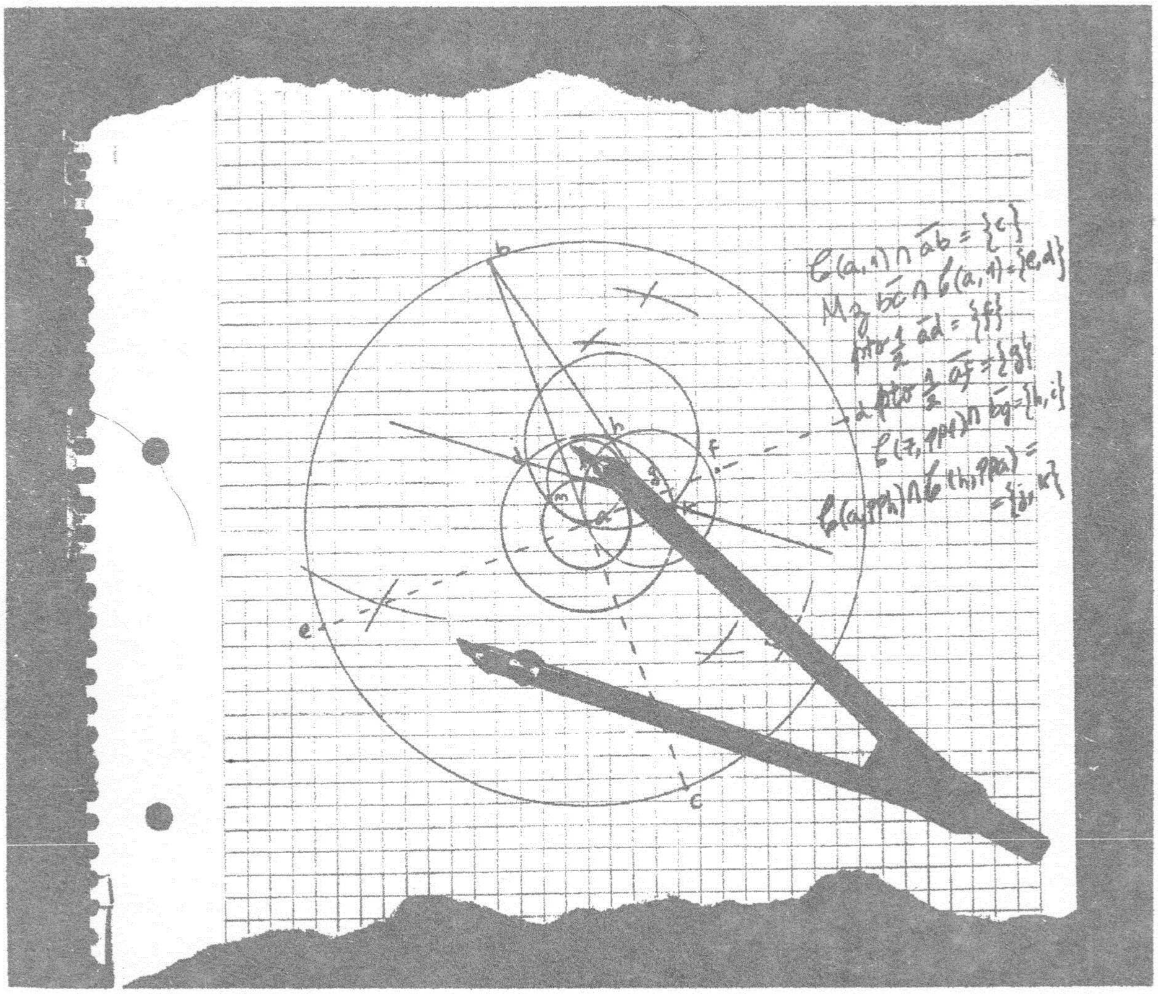
Axioma

La Revista de los profesores y estudiantes de Matemática



Por qué Gauss no fue un filólogo

(Charla – pág. 16)

Año 4 – Número 19

Aχioma N° 19

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de Matemática, de venta exclusiva por suscripción. Hecho el depósito que marca la Ley.

Directores y Propietarios

Pablo Leandro Bonucci
Fernando Chorny
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes

Jorge Martínez
Gustavo Piñeiro

Colaboran en este número

Pablo Ingrassia
Maximiliano Minim
Josefina Elisa Palombella

Ilustración Portada:

Fernando Chorny

Dirección postal

Av. J. B. Alberdi 667 - 7º B
(1424) Buenos Aires
Argentina

Correo electrónico

pineiro@datamarkets.com.ar

En internet

www.nalejandria.com/axioma

Impresión a cargo de:

Luis Lofiego

Editorial

Si la dominación por medio de la fuerza, llámese a esto guerra, usurpación o conquista económica, es el camino inmediato más eficaz para dominar una nación; la invasión cultural y la manipulación deliberada del sistema educativo de un país son, sin duda, las armas más eficaces, eficientes y, lo que es peor, imperceptibles de todas.

La inteligencia sigue prevaleciendo por sobre la fuerza, prueba de ello es nuestro mediocrizado y mediocrizante actual sistema educativo: conjunto de normas externas acatadas y puestas en vigencia por ministros, funcionarios, directores y docentes en mayor o menor medida, las cuales nos conducen, inexorablemente, a la sumisión más profunda...

Sin embargo, como toda estrategia que se implementa con seres humanos ésta, también, posee grietas por donde se filtra luz, la luz del conocimiento y la crítica.

Axioma quiere (o intenta) formar parte de ese tenue rayo de luz que todavía nos ilumina y agradece profundamente a todos aquellos que de una manera u otra nos acercan comentarios, artículos, palabras de aliento o se preocupan por no permitir que este país termine, irremediablemente, a oscuras.

Nota importante:

Al cierre de la edición de Axioma 19, cuando la nota Editorial con la que cada número nos arengamos a nosotros mismos y a ustedes ya estaba escrita y lista para ir a imprenta, un aumento más de los que día a día sacuden nuestro presupuesto puso en jaque a la publicación.
Con el mayor de los esfuerzos, conseguimos hacerles llegar este número y compensarlos por los números que de momento no entregaremos.
Con Axioma 19 nos despediremos hasta que nuevas ideas y alternativas nos permitan estabilizar nuestro accidentado vuelo por la economía inflacionaria de la Argentina.
Afortunadamente, al igual que todo *axioma*, nuestro quehacer matemático y el de ustedes están en el plano de las ideas, y son invulnerables frente a objetos tan concretos y tangibles como un manojo de billetes verdes.
Cogito ergo sum, dijo el filósofo. Hasta cualquier momento, queridos amigos.

Sumario

Mayo/ Junio de 2002

Lógica matemática
(Cuarta y última parte)

"Kurt Gödel y Paul J. Cohen establecieron que la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas y reglas de inferencia de la teoría de conjuntos estándar. Por consiguiente la actitud que cada uno adopte hacia el estatus de la Hipótesis del Continuo permitirá determinar si uno es formalista o platónico. Para un formalista la afirmación es indecidible y no tiene sentido llamarla ' verdadera' o 'falsa'. Para un platónico, en cambio, la Hipótesis del Continuo realmente es verdadera o es falsa, aunque para determinar cuál de los dos es el caso se requeriría desarrollar un nuevo tipo de razonamiento."

(Roger Penrose, 1996)

Gustavo Piñeiro *

En el siglo III a.C., muy probablemente con la intención explícita de escribir un libro de texto para la enseñanza de la matemática superior, Euclides de Alejandría organizó una gran parte del conocimiento matemático de su época en un único sistema formal. El resultado de este trabajo fue *Elementos*, el libro de texto más exitoso e influyente de toda la historia de la Matemática y uno de los libros que más ediciones y traducciones ha conocido de todos cuantos jamás se hayan escrito, únicamente superado en este último aspecto por la Biblia.

El papel de Euclides en los *Elementos* fue fundamentalmente el de recopilador y organizador. Probablemente ninguna, o casi ninguna, de las afirmaciones matemáticas contenidas en el texto haya sido descubrimiento suyo. Pero los historiadores coinciden en que sí fue suya la concepción de cómo organizar estos conocimientos.

Las afirmaciones matemáticas de los *Elementos* están divididas, he aquí el genial plan de Euclides, en axiomas y teoremas. En rigor, Euclides clasificó a los axiomas en postulados por un lado y nociones comunes por el otro. Los postulados (cinco en total) son afirmaciones referidas específicamente a cuestiones geométricas, mientras que las nociones comunes (cuyo número es variable en las distintas traducciones llegadas hasta el presente) se refieren a cuestiones comunes a todas las ciencias (tales como que "dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí"). Esta clasificación carece realmente de importancia a los efectos de este artículo. Tanto los postulados como las nociones comunes serán para nosotros simplemente axiomas, sin distinción de ninguna clase entre ellos [(1)]. Se trata, en definitiva, de las afirmaciones básicas del sistema euclídeo, enunciados, se supone, tan evidentes en sí mismos que nadie pondría en duda su veracidad. Los teoremas, por su parte, son las afirmaciones que se deducen lógicamente de estos axiomas iniciales. [(2)]

Elementos marca entonces el comienzo de la concepción de la Matemática como ciencia deductiva (hasta ese momento la Matemática era una ciencia en gran parte empírica, con métodos y enunciados desconectados entre sí). Esta concepción y esta organización en axiomas evidentes en sí mismos y teoremas que se deducen de ellos permaneció inalterada e incuestionable durante más de 2000 años.

Las geometrías no euclidianas

Durante el siglo XIX la incuestionabilidad de la concepción euclídea se vio resquebrajada por el descubrimiento de las llamadas geometrías no euclidianas. No narraremos aquí los detalles de este descubrimiento cuyo relato ha sido ya contado con detalle y habilidad en muchos textos de Historia de la Matemática.

Recordemos solamente que la historia de las geometrías no euclidianas comienza con el análisis del quinto postulado de los *Elementos*. Los cuatro primeros postulados son en verdad afirmaciones cuya verdad es intuitivamente evidente. Estos dicen respectivamente que por dos puntos puede trazarse una recta; que todo segmento puede prolongarse indefinidamente; que con cualquier centro y cualquier radio puede trazarse una circunferencia y que todos los ángulos rectos son iguales entre sí. El enunciado del quinto postulado, en cambio, es mucho más complejo, más difícil de aprehender intuitivamente y, consecuentemente, menos convincente que los otros cuatro.

El quinto postulado afirma: "si una recta, al cortar otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos".

Se dice que Euclides fue el primero en dudar de la fuerza de convicción de su quinto postulado, ya que en las demostraciones de los teoremas de los *Elementos* lo utiliza con menor frecuencia que los otros cuatro. De hecho, el quinto postulado aparece por primera vez recién en la demostración del teorema número 29. Lo cierto es que a partir de esta complejidad maduró muy tempranamente la idea de que tal vez el quinto postulado no fuera un "verdadero" axioma, sino que fuera en realidad un teorema demostrable a partir de los primeros cuatro postulados.

Durante veinte siglos esta demostración nunca fue encontrada. Una consecuencia de estos intentos de hallarla fue que se dieron nuevas formulaciones del quinto postulado, equivalentes a la formulación original de Euclides. La más famosa de estas reformulaciones, atribuida generalmente al matemático inglés John Playfair (1748 – 1818) dice: "por un punto exterior a una recta puede trazarse una y sólo una paralela a ella". De hecho, es común referirse al quinto postulado como "el axioma de las paralelas".

En el siglo XIX surgió la idea de dar una demostración por el absurdo del quinto postulado. Es decir, tomemos los cuatro primeros postulados, agreguemos a ellos la negación del quinto y comencemos a hallar todas las consecuencias lógicas de esta combinación. Es decir, comencemos a demostrar "teoremas" a partir de estos postulados modificados. Si en algún momento llegamos a una contradicción (es decir, si llegamos a demostrar que una afirmación y su negación son ambas verdaderas a la vez) entonces la conclusión será que la negación del quinto postulado no puede ser verdadera, que debe ser falsa y que el quinto postulado es, en consecuencia, verdadero (será un teorema deducible de los otros cuatro postulados).

Si adoptamos la formulación de Playfair existen dos negaciones naturales del quinto postulado, una de estas negaciones diría que "por un punto exterior a una recta no puede trazarse ninguna paralela a ella" y la otra diría que "por un punto exterior a una recta pueden trazarse infinitas paralelas a ella". Durante el siglo XIX fundamentalmente fueron tres los matemáticos que trabajaron con las consecuencias lógicas de estas negaciones del quinto postulado. Ellos fueron Carl F. Gauss (1777 – 1855), Nikolai Lobachevsky (1793 – 1856) y Johann Bolyai (1802 – 1860), aunque sólo los dos últimos publicaron en vida los resultados de sus investigaciones.

Sorpresivamente lo que estos tres matemáticos notaron es que, aparentemente, a partir de la negación del quinto postulado no se deducía ninguna contradicción. El absurdo esperado no aparecía. Los teoremas que se deducían de este nuevo juego de axiomas no se contradecían entre sí, por lo que tenían todo el derecho de ser considerados en pie de igualdad con los teoremas de los *Elementos*, aun cuando difirieran de ellos en muchos puntos esenciales. Se dio entonces el nombre de geometrías no euclidianas a aquellas geometrías (entendidas aquí como un sistema formal de axiomas y teoremas) que se deducen de las negaciones del axioma de las paralelas. Debemos destacar sin embargo que ninguno de los tres matemáticos mencionados más arriba demostró rigurosamente que las geometrías no euclidianas estuvieran libres de contradicciones, aunque los tres lo intuyeron.

