por lo tanto la probabilidad de que haya vida en algún planeta de Alfa Centauri es $1/2$.

Bruno pregunta entonces: "¿Cuál es la probabilidad de que en ese planeta **no** haya bacterias?" Con el mismo criterio, Aldo responde que considera igual de probable el que haya bacterias o el que no las haya. Por lo tanto la probabilidad de que no existan es igual a $1/2$. Bruno pregunta entonces sobre la probabilidad de la no existencia de amebas, algas, perros y 36 formas de vida más. En cada caso la respuesta de Aldo es siempre que la probabilidad de que tales formas de vida no existan es igual a $1/2$.

"¿Cuál es entonces la probabilidad de que no existan simultáneamente ninguna de esas 40 formas de vida?" pregunta Bruno.

Atendiendo a la regla según la cual si la probabilidad de que un suceso ocurra es p y la probabilidad de otro suceso es q; entonces la probabilidad de que ambos ocurran a la vez es pq. Entonces, aplicando esa regla sucesivamente a la no existencia de bacterias, amebas, algas, perros, etc.; la probabilidad de que a la vez ninguno de ellos exista es de $(1/2)x...x(1/2)$ cuarenta veces, es decir $(1/2)^{40}$.

Finalmente Bruno pregunta por la probabilidad de que *exista al menos una* de esas 40 formas de vida. Como este es el suceso opuesto a que no exista ninguna de ellas; entonces la probabilidad buscada es de $1-(1/2)^{40}$, o sea más del 99,99 %.

Entonces, por una parte Aldo ha estimado que la probabilidad de existencia de vida es de 1/2 (o 50 %); pero a la vez la aplicación de ese mismo criterio le hace estimar que la probabilidad de existencia de al menos una de las 40 formas de vida citada por Bruno es de más del 99,99 %. ¿Cómo puede suceder esto? Según Bruno esta situación contradictoria significa que el criterio según el cual a falta de información los sucesos deben considerarse equiprobables es erróneo.

¿Es correcta la conclusión de Bruno? La respuesta es que no. Para entender su error debemos mencionar un importante concepto de la teoría de probabilidades, tal como es el concepto de *independencia*.

Dos sucesos se dice que son independientes si el saber que uno de ellos ha ocurrido (o no) no modifica la probabilidad de que el otro ocurra. Por ejemplo, digamos que un dado se arroja dos veces ¿cuál es la probabilidad de que en el segundo tiro salga un 6?

Independientemente de cuál haya sido el resultado del primer tiro la respuesta es $1/6$. Para calcular esta probabilidad no necesitamos para nada conocer cual fue el primer resultado. Por lo tanto los dos tiros del dado son independientes entre sí.

Supongamos en cambio que de un mazo de 40 cartas españolas extraemos dos naipes. Primero uno y luego, de entre los 39 restantes, sacamos otro. ¿Cuál es la probabilidad de que en la segunda extracción obtengamos el as de copas?

En realidad la respuesta depende de cuál haya sido el resultado de la primera extracción. Si la primera carta tomada *fue* el as de copas entonces la probabilidad de sacar esa carta por segunda vez es cero. En caso contrario la probabilidad es de $1/39$. El resultado de la primera extracción influye sobre el cálculo probabilístico de la segunda. Por lo tanto las dos extracciones **no** son independientes.

La regla citada según la cual si la probabilidad de que un suceso ocurra es p y la probabilidad de otro suceso es q; entonces la probabilidad de que ambos ocurran a la vez es pq; sólo se aplica **si los sucesos involucrados son independientes.** Pero si supiéramos que en un cierto planeta existen perros, entonces eso aumentaría sin dudas la probabilidad de que existan bacterias. Por lo tanto la existencia de perros y bacterias (o en general de las cuarenta formas de vida citadas por Bruno) no son hechos independientes y en consecuencia el cálculo cuyo resultado fue $(1/2)^{40}$ es incorrecto. No es cierto que sea esa la probabilidad de que no existan a la vez ninguna de las cuarenta formas de vida.

Sin embargo, la refutación más fuerte al argumento de Bruno es de índole menos técnica y podría resumirse en lo que sigue a continuación.

El criterio que hemos elegido de considerar equiprobables aquellos resultados para los que no tengamos información adicional, es de carácter puramente extra-matemático. Se trata de una regla empírica y que no puede ser refutada mediante ningún argumento nacido en la ciencia matemática. Aunque sí, tal vez, pueda llegar a ser invalidado por argumentos de algún otro tipo.

