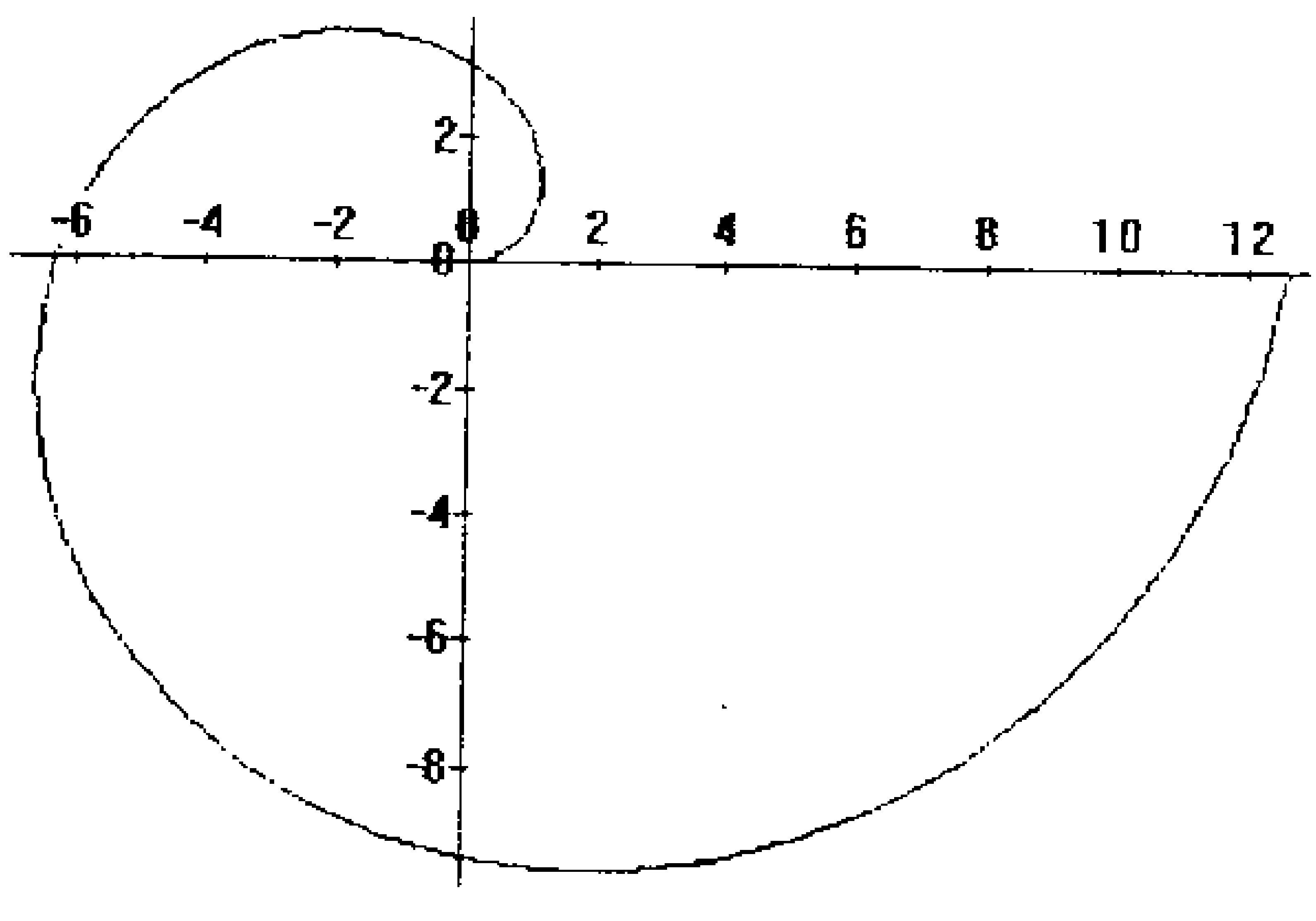
Axioma

La revista de los estudiantes del Profesorado de Matemática Dr. Joaquín V. González

GRANDES MATEMATICOS



ARQUIMEDES (última parte)

(Página 6)

Noviembre/Diciembre de 1996

Año 1 - N° 4

Aχioma N° 4

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Staff

Raquel Kalizsky
Andrea Morales
Claudio Salpeter
Gisela Serrano de Piñeiro

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro

Colaboraron en este número
Jorge Martínez
María V. Kravarik
Leonor Luzarreta

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Impresa en:
El Apunte - Junín 735 - Bs. As.

Sumario:

Editorial

Hemos concluido un ciclo. Suele decirse en estas ocasiones que es época de balance. Como éste es el último número del año no resultaría inadecuado hacerlo.

Sin embargo, preferimos que esta tarea la realice el lector, a quien rogamos nos la transmita. Cualquier resumen de aciertos y fracasos que intentáramos realizar traería, como trágica consecuencia, la ruina de Axioma.

Recibir correspondencia significa muchísimo para cada uno de los integrantes de Axioma.

Cada vez que en la casilla de correo aparece una carta, una infantil desesperación por ver su contenido y una incontenible emoción se apodera de nosotros.

Precisamente esto, sumado al constante apoyo de mucha gente, constituyen el principal elemento motivador, sin el cual sería imposible continuar con esta labor.

Algo más. Hemos incorporado dos secciones que consideramos muy importantes. La primera tiene que ver con la recomendación de libros (tanto nuevos como clásicos). Nunca va a estar de más insistir en lo imprescindible que resulta una buena bibliografía. La segunda constituye la publicación de trabajos realizados por alumnos y/o profesores. Nuestra idea es que esta sección logre incentivar a muchos otros a realizar trabajos serios de investigación sobre diversos temas relacionados con la Matemática.

Dado que el próximo número de Axioma aparecerá en marzo de 1997, aprovechamos la oportunidad para hacerles llegar un afectuoso saludo y desearles felices vacaciones.

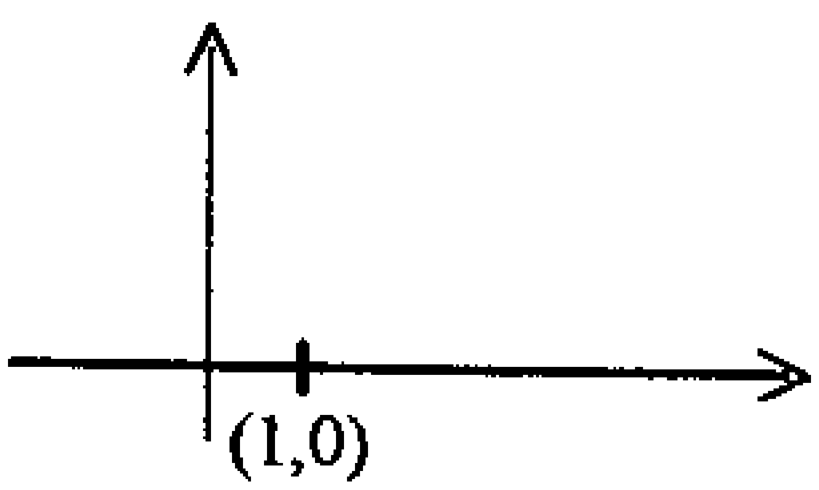
Noviembre/Diciembre
de 1996

Año 1 - N° 4

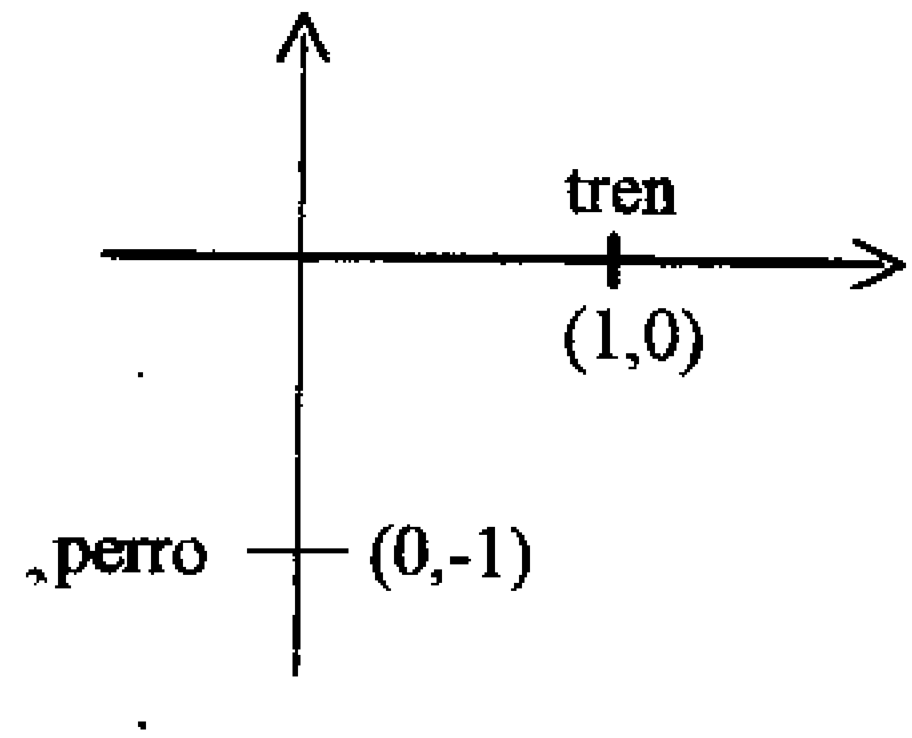
Ecuaciones Diferenciales (Primera Parte)

En la presente sección trataremos, a lo largo de varias notas, temas que nos atraen por su importancia y por su riqueza. Hoy comenzaremos con el tema Ecuaciones Diferenciales.

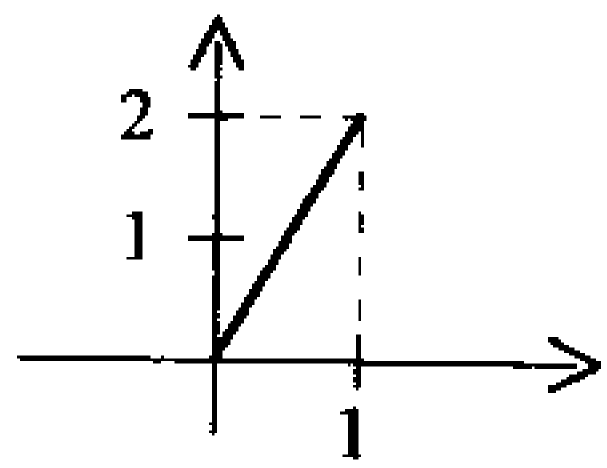
En una pradera perfectamente llana un tren viene moviéndose por una vía perfectamente recta a una velocidad constante de 1 km. por minuto. Con el fin de describir con precisión todos los movimientos que vamos a estudiar, introduciremos la situación en el contexto de un sistema de ejes cartesianos. Supondremos que la vía es el eje x y que en el instante t = 0 (el tiempo se supone medido en minutos) el tren se encuentra en el punto de coordenadas (1;0) moviéndose en el sentido positivo del eje. En cada instante t la posición del tren es (t + 1 ; 0).



En el mismo instante inicial t = 0 un perro, parado hasta ese momento en el punto (0;-1), comienza a correr en persecución de nuestro tren.



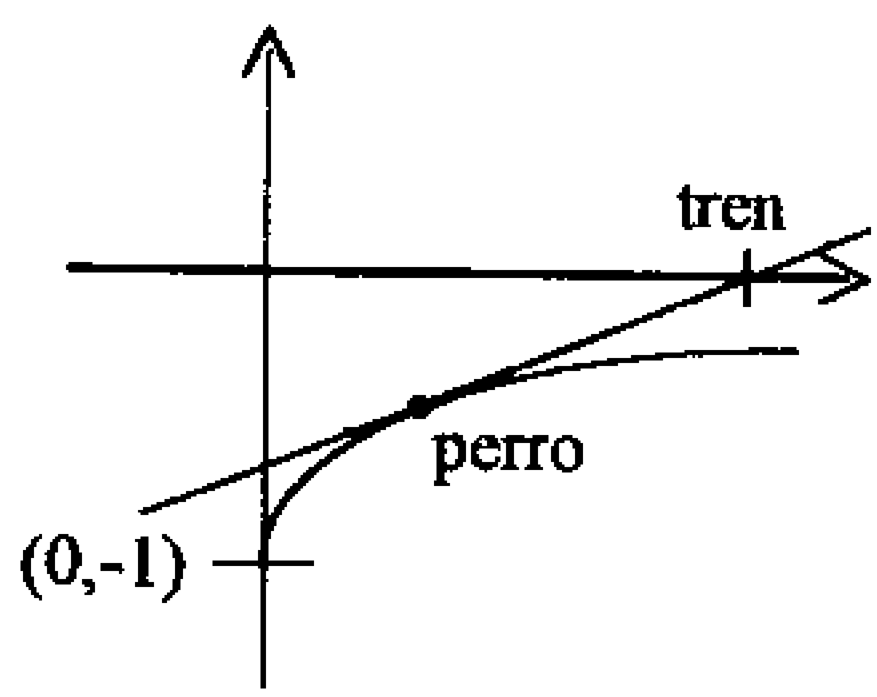
A diferencia de lo que ocurre con el tren, el perro no se mueve siguiendo una línea horizontal (ni tampoco vertical). En este tipo de situaciones suele ser conveniente analizar separadamente cada una de las dos componentes del movimiento. Para dar un ejemplo de este tipo de análisis, supongamos que un móvil que viaja a velocidad constante se ha desplazado en un minuto desde el punto (0;0) hasta el punto (1;2).



Analizar separadamente cada componente consiste en estudiar independientemente cómo han variado cada una de las dos coordenadas del punto que da la posición del móvil. En este caso, en un minuto, la coordenada x ha variado de 0 a 1 (a velocidad constante), por lo que decimos que el móvil se desplaza, según la dirección del eje x a una velocidad constante de 1 km./min. La coordenada y ha variado a velocidad constante de 0 a 2 y, por lo tanto, decimos que el móvil se desplaza, según la dirección del eje y, a una velocidad constante de 2 km./min.

En cuanto al perro que va en persecución del tren, nos dan la información de que su movimiento, según el eje x, tiene velocidad constante e igual a 1 km./ min. Como la coordenada x en el instante inicial es igual a 0, entonces en cada instante t la coordenada x de su posición es exactamente igual a t. Así por ejemplo, en el instante t = 1, su posición será (1;y) siendo y un número aún a determinar.

Pero como ya fue dicho, el perro no corre en dirección horizontal. En realidad el animal corre de modo tal que su línea de visión apunta en todo momento hacia la posición que ocupa del tren.



Gráficamente, esta última condición puede interpretarse del siguiente modo: la recta tangente a la trayectoria del

perro pasa exactamente por la posición que ocupa en ese momento el tren.
La pregunta es ¿qué trayectoria sigue el perro? (La trayectoria, desde luego, es la curva que describe el perro en su desplazamiento). Supongamos que esta curva corresponda al gráfico de alguna función y = F(x). Esto significa que, si en un instante dado la coordenada x de la posición del perro es igual a x_0 entonces la coordenada **y** de esa posición será $F(x_0)$. Trataremos de determinar qué función es F. Para ello situémonos mentalmente en un cierto instante t = T. En ese momento, el tren ocupa la posición (T + 1; 0) mientras que el perro ocupa la posición (T; F(T)). La recta tangente al gráfico de F en el punto (T; F(T)) tiene ecuación:

$$y = F'(T)(x - T) + F(T) \quad (^1)$$

Sabemos, además, que para todo T positivo, el punto (T + 1; 0) pertenece a la recta tangente y por lo tanto debe verificar la ecuación (^{1}). Es decir:

$$0 = F'(T) + F(T) \qquad (^2)$$

cualquiera sea T positivo. Si reemplazamos T por x; y llamamos y = F(x), entonces la ecuación (^{2}) se puede reescribir:

$$0 = y' + y \qquad (^3)$$

La ecuación (^{3}), que expresa una relación entre la función incógnita y = F(x) y su derivada, se denomina una **ecuación diferencial**. Más en general se tiene la siguiente:

> **Definición:**
>
> Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada y = F(x) y sus derivadas sucesivas y, y', y'',...., $y^{(n)}$ se denomina una ecuación diferencial.

Además de (^{3}), otros ejemplos de ecuaciones diferenciales son los siguientes:

$$0 = y' - 2xy \qquad (^4)$$

$$0 = y'' + y \qquad (^5)$$

El orden de la derivada superior que aparece en la ecuación se denomina el **orden** de la ecuación. Así, por ejemplo, (^{3}) y (^{4}) son ecuaciones de primer orden, mientras que (^{5}) es una ecuación de segundo orden.