La crisis de los fundamentos

El dilema explotó con toda su fuerza cuando en 1873 el matemático alemán Félix Klein (1849 – 1925) demostró rigurosamente que efectivamente las geometrías no euclidianas están libres de contradicciones, y por lo tanto son tan válidas como la geometría de Euclides (considerada durante 2000 años como la única geometría posible). Más exactamente lo que demostró Klein es que si las geometrías no euclidianas son contradictorias entonces también es contradictoria la geometría euclidiana.

¿Significa entonces que los axiomas no tienen que ser evidentes? ¿Cómo es posible que se deduzcan teoremas coherentes de sistemas opuestos de axiomas? ¿Qué significa en definitiva que una afirmación matemática sea verdadera? Estas fueron las preguntas que los matemáticos se formularon hacia fines del siglo XIX y principios del XX. Las mismas bases de la Matemática fueron cuestionadas, revisadas y reformuladas. En la historia se recuerda a este período como el de la crisis de los fundamentos.

Debemos decir que esta crisis no fue disparada solamente por el descubrimiento de las geometrías no euclidianas. También contribuyó fuertemente a ella la polémica matemática acerca de la validez de la teoría de los transfinitos de Georg Cantor (1845 – 1918) y las contradicciones que hacia 1904 Bertrand Russell (1872 – 1970) encontró en la Teoría Intuitiva de Conjuntos, también desarrollada por Cantor. (3)

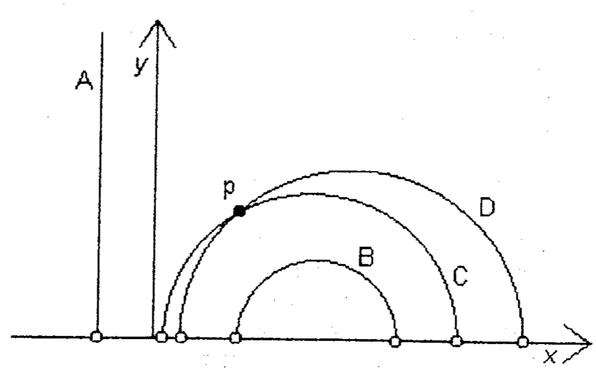
Tres escuelas matemáticas dieron respuesta a las preguntas básicas que se formularon durante la crisis. Ellas son conocidas como la Escuela Logicista, de Russell, la Escuela Intuicionista, de L. E. J. Brouwer (1881 – 1966), y la Escuela Formalista, de David Hilbert (1862 – 1943). Como esta última fue, con gran ventaja, la más influyente de las tres, sólo nos referiremos aquí a la concepción formalista de la Matemática.

Modelos

Es de gran interés para nosotros la técnica que usó Klein para demostrar que si las geometrías no euclidianas son contradictorias entonces también es contradictoria la geometría euclidiana. Klein basó su demostración en **modelos** de las geometrías no euclidianas, modelos lo cuales estaban contenidos en la geometría euclidiana.

El concepto de modelo es fundamental en la lógica matemática moderna. Un modelo de un sistema axiomático es un conjunto M para el cual existe una biyección entre los conceptos mencionados en los axiomas y los objetos y relaciones existentes en M, de tal manera que cada axioma se traduce, merced a esta biyección, en un hecho verdadero en M. En otras palabras, un modelo de un sistema axiomático es un ejemplo donde pueda verse una "traducción concreta" de los axiomas.

Veamos como ejemplo un modelo de la geometría no euclidiana en la cual por cada punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas a ella (llamada **geometría no euclidiana hiperbólica**). (4)



El conjunto M es en este caso $M = \{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$. Son "rectas" en este modelo las semicircunferencias con centro en el eje x, y también las semirrectas verticales con origen en el mismo eje x. Dos rectas son paralelas si no tienen puntos en común. En el dibujo precedente A, B, C y D son rectas. Se ve fácilmente que por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas a ella, por ejemplo C y D son ambas rectas paralelas a B que pasan por el punto p.

Todo teorema de la geometría no euclidiana hiperbólica se traduce por esta biyección en un teorema euclidiano referido al semiplano $\{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$. Por lo tanto, si la geometría no euclidiana hiperbólica fuera contradictoria, es decir si existiera en ella una afirmación P tal que tanto P como su negación fueran teoremas, esta afirmación P se traduciría por la biyección en una afirmación P' referida a M que cumpliría que tanto P' como su negación son teoremas de la geometría euclidiana, y por lo tanto la geometría euclidiana sería también contradictoria.

Observemos que este razonamiento marca un quiebre con la concepción inicial de Euclides. Cuando en los *Elementos* se dice "recta", esta palabra significa lo que todos entendemos intuitivamente por este concepto (esto asumiendo que todos entendamos lo mismo). A través del concepto de modelo vemos que "recta" puede tener distintos significados en distintos contextos. La única condición es que el objeto que llamemos "recta" verifique las propiedades establecidas por los axiomas. A partir de esta idea maduró la concepción formalista de la Matemática.

Los axiomas formalistas

Para la escuela formalista de Hilbert toda teoría matemática debe ser un sistema axiomático, es decir, debe seguir el esquema básico de Euclides: axiomas iniciales y teoremas que se deduzcan lógicamente de ellos. Sin embargo difiere de la idea de Euclides en un punto fundamental: para Hilbert los axiomas son simplemente cadenas de símbolos carentes de significado, y las reglas de inferencia son reglas mecánicas para operar con esos símbolos.

Una formulación al estilo formalista del sistema de Euclides podría comenzar así:

Existen dos conjuntos, el conjunto P (cuyos elementos indicaremos como p, q, r,...) y el conjunto R (cuyos elementos indicaremos como A, B, C,...). Existe también una relación entre R y P, que indicaremos con la frase "pasar por". Definimos en R la relación "ser paralelo a" de la siguiente manera: A es paralelo a B si y sólo si no existe un $p \in P$ tal que es verdad que A pasa por p y B pasa por p.

Observemos que el significado de las palabras es indiferente. Donde dice "pasar por" puede decir perfectamente "es la madre de" sin que ello signifique cambio alguno.

El primer postulado diría entonces que si p y q son dos elementos distintos de P entonces existe un $A \in R$ tal que es verdad que A pasa por p y A pasa por q. El axioma de las paralelas diría que si $A \in R$, $p \in P$ y A no pasa por p entonces existe un único $B \in R$ tal que B pasa por p y B es paralelo a A.

Una de las reglas de inferencia podría decir lo siguiente: si una cadena de símbolos del tipo "Si X entonces Y" es una teorema o un axioma, y la cadena "X" es un teorema o un axioma entonces "Y" es un teorema. Todos los teoremas del sistema se obtienen por aplicación mecánica de estas reglas de inferencia a las cadenas de símbolos que son los axiomas. [(5)] Las demostraciones formalistas carecen de toda apelación a la intuición o a "lo que todos sabemos" o lo que "es evidente que", se trata simplemente de operaciones mecánicas. Los axiomas en sí carecen de significado; es cierto que un modelo puede eventualmente llegar a asignarles uno, pero en sí mismos no lo tienen.

En el fondo, la idea de Hilbert es que todas las dudas sobre el significado de la verdad matemática o sobre la validez de los métodos de demostración que surgieron en la crisis de los fundamentos se deben al reemplazo de definiciones claras y precisas por apelaciones indiscriminadas a la intuición o lo que "es evidente". Hilbert decide entonces eliminar toda intuición tanto de los axiomas como de los métodos de demostración.

La respuesta de Hilbert acerca de qué significa que una afirmación matemática sea verdad es la siguiente: por definición todos los axiomas son verdaderos. Por otra parte, una afirmación (entendida aquí en el sentido formalista: simplemente una cadena de símbolos) P es verdadera si P es un teorema (o sea si puede demostrarse a partir de los axiomas) y P es falsa si la negación de P es un teorema. Para que un sistema axiomático sea aceptable simplemente debemos estar seguros de que carece de contradicciones, es decir, debemos demostrar que no existe una afirmación P tal que P y su negación sean simultáneamente teoremas del sistema.

El Programa de Hilbert consistía en estructurar toda la Matemática en un gran sistema axiomático. De este sistema se deberían demostrar dos cosas. Primero que el sistema es consistente, es decir que está libre de contradicciones. En segundo lugar debería demostrar que el sistema es completo, es decir que para toda afirmación P ocurre que o bien P, o bien su negación, es un teorema.

De esta manera Hilbert pensaba resolver de una vez y para siempre todas las dudas sobre la validez de los fundamentos. Tendríamos establecida claramente una definición de verdad matemática y habríamos demostrado que toda afirmación es siempre verdadera o falsa (una y sólo una de las dos opciones).

Pero llegó Gödel

Todo el Programa de Hilbert se desmoronó desde su misma raíz a causa de los Teoremas de Incompletitud de Gödel. En ellos, Gödel demostró que, en el caso de que se lograra estructurar toda la Matemática en un gran sistema axiomático (no importa cuáles fueran los axiomas elegidos) entonces, asumiendo que el sistema no sea contradictorio, siempre existirá una afirmación P tal que ni P ni su negación serán demostrables a partir de los axiomas. Es decir, en términos formalistas, siempre existirán afirmaciones cuya verdad o falsedad no pueda determinarse. Por otra parte, Gödel probó también que no sería posible demostrar matemáticamente la consistencia de un sistema que abarcara a toda la Matemática. En pocas palabras Gödel probó que los dos objetivos fundamentales del Programa de Hilbert eran absolutamente inalcanzables.

Pensado desde el punto de vista formalista, un sistema axiomático puede verse como un lenguaje cuyas palabras o frases pasan a tener significado sólo cuando se le asocia al sistema algún modelo.

Recordemos que el enunciado del Primer Teorema de Gödel dice que en todo sistema axiomático consistente (o sea, libre de contradicciones) que sea suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números existe una afirmación P tal que ni P ni su negación son teoremas en el sistema.

En el contexto de la teoría de modelos, la frase "suficientemente complejo como para contener a la Teoría de Números" significa que el sistema debe poder admitir como modelo un conjunto que contenga a todos los números enteros de modo tal que toda propiedad aritmética de estos números sea la traducción de un teorema del sistema axiomático.

La demostración de Gödel de este teorema (que no es la demostración que vimos en la nota anterior) consiste en mostrar que un sistema axiomático que cumpla las condiciones indicadas admite un modelo cuyas afirmaciones se refieren a la demostrabilidad de las afirmaciones del propio sistema. De hecho Gödel muestra que existe una afirmación P cuya traducción al modelo es "P no es demostrable en el sistema".

Si P fuera un teorema en el sistema entonces (por lo que la frase dice) P no sería demostrable en él, lo cual es una contradicción. Si la negación de P ("P es demostrable en el sistema") fuera un teorema entonces tanto P como su negación serían ambas demostrables, por lo que el sistema no sería consistente. En consecuencia, ni P ni su negación son demostrables en el sistema y de esta forma el Teorema de Incompletitud queda probado.

El Segundo Teorema de Gödel dice que un sistema axiomático no puede demostrar su propia consistencia. En otras palabras, es imposible hallar un modelo tal que alguno de los teoremas del sistema se pueda traducir como "el sistema es consistente". La demostración de Gödel de este teorema es esencialmente similar a la demostración que acabamos de comentar. Gödel muestra que existe una afirmación P en el sistema y un modelo M de éste tal que la traducción de P al modelo M es "el sistema axiomático no es consistente".

Un razonamiento similar al que hicimos antes permite mostrar que ni P ni su negación son demostrables a partir de los axiomas. En particular la frase "el sistema es consistente" no es demostrable a partir de los axiomas.

Y más allá...

A pesar de que los objetivos del Programa de Hilbert son inalcanzables y a pesar de que, como consecuencia de ello, el Programa en sí haya sido abandonado, la verdad es que no ha sido hallada ninguna nueva concepción de la Matemática que haya podido reemplazar eficazmente a la concepción de Hilbert.

Todos los matemáticos de hoy en día son, con algunos matices, formalistas [(6)]. Estos matices se refieren fundamentalmente a la respuesta que estos matemáticos dan a la siguiente pregunta: si P no es un teorema y la negación de P tampoco lo es, ¿es P verdadera o falsa?

Para los formalistas estrictos, la afirmación no es verdadera ni falsa. Una respuesta a la cuestión [(7)] sólo podrá darse si se agrega al sistema un nuevo axioma (o una nueva regla de inferencia) que permita demostrar P o su negación. Para los llamados platónicos, en cambio, P **es** realmente verdadera o falsa y lo que un nuevo axioma nos permitiría es **descubrir** cuál de los dos es el caso.

El autor de esta nota, desde su escasa autoridad, se permite conjeturar que la respuesta final a esta cuestión (si es que existe) está tal vez en una postura intermedia entre el platonismo y el formalismo estricto. El punto de vista platónico parece aceptable en las ramas más "concretas" de la matemática (como la teoría de los números enteros), mientras que el punto de vista estrictamente formalista parece más aceptable para las ramas más "abstractas" (como la teoría de los transfinitos de Cantor). Sin embargo debo admitir que es inútil pedirme una definición de qué significa que una rama de la Matemática sea "concreta" o "abstracta". En particular no sabría en qué grupo ubicar a las geometrías no euclidianas

¿Qué significa que una afirmación sea verdadera? ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que un ente matemático "existe"? Después de un siglo de haber sido formuladas, estas preguntas siguen todavía abiertas. Para dar un nuevo paso hacia la respuesta final (insisto, en el caso de que tal respuesta exista) tal vez debamos esperar algunos siglos hasta que un nuevo Euclides, un nuevo Hilbert o un nuevo Gödel nos enseñe una manera radicalmente distinta de concebir la Matemática.