Como puede verse, muchos conceptos probabilísticos fundamentales giran en torno del conocimiento o desconocimiento de ciertas informaciones. Pero ¿hasta qué punto una información es realmente relevante? La segunda paradoja trata acerca de esta pregunta.

Para analizar esta segunda situación, imaginemos ahora que Bruno, nuevamente él, arroja una moneda y nos invita a adivinar sobre si saldrá cara o si saldrá ceca. No tenemos información acerca de si la moneda es equilibrada o no y por lo tanto consideramos que nuestra probabilidad de adivinar es exactamente de 1/2. Pero supongamos también que Bruno decide hacer la prueba de la siguiente manera. Después de que hemos hecho nuestra apuesta, Bruno arroja la moneda al aire de modo que caiga en la palma de su mano derecha y luego la cubre con la izquierda (para que no podamos verla). Con cuidado espía qué salió y nos guiña un ojo. El derecho o el izquierdo según qué lado de la moneda sea visible. Sin embargo, no nos dice qué ojo será en cada caso. Veremos, por ejemplo, que Bruno cierra su ojo izquierdo, pero no sabremos si eso significa que salió cara o ceca.

Bruno guiña el ojo y de inmediato nos invita, si queremos, a que cambiemos nuestra apuesta original. La pregunta es ¿nos conviene cambiar la apuesta o nos conviene conservarla?

La respuesta desde luego es que ambas opciones son igualmente convenientes. Es igualmente bueno mantenernos en nuestra primera elección que cambiarla. El que Bruno sepa cuál ha sido el resultado del tiro, aunque nos dé una críptica señal, no significa para nosotros ninguna ayuda.

Pensemos ahora que somos participantes en un programa de televisión en el que un automóvil es el premio. El mecanismo es el siguiente. Nos muestran tres puertas cerradas. Detrás de una de ellas está el automóvil mientras que las otras dos no ocultan premio alguno. Debemos elegir una puerta. Si nuestra elección recae en la puerta que oculta el vehículo, entonces será nuestro (en caso contrario no ganaremos nada). ¿Cuál es nuestra probabilidad de acertar? Puesto que no tenemos información acerca de cómo es elegida la puerta que oculta el automóvil, entonces suponemos que las tres son igualemente probables; por lo que nuestra chance de acertar es 1/3.

Supongamos que Bruno, que desde luego es el presentador del programa, agrega la siguiente regla. Después de que hemos hecho nuestra elección (y antes de que nos digan si hemos acertado o no) Bruno se coloca delante de alguna de las dos puertas que no hemos elegido. Esa puerta queda eliminada para nosotros. Se nos da entonces una segunda chance: podemos optar por mantener nuestra decisión original, o bien podemos cambiarla, y elegir la otra puerta (la que Bruno ha dejado libre). Ahora sí, la puerta que finalmente hayamos elegido será la que decidirá si ganamos o no.

La pregunta (como antes) es ¿nos conviene cambiar de puerta o nos conviene quedarnos con la que elegimos en primer lugar? Como estamos suponiendo que las tres puertas son igualmente probables, la respuesta sería que da lo mismo cambiar la elección que conservarla. Optar por la otra puerta no aumenta ni disminuye nuestras probabilidades de ganar.

Pero imaginemos aún que se nos hace la siguiente aclaración. Bruno, que sabe cuál es la puerta correcta, hace su elección según el siguiente criterio. Si hemos elegido una de las puertas sin premio, entonces Bruno se coloca delante de la otra puerta sin premio (y deja libre la que tiene el automóvil). Si, en cambio, hemos elegido la puerta ganadora, entonces Bruno elige al azar una de las otras dos. Pero desde luego, sólo Bruno sabe si hemos elegido o no la puerta correcta. De modo que ¿nos sirve de algo el conocer esta información?

Estaríamos tentados a responder que no. Que este conocimiento resulta tan inútil para nosotros como inútiles eran los guiños cuando queríamos adivinar si había salido cara o ceca. Ambas informaciones parecen igualmente irrelevantes. Sin embargo, estaríamos equivocados al pensar así.