> **Definición:**
>
> Toda función y = F(x) que, introducida en la ecuación, la transforma en una identidad, se denomina una **solución** de la ecuación diferencial.

Por ejemplo, $y = e^{x^2}$ es una solución de (^{4}); ya que, como el lector puede verificar, si tomamos $F(x) = e^{x^2}$ entonces:

$$0 = F'(x) - 2xF(x)$$

Esta solución no es única. En efecto, dejamos también a cargo del lector la verificación de que si k es cualquier número real entonces $F(x) = ke^{x^2}$ es solución de (^{4}).
Por otra parte, como también el lector puede verificar, toda función de la forma:

$$F(x) = A \operatorname{sen}(x) + B \cos(x)$$

(donde A y B son números reales cualesquiera) es solución de (^{5}).
Volvamos ahora al problema del perro que persigue al tren y a la pregunta ¿cuál es su trayectoria? En otras palabras, se trata de resolver la ecuación diferencial (^{3}):

$$0 = y' + y$$

Despejando obtenemos:

$$-1 = \frac{y'}{y} \qquad (^6)$$

Observemos que, por la regla de la cadena, vale:

$$(\ln |y|)' = \frac{1}{y}\, y' = \frac{y'}{y}$$

Luego (^{6}) se transforma en:

$$-1 = (\ln |y|)'$$

Integrando ambos miembros se obtiene:

$$-x + C = \ln |y| \qquad (^7)$$

Donde C es una constante arbitraria. Despejando en (7):

$$|y| = e^{-x+C}$$
$$y = \pm e^{C} e^{-x}$$
$$y = k\, e^{-x}$$

Hemos tomado $k = \pm e^C$. Por lo tanto hemos encontrado que, para cualquier número real k, la función $F(x) = ke^{-x}$ es solución de la ecuación (3). Invitamos al lector a que verifique que si $F(x) = ke^{-x}$ entonces:

$$0 = F'(x) + F(x)$$

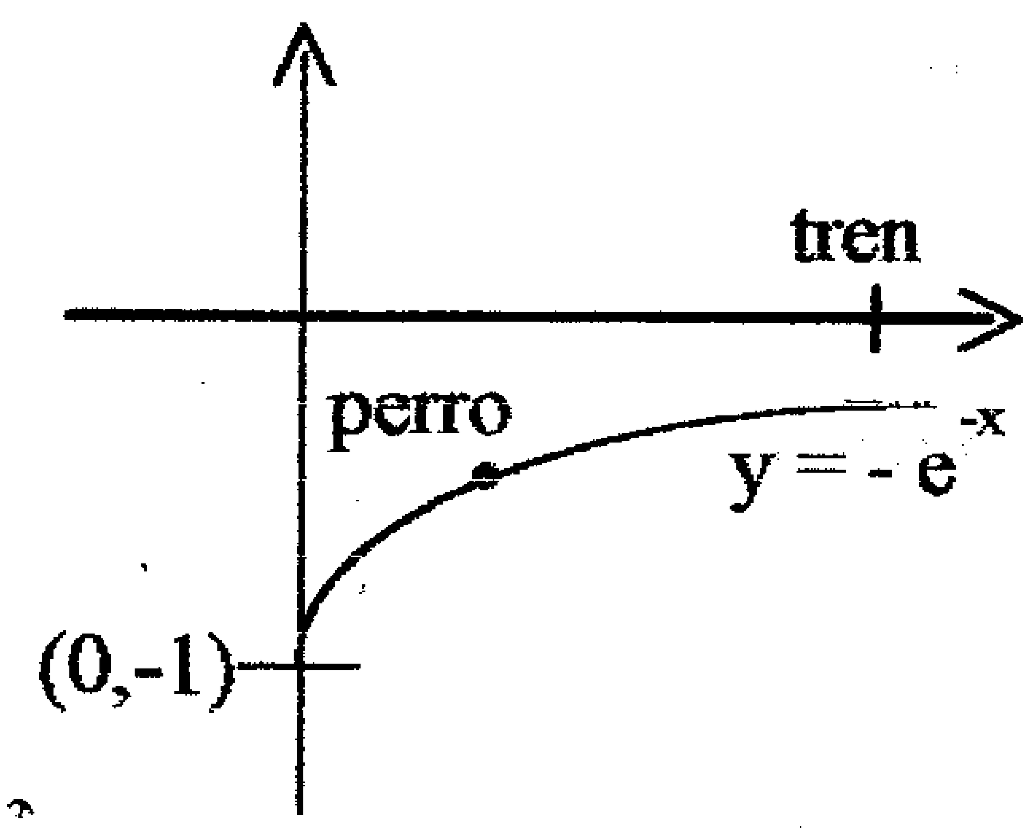
La ecuación tiene, en consecuencia, infinitas soluciones, una para cada valor de k que elijamos.

$F(x) = ke^{-x}$ se llama la **solución general** de la ecuación. Las soluciones que se obtienen eligiendo valores particulares para k se denominan **soluciones particulares** de la ecuación. Por ejemplo, $F(x) = 2e^{-x}$ es una solución particular. ¿Cuál de estas soluciones particulares es la que corresponde a la trayectoria del perro?

Recordemos que para t = 0 la posición del perro es el punto (0;-1), en otras palabras F(0) = -1. Esta última igualdad, llamada la **condición inicial** de la ecuación, es la que permite responder a la pregunta. En efecto:

$$F(x) = ke^{-x}$$
$$-1 = F(0) = ke^{0} = k$$
$$F(x) = -e^{-x}$$

Por lo tanto la trayectoria del perro corresponde al gráfico de la función $F(x) = -e^{-x}$.



En otras palabras, puesto que en cada instante t la coordenada x de la posición del perro es igual justamente a t, entonces la coordenada **y** de la posición es igual a $-e^{-t}$.

Intuitivamente es claro que el perro nunca va a lograr alcanzar al tren. Analíticamente esto puede verificarse fácilmente (lo dejamos como tarea para el lector). Pero ¿qué ocurre si la velocidad del tren medida en km./min. es constante, e igual a un número $v < 1$?

En este caso la coordenada x de la posición del tren en el instante t = T es igual a vT + 1; mientras que la posición del perro es (T; F(T)), donde F es una función a determinar. La ecuación de la recta tangente a la trayectoria del perro en ese instante es como antes:

$$y = F'(T)(x - T) + F(T)$$

Como la recta debe pasar por la posición del tren, (vT + 1;0):

$$0 = F'(T)(vT + 1 - T) + F(T)$$

$$0 = F'(T)[(v-1)T + 1] + F(T)$$

cualquiera sea T positivo. Si reemplazamos T por x; y llamamos y = F(x), entonces la última ecuación se puede reescribir:

$$0 = [(v-1)x + 1]\, y' + y \quad (8)$$

La expresión (8) es la ecuación diferencial que corresponde al problema de hallar la trayectoria del perro cuando el tren tiene una velocidad $v < 1$. Si queremos resolverla podemos operar como en el ejemplo anterior para obtener:

$$\frac{-1}{(v-1)x+1} = \frac{y'}{y}$$

$$\frac{-1}{(v-1)x+1} = (\ln|y|)'$$

Integrando en ambos miembros:

$$\frac{-1}{v-1}\ln|(v-1)x+1| + C = \ln|y|$$

Despejando y en esta última expresión y llamando $k = \pm e^C$ se obtiene:

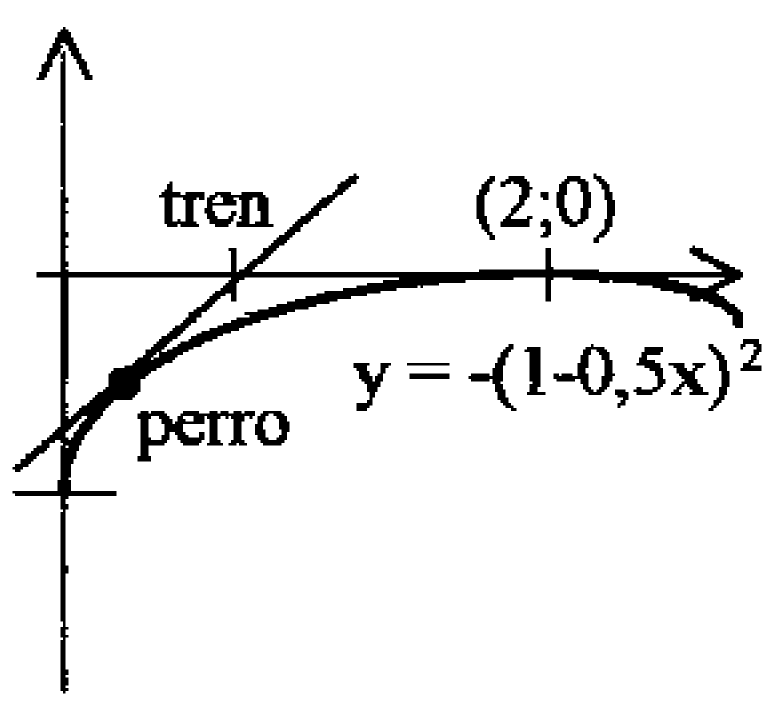
$$y = k\,[1+(v-1)x]^{-1/(v-1)}$$
$$F(x) = k\,[1+(v-1)x]^{-1/(v-1)}$$

Hemos calculado de este modo la solución general de la ecuación (8). Partiendo de la condición inicial F(0) = -1 es posible, tal como se hizo anteriormente, hallar el valor de k correspondiente al problema del perro. Dejamos al lector la tarea de verificar que k = -1.

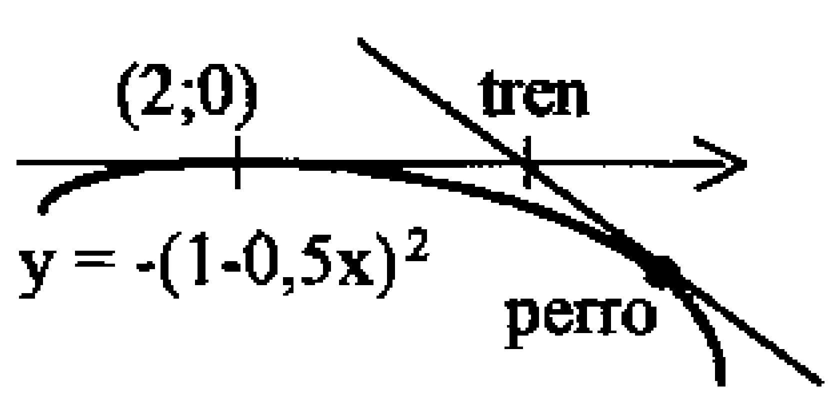
Luego, la trayectoria del perro cuando el tren tiene una velocidad $v < 1$ está dada por el gráfico de la función:

$$F(x) = -\,[1+(v-1)x]^{-1/(v-1)}$$

Por ejemplo, si $v = 0{,}5$ se tiene $F(x) = -[1-0{,}5x]^2$ cuyo gráfico es una parábola que corta al eje x (por donde corre la vía del tren) en $x = 2$.



Es fácil verificar que justamente en $t = 2$ el perro alcanza la posición del tren. Después de ese instante el perro sigue recorriendo la parábola, pero ahora con el tren detrás de él. La recta tangente a la posición del perro sigue pasando por la ubicación del tren, pero esta recta tangente ya no indica la línea de visión del perro, sino en todo caso la línea de su cola.



Dejamos como ejercicio para el lector comprobar que si la velocidad del tren es $v < 1$ entonces el perro alcanza al tren en el tiempo $t = 1/(1-v)$.

Nótese que a medida que v (la velocidad del tren) se va aproximando a 1 entonces el tiempo que tarda el perro en alcanzar al tren se va haciendo cada vez mayor. Cuando v tiende a 1 el tiempo en cuestión tiende al infinito. Esto es coherente con el hecho de que cuando $v = 1$ el perro nunca llega a alcanzar al tren.

Otro hecho que es digno de ser destacado es el siguiente. Según hemos calculado, la expresión

$$y = -\,[1+(v-1)x]^{-1/(v-1)} \quad (9)$$

da la solución para el problema del perro cuando $v < 1$. Consideremos ahora a x fija y veamos qué ocurre con (9) cuando el valor de v va tendiendo a 1.

Es de esperar que cuando v tienda a 1 la expresión (9) nos dará la solución del problema del perro para el caso $v = 1$. Como este último caso tiene por solución a $y = -e^{-x}$; entonces lo que queremos es que el límite de $-\,[1+(v-1)x]^{-1/(v-1)}$ cuando v tiende a 1 sea $-e^{-x}$. Si hacemos un pequeño cambio de variables y llamamos $u = v-1$ lo que estamos pidiendo equivale a que cuando u tienda a cero, la expresión $-(1+ux)^{-1/u}$ vaya tendiendo a $-e^{-x}$; y como es bien sabido, este último hecho es cierto.

Es decir, efectivamente ocurre que cuando el valor de v va tendiendo a 1, la solución obtenida para el caso $v < 1$ va tendiendo a la solución obtenida para $v = 1$.

Invitamos al lector a que construya gráficos de la trayectoria del perro

$$y = -\,[1+(v-1)x]^{-1/(v-1)}$$

para distintos valores de v cercanos a 1 y vea cómo a medida que v se acerca a 1 el punto de encuentro se va alejando cada vez más hacia la derecha, a la vez que la trayectoria del perro se va pareciendo paulatinamente a aquella obtenida para $v = 1$, es decir la curva $y = -e^{-x}$.

Finalmente, se observa fácilmente que cuando la velocidad del tren es mayor que 1 km./min., es decir cuando $v > 1$, entonces la ecuación que queda planteada es la misma que en (8) y la expresión (9) da también la solución del problema (recordando ahora que $v > 1$). Dejamos para el lector, como la última tarea del día de hoy, estudiar qué forma toma la trayectoria del perro para distintos valores de $v > 1$.

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* PISKUNOV, N. - *Cálculo Diferencial e Integral* - U.R.S.S., Mir, 1983.

ARQUIMEDES (Segunda parte)

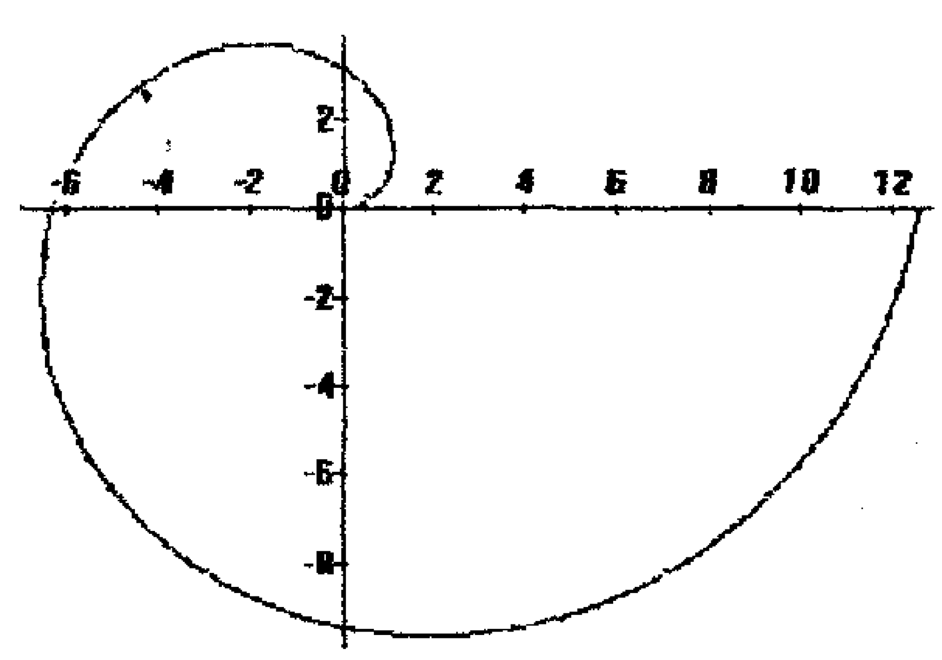
En el número anterior de Axioma habíamos empezado a hablar de la extensa obra de Arquímedes. En esa oportunidad hicimos algunos comentarios acerca de sus libros: "De la esfera y el cilindro", "De los conoides y esferoides" y "Medida del círculo". A continuación comentaremos el resto de su obra.