Parece oportuno cerrar esta cuarta nota con la misma frase que nos sirvió de apertura para la primera; frase que es debida al matemático norteamericano contemporáneo John Allen Paulos y que el autor de esta nota suscribe sin dudarlo: "El lógico matemático Kurt Gödel fue uno de los gigantes intelectuales del siglo XX y, en el supuesto de que la especie se conserve una de las pocas figuras contemporáneas que serán recordadas dentro de 1000 años. A pesar de que en todas las disciplinas es corriente alentar una cierta miopía profesional, lo cierto es que esta opinión no es fruto de un caso de autocomplacencia por parte de los matemáticos. Simplemente es la verdad." ξ

* Lic. en Matemáticas – UBA.

Notas:

(1) A pesar de que ignoraremos la distinción euclídea entre postulados y nociones comunes, a veces, para evitar la frecuente repetición de la palabra axioma, emplearemos también la palabra postulado. Sin embargo, no debe olvidarse que para nosotros "axioma" y "postulado" son sinónimos.

(2) En el lenguaje matemático moderno existe también una clasificación entre las distintas afirmaciones que se demuestran a partir de los axiomas. Específicamente se distingue entre proposiciones (que son la mayoría de las afirmaciones que se deducen de los axiomas), teoremas (que son proposiciones de gran importancia y que tienen muchas veces nombre propio, como el Teorema de Bolzano o el Teorema Fundamental de la Aritmética) y lemas (que son afirmaciones de poca importancia en sí mismos y que simplemente sirven de auxiliares en demostraciones muy complejas). Tal como ocurre con la clasificación entre axiomas y nociones comunes, estas distinciones jerárquicas entre lemas, proposiciones y teoremas son también irrelevantes para los fines de este artículo. Tanto las proposiciones como los lemas serán para nosotros simplemente teoremas, independientemente de su importancia o trascendencia.

(3) Para la Teoría Intuitiva de Conjuntos a cada propiedad se le asocia un conjunto, que es la reunión de todos los entes reales o imaginarios que verifican esa propiedad. Russell demostró que si tomamos como propiedad "es un conjunto que no es elemento de sí mismo" entonces llegamos a una contradicción. Concretamente, si R es el conjunto asociado a esa propiedad entonces la afirmación "R es elemento de sí mismo" es verdadera y falsa al mismo tiempo. ¿Cómo es posible, se preguntaron los matemáticos, que la Teoría *Intuitiva* de Conjuntos sea contradictoria, pero que no lo sean las "anti-intuitivas" geometrías no euclidianas?

(4) El modelo que vamos a describir no es uno de los modelos de Klein, sino que fue desarrollado en un tiempo posterior por el gran matemático francés Henri Poincaré (1854 – 1912).

(5) Es por esto que en la nota anterior decíamos que el conjunto de los teoremas de un sistema axiomático es recursivamente numerable, pues todos los teoremas se obtienen por la aplicación sucesiva de reglas mecánicas a un conjunto finito de axiomas.

(6) Existen todavía unos pocos matemáticos que adhieren a la Escuela Intuicionista, pero constituyen una exigua minoría sin influencia.

(7) Nótese que decimos "una" respuesta y no "la" respuesta.

Bibliografía:

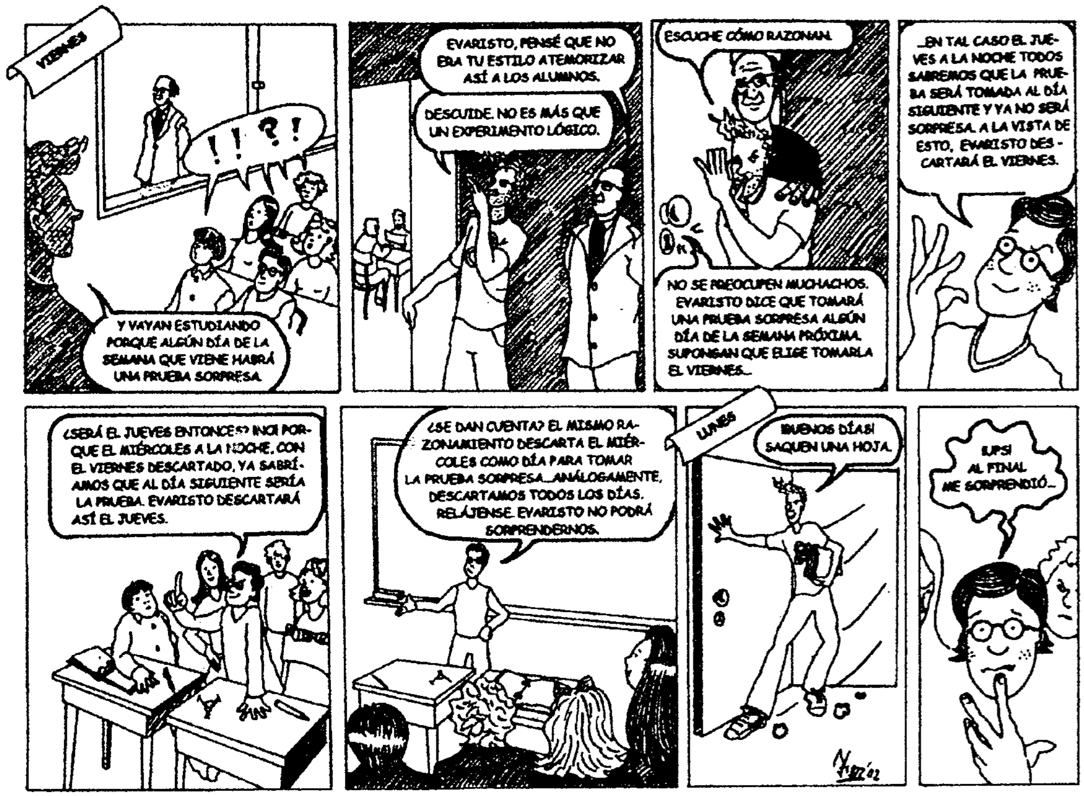
- ARBIB, Michael – *Cerebros, máquinas y matemáticas* – Madrid, Alianza Editorial, 1982.
- BOYER, Carl – *Historia de la matemática* – Madrid, Alianza Universidad Textos, 1996.
- HOFSTADTER, Douglas – *Gödel, Escher y Bach* – Barcelona, Tusquets, 1992.
- NAGEL, Ernest; NEWMAN, James – *El Teorema de Gödel* – Madrid, Tecnos, 1994.
- PENROSE, Roger – *La mente nueva del emperador* – México D.F., Fondo de Cultura Económica, 1996.
- PAULOS, John Allen – *Más allá de los números* – Barcelona, Tusquets, 1991.
- SANTALÓ, Luis – *Geometrías no euclidianas* – Buenos Aires, Eudeba, 1961

"El aspecto kafkiano del carácter y la obra de Gödel se observa claramente en su famoso teorema de lo incompleto (Incompleteness Theorem) de 1930. Aunque este teorema puede ser afirmado y demostrado por una vía rigurosamente matemática, el sentido último que parece encerrar es que el pensamiento racional nunca puede penetrar hasta la verdad final y última. Para ser más exactos: el teorema de lo incompleto muestra que los seres humanos son incapaces de formular una descripción correcta y completa de la serie de los números naturales, {0, 1, 2, 3...}; de ahí que sea razonable pensar que, si los matemáticos no pueden comprender del todo algo tan simple como la teoría de los números, la ciencia no podrá nunca revelar ninguno de los secretos últimos del universo".

Rudy Rucker

(extraído de WELLS, D. *El curioso mundo de las matemáticas*. Barcelona, Gedisa, 2000. pág. 248)

Evaristo en... *Un experimento lógico.*



\>

El 19 de mayo...

de 2002 el diario La Nación publicó:

...la India [...] es uno de los principales productores internacionales de software, cuatro ciudadanos indios han recibido premios Nobel en disciplinas científicas y a su primer ministro Pandit Nehru se le debe la afirmación: "Somos un país demasiado pobre para poder prescindir del uso de la ciencia".

Belocopitow, Enrique. *Cómo crear una Argentina competitiva,*
en La Nación (Sección 7 – Enfoques – página 5),
19 de mayo de 2002.

Cuántos pares son...

... tres medias son el tema de este pequeño opúsculo. Las definiremos, discutiremos brevemente algunas de sus propiedades y posteriormente dejaremos planteadas algunas cuestiones, para muchas de las cuales (debemos confesar) no tenemos ninguna respuesta.

Maximiliano Minim *

Comencemos con una pequeña aclaración: en lo que a estas líneas se refiere debemos entender que cada vez que se dice "número" debe entenderse "número real positivo" (puede ser o no ser entero, puede ser o no ser racional).

Media aritmética

La primera de las tres medias que vamos a analizar es la llamada **media aritmética**, la cual se define del siguiente modo. Si a y b son dos números positivos distintos cualesquiera, entonces su media aritmética es:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

La media aritmética (que desde luego es el habitual promedio) tiene una clara interpretación geométrica. Si representamos a los números a y b en la recta numérica, entonces al número c le corresponderá exactamente el punto medio entre ambos.

Existe una segunda interpretación de la media aritmética. Llamamos una **sucesión aritmética** a aquella que se construye a partir de un número dado, sumándole cada vez una constante (esta constante es llamada la razón de la sucesión).

Por ejemplo, si comenzamos con 4 y vamos sumando 3 cada vez, obtenemos:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22,....

Nótese que 7 es la media aritmética de 4 y 10; 10 es la media de 7 y 13; 13 es la de 10 y 16; etc. En general, en una sucesión aritmética el número que se encuentra en medio de otros dos es igual a la media aritmética de ellos.

Media geométrica

La segunda media a la que vamos a referirnos en este opúsculo es la media geométrica, que se define como sigue. Si a y b son dos números reales positivos entonces su media geométrica es igual a:

$$d = \sqrt{ab}$$

Por ejemplo la media geométrica de 2 y 8 es 4. Así como ocurría con la media aritmética, la media geométrica admite también una interpretación vinculada con cierto tipo de sucesión. En efecto, llamamos **sucesión geométrica** a aquella que se construye a partir de un número dado, multiplicando sucesivamente por una constante (llamada, como antes, la razón de la sucesión). Por ejemplo, si comenzamos con 3 y vamos multiplicando por 2 cada vez obtenemos:

3, 6, 12, 24, 48, ...

En una sucesión de este tipo, cada número en medio de otros dos es igual a la media geométrica de ellos. Por ejemplo, 6 es la media geométrica de 12 y 3; 12 es la de 6 y 24; etc.

La media geométrica admite además una interpretación vinculada con la física. Supongamos que tenemos una balanza perfecta de dos platillos (es decir, una balanza sin rozamiento, sin peso propio y con sus dos brazos perfectamente iguales). También tenemos una manzana y queremos usar la balanza para saber cuánto pesa. Colocamos la fruta en uno de los platillos (cualquiera de los dos), y en el otro ponemos pesas hasta que los brazos queden perfectamente horizontales. Si hemos puesto pesas por valor de 200 g entonces podemos asegurar sin temor a equivocarnos que es éste el peso de la manzana.

Pero supongamos ahora que los dos brazos de la balanza no son perfectamente iguales; sino que uno es más largo que el otro. En este caso, si colocamos la manzana en el platillo derecho y luego equilibramos con pesas en el otro; obtendremos un peso diferente del que tendríamos si colocamos la manzana en el platillo izquierdo y equilibramos con pesas en el otro. ¿Cuál de los dos es el peso real de la manzana? En verdad ninguno de los dos valores obtenidos es el correcto. Puede probarse (a partir de la leyes de la Estática) que el peso real de la manzana es igual a la media geométrica de los pesos obtenidos en cada pesada.

Históricamente algunas de las primeras tablas de logaritmos se construyeron utilizando sucesivamente medias aritméticas y geométricas. En efecto, construyamos una sucesión geométrica de razón 10 que comience con 1 y una sucesión aritmética de razón 1 que comience con 0 (renglón superior e inferior respectivamente):

1, 10, 100, 1000, 10.000, ...

0, 1, 2, 3, 4,...

Se observa que la segunda sucesión está formada por los logaritmos (en base 10) de los números de la primera. Por ejemplo, 0 es el logaritmo de 1; 1 es el de 10; 2 es el de 100; etc. Para obtener el logaritmo de $\sqrt{10}$ (que es la media geométrica entre 1 y 10) debemos calcular la media aritmética de 0 y 1. El logaritmo de $\sqrt{10}$ es entonces 0,5.

Calculando sucesivas medias geométricas en el renglón superior y medias aritméticas en el inferior, podemos ir aproximando los logaritmos de cualquier número que queramos. Este método fue el utilizado por el matemático inglés Henry Briggs a principios del siglo XVII para construir las primeras tablas de logaritmos en base 10.

Notemos que la media aritmética de 1 y 2 es 1,5; mientras que su media geométrica, que es $\sqrt{2}$ (o 1,4142...), es menor. En realidad, puede probarse que si a y b son números reales positivos diferentes entonces la media geométrica de ambos es siempre menor que su media aritmética.