En efecto, pensemos lo siguiente. En nuestra primera elección, pueden haberse dado dos situaciones: o bien hemos elegido la puerta correcta, o bien hemos fallado. La primera situación tiene 1/3 de probabilidad de ocurrir. La probabilidad de la segunda es 2/3.

Ahora bien, si en primera instancia hemos elegido la puerta correcta entonces, obviamente, nos conviene conservar esa elección. Con más precisión, si cambiamos nuestra decisión entonces nuestra chance de ganar es igual a cero, mientras que si la conservamos la probabilidad es igual a uno (es seguro que ganaremos).

En cambio, si en primera instancia hemos elegido una puerta incorrecta, entonces Bruno dejará libre para nosotros la puerta ganadora. En esta situación es seguro que ganaremos si cambiamos de puerta.

Desde luego, al hacer la primera elección, no sabemos en qué situación nos encontramos. Pero sí sabemos en cambio que hay una probabilidad de 2/3 de hallarnos en el segundo caso y sólo de 1/3 de hallarnos en el primero. Es decir, hay una probabilidad de 2/3 de que nos convenga cambiar de puerta, mientras que sólo 1/3 de que no nos convenga. Por los tanto una estrategia inteligente consiste en elegir una determinada puerta **¡y enseguida cambiar la elección!**. Todo esto debido al movimiento de Bruno ocultando una puerta.

Mientras que en el primer ejemplo los guiños no alteraban en nada la conveniencia de conservar o cambiar la elección original; el movimiento de Bruno en el segundo ejemplo (que aparentemente tampoco aportaría una información relevante) hace que resulte más conveniente cambiar de puerta.

¿Cuáles informaciones son relevantes y cuáles no? Pregunta de difícil respuesta. Sin embargo, trascendiendo ya el ámbito de las matemáticas, en este mundo cada día más saturado de información, resulta ser una de las preguntas más importantes de la vida moderna.

Gustavo Piñeiro*

* Lic. en Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* MEYER, PAUL - *Probabilidad y aplicaciones estadísticas* - Estados Unidos, Addison-Wesley Iberoamericana S.A., 1986.
* SANTALO, LUIS A.- *La Probabilidad y sus aplicaciones* - Buenos Aires, Editorial Ibero Americana, 1955.

La enseñanza de

Matemática

El presente artículo es un extracto que encontramos en un cuadernillo "Nueva Escuela" que fue distribuido por el Ministerio de Cultura de la Nación. Los invitamos a reflexionar sobre el mismo y a enviarnos sus comentarios.

Puntualizar las posibles causas del bajo rendimiento escolar en Matemática llevaría lejos de lo que requiere este resumen pero se sabe que alumnos, padres y docentes están sometidos a tensiones y distracciones que no facilitan los buenos resultados. Parece que sobre esos factores exógenos poco es lo que puede hacerse en la escuela. Sin embargo, hay otras causas del problema que pueden atacarse, son las que se refieren a la enseñanza y aprendizaje de la asignatura.

A este problema particular y a algunas soluciones posibles nos referimos en los textos de matemática destinados a los docentes.

¿Por qué la matemática es considerada poco atractiva? Porque en general se presenta en forma demasiado aséptica, sin contaminación con los problemas reales. Además, el alumno tiene la sensación de que siempre está haciendo lo mismo pero con un nivel mayor de oscuridad y con ejercicios más largos. Así, llega de la escuela elemental a la secundaria conociendo las fracciones y sus operaciones, pero es obligado a reaprenderlas bajo otro punto de vista y a pasar meses haciendo cálculos aburridos. ¿Cómo va a atraerlo una película que ya ha visto y en una versión en otro idioma y sin subtítulos?

La asignatura resulta poco atractiva porque rara vez los alumnos participan en la búsqueda de soluciones. No participan porque no entienden y no entienden porque no participan. A nosotros no nos atrae el baseball porque no lo entendemos y posiblemente nos gustaría si tuviésemos la ocasión de jugarlo.

Se ha hablado mucho de participación del alumno pero a menudo se la ha confundido con los trabajos grupales o la confección de monografías. Si formamos grupos para hacer gimnásticas divisiones de polinomios, habrá tanta participación como hacer lo mismo individualmente.

Hay otro aspecto que hace a esta cuestión: los contenidos no atienden a ciertos elementos de psicología; así, estudiar durante meses álgebra polinomial produce una fatiga previsible. Pensamos entonces que los contenidos no deben ser solamente modificados, sino redistribuidos.

