Aχioma

La revista de los estudiantes y profesores de matemática

Preguntas inquietantes

(página 18)

¿Es correcto definir $i=\sqrt{-1}$?

¿A qué es igual i^i?

Si los puntos tienen dimensión cero, ¿cómo es que completan una recta que tiene dimensión uno?

¿Por qué un menos delante de un paréntesis cambia los signos que éste encierra?

Mayo / Junio de 1998 **Año 3 - Nº 11**

Aχioma N° 11

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Directora
Gisela Serrano de Piñeiro

Propietarios
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Gustavo Piñeiro
Jorge Martínez

Colaboraron en este número
Gabriela Pacheco

Dirección postal
Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital

Correo electrónico
pineiro@datamarkets.com.ar

Suscripción por 5 números (incluye gastos de envío): $ 11.-

Ejemplar suelto: $ 3.-

Ejemplar atrasado: $ 3.-

Editorial

Iniciamos con este número nuestro tercer año de vida. A pesar de los vaivenes económicos que nos hicieron tambalear, logramos sobreponernos y continuar con nuestro proyecto. Nos preguntamos ¿ es importante?

Todo el tiempo el entorno que nos rodea nos muestra la cara más nefasta de la realidad: la carpa docente (también cumplió su año de antigüedad y ya tiene número de catastro), la flexibilización, de hecho, de las condiciones laborales (las escuelas privadas contratan docentes de marzo a diciembre y pagan "cuando pueden"), la cobertura de 8° y 9° años del tercer ciclo de la E.G.B. se hace con voluntariosos y ajetreados maestros con escasos conocimientos (basta, apenas, con cruzar la Gral. Paz o el Riachuelo); hay docentes ejerciendo sin cobrar hace tres, cuatro y más meses, gracias a la nueva reglamentación (¿fue derogada?) del G.C.B.A.; el mundial de fútbol invade todos los ámbitos y, como en las antiguas arenas romanas, sentimos que se nos ofrece pan y circo para intentar conformarnos como un pueblo amorfo, impensante, acrítico.

Porque estamos convencidos de que es valedero cada pequeño esfuerzo que hagamos todos y cada uno de nosotros para modificar este entorno, es que seguimos aquí.

Por lo mismo, es que podemos encontrarnos con Uds.

Sumario

Apuntes sobre...	2	**Literatura Matemática**	22
Historia	9	**Problemas**	26
Experiencias en el aula I	12	**Comentario de textos**	28
Experiencias en el aula II	16	**Didáctica**	30
Preguntas inquietantes	18	**Correo de lectores**	31

Mayo / Junio de 1998
Año 3 - N° 11

Matrices y Movimientos (Segunda parte).

Las rotaciones, simetrías, homotecias y traslaciones son estudiados en el colegio secundario sin un claro motivo para ello. En esta sección, comentaremos algunos hechos destacables acerca de ellos y trataremos de ilustrar la importancia de su estudio. En esta ocasión veremos la estrecha vinculación que existe entre estos movimientos y esos extraordinarios "monstruos" matemáticos: los fractales.

Los fractales son, sin duda alguna, mucho más que interesantes curiosidades matemáticas con las cuales alimentar nuestra imaginación. En ellos reside la esencia del vasto lenguaje de una nueva geometría (véase por ejemplo la sección **"Apuntes sobre..."** de las ediciones 7, 8 y 9 de Aχioma).

La estructura matemática que subyace en muchas de las estructuras fractales está fundada en las llamadas *transformaciones afines* del plano. Éstas no son más que reglas para dilatar, contraer, rotar, desplazar y, en ocasiones, deformar un objeto geométricamente. Lo que se puede hacer con ellas es impresionante: desde la hoja un helecho hasta un tapiz fractal reproducido infinitas veces dentro de sí mismo a escala cada vez más pequeña.

Tomemos como figura geométrica inicial un cuadrado de lado L y situémoslo en un sistema de coordenadas de modo tal que su vértice inferior izquierdo coincida con el punto (0,0). Cada punto en la frontera o en el interior del cuadrado puede entonces caracterizarse con un par de coordenadas (x,y) donde "x" e "y" son números que pertenecen al intervalo [0,L] (véase la **Figura 1**).

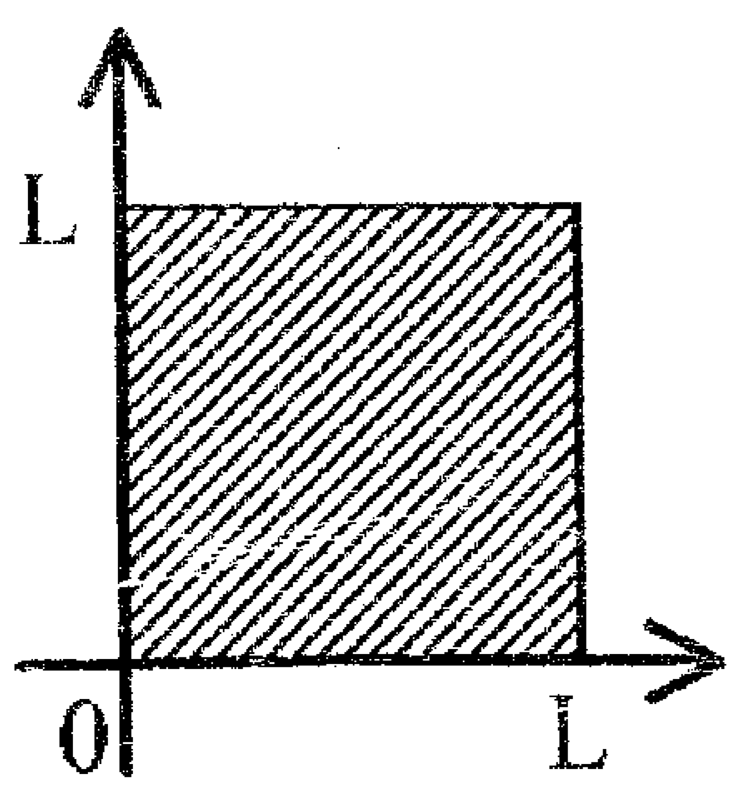


Figura 1

¿Cómo construir una transformación geométrica que, aplicada sobre cada punto del cuadrado, dé como resultado una forma semejante, pero con un lado igual a la mitad del original? Es evidente que la transformación que necesitamos para lograr este objetivo es la **homotecia** de centro (0,0) y razón 0,5.

En la nota precedente hemos descripto a las rotaciones y a las simetrías como funciones del plano en sí mismo. De esta misma manera, la homotecia de centro (0,0) y razón 0,5 puede describirse como la función:

$$F: \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$$
$$F(x;y) = (0{,}5x;\ 0{,}5y)$$

Para ver la figura que resulta de aplicar esta transformación a cada punto del cuadrado inicial, debemos simplemente evaluar la función en cada uno de los vértices de dicho cuadrado:

$F(0;0) = (0;0)$
$F(0;L) = (0;\ L/2)$
$F(L;0) = (L/2;\ 0)$
$F(L;L) = (L/2;\ L/2)$

Observando la **Figura 2** vemos que, efectivamente, el cuadrado original se ha reducido a la mitad de su tamaño.

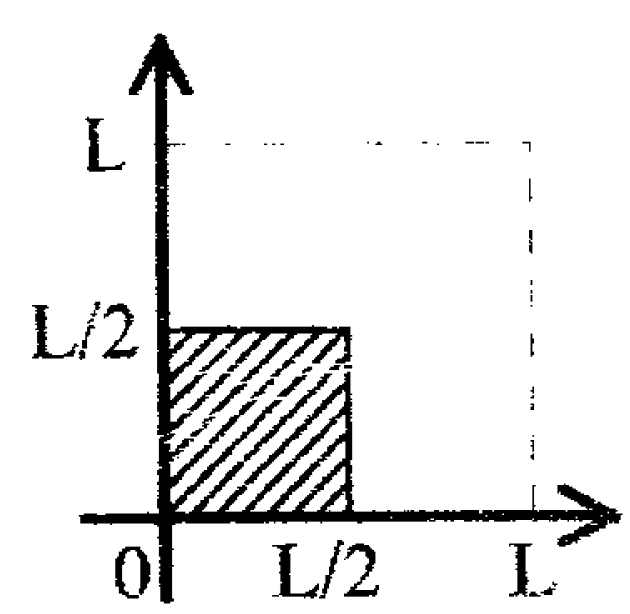


Figura 2

Para aumentar o disminuir el tamaño de una figura en un factor de escala "r" arbitrario, se requiere simplemente aplicar a cada uno de sus puntos la transformación:

$$F: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$$
$$F(x;y) = (rx;\ ry)$$

Esta función representa la homotecia de centro (0,0) y razón r. Sin embargo, para enriquecer nuestras opciones podemos utilizar también parámetros de escala distintos en cada coordenada. Es decir podemos introducir funciones del tipo:

$$F: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$$
$$F(x;y) = (rx;\ sy)$$

Donde "r" y "s" son números reales arbitrarios. Por ejemplo, si r = 0,8 y s = 0,5 lo que obtendremos ya no será un cuadrado, sino un rectángulo más largo que ancho (véase la **Figura 3**).

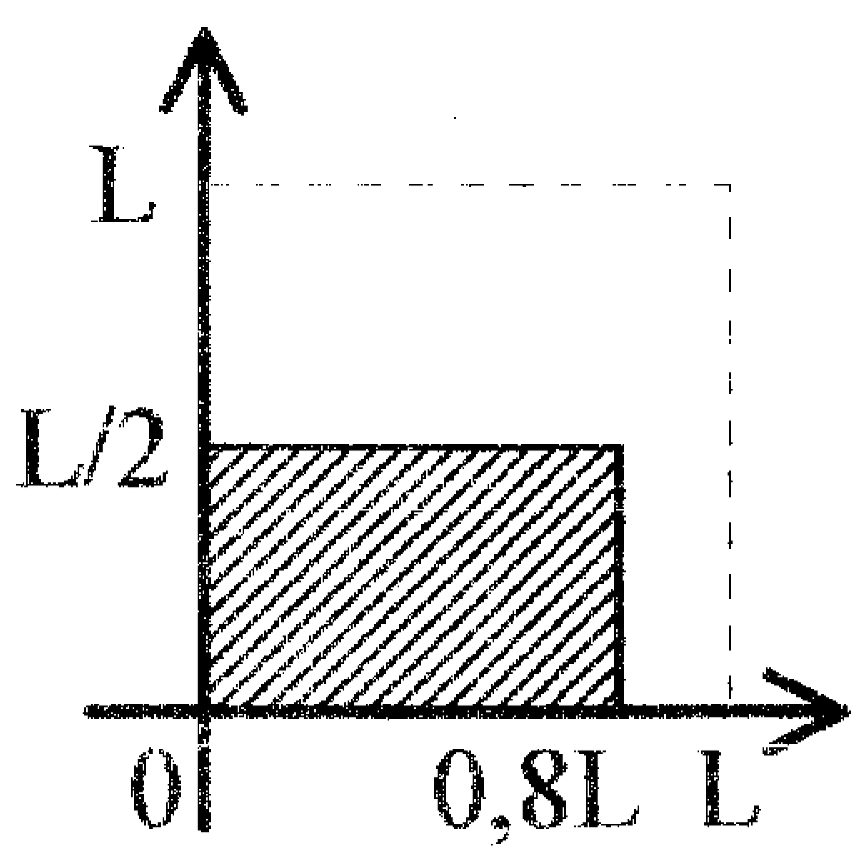


Figura 3

Estas funciones de cambio de escala, así como las rotaciones y simetrías que hemos estudiado en la nota precedente, son todas ellas *transformaciones lineales* (véase Aχioma N° 10) y por lo tanto pueden escribirse de la siguiente manera:

$$F(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Donde A es una matriz de dos filas y dos columnas, llamada la matriz de la transformación. Así por ejemplo, el lector podrá verificar fácilmente que la función de cambio de escala F(x,y) = (rx;sy) puede describirse como:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Deseamos enriquecer aún más nuestro espectro de transformaciones incluyendo en él a las **traslaciones**. Una traslación de vector (h,k) (donde "h" y "k" son números reales arbitrarios fijos) puede describirse simplemente como la función:

$$T: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$$
$$T(x;y) = (x + h;\ y + k)$$

Analicemos qué ocurre al aplicarla a los vértices de nuestro cuadrado inicial de lado L. Es evidente que:

$T(0;0) = (h;k)$
$T(0;L) = (h;L+k)$
$T(L;0) = (L+h;k)$
$T(L;L) = (L+h;L+k)$

Por lo tanto, la traslación de vector (h,k) desplaza al cuadrado paralelamente hasta que su vértice inferior izquierdo coincida con el punto (h;k) (véase la **Figura 4**).

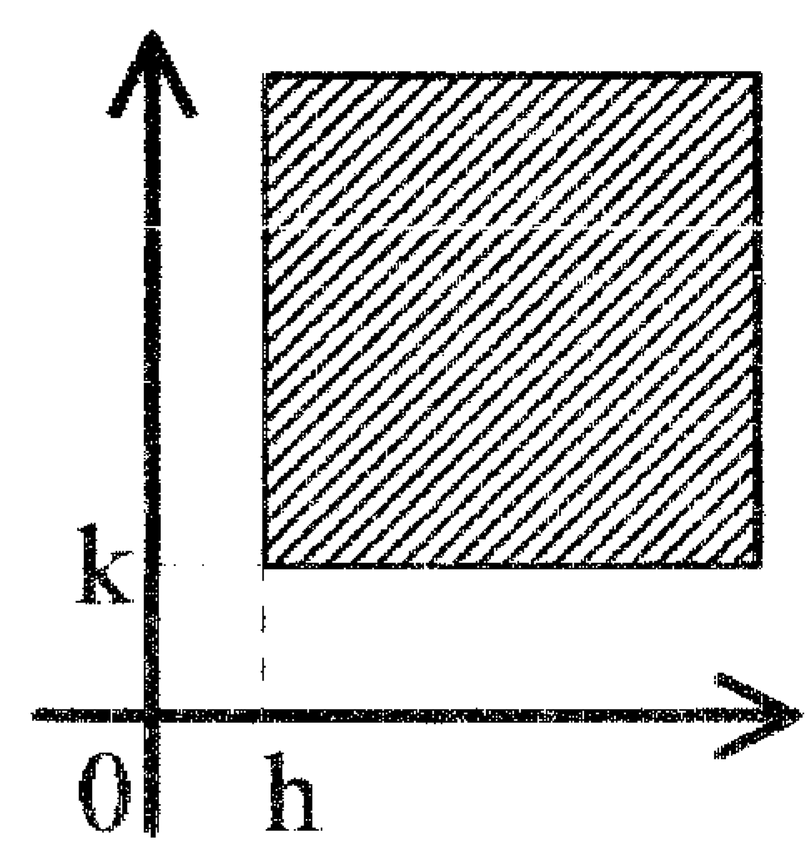


Figura 4

Si F es una transformación lineal con matriz A, la expresión **(1)** nos permite deducir inmediatamente que F(0,0) = (0,0). Por el contrario, si T es la traslación de vector (h,k), con $(h,k) \neq (0,0)$ entonces $T(0,0) = (h,k) \neq (0,0)$ y por lo tanto T no es una transformación lineal. Las traslaciones forman parte de un conjunto más general de transformaciones: las *transformaciones afines* del plano.