La tercera media

Veamos a continuación la tercera de las medias que vamos a estudiar. Como ejemplo inicial, comencemos calculando esta tercera media para los números 1 y 2. El cálculo involucra un proceso infinito.

Empezando con estos números 1 y 2; calculamos primero su media geométrica (que aparece más abajo a la izquierda) y su media aritmética (a la derecha):

1,414213562373 1,5

En el siguiente paso calculamos la media geométrica de estos dos números (a la izquierda en el renglón de más abajo) y su media aritmética (a la derecha):

1,456475315122 1,457106781187

En el paso siguiente, una vez más, calculamos la media geométrica y la media aritmética de los dos números obtenidos en el paso previo:

1,45679101394 1,456791048155

Y seguimos...

1,456791031048 1,456791031048

Se puede demostrar que tanto la sucesión que se forma a la izquierda, como aquella que se forma a la derecha, van convergiendo al mismo valor. Los de la izquierda se aproximan a este número "por defecto" (son siempre menores al número al cual convergen), mientras que los de la derecha se aproximan "por exceso". En el ejemplo precedente (comenzando con los números 1 y 2), el valor al cual las dos sucesiones se aproximan es aproximadamente igual a 1,4567910348....

El número que se obtiene como resultado de este proceso infinito fue definido por Carl F. Gauss como la **media aritmético-geométrica** de los dos números iniciales. Es decir que 1,4567910348.... es la media aritmético-geométrica de los números 1 y 2.

A continuación algunos ejemplos que se obtienen comenzando con otros pares de números diferentes:

Para 2 y 5; la media aritmético-geométrica es aproximadamente igual a 3,328997146... Para 4 y 5 la media aritmético-geométrica es (siempre aproximadamente) 4,486057164.... Para 2,5 y 6,3 la media aritmético-geométrica es 4,181531704...

Problemas

Las cuestiones que vamos dejar planteadas, todas ellas referidas a la media aritmético-geométrica, son las siguientes:

1) ¿Es posible dar una interpretación geométrica o física de esta media aritmético-geométrica?

2) Dado un número real M positivo, ¿es posible hallar siempre dos números reales diferentes, a y b, tales que M sea la media aritmético-geométrica de a y b?

3) ¿Es posible que la media aritmético-geométrica de dos números racionales positivos diferentes sea también un número racional? ¿Es posible que la media aritmético-geométrica de dos números enteros diferentes sea también un número entero?

Como dijimos al comenzar, no tenemos respuestas para muchas de ellas. Veremos a continuación unas pocas respuestas.

Respuestas parciales

Para entendernos sin ambigüedades, adoptaremos la siguiente notación: si a y b son dos números reales positivos, llamaremos M(a,b) a la media aritmético-geométrica de a y b. A su vez, abreviaremos la frase "aritmético-geométrica" como "a-g".

M(a,b) se calcula entonces como el límite común de las dos sucesiones definidas del siguiente modo:

$$a_1 = MG(a,b) \qquad b_1 = MA(a,b)$$
$$a_{n+1} = MG(a_n,b_n) \qquad b_{n+1} = MA(a_n,b_n)$$

Los a_n, que se obtienen calculando medias geométricas, forman una sucesión creciente, mientras que los b_n, que se calculan como medias aritméticas, forman una sucesión decreciente. A partir de la desigualdad $MG(a,b) \le MA(a,b)$ puede probarse que:

$$MG(a,b) \le M(a,b) \le MA(a,b)$$

Una de las cuestiones planteadas más arriba nos pide determinar si, dado cualquier número real positivo m, existirán siempre a y b distintos tales que m = M(a,b). Responderemos a continuación esta pregunta.

Una primera propiedad que podemos enunciar acerca de la media a-g y que será de capital importancia para nuestro estudio es la siguiente: si a, b y k son tres números reales positivos entonces M(ka,kb) = kM(a,b). Esto significa, por ejemplo, que si duplicamos tanto al número a como al número b, entonces la media a-g de ambos también se duplicará. Esto se deduce fácilmente del hecho de que MG(ka,kb) = k MG(a,b) y de que MA(ka,kb) = k MA(a,b).
Si fijamos un número a>0, la media a-g nos permite definir la siguiente función:

$$f(x) = M(a,x)$$

Por ejemplo si a = 1 entonces f(2) = M(1,2), f(3) = M(1,3), etc. (cada una de estas medias se calcula mediante el consabido proceso infinito).

Desde luego que para cada valor distinto de a que fijemos obtendremos una función diferente. Sin embargo, todas ellas tendrán algunas características en común. Por ejemplo, no es difícil probar que, cualquiera sea el valor de $a>0$ que fijemos, la función f(x) resultante será creciente. Es decir, si $x \leq x'$ entonces $f(x) \leq f(x')$.

Además, independientemente del a elegido, la función f(x) será continua. No daremos aquí la demostración de este hecho, que es bastante técnica. Sin embargo, el lector interesado puede realizar la demostración sin dificultad. Como sugerencia le indicamos que la continuidad de f(x) se deduce de la propiedad antes demostrada, según la cual $M(ka,kb) = k\,M(a,b)$.

Sea $m>0$ cualquiera, vamos a demostrar que existen a y b distintos entre sí tales que $m = M(a,b)$. Supongamos en primer lugar que $m > 1$, luego $m < 2m - 1$. Sea b un número tal que $m < b < 2m - 1$.

Como $M(b,b) = b$ entonces $m < M(b,b)$. Por otra parte $M(1,b) < MA(1,b) = \_(1 + b) < m$.

Consideremos la función f(x) definida por $f(x) = M(x,b)$. Hemos probado que $f(b) > m$, mientras que $f(1) < m$. Luego, cuando x aumenta desde 1 hasta b la función f(x) pasa de un valor $f(1) < m$ a otro valor $f(b) > m$.

Dado que la función es continua, debe forzosamente existir un número a comprendido entre b y m tal que $f(a) = m$. Como $f(a) = M(a,b)$, hemos probado entonces que existen a y b tales que $M(a,b) = m$.

El caso $m \leq 1$ se resuelve ahora fácilmente. Si $m \leq 1$, tomemos k un número real tal que $km > 1$. Por lo que hemos demostrado antes sabemos que existen a' y b' tales que $M(a',b') = km$. Luego $(1/k)M(a',b') = m$. Se deduce así que:

$$M(a'/k,\ b'/k) = m$$

Si tomamos $a = a'/k$ y $b = b'/k$, entonces $M(a,b) = m$. Queda así probado que dado cualquier número real $m > 0$, existen siempre números a y b, distintos entre sí, tales que $M(a,b) = m$.

Es importante destacar que la demostración que hemos hecho no nos da ninguna fórmula para calcular a y b, ¿existe una tal fórmula? No tenemos respuesta para esta pregunta.

Otra de las preguntas planteadas nos pide determinar si es posible hallar dos números enteros diferentes a y b tales que M(a,b) sea entero. O si existen dos números racionales diferentes a y b tales que M(a,b) es racional.

Aunque aún no tenemos respuesta para estas cuestiones, sí podemos decir en cambio que ambas preguntas son esencialmente la misma. Es decir, si tenemos la respuesta para una de ellas, automáticamente tendremos la respuesta para la otra.

Notemos en primer lugar que todo número entero es racional, luego si existen enteros a y b tales que M(a,b) es entero, entonces ellos mismos son números racionales tales que M(a,b) es racional. Recíprocamente, supongamos que existan números r y s racionales tales que $m = M(r,s)$ sea racional.

Como un número racional es el cociente de dos números enteros, entonces $r = a/b$, $s = c/d$, $m = e/f$, donde los seis números que forman las fracciones son enteros.

Luego $M(a/b,c/d) = e/f$. Multiplicando ambos miembros por el producto bdf obtenemos que $M(adf,\ cbf) = bde$. Si llamamos $A = adf$, $B = cbf$ y $C = cbf$ entonces A, B, C son enteros y $M(A,B) = C$.

Por lo tanto la existencia de números racionales con media a-g racional implica la existencia de números enteros con media a-g entera. Del mismo modo, la inexistencia de unos implica la no existencia de los otros. Sin embargo, aún no sabemos si es que existen números enteros cuya media a-g es también un números entero.

Queda todavía mucho trabajo por hacer. Nos gustaría recibir el resultado de las investigaciones que, al respecto, deseen ustedes desarrollar.ξ

* Matemático recreativo.

Diez funciones que hablan

Es una alegría para nosotros recibir correspondencia de nuestros lectores. Más aún si la misma surge como respuesta a alguna de las notas publicadas en la revista. Porque de esta manera, se construye en Axioma un espacio de discusión e intercambio que nos enriquece a todos.

Josefina Elisa Palombella *

Motivada por la lectura de la entrevista a Juan Foncuberta (Axioma Nº 17), escribí una lista de ejercicios para el tema de funciones (2º año de secundaria, 9º año de E.G.B.), que quiero compartir con los lectores de la revista.

Creo que se puede mostrar al alumno la existencia de numerosas funciones vinculadas a distintos campos de la actividad humana y su utilidad. Cada uno de estos ejercicios brinda la posibilidad de explayarse respecto de los temas involucrados y así sacar el mayor provecho posible para beneficio del alumno, enriqueciendo sus conocimientos.

Los ejercicios...

1) El consumo del Gol 1.6 en ruta a 100 km/h está dado por:

$C = 0{,}1 \cdot x$

x = distancia recorrida en km.

C =consumo en litros

a) Calcular cuántos litros de nafta hacen falta para recorrer la distancia Buenos Aires-Mar del Plata (400 km).
b) Calcular qué distancia puede recorrer el auto con el tanque lleno.
c) Graficar la función.

2) La función que vincula la temperatura de un cadáver con el tiempo transcurrido desde la muerte es:

$T = 37 - 0{,}5 \cdot t$

T = temperatura del cuerpo en ºC

t = tiempo transcurrido desde la muerte en horas.

a) Calcular cuántas horas lleva muerta una persona cuya temperatura es de 34 ºC.
b) Calcular cuál debiera ser la temperatura del cuerpo de una persona que se supone lleva muerta 10 horas.
c) Discutir los límites de aplicación de la función.
d) Graficar la función.

3) Se estima que cada año que pasa la población mundial crece cerca de un 2%. Su valor para x años después del 2000 está estimado por:

$P = 6000000000 \cdot 1{,}02^x$

x = cantidad de años después del 2000

P = cantidad de habitantes

a) Calcular la población estimada para el año 2008.
b) Discutir si la fórmula dada serviría para calcular la población en el año 2100.
c) Graficar la función.

4) Un auto se compró nuevo en \$20000 y cada año que pasa se deprecia un 5%. Su valor dentro de x años está dado por:

$y = 20000 \cdot 0{,}095^x$

a) Calcular el valor del auto dentro de 8 años.

b) Discutir si la fórmula dada serviría para calcular el valor del auto dentro de 50 años.
c) Graficar la función.

5) La función que permite expresar en m/seg, una velocidad que está dada en km/h es:

$$y = \frac{5}{18} \cdot x$$

x = velocidad en km/h
y = velocidad en m/seg

a) Completar la siguiente tabla, indicando para cada caso un ejemplo real en el que se manifieste dicha velocidad.

x (km/h)	y (m/seg)
	2,78
30	
	13,89
80	
	27,78
120	
	38,89
	55,56

b) Graficar la función.

6) Cuando al costo de cierta mercadería se le suma un porcentaje del mismo, se obtiene el precio de venta. Cada comerciante sabe *qué porcentaje gana sobre el costo.*
Sin embargo si quiere saber cuánto dinero ganó al final del día lo que necesita conocer es *qué porcentaje gana sobre la venta.*
La función que vincula ambos porcentajes está dada por:

$$v = \frac{c}{1+c}$$

v = porcentaje que se gana sobre la venta
c = porcentaje que se gana sobre el costo

Nota: El símbolo % indica denominador 100. Por ejemplo si el porcentaje que se gana sobre el costo es 25%, entonces $c = \frac{25}{100}$ ó $c = 0{,}25$.

a) Calcular qué porcentaje gana sobre la venta un comerciante que marca su mercadería con un 30% sobre el costo.
b) Si el comerciante anterior al cerrar la caja contabilizó un total de $1000 de ingresos por ventas, ¿cuánto dinero ganó?
c) Graficar la función.

7) La velocidad de salida de un líquido por un orificio de un recipiente es una función que depende de la altura del líquido, por encima del orificio:

$$v = 4{,}43 \cdot \sqrt{h}$$

h = altura del líquido en m
v = velocidad de salida en m/seg

a) Calcular qué altura de líquido permite una velocidad de 1,4 m/seg.
b) Determinar la velocidad cuando la altura del líquido es de 5 m.
c) Discutir posibles aplicaciones de la función.
d) Graficar la función.

8) La altura a la que se encuentra una piedra que se dejó caer desde un edificio de 80 m de altura, a medida que transcurre el tiempo está dada por:

$$h = 80 - 5 \cdot t^2$$

t = tiempo en seg
h = altura en m

a) Calcular cuánto tiempo debe transcurrir para que la piedra llegue al piso.
b) Calcular la altura a la que se halla la piedra a los 3 segundos.
c) Graficar la función.

9) La función que permite redondear un número x a 2 decimales es:

$$y = \frac{[x \cdot 100 + 0{,}5]}{100}$$

donde los corchetes indican que se debe tomar la parte entera del número encerrado por el corchete.

a) Redondear a 2 decimales los números 4,872 ; 4,875 y 4,878 sin utilizar la función.
b) Idem, utilizando la función.

c) Discutir sobre la utilidad de la función en distintos contextos (uso cotidiano, computación, etc.).
d) Escribir la función que permite redondear un número x a 3 decimales.