Pretendemos que los alumnos participen desde el comienzo de la presentación en todo problema que requiere tratamiento matemático. En ese sentido, insistiremos en el enunciado de pocos problemas, pero a los cuales daremos todas las vueltas del derecho y del revés. Desaconsejaremos la ejercitación rápida, a vuelo de picaflor.

No se insistirá en los métodos consagrados, sino que permitiremos que el alumno desarrolle los propios que, en muchas ocasiones, como no puede dejar de suceder, coincidirán con aquellos.

Siempre que sea posible, se evitarán las definiciones contrarias al lenguaje y usos habituales. Por ejemplo, a nadie le resulta interesante la definición de segmento como intersección de semirrectas. ¿Por qué hacer malabarismos con algo tan simple?

Desalentaremos la ejercitación por la ejercitación misma. Creemos que el alumno no multiplica mal 0,2 por 0,03 porque le falte entrenamiento, sino porque está sobreentrenando y, por esa razón, ya no comprende lo que hace, en su afán por pasar

al ejercicio siguiente.
El mundo actual requiere conocimiento, pero mucho más, habilidad para aprender. Hoy, hay demasiadas pausas en la enseñanza, sin avances. Ejemplificamos: se dedica un mes para las operaciones con decimales y se amplia ese tiempo porque las evaluaciones son flojas. Lo aconsejable es seguir avanzando pero, eso sí, no olvidarse de las operaciones con decimales (si puede). La enseñanza actual sigue temas que aislan los conocimientos; en un curso el alumno aprende al dedillo todas las propiedades de las relaciones (incluida la arreflexiva) para no usarlas en ningún tema posterior. En una evaluación obtendrá "diez" en polinomios pero al ingresar a la Facultad confundirá la suma a + a (árbol + árbol) con la multiplicación a por a.
Partiremos del supuesto de que, la inteligencia de los alumnos sigue una distribución normal de modo que habrá pocos genios pero también pocos tan pobremente dotados que no puedan aprender. A unos y otros debe dirigirse la enseñanza.
Una pedagogía defectuosa perjudica a todos; hasta puede suceder que los genios no se enteren de que lo son. Pero además, la educación no sólo debe atender al aprendizaje. Hay otros valores: si el alumno participa, critica, examina sus errores, siente que a veces acierta él y otras sus compañeros, está aprendiendo a convivir en una democracia. Si acepta recetas y las emplea sin entenderlas para obtener una buena nota, alimenta en su interior la corrupción y el autoritarismo.

SANTALO SE JUEGA

En el suplemento cultural del diario *La Nación*, el 17 de octubre pasado, se publicó un reportaje al destacado matemático **Luis Santaló**. Extractamos de allí las siguientes palabras:

"Es lícito dejar a una máquina las tediosas 'cuentas'. Esto da más espacio y tiempo al verdadero ejercicio matemático, donde hay mucho de juego y donde los alumnos necesitan más imaginación que paciencia. Ya el papiro de Rhind (s. XVII a.C.) contiene problemas y las civilizaciones asiriobabilónicas crearon una Matemática práctica para resolverlos. Sin embargo y fuera de la utilidad inmediata, el hombre descubre un placer en el simple juego con estas habilidades; a veces la manera como se proponen los ejercicios es ingeniosa y hasta poética. En la India y en el Islam medieval se oían charadas así: *La quinta parte del enjambre se posa sobre una flor de durazno y la tercera lo hace sobre un jazmín; mientras, el triple de la diferencia entre aquellos números vuela sobre la flor del almendro y queda una pobre abeja, indecisa, sin saber dónde asentar. Dime hermosa niña, ¿cuál es el total de las abejas?.* El álgebra que los árabes llevaron a la Matemática nació en estos juegos; esta actitud lúdrica no debe perderse."

Revista "*Juegos para Gente de Mente*". 11/82.

Problemas Propuestos

1. *Colaboración del Prof. Jorge Martínez:* Dar una fórmula elemental (única) para expresar la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

2. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola:* Se considera un conjunto de números naturales cualesquiera, cuyo cardinal es 8. Demuestre que existen al menos dos elementos de dicho conjunto tales que su diferencia es múltiplo de 7.