Se llama transformación afín a toda función F que pueda escribirse en la forma:

$$F(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Donde A es una matriz de dos filas y dos columnas y (a,b) es un vector fijo. Por ejemplo, la traslación T de vector (h,k) puede escribirse como:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Una de las características esenciales de las transformaciones afines es que la imagen de una recta es también una recta, del mismo modo que la imagen de un segmento de recta es también un segmento de recta. Dejamos como tarea para el lector la demostración de estos hechos.

Observemos además que si en la expresión **(2)** tomamos (a,b) = (0,0) entonces la función resultante es una transformación lineal. Por lo tanto las transformaciones lineales son casos particulares de transformaciones afines.

En nuestro bagaje de transformaciones afines tenemos hasta el momento a las funciones de cambio de escala (que incluyen a las homotecias como caso particular) y a las traslaciones de vector (h,k). Ampliaremos aún más este espectro incluyendo en él a las rotaciones de centro (0,0). Sin embargo, no nos estamos refiriendo aquí a las rotaciones "rígidas" que hemos estudiado en la nota precedente; sino que trabajaremos con un tipo más "libre" de rotación.

Recordemos que la rotación de ángulo α y centro (0,0) es la transformación lineal definida por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

El ángulo α puede ser un número positivo o negativo. En el primer caso indica que el giro se realiza en sentido antihorario. Si es negativo, indica que el giro se realiza en el mismo sentido que las agujas del reloj.

Vamos a incluir en nuestro repertorio de funciones a aquellas transformaciones lineales definidas por matrices del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

Analicemos qué tipo de movimientos producen estas funciones.

Toda transformación lineal F(x,y) queda totalmente caracterizada por las imágenes de los puntos $E_1 = (1,0)$ y $E_2 = (0,1)$. Como vimos en la nota precedente, la función definida por la matriz que aparece en **(3)** hace rotar al punto E_1 y al punto E_2 un ángulo α alrededor del origen.

La función que corresponde a la matriz que aparece en **(4)** también hace rotar al punto E_1 un ángulo α, pero en cambio al punto E_2 lo hace rotar tanto como diga el ángulo β (entendiendo que, como antes, los signos de α y de β se refieren a los respectivos sentidos de giro). Más en general, todo punto ubicado sobre el eje "x" rotará un ángulo α, mientras que todo punto ubicado sobre el eje "y" rotará un ángulo β (véase la **Figura 5**).

Sea P un punto cualquiera de $\boldsymbol{R}^2$, $P = (p,q) = pE_1 + qE_2$. Sea F la transformación lineal cuya matriz es la que aparece en **(4)**. Se tiene entonces que:

$$F(P) = F[pE_1 + qE_2]$$
$$F(P) = F(pE_1) + F(qE_2)$$
$$F(P) = F(p,0) + F(0,q)$$

Geométricamente, la imagen del punto $P = (p,q)$ se obtiene rotando al punto (p,0) un ángulo α, al punto (0,q) un ángulo β y luego sumando los dos puntos así obtenidos (véase la **Figura 5**).

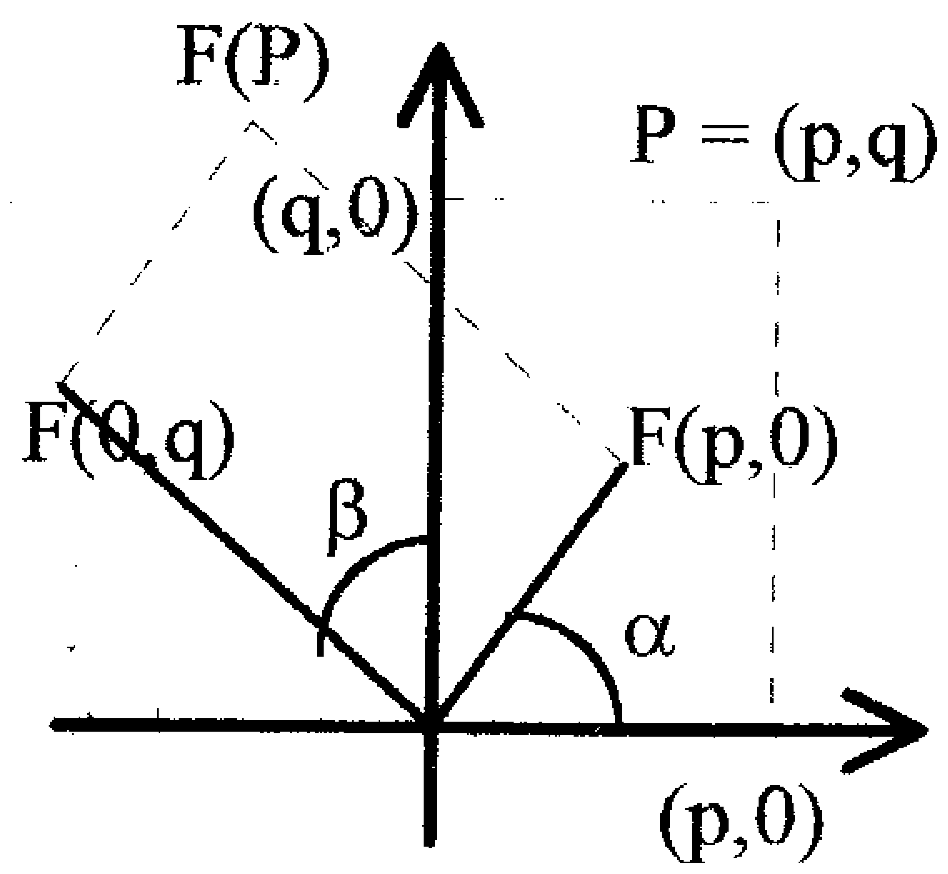


Figura 5

El lector no tendrá dificultades en verificar que esta transformación convierte a nuestro cuadrado inicial de lado L en el paralelogramo que aparece en la **Figura 7** (que en este caso es, en realidad, un rombo de lado L).

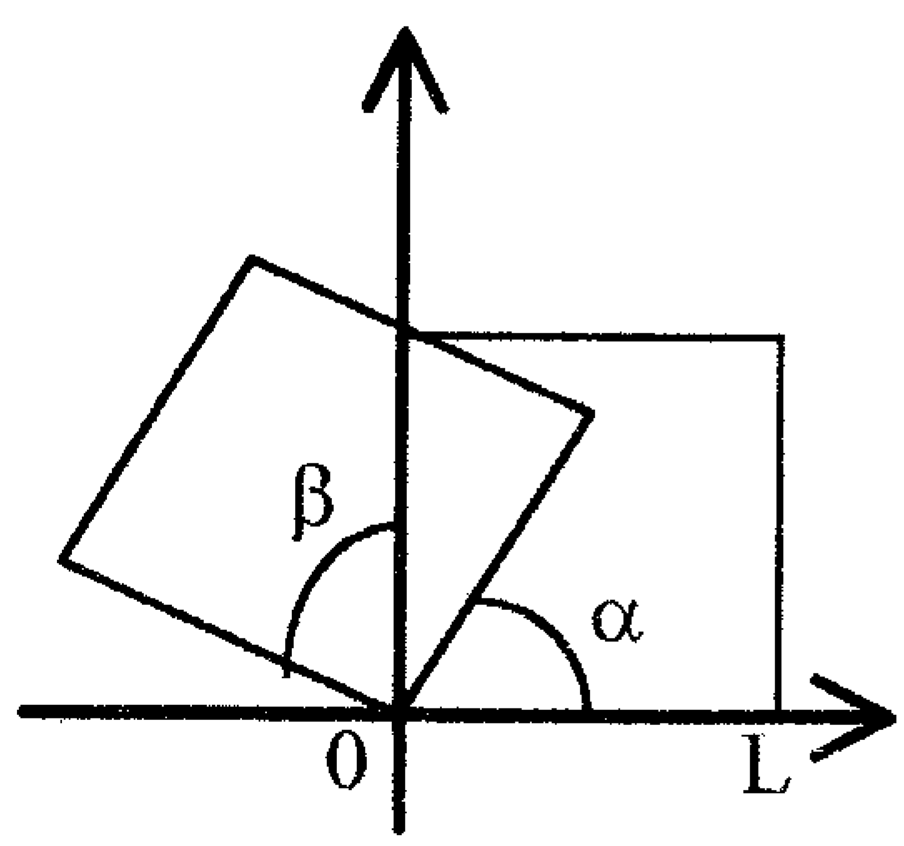


Figura 7

Tenemos ya completo el bagaje de transformaciones afines que utilizaremos en nuestro trabajo: funciones de cambio de escala, rotaciones con matrices similares a la de la expresión **(4)** y traslaciones de vector (h,k).

Sea (x,y) un punto cualquiera del plano. Apliquemos a (x,y) sucesivamente, una a continuación de la otra, las tres transformaciones arriba indicadas: primero un cambio de escala, luego una rotación y finalmente una traslación de vector (h,k). Llamemos (x',y') al punto resultante de toda esta operación. El lector podrá verificar fácilmente que:

$$x' = r\cos(\alpha)x - s\,\mathrm{sen}(\beta)y + h$$
$$y' = r\,\mathrm{sen}(\alpha)x + s\cos(\beta)y + k$$

Las dos igualdades precedentes describen un tipo más general de transformación afín, el cual resulta de componer, del modo arriba indicado, tres transformaciones afines diferentes. Cada transformación afín de este tipo más general queda totalmente caracterizada por los valores de los seis números: r, s, h, k, α, β.

Si r = s = 0,5 y todos los demás números son iguales a cero, entonces tendremos la homotecia de centro (0,0) y razón 0,5. Si h = 1, k = 1 y todos los demás números son nulos, entonces tendremos la traslación de vector (1,1).

Es evidente que todas las transformaciones que hemos mencionado en esta nota se obtienen dándole valores adecuados a estos seis parámetros: r, s, h, k, α y β.

De ahora en adelante, al referirnos a una transformación afín, indicaremos simplemente qué valores tienen los seis parámetros mencionados.

Un gran número de fractales puede obtenerse aplicando reiteradamente un conjunto determinado de transformaciones afines sobre cierta región del plano.

Tomemos, por ejemplo, como base inicial un cuadrado de lado L = 3 ubicado del mismo modo que el cuadrado de la **Figura 1**.

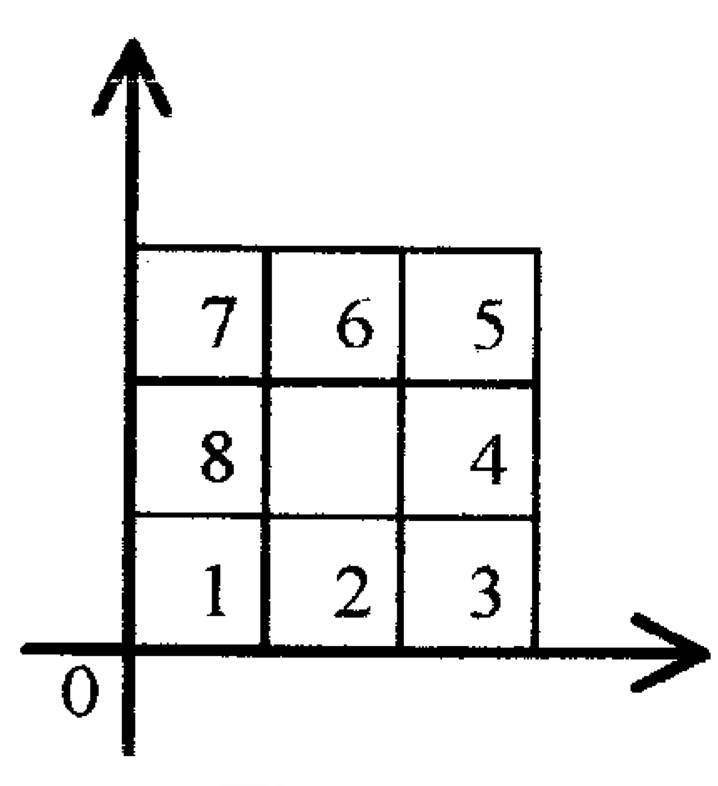


Figura 8

Consideremos también un conjunto de ocho transformaciones afines. Para describirlas geométricamente, dividamos al cuadrado en nueve celdillas cuadradas iguales, de las cuales numeramos ocho, tal como se ve en la **Figura 8**.

La primera transformación afín que consideraremos es aquella que transforma al cuadrado de lado L = 3 en la celdilla número 1. Esta primera transformación es la homotecia de centro (0,0) y razón 1/3 (es decir, $r = 1/3$, $s = 1/3$, $h = k = \alpha = \beta = 0$).

La segunda transformación afín que consideraremos es aquella que convierte al cuadrado de lado $L = 3$ en la celdilla número 2. Esta segunda transformación resulta de componer la homotecia de razón 1/3 con la traslación de vector (1,0) (es decir, $r = 1/3$, $s = 1/3$, $h = 1$, $k = \alpha = \beta = 0$).

Cada una de las seis transformaciones restantes es la que convierte al cuadrado de lado $L = 3$ en una de las celdillas numeradas de la **Figura 8**; todas ellas resultan de componer una homotecia con una traslación.

Entonces, si a cada punto del cuadrado de lado $L = 3$ le aplicamos las ocho transformaciones indicadas, obtendremos como resultado las ocho celdillas numeradas de la **Figura 8**. Apliquemos a cada punto de estas ocho celdillas las mismas ocho transformaciones indicadas y obtendremos el conjunto de 64 celdillas de lado 1/3 que aparece en la **Figura 9** (en esta figura hemos omitido los ejes cartesianos).