10) El tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa alrededor del Sol está dado por:

$$T = 5{,}5 \cdot 10^{-13}.\sqrt{R^3}$$

T = tiempo en dar una vuelta alrededor del Sol en años terrestres.
R = distancia media del planeta al Sol expresada en km.

Completar la siguiente tabla, indicando el período de cada planeta redondeado a 2 decimales:

Planeta	R	T
Mercurio	58.10^6	
Venus	108.10^6	
Tierra	149.10^6	
Marte	228.10^6	
Júpiter	778.10^6	
Saturno	1426.10^6	
Urano	2868.10^6	
Neptuno	4494.10^6	

ξ

* Profesora en Matemática y Astronomía egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Bibliografía:

- Déplanche. *Diccioförmulas*. Barcelona, Editorial Edunsa, 1996.
- Folivi–Godman. *Física 1*. Colombia, Editorial Voluntad, 1976.
- Widman.—Schütte. *Guía de las estrellas*. Barcelona, Editorial Omega, 1989.
- Diario Clarín de fecha 14/2/01.

≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥≥

Un 19 de junio...

de 1669 nació en Ostashkov, Rusia, Leonty Magnitsky quien escribió *Aritmética* en 1703, la primera guía para matemáticos publicada en dicho país. Este libro fue durante 50 años el texto básico de matemática en Rusia.

También en Magnitsky produjo una edición rusa de las tablas de logatirmos de Vlacqn

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Magnitsky.html

Por qué Gauss no fue un filólogo (Primera parte)

Este artículo está basado en la charla que el autor dictó en las aulas del Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González (ciudad de Buenos Aires, Argentina) el día 9 de noviembre de 2001.

Gustavo Piñeiro *

Esta nota tratará sobre la construcción de polígonos regulares con regla y compás, y hablará específicamente sobre cuáles polígonos pueden construirse y cuáles no pueden construirse de esa manera. Sin embargo, antes de entrar de lleno en materia, discutiremos brevemente algunos temas relacionados con este problema y que son de gran interés en sí mismos. Comenzaremos con una de las cuestiones más fascinantes y complejas de toda la Aritmética: la distribución de los números primos.

Los extraños números primos

Dado que sólo trabajaremos con enteros positivos, podemos decir simplemente que un número primo es un entero mayor que 1 que solamente es divisible por 1 y por sí mismo. Los números que son mayores que 1 y que no son primos son llamados compuestos. La sucesión de los números primos comienza con 2, 3, 5, 7, 11, 13,... y ya Euclides en el siglo III a.C. dio una demostración de que esta sucesión nunca termina.

Durante siglos la sucesión de los números primos ha fascinado y desconcertado a generaciones de matemáticos, tanto grandes como pequeños, principalmente a causa de su comportamiento aparentemente aleatorio e impredecible. Citemos algunos ejemplos:

A pesar de que los números primos son infinitos, no es difícil demostrar que, no importa cuán grande sea el número n que elijamos, siempre es posible encontrar n enteros consecutivos ninguno de los cuales es primo (1). Es decir, existen en la sucesión de los primos "huecos" o "saltos" tan grandes como se desee. En particular, por mencionar una cifra elegida al azar, es posible hallar diez mil millones de números enteros consecutivos todos los cuales son compuestos.

Imaginemos que una persona que no supiera sobre la existencia de infinitos primos estuviera revisando uno por uno los números enteros positivos para determinar cuáles son primos y cuáles no. Si esta persona se encontrara con millones y millones de números consecutivos todos compuestos entonces estaría perfectamente habilitada para conjeturar que ya no hay más primos y que en total sólo hay una cantidad finita de ellos. Sin embargo, más allá de todos esos millones de números compuestos, tarde o temprano aparecerá otro primo.

Otro hecho curioso es que, a pesar de que existen estos grandes saltos en la sucesión de los primos, se conjetura que existen infinitos pares de los llamados *primos gemelos*, es decir infinitos pares de primos p y q tales que q = p + 2 (como ocurre con 3 y 5, 11 y 13, 17 y 19, etc). Tenemos entonces una sucesión que da saltos tan grandes como se desee, digamos saltos de diez mil millones de números entre un término y el siguiente, para encontrarse, tal vez un poco más allá, con dos términos (p y p + 2) que son números prácticamente consecutivos.

Este extravagante comportamiento ha dificultado durante décadas la resolución de muchos problemas vinculados con los números primos. Como consecuencia de esto, existe una gran cantidad de problemas relacionados con ellos que tienen enunciados muy sencillos, pero que han resistido todo intento de resolución. Uno de estos problemas ya fue mencionado en el párrafo anterior: aunque se cree que hay infinitos pares de primos gemelos, este hecho aún no ha sido demostrado ni refutado.

Otro problema sin resolver es la famosa conjetura de Goldbach [2], que dice que todo entero par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos primos (por ejemplo, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, etc.). Todavía no se sabe si esto es verdadero o es falso, aunque se cree que es verdad. Otros problemas: ¿Contiene la sucesión de Fibonacci una cantidad infinita de números primos [3]? No se sabe. ¿Hay infinitos primos que sean un cuadrado perfecto más uno (como por ejemplo 17 que es $4^2 + 1$)? No se sabe. ¿Existen infinitos primos de Mersenne, es decir que sean de la forma $2^m - 1$ (por ejemplo $7 = 2^3 - 1$)? [4] No se sabe. ¿Existen infinitos primos formados únicamente por cifras 1 (como 11 o 1.111.111.111.111.111.111)? No se sabe.

Aunque lo que voy a decir no sea rigurosamente cierto, creo que puede dar una idea de la sensación que siempre he tenido al trabajar con números primos: siempre he creído que todo problema sobre números primos o bien es inmediatamente obvio de resolver o bien es de resolución casi imposible.

Todos estos problemas abiertos han insuflado en muchos matemáticos el deseo de "domesticar" a la sucesión de los números primos; concretamente, el deseo de hallar fórmulas que describan su comportamiento. Es cierto que existen las llamadas *fórmulas asintóticas*, es decir fórmulas que se refieren al comportamiento de los primos entre 1 y n cuando n tiende al infinito [5]. Sin embargo, estas fórmulas, aunque de gran importancia y utilidad en sí mismas, no son completamente satisfactorias para resolver algunos de los problemas abiertos relacionados con primos. Es por eso que muchos matemáticos han buscado fórmulas que sean más "precisas", es decir fórmulas que explícitamente nos den uno por uno todos los números primos. Buscamos entonces una función f tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 7$, y que, en general, $f(n)$ sea igual al n-ésimo número primo.

En rigor de verdad, sí existe una función así. Puede probarse, de hecho, que existe un número real x tal que si definimos $f(n)$ como $f(n) = [10^{2^n} x] - [10^{2^{n-1}} x]$ (los corchetes significan "parte entera"), entonces se cumple que $f(n)$ es igual al n-ésimo número primo. La trampa estriba en que x = 0,0**2**0**3**000**5**0000000**7**0..., es decir, después de la cifra decimal 2, el número x se construye colocando tantos ceros como una potencia de dos, menos uno, y luego un número primo. En síntesis, para conocer el número x es necesario conocer previamente toda la sucesión de los números primos. La fórmula se come su propia cola y resulta completamente inútil en la práctica.

Existen otras fórmulas para calcular uno por uno todos los primos, pero por razones de espacio no las reproduciremos aquí. Estas otras fórmulas escapan al círculo vicioso que se genera en el ejemplo anterior: realmente generan la sucesión de los primos sin necesidad de conocerla previamente. El inconveniente es que estas otras fórmulas resultan ser tan complejas de calcular que la cantidad de operaciones que requieren iguala o supera a la cantidad de operaciones necesarias para desarrollar simplemente la Criba de Eratóstenes.

¿Existe alguna función $f(n)$ que nos dé uno por uno todos los números primos, que sea relativamente sencilla de calcular (comparada, por ejemplo, con la Criba de Eratóstenes) y que sea útil en la práctica (en el sentido de que no requiera conocer previamente todos los primos)? Se cree que no existe una fórmula así, aunque esto no ha sido demostrado (sólo se han resuelto algunos casos particulares, por ejemplo se sabe que $f(n)$ no puede ser un polinomio en la variable n, no importa de qué grado). La existencia o no de una tal fórmula $f(n)$ es otro problema abierto relacionado con los primos.

Los primos de Fermat

Ante el fracaso de hallar una fórmula práctica que nos dé uno por uno todos los números primos, algunos matemáticos han perseguido el objetivo, un poco más modesto, de hallar al menos una fórmula que dé siempre primos, aunque no sean todos ellos. Es decir, hablamos ahora de una función f tal que para todo n el valor de $f(n)$ sea primo. Para evitar repeticiones, podemos agregar la condición de que f sea una función creciente (es decir, $f(n) < f(n + 1)$). Por ejemplo, podría ser $f(1) = 7$, $f(2) = 13$, $f(3) = 23$, $f(4) = 101$, etc. Adelantemos que tampoco se conoce una fórmula que sea útil en la práctica y que cumpla este requisito, aunque tampoco se ha demostrado que no pueda existir (como antes, se sabe que una tal f no puede ser un polinomio). Uno de los intentos más famosos en la búsqueda de una fórmula así se debe a Pierre de Fermat.

Es claro que, cualquiera sea m, la expresión $2^m + 1$ dará por resultado un número impar. Este número podrá ser, o no, un primo. Puede probarse que si $2^m + 1$ es primo entonces necesariamente m debe ser una potencia de 2 (eventualmente 2^0) [6]. Fermat conjeturaba que era cierta también la afirmación recíproca; es decir, que si m es una potencia de 2 entonces $2^m + 1$ es primo. En otras palabras, Fermat conjeturaba que la fórmula $f(n) = 2^{2^n} + 1$ daba, para cada $n \geq 0$, un número primo.

Veamos si es así: para n = 0, tenemos $f(0) = 2^{2^0} + 1 = 3$, que es primo. Para n = 1, tenemos $f(1) = 2^{2^1} + 1 = 5$, que es primo. Para n = 2, tenemos $f(2) = 2^{2^2} + 1 = 17$, que es primo. Para n = 3, tenemos $f(3) = 2^{2^3} + 1 = 257$, que es primo. Para n = 4, tenemos $f(4) = 2^{2^4} + 1 = 65.537$, que es primo. Pero lamentablemente $f(5) = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ no lo es, ya que se factoriza como 641 por 6.700.417. La conjetura de Fermat resulta ser falsa.

Se denominan *primos de Fermat* a aquellos números que se obtienen de la fórmula $f(n) = 2^{2^n} + 1$ y que son efectivamente primos. Los cinco números mencionados más arriba son los únicos primos de Fermat que se conocen y se cree que son los únicos que existen. ¿Son realmente 3, 5, 17, 257 y 65.537 los únicos números que son primos de Fermat? No se sabe, es éste otro problema abierto.

Observemos que en esta ocasión la conjetura de Fermat (uno de los más grandes "conjeturadores" de la historia de la Matemática) ha resultado bastante equivocada: no sólo la fórmula no genera siempre números primos, sino que, aparentemente, ni siquiera genera infinitos.
En las líneas que siguen los primos de Fermat serán de suma importancia para nosotros, sin embargo los dejaremos de lado por un momento para adentrarnos en el terreno de las construcciones con regla y compás.

Regla y compás

Los geómetras de la antigüedad clásica consideraban que toda construcción geométrica elegante debía realizarse usando regla y compás. Por compás entendemos un instrumento esencialmente igual al útil escolar homónimo: una herramienta que, dado un punto y un segmento nos permite trazar una circunferencia que tenga a ese punto por centro y a ese segmento por radio. En cuanto a la regla, entendemos por tal un instrumento rectilíneo que nos sirve de apoyo para trazar segmentos, pero que no está graduado; esto quiere decir que, a diferencia del útil escolar homónimo, la regla clásica no permite medir longitudes.

Un problema general referido a esta concepción de la geometría es el siguiente: ¿qué construcciones pueden hacerse y qué construcciones no pueden hacerse usando solamente regla y compás? Son muchas las construcciones sencillas e interesantes que se ajustan a estas restricciones. Por ejemplo, dado un segmento y un punto p exterior a él es posible trazar un segmento perpendicular al segmento dado que pase por el punto p. También puede trazarse un segmento paralelo al dado que pase por ese punto. Puede hallarse la bisectriz de un ángulo dado o el punto medio de un segmento. Veremos otras construcciones posibles en unos pocos minutos.

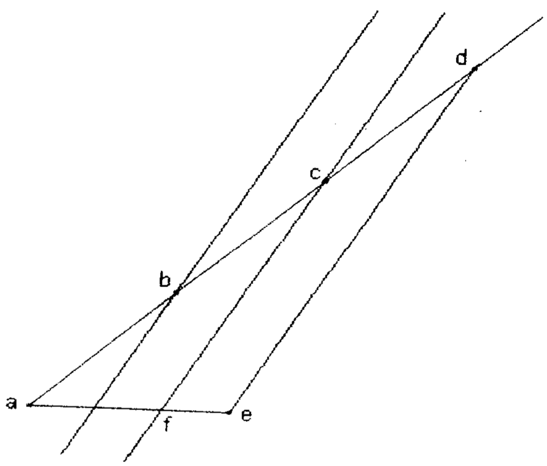
Por otra parte, muy probablemente los lectores hayan oído hablar alguna vez de los tres problemas clásicos de construcción llamados "la cuadratura del círculo", "la duplicación del cubo" y "la trisección del ángulo".