De las espirales

Este libro se ocupa del estudio de la hoy llamada *espiral de Arquímedes.*

Es uno de los escritos más difíciles de Arquímedes. Largas demostraciones, textos concisos que dan por sobreentendidas muchas relaciones intermedias, hacen que su lectura y comprensión resulten complicados, razón por la cual, durante los siglos XVII y XVIII, muchos matemáticos desistieron de entenderlo y algunos incluso, prefirieron considerar los resultados de Arquímedes como erróneos. Con los actuales recursos de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal, aquellos resultados se obtienen fácilmente, hecho que realza aún más los méritos del siracusano.

De acuerdo a A. Czwalina, investigador de la vida y obra de Arquímedes, éste describe dicha curva del modo siguiente: "Si una semirrecta que gira alrededor de su origen con una velocidad uniforme, después de algunas vueltas vuelve a su posición primitiva, y un punto se mueve sobre la semirrecta con velocidad uniforme, a partir del origen de esta misma semirrecta, entonces dicho punto describirá una espiral".



La espiral de Arquímedes es, en la actualidad, la gráfica de una ecuación en coordenadas polares ρ y θ. Una gráfica de este tipo consiste en todos aquellos, y sólo aquellos puntos que tengan por lo menos un par de coordenadas polares que satisfagan la ecuación. En la espiral de Arquímedes $\rho = a.\theta$ con $a > 0$ y $\theta \geq 0$.

En este libro Arquímedes tuvo necesidad de hacer algunas deducciones notables. Tal es el caso de la suma de los cuadrados de los números naturales: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 1/6\, n(n+1)(2n+1)$.

A continuación transcribimos parte del extenso preámbulo de este libro dirigido a Dositeo: "La mayor parte de las demostraciones de los teoremas que yo había enviado a Conon y cuyas pruebas incesantemente me pides, en verdad tú las posees en los libros que te entregó Heracleides, pero yo te envío algunas otras en este libro. No debe sorprenderte que yo haya demorado tanto en publicar las demostraciones de estos teoremas, pues preferí antes remitir los enunciados a matemáticos expertos que prefirieran investigar las demostraciones por sí mismos. Sin embargo, ¿cuántas cuestiones hay en geometría que al principio parecen fáciles y que sólo se resuelven después de mucho tiempo? Con todo, Conon ha muerto antes de haber dispuesto del tiempo necesario para estudiar esas cuestiones; de otra manera las habría encontrado y resuelto y habría hecho progresar la geometría con muchos otros descubrimientos, pues sabemos que era de una actividad incansable y de una habilidad poco común para la matemática. No obstante haber transcurrido varios años de la muerte de Conon, no he advertido que alguien se hubiera ocupado de alguno de esos problemas. Sin embargo, los enunciaré cada uno en detalle y convendrá dar a continuación dos de aquellos problemas que yo mismo no pude llevar a buen fin; de manera que aquellos que pretenden haber resuelto todos los problemas, pero sin dar la demostración, quedan refutados por el hecho mismo de haber declarado que demostraron algo imposible."

Da luego algunos problemas tratados en "De la esfera y del cilindro" y dos enunciados falsos con sus respectivas correcciones. Algunas de las propiedades más importantes de la espiral de Arquímedes son:

1) Mediante el trazado de la tangente a la espiral en uno de sus puntos puede obtenerse un segmento igual a la longitud de un arco de circunferencia de radio y ángulo central dado, es decir, que mediante esta curva puede resolverse el problema correlativo de la cuadratura del círculo: el de la rectificación de la circunferencia o de uno de sus arcos.

2) El área barrida por el radio vector en la primera revolución es la tercera parte del círculo, cuyo radio es la posición final del radio vector. El área barrida en la segunda revolución está en la razón de 7:12 con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector.

Cuadratura de la Parábola

Este libro trata de la cuadratura de cualquier segmento parabólico (es decir, construir un cuadrado de área equivalente a la de un segmento parabólico dado) , utilizando para ello dos soluciones: una mecánica y otra geométrica.

Aquí también hay un largo preámbulo a Dositeo, que en parte transcribimos: "Cuando me enteré de la muerte de Conon,-con cuya amistad me honré toda la vida, me afligió sobremanera la pérdida de un hombre que era a la vez un amigo y un matemático distinguido. Como tú estabas en contacto con Conon y eres hábil geómetra he tratado de hacerte llegar por escrito, como pensaba escribirle a Conon, un teorema de geometría que aún no había examinado y que después de haberlo yo estudiado, lo encontré primero por la mecánica y luego lo demostré por la geometría.

Por lo demás, entre los que se han ocupado de geometría antes de nosotros, algunos se han esforzado en exponer por escrito que era posible encontrar una figura rectilínea equivalente a la de un círculo dado, o de un segmento de círculo dado; luego trataron de cuadrar la figura limitada por una sección de cono entero (probablemente Arquímedes se refiere aquí a la cuadratura de la elipse) y una recta, admitiendo lemas inadmisibles, razón por la cual muchos reconocieron que tales problemas no se habían resuelto.

Pero ninguno de mis predecesores, que yo sepa, ha buscado la cuadratura de un segmento limitado por una recta y una parábola, cosa que ahora nosotros hemos encontrado. En efecto, demostramos que todo segmento limitado por una recta y una parábola supera en un tercio al triángulo de igual base y altura del segmento."

Arquímedes aborda la demostración geométrica de este resultado, descomponiendo el segmento parabólico en triángulos cada vez menores, que van "agotando" la figura, utilizando para ello el método de exhaución (ver recuadro más abajo). El área de los subsiguientes triángulos siempre constituye la cuarta parte del que le antecede. Por más pequeños que sean los triángulos, al continuar con este procedimiento, siempre se hallarán triángulos más pequeños. Arquímedes suma todas estas áreas: A + A/4 + A/16 + A/64 + ... = 4/3 A, en donde A es el área del triángulo de partida.

Hoy calcularíamos el resultado de esta progresión geométrica con la fórmula:

$$S_{\inf} = \frac{A}{1-q} = \frac{A}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A.$$

Método de exhaución

El método de exhaución, atribuido al genial Eudoxo (cuya obra ni aún hoy puede valorarse suficientemente), está basado en la siguiente proposición: "Si de cualquier magnitud se sustrae la mitad, o más de la mitad, y esta operación se repite con suficiente frecuencia, entonces siempre se llegará a una magnitud más pequeña que cualquier magnitud dada de la misma especie". Se puede entonces, según Eudoxo,

avanzar en "lo tan pequeño como se quiera" hasta donde lo deseemos.
Los griegos utilizaron este método exhaustivo, equivalente al actual método de integración de las áreas, para demostrar teoremas sobre áreas y volúmenes de figuras curvilíneas.
Euclides, en sus Elementos, ha utilizado este método para hacer varias de sus demostraciones. Por ejemplo, para demostrar que dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros, considerando a dichos círculos como polígonos de un número de lados "tan elevado como se quiera". Para demostrar que el círculo puede considerarse como un polígono de un número de lados suficientemente elevado, los segmentos circulares que se hallan entre el polígono y la circunferencia, se llenan de triángulos y, al aumentar sucesivamente el número de lados, la magnitud de estos triángulos puede llevarse por debajo de cualquier medida, por más pequeña que sea. De este modo, el círculo quedará "agotado". Como en latín "agotar" significa "exhaurire", se llamó a esta demostración, exhaución.

De los equilibrios (Libro I)

Es el tratado científico de estática (la ciencia que se ocupa del estudio del equilibrio de los cuerpos en reposo) más antiguo que se conoce.
Considera aquí las condiciones de equilibrio de la palanca y la determinación de los centros de gravedad de algunos polígonos.
El escrito está hecho según el método euclídeo, y consta de 7 postulados y 15 teoremas.
En esos postulados Arquímedes habla del centro de gravedad de figuras planas, pero no da en este libro ninguna definición de ese concepto. Pero es muy probable que su definición sí figurara en otro libro suyo: "Sobre la palanca", el cual se ha perdido.
Recién en Pappus encontramos una definición del centro de gravedad de un cuerpo: "es aquel punto interior del cuerpo, tal que si se imagina a éste suspendido por ese punto, el cuerpo se mantiene en reposo cualquiera sea su posición inicial."
Entre las 15 proposiciones que siguen a los postulados, transcribimos la sexta que implica la ley fundamental de la palanca:
"Dos pesos, conmensurables (es decir, que la relación de ambos está representada por una fracción), se equilibran a distancias inversamente proporcionales a sus pesos."
La séptima proposición prueba el mismo resultado, pero para pesos inconmensurables (es decir, cuando la relación de ambos es irracional).
Partiendo del principio de la palanca, Arquímedes, en las restantes proposiciones del libro, determina el centro de gravedad de los paralelogramos, de los triángulos (que lo determina demostrando, por el absurdo, que debe encontrarse sobre una mediana) y de los trapecios.

De los equilibrios (Libro II)

En este libro Arquímedes determina el centro de gravedad de un segmento parabólico y de un trapecio parabólico (figura comprendida entre dos cuerdas paralelas y los arcos de parábolas intersecadas por aquéllas).
"De los equilibrios" (Libros I y II) constituyen uno de los trabajos más importantes de Arquímedes, pues con ellos se inicia el estudio de la Estática, y se introducen las teorías de la palanca y de los centros de gravedad (la hoy llamada Teoría de los momentos estáticos).

Del Método

En el año 1906, el danés J.L. Heiberg, historiador de la ciencia, se traslada a Constantinopla para examinar y descifrar un palimpsesto que en 1899 había sido encontrado entre los manuscritos del patriarcado griego de Jerusalén.
El manuscrito constaba de unas 180 hojas que contenían dos escrituras superpuestas: la superior (de los siglos XIII - XIV) tenía un Eucologio; la inferior, del siglo X, eran escritos de Arquímedes. Estos últimos incluían obras ya conocidas: "De la esfera y el cilindro", "De las espirales", "De la medida del círculo", "De los equilibrios", "De los cuerpos flotantes", "El Stomachion" y "Del Método". De este último tratado sólo se conocía su existencia por al-

guna que otra alusión, de ahí el valor inestimable de este palimpsesto.
"Del Método" es una extensa carta que Arquímedes dirigió a Eratóstenes.
Parece ser que Arquímedes acostumbraba enviar a sus amigos de Alejandría los enunciados de los teoremas que estudiaba, solicitándoles una demostración. Después de un tiempo, y al no recibir respuestas, las enviaba él mismo, terminadas y pulidas, sin hacer ninguna mención acerca del proceso mental empleado que le había permitido llegar al resultado.
Sin embargo, en "Del Método" Arquímedes revela una parte de aquel proceso mental. Éste consistía en la utilización de medios mecánicos para descubrir los teoremas y medios geométricos para probarlos. Al respecto escribió:"Algunas cosas que me resultaron claras por la Mecánica, más tarde hallaron su demostración en la Geometría, ya que su manipuleo por aquel método, no comporta una verdadera demostración. Pues resulta mucho más fácil producir la demostración después de haber obtenido una representación previa de las cosas mediante este método (se refiere al Mecánico), que tratar de inventarla sin este conocimiento anterior". Más adelante Arquímedes agrega: "Como ha ocurrido que el descubrimiento de las proposiciones que expondremos las he obtenido de la misma manera que las anteriores, he deseado divulgar este método por escrito, no sólo porque ya había hablado de él anteriormente y no desearía que se creyera que había hablado en vano, sino porque estoy también convencido de que él ha de aportar una ventaja no pequeña a nuestros estudios. Pienso, en efecto, que con este método, una vez expuesto, podrán encontrarse otras proposiciones que a mí no se me han ocurrido todavía, ya por los presentes investigadores o por los futuros".
En esta obra, Arquímedes explica cómo llegó a descubrir teoremas referidos a áreas, volúmenes, centros de gravedad, etc.
A través del Método puede verse con claridad al verdadero matemático. Arquímedes descubre los resultados con su método mecánico, pero luego ve la necesidad de la justificación geométrica. Al respecto, Abel Rey expresa en "El Apogeo de la Ciencia Técnica Griega": "Empirismo al comienzo, pero lo racional como meta. El empirismo es un medio y no un fin".
El método mecánico consiste básicamente en lo siguiente. Sea X una figura plana o un sólido cuya área o volúmen se busca. Se trata de pesar elementos infinitesimales de X comparándolos con los elementos correspondientes de una figura Y de la que se conoce el área, o el volumen, y el centro de gravedad.
El propósito de Arquímedes consiste en balancear los elementos de X con los elementos de Y instalados "en su sitio" en el otro extremo de la balanza. Conociendo los centros de gravedad de X y de Y y el área de una de ellas, su posición de equilibrio permitirá determinar el área de la otra.
La última parte del preámbulo dice: "Por tanto daré en primer lugar aquello que se me manifestó también en primer lugar por la mecánica, vale decir, que todo segmento de parábola equivale a los cuatro tercios del triángulo de iguales base y altura, y luego otras proposiciones obtenidas por este método. Al final expondré las demostraciones geométricas de los teoremas cuyo enunciado ya te he comunicado".
En la primera proposición, entonces, Arquímedes determina por el método mecánico la cudratura de la parábola, demostración diferente a la realizada en su libro "Cuadratura de la parábola". Para ver tal demostración remitimos al lector a "Historia de las Matemáticas I" por Jean Paul Collette.
Después, Arquímedes agrega: "Ahora bien, lo enunciado no está realmente demostrado por el argumento utilizado; pero este argumento nos ha proporcionado un indicio de que la conclusión es verdadera. Entonces, viendo que el teorema no está demostrado, pero sospechando sin embargo que la conclusión es verdadera, debemos recurrir a la demostración geométrica que yo mismo he descubierto

y que ya he publicado".
Otra determinación mecánica que realiza Arquímedes en "Del Método" es la equivalencia de la esfera con el cuádruplo del cono de base el círculo máximo de la esfera y de altura el radio, y con los dos tercios del cilindro de base el círculo máximo de la esfera y altura el diámetro. A partir de estos resultados, Arquímedes expresa: "Conocida esta propiedad concebí que la esfera en su superficie equivale a cuatro de sus círculos máximos, pues así como todo círculo equivale al triángulo cuya base es igual a la circunferencia y la altura es igual al radio, supuse que toda esfera equivale a un cono cuya base es equivalente a la superficie de la esfera y cuya altura es igual al radio".
Hace luego unas cuantas demostraciones mecánicas más, considerando por último los teoremas referidos a la cubatura de la uña cilíndrica y de la bóveda cilíndrica.
Las consideraciones geométricas y mecánicas que utiliza Arquímedes en "Del Método" encierran en esencia los procedimientos del análisis infinitesimal; esto explica que Arquímedes, con aquellos métodos, haya logrado resultados que hoy se logran con el cálculo integral.

El Arenario

Arquímedes comienza este libro diciendo: "Algunos hombres, mi príncipe Gelón, creen que el número de los granos de arena es de una magnitud ilimitada. No sólo me refiero al número de granos de arena que se hallan en Siracusa, y tampoco a los de Sicilia, sino a la arena de toda la tierra firme, ya sea ésta habitada o no. Hay también quienes no consideran infinitamente grande a este número, sino que opinan que todavía no se ha nombrado uno tan grande que sobrepasara el de los granos de arena. Si estos hombres se imaginaran un montón de arena tan grande como toda la masa de la Tierra, llenándose todos los mares y profundidades de ésta hasta alcanzar la altura de las montañas más altas, entonces con mayor razón pensarán que no se dispone de un número que sobrepase esta cantidad de arena. Pero, si accedes escucharme, oh príncipe, yo trataré de demostrarte mediante procedimientos geométricos, que entre los números mencionados por mí y que se hallan en mis escritos dirigidos a Zeuxipo, hay algunos que no sólo sobrepasan el número de los granos de arena de un montón de ésta cuyo tamaño iguala al de la Tierra, completamente rellenada con arena, tal como lo menciono más arriba, sino también al que representa la arena que ocuparía el universo entero."
El gran interés que despierta este libro radica en la descripción de un nuevo sistema para generar y expresar números muy grandes. Pero además tiene una gran importancia histórica, pues, como indica Heath, es aquí donde uno se entera de que Aristarco de Samos, concebía al universo con el Sol en el centro y los planetas, incluyendo la Tierra, girando a su alrededor, y que había descubierto que el diámetro del Sol es 1/720 del círculo del zodíaco (una apreciación admirablemente aproximada).
Arquímedes adopta esta concepción del Universo de Aristarco, aunque no la comparte. Sin embargo, le es de utilidad, pues este último es mayor que el concebido por la mayoría de los astrónomos de la época, y su intención es demostrar que, aún así, la cantidad de granos de arena que allí entran es finita.
Para hacer sus cálculos, Arquímedes comienza considerando los nombres de los números hasta ese entonces conocidos. Los griegos tenían nombres para los números hasta 10^4 (la miríada o unidad de primer orden), y como una extensión , el número $(10^4)^2= 10^8$.
Arquímedes utiliza este último número 10^8 como base de su sistema de numeración .
Considera después los números del 10^8+1 hasta el $(10^8)^2= 10^{16}$ o unidad de segundo orden. Así va obteniendo las unidades de tercer, cuarto,... orden: 10^{24}, 10^{32},... De este modo completa lo que llama el primer período, y designa como unidad del segundo período el número $(10^8)^{10^8}$ (un uno seguido de 800 millones de ceros). Y así como designó unidades de 1°, 2°, 3°,... orden

a los números del primer período, utiliza idéntica notación para los números del segundo período. La unidad del tercer período es $10^{16.10^8}$, la del cuarto es $10^{24.10^8}$ y así sucesivamente hasta llegar al último número del período de orden 10^8, es decir el número que Arquímedes llamó "diez mil miríadas de números de diez mil miríadas del período diez mil miriadésimo", es decir, $10^{8.10^{16}}$ (la unidad seguida de 80000 billones de ceros).