3. *Colaboración de la Prof. Cristian Ponteville:* Búfalo Bill está durmiendo en el desierto; en su pesadilla está ubicado en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. En el plano infinito del desierto hay infinitos búfalos ubicados en todos los puntos de coordenadas enteras.
Búfalo Bill dispara su rifle en una dirección al azar, su disparo es de trayectoria rectilínea y de alcance infinito.

i) ¿Es seguro que matará algún búfalo?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que mate algún búfalo?

4. *De la O.M.A. - III Certamen El Número de Oro 1995:* Por el punto medio de cada lado de un cuadrado de área 1 se trazan los segmentos que unen dicho punto con los extremos del lado opuesto. Calcule el área del octógono formado.

5. *De Raymond Smullyan - "Juegos por siempre misteriosos" - Ed. Gedisa:* En la isla de los caballeros y los bribones, los caballeros siempre formulan enunciados verdaderos y los bribones siempre formulan enunciados falsos, cada habitante es caballero o bribón. Una vez, el empadronador McGregor decidió entrevistar solamente a los matrimonios. McGregor llamó a una puerta; el marido la abrió a medias y le preguntó a McGregor qué deseaba.
Hago un censo -respondió McGregor-, y necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cuál, si alguno lo es, es un caballero, y cuál, si alguno lo es, es un bribón?
-¡Ambos somos bribones!- dijo el marido enojado mientras cerraba la puerta de un golpe.
¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

6. *Colaboración de Agustín Tonelli:* Hallar todos los números de 5 cifras que son divisibles por el número de 4 cifras que se forma sacando la cifra del medio del anterior.

Soluciones a los Problemas de Axioma Nº 2:

1.Colaboración Prof. Alfredo Cóccola: *Sin utilizar calculadora, demuestre que la expresión* $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ *es un número entero y encuéntrelo.*

Respuesta dada por Paola Dogliotti

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$$

Supongamos que existe $a \in Z$ tal que:

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=a$$

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}=a-\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} \qquad (*)$$

Elevo al cubo

$$20+\sqrt{392}=a^3-3a^2\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}+3a(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}})^2-20+\sqrt{392}$$

$$40=a^3-3a\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\,(a-\sqrt[3]{20-\sqrt{392}})$$

Reemplazando por (*)

$$40=a^3-3a\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\,(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}})$$

$$40=a^3-3a\sqrt[3]{(20-\sqrt{392})(20+\sqrt{392})}$$

$$40=a^3-3a\sqrt[3]{20^2-392}$$

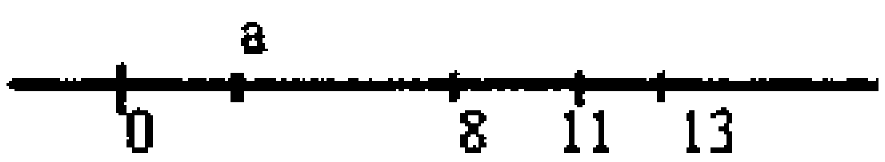
$$40=a^3-3a2$$

$40 = a^3 - 6a$
$4.10 = a(a^2 - 6)$
Entonces a=4

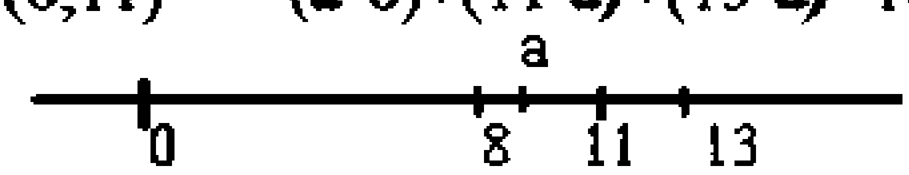
2. Colaboración Prof. Alfredo Cóccola - *Tres líneas paralelas de 13m, 11m y 8m, deben tener la misma longitud. Si el costo por metro de prolongar es igual al de reducirlas, ¿qué largo debieron tener las líneas para economizar gastos?*

Imaginemos las longitudes de las líneas sobre la recta numérica, comenzando todas en 0. Queremos que la suma de la distancia de cada uno de los extremos a un punto desconocido ***a*** sea mínima.
El punto desconocido puede estar en cualquiera de estos intervalos: (0;8), (8;11), (11;13), (13,+∞)