La cuadratura del círculo es el problema que pide, dado un cuadrado arbitrario, hallar el modo de construir (se sobreentiende que sólo con regla y compás) un círculo que tenga la misma área que el cuadrado dado. La duplicación del cubo pide, dada la arista de un cubo arbitrario, construir la arista de un cubo que tenga el doble de volumen. Finalmente, la trisección del ángulo nos pide, dado un ángulo cualquiera, dividirlo en tres partes iguales. Ninguno de estos tres problemas tiene solución y veremos más adelante la explicación del porqué.

Una cuestión estrechamente relacionada con los problemas de construcciones con regla y compás es el siguiente: fijemos un segmento arbitrario como unidad de longitud (es decir la longitud de este segmento será, por definición, igual a 1) ¿Qué longitudes tendrán los segmentos que pueden construirse, usando regla y compás, a partir de este segmento unidad? ¿Abarcarán estas longitudes todos los números reales? La respuesta, como veremos, es que no. Las longitudes de estos segmentos abarcan un conjunto bien definido de números, el cual, en cierto sentido, es mucho menor que el conjunto de todos los reales.

Por una parte es obvio que a partir del segmento unidad podemos construir cualquier segmento cuya longitud sea un número entero n: para ello trazamos con la regla un segmento suficientemente largo y luego a partir de uno de sus extremos proyectamos, usando el compás, n veces la longitud del segmento unidad.

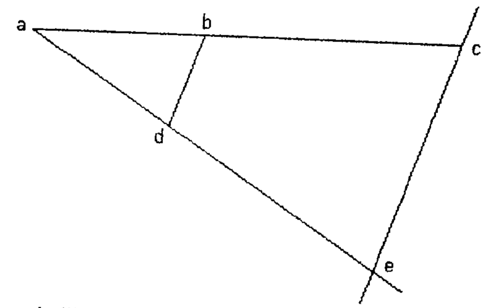
Por otra parte podemos también construir cualquier segmento cuya longitud sea un número racional positivo. El gráfico muestra como ejemplo la construcción de un segmento de longitud $\frac{2}{3}$.



En la figura precedente, ab, bc, cd son segmentos iguales entre sí y ae es un segmento unitario (los tres primeros son construidos proyectando tres veces la misma longitud a partir del punto a). Por b y c se trazan segmentos paralelos al segmento de. El Teorema de Thales nos garantiza que la longitud de af es efectivamente $\frac{2}{3}$. Es fácil imaginar cómo este método puede generalizarse para construir cualquier otro número racional positivo.

Pero nuestras posibilidades no se agotan con los números racionales. Si construimos con regla y compás un cuadrado de lado unidad y trazamos su diagonal, es bien sabido que ésta tiene longitud $\sqrt{2}$, y que este número es irracional.

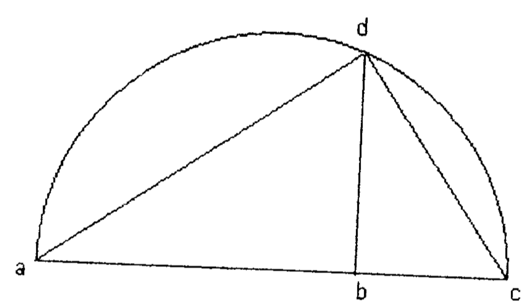
¿Cuáles son entonces las longitudes que pueden construirse? Veamos: si hemos construido un segmento de longitud α y otro de longitud β, es claro que podemos construir con regla y compás un segmento de longitud $\alpha + \beta$. Si además $\beta > \alpha$, entonces también es fácil ver que podemos construir un segmento de longitud $\beta - \alpha$. El Teorema de Thales a su vez nos da métodos para construir segmentos cuyas longitudes son $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\sqrt{\alpha}$:



En el dibujo suponemos que $\alpha > 1$ (si $\alpha < 1$ se procede de igual manera). Construimos el segmento ab de longitud 1, el segmento ac de longitud α y el segmento ad de longitud β. Luego trazamos el segmento ce, que es paralelo a bd y pasa por c. Partiendo de la relación $\frac{ae}{ac} = \frac{ad}{ab}$ se demuestra inmediatamente que ae tiene longitud $\alpha\beta$.

La construcción de $\frac{\alpha}{\beta}$ puede explicarse sobre el mismo dibujo. Trazamos ab de longitud 1, ac de longitud β y ae de longitud α. Trazamos por b el segmento bd, que es paralelo a ce. La misma relación antes mencionada, $\frac{ae}{ac} = \frac{ad}{ab}$, permite demostrar que la longitud de ad es $\frac{\alpha}{\beta}$.

Finalmente, el gráfico siguiente nos muestra cómo, dado un segmento de longitud α, podemos construir un segmento de longitud $\sqrt{\alpha}$.



Trazamos el segmento ab de longitud 1 y el segmento bc de longitud α (suponemos aquí $\alpha < 1$, pero el mismo método funciona para $\alpha > 1$). Trazamos la semicircunferencia que tiene al segmento ac como diámetro (esto puede hacerse fácilmente con regla y compás). Luego desde b trazamos el segmento que es perpendicular a ac y que tiene un extremo en la semicircunferencia trazada.

El ángulo adc es recto, de ello se deduce fácilmente que abd y bdc son triángulos rectángulos semejantes. De la proporcionalidad de sus lados obtenemos que $\frac{ab}{bd} = \frac{bd}{bc}$. De esta relación se demuestra (dejamos los detalles a los lectores) que la longitud de bd es, tal como deseábamos, $\sqrt{\alpha}$.

Segmentos constructibles

En resumen, si hemos podido construir segmentos de longitudes α y β respectivamente, entonces podemos construir con regla y compás segmentos de longitudes $\alpha + \beta$ $\beta - \alpha$ (si $\beta > \alpha$), $\beta\alpha$, $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\sqrt{\alpha}$. Por ejemplo, esto implica que podemos construir con regla y compás segmentos de longitudes 2, $\sqrt{7}$ o $\sqrt{1+\sqrt{17}}$. Ahora bien, la pregunta es ¿qué tienen en común estos números?

El número 2 es raíz de un polinomio irreducible [7] de grado 1 con coeficientes enteros (este polinomio, claro está, es $x - 2$). El número $\sqrt{7}$ es también raíz de un polinomio irreducible con coeficientes enteros, en este caso de grado 2. Este polinomio es $x^2 - 7$.

¿Qué ocurre con $\sqrt{1+\sqrt{17}}$? Para analizarlo llamemos $a = \sqrt{1+\sqrt{17}}$. Tenemos entonces:

$$a = \sqrt{1+\sqrt{17}}$$
$$a^2 = 1 + \sqrt{17}$$
$$a^2 - 1 = \sqrt{17}$$
$$(a^2 - 1)^2 = 17$$
$$a^4 - 2a^2 + 1 = 17$$
$$a^4 - 2a^2 - 16 = 0$$

Por lo tanto, el número $a = \sqrt{1+\sqrt{17}}$ es raíz del polinomio $x^4 - 2x^2 - 16$, que tiene coeficientes enteros, es de grado 4 y, puede probarse, es irreducible.

Vale en realidad el siguiente teorema, que será de suma importancia para nosotros: fijado un segmento arbitrario como unidad, un segmento de longitud x puede construirse con regla y compás si y sólo si x es raíz de un polinomio irreducible con coeficientes enteros cuyo grado es una potencia de 2 (eventualmente $1 = 2^0$).

La demostración de este teorema excede los objetivos de esta nota. Acotemos simplemente, a modo de observación intuitiva, que en el cálculo que nos permitió hallar el polinomio del cual es raíz el número $\sqrt{1+\sqrt{17}}$ hemos debido elevar dos veces el número a al cuadrado (una vez por cada raíz cuadrada que aparece en la construcción del número $\sqrt{1+\sqrt{17}}$). Al elevar por primera vez hemos obtenido a^2 y al elevar por segunda vez hemos obtenido a^4. Obtuvimos de este modo un polinomio de grado 4. De haber existido una tercera raíz cuadrada hubiéramos obtenido a^8 y, en consecuencia, hubiéramos conseguido un polinomio de grado 8. Una nueva raíz cuadrada nos hubiera generado un polinomio de grado 16. Podemos entonces aceptar intuitivamente la afirmación de que las longitudes de los segmentos constructibles con regla y compás provienen de polinomios con grado igual a una potencia de 2.

Cuadratura y duplicación

¿Por qué no es posible lograr la cuadratura del círculo? Recordemos que este problema nos pide, dado un círculo cualquiera, construir el lado de un cuadrado que tenga la misma área. Supongamos que esto fuera posible, entonces en particular podríamos elegir un círculo de radio 1. Como este círculo tiene área π, deberíamos poder construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$. Ahora bien, si pudiéramos construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$ podríamos también construir un segmento de longitud π.

¿Es posible construir un segmento de longitud π? De acuerdo con el teorema que mencionamos antes, esto es posible si y sólo si π es raíz de un polinomio irreducible con coeficientes enteros cuyo grado es una potencia de 2. Pero es sabido que π es un número trascendente, esto significa que no es raíz de ningún polinomio con coeficiente enteros, no importa de qué grado.

Como no es posible construir un segmento de longitud π, entonces tampoco es posible hallar un método para la cuadratura del círculo.

¿Qué pasa con la duplicación del cubo? Dado un cubo de arista 1, deberíamos poder construir la arista de un cubo con el doble de volumen. Esta arista será un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$. Pero el número $\sqrt[3]{2}$ es raíz del polinomio $x^3 - 2$, que tiene coeficientes enteros y es irreducible, pero su grado no es potencia de 2. Como no es posible construir un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$ entonces no es posible hallar un método para la duplicación del cubo.

La demostración de la imposibilidad de la trisección del ángulo deberá esperar hasta la segunda parte de esta nota.

Fermat y los polígonos regulares

El problema central que nos ocupa es qué polígonos regulares pueden construirse con regla y compás. Supongamos que vamos a construir un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio 1. Los lados de este polígono tendrán entonces una longitud bien definida, la cual dependerá del valor de n (por ejemplo, si n = 4, la longitud es $\sqrt{2}$, si n = 6, la longitud es 1).

Un polígono regular de n lados será constructible con regla y compás si y sólo si la longitud de su lado es raíz de un polinomio irreducible con coeficientes enteros cuyo grado es una potencia de 2. Analizaremos en la segunda parte de la nota cuáles son exactamente los valores de n que cumplen esta condición y veremos además por qué Carl F. Gauss fue matemático y no filólogo (aunque parezca extraño, ambas cuestiones están relacionadas). Adelantaremos por ahora solamente una afirmación, la cual marca otra curiosa relación entre dos temas aparentemente desconectados entre sí: si p es un número primo, entonces un polígono regular de p lados puede construirse con regla y compás si y sólo si p es un primo de Fermat. La explicación del porqué de esta curiosa relación deberá esperar hasta la segunda parte.§

* Lic. en Matemáticas – UBA.

Notas:

(1) Para demostrarlo basta observar que los números comprendidos entre (n + 1)! + 2 y (n + 1)! + (n + 1), incluyendo a ambos, son n enteros consecutivos divisibles respectivamente por 2, 3, 4,..., n + 1.

(2) Hace unas semanas circuló la noticia de que el problema de la Conjetura de Goldbach había sido resuelto. La supuesta demostración de la conjetura puede verse en la página web http://www.mathpreprints.com/math/Preprint/Kerryme1165/20020315.1/1/Goldbach1.pdf; sin embargo la demostración no es correcta y el problema en realidad continúa abierto.

(3) La sucesión de Fibonacci es aquella que comienza con 1, 1,... y en la que cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Los primeros seis términos son 1, 1, 2, 3, 5, 8.

(4) Los primos de Mersenne se relacionan estrechamente con los llamados *números perfectos*. Un número es perfecto si y sólo si es igual a la suma de sus divisores propios, es decir, sin incluir entre los divisores al número en sí. Por ejemplo 6 es perfecto ya que sus divisores propios son 1, 2 y 3, y vale que 6 = 1 + 2 + 3. Otro número perfecto es 28 (28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14). Puede probarse que un número par es perfecto si y sólo si es igual a $2^{m-1}(2^m - 1)$, donde $2^m - 1$ es un primo de Mersenne. Por ejemplo, $6 = 2(2^2 - 1)$ y $28 = 2^2(2^3 - 1)$. La existencia de infinitos primos de Mersenne implicaría entonces la existencia de infinitos números perfectos pares, y viceversa. No se sabe, es éste otro problema abierto, si existe algún (aunque sea uno solo) número perfecto impar.

(5) Si llamamos $\pi(n)$ a la cantidad de primos que hay entre 1 y n, una de las fórmulas asintóticas más famosas dice que el cociente entre $\pi(n)$ y $n/\ln(n)$ tiende a 1 cuando n tiende al infinito.

(6) Demostremos la afirmación: Supongamos que m no es potencia de 2; luego existe un número impar t > 1 y un número s (par o impar) tal que m = st. Tenemos por otra parte la identidad $x^t + 1 = (x + 1)(x^{t-1} - x^{t-2} + ... + 1)$. Hacemos $x = 2^s$ y entonces tenemos que $2^m + 1 = (2^s + 1)(2^{s(t-1)} - 2^{s(t-2)} + ... + 1)$. Hemos escrito al número $2^m + 1$ como el producto de dos enteros mayores que 1, por lo que $2^m + 1$ no es primo. Hemos probado que si m no es potencia de 2 entonces $2^m + 1$ no es primo, vale también entonces la afirmación contrarrecíproca, es decir, si $2^m + 1$ es primo entonces m es potencia de 2.