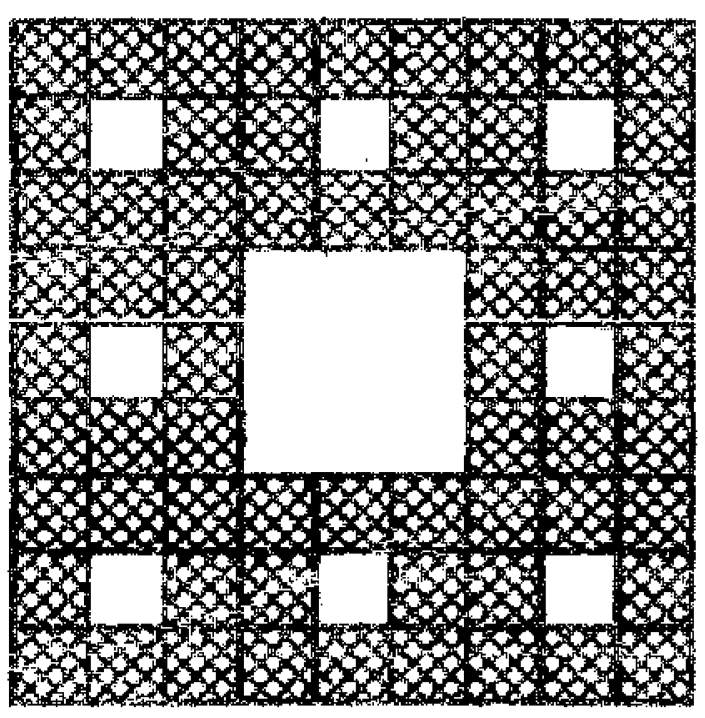


Figura 9

Apliquemos a cada punto de estas 64 celdillas las ocho transformaciones afines y obtendremos un conjunto de 512 celdillas de lado 1/9.

La figura que se obtiene como el límite de todas estas aplicaciones es un fractal, conocido como el *tapiz de Sierpinski* (véase la **Figura 10**). Cualquier sección de este tapiz, por más pequeña que sea, reproduce a escala microscópica la estructura total.

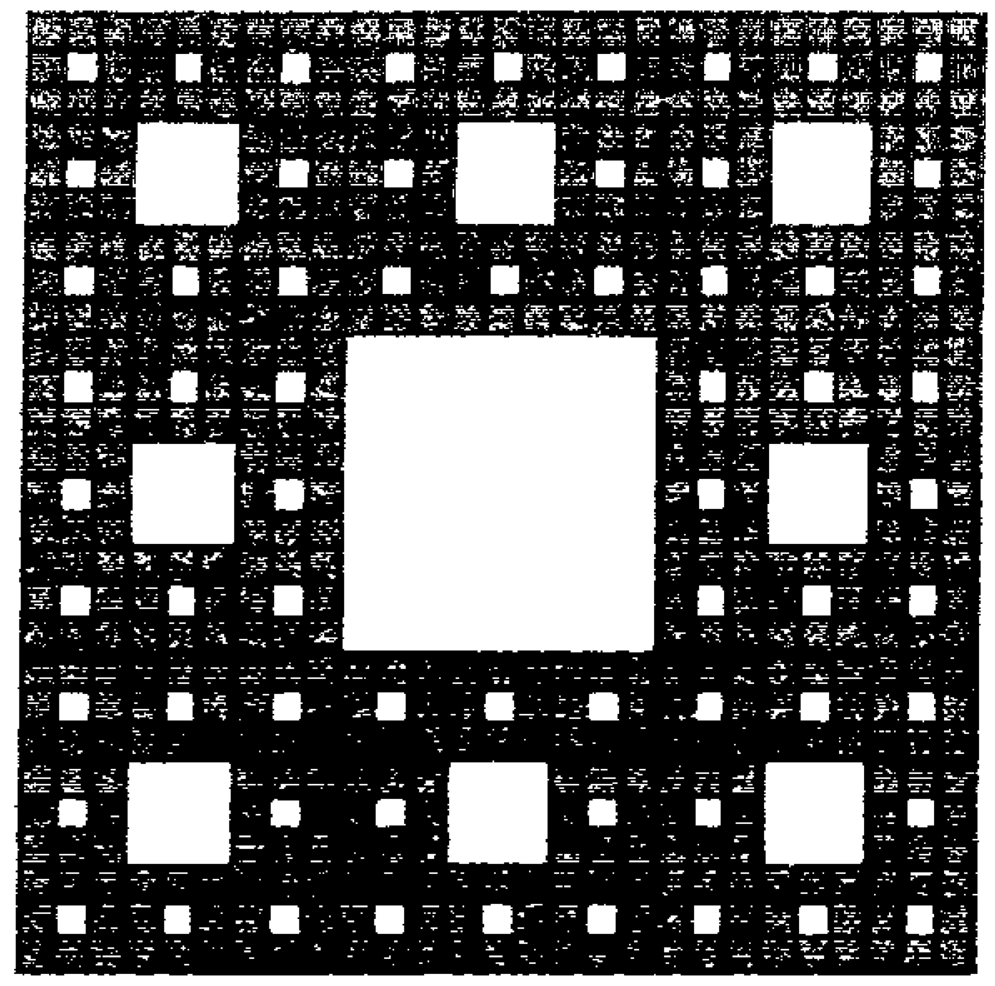


Figura 10

La aplicación sucesiva de las ocho transformaciones afines nos permite ir construyendo paso a paso este fractal.

Aunque de una belleza indudable, el proceso descripto resulta muy costoso desde el punto de vista computacional. Supongamos que queremos calcular las coordenadas de los vértices de cada una de las celdillas que se van obteniendo al aplicar las ocho transformaciones afines.

En el primer paso (para obtener las ocho primeras celdillas) debemos aplicar ocho funciones a 4 puntos. En el segundo paso debemos aplicar esas ocho funciones a 64 puntos, luego a 512 puntos y luego a 4096. El número de operaciones aritméticas requeridas crecerá exponencialmente y superará rápidamente la capacidad de cualquier computadora concebible.

En la década pasada M. Barnsley y sus colaboradores desarrollaron una estrategia que permite construir prácticamente cualquier fractal de manera rápida y sencilla.

En el método de Barnsley el trabajo se inicia buscando un conjunto de transformaciones afines que, al aplicarse sobre una cierta figura básica (como nuestro cuadrado de lado L), dé lugar a nuevas formas que, acomodadas o superpuestas como en un *collage*, reproduzcan una figura que se parezca al fractal que se desea construir.

Tomemos como figura básica el cuadrado de lado $L = 3$ y las ocho transformaciones afines que antes describimos. El *collage* se formará entonces con las ocho celdillas ya descriptas y tendrá el aspecto de la **Figura 8**. El *collage* formado por estas ocho celdillas reproduce una figura vagamente similar al fractal de Sierpinski.

Una vez que se han identificado las transformaciones que permiten reproducir el esqueleto del fractal (en nuestro caso, las ocho transformaciones afines ya mencionadas) comienza un juego de ping-pong muy especial.

Elegimos al azar un punto de las ocho celdillas, digamos P_1, y lo marcamos en el gráfico. Luego, elegimos al azar una de los ocho transformaciones y se la aplicamos al punto P_1. Obtenemos el punto P_2, que marcamos en el gráfico. Así continuamos sucesivamente; dado el punto P_n, elegimos al azar una de las ocho transformaciones, se la aplicamos a P_n y obtenemos el punto P_{n+1}, que marcamos en el gráfico.

Barnsley y sus colaboradores demostraron que la sucesión de puntos así generada irá dibujando indefectiblemente el fractal deseado.

Para ejemplificar el proceso de Barnsley hemos elegido como punto inicial $P_1 = (1,1)$ y hemos calculado los puntos sucesivos mediante un sencillo programa de computadora. Al cabo de 500 pasos obtuvimos el gráfico que aparece en la **Figura 11**.

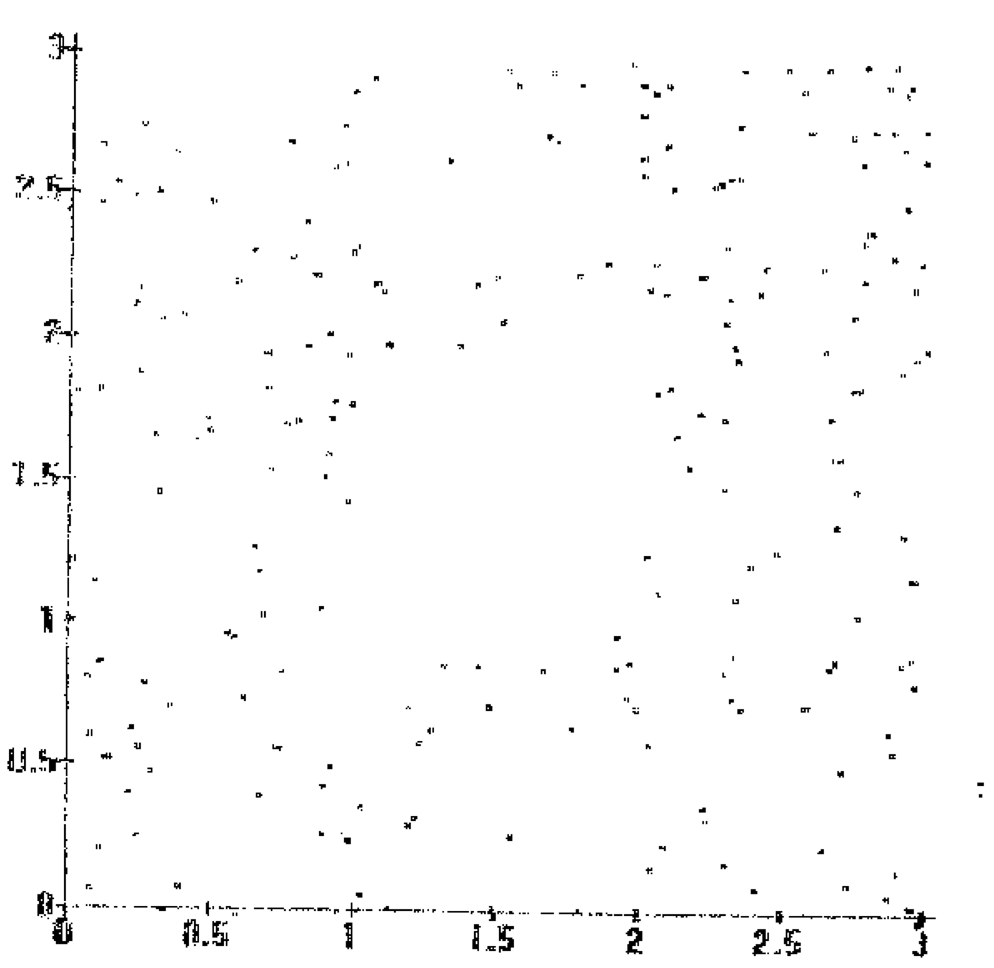


Figura 11

Después de 2000 pasos, mediante unos cuantos segundos cómputos, obtuvimos el gráfico de la **Figura 12**. En este gráfico comienza ya a apreciarse la estructura del fractal de Sierpinski.

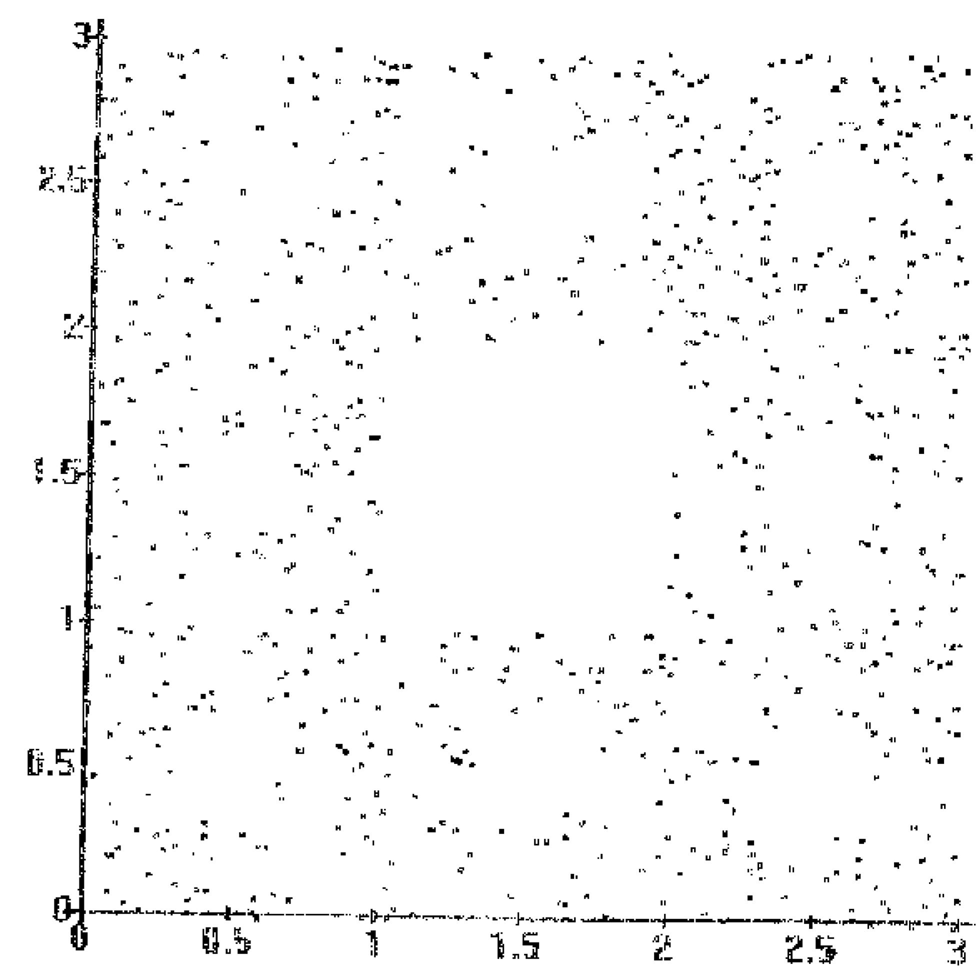


Figura 12

Destaquemos que para obtener la **Figura 12** fue necesario aplicar una sola transformación a 2000 puntos. Si hubiéramos empleado el procedimiento de la **Figura 9**, según el cual a cada una de las ocho celdillas se le aplica las ocho transformaciones, una cantidad de 2000 operaciones no nos hubiera llegar más allá del tercer paso.

En el ejemplo que hemos desarrollado, todas las transformaciones afines utilizadas generan formas básicas de igual área (estas formas básicas son las ocho celdillas de la **Figura 8**). Cuando las formas básicas no tienen igual área es necesario modificar un poco las reglas de juego, con el fin de asegurar que cada forma básica será visitada una cantidad de veces que sea proporcional a su área.

Como ejemplo, apliquemos cuatro transformaciones afines sobre una figura inicial de forma rectangular. Estas transformaciones están definidas del siguiente modo:

Transformación 1:
$r = 0$; $s = 0{,}16$; $h = 0$; $k = 0$;
$\alpha = 0$; $\beta = 0$.