Una vez establecido este sistema de numeración, Arquímedes dice haber comprobado experimentalmente que un grano de arena es la diez milésima parte de un grano de una semilla de amapola, de las cuales cuarenta caben, a su vez, en el ancho de un dedo.

A continuación va calculando y designando el número de granos de arena que, a lo sumo, contienen esferas de diámetros cada vez mayores: de cien dedos, diez mil dedos (es decir, de un estadio), de cien estadios, diez mil estadios, de cien miríadas de estadios (es decir, la Tierra), de diez mil miríadas de estadios y de cien miríadas de miríadas (es decir, del Universo concebido por los astrónomos), encontrando para esta esfera que el número de granos que la llenaría sería inferior a 10^{51}. Y para el Universo de Aristarco encuentra que ese número es 10^{63}.

Finalmente, Arquímedes termina el Arenario con estas palabras: "Concibo ¡oh, rey Gelón!, que estas cosas parezcan increíbles a la mayoría de aquellos para los cuales no les es familiar la matemática, pero aquellos que están versados en ella y que han reflexionado sobre las distancias y magnitudes de la Tierra, del Sol y del mundo entero, aceptarán mis demostraciones. Y es por esta razón que he creído que no estaba demás que tú también las conocieras."

El Stomachion

El Stomachion es un juego geométrico, especie de puzzle, formado por catorce piezas poligonales que completan una cavidad rectangular. Los gramáticos latinos denominaron a este juego: *loculus Archimedius*.

El interés de este rompecabezas reside en el hecho de que Arquímedes puso como condición en la construcción de las piezas que todas fueran conmensurables entre sí.

De modo que el Stomachion indica de qué modo podía dividirse aquella cavidad rectangular en catorce polígonos: 11 triángulos, 2 cuadriláteros y 1 pentágono.

El Libro de los Lemas

Es una colección de proposiciones de geometría plana, sin mucha conexión, que sólo se conoce a través de una versión árabe atribuida a Arquímedes, atribución bastante dudosa.

Consta de 15 proposiciones, algunas muy elementales, pero hay otras con más originalidad.

Ejemplo de éstas son las referidas a las áreas de ciertas figuras curvilíneas: el *arbelon* (cuchilla de zapatero) y el *salinon* (salero), llamadas así a causa de sus formas.

El Problema de los bueyes

Es un difícil problema de Teoría de números, que se conoce a través de un epigrama que Arquímedes enviara a Eratóstenes.

El problema alude al pasaje homérico: "Llegarás más tarde a la isla de Trinacria, donde pacen las muchas vacas y pingües ovejas al sol. Siete son las vacadas, otras tantas las hermosas greyes de ovejas, y cada una está formada por cincuenta cabezas".

El enunciado de Arquímedes era el siguiente: "Amigo, si eres sabio en repartir, calcula con cuidado a qué número se elevaba la cantidad de bueyes del sol que una vez pacían en las llanuras de la siciliana isla Trinacria, repartidos en cuatro manadas de colores distintos: una blanca como la leche, otra de un negro reluciente, una tercera oscura y la cuarta manchada. En cada manada había un número considerable de toros repartidos de la siguiente manera: imagina, amigo mío, que los blancos eran en igual número que la mitad más un tercio de los negros más todos los oscuros, mientras que los negros eran un número igual a la cuarta más la quinta parte de los manchados más todos los oscuros. Considera, por otra parte, que los manchados restantes eran un número igual a la sexta más la séptima parte de los blancos más todos los oscuros. Las vacas estaban repartidas de la manera siguiente: las blancas eran un número precisamente igual a la tercera más la cuarta parte de toda la manada negra, mientras que las negras eran nuevamente un número igual a la cuarta más la quinta parte de las manchadas que habían venido a pacer junto con los toros; las manchadas, por su parte, eran un número igual a la quinta más la sexta parte de toda la manada oscura, mientras que las oscuras eran un número igual a la mitad de la tercera parte más la séptima parte de la manada blanca".

Se trata de un problema de análisis indeterminado de primer grado, dado por un sistema de siete ecuaciones con ocho incógnitas. En las soluciones se llega a números enormes del tipo de los del Arenario, que como mínimo dan para el total de bueyes una cifra que supera los cincuenta millones.

Sin embargo, el problema no termina aquí: "Amigo, si me dices exactamente cuántos eran los bueyes del Sol, y en particular cuál era el número de los toros y el de las vacas para cada color, no se te podrá calificar de ignorante ni de inhábil en el manejo de los números pero, no obstante, no podrás aún contarte entre los sabios. Pues atiende otras relaciones que mantenían entre sí los bueyes del Sol: cuando los toros blancos se unían totalmente a los negros, formaban un grupo compacto de igual profundidad que ancho, y ese cuadrado llenaba enteramente las inmensas llanuras de Trinacria."

Pero Arquímedes aún prosigue: "Por otra parte, reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban de tal manera que ellos formaban gradualmente un número triangular. Amigo, si tú encuentras bien todas estas cosas, en una palabra, si concentrando tu espíritu expresas los números correspondientes a esas manadas, puedes vanagloriarte de haber conquistado la victoria y estar convencido de ser juzgado totalmente hábil en esta ciencia."

De este modo, la solución mínima final para el total de bueyes del Sol es un número de más de 200 mil cifras.

No se conoce ninguna solución dada por Arquímedes. Es probable que no la haya encontrado, no por lo complejo que para él podría haber resultado el problema sino por la enorme extensión de las cantidades de los bueyes.

Arquímedes, quizá el más grande de los matemáticos de todos los tiempos, con inusitada genialidad, se valió de todos los procedimientos técnicos que otros habían desdeñado: lo infinito, las construcciones mecánicas, los problemas de cálculo práctico, para hallar sus resultados. Aunque una vez hallados, aplicó todo el rigor griego para su demostración final.

Pero, para apreciar la inagotable obra de Arquímedes, como dice Colerus, "hubieron de transcurrir casi dieciocho siglos para que el espíritu fáustico de los pueblos occidentales pudiera ajustar el eslabón allí donde el soldado romano, en su ciego furor, había destruido los círculos del titán".

Andrea Morales (1)
Claudio Salpeter (2)

(1) Alumna de 2° año del I.S.P. "Joaquín V. González"
(2) Alumno de 4° año del I.S.P. "Joaquín V. González"

Bibliografía:

* BABINI, JOSE - *Arquímedes* - Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1948.
* COLERUS, EGMONT - *Historia de la Matemática* - Buenos Aires, Progreso y cultura, 1943.
* COLLETTE, JEAN-PAUL, *Historia de la Matemática* - México, Siglo XXI, 1985.
* GAMOW, GEORGE - *Biografía de la Física* - Madrid, Alianza Editorial, 1980.
* NEWMAN, JAMES R. - *Sigma El Mundo de las Matemáticas* - Barcelona, Grijalbo,1994.
* REY, ABEL - *El apogeo de la ciencia técnica griega* - México, UTEHA, 1962.
* REY PASTOR, J. - BABINI, JOSE - *Historia de la matemática (vol. 1.)* - Barcelona, Gedisa, 1985.

Entrevista a Norberto Fava

A través de esta nota queremos exponer algunos pensamientos de un conocido matemático argentino respecto de ciertas cuestiones que creemos puedan ser de interés: el Dr. Norberto Fava.
Actualmente profesor en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la U.B.A., nos concedió gentilmente una entrevista en su casa que a continuación transcribimos.

¿Dónde realizó sus estudios?

Estudié un año en el profesorado Joaquín V. González, que en aquellos años estaba en la calle José Hernández. Ocupaba el edificio que había pertenecido a un colegio alemán que fue expropiado, supongo, al terminar la segunda guerra mundial. En aquella época yo vivía en La Boca. Me levantaba muy temprano para ir al profesorado, que funcionaba de mañana, y después me iba a trabajar a una editorial. Es muy complicado estudiar bien en esas condiciones.
En esos años permanecía enseñando en el profesorado una profesora que recuerdo con mucho cariño, la Srta. Oliván, profesora de Filosofía. Hasta hace poco sé que estuvo enseñando. Sus clases eran excelentes. También estaba la Dra. Repetto enseñando Análisis. Había un profesor, Taiglioretti, que enseñaba Trigonometría, que en ese momento era una materia del plan de estudio. En Geometría Métrica recuerdo al profesor Gerónimo Martín.
En aquel entonces, gracias a unos compañeros del secundario que estudiaban en Exactas, llevé al profesorado a un profesor de esa facultad a dar una charla un sábado a la mañana. Lamentablemente ese contacto sólo fue fructífero para mí pues, que yo sepa, no siguió manteniéndose.
Estos mismos compañeros del secundario hablaron con Manuel Sadosky y gracias a él obtuve una beca de la Fundación A. Einstein para estudiar en Exactas. Ya becado fue muy diferente. Becas para estudiantes ahora hay pocas. Había un grupo de industriales argentinos que aportaban sumas importantes para que se distribuyeran estas becas entre todas las especialidades; había gente de Matemática, Física, Química, que las recibían. Era una gran obra, porque a muchos buenos estudiantes que tenían la necesidad de trabajar y entonces hubieran visto muy limitado su tiempo de estudio, les permitió ponerse en igualdad de condiciones con otra gente que tenía medios económicos más holgados. Esa etapa fue muy brillante en la facultad; después cambió mucho.
De esta manera ingresé a Exactas en el '58, no sin vacilaciones. En aquel momento no estaba convencido de ninguna disciplina en particular; había elegido Física, había seguido Ingeniería; estaba, como quien dice, buscando. Esto le pasa a muchos chicos, sólo que, desgraciadamente, muchos de ellos no tienen la oportunidad de equivocarse y seguir buscando, como se me dio a mí.
Es raro que un joven se interese de entrada por Matemáticas. A mis alumnos de Análisis II les digo: si un muchacho joven se interesa de entrada por las matemáticas, desconfío de su inteligencia, o por lo menos, de su amplitud de criterio. Cuando uno es joven se interesa por todo el universo, después ve que le queda grande, que es demasiado; pero de eso, tarda en darse cuenta. Si el estudiante secundario va a un buen cole-

gio que tiene buenos profesores, su inquietud es amplia, lo abarca todo. Después, al ver que es demasiado, empieza a restringir y por restricciones sucesivas se llega a Matemática, e incluso a un área de Matemática, según el conocido procedimiento de saber cada vez más de menos cosas, llegando al límite de saber todo de nada.

Me recibí en Exactas de Licenciado en Cs. Matemáticas, después de haber egresado del colegio Nacional Nicolás Avellaneda. Menciono el Nacional porque mucha gente que después siguió Matemática, Física, Química, egresó de allí. Fue una experiencia muy exitosa para mi gusto, porque el Avellaneda era un bachillerato especializado. La especialidad llegaba recién en 4° y 5° año; los tres primeros años eran comunes a todos. Elegir una especialidad no implicaba olvidar todo lo demás, al contrario, había compañeros míos que tenían una gran inquietud literaria. Además, los turnos funcionaban en distintas aulas y estábamos todos en contacto; por ejemplo, teníamos estrecha amistad con algunos chicos de Biología; algunas amistades han perdurado, muchos de ellos se hicieron médicos.

El colegio tenía un laboratorio de Física y de Química, que tal vez, comparado con el de otros lugares, era buenísimo. Las máquinas y aparatos funcionaban, aunque no todos, porque ya había empezado la decadencia que después se profundizó.

¿Cómo describiría la actividad que realiza un investigador?

Habitualmente cuando una persona termina la licenciatura, generalmente elige un director de tesis por afinidad con el tema. El director le da a leer los trabajos que se encaminan hacia aquello que él está haciendo en ese momento; a veces monografías, libros, trabajos científicos que se suelen publicar en revistas.

El director de tesis sabe que hay un problema en el área, un tema no resuelto, algún aspecto que vale la pena aclarar, y oportunamente, cuando ve que el discípulo va progresando le muestra ese tema, le dice: "Mire, está este problema". Algunas veces el director de tesis tiene idea de cómo se puede atacar el problema y eventualmente resolverlo, otras no. A veces no tiene idea del grado de dificultad. A mí me ha pasado, proponerles a dos personas temas que yo no había atacado, cuyo grado de dificultad no conocía. Tuve mucha suerte, pues esas personas eran muy inteligentes e hicieron sus tesis. Este es el inicio, después la persona sigue y eventualmente va descubriendo otros temas que le interesan. A veces cambia de especialidad, otras persiste. Cuando la línea es muy importante, vale la pena persistir en ese camino toda una vida.

Investigadores que abran rumbos importantes hay muy pocos, hay gente que abre rumbos y otros que siguen esos rumbos. Los investigadores que abren rumbos valen por cien o por mil de los otros. En nuestro país hemos tenido ejemplos muy notables. Santaló es uno de los creadores de una rama de la geometría que es la geometría integral.

Otro investigador que ha abierto rumbos es Calderón, con las integrales singulares, y hay ahora un investigador joven que se llama Caffarelli que ha abierto un rumbo muy importante en ecuaciones diferenciales, que es un tema que yo conozco menos. Posiblemente con el correr de los años se convierta en el matemático argentino más renombrado. Ya es muy renombrado; es miembro del Instituto de Estudios Avanzados, en Princeton. Hizo la tesis con Calixto Calderón. Ahí tienen un ejemplo de un joven que hace la tesis en un área, después cambia y elije un área nueva. Las integrales singulares es un tema que ha sido tan rico que todavía se sigue investigando en Exactas.

El Análisis Armónico tiene una conección muy estrecha con las integrales singulares. Las primeras investigaciones han sido de Hilbert, después de Riesz, pero luego no se hizo nada importante hasta que Calderón y Zygmund mostraron que el tema se podía estudiar en R^n, con una perspectiva completamente nueva, abriendo un rumbo extraordinario. Es de destacar la huella que los matemáticos argentinos dejan en temas importantísimos y aquí se ignora completamente. Si hubiera premio Nobel en Matemática Calderón tendría uno y probablemente Caffarelli otro.

¿Cómo "combina" su actividad de matemático con la de capacitador docente?

Yo no soy principalmente un investigador. Soy un profesor de Matemática, que ha hecho y hace investigación esporádicamente. Hay gente que hace investigación en forma mucho más intensa.
Se supone que ambas actividades deben ir unidas, toda la estructura de la universidad está basada en eso. Lo que tal vez en nuestras universidades no hay, es suficiente experiencia de cómo se controla eso y en qué medida. Se entiende que todo docente tiene que hacer investigación y todo investigador hacer docencia. El profesor universitario tiene que haber contribuido, en la medida de sus posibilidades, en el avance del conocimiento científico en alguna disciplina.

¿Hay muchos investigadores en Exactas que tengan que dedicarse a la docencia por necesidad?

Todos; que yo sepa, todos. En especial en Matemática. Por ahí un físico puede trabajar en investigación en un instituto. En matemática se puede hacer eso, hay personas que ocasionalmente o por períodos largos consiguen concentrar toda su tarea en la investigación, con muy baja carga docente. Hasta se habla de carga docente. Los que ven la investigación como cosa esencialmente importante, a veces caen en el extremo de ver a la docencia como una carga molesta. Por ejemplo, tenía un amigo que tenía esa visión y en broma había construido un lema. Decía: "Hacia una universidad sin clases". Hay muchas formas de docencia. Está la gente que da cursos, pero es también docencia un tipo que le está abriendo un panorama indicándole lecturas adecuadas en una etapa ya más avanzada; éstos en Estados Unidos se llaman Reading Courses (cursos de lectura), donde el profesor le dice: mire, le voy a indicar una serie de lecturas sobre un tema y Ud. va a venir a contarme lo que leyó y qué problemas resolvió. Esos son cursos avanzados, donde el profesor no da ninguna clase, simplemente sirve de guía para que el otro lea y se vaya informando.