(7) Irreducible significa que no puede escribirse como producto de dos polinomios con coeficientes enteros de grado menor. El polinomio $x^2 - 7$, mencionado inmediatamente después como polinomio irreducible, puede escribirse como $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$, pero estos polinomios no son de coeficientes enteros.

Bibliografía:

- COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert – *What is Mathematics* – Oxford, Oxford University Press, edición revisada por Ian Stewart, 1996.
- HARDY, G.H.; WRIGHT, E.M. – *An Introduction to the Theory of Numbers* – Oxford, Oxford University Press, quinta edición, 1998.
- NEWMAN, James – *Sigma, el mundo de las matemáticas, tomo 1* – Barcelona, Grijalbo, 1997.

≥≥

"Puede que parezca paradójico, pero es muy probable que la oscuridad innecesaria de los escritos de Gauss –que tanto dificulta su lectura– se deba precisamente al intenso esfuerzo que realizaba para alcanzar la pura perfección lógica de la forma. [...] En sus obras, toda afirmación va seguida de su correspondiente demostración y ocupa su lugar según un orden cronológico y preciso absolutamente perfecto, así que no hay nada de lo que podamos quejarnos. Pero cuando hemos terminado nuestra atenta lectura, pronto nos damos cuenta de que no hemos hecho más que empezar, de que no estamos más que en el umbral de un templo que guarda, detrás de su velo, un precioso secreto que se oculta a nuestros ojos. No disponemos de ninguna pista sobre el proceso por el que se obtiene el resultado final; ni siquiera logramos determinar cuáles son las consideraciones que sirven de guía en las sucesivas etapas del camino y que nos permiten alcanzar la demostración. Gauss dice mucho en muy poco espacio, pues sólo da la síntesis y elimina el análisis de sus proposiciones. *Pauca sed matura* (poco pero muy madurado) era el lema con el que describía el estilo que le gustaba emplear en sus escritos matemáticos."

(extraído de WELLS, D. *El curioso mundo de las matemáticas.* Barcelona, Gedisa, 2000. pág. 182 - 183)

Eta Carinae

¿La próxima supernova?

Pablo Alberto Ingrassia *

En el cielo de nuestro hemisferio, muy cerquita de la Cruz del Sur, se encuentra ia constelación de Carina, que junto con las constelaciones Vela y Puppis, conforman la antigua gran constelación llamada Argos (la nave de los argonautas).

Dentro de Carina hay una estrella llamada Eta, es decir, la séptima estrella en cuanto a brillo al momento de confeccionarse el catálogo estelar (recuérdese que en cada constelación, las estrellas que la conforman se bautizan a partir del nivel de brillo; es así que alfa es la más brillante, beta la siguiente, etc.).

Eta Carinae es una estrella supergigante azul, de magnitud variable. Muchos astrónomos la consideran el objeto más brillante y masivo de toda la Vía Láctea. Es también uno de los más raros y extraños cuerpos celestes (su brillo fluctúa de manera irregular y completamente impredecible).

Hoy en día, Eta Carinae mantiene en vilo a más de un científico ya que su luminosidad se ha incrementado levemente, sumergida en una de las nebulosas más distintivas y hermosas del cielo, llamada NGC 3372.

Esta estrella es 120 veces más masiva que nuestro Sol, y casi 2 millones de veces más luminosa, lo que significa que si se la ubicara a una distancia 50 veces mayor que la que separa a Plutón de nosotros, la veríamos tal como vemos actualmente al Sol en el cielo.

Se la clasifica dentro del grupo de las LBV (Variable Luminosa Azul), objeto cuya temperatura superficial y masa se aproximan al límite teóricamente permitido para que una estrella funcione como tal.

La temperatura superficial oscila entre los 12.000° C y los 27.000° C (el Sol tiene 5.600° C). A pesar de semejante calor, Eta Carinae es muy compacta, y su tamaño no es mayor que el diámetro de la órbita de Mercurio (110 millones de km). Si reemplazáramos a nuestro Sol por esta estrella, la Tierra sería freída instantáneamente.

Hacia la tercera década del siglo XIX, Eta Carinae era considerada una inusual y poco distinguida estrella variable que oscilaba entre las magnitudes 2 y 4.

Luego, en 1830, el astrónomo John Herschel notificó que el brillo de esta estrella había aumentado levemente, llegando en diciembre de 1837 a la primera magnitud (tal como brilla Antares, hoy en día, en Escorpio).

Investigando un poco, Herschel pudo armar una historia reciente de esta misteriosa estrella, descubriendo anotaciones que la ubicaban en magnitud 1 en 1827 y en 1832. Ya en 1838 volvió a situarse en torno a la cuarta magnitud, y en 1843 llegó rápidamente a magnitud –1, siendo durante un breve lapso, la segunda estrella más brillante en todo el cielo (superaba a Alfa Carinae, es decir, a Canopus, y casi alcanzó a Alfa Canis Majoris, mejor conocida como Sirio, cuya magnitud visual es de –1,43).

Durante los siguientes 20 años llegó a ser una estrella bastante notable. Finalmente su brillo decayó y se estabilizó hacia 1868 en magnitud 7.

En 1889 ascendió a magnitud 6, y cayó de nuevo, esta vez hasta magnitud 8.

Entre 1950 y 1992 la magnitud de esta estrella variable oscilaba alrededor de 6.

En 1994, el Telescopio Espacial Hubble apuntó su espejo de 2,4 m de diámetro hacia Eta Carinae y reveló una impresionante imagen: nunca antes se había visto una estrella semejante. Una brillante mancha blanco-azulada expulsando grandes y calientes nubes de gas en forma de esferas diametralmente opuestas.

Eyectadas de la estrella probablemente en la erupción de 1843, cada esfera de gas se expandió a una velocidad tan grande que al cabo de estos 150 años transcurridos, abarcaron un diámetro de más de medio año luz hacia cada extremo (el diámetro del Sistema Solar es de 12 horas luz).

Además, la imagen muestra chorros de gas saliendo violentamente del ecuador, produciendo cierta resistencia a la convergencia de ambas esferas, e impidiendo a la nube de gas expandirse uniformemente como una sola gran bola.

Los astrónomos piensan que Eta Carinae tiene uno de los vientos solares más densos conocidos, expulsando cerca de 0,003 masas solares por año (equivalente a 2 masas terrestres por día). A este ritmo, nuestro Sol podría desaparecer en 300 años, pero Eta Carinae continúa estoicamente.

Qué ocasionó semejantes erupciones de material estelar aún permanece en el misterio, pero los científicos suponen que la gran masa, temperatura, presión interna y la quema de combustibles muy pesados son en parte responsables de ello.

Ya en 1999, el brillo parecería haberse duplicado, por lo que su magnitud aparente ubicada durante varias décadas en cerca de 6, ha llegado a 5, el punto más brillante en todo un siglo.

Un grupo de astrónomos aficionados perteneciente a la LIADA (Liga Iberoamericana de Astronomía) afirma haber observado las grandes esferas de gas de Eta Carinae a través de un telescopio Schmidt-Cassegrain de 25 cm de diámetro, utilizando 350 aumentos solamente.

Todo esto hace de Eta Carinae un caso único entre todas las estrellas conocidas de la Vía Láctea.

Su magnitud visual aparente varía en estos momentos entre 5,5 y 5, a pesar de hallarse a una distancia de 7.500 años luz (todas las estrellas que brillan con similares magnitudes se ubican a menos de 3.000 años luz de nosotros).

En el año 3000 antes de Cristo, los Sumerios registraron la aparición de una nueva estrella bastante brillante a la altura del horizonte; ¿podría haberse tratado de una erupción más de Eta Carinae?

Cuando las estrellas experimentan este tipo de aumento brusco en el nivel de brillo, se cree que ya están llegando al final de sus vidas.

Mientras tanto, Eta Carinae podría sufrir el destino de toda estrella supermasiva: colapsar y explotar como Supernova, brillando en ese momento más que todas las estrellas de la Vía Láctea juntas, y produciendo un espectáculo visual único para los habitantes de la Tierra y de algún otro mundo sumergido en las profundidades del espacio.

¿Cuándo se produciría esto? No se sabe con exactitud. Podría suceder en los próximos dos, diez, veinte o diez mil años; podría explotar mañana mismo, o quizás explotó hace mucho tiempo y Eta Carinae ya no existe, mientras la información continúa recorriendo el Universo hasta alcanzarnos en cualquier momento. ξ

* Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

El autor es miembro activo de la American Association of Variable Star Observers desde 1996, habiendo aportado a la fecha más de 1500 estimaciones de brillo en estrellas variables.

Bibliografía:

- Naeve, Robert. *Stars on the brink*. Revista Astronomy, enero de 1997.
- Zimmerman, Robert. *Scoping out the Monster Star*. Revista Astronomy, febrero de 2000.

Literatura Matemática

Cada día, en el curso de nuestras clases y en las páginas de cada libro, frecuentamos a personajes que dedicaron su vida a la matemática y a la ciencia. No los conocimos, pero los sentimos cercanos a nosotros. Nos merecen respeto, admiración y –en algunos casos– casi cariño. Nuestro intento de homenaje es una serie de sonetos, de los cuales presentamos aquí el segundo. Con toda intención, el nombre del homenajeado ha sido omitido...

Desde sólidos hombros de gigantes
desafía al Creador del Universo.
La espada roja blande sin esfuerzo
en su herética alquimia exuberante.

Los astros y las lunas van errantes,
se saben libres, pero están inmersos
en las garras del campo más perverso,
mientras el tiempo fluye, a cada instante.

Él lo sabe, y se enfrenta al infinito;
donde el ínfimo término evanesce,
donde el rigor del Cálculo se estanca,

donde algún alemán disputa el mito.
En la noche su ciencia resplandece
como en siete colores la luz blanca.

Fernando Chorny
Claudio Salpeter

Comentarios de textos

Jorge A. Martínez *

La Lógica. **Gilles Dowek. Editorial siglo XXI, Buenos Aires, 2001, 110 páginas.**

El razonamiento es objeto de elevada valoración en un mundo que pretende ser "razonable". Las ciencias se sirven de él y en particular la Matemática lo reconoce como su único método, pero ¿no son la observación y el cálculo también necesarios para acceder a la verdad? Los límites del cálculo para establecer "verdades" se ponen fácilmente de manifiesto, pero un verdadero cálculo jamás responde: "no sé". Hilbert pensó que lo mismo debía suceder con los razonamientos y bajo este supuesto surgía claramente que cuando no fuera posible demostrar una proposición matemática, siempre podría demostrarse su negación y si el razonamiento podía reducirse a un cálculo se debería, tarde o temprano resolver este dilema. Lo que pasó después, (Gödel mediante) es descripto clara y sucintamente en el capítulo "La seguridad del razonamiento" en este libro de Dowek. En este sentido, Dowek toma como hilo conductor de sus ideas a la pregunta clave ¿Cuán seguro es el razonamiento?, lo cual le sugiere inmediatamente otras preguntas no menos fastidiosas, a saber: ¿qué es una demostración, en realidad?, ¿son las reglas de deducción verdades reveladas?, ¿qué es la verdad en Matemática? Así como la existencia de los entes matemáticos admite dos concepciones extremas, una platonizante y otra constructiva según Dowek cabe distinguir una concepción platonizante de la verdad matemática y otra antiplatonizante y para completar su idea se interna en un paseo esclarecedor por los confines de la Lógica Matemática del siglo XX. En Matemática existen dos tipos de demostraciones: clásicas y constructivas, existiendo entre ellas una dicotomía fundamental. Las demostraciones constructivas aportan información adicional (piénsese en las demostraciones de existencia de un ente matemático), pero al mismo tiempo quizás nos preguntemos si con demostraciones constructivas no se estrecha el panorama matemático. Dowek caracteriza con habilidad a estas demostraciones constructivas y se pregunta si el constructivismo (proveniente de conceptos centrales de las escuelas llamadas intuicionistas) tiene porvenir. Este fino texto de alta divulgación se ha planteado responder estas cuestiones y puede ser valioso auxiliar para los interesados en la Filosofía de la Matemática. En el interesante (y útil) glosario al final del libro se sentencia: "Matemática: Ciencia que estudia los universos abstractos y en general infinitos. De manera equivalente, discurso que se funda exclusivamente en el razonamiento". ξ

El último teorema de Fermat. **Simon Singh. Grupo editorial Norma, Buenos Aires, 1999, 464 páginas.**

El jurista y matemático "aficionado" francés Pierre de Fermat (1601-1665) fue un verdadero grande de la Matemática de su época y logró mantener intrigados por más de 350 años a todos los matemáticos a raíz de una nota que escribió en el margen de una página del clásico libro de Diofanto de Alejandría llamado Aritmética y que fuera traducido por el notable Claude Bachet allá por 1621.
En esa nota Fermat afirmaba que la ecuación carecía de soluciones naturales para n>2. La simplicidad del enunciado era llamativa y Fermat mismo afirmaba que tenía una demostración, pero se disculpaba de darla arguyendo que "el margen es demasiado estrecho". Se pensó entonces que el problema no sería difícil y que el teorema tenía una demostración general sencilla. Grandes matemáticos abordaron entonces el acertijo con la esperanza de dar rápidamente la demostración o una refutación. Sin embargo, estas tentativas fueron vanas, a pesar de los intentos de figuras mitológicas de la Matemática como ser: Euler, Dirichlet, Legendre y hasta el mismísimo Cauchy, quienes solo pudieron resolver algunos casos particulares. Con la tentativa de Kummer (1810-1893) se puede decir que termina la etapa clásica de los intentos de demostración. En la década de 1950 dos matemáticos

japoneses Shimura y Taniyama establecieron una conjetura famosa que vinculaba las formas modulares con las curvas elípticas y ya en la década del 80 Frey y Ribet relacionaron esta conjetura con el celebre teorema. A partir de aquí empieza el trabajo de un matemático inglés llamado Andrew Wiles quien luego de muchas vicisitudes logra demostrar el teorema.
Simon Singh, nacido inglés de ascendencia india y graduado en Física (Universidad de Cambridge) se interesó fuertemente en el tema al enterarse de la demostración de Wiles. Fue entonces productor y director del documental *Fermat's last theorem* para la serie *Horizon*. Este hecho parece haberlo motivado para escribir este libro (su primer libro) donde tratando de evitar tecnicismos pomposos e inconducentes explica en forma clara y sencilla la historia del teorema. Para ello realiza una revisión exhaustiva de todos los conceptos de Teoría de Números y Geometría que se encuentran implícitos en la demostración desde Grecia hasta hoy. Domina al texto una clara intención didáctica, lo cual le da un atractivo más y lo transforma en notable material apto para lectores de Matemática Histórica así como para público culto en general. Se encuentra en este texto una profusa bibliografía general sobre el famoso teorema y es para no perderse el apéndice ingenioso lleno de ideas sencillas sobre los temas relacionados con Teoría de Números. Lleva tiempo leer este libro pero el saldo es enriquecedor, sin duda, porque más allá del acertijo de Fermat hay en él una gran cantidad de... Matemática, a secas. ξ

* Profesor de Matemática, egresado del IES N° 2 "Mariano Acosta".