Transformación 2:
$r = 0{,}3$; $s = 0{,}37$; $h = 0$; $k = 0{,}44$;
$\alpha = 135°$; $\beta = -40°$.

Transformación 3:
$r = 0{,}3;\ s = 0{,}34;\ h = 0;\ k = 1{,}6;$
$\alpha = 45°;\ \beta = 45°.$

Transformación 4:
$r = 0{,}85;\ s = 0{,}85;\ h = 0;\ k = 1{,}6;$
$\alpha = 0;\ \beta = 0.$

La superposición de los resultados da lugar a un esqueleto similar al que se ve en la **Figura 13**, donde cada número indica la figura que se obtiene al aplicar la transformación correspondiente.

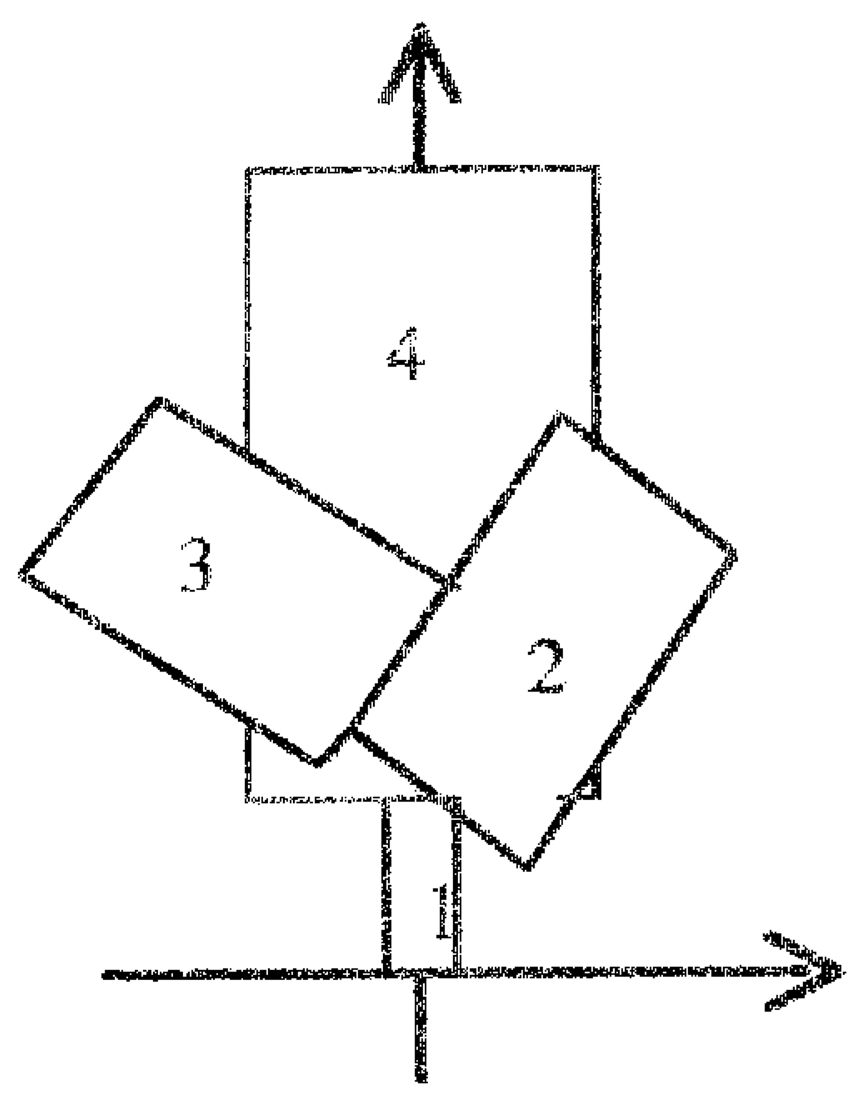


Figura 13

Al jugar al ping-pong fractal sobre este *collage*, debemos asegurarnos que la probabilidad de visitar cada región sea proporcional al área de la misma. Si llamamos p_i a la probabilidad de elegir la i-ésima transformación, este objetivo se logra tomando:

$$p_1 = 0{,}005 \qquad p_2 = 0{,}0975$$
$$p_3 = 0{,}0975 \qquad p_4 = 0{,}8$$

El resultado de 2000 operaciones se aprecia en la **Figura 14**.

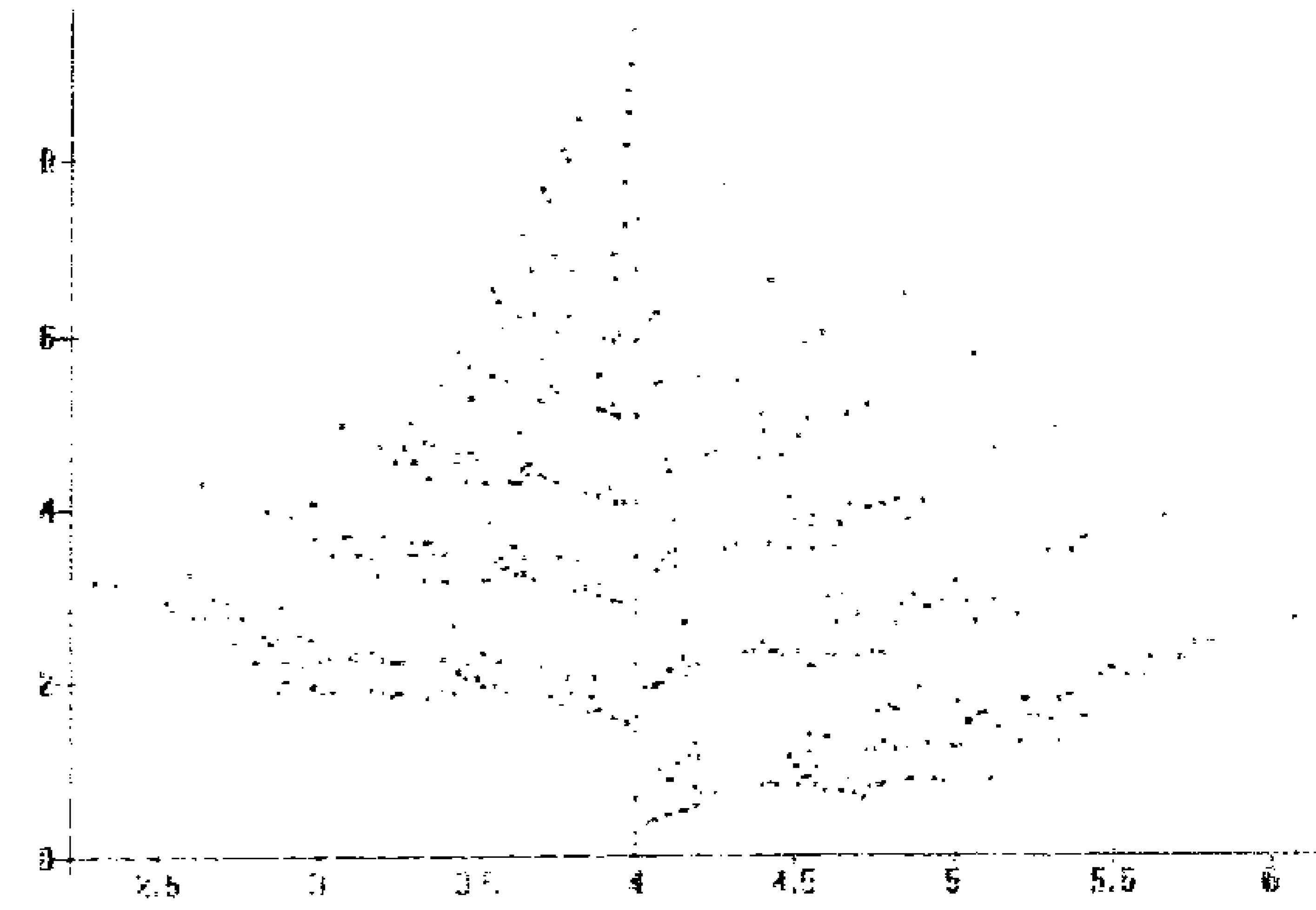


Figura 14

La figura límite es una hoja de helecho con estructura fractal en la que cualquiera de sus partes reproduce a escala microscópica la estructura total. ¡Una imagen tan compleja es construida únicamente a partir de cuatro transformaciones afines! Una imagen que puede construirse con increíble facilidad.

Utilizar en forma practica el método de Barnsley para la construcción de fractales requiere en gran medida de una interacción estrecha entre el observador y la computadora. Sólo así puede encontrarse el conjunto mínimo de transformaciones afines necesarias para reproducir la imagen deseada. Procediendo de esta manera existe la posibilidad de desarrollar nuestro espíritu creativo y diseñar desde pequeños arbustos hasta los más complejos paisajes fractales. ¿Por qué no probar y construir su catálogo personal de imágenes fractales? Dejen volar su imaginación, construyan sus propios fractales y recuerden siempre que en Αχioma nos gusta recibir las noticias que Uds. nos envien acerca de sus descubrimientos.

Gustavo Piñeiro*

* Licenciado en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* TALANQUER, Vicente -*Fractus, fracta, fractal* - FONDO DE CULTURA ECONÓMICA - México, 1996.

La esencia del número

"El número reside en todo lo que es conocido, sin él es imposible pensar nada ni conocer nada", escribía es filosofo pitagórico Filolao. Es difícil compartir esta tajante certeza sin antes asomarnos a las nociones conquistadas por la humanidad acerca de la esencia del número.

Casi no hay noción en nuestros días que haya provocado más discusiones y se haya prestado a las más diversas interpretaciones que la noción de número.

Precisamente el sentido de los números naturales, tan familiares para nosotros, es lo más difícil de comprender como es frecuente con las cosas situadas demasiado cerca de nosotros.

Las nociones primitivas relacionadas con el concepto de número se pueden hacer remontar a los primeros días de la raza humana. En un principio, esta noción pudo estar relacionada más bien con diferencias y contrastes que con semejanzas. No era lo mismo para ellos un lobo que muchos, una oveja que un rebaño, un árbol que un bosque, etc.

Se han hecho extensos estudios sobre numerosas tribus de Australia , Islas del Pacífico Sur, de América del Sur y de África. Por ejemplo, los resultados arrojan que muy pocos de los indígenas australianos son capaces de discernir el cuatro, y que ninguno puede percibir el siete como número de objetos de un conjunto. En África del Sur se observó que los hombres de las selvas del sur no poseen otras palabras que uno, dos o muchos.

Se puede decir que el sentido de número en el hombre es bastante limitado, inclusive hoy en día, ya que si tenemos que determinar una cantidad, para auxiliar el sentido directo de número recurrimos, consciente o inconscientemente, a artificios tales como la comparación de simetrías, la agrupación mental o el cómputo, siendo este último la acción de contar. Así, nuestra percepción de número se vuelve difícil de elaborar.

El hecho de que el desarrollo del concepto de número fue un largo y lento proceso viene sugerido por el dato de que algunas lenguas, incluido el griego, han conservado en su gramática una distinción tripartita entre uno, dos y más de dos, mientras que la mayor parte de las lenguas actuales hacen sólo la distinción dual en el "número" gramatical entre singular y plural.

Un sentido rudimentario de número, de alcance no mayor del que poseen ciertos pájaros, fue el núcleo del que surgió nuestra concepción de tal entidad. El sentido de número no debe ser confundido con la facultad de contar, ya que este último es un proceso mental más complicado.

Pero, a través del tiempo, el hombre aprendió a completar su percepción sumamente limitada del número con un artificio que estaba destinado a ejercer una influencia extraordinaria en su vida. Sin duda es la operación de contar, y a ella le debemos el extraordinario progreso que hemos logrado al expresar nuestro universo en términos numéricos. En referencia a esto, Bertrand Russell expresó: *Deben haberse necesitado muchos siglos para descubrir que un par de faisanes y un par de días son, ambos, ejemplos del número dos.*

El pasado nos afirma que lo concreto precede a lo abstracto, ya que de otro modo no tendríamos tantas maneras de expresar al número dos: par, pareja, yunta, gemelos, bi, etc. Sin embargo, muchos de los pueblos llegaron a la clara idea de número sin recurrir a la acción de contar. Utilizaban técnicas de apareamientos entre elementos de diferentes conjuntos, es decir, procedimientos de correspondencia biunívoca. Por ejemplo registran el número de sus rebaños con incisiones hechas en un árbol. También la etimología de la palabra cálculo nos da una prueba de esto, ya que deriva de la palabra latina calculus que significa piedra; es decir, que apareaban elementos con piedras.

Boyer, en su "Historia de la Matemática", hace referencia a un hueso de cachorro de lobo encontrado en Checoslovaquia, de hace unos 30000 años. En él figuran cincuenta y cinco incisiones dispuestas en dos series, una de veinticinco y otra de treinta, cada una de las cuales estaba dividida en dos grupos de cinco.

Por lo tanto, la evaluación de cualquier conjunto dado queda reducida a la selección de conjuntos de modelos que puedan ser puestos en correspondencia biunívoca con el conjunto dado.

El hombre primitivo encuentra esos modelos en cosas que lo rodean: la idea de unicidad o totalidad le sería dada al observar cosas como: una causa, un mundo, uno mismo, un Dios; sus manos para simbolizar el número dos, se esconde en él la idea de dualidad y la idea de polaridad, donde un lado es no sólo diferente sino también preferible; las cosas son frías o calientes, secas o húmedas, grandes o pequeñas y, por encima de todo, la polaridad del sexo.

Un padre, una madre y un hijo encierra la idea de trinidad, así como las hojas de un trébol. Las cuatro posiciones privilegiadas: hacia adelante, hacia atrás y hacia los costados, el número cuatro. Y de ese modo va construyendo conjuntos cada vez más grandes.

La mayoría de la gente dio por admitida tales categorías y no pensó en eso pero alguien, o más bien algunos, debieron advertir la importancia de dar origen a nombres para esas representaciones, transformándose así en un modelo útil para todo caso.

A medida que el hombre utiliza cada vez más el lenguaje éste reemplaza a las imágenes, y los modelos concretos originales toman los nombres de los números.

El concepto de número cardinal está basado sobre el principio de correspondencia biunívoca, que no es la acción de contar.

Para contar, también es necesario ordenar, organizar un sistema , disponer de una sucesión ordenada. Contar una colección significa asignar a cada elemento un término de la sucesión natural, de manera ordenada: uno, dos, tres, cuatro,... De esta manera llegamos al último elemento asignado de la colección y a este se lo llama número ordinal. En el sistema ordinal existe el concepto de siguiente; en realidad, es la esencia del concepto de número ordinal; siempre podemos pasar de un número cualquiera al siguiente.