¿Son cursos de post-grado?

Son habitualmente cursos de post-grado y muy libres en posibilidades; es decir, menos sujetos a todo lo que se trata de programa, plan de estudios.

¿Qué opina sobre la relación entre los profesores de matemática y los matemáticos?

Sería conveniente que hubiera una relación un poco más cercana. Que el profesor viera más de cerca el quehacer de los matemáticos; incluso, si lo desea, que participe de la investigación.
Weierstrass, uno de los más grandes matemáticos del siglo pasado, era profesor de escuela media.
De manera que no hay ningún motivo para suponer que un profesor secundario no pueda participar de una tarea de investigación. Ahora, esto no es normalmente exigible a un profesor secundario. Quiero aclarar que todo lo que yo digo de la investigación proviene de una persona que no vuelca en ella todo su esfuerzo; hay gente que se dedica a la investigación mucho más que yo. Creo, a fuerza de oír, de ver, de experimentar, que están muy intensamente ligadas. En alguna etapa, en algún momento, la persona que ha ido estudiando un tema tiene que probar sus propias fuerzas y es en la investigación. En algunos países la investigación cumple una tarea de ensamble con la sociedad. En nuestro medio, la investigación sirve en gran medida para la satisfacción personal. Si un individuo estudia Matemáticas y nunca exhibe el resultado de su labor en ningún aspecto, sería como un pintor potencial que nunca hubiera pintado ningún cuadro, que en una de esas tiene la habilidad de Miguel

Angel pero uno no sabe porque nunca ha visto un cuadro.

Nosotros tenemos la sensación de que no existe relación entre los matemáticos y los profesores

Puede cambiar la "sensación" por la "realidad": no existe.

¿Por qué?

Ud. me pregunta por qué. Bueno, puede ser una culpa compartida. Es posible que algunos investigadores hayan tenido una actitud soberbia o arrogante (cuando ocurre una cosa así prefiero empezar por la parte que puede caberle a uno). Por el lado de los profesores hay una actitud defensiva, como de temor a abrirse al intercambio de experiencias. En algunos casos el temor es fundado: existen investigadores que menosprecian la docencia; pero se ha exagerado mucho sobre la base de casos más bien excepcionales.
A veces es preferible arriesgarse a encontrar un individuo difícil de tratar, en lugar de cerrarse a toda posibilidad de comunicación y decir: con toda esa gente, absolutamente con toda, no tengo nada en común. Porque hay un número muy apreciable de personas con las que sí es posible conversar provechosamente y obtener una información útil.
En cualquier ambiente se encuentran personas de trato difícil; pero no son la mayoría sino al contrario. De hecho, en el Profesorado tengo amigos con los que puedo hablar de Matemática. Ello es importante para mí, porque de la enseñanza vienen muchas ideas interesantes, aún de los temas más elementales, de manera que sería muy rica esa conección que, sin embargo, no llega a establecerse, porque es como si hubiera un temor recíproco.
Entre los investigadores se encuentran personas que saben en qué medida (a qué ritmo) es posible ir modernizando la enseñanza. Si usted habla con cualquiera, por ahí se encuentra con un individuo que quiere cambiarle todo al mismo tiempo: contenido y métodos. Me parece un disparate. Sin embargo, el afán innovador es un componente importante para la calidad de la enseñanza.
En un curso secundario o universitario (no hago en este aspecto ninguna diferencia) sería muy malo enseñar lo mismo año tras año. También sería mala la inestabilidad más absoluta, que consistiría en variar bruscamente todos los contenidos.
Me parece que un profesor va evolucionando al ritmo de lo que enseña, aunque le toque dar el mismo curso.
Va cambiando año a año; yo he visto gente que ha dado una materia muchos años y va evolucionando junto con ella, va cambiando su punto de vista, lo va mejorando, lo va adaptando a la posibilidad de los estudiantes y sobre todo a medida que él mismo va aprendiendo un tema. Porque cuando Ud. enseña un tema durante muchos años lo va sabiendo cada vez más profundamente y es natural que quiera que sus estudiantes lo sepan más profundamente. Pero también, yo creo, que con una limitación: nadie puede aprender todas las sutilezas de un tema en un plazo breve, pero Ud. se las ingenia para que en esos tres meses que dura el curso, entre cada vez más sin que se note, sin que se note mucho. Entonces, a un profesor que deja estática su enseñanza durante mucho tiempo yo le tendría miedo, y he visto algunos casos así.

¿Hay algún tema de la enseñanza secundaria que a Ud. le guste dar en particular?

Sí, sí. La introducción al Análisis, Probabilidades y Estadística. Me ha tocado dar Probabilidades pensando en la enseñanza secundaria; hace unos cuatrimestres en Cs. Exactas he dado Probabilidades discretas, donde todo el tiempo trabajamos en espacios finitos o numerables, que son los que más inmediatamente pueden enseñarse en la escuela media, porque no tienen grandes recursos técnicos. Este cuatrimestre escribí un librito sobre el tema. Sí, hay temas de la enseñanza secundaria que me interesan mucho; la Geometría es un viejo amor no correspondido. La Geometría no va al primario porque el maestro no sabe qué es importante. Para enseñar hay que saber, saber mucho más (para saber qué es importante) y saber cómo sigue la cosa (para saber a qué apunto).

No hay nada que permita decir a priori que un alumno será un investigador o un profesor. A veces la realidad se encarga de mostrar que es al revés; depende de cada persona, sólo necesita la ocasión, alguien que le muestre el panorama para que uno se lance con entusiasmo. Incluso a veces una investigación o un tema de estudio que le entusiasme mucho a una persona es un elemento motivador. Gentile decía que se habla mucho en la universidad de investigación y poco de estudio, ese es un defecto que está produciendo la universidad, ¿qué quería decir Gentile? Ud. se recibe de licenciado, todavía inmaduro, le dan una beca, en un año tiene que exhibir resultados, entonces ¿qué hace el tipo? Generalmente va a producir un resultado sobre un tema que no sabe con qué se conecta. En el mejor de los casos lo sabe el director de tesis, sabe a dónde apunta eso; ese es un defecto. No todo es dorado en este mundo, ese es un defecto que habría que corregir, yo creo que Gentile lo señaló muy bien, dijo que se dan becas de investigación y no becas de estudio; y poner a un joven licenciado en la obligación de producir resultados en un año es un disparate. Cuando en realidad ha avanzado tanto el conocimiento, que dos o tres años requiere el ponerse en onda en un tema que valga la pena, a menos que sea una pavada. Porque ¿qué es un tema de investigación? Esencialmente es un tema nuevo. Lo ideal sería que un tema de investigación, además, tenga importancia. Ese ideal es difícil de alcanzar, nos quedamos con lo nuevo, que no siempre es bueno.

Ese es un defecto, en todas partes hay cosas para mejorar; no sólo en el profesorado, en la universidad también.

¿Cómo puede implementarse la posibilidad de que los profesores del profesorado se dediquen a investigar?

Yo diría por contacto directo con gente que investigue, no hay otra forma. Salvo que el candidato esté dotado tan especialmente, que le baste leer un libro de Historia de la Matemática, enterarse de que existe un problema y por sí mismo desarrollar las técnicas necesarias para resolverlo. Eso, es claro, no es nada fácil. Estaba muy bien en los tiempos heroicos de la ciencia. La Física estaba tan en sus comienzos que un observador como Galileo, estudiante de Medicina, podía ir extrayendo leyes naturales; ahora las leyes están muy lejos. Descubrir nuevas cosas requiere un entrenamiento y una disciplina muy grande. Yo diría que ese contacto con gente que investigue probablemente sea el estímulo principal pero no el único; posiblemente también las lecturas por cuenta propia. Por ahí una persona puede llegar a descubrir cosas que hace 200 años que existen. No me voy a olvidar nunca de un carpintero que una vez se acercó al Departamento de Matemática. El hombre había clasificado los números en generaciones. El llamaba generaciones a las sucesivas potencias de dos; dos era la primera generación, cuatro era la segunda generación, y ponía a cada número entre generaciones sucesivas. Entonces, había extraído unas reglas que eran así: para multiplicar los números se suman las generaciones; para elevar un número a una potencia se multiplica la potencia por la generacion del número. Había descubierto los *logaritmos*; era un hombre de sesenta y pico de años. Me acuerdo las manos de ese hombre, se veía que era un trabajador...

¿Cómo ve usted el perfil de un profesor, cómo debería ser?

El primero de los ingredientes es el entusiasmo, como tenía nuestro profesor de Física. Da la casualidad que esas personas nunca tienen problemas de disciplina, ¿será casualidad? Me acuerdo todos los tipos que tenían problemas de disciplina. ¿Cuál era el problema?: que no sabían lo que estaban enseñando, y se les notaba.

Los alumnos advierten enseguida que pueden aprender con provecho de un profesor que sepa de qué está hablando y para qué sirve, con la condición de que el profesor tenga un mínimo de carácter y sepa comprender las inquietudes de los jóvenes. Bajo esas condiciones los problemas de disciplina son raros, salvo en circunstancias especiales, que por desdicha existen, y que deberíamos analizar con la ayuda de especialistas que vean con más claridad que nosotros las posibles causas de comportamientos irregulares. Así, cuando el profesor no reúne aquellas condiciones mínimas, el problema se vuelve irresoluble.

Siempre habrá un 10 o un 20 por ciento de la clase que prefiera entretenerse en otras cosas; pero también habrá un porcentaje de chicos en condiciones de interesarse por lo que el profesor sea capaz de ofrecer.

A pesar de preferencia por las disciplinas científicas, recuerdo con afecto a los profesores de Historia o Instrucción Cívica de la escuela secundaria que conocían su materia y conseguían hacerla interesante.

Nuestro profesor de Química del Colegio Avellaneda (hace de esto unos cuantos años), el Dr. Landeira, bioquímico de profesión, jamás tuvo un problema de disciplina, como no fuera un incidente casual que aún recuerdo, acaso provocado por el mismo excesivo respeto que inspiraba a sus alumnos.

Landeira tenía aspecto de viejo sabio: la frente amplísima, la mandíbula prominente, usaba bastón (por un defecto en una de sus piernas) y llevaba sobretodo en plena primavera. De manera que a nuestros ojos se aparecía como un hombre excéntrico, escéptico y acaso amargado por alguna circunstancia familiar, que era motivo de conjeturas entre sus alumnos, aunque no era en absoluto ridículo, sino todo lo contrario.

Era tal su conocimiento del tema que debía enseñarnos y sus clases tan buenas, que todo aquello quedaba relegado a un segundo o a un tercer plano. Sin embargo, tomaba las lecciones sin haberlas explicado previamente. Los alumnos debían leer el tema por su cuenta y responder por su lectura.

En el bolsillo del sobretodo traía la libreta de calificaciones y en un papelito, dentro de ella, el nombre de los alumnos que debían pasar al frente ese día. Entonces le pedía al alumno que comenzara a explicar lo que había leído, mientras él, con largas interrupciones, iba explicando el sentido de la reacción química de que se tratara y los fenómenos que se explicaban por esa reacción. A veces la lección se acompañaba por la realización del correspondiente experimento en el gabinete de Química que tenía el Colegio.

Hablo con detalle de esos recuerdos que acuden a mi memoria por un motivo especial: ningún pedagogo aprobaría el método didáctico del profesor Landeira, que acaso no le daría un buen resultado a nadie que no fuera él. Me imagino que el método de Landeira sería anatema en cualquier tratado de Didáctica antiguo o moderno. Sin embargo, y esa es la clave, sentíamos que estábamos aprendiendo algo valioso.

En ocasiones hablaba de Literatura. Gracias a él comencé a leer algunos autores que me han acompañado a lo largo de mi vida. El profesor de Química nos entusiasmaba por la Literatura, incluso más que el profesor de esta asignatura. El comentaba a ciertos autores y sus obras (recuerdo, por ejemplo, Anatole France) y, claro, a uno en la adolescencia le quedan esos nombres y por ahí da con un libro de ese autor en una librería y lo compra.

¿No podríamos analizar en este ejemplo la importancia que tiene la personalidad del profesor y su compromiso intelectual con la disciplina que enseña? Si el compromiso del que hablo no es sincero, los alumnos lo advertirán inmediatamente; y entonces no habrá método didáctico capaz de evitar el fracaso.

Tratemos de pensar, aunque sólo sea para sonreir, cómo se aplicaría el método de Landeira en una clase de Matemática; digamos por ejemplo el Teorema de

Pitágoras. Es como si usted le dijera a sus alumnos: estudie el Teorema de Pitágoras de tal o cual libro; luego venga y recíteme lo que dice el teorema y la demostración que aprendió. Por mi parte, yo le haré ver con muchos ejemplos para qué sirve ese teorema.
Si usted sabe para qué sirve el teorema y lo que significa en distintos contextos que van de la Geometría Elemental a los Espacios de Hilbert, le va a dar la importancia que tiene y procurará demostrarlo varias veces y con distintos enfoques (ver recuadro al final). *Al fin y al cabo* -ha escrito Zygmund- *todos aprendemos por repetición* y este principio didáctico de simple sentido común debería aplicarse a los conocimientos más importantes.

Creo que una de las fallas grandes que hay ahora, por lo menos en el profesorado, es que uno sale sin saber muchas cosas, ni siquiera sospecharlas. Hay muchos contenidos que ni se los nombraron jamás. Y bueno, llevado eso al secundario...

Ese mal no es exclusivo del Profesorado. El ambiente que observé allí cuando ustedes me invitaron a dar una charla sobre "Diámetros y Cápsulas Convexas" (me parece que así se llamaba el tema) me sorprendió muy agradablemente. Había una concurrencia muy nutrida y una atmósfera de entusiasmo -tal vez simple curiosidad- que en este momento no parece abundar en nuestra Facultad de Cs. Exactas. Me gustaría saber qué ocurriría si usted convocara a los alumnos de Matemática de esa facultad para una conferencia un día sábado por la mañana (algunos irían aún más lejos y dirían, para cualquier otro día). Resumiendo, el clima que observé entre los concurrentes a aquella conferencia me pareció estimulante.

Pero ¿en cuanto a qué?

En cuanto al interés que manifestaron los asistentes, aunque es natural creer que no todos lo sentirían de la misma manera. Esa atmósfera me recordó por un instante los viejos tiempos de nuestra Facultad. El hecho de que ustedes estén aquí haciendo estas preguntas es un indicio de que no estoy tan equivocado en mi apreciación.
De todos modos, algo negativo ha ocurrido en nuestras instituciones educativas que hacen que la gente aparezca un poco descorazonada. Es un mal social y por consiguiente es posible que en alguna medida también ustedes lo padezcan.
Sí es una lástima que el Profesorado no pueda aprovechar en plenitud todos los recursos que aún nos quedan. Piense usted que el Profesorado aprovechó en su momento la presencia de Rey Pastor en nuestro país, que era lo mejor que podía tenerse. ¿Qué pasó después?
Aunque parezca absurdo, me resulta más fácil diagnosticar el mal del Profesorado que el que con seguridad estamos padeciendo nosotros en la Facultad de Ciencias. ¿Qué es lo que anda mal en el Profesorado desde hace tanto tiempo?
Aquel año en que fui alumno (1956-1957) me dejó una impresión poco alentadora por la cual me fui. Teníamos en Análisis a una profesora muy famosa pero que había conseguido anquilosar la materia que parecía muerta. Cuando fui a Exactas, Análisis I la daba Sadosky, y era otra cosa: con problemas interesantes, moldeable, vivificante.
Me di cuenta de que había un enfoque diferente, mucho más flexible, que daba lugar a aprender con profundidad.
En cambio recuerdo lo bien que se daba Geometría Métrica en el Profesorado, que ha sido siempre una excelente tradición del Instituto. Pero las otras materias que recuerdo no alcanzaban el mismo nivel de interés, con la excepción de Filosofía. Lo que más me impresionaba era la cerrazón ambiental.
Bueno, una forma de abrirse es tener contacto con las revistas que se publican en nuestro país y en otras partes del mundo donde los artículos que se publican, nos guste o no, han alcanzado un nivel superior. Por ejemplo, ¿qué revistas reciben actualmente?

Ninguna.