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>

Un 19 de junio...

de 1771 nació en Nancy, Francia, Joseph Diaz Gergonne. Entre sus muchas contribuciones a la matemática, especialmente a la geometría, Gergonne dio en 1816 una elegante solución al problema de Apolonio. Este problema consiste en encontrar un círculo que sea tangente a tres círculos dados. Otros de sus aportes significativos fue la introducción de la palabra "polar" y del principio de dualidad en geometría proyectiva.

Debido a que encontró problemas para publicar sus trabajos matemáticos, Gergonne creó su propia revista matemática, cuyo primer volumen apareció en 1810. La revista fue oficialmente denominada *Annales de mathématique pures et appliquées* pero se la conoció como *Annales de Gergonne*. Muchos matemáticos famosos publicaron sus trabajos en los veintiún volúmenes de los Annales de Gergonne, publicados a lo largo de 22 años. Además de los trabajos del propio Gergonne, quién publicó alrededor de 200 artículos en la revista, aparecieron también artículos de Poncelet, Servois, Bobillier, Steiner, Plücker, Chasles, Brianchon, Dupin, Lamé y Galois.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gergonne.html

Problemas y juegos de ingenio

En esta sección les ofrecemos problemas y juegos de ingenio y los invitamos a compartir con nosotros sus soluciones (totales o parciales) así como también otros problemas que deseen proponer. Nuestra dirección postal es: Av. Juan B. Alberdi 667 - 7º B - C.P. 1424 - Ciudad de Buenos Aires - Argentina y nuestro e-mail: pineiro@datamarkets.com.ar

Problemas propuestos

1. Un par de primos:
(Colaboración de Jorge Martínez)
Se llaman primos gemelos a aquellos pares de números primos cuya diferencia es 2, por ejemplo 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19. No se sabe si existe una cantidad infinita se estos pares.

Demuestre que si los dos primos que forman uno de estos pares son ambos mayores o iguales que 5, entonces su suma es múltiplo de 12 (por ejemplo: 5 + 7 = 12, 11 + 13 = 24, 17 + 19 = 36).

2. Dos pesadas:
(Fuente: Stan Wagon, "Problem of the Week", problema 940)
Nos entregan dos pelotas rojas (que llamaremos R_1 y R_2), dos pelotas blancas (B_1 y B_2) y dos pelotas azules (A_1 y A_2). Nos dicen que en cada par, una pelota tiene un peso α y la otra tiene un peso β (con $\alpha < \beta$), pero no sabemos cuál de las pelotas de cada par es la que pesa α y cuál es la que pesa β. Disponemos también de una balanza de dos platillos.

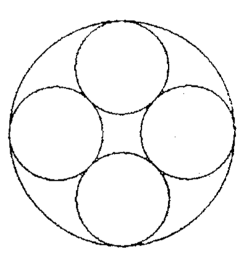
Describa de qué manera, haciendo solamente dos pesadas, podemos determinar qué pelota de cada par tiene peso α y qué pelota tiene peso β.

3. Una solución:
(Fuente: Crux Mathematica, Abril de 2002)

¿Para qué valores de a > 0 tiene la siguiente ecuación una única solución real?

$$a.3^{x} + 3^{-x} = 3$$

4. Cinco circunferencias:
(Colaboración de Gustavo Piñeiro)



En la figura adjunta, las cuatro circunferencias menores tienen el mismo radio y son todas ellas tangentes a la circunferencia mayor. Si el radio de la circunferencia mayor es de 10 cm, calcule cuánto mide el radio de las otras cuatro circunferencias.

Soluciones de los problemas propuestos en Axioma 18:

1. Recta tangente: Encuentren todos los números a ≠ 0 para los cuales se verifica la siguiente propiedad: la recta tangente al gráfico de y = x2 en x = a tiene raíz igual a 7.

Solución enviada independientemente por M. Cecilia García Arango y Mónica Zalabardo:

La recta tangente a y = x_ en x = a pasa por (a;a_) y tiene pendiente f '(a)= 2.a. Su ecuación es: y = 2a.(x – a) + a_, es decir: **y = 2ax – a_.** Como 7 es raíz, 0 = 2a.7 – a_, que **tiene solución no nula a = 14.**

2. Primos y más primos: Encuentren todos los primos positivos p para los cuales p + 4 y p + 8 son también primos.

Solución del Staff de Axioma:

Si p no es múltiplo de 3 entonces o bien p = 3k + 1, o bien p = 3k + 2. En el primer caso p + 8 sería múltiplo de 3, en el segundo caso p + 4 sería múltiplo de 3. Ambas situaciones son imposibles, entonces concluimos que es p el que debe ser múltiplo de 3. Luego p = 3, p + 4 = 7, p + 8 = 11 es la única solución.

3. Uno, tres, cinco: Llamemos A al conjunto de todos los números enteros entre 1 y 100 inclusive, A = {1, 2, 3, ..., 100}. Es sabido (véase Axioma 14) que hay $\binom{100}{6}$ = 1.192.052.400 subconjuntos de A que tienen exactamente seis elementos. Calculen cuántos son los subconjuntos de seis elementos de A en los cuales no aparecen dos números consecutivos.

Por ejemplo no estamos contando al subconjunto {1, 3, 11, 4, 67, 89}, ya que en él aparecen el 3 y el 4, pero sí contamos el subconjunto {1, 18, 11, 4, 67, 89}.

Solución del Staff de Axioma:

Existe una biyección entre la familia de todos los subconjuntos de 6 elementos de {1, 2, 3, ..., 100} que no contienen dos enteros consecutivos y conjunto (que llamaremos A) de todas las sucesiones formadas por 94 ceros y 6 unos, de modo que ninguna de ellas haya dos unos en posiciones consecutivas. Esta biyección, por ejemplo, relaciona al conjunto {1, 3, 5, 7, 9, 11} con la sucesión que tiene un 1 respectivamente en las posiciones 1°, 3°, 5°, 7°, 9° y 11°, y ceros en todos los demás lugares.

Sea B el conjunto de todas las sucesiones de 95 cifras formadas por 6 unos y 89 ceros (los unos ahora ubicados en cualquier posición). Existe una biyección entre B y A. Dada una sucesión x de B, su imagen por la biyección se obtiene agregando un 0 a la derecha de cada uno de los primeros cinco 1's de x. Por ejemplo, la imagen de 111110010000... es 1010101010010000...

Por otra parte se ve fácilmente que existe una biyección entre B y la familia de todos los subconjuntos de {1, 2, 3, ..., 95} que tienen 6 elementos. Componiendo todas las biyecciones mencionadas concluimos que la familia de todos los subconjuntos de 6 elementos de {1, 2, 3, ..., 100} que no contienen dos enteros consecutivos tiene la misma cantidad de miembros que la familia de todos los subconjuntos de {1, 2, 3, ..., 95} que tienen 6 elementos.

Por lo tanto, la respuesta del problema es $\binom{95}{6}$ = 869.107.785.

4. Reordenando letras: Imagínense que los números del 1 al 10 están escritos con fichas del Scrabel. Uds. tienen por un lado tres letras que forman UNO, por otro tres letras distintas que forman DOS, más allá algunas letras que forman TRES, y así hasta el grupito que forma DIEZ. Las cuarenta y tres letras forman, en total, diez palabras.

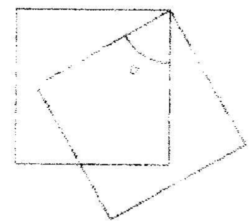
Reacomode las letras para dejar formada la menor cantidad posible de palabras castellanas.

Cada letra forma parte de una sola palabra. No quedan letras sueltas. No están permitidas palabras extranjeras ni nombres propios, el resto vale todo. ¿Cuántas palabras logra armar?

Solución de Fabio Cohene.

Cuatro palabras: diecinueves, ochocientos, cauterizo, estruendosos.

5. Dos cuadrados: Dos cuadrados iguales están superpuestos. ¿Cuánto debe valer el ángulo α para que el área de la parte superpuesta sea igual a la mitad del área de cualquiera de los dos cuadrados?



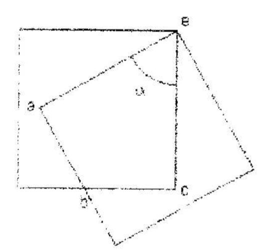
Solución de Mónica Zalabardo:

La intersección de los cuadrados es un romboide, de lado mayor l (lado de los cuadrados) y lado menor a. La diagonal principal lo divide en dos triángulos rectángulos, de catetos l y a.

Según lo pedido, el área del romboide debe ser la mitad de la de cada uno de los cuadrados. 0,5 l^2 = a.l. Por lo tanto a = 0,5 l. Si llamamos $\alpha / 2$ al ángulo opuesto al cateto a del triángulo rectángulo, tg $\alpha / 2$ = a / l; tg $\alpha/2 = 0,5 \Rightarrow \alpha$ **=2.arctg 0,5 ≅ 0,927.**

Solución de M. Cecilia García Arango:

Como los dos cuadrados son iguales, llamo a sus lados l. Debo calcular cuánto vale α para que el área de la parte superpuesta sea igual a la mitad del área de cualquiera de los dos cuadrados. Para ello, calcularé el área del abce, que es un romboide, y estableceré una igualdad entre ese área y la de uno de los cuadrados.



Primero, demostraré que abce es un romboide. Trabajaré con los triángulos aeb y ecb. Dichos triángulos con congruentes, pues: $\overline{ae} = \overline{ec}$ por ser lados de cuadrados iguales (l) $\overline{eb}$ lado común, $\cos(a\hat{e}b) = \frac{\overline{ae}}{\overline{eb}}$ y $\cos(c\hat{e}b) = \frac{\overline{ec}}{\overline{eb}}$

$\therefore\ a\hat{e}b = c\hat{e}b$.

Entonces, los triángulos aeb y ecb tienen 2 lados congruentes y el ángulo comprendido respectivamente congruente, sus elementos homólogos también lo son.

$\therefore\ \overline{ab} = \overline{bc}$

Como $\overline{ae} = \overline{ec}$ y $\overline{ab} = \overline{bc}$ $\Rightarrow$ abce romboide.

Buscaré las diagonales del romboide, para calcular su área. En el triángulo aec, utilizando el teorema del coseno:

$\overline{ac}^2 = l^2 + l^2 - 2.l.l.\cos\alpha$ (llamaré d al lado $\overline{ac}$)

$d^2 = 2l^2 - 2.l^2.\cos\alpha$

$d^2 = 2l^2(1-\cos\alpha)$

$\boxed{d = \sqrt{2l^2(1-\cos\alpha)}}$

En el triángulo ebc, $\cos\left(\frac{\hat{\alpha}}{2}\right) = \frac{l}{D}$, siendo $D = \overline{eb}$

Despejando D y reemplazando por el coseno de un semiángulo, $D = \dfrac{l}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$.

Área romboide = 0,5 Área cuadrado

$D.d.0,5 = 0,5.l^2$

$\dfrac{l}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}.\sqrt{2l^2(1-\cos\alpha)}.0,5 = 0,5\ .\ l^2$

Simplificando y operando:

$$\sqrt{\frac{4l^2(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}} = l$$

$$4\ l^2(1-\cos\alpha) = l^2(1+\cos\alpha)$$

$$4 - 4\cos\alpha = 1+\cos\alpha$$

$$4-1 = 5\cos\alpha$$

$$\frac{3}{5} = \cos\alpha$$

$$\boxed{\hat{\alpha} = 53^\circ\ 7'\ 48,37''}$$

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>