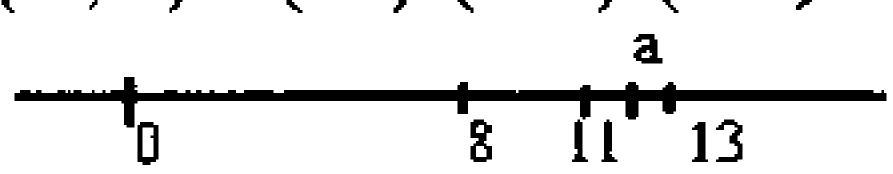
Si $a \in (0;8)$ $(8-a)+(11-a)+(13-a)=32-3a$



Si $a \in (8;11)$ $(a-8)+(11-a)+(13-a)=16-a$



Si $a \in (11;13)$ $(a-8)+(a-11)+(13-a)=a-6$



Si $a \in (13,+\infty)$ $(a-8)+(a-11)+(a-13)=3a-32$

¿Cuándo son mínimas las sumas?

Si $a \in (0;8)$, la suma es mínima (e igual a 8) si a=8.
Si $a \in (8;11)$, la suma es mínima (e igual a 5) si a=11.
Si $a \in (11;13)$, la suma es mínima (e igual a 5) si a=11.
Si $a \in (13,+\infty)$, la suma es mínima (e igual a 7) si a=13.

Por lo tanto las líneas debieron tener 11 metros.

3. Colaboración Prof. Fabián Valiño: *Calcule la siguiente suma: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$. Luego demuestre la validez del resultado obtenido.*

Respuesta dada por Patricia Folino

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

* Si n=1, se cumple la igualdad
* Hipóteis inductiva $n=h$

$$\sum_{i=1}^{h} i^3 = \frac{h^2(h+1)^2}{4}$$

* Tesis inductiva n=h+1

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$$

* Demostración:

$$\sum_{i=1}^{h} i^3 + (h+1)^3 = \frac{h^2(h+1)^2}{4} + (h+1)^3$$

$$= \frac{h^2(h+1)^2 + 4(h+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(h+1)^2(h^2+4h+4)}{4}$$

$$= \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$$

Respuesta dada por el Prof. Jorge Martínez

El resultado es: $(\sum_{i=1}^{n} i)^2$

Ahora, tenemos que probar que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$$

Si n=1, se cumple
Aceptémoslo para n=h y probemos la validez para n=h+1

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \sum_{i=1}^{h} i^3 + (h+1)^3$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + (h+1)^3$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + (h+1)^2(h+1)$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + (h+1)^2 h + (h+1)^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + 2\frac{h(h+1)}{2}(h+1) + (h+1)^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + 2(\sum_{i=1}^{h} i)(h+1) + (h+1)^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i + (h+1))^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{h+1} i)^2$$

Nuevo ejercicio para el lector: Demuestre que los resultados de Patricia Folino y Jorge Martínez son equivalentes.

4. *De Angela Dunn - "El Concurso de Belleza" - Ed. Juegos & Co. - Zugarto Ediciones.* **Demuestre que el producto de cuatro enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.**

Respuesta dada por Agustín Tonelli

$$n(n+1)(n+2)(n+3) =$$
$$= n(n+3)(n+1)(n+2)$$
$$= (n^2+3n)(n^2+3n+2)$$

Si llamamos $x = (n^2+3n)$ tendremos la siguiente multiplicación:

$$x(x+2) = x^2 + 2x$$

que es $(x+1)^2 - 1$, o sea un cuadrado menos uno, y entonces no puede ser él mismo un cuadrado.

La solución que encontramos nosotros era:

Si $n(n+1)(n+2)(n+3)$ es un cuadrado perfecto, éste debe ser mayor que $(n^2+3n)^2$ y menor que $(n^2+3n+2)^2$ por lo tanto podremos expresarlo como: $(n^2+3n+a)^2$ con a=1.
Entonces $(n^2+3n+1)^2$ debe ser igual a $n(n+1)(n+2)(n+3)$, sin embargo:

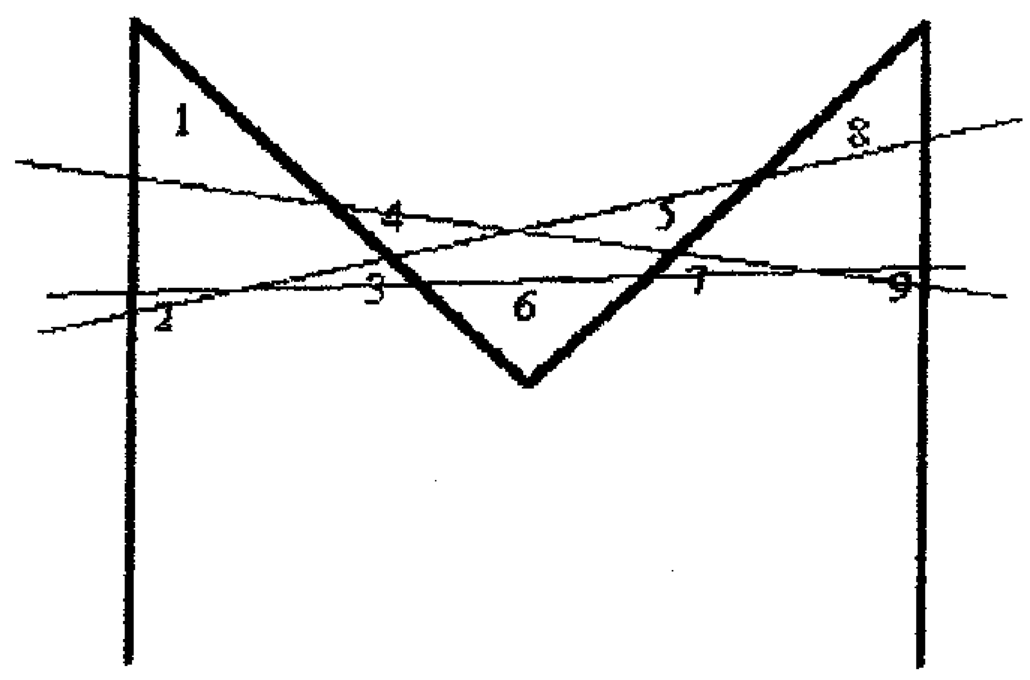
$$(n^2+3n+1)^2 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$$

y

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4+6n^3+11n^2+6n$$

no son iguales (difieren en 1).

5. **Colaboración de Laura Bancalá** - *Con tres rectas formar exactamente nueve triángulos (no contar los que estén incluidos unos en otros).*



¡Hasta el próximo número!
¡Felices soluciones!

Nueva propuesta

A partir de este número les proponemos investigar. Para ello y basados en el libro de David Thomas "Math Projects for Young Scientists" les haremos llegar algunos proyectos de investigación. De más está decir que aquí no se busca un resultado, sino explorar el tema, sacar conclusiones y comunicarnos mediante este espacio los progresos que podamos realizar al respecto. Para comenzar elegimos los números de Fibonacci.

Fibonacci es asociado frecuentemente con una sucesión o lista de números que se encontró en su obra *Liber Abaci*. Esta sucesión es conocida como la **sucesión de Fibonacci**. Sus términos comienzan como sigue: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... etc.

Fíjese que cada término de la sucesión es igual a la suma de los dos términos previos. Por ejemplo, 5 es igual a 2 más 3; 8 es 3 más 5; etc.

La sucesión se presenta en el libro de Fibonacci en conexión con una discusión sobre la cría de los conejos. En efecto, los números de Fibonacci resultan particularmente interesantes para muchas personas por la forma curiosa en que parecen caracterizar las propiedades de ciertos objetos naturales y procesos de la naturaleza. Por ejemplo, los números de Fibonacci pueden ser utilizados para describir la genealogía de las abejas, la posición de las hojas alrededor del tronco (phillotaxis), los patrones espirales encontrados en los girasoles, y muchos otros fenómenos naturales.

Los números de Fibonacci también emergen inesperadamente en una amplia gama de actividades de la matemática abstracta. Es la aparición reiterada de estas curiosidades matemáticas en contextos aparentemente inconexos que motivan a muchos investigadores a continuar la investigación para hallar nuevos giros sobre los números de Fibonacci.

Proyecto

¿Qué clase de números se obtienen cuando realizamos operaciones aritméticas y/o algebraicas con los números de Fibonacci? Use adición, sustracción, multiplicación, etc. ¿Se encuentran números de Fibonacci entre los resultados? ¿Qué hay acerca de los cuadrados de los números de Fibonacci?, ¿Y de los cubos de los números de Fibonacci?, etc. Investigue los resultados obtenidos cuando los números de Fibonacci experimentan transformaciones utilizando las operaciones comunes aritméticas y algebraicas.