Por lo tanto, correspondencia y sucesión son los principios del pensamiento matemático, la base de un sistema de numeración.

En cuanto al orden de aparición en la historia, se supone que el número cardinal, que se basa sólo en la comparación, precede al número ordinal, que requiere comparación y ordenación (ver recuadro). Pero las investigaciones no dan cuenta de esto porque en las técnicas de número encontradas se hallan los dos aspectos.

Sin embargo, hay quienes postulan un origen ritual en el concepto de número. Muchas veces en las ceremonias religiosas debían escenificarse los actos de la creación. Así, los participantes que personificaban las diferentes celebridades míticas debían "aparecer" en un orden preestablecido y determinado, debiéndoselas numerar. De esta manera, el concepto ordinal habría precedido al cardinal.

En la mayoría de las civilizaciones la acción de contar es por medio de los dedos. Eso significa que de esa manera se pasa imperceptiblemente de concepto de número cardinal a número ordinal. Los dedos de las manos son los que le enseñaron al hombre a contar y a extender el alcance del número.

Precisar la edad que tiene el lenguaje numérico es imposible pero indudablemente precede en miles de años a la aparición de la escritura.

Por medio de los dedos se podían representar colecciones de hasta diez elementos y con los pies podían llegar hasta veinte. Cuando el uso de los dedos resultaba inadecuado, utilizaban montones de piedras y a menudo amontonaban las piedras en grupos de cinco o de diez, así como observaba en sus manos.

Como dijo Aristóteles: no es casual que el sistema decimal se haya extendido tanto, ya que no es sino consecuencia del accidente anatómico de que la mayor parte de nosotros nacemos con diez dedos en las manos y otros diez en los pies.

Un estudio hecho a varias tribus de indios norteamericanos demuestra que casi un tercio de ellas usaban base decimal, otro tercio un sistema quinario y menos del uno por ciento, sistemas binarios o terciarios.
Se encuentra un elemento adicional en las primitivas ideas numéricas del hombre en el lenguaje diario; nuestras palabras "once" y "doce" significaron en su origen "uno más" y "dos más", respectivamente indicando el dominio del sistema decimal. Sin embargo, se ha sugerido que la palabra indogermánica para "ocho" se deriva de una forma dual para el "cuatro", y que el nombre latino para "nueve" puede estar relacionado con novus (nuevo), cuyo sentido era el comienzo de una nueva secuencia.

Estas palabras pueden sugerir la persistencia de una escala cuaternaria u octonaria durante algún tiempo, de la misma manera que el quatre-vingt francés que hoy aparece como vestigio de un sistema vigesimal antiguo.

Hasta aquí, una breve reseña de uno de los pequeños grandes progresos que hizo el hombre en su temprana edad, sin sospechar cuan importante serían para la humanidad estos hallazgos.

Andrea Morales *

*Estudiante de 4° año del I.S.P. "Dr.J.V.González"

Bibliografía:

* BOYER, Carl – Historia de la Matemática – Madrid, Alianaza Universidad Textos, 1994.
* DANTZIG, Tobías – El número, lenguaje de la ciencia – Buenos Aires, Hobbs- Sudamericana, 1971.
* BRUNSCHVICG, León – Etapas de la Filosofía Matemática- Buenos Aires, Lautaro, 1945.

Animales que cuentan

En conexión con la afirmación de que los animales superiores parecen comprender la idea de número, el breve extracto de un artículo de Sir John Lubbock nos puede poner en antecedentes "... Puede plantearse aquí una interesante consideración sobre el número de víctimas que asignan a cada celda las avispas solitarias. Una especie de las Ammophila considera suficiente una de las grandes orugas Noctua Segetum; una especie de las Eumenes abastece sus larvas con cinco víctimas, otra con diez, quince y hasta veinticuatro. El número parece ser constante en cada especie. ¿ Cómo sabe el insecto cuando ha terminado su labor? No por el hecho de que la celda esté llena, pues si se saca alguna, no la reemplaza. Cuando ha traído lo que le faltaba considera terminado su trabajo, tanto si el número de víctimas que antes trajo está completo como si no. ¿Cómo sabe entonces, que ha completado el número veinticuatro? ... En el género Eumenes, los machos son mucho menores que las hembras..., si el huevo es macho, dejan cinco víctimas, si es hembra, diez víctimas. ¿Cuentan? Ciertamente este hecho parece como un comienzo de la aritmética"

Extraído se SIGMA El mundo de las Matemáticas,Vol.IV,pág.21.22:Contar por Levi Leonard Conant

Experiencias en el aula I

Polinomios

En el número anterior les presenté los apuntes que preparé pensando en mis clases sobre polinomios. Ahora les transcribo algunos ejercicios que me parecieron especialmente "jugosos" relacionados con el tema. Espero que les sean útiles.

1) Hallar las longitudes de la base y la altura de un rectángulo sabiendo que la longitud de la base supera a la de la altura en 3 unidades y que el perímetro del rectángulo es 46.

Si llamamos b a la base y h a la altura (para ser originales), podemos plantear las siguientes igualdades:

$b = h + 3$
$2b + 2h = 46$

luego, $2(h+3) + 2h = 46$*, de donde se obtiene que* $h = 10$ *y* $b = 13$.

2) El área de un triángulo rectángulo isósceles es 12,25m^2 ¿Cuánto miden sus catetos? ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Si llamamos c a cada uno de los catetos, expresemos el área del triángulo: $c^2 / 2 = 12{,}25\text{m}^2$, *luego c es aproximadamente 4,95*m.

Por lo tanto, sus catetos miden aprox. 4,95m. cada uno.

Para medir la hipotenusa tenemos, por el teorema de Pitágoras: $24{,}5\text{m}^2 + 24{,}5\text{m}^2 = h^2$, *luego h mide exactamente 7m.*

3) **Pruebe que no existen números reales a y b tales que $x^2 + 1 = (x - a)(x - b)$.**

Supongamos que a y b sí existen y desarrollemos el segundo miembro de la igualdad, entonces obtendremos:

$$x^2 - ax - bx + ab = x^2 + 1$$

Pero para que dos polinomios sean iguales deben serlo término a término, así tendremos que:

$x^2 = x^2$
$-ax - bx = 0x$ *(ya que x "no aparece" en* x^2+1*)*
$ab = 1$

Pero las dos últimas condiciones no pueden cumplirse al mismo tiempo, pues si $a = -b$ *(condición que se requiere para que el coeficiente que multiplique a x sea 0), ab no puede ser* 1.

Conclusión: El polinomio $x^2 + 1$ *es irreducible en R[x] y no tiene raíces reales.*

Comentario: ¿Será $x^4 - 1$ irreducible en R[x]?

Pues no, a pesar de no tener raíces reales, el polinomio $x^4 + 1$ *se puede descomponer como producto de dos polinomios de grado 2.*

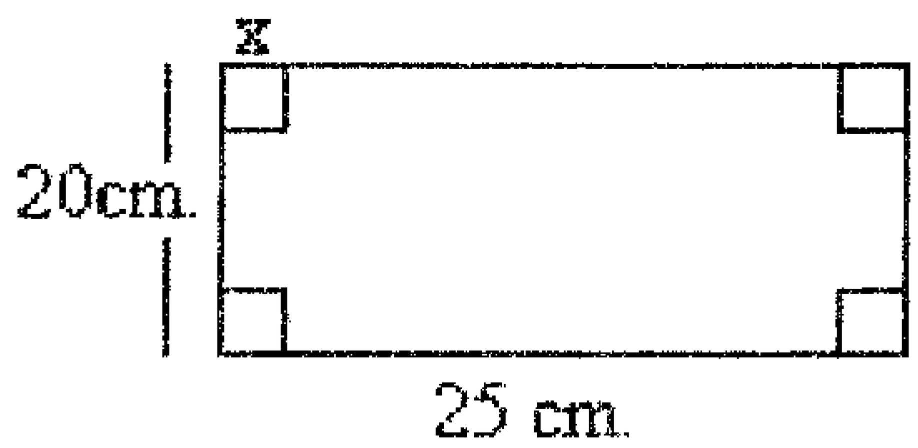
$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)\,(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$$

IMPORTANTE: En R[x] los polinomios irreducibles a lo sumo tienen grado 2.

4) ¿Cuántas raíces tiene a lo sumo un polinomio de grado n en R[x]?

A lo sumo n, esto se demuestra a partir del corolario del Teorema del Resto.

5) Con una cartulina rectangular cuyos lados miden 25 cm. y 20cm., se quiere construir una caja. Se recortan en las esquinas 4 cuadrados siendo x la medida del lado de cada uno. La caja se forma plegando la cartulina por la línea de puntos.



a) ¿Cuál es la superficie de la base de la caja si el corte es de 2 cm.? ¿Y si es de 3cm.?
b) ¿Cuál es el volumen de la caja si el corte es de 2 cm.? ¿Y si es de 3cm.?
c) Expresen mediante una función polinómica la superficie de la base.
d) Exprese mediante una función polinómica el volumen de la caja.
e) ¿Qué valores puede tomar la incógnita, x, en las expresiones halladas en c) y d)?
f) ¿Qué corte habrá que hacer para que el volumen sea de 750cm^3?

a) $S(2) = 16cm\ .\ 21\ cm = 336\ cm^2$
$S(3) = 14cm\ .\ 19cm = 396\ cm^2$

b) $V(2) = 2cm\ .\ 16cm\ .\ 21cm = 672\ cm^3$
$V(3) = 3cm\ .\ 14cm\ .\ 19cm = 798\ cm^3$

c) $S(x) = (20-2x)\ .\ (25-2x)$

d) $V(x) = (20-2x)\ .\ (25-2x)\ .\ x$

e) En ambos casos $0<x<10$

f) $V(x) = (20-2x)\ .\ (25-2x)\ .\ x$, y $V(x)=750\ cm^3$
Luego hay que hallar el/los valores de x que cumplen:

$(20-2x)\ .\ (25-2x)\ .\ x = 750$
$500x - 90\,x^2 + 4\,x^3 - 750 = 0$
$4\,x^3 - 90\,x^2 + 500x - 750 = 0$

Para reducir la expresión podemos dividir todo por 2, así tendremos: $2x^3 - 45x^2 + 250x - 375=0$
Luego aplicando el Teorema de Gauss las posibles raíces racionales son:
1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15, 25, -25, 75, -75, 125, -125, 375, -375. Y los mismos valores, divididos por 2 y por 4.

Pero recordemos que x sólo puede tomar valores entre 0 y 10 por lo tanto hay muchos que se pueden descartar. Así sólo debemos probar con: 1, 3, 5, 1/2, 3/2, 5/2, 15/2, 1/4, 3/4, 5/4, 15/4, 25/4.

Ahora sí, debemos comenzar a probar valores: cuando probamos con x=5 vemos que efectivamente este es un cero de la función.

O sea que nuestra respuesta sería que habrá que hacer un corte de 5cm.

¿Será la única respuesta posible? Veamos, si bien 5 es una raiz del polinomio, este puede tener otras... Utilizando el corolario del teorema del resto, sabemos que podemos expresar:

$2x^3 - 45x^2 + 250x - 375=(x-5)(2x^2 - 35x + 75)$

Y ahora debemos encontrar las raíces del polinomio: $2\,x^2 - 35\,x + 75$. *O sea debemos resolver la siguiente ecuación:* $2\,x^2 - 35\,x + 75 = 0$.

Las posibles raíces, reordemos que algunos de los valores debemos descartarlos por estar x entre 0 y 10, son: 3, 5, 3/2, 5/2, 15/2.

Luego, obtendremos que 5/2 es raiz del polinomio, o sea que:

$$2x^3 - 45x^2 + 250x - 375=2(x-5)(x-5/2)(x-15)$$

En realidad también obtendremos que x=15 es raiz pero por el problema sabemos que x no puede ser mayor que 10. Por lo tanto la respuesta a la pregunta que nos plantearon no es única, los cortes que podemos realizar son de: 2,5cm. o 5 cm.

6) **a) Hallar una función polinómica de grado 3 que corte al eje x en los puntos (3;0), (-2;0) y (1/2;0). Calcular f(2)**
b) Hallar g(x) tal que corte el eje x en los mismos puntos y que verifique además que g(2)=5.

$f(x)= a\ (x - 3)\ (x + 2)\ (x - 1/2)$ *donde a es un número real distinto de cero cualquiera. Es muy común que los chicos tomen a=1 (o se olviden de este valor) y respondan:*

f(x) = (x - 3) (x + 2) (x - 1/2)
f(2) = (-1).4.3/2 = -6

b) Al pedirles que encuentren uno que verifique g(2)=5 se encuentran con el problema de que "no les da". Así se ven forzados a incorporar el valor de "a" y obtienen:

5 = a (2 - 3) (2 + 2) (2 - 1/2)

despejando a se obtiene a=-5/6, por lo tanto

g(x) = -5/6 (x - 3) (x + 2) (x - 1/2)

7) **En una laguna se introdujeron 240 truchas. Al principio, el cardumen empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo, los recursos de la laguna empezaron a escasear y la población decreció. Si la cantidad promedio de truchas *N(t)* a los *t* años está dado por**

$N(t) = -10t^3 + 90t^2 + 340t + 240$ **(12>*t* >0)**

a) ¿Qué población hay en la laguna 3 años luego de este acontecimiento?
b) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido si hay aproximadamente 1200 trucha en la laguna?
c) ¿Se extingue la población? Si es así, ¿cuándo ocurre esto?

a) *N(3) = -10.27 + 90.9 + 340.3 + 240 = 1800*

b) $1500 = -10\,t^3 + 90\,t^2 + 340\,t + 240$
$-10t^3 + 90t^2 + 340t - 1260 = 0$

Dividiendo todo por 10 obtenemos:

$-t^3 + 9t^2 + 34t - 126 = 0$

Las posibles raíces son, restringiéndolas con las condiciones del problema: 1, 2, 3, 6, 7, 9. Probando obtenemos: N(2)<0 y N(3)>0, luego por el Teorema de Bolzano existe un valor c en el intervalo (2;3) tal que N(c)=0
Si seguimos aproximando podemos obtener que 2,5 < c < 2,6

O sea la respuesta sería que transcurrieron aprox. más de 2 años y medio.

c) *Tendremos que ver si para algún valor de x:*

$0 = -10\,t^3 + 90\,t^2 + 340\,t + 240$

Dividiendo por 10 tendremos:

$0 = -t^3 + 9\,t^2 + 34\,t + 24$

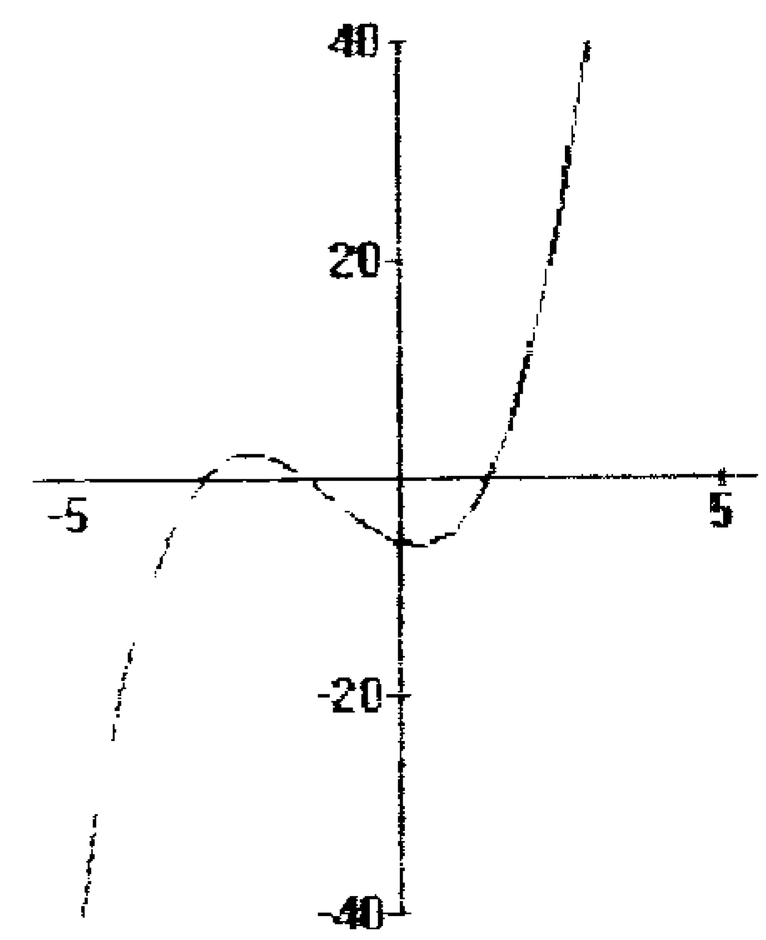
Las posibles raíces son, restringiéndolas con las condiciones del problema: 1, 2, 3,4, 6, 8, 12.

Efectivamente a los 12 meses se extingue. Además, podemos asegurar que antes esto no sucede ya que:

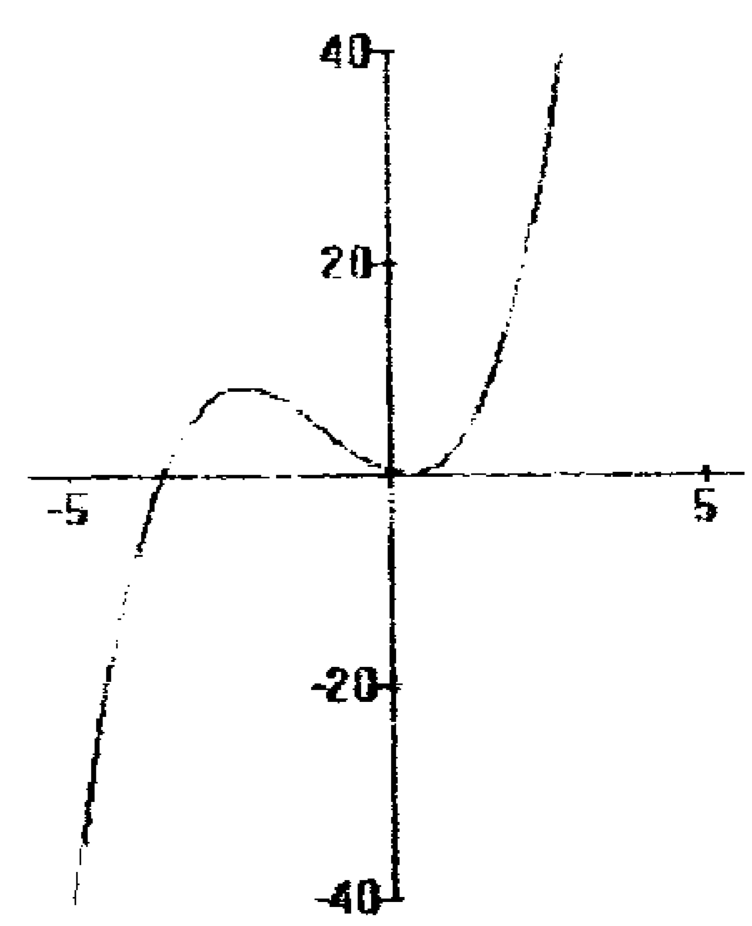
$-t^3 + 9\,t^2 - 34\,t - 24 = -(t-12)\,(t+1)\,(t+2)$

8) **Para trabajar con la computadora: Utilizando una planilla de cálculo, estudia el gráfico de la siguiente función polinómica de grado 3: P(x)= x^3 +3 . x^2 - 2 . x - 6.**
¿Qué ocurre si varía el valor del término independiente? ¿Y si cambia el coeficiente principal?.

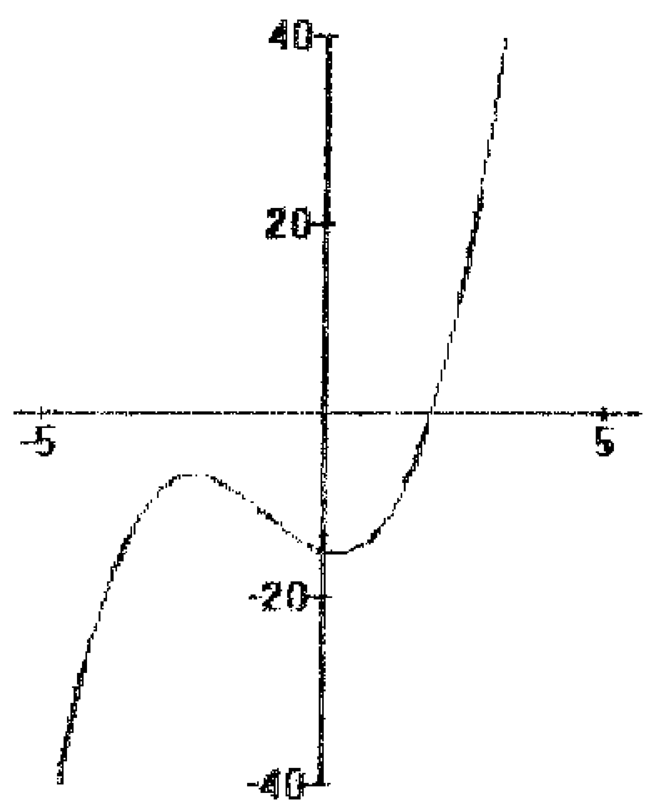
Graficamos la función original:

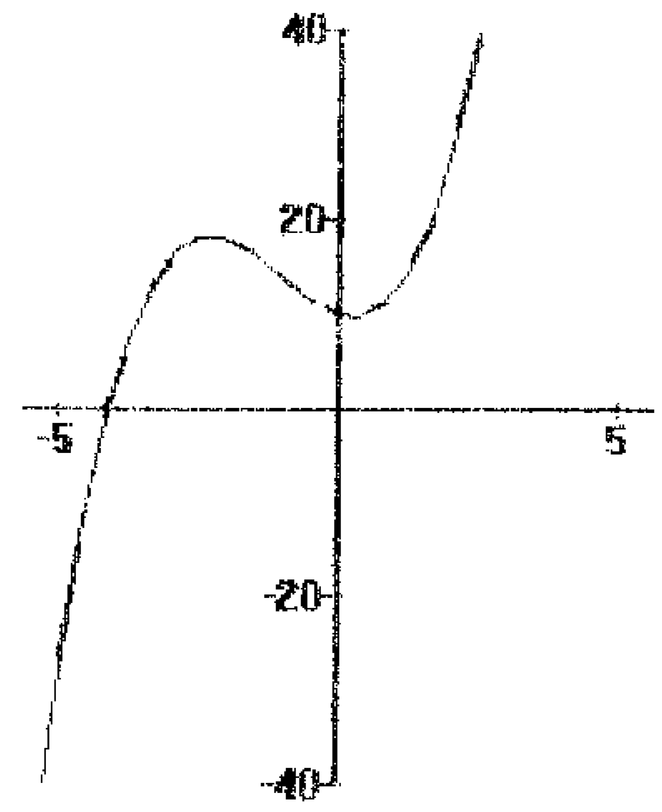


Ahora veamos qué ocurre si el término independiente es cero:

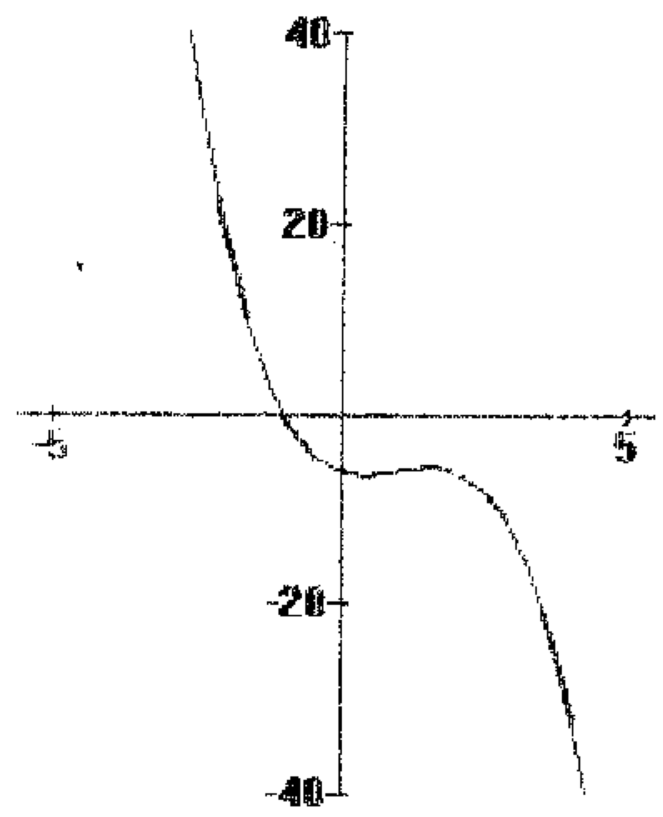


Ahora si el término independiente es -15 y 10 respectivamente:

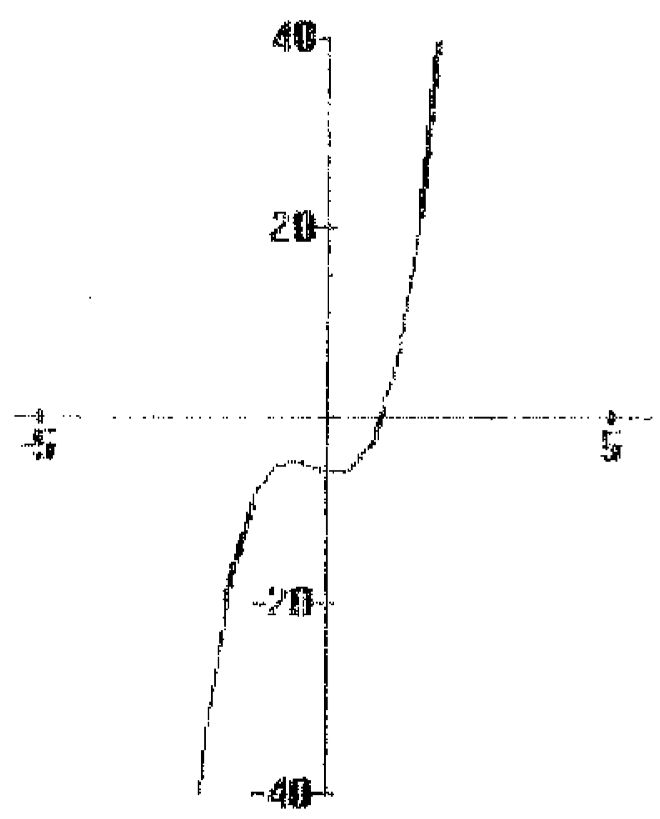


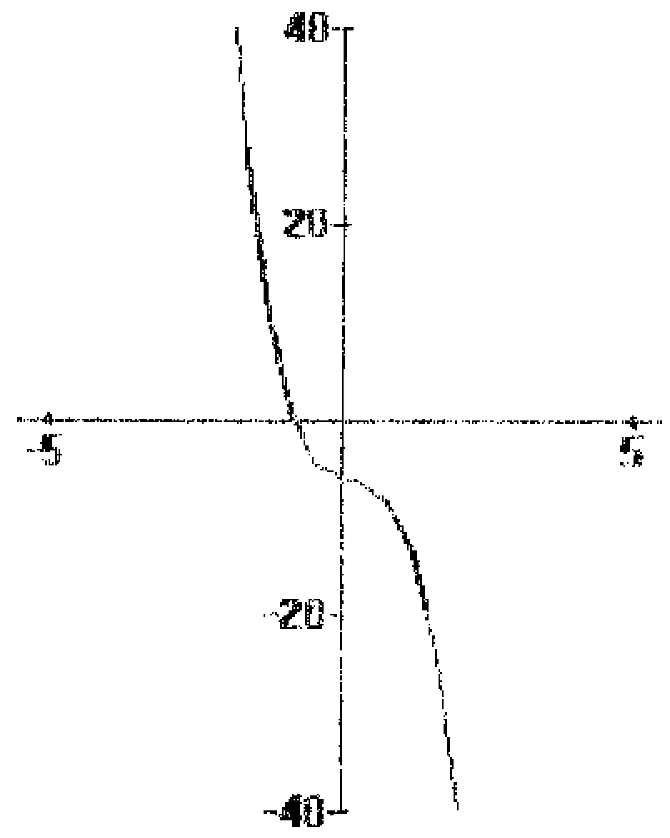


Trabajemos ahora con el coeficiente principal, si este es -1 obtenemos:

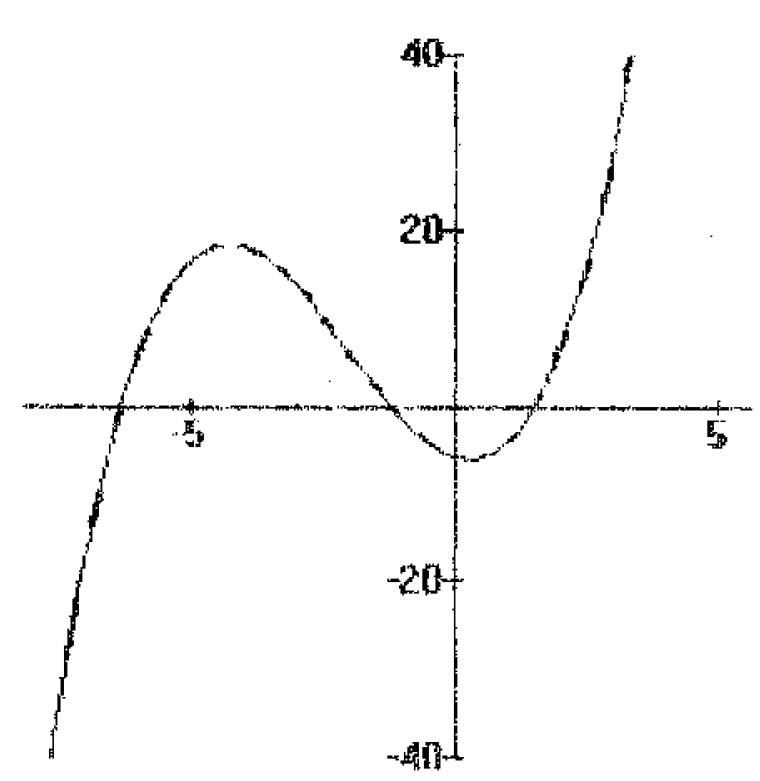


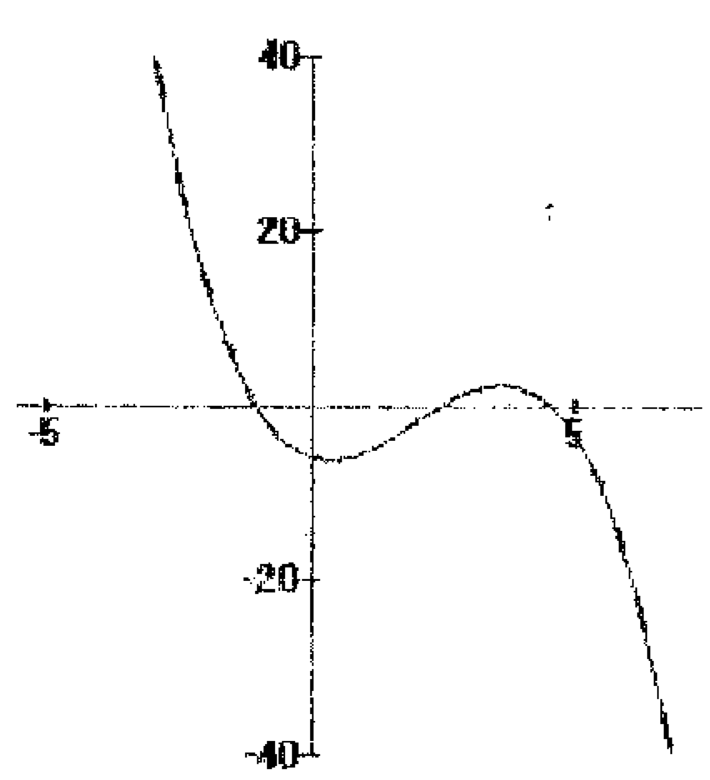
Si ahora comparamos probando con coeficientes principales 5 y -5:





Si ahora comparamos probando con coeficientes principales 0,5 y -0,5:





Luego de que los chicos trabajen un "buen rato", conjeturen confronten con las experiencias sus conjeturas se puede llegar a una conclusión general, tal como:

** El término independiente "traslada" el gráfico a diferentes alturas en el eje de ordenadas.*
** Si reemplazamos el coeficiente principal por su opuesto aditivo la gráfica queda "invertida" respecto del eje de ordenas (para que sea simétrica respecto de este eje deben variar los signos de todos los coeficientes).*
** Si el coeficiente principal es en módulo mayor que 1, la gráfica se comprime contra el eje y.*
** Si el módulo del coeficiente principal está entre 0 y 1, entonces la gráfica se ensancha hacia el eje x.*

Y otras que seguramente surgirán. También se puede cambiar la función inicial, por otra del mismo grado o de otro diferente. Hay muchas variantes para pensar y probar.

Gisela Serrano de Piñeiro*

*Profesora egresada del I.S.P. - "Dr. Joaquín V. González"

<u>Bibliografía consultada:</u>

* CAMUS, N.; MASSARA, L. - *Matemática 3* - Ed. AIQUE.
* CARIONE, Noemí; CARRANZA, Susana; DIÑEIRO, María Teresa; LATORRE, María Laura; TRAMA, Eduardo - *Matemática 3* - Ed. SANTILLANA.
* CHIARI, Jorge; LAPLAGNE, Eduardo; WYKOWSKI, Ana - *Guía de Matemática III* - Ed. ITINERARIUM.
* DE GUZMÁN, Miguel; CÓLERA, José - *Matemáticas I* - C.O.U. - ANAYA
* VARELA, Leopoldo; FONCUBERTA, Juan A. - *Matemática Dinámica 3* - Ed. KAPELUSZ

EVALUACIÓN FINAL EN FORMA DE CUENTO – 7° GRADO

Si bien este trabajo está planteado como evaluación final de 7° grado, nos parece conveniente acercarlo a aquellos profesores a cargo de 1° año u 8° E.G.B. para los que, puede resultar útil como diagnóstico del curso, con las adecuaciones pertinentes.

La evaluación es individual y durará como máximo, tres clases. Podés consultar tu carpeta y el manual y también podés usar calculadora. Cada situación implica una o varias respuestas. Las situaciones que debés responder están comprendidas entre #. Es muy importante que detalles todas tus ideas y razonamientos y muestres el procedimiento aplicado. Las respuestas no explicadas no tienen valor.
¡A pensar!... Y NO TE OLVIDES DE RELEER LA SITUACIÓN TODAS LAS VECES QUE LO NECESITES.

Matías tiene 13 años y está terminando 7°. Sus papás cumplieron 15 años de casados y decidieron irse de viaje para festejarlo; salieron el lunes 28 de octubre y volvieron 10 días después. Matías tiene tres hermanos: Andrea (9 años), Paula (6 años) y Pancho (3 años). Su abuela fue a quedarse con ellos y su papá le encargó especialmente a Matías, el hijo mayor, que la ayude. En la casa quedaron $ 270.-, que Matías ha guardado en la "caja fuerte de las zapatillas" , para hacer las compras o para lo que sea necesario.

SITUACIÓN 1: Matías rápidamente hizo la cuenta del dinero que se podía gastar cada día para que les alcanzara hasta la vuelta #¿cúanto?#. Y esa cantidad fue lo que se gastó por cada día, hasta que:

SITUACIÓN 2: El jueves fue la Sra. Elena, quien se encarga de la limpieza de la casa. Va una vez por semana por 5 horas y cobra $6.- la hora. A la Sra. Elena se le paga cada vez que va #¿cúanto?# y los papás habían olvidado dejar dinero extra para ella. Así que hubo que ir a la "caja fuerte" para pagarle y ese día no se hicieron más gastos. Matías necesitó saber cuánto dinero podían gastar desde entonces, cada día de los siguientes #¿cuánto?#.

SITUACIÓN 3: El viernes a la tarde, cuando la abuela dormía la siesta con Pancho, tocó el timbre un señor que estaba haciendo una encuesta para la municipalidad y Matías decidió responder a sus preguntas. Entre ellas: ¿cuántas personas viven en la casa?, ¿cuántos niños? , ¿cuál es la media de las edades de los hijos? #respóndelas#.

SITUACIÓN 4: Aunque la heladera había quedado llena, el sábado fue necesario ir al supermercado. A Matías y a sus hermanos les gustan los postres y los yogures. Cuando llegaron al supermercado, que queda a la vuelta de su casa, vieron un cartel que decía: "Si comprás 2 postres o 3 yogures, más $1.-, te llevás de regalo una caja de crayones". Los cuatro se entusiasmaron mucho pero no sabían qué les convenía comprar ya que había diferencia de precio entre postres y yogures. Aunque a todos les gustan más los postres, decidieron que los comprarían sólo si la diferencia no fuera mayor a $1.- entre todos. No se les ocurría cómo hacer la cuenta así que les preguntaron a 15 personas: -"¿Nos podría decir cuánto pagaríamos de más entre los cuatro si compráramos los postres en vez de los yogures?". Obtuvieron las siguientes respuestas: 0,90 – 1,10 – 1 – 1,10 – 0,80 – 0,90 – 0,70 – 0,90 – 0,80 – 1,10 – 1 – 0,90 – 0,90 – 1 – 0,80. Luego, decidieron qué comprar. #A partir de las respuestas de la gente, ¿qué y cómo lo hubieras decidido vos?#.

SITUACIÓN 5: El domingo a la tarde llovía. Los chicos le pidieron a la abuela que les hiciera una torta. Así que la "abue" preparó la receta que siempre hace en su casa, pero cuando buscó un molde redondo... ¡no había! Entonces, le consultó a Matías: -"Esta preparación, yo la vuelco en un molde redondo de 24 cm de diámetro y de 8 cm de alto que tengo en casa, pero acá encontré uno rectangular de 28 cm de largo, 22 cm de ancho y 6 cm de alto." #¿Servirá para esta torta o será demasiado chico?#

SITUACIÓN 6: El día anterior al regreso de sus padres, #¿qué día era?#, Pancho, Andrea y Paula se enfermaron. Paula tenía dolor de estómago y un poco de temperatura. Pancho, estaba lleno de granitos. Andrea se quejaba del dolor de cabeza (tenía 38° de temperatura). Entonces, Matías buscó en el botiquín la nota que había dejado su mamá: "Si a alguno de los chicos les duele la cabeza que tome una Aspirineta; si le duele el estómago y está descompuesto, que tome Sertal o Buscapina (preguntarle a la abuela). Si está afiebrado, no debe salir al sol. Si tiene mucha fiebre o salpullido, llamen al doctor inmediatamente". Luego de leerla muy atentamente, Matías ayudó a la abuela dándole su opinión acerca de qué hacer con cada uno de sus hermanitos. #¿Cuáles serían tus consejos?#

SITUACIÓN 7: Un rato antes de que llegaran sus padres, Matías descubrió entre los juguetes de Pancho un papel con números... ¡era el resumen de cuenta del banco que Pancho había usado para pintar y recortar! Matías pudo rescatar lo siguiente:

FECHA	MOVIMIENTO	SALDO
Del mes anterior------------(		220,92
02/9	- 5,70	
05/9	- 1,20	
09/9	250.-	
13/9		680,57
23/9	- 340,80	
27/9	- 60.-	

Matías conoce a su papá y sabe que es muy prolijo y ordenado; entonces copió en otra hoja y completó los espacios "en negro o dibujados". #Complétalos #

SITUACIÓN 8: Finalmente llegaron mamá y papá y Matías se tomó unas vacaciones. #¡Tomate unas vacaciones vos también! #.

Gabriela Pacheco*

*Profesora egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Los números de Mersenne son aquéllos de la forma $M_p = 2p - 1$, siendo p primo. En 1644 Mersenne sostuvo que M_p es primo sólo para los p siguientes:

p = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 67, 127, 257.

El matemático F. N. Cole (1861-1927) demostró que M_{67} no era primo. Se cuenta que en octubre de 1903, en una reunión en Nueva York de la Sociedad Norteamericana de Matemáticas, Cole tenía un tema en el programa con el modesto título On the factorization of large numbers. Cuando el presidente lo llamó para su conferencia, Cole –que había sido siempre un hombre de muy pocas palabras- se dirigió al tablero y, sin pronunciar una palabra, empezó a escribir aritméticamente 2 elevado a la 67 potencia. Luego sustrajo cuidadosamente 1. Sin una palabra se dirigió a un espacio limpio de la pizarra y multiplicó, sin abreviaturas, 193 707 721 x 761 838 257 287
Los dos cálculos concordaban. La hipótesis de Mersenne –si tal era- se desvaneció en el limbo de la mitología matemática. Por vez primera y única en la historia, un auditorio de la Sociedad Americana de Matemáticas aplaudió al autor de un trabajo presentado ante ella.
Cole se dirigió a su asiento sin proferir una palabra. Nadie le hizo ninguna pregunta.

Extraído de SIGMA El Mundo de las Matemáticas ,Vol.IV,pág.94-95:La Reina de las Matemáticas por Eric Temple Bell

Preguntas inquietantes

Una de nuestras lectoras nos ha hecho llegar una serie de "preguntas inquietantes" de alumnos del nivel medio. La selección fue realizada a partir de la experiencia recogida en sus propios cursos. Reproducimos aquí estas preguntas, junto con algunos comentarios acerca de ellos, e invitamos a todos a enviarnos "sus preguntas".

1) Como suelen hacer casi todos los profesores, definí i = $\sqrt{-1}$. Una alumna me dijo:
- Eso está mal, la $\sqrt{-1}$ es tanto i como -i. A continuación me recitó la definición (que yo había dado) $\sqrt{a}$ = b $\Leftrightarrow$ $b^2 = a$. Entonces $(-i)^2 = (-1.i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1.(-1) = -1$, luego $\sqrt{-1} = -i$.