Hay revistas dedicadas a las Matemáticas Elementales y también a temas de Didáctica, de las que pueden extraerse algunas ideas interesantes y que ayudan a mantenerse actualizado. Algunas se publican en los Estados Unidos, otras muy buenas en Brasil y Chile. Nosotros tenemos la revista de la U.M.A., y ustedes están publicando AXIOMA. La revista de la U.M.A. no ha alcanzado todavía la calidad material que merece y que puede observarse en las revistas de Brasil y Chile que he mencionado.
También en España se publican revistas especializadas en temas de enseñanza de la Matemática: una, la revista "Thales" de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática; otra, la revista "Números" de la Sociedad Canaria Isaac Newton.
También en México se publica una buena revista: "Educación Matemática", del Grupo Editorial Iberoamérica.

Una de las trabas, en el secundario, es que como el tiempo es muy limitado no sabemos a qué darle prioridad: si al hecho de hacer matemática o a dar contenidos.

A ver, déjeme pensar. Santaló tiene la respuesta a lo que Ud. acaba de plantear: "todo junto".
Uno aprende, no a mover primero los brazos y después las piernas, cuando es chiquito mueve todo junto y después va coordinando. Contenidos y formación vienen juntos, se adquiere la formación con determinado contenido. El hecho de decir: sólo voy a enseñar contenidos o sólo voy a dar formación son dos exageraciones. La gente que dice: el contenido no importa, yo le voy a dar problemas a los chicos para que los resuelvan y adquieran formación, está menoscabando la Matemática y está menospreciando una parte muy importante. La Matemática es para algo, ese algo es lo que la distingue del ajedrez. Ser un buen ajedrecista es tan difícil como ser un buen matemático, quizás sea más difícil. Sin embargo, la conexión de cualquiera de las dos actividades con los otros aspectos de la cultura es muy diferente. No hay la misma relación entre ajedrez y cultura que entre matemática y cultura. Hay relación; ojo, el ajedrez se relaciona con la cultura, la matemática se relaciona más, se relaciona con el mundo, si uno lo sabe ver. Entonces, ni enseñar contenidos exclusivamente, ni formar exclusivamente, no debe haber antagonismo, las dos cosas son importantes. Elegir los contenidos para la formación y llevar los problemas en torno a los contenidos. Ahora está muy de moda la enseñanza a través de problemas (Problem solving). Eso es más antiguo que caminar. ¡Por Dios, qué hemos inventado! Lo mismo que las olimpíadas; las olimpíadas son históricas, es decir, tenemos los desafíos matemáticos del renacimiento. Hay desafíos anteriores aún. En cualquier libro de historia se muestran desafíos en la antigüedad, de manera que no estamos inventando nada. Lo conveniente es, todas esas actividades, saber matizarlas adecuadamente con las circunstancias; no es fácil eso. A veces uno se da cuenta de que ha malogrado un curso por no saber matizar adecuadamente el contenido y la actividad. A mí se me han malogrado muchísmos cursos. Cuando uno ve que la actividad desarrollada hasta la mitad del curso no ha sido tan provechosa como esperaba es muy difícil recuperar el curso. ¿Sabe cuándo se malogra muchas veces un curso? Me pasó con los cursos de probabilidades para profesores, cuando Ud. empieza a sentir que sus alumnos no valen la pena, o cuando los alumnos sienten que el profesor no vale la pena. Porque aunque Ud. se esfuerce en ser cortés y no agredirlos, yo creo que el tono de la voz delata el sentimiento. En ese caso el curso está malogrado. Lo ideal sería que uno tuviera una relación de comunión. He malogrado muchos cursos, pero en algunos he tenido notable éxito. Mi mayor orgullo es haber tenido algunos alumnos de Análisis Real, de San Luis y de aquí de Buenos Aires, que han llegado a ser excelentes matemáticos. Han llegado a un nivel que yo no hubiera podido ni soñar para mí; puedo decir en mi defensa que por lo menos no

malogré a esos jóvenes. Quién sabe no se hubieran malogrado de ninguna manera, algunos son tan buenos...

Qué es más importante para una sociedad: tener diez, veinte, treinta matemáticos excepcionales o tener una mejor educación matemática para la mayoría.

Es muy interesante la pregunta. He pensado en ello y hasta tengo una comparación que llamo orográfico-científica. Hay países como España, que no poseen en su territorio picos tan altos como los que se encuentran en la Argentina, y sin embargo, son países montañosos. Por el contrario, nuestro país, que exhibe en su orografía algunos de los picos más elevados del planeta, es un país llano. Porque lo que cuenta es la altitud promedio.

Pues bien; con el nivel científico de una sociedad ocurre exactamente lo mismo. Y los beneficios económicos que la Ciencia puede acarrear a la sociedad dependen tanto del promedio como de los hombres más destacados.

Otro ejemplo, en Centroamérica, paises con alto nivel de analfabetismo han dado al mundo algunos de los mejores escritores de nuestra lengua. El problema de la educación es conseguir que toda sociedad pueda beneficiarse con el trabajo de esos hombres extraordinarios.

En los países desarrollados las empresas prefieren tomar empleados con un alto nivel de educación, incluso para un trabajo de vendedor. La propaganda educativa tiende a desarrollar en la población la conciencia de que para conseguir un buen empleo se necesita una buena educación.

¿Qué opina de los nuevos proyectos educativos de la ley Federal?

Los cambios profundos en educación se logran mejorando la calidad de los maestros y los profesores. Comparativamente, los demás cambios son superficiales; allí es donde se encuentra el verdadero desafío.

Desde ese punto de vista, la remodelación de los estudios primarios para conformar etapas diferentes y extender la escolaridad es importante; pero la base de un verdadero cambio no puede residir sólo en ello.

El sueldo del docente es una muestra clara de en qué medida la sociedad le da importancia a la educación de los jóvenes que, más tarde o más tempano, tendrán en sus manos el timón del barco. Por su parte, los docentes deberían mostrar que, además del problema salarial, también les preocupa el sentido social de su labor.

Pero hay un hecho indisimulable: de nada sirve que la sociedad le diga al docente que su labor es "sagrada", una especie de "sacerdocio" si a la hora de la verdad sólo le concede un salario de subsistencia. Frente a esa realidad, aquellas palabras grandilocuentes pueden sonar como un sarcasmo.

¿Cuántos dirigentes de nuestra sociedad siguen creyendo en el fondo de su corazón, aunque declaren cada día todo lo contrario, que la educación es un lujo que podremos darnos cuando nuestra economía se recupere de las dificultades que atraviesa?

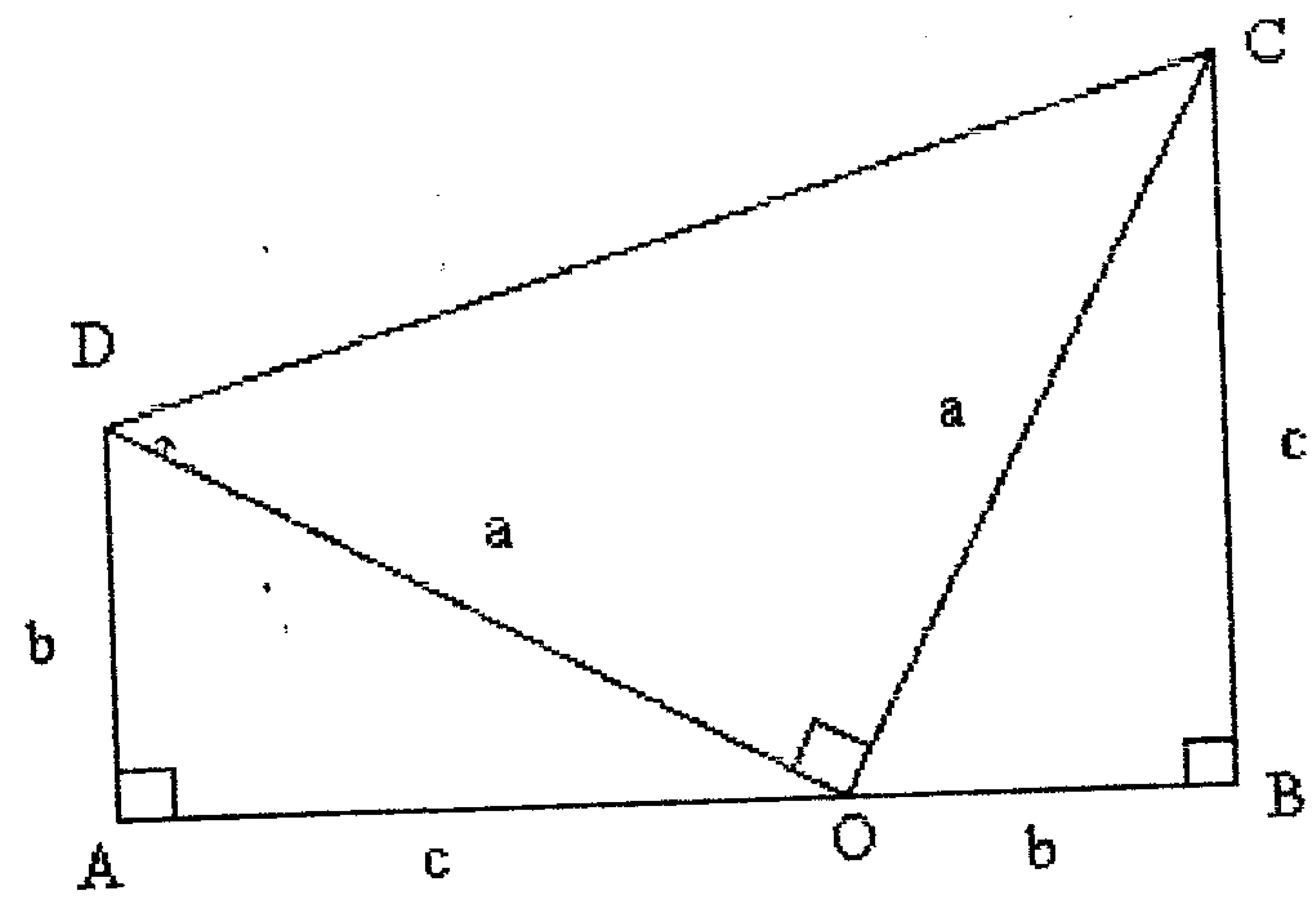
Por último, ¿qué opinión tiene acerca de la investigación en Didáctica?

Se interesa, más que en mejorar la enseñanza, en indagar en la psicología de la adquisición del conocimiento.

Brousseau me ha dicho que a él no le interesa dar buenas clases, le interesa estudiar el proceso de adquisición de conocimientos.

Los beneficios de esas investigaciones pueden llegar al aula en forma indirecta.

Durante esta charla el Dr. Fava, nos comentó que hay más de 200 demostraciones del Teorema de Pitágoras, y nos mostró la siguiente, que pertenece a James Garfield, vigésimo presidente de los Estados Unidos de América. (Extraído de "Grandes Momentos en la Historia de la Matemática" de Howard Eves.)



Area del trapecio ABCD $= \frac{1}{2}(b+c)^2$ Area del triángulo AOD $= \frac{1}{2}bc$

Area del triángulo COD $= \frac{1}{2}a^2$

Por lo tanto, igualando áreas se obtiene $\frac{1}{2}(b+c)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$, entonces $b^2 + c^2 = a^2$, con lo cual queda demostrado el Teorema de Pitágoras.

Estamos buscando más demostraciones; esperamos que nos envíen las que conozcan.

Mención Especial

Con gran orgullo recibimos la noticia de que la alumna de nuestro Profesorado, ***Alicia Verónica Hauresz***, ha sido becada por la O.M.A. para participar en las XVII Jornadas de Resolución de Problemas, Seminario Internacional, a realizarse los días 18 a 21 de noviembre del corriente en la provinca de Tucumán.

La beca le fue otorgada en el marco de su participación en el III Certamen "El Número de Oro".

Desde Axioma enviamos a Verónica nuestras más sinceras felicitaciones.

Problemas y Juegos de Ingenio

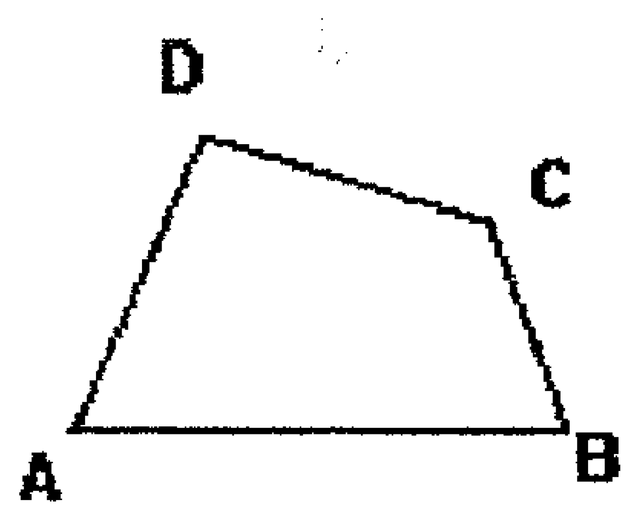
*por Gisela Serrano de Piñeiro**

Problemas Propuestos

1. *De Diego Kovács - Los Acertijeros Nº 58:* Gontijo el fakir cruza sus piernas huesudas y comienza a tocar la flauta. De un canasto de mimbre ubicado frente a sus rodillas salen danzando 100 serpientes de la India. Todas miden un número entero de metros entre 1 y 100 y no hay dos que midan lo mismo. Algunas rodean a Gontijo y forman el cuadrado de menor superficie posible. ¿Cuánto mide ese cuadrado? Nota: Ninguna serpiente hace una torsión de 90º con el cuerpo.

2. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola*: Se tiene un conjunto A de números naturales. El cardinal de A es menor que 7. El mínimo común múltiplo de todos los números de A es 390. Si se consideran dos elementos cualesquiera de A, resultan coprimos. El producto de todos los números de A no es divisible por 160 ni es la cuarta potencia de ningún número natural. Determine los elementos de A.

3. *De O.M.A. - Nota Nº 11 - Geometría* - Dado el cuadrilátero ABCD de la figura, trazar desde un vértice una recta que lo divida en dos partes de igual área.



4. *De Notas de Algebra I - Dr. Enzo Gentile - Ed. EUDEBA* - Utilizando únicamente la axiomática de los números reales, demostrar que a.0=0

Soluciones a los Problemas de Axioma Nº 3:

1. Colaboración Prof. Jorge Martínez - *Dar una fórmula elemental (única) para expresar la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x<0 \\ x^2 & si\ 0\leq x\leq 1 \\ 1 & si\ x>1 \end{cases}$$

Respuesta dada por Gustavo Piñeiro.

Observemos que el mínimo entre x y 0 es igual a x si $x<0$ y es 0 si $x\geq 0$. Es decir

$$\text{mín}\,(0,x) = \begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

La expresión (1) da cuenta de la primera parte de la función. Siguiendo con esta idea.

$$\text{máx}\,(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Pero queremos que para $x\geq 0$ la función nos dé x^2. Hacemos entonces:

$$g(x) = x\,.\,\text{máx}\,(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Finalmente, nos interesa que para $x>1$ la imagen sea constantemente 1. Esto se logra eligiendo cada vez el mínimo entre 1 y x^2. Es decir:

$$\text{mín}(g(x),1) = \begin{cases} x & si\ x<0 \\ x^2 & si\ 0\leq x\leq 1 \\ 1 & si\ x>1 \end{cases}$$

Luego f(x) = mín(0,x) + mín (x.máx(0,x), 1)

Recordemos que mín(a,b)=$\dfrac{(a+b)-|a-b|}{2}$ y que

máx(a,b)=$\dfrac{(a+b)+|a-b|}{2}$ resulta entonces:

$$f(x) = \frac{x-|x|}{2} + \frac{x(\frac{x+|x|}{2}) + 1 - |x(\frac{x+|x|}{2}) - 1|}{2}$$

2. Colaboración Prof. Alfredo Cóccola - *Se considera un conjunto de números naturales cualesquiera, cuyo cardinal es 8. Demuestre que existen al menos dos elementos de dicho conjunto tales que su diferencia es múltiplo de 7.*

Respuesta dada por Fernando Chorny.

Previamente a la demostración de este enunciado voy a probar una proposición que después voy a necesitar: Sean m, n y a pertenecientes a N.

"Si la división entre m y a tiene el mismo resto que la división entre n y a, es decir si m y n son congruentes módulo a, entonces m-n es múltiplo de a." A esta proposición la llamo (1).

En efecto, si al dividir m por a obtenemos cociente c y resto r entonces, m=c.a + r. Si al dividir n por a obtenemos cociente t y el mismo resto r, entonces n=t.a + r.

Luego m-n = c.a + r - t.a -r = a.(c-t)

Ahora voy a la demostración.

Sea $B \subset N / B = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8\}$.Si tomo un elemento cualquiera de los ocho que están en B y lo divido por siete, obtengo un cociente c y un resto r, donde r será un número entre 0 y 6. Es decir hay siete valores posibles para r.

Pero como hay ocho elementos en B puedo establecer ocho divisiones distintas (cada uno de los elementos de B dividido por 7). Si r toma un valor distinto para cada una de las primeras siete, irremediablemente va repetir uno de esos siete valores en la octava división.

Así, vamos a tener dos números distintos pertenecientes a B tales que al dividirlos por un mismo número (siete) dan el mismo resultado (r). Estamos en las condiciones de la proposición (1).

Además propongo una generalización del enunciado. "En un conjunto de números naturales cualesquiera, cuyo cardinal es n, existen al menos dos elementos cuya diferencia es múltiplo de n-1"

3. Colaboración Prof. Cristian Ponteville - *Búfalo Bill está ubicado en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. En el plano infinito del desierto hay infinitos búfalos ubicados en todos los puntos de coordenadas enteras. Búfalo Bill dispara su rifle en una dirección al azar, su disparo es de trayectoria rectilínea y de alcance infinito.*

i) ¿Es seguro que matará algún búfalo?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que mate algún búfalo?

Respuesta dada por Paola Dogliotti

El punto i) es equivalente a preguntarse si siempre una recta "de la pinta" $y=ax$; que pasa por el origen, va a "pasar" por un punto de coordenadas enteras. Ahora bien, si a es un cociente de números enteros (salvando el caso de denominador cero) seguro que la recta "pasa" por un punto de coordenadas enteras. Por ejemplo: $y = {}^{-2}\!/_{3}\, x$ pasa por el punto (3;-2). De esta misma forma cualquier número racional. Pero si a fuera irracional entonces seguro que no pasaría por un punto de coordenadas enteras pues se llegaría a un absurdo: por ejemplo, $y = \sqrt{5}x$; si existiese $y \in Z$ y $x \in Z_{\neq 0}$, entonces querría decir que $\sqrt{5} = {}^{y}\!/_{x}$ (cociente de enteros), absurdo. Por lo tanto el punto i) se podría responder que NO (siempre y cuando exista alguien sobre esta tierra que pueda dirigir un disparo rectilíneo con pendiente irracional!).

La probabilidad de que mate algún búfalo es equivalente a pensar en la probabilidad de tomar un número racional del conjunto de los números reales. Esta probabilidad es cero ya que existe un teorema que dice que la probabilidad de un suceso discreto dentro de un conjunto continuo es siempre nula.

Respuesta dada por Marcela Bartomeo y Fernando Chorny

Si el disparo de Búfalo Bill es rectilíneo, su trayectoria responderá a la ecuación de una recta:

$$y=mx + b$$

Más aún, si Búfalo Bill está en el origen de coordenadas, el coeficiente b será nulo y los puntos de la trayectoria serán los que respondan a la fórmula: $y=m.x$ (donde m es un número real).

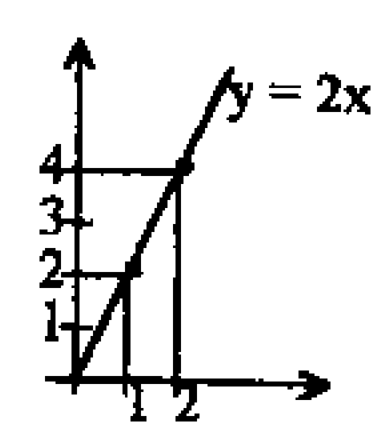
Fijado el valor de m, se tratará de encontrar un valores enteros de x e y tales que $x.m=y$.

Si $m \in Q$ entonces $m=\dfrac{a}{b}$ ($a \in Z$, $b \in Z$ y $b \neq 0$) y

bastará elegir $x=b$ para que sea $y=\dfrac{a}{b}\,.\,b$ entonces $y=a$ e $y \in Z$. Así tendremos un punto de coordenadas enteras que satisface la ecuación y se matarían búfalos.

Pero si m es irracional, por ejemplo $\sqrt{2}$, no habrá ningún valor entero de x (distinto de cero) que multiplicado por un irracional dé por resultado un entero. Es decir, el producto entre un entero y un irracional es siempre un irracional.
Por lo tanto, basta pedir que el disparo de Búfalo Bill sea de pendiente irracional para que ningún búfalo resulte lastimado.
La probabilidad de acertar un disparo estará dada por la relación entre la cantidad de números racionales y la de números reales.

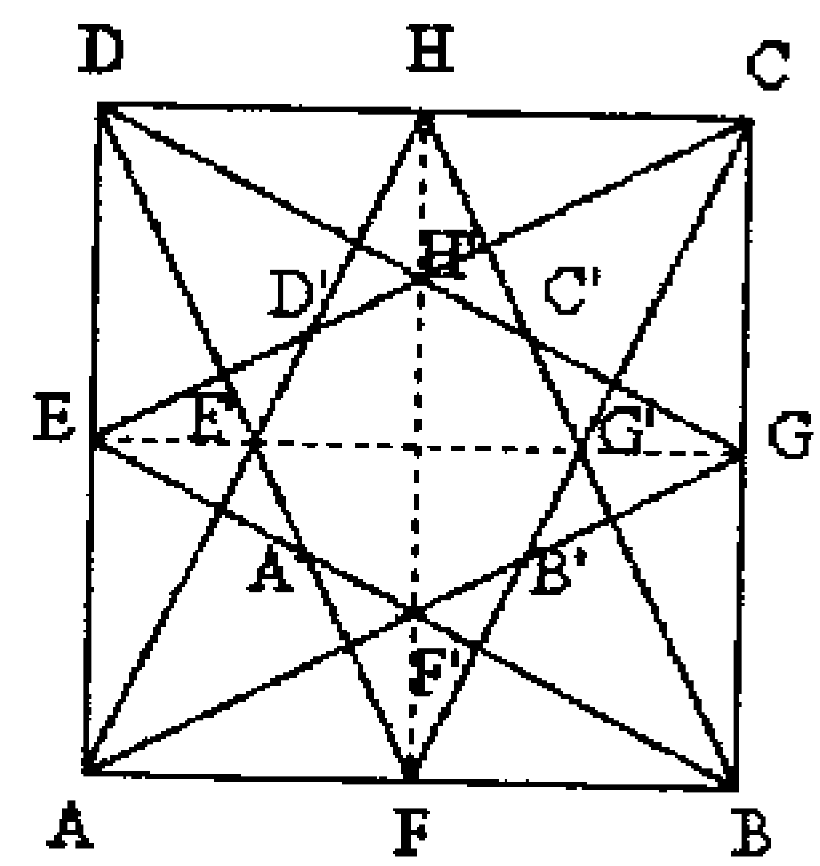
Comentario de Gustavo Piñeiro
La solución del problema de Búfalo Bill se basa en el hecho de que la recta y = mx contiene puntos con coordenadas enteras si y sólo si m es un número racional. Así por ejemplo, si la recta contiene al punto (a;b) (a y b enteros, a≠0) entonces b = ma de donde se deduce que m = $^{b}\!/_{a}$.
Supongamos ahora que Búfalo Bill quiere abatir al animal ubicado en el punto (2,4). Entonces deberá efectuar el disparo a lo largo de la recta y = 2x. Pero este disparo se encontrará previamente en su camino con el búfalo ubicado en el punto (1,2).



Recién un segundo disparo podrá llegar hasta el (2,4) ya que, una vez abatido el búfalo en el punto (1,2), Búfalo Bill tendrá el camino libre para abatir mediante el segundo disparo al animal en (2,4). Nótese entonces que Búfalo Bill necesita exactamente dos disparos para abatir al animal en (2,4), mientras que el máximo común divisor de 2 y 4 es justamente 2. Esto no es casualidad. Propongo como nuevo problema demostrar la siguiente afirmación:
El máximo común divisor de a y b es igual a n si y sólo si Búfalo Bill necesita n disparos para abatir al búfalo ubicado en el punto (a,b). En particular Búfalo Bill puede abatir mediante un solo disparo únicamente a aquellos búfalos colocados en puntos con coordenadas enteras que sean números coprimos.
Nota final: si a = 0 la afirmación sigue siendo válida, ya que el máximo común divisor de 0 y b es igual a |b|.

4. De la O.M.A. - III Certamen El Número de Oro 1995 - *Por el punto medio de cada lado de un cuadrado de área 1 se trazan los segmentos que unen dicho punto con los extremos del lado opuesto. Calcule el área del octógono formado.*

Respuesta de la O.M.A.
Sea ABCD el cuadrado y A'F'B'G'C'H'D'E' el octógono formado.



Si O es el centro del cuadrado, veamos la relación entre las áreas de los triángulos OA'F' y OAF, que notaremos [OA'F'] y [OAF] respectivamente. En el rectángulo ABGE, el punto F' resulta ser la intersección de las diagonales y se verifica que OF'=F'F, de modo que

$$[OA'F'] = \tfrac{1}{2}\,.\,[OAF']\ \ (*)$$

Por otra parte, en el triángulo AGE, las medianas AO y EF' se cortan en A'. Luego $OA' = \tfrac{1}{3}\,OA$ y en consecuencia

$$[OA'F'] = \frac{1}{3}[OAF] \qquad (**)$$

De (*) y (**) sigue que

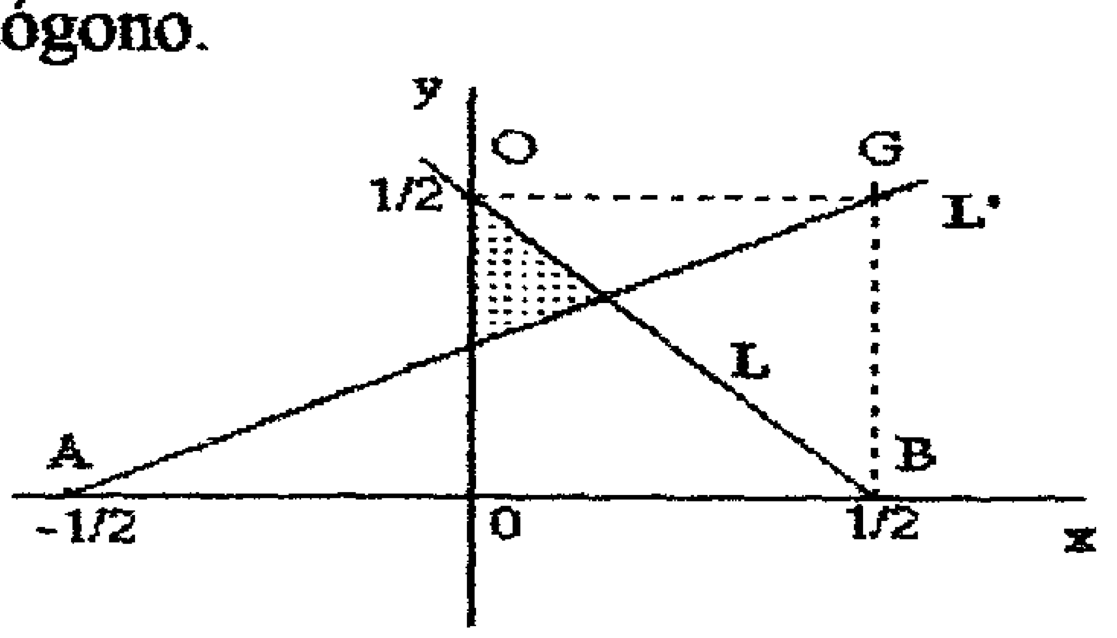
$$[OA'F'] = \frac{1}{6}[OAF]$$

Haciendo el mismo razonamiento en cada uno de los triángulos que se obtienen uniendo el centro O con cada uno de los vértices del octógono, llegamos a demostrar que el área del octógono es $\frac{1}{6}$ del área del cuadrado.

Observación: El octógono no es regular. Tiene los lados iguales pero no los ángulos y en consecuencia el triángulo OA'F' no es isósceles de base A'F', ya que OF' mide $\frac{1}{4}$ y OA' mide $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Otra forma de resolverlo

En el octógono quedan determinadas 4 regiones de igual área: E'D'H'O, H'C'G'O, G'B'F'O y F'A'E'O. Cada una de ellas puede a su vez partirse en dos triángulos de igual área (ya que tienen sus tres lados congruentes), por ejemplo G'B'F'O se puede partir en F'B'O y B'G'O. Por lo tanto calculemos el área de F'B'O y luego la multiplicamos por 8 para obtener el área total del octógono.



Tenemos dos puntos que pertenecen a la recta **L'**, (-1/2;0), (1/2;1/2).

Entonces la pendiente es m=1/2 y la ordenada al origen es b=1/4.

L': 1/2 . x + 1/4

También podemos determinar L, pues (0;1/2) y (1/2;0) pertenecen a ella.

Entonces la pendiente es m=-1 y la ordenada al origen es b=1/2.

L: - x + 1/2

Determinemos el punto de intersección de ambas rectas:

$$1/2 \,.\, x + 1/4 = - x + 1/2$$

$$x = 1/6$$

Luego calculamos, por medio de una integral, el área encerrada entre la recta L y la recta L' entre x=0 y x=1/6.

$$\int_0^{1/6} (L-L')\,dx = \int_0^{1/6} [(-x + 1/2) - (1/2 \,.\, x + 1/4)]\,dx$$
$$= \int_0^{1/6} (-3/2 \,.\, x + 1/4)\,dx$$
$$= -3/2 \,.\, x^2/2 + 1/4 \,.\, x$$
$$= -3/4 \,.\, 1/36 + 1/4 \,.\, 1/6$$
$$= 1/48$$

Luego, el área del octógono es:

8 . 1/48 = 1/6

5. De Raymond Smullyan - "Juegos por siempre misteriosos" - Ed. Gedisa - *En la isla de los caballeros y los bribones, los caballeros siempre formulan enunciados verdaderos y los bribones siempre formulan enunciados falsos; cada habitante es caballero o bribón.*

McGregor preguntó: ¿Cuál, si alguno lo es, es un caballero, y cuál, si alguno lo es, es un bribón?

-¡Ambos somos bribones!- dijo el marido enojado mientras cerraba la puerta de un golpe.

¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Respuesta de Fernando Chorny

Para resolver esta situación conviene considerar las cuatro posibilidades y ver a cuál de ellas se adecua la respuesta del marido.

a) Marido y mujer son CABALLEROS, entonces el marido es caballero, o sea, no miente nunca. Al decir "ambos somos bribones" está mintiendo, lo cual resulta absurdo y nos lleva a descartar esta posibilidad.

b) Marido y mujer son BRIBONES, entonces el marido es bribón, o sea miente siempre. Al decir "ambos somos bribones" está diciendo la verdad, lo cual también resulta absurdo.

c) Marido CABALLERO y mujer BRIBON, entonces el marido es caballero, o sea no miente nunca. Al decir "ambos somos bribones" está mintiendo, lo cual vuelve a ser absurdo.

Por último nos queda,

d) Marido BRIBON y mujer CABALLERO, entonces el marido es bribón y miente siempre. Al decir "ambos somos bribones" efectivamente está mintiendo (la proposición es falsa porque no es cierto que los dos sean bribones, ya que el único bribón es él). Luego, por ser d) la única posibilidad que no presenta contradicción, tenemos la seguridad de que el marido es BRIBON y la mujer CABALLERO.

Respuesta de Carla R. Panichi

El marido miente, entonces es bribón, pues un caballero no diría que él y la mujer son bribones. Su mujer deberá ser caballero, pues si fuera bribón su marido estaría diciendo la verdad, por lo tanto no sería bribón.

6. Colaboración de Agustín Tonelli: *Hallar todos los números de 5 cifras que son divisibles por el número de 4 cifras que se forma sacando la cifra del medio del anterior.*

Un número de 5 cifras abcde se puede escribir como:

abcde = $a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e$

y queremos que sea divisible por un número de 4 cifras de la siguiente forma:

abde = $a.10^3 + b.10^2 + d.10 + e$

Pero como abde es un número de 4 cifras, debe ser mayor que 1000, por lo cual, habrá una diferencia de por lo menos 1000 entre abde multiplicado por un número entero y abde multiplicado por el entero consecutivo.

Nosotros sabemos que si tomamos abde.10 = abde0. Ahora bien, si comparamos abde0 con abcde, tenemos que ambos números tienen como unidad de mil al número b. Si tomáramos abde.11 o abde.9 ya no tendrían la misma unidad de mil (ya que por lo dicho anteriormente vamos variando por lo menos de 1000 en 1000). Así tendremos

$a.10^4+b.10^3+c.10^2+d.10+e = 10.(a.10^3+b.10^2+d.10+e)$

Simplificando, nos queda:

$(c - d) . 10^2 = 0$

$(d - e) . 10 = 0$

$e=0$

Por lo cual $d=0$ y $c=0$

Por lo cual son los de la forma: ab000

NOTA: ***Paola Dogliotti*** nos alcanzó su demostración de la equivalencia entre los resultados obtenidos por P. Folino y J. Martínez, en Axioma Nº 3.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sum_{i=1}^{h+1} i)^2$$

* Si n=1,

$$1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \text{ y } (\sum_{i=1}^{1} i)^2 = 1^2 = 1$$

* Hipóteis inductiva $n=h$

$$\frac{h^2(h+1)^2}{4} = (\sum_{i=1}^{h} i)^2$$

* Tesis inductiva $n=h+1$

$$\frac{(h+1)^2(h+1+1)^2}{4} = (\sum_{i=1}^{h+1} i)^2$$

Tomo el primer miembro y desarrollo un cuadrado. Luego distribuyo:

$$\frac{(h+1)^2(h^2+4h+4)}{4} = \frac{(h+1)^2h^2}{4} + (h+1)^2h + (h+1)^2$$

Llamemos a esta última expresión (1).

Ahora bien, analicemos el segundo miembro más detalladamente:

$$(\sum_{i=1}^{h+1} i)^2 = [\sum_{i=1}^{h} i + (h+1)]^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + 2.(\sum_{i=1}^{h} i)(h+1) + (h+1)^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + 2[\frac{h(h+1)}{2}](h+1) + (h+1)^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + (h+1)^2h + (h+1)^2 \qquad (2)$$

Entonces, de (1), usando la Hipótesis inductiva en el primer sumando obtenemos:

$$\frac{(h+1)^2(h+1+1)^2}{4} = (\sum_{i=1}^{h} i)^2 + (h+1)^2h + (h+1)^2$$

Usando la igualdad obtenida en (2) la tesis inductiva queda demostrada.

¡Hasta el próximo número!

* Profesora de Matemática egresada del I.S.P "Joaquín V. Gónzalez"

Sección Especial

Hoy inauguramos esta sección en la cual, tanto alumnos como profesores, podrán publicar distintos trabajos de su autoría relacionados con la matemática y las ciencias afines a ella. En esta oportunidad María Vanesa Kravarik y Leonor Luzarreta, alumnas de cuarto año del Profesorado de Matemática del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González", han elaborado la siguiente nota sobre astronomía.

La velocidad de la luz y las estrellas

Que la luz se propaga a 300 mil km/seg. es un hecho conocido. También la corriente eléctrica y las ondas de radio se desplazan a la misma velocidad.

Parece casi imposible pensar que estos fenómenos hayan producido tantas controversias en alguna época.

Sin embargo, éstos no son el objeto de nuestro estudio. Nuestro objetivo es exponer algunos conceptos acerca de la aparente simultaneidad de los fenómenos en nuestra Tierra.

Cuando tocamos el interruptor para encender la luz, ésta se enciende "casi simultáneamente" pero... ¿cuántos metros de cable hay entre el interruptor y la lámpara? ¿unos 3 mts.? Para la velocidad de la luz, esta distancia es ínfima. Veamos:

300000km.___1seg.
0,003km.____xseg.

$$x = \frac{0{,}003km.1seg.}{300000km.} = 0{,}00000001seg.$$

Realmente no existe un cronómetro en toda la Tierra que mida esa fracción de tiempo. Pero la misma se hace más grande a medida que aumentamos la distancia.

Entre Buenos Aires y Londres hay, aproximadamente, 8500km. Si a las 16 del día de hoy, en una radio de Londres, Lady Di hiciera alguna declaración, una antena ubicada en Buenos Aires la recibiría a las 16hs. 0,028seg., según el cálculo de tiempo correspondiente:

300000km.___1seg.
8500km.____xseg.

$$x = \frac{8500km.1seg.}{300000km.} = 0{,}028seg.$$

Esto significa que un oyente en Buenos Aires recibirá la declaración 0,028seg. después de hecha.

Quizás el lector se esté preguntando en qué le afecta recibir una información 0,028seg. más tarde, si ni siquiera llega a ser 1seg. de diferencia. Tampoco 8500km. es una distancia tan grande comparada con las distancias que nos rodean en el Universo. Si salimos de la Tierra, en donde los fenómenos ocurren casi simultáneamente, encontraremos diferencias notables.

La distancia media de la Tierra al Sol es de 150 millones de km., ¿cuánto tardará en llegarnos el rayo de luz que salió en este instante?

300000km._____1seg.
150000000km.____xseg.

$$x = \frac{150000000km.1seg.}{300000km.} = 500seg.$$

500seg. son aproximadamente 8,3 minutos. Esto quiere decir que el rayo de Sol que ilumina en este instante este artículo salió del Sol hace algo más de 8 minutos.

Este mismo rayo tarda en llegar a Júpiter (que dista del Sol unos 778 millones de km.) aproximadamente 45 minutos.

Salgamos ahora del sistema solar. La estrella más cercana a nosotros es la Alpha Centauri, a $4{,}29 \cdot 10^{13}$ km. aproximadamente. La luz que esta noche emitirá esta estrella nos llegará recién dentro de 4,29 años. Si hoy esta estrella se apagara, nos enteraríamos dentro de 4,29 años.

Supongamos que alguien viviera en Alpha Centauri. Si quisiéramos enviarle una señal de radio y esperáramos una respuesta, tardaríamos ocho años y medio en recibirla, ya que le llevaría 4,29 años para ir y el mismo tiempo para volver.

Si alguien en la estrella Altair (que está a unos $15{,}7\ 10^{13}$ km.) tuviera una enorme antena parabólica, recibiría información sobre la guerra de Malvinas en 1997.

Sabemos que las trasmisiones radiales en Argentina comenzaron en 1920. Todas las estrellas que se encuentren a menos de $76 . 10^{13}$ km. habrán recibido, en 1996, al menos una señal de radio.

¿Algún habitante de Vega (a unos $27 . 10^{13}$ km.) se habrá enterado del levantamiento de Córdoba en 1969? No lo podemos comprobar, pero sí sabemos que a medida que las distancias van aumentando, los posibles habitantes de otros sistemas nos verían como éramos hace años atrás, o recibirían informaciones radiales de años anteriores al actual.

Ni hablar de cómo nos verían desde otras galaxias, por ejemplo Andrómeda, distante unos $2 . 10^{19}$ km. Nos verían como éramos hace unos dos millones de años.

Así como ellos ven nuestro pasado, nosotros vemos el de ellos. Esto nos permite conocer algo más de la historia de nuestra propia galaxia. Cada vez que miremos el cielo encontraremos algo del ayer contándonos la historia que fue...

Queremos agradecer el apoyo y el aporte de conocimientos, así como el tiempo que nos brindó el Profesor Eduardo Scardino, quien día a día nos enseña algo más de esta bellísima ciencia llamada astronomía.

María Vanesa Kravarik
Leonor Luzarreta

Bibliografía:

* ASIMOV, ISAAC - *El Universo* - Madrid, Ed. Alianza Editorial, 1972.
* CALDER, NIGEL - *Einstein's Universe* - U.S.A., Ed. Greenwich, 1979.

Nuestros radiotelescopios han captado la radiación cósmica de fondo del cuerpo negro, que no es otra cosa que el distante eco del suceso conocido como Big Bang (la Gran Explosión).

Por decirlo de otro modo, hoy en día todavía observamos las llamaradas de la creación.

de Carl Sagan, "El Cerebro de Broca"

Lecturas Matemáticas

En esta modesta columna pasamos revista a las novedades (o no tanto) bibliográficas que aparecen en Matemática, Matemática recreativa, Historia de la Matemática, Lógica y Epistemología. En esta entrega comentamos tres libros:

1) "El ingenio de las Matemáticas". Ross Honsberger. Colección la Tortuga de Aquiles. Madrid. Julio de 1994. 205 páginas.
Un impresionante libro dedicado al razonamiento y a la solución de viejos problemas con ideas originales y creativas. Es un libro para leer con lápiz, goma y papel cerca, porque los problemas que plantea atrapan enseguida. Consta de ensayos cortos e independientes sobre matemática elemental (elemental dijimos, no fácil!) algunos de cuyos títulos son: Probabilidad y π; Pares e impares; Escribiendo un número como suma de dos cuadrados; La serie de los inversos de los primos; y otros.
Hay solución, al final, de los problemas propuestos.
Para los amantes de la Geometría hay dos ingeniosas investigaciones: Mascheroni y Euler es una y el otro ensayo es el problema de Van Schooten.
Imperdible el ensayo llamado "Cinco curiosidades aritméticas" y que comprende una generalización de Liouville de la fórmula $\sum i^3 = (\sum i)^2$, el Algoritmo de Ducci (notable!) y la Criba de Sundaram entre otros.
En suma, es un libro muy recomendable para aquellos que estiman la creatividad sin pérdida de profundidad.

2) "Introducción al Cálculo". Kuratowski. Editorial Himusa. México. Novena reimpresión, 1995, 310 páginas.
Es una verdadera joya del Cálculo infinitesimal de una variable. Sin embargo, el título es modesto, porque es bastante más que una introducción.
Con la capacidad didáctica que lo caracteriza, Kuratowski nos hace reconocer con placer y profundidad los temas claves del Cálculo desde Sucesiones hasta integrales impropias.
No debería faltar en la Biblioteca de un profeso[r] que quiera dedicarse al Cálculo.

3) "Historia e Historias de Matemáticas". M[...] Perero. Grupo editorial Iberoamérica. Méxic[o] 1994, 193 páginas.
Un ameno, divertido y jugoso ensayo que intent[a] apartarnos de las visiones aburguesadas [...] académicas de la Historia de la Matemática. Si[n] duda, es un librito pensado para los profesore[s] de enseñanza media, receptores naturales de est[e] interesante ensayo. El libro se divide en cuatr[o] partes muy bien diferenciadas. La primera part[e] presenta cortas biografías de los matemátic[os] más célebres de todas las épocas desde Tales d[e] Mileto hasta John C. Fields, privilegiando un[a] visión global del biografiado, antes que un[a] descripción exhaustiva de sus contribucione[s] matemáticas.
Un lamento personal: a Cauchy se le hubiera po[-]dido dedicar algo más que media página.
La segunda parte llama a "Aspectos de [la] Matemática" y enfoca el aspecto evolutivo de [la] Matemática.
Excelente en todo sentido es la tercera par[te] "¿Qué es la Matemática?" donde en veinte apr[e]tadas páginas se resume genialmente una visi[ón] totalizadora de la Matemática y su entorno teór[i]co. ¿Alguna vez hemos pensado en qué signifi[ca] "crisis" matemática? volvamos a pensarlo.
Finalmente en la cuarta sección se tratan l[os] problemas famosos de la Matemática desde [la] trisección del ángulo hasta la conjetura [de] Goldbach, en forma tan sencilla que el estudian[te] de escuela media puede captar la escencia de e[s]tas cuestiones sin dificultad.
Conclusión final: el "librito" vale la pena.
Hasta la próxima

Jorge Martín

Información

El Departamento ya tiene Reglamento Orgánico

Finalmente, y tras un año de arduas discusiones, se logró consensuar en la Junta Departamental un proyecto que, con todos sus errores y aciertos, permitirá a alumnos, docentes y graduados del I.S.P. "Joaquín V. González", ejercer derechos y cumplir obligaciones conforme lo establecen sus artículos.

Fue plebiscitado los días 23, 24 y 25 de octubre pasado. Y los resultados son los siguientes:

	Urna de : Profesores	Alumnos
SI	32	319
NO	2	26
Blanco	0	8
Inpug.	0	1
Total	34	354

Llamado a elecciones

Se efectuarán los días 20, 21 y 22 de noviembre del corriente y servirán para renovar las autoridades del Departamento: representantes docentes, representantes alumnos y Director de Carrera.

Fecha de presentación de listas para su oficialización: hasta el 10 de noviembre inclusive.

Comisión Cultural

Tal como lo anunciáramos en el número anterior, se desarrollaron con gran éxito las charlas organizadas por la Comisión.

Desde Axioma, agradecemos profundamente a los profesores Roberto Mestorino, Norberto Fava y Carlos Sanchez, por brindar sus conocimientos con gran dedicación y genuino fervor. Igual mención nos merece la profesora Alcira Torres, quien está dictando un curso de CABRI (programa de computación para aplicaciones geométricas) de cuatro clases.

La culminación de las actividades de este año, estuvo a cargo del Grupo de Música Folk-Celta del Centro Galicia de Buenos Aires "Abrego", del cual forma parte el talentoso ejecutante y compositor Alberto López Barros, alumno de 2° año de la carrera de Matemática en nuestro profesorado. Un público entusiasta, que colmó las instalaciones del salón de actos, con sus "¡Bravo!" y "¡Otra!", supo reconocer el valor y la calidad artística de este grupo de intérpretes jóvenes que con gran entusisamo y vocación recrean esta música milenaria que recorrió Europa, asentándose principalmente en las Islas Británicas y las penínsulas Ibérica e Itálica, como bien explicara su director Gustavo Fontana. Justo es reconocer la preocupación y el empeño puestos por el Prof. Mestorino, artífice indiscutible de la actuación del conjunto en el I.S.P., razón suficiente para transformarlo en el presentador del concierto. El director del conjunto le hizo entrega a la Comisión Cultural del Departamento de Matemática de un banderín, como símbolo de amistad y recuerdo de su paso por el I.S.P.

Muchos proyectos ya se han comenzado a barajar para el año próximo que, no dudamos, serán concretados con no menos entusiasmo y preocupación que los puestos hasta la fecha. Quedan estas páginas a disposición de la Comisión Cultural para publicar dicha información.

Profesores

Hay profesores que impactan en nuestra formación por diversos motivos y que a lo largo de nuestras vidas se tornan inolvidables. Algunos por su capacidad, otros por su dedicación, otros por su autoridad intelectual o su don de gente. En el caso que hoy nos ocupa, se reúnen todas esas cualidades en una profesora que demuestra que los muchos años del ejercicio de su profesión no le han quitado las ganas ni la energía necesaria para preocuparse por brindar a sus alumnos lo mejor de sí.

La Prof. Aída Rotbart organizó para los estudiantes de Historia Social de la Educación una visita guiada al Palacio San José, preocupándose de conseguir el subsidio necesario para pagar el viaje.

Reivindicamos su actitud y le expresamos nuestro reconocimiento a su labor docente.

Correo de lectores

Seguimos recibiendo, no sin asombro, pedidos de información acerca de nuestra publicación, forma de suscripción, etc. desde recónditos lugares de nuestro país. Además de alegrarnos muchísimo, nos da la pauta de lo importante que resulta para nuestra actividad profesional, lograr conectarnos entre la mayor cantidad posible de profesores y estudiantes de matemática de todas partes.
En esta ocasión la Rectora del Instituto "Leonardo Da Vinci" de Río Cuarto, Córdoba nos hizo saber de su interés por Axioma.

Agradecemos a:

* Alejandro Siniuk el material que nos acercó para organizar un trabajo sobre el número π, como asimismo uno de historia de la matemática.
* Rosa Escayola, alumna de 3° año de la carrera, en reconocimiento al esfuerzo realizado esperando contar nuevamente con su colaboración.
* la Prof. Aída Rotbart que, haciendo honor a su formación de historiadora, nos acercó un maravilloso material de sus archivos personales, de los que han sido nuestros precursores: los números 1 y 7 de la revista ESTRUCTURA, de los años 1982 y 84 respectivamente, editada por alumnos de la carrera.

Probablemente con los mismos medios rudimentarios y el mismo entusiasmo que nosotros, pretendieron y lograron organizar muchas actividades, como la Olimpíada matemática dentro del I.S.P. Nuestro emocionado recuerdo a sus redactoras V. Viva, C. Fraga, E. Klein, C. Novaro y a su director J. Colombo.

Próximo Número...
Marzo/Abril 1997

Mujeres Matemáticas.

Apuntes sobre..., Ecuaciones Diferenciales.

Literatura matemática.

Problemas, Información, Correo de Lectores.

Y mucho más...