Rigurosamente hablando, resulta ambiguo e incorrecto definir al símbolo "i" como la raíz cuadrada de -1, aun cuando esta costumbre está bastante extendida y, de hecho, hasta es recogida por algunos textos de Matemática. La ambigüedad se debe a que, como bien señala la alumna, tanto "i" como "-i" son, **ambos números**, raíces cuadradas de -1.
Dado el número real positivo a, existen **dos** números reales diferentes tales que elevados al cuadrado nos dan como resultado el número a. Uno de estos números es positivo y el otro negativo. Por convención se elige definir como $\sqrt{a}$ al número positivo (el negativo pasa a ser $-\sqrt{a}$). Por lo tanto, la definición correcta de la raíz cuadrada de a sería la siguiente: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b > 0$ y $b^2 = a$.
Si en esta definición se omite la condición $b > 0$ se corre el riesgo de caer en ambigüedades. En efecto, sin esta condición $\sqrt{4}$ sería tanto igual a 2 como a -2, y tendríamos que $2 = \sqrt{4} = -2$, es decir $2 = -2$.
Dado un número complejo $z \neq 0$ existen también dos números complejos diferentes tales que al cuadrado nos dan z como resultado. ¿Existe también una convención que nos permita definir a uno de ambos como "la" raíz cuadrada de z? Lamentablemente no podemos optar por la misma convención adoptada para los números reales, ya que no es posible hablar de números complejos "positivos" o "negativos". La razón de esto es que es imposible definir en el conjunto de los números complejos una relación de orden que sea compatible con las operaciones definidas en dicho conjunto. Es decir, no es posible definir en **C** un orden que verifique los mismos axiomas que el orden en **R**.
En definitiva, no se adopta ninguna convención y jamás se habla de "la" raíz cuadrada de un número complejo, sino de "las" raíces cuadradas de z, entendiendo que nos estamos refiriendo a un conjunto formado por dos números diferentes. En particular, no debería hablarse de "la raíz cuadrada de -1", ya que este título puede ser aplicable indistintamente tanto a "i" como a "-i", sin que haya ninguna convención que privilegie a una sobre otra.
¿Cuál es entonces la definición correcta del número "i"? Desde el punto de vista del estricto formalismo matemático el modo más adecuado de definir a los números complejos es el siguiente: **C** es el conjunto de todos pares ordenados de números reales (a,b), en el cual se define una operación de suma y una operación de producto del siguiente modo:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, c + d)$$
$$(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Cada número real a se identifica con el par ordenado $(a,0)$ y **se define como "i" al par (0,1).** De este modo valen las siguientes relaciones:

$$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$$
$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi$$

La relación $i^2 = -1$ surge así como una consecuencia de la definición de "i" (y no es la definición misma). Desde luego que esta definición, aunque formalmente inatacable, resulta tal vez demasiado abstracta para alumnos de nivel medio. En el aula, podemos optar por definir a "i" simplemente como un símbolo caracterizado por la propiedad: $i^2 = -1$, explicando a la mayor brevedad posible que "-i" poseé idéntica propiedad.

Como cierre de este comentario, le dejamos al lector el ejercicio siguiente: ¿cuál es el error en la siguiente "demostración" de que 1 = -1?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{-1} = i.i = i^2 = -1$$

2) La misma alumna, cuando estábamos estudiando as potencias de i (i^{32}, i^{27}, etc.) me preguntó: "¿Cuánto da i^i?"

Dado un número complejo $z = a + bi$, se define e^z del siguiente modo: $e^z = e^a[\cos(b) + i\ \mathrm{sen}(b)]$. Esta relación fue planteada por primera vez por Leonhard Euler y, aunque puede tomarse como una definición arbitraria, puede también deducirse trabajando con el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función exponencial y de las funciones seno y coseno. Tomando en particular $z = \pi i$, se obtiene la famosa y notable igualdad: $e^{\pi i} = -1$. Por otra parte, el lector podrá verificar sin dificultad que para cualquier número entero k, tomando $z = 2k\pi i$ vale que $e^{2k\pi i} = 1$.

Tenemos definida entonces una función exponencial para números complejos. ¿Podremos definir también un "logaritmo complejo" que sea la inversa de esta función exponencial? Es decir, dado $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, ¿podremos definir un número complejo log(z) de modo tal que $e^{\log(z)} = z$?

Si $z = a + bi$, recordemos que se define el módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sea además α un número real tal que $\cos(\alpha) = a/|z|$ y $\mathrm{sen}(\alpha) = b/|z|$. Este número α se denomina el **argumento** de z.

Podemos entonces definir el logaritmo complejo del siguiente modo: $\mathbf{\log(z) = \ln |z| + \alpha i}$ ("ln" indica aquí el logaritmo en base e o logaritmo natural; recordemos que, si $z \neq 0$, $|z|$ es siempre un número real positivo).

Verifiquemos que $e^{\log(z)} = z$. En efecto:

$$e^{\log(z)} = e^{\ln|z| + \alpha i} = e^{\ln|z|}[\cos(\alpha) + i\ \mathrm{sen}(\alpha)] =$$
$$= |z|\ [a/|z| + ib/|z|] = a + bi = z$$

Es importante observar que este número α no es único; en efecto, debido a que las funciones trigonométricas son cíclicas, si α verifica que $\cos(\alpha) = a/|z|$ y $\mathrm{sen}(\alpha) = b/|z|$, entonces $\alpha + 2k\pi$ verifica exactamente las mismas igualdades, para cualquier número entero k. En consecuencia, el argumento de z tanto puede ser α como $\alpha + 2k\pi$ (siendo k un número entero cualquiera). Para evitar ambigüedades a este respecto se fija un intervalo de longitud 2π y se establece que, por convención, el número α se tomará siempre dentro de dicho intervalo. Para cada intervalo diferente que se fije tendremos un valor diferente del argumento y, en consecuencia, un logaritmo diferente. A cada una de estas diferentes posibles definiciones del logaritmo complejo se las denomina las distintas "ramas del logaritmo".

La existencia de muchos posibles logaritmos complejos no es en verdad sorprendente y se debe al hecho de que la función exponencial compleja (a diferencia de lo que ocurre en el caso real) no es una función inyectiva. En efecto, como ya fue dicho, $e^{2k\pi i} = 1$ para cualquier entero k, por lo tanto el logaritmo complejo de 1 podría ser cualquiera de los números $2k\pi i$ ($k \in \mathbf{Z}$). Comprobemos esta afirmación calculando log(1) a partir de la definición que hemos dado para el logaritmo complejo.

Para $z = 1$ es $a = 1$, $b = 0$, $|z| = 1$ y debemos buscar α tal que $\cos(\alpha) = 1$, $\mathrm{sen}(\alpha) = 0$. Si convenimos en tomar los valores de α dentro del intervalo $[0,2\pi)$ entonces $\alpha = 0$ y en consecuencia: $\log(1) = \ln(1) = 0$. En general, si fijamos otro intervalo para α tendremos que $\alpha = 2k\pi$, donde k es un número entero que depende del intervalo elegido. Para este intervalo la rama correspondiente del logaritmo nos dará $\log(1) = 2k\pi i$.

Cuando se establece que α estará siempre en el intervalo $[0,2\pi)$ se dice que se está trabajando con la "determinación principal del argumento" y el logaritmo que se obtiene a partir de estos valores de α se denomina la "rama principal del logaritmo". La rama principal del logaritmo es la extensión a **C** del logaritmo real en base e. En efecto, si x es un número real positivo, entonces su módulo como número complejo es exactamente x y su argumento (en la determinación principal) es 0, por lo que para la rama principal del logaritmo es $\log(x) = \ln(x)$.

Dados x e y números reales positivos, es fácil verificar la igualdad siguiente: $x^y = e^{y\ln(x)}$. Con esta igualdad en mente, dados z y w números complejos no nulos se define z^w del siguiente modo: $z^w = e^{w\ \log(z)}$. El valor de z^w depende en general de la rama del logaritmo elegida.

En el caso z = i, tenemos $a = 0$, $b = 1$, $|i| = 1$. Si buscamos $\alpha \in [0,2\pi)$ tal que $\cos(\alpha) = a/|z| = 0$ y $\mathrm{sen}(\alpha) = b/|z| = 1$, entonces $\alpha = \pi/2$. Por lo tanto, **log(i) = iπ/2** en la rama principal del logaritmo; en otra rama cualquiera es $\log(i) = i(\pi/2 + 2k\pi)$, siendo k algún número entero. En consecuencia, para una rama cualquiera del logaritmo vale que:

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{i \log(i)} = \mathbf{e}^{i(i\,\pi/2 + 2k\,\pi)} = \mathbf{e}^{-\pi/2}\,\mathbf{e}^{2k\,\pi\, i} = \mathbf{e}^{-\pi/2}$$

Tenemos así que $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$ corresponde a uno de aquellos caso en el que el resultado de la potencia es el mismo cualquiera sea la rama del logaritmo elegida. En todos los casos es $\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{-\pi/2}$. Curiosamente, $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$ es un número real.

3) Con el tema de números enteros, los docentes podemos pasarnos gran parte del año distinguiendo los signos de los números de los signos de las operaciones. Por ejemplo: (-2) + (+5). Pero esta escritura se torna difícil de mantener y en cualquier libro nos encontramos con cálculos del tipo:
a) –2 + 5.7 – 32: (- 16) =
b) 3 – 6 + 8 – 4 – 10 + 1=
Surgen entonces las preguntas acostumbradas: -¿Ese menos es el signo del número o el de la operación?.
Conviene tener una posición tomada y respetarla a lo largo del año para no confundirlos. Una de las posibles: "los números negativos deben llevar su signo para indicar que lo son; a los positivos no les hace falta".
Por lo tanto, en el caso a), 2 es negativo, se le suma el producto de dos números positivos (el 5 y el 7) y se les resta el cociente entre un número positivo (32) y uno negativo (-16; en el caso b), todos los números son positivos y los signos que aparecen corresponden a las operaciones de sumar y restar.
Por supuesto hay otras posturas. Todo consiste en que el docente tome una y la respete para no confundir con muchas interpretaciones diferentes.

La resta es una operación "ficticia", una operación que en realidad no existe y que se inventa para aliviar un poco la escritura. En efecto, si consultamos los axiomas de los números reales, veremos que estos nos hablan únicamente de dos operaciones: la suma y el producto. La suma se indica con el símbolo "+" y el producto con el símbolo "**.**".
Con referencia a la suma, los axiomas nos dicen que existe **un** número (que se indica con el símbolo 0) que es el neutro de la operación. También existe un neutro para el producto; este último es indicado con el símbolo 1 y el axioma correspondiente agrega que $1 \neq 0$. Nótese que hablamos de 1 y no de +1; "+1" carece de significado pues "+" es el símbolo de una operación **binaria** y debe estar siempre indicando la suma de **dos** números. Sí podemos hablar, por ejemplo, de "1 + 1" o de "1 + 0", pero nunca de "+1".
Los axiomas nos dicen también que, dado cualquier número real x, existe al menos un número real y tal que $x + y = 0$; se puede probar además que este número y es único. A este número y se lo llama el **opuesto de** $\boldsymbol{x}$, y se adopta la notación $y = -x$. El número $-x$ es entonces aquél que sumado a x da por resultado cero. El símbolo "-" significa simplemente "el opuesto de"; no indica ninguna operación binaria y, ciertamente, no indica que el número en cuestión es negativo, ya que, de hecho, $-x$ puede ser tanto positivo como negativo.
El número -1 es el opuesto de 1; es decir, es el número que está caracterizado por la propiedad siguiente: $-1 + 1 = 1 + (-1) = 0$. El número -1 tiene también su opuesto; este opuesto es el número que sumado a -1 da por resultado 0. Ahora bien, el número que sumado a -1 da por resultado 0 es el número 1. Por lo tanto 1 es el opuesto de -1, en símbolos $-(-1) = 1$.
Cuando escribimos "-5" el signo "-" no está indicando que hablamos de un número negativo, indica que estamos hablando del **opuesto** de 5. Se da la coincidencia de que -5 **es** en verdad negativo, sin embargo -(-1) no lo es.
Para facilitar la escritura adoptamos la siguiente notación: a la suma $x + (-y)$ la indicamos x-y. Aquí es donde aparece la supuesta "operación" de resta. La resta es en verdad una suma escrita abreviadamente. Así, por ejemplo, 5 - 4 es una forma breve de escribir la suma 5 + (-4) (al 5 le sumamos el opuesto de 4). Cuando escribimos 6-(-3) en realidad estamos escribiendo la suma

siguiente: 6 + (-(-3)); a 6 le sumamos el opuesto de -3. Como el opuesto de -3 es 3, entonces se tiene que 6 + (-(-3)) = 6 + 3.
En la operación –2 + 5.7 – 32:(- 16), al opuesto de 2 le sumamos el producto de 5 por 7 y al resultado de esta operación le sumamos el cociente entre el opuesto de 32 y el opuesto de 16.
En 3 – 6 + 8 – 4 – 10 + 1, sumamos los números siguientes: 3, el opuesto de 6, 8, el opuesto de 4, el opuesto de 10 y 1.
Esperamos que los ejemplos previos permitan aclarar debidamente el significado correcto de los símbolos "+" y "-". El símbolo "-" significa "el opuesto de" y no indica jamás una operación binaria (la "resta" es en realidad una suma escrita en forma abreviada). El símbolo "+", por el contrario, indica la operación binaria de suma y jamás se aplica a un número "aislado"; "+5" carece de significado.
Una observación similar a la hecha para la "resta" puede hacerse también para el "cociente" de dos números. El cociente es en realidad un producto escrito en forma abreviada. "Dividir" por y es multiplicar por el inverso multiplicativo de y. Como 0 no tiene inverso multiplicativo, entonces la división por 0 carece de sentido.

4) Esta es una de las peores preguntas que me hicieron, y hay que tener en cuenta que la hizo un alumno de 1° año, cuando veíamos conjuntos de puntos: - Si los puntos tienen dimensión cero, ¿cómo es que completan la recta que tiene dimensión uno?

La pregunta del alumno es muy buena, muy profunda y la respuesta no es sencilla. Preguntas similares han preocupado a grandes matemáticos durante décadas.
Georg Cantor descubrió que, en cierto sentido muy preciso, hay tantos puntos en la recta como en el plano o en el espacio tridimensional. ¿Cómo es esto posible si sus dimensiones son 1, 2 y 3 respectivamente? Al propio Cantor este hecho le resultaba sorprendente y difícil de aceptar. A principios del siglo XX Giuseppe Peano descubrió una curva (que lleva su nombre) capaz de llenar todo un cuadrado. ¿Cómo es esto posible si la curva tiene dimensión 1 y el cuadrado dimensión 2? No menos sorprendente resulta la existencia de objetos con dimensiones fraccionarias, tal como son los fractales.
Todas estas cuestiones se resuelven con una adecuada teoría de la dimensión, pero aun una exposición resumida de la misma excedería por mucho el marco de estos comentarios.
Otra pregunta estrechamente relacionada con la del alumno es la siguiente. Los puntos tienen longitud cero; ahora bien, si colocamos uno a continuación de otro objetos de longitud cero, la longitud total sigue siendo nula (pues sumar cero más cero muchas veces no da otro resultado más que cero). Entonces ¿cómo es posible que los puntos lleguen a formar una recta de longitud infinita? ¿Cómo es que "cero más cero más cero..." llega a ser infinito?
La respuesta a esta última pregunta se relaciona con el hecho de que la recta (o cualquier segmento de ella) contiene una cantidad no numerable de puntos. Cualquier familia numerable de puntos tiene en realidad una longitud igual a cero.

5) Para finalizar, también en 1° año: -¿Por qué un menos delante del paréntesis cambia los signos que este encierra?

Esta pregunta está estrechamente relacionada con tercer comentario; $-(x + y) = -x- y$ significa que el opuesto de "$x + y$" es igual a la suma del opuesto de x más el opuesto de y. Este hecho se demuestra verificando que la suma de "$x + y$" más "$(-x) + (- y)$" es 0.
Tenemos así por ejemplo que $-(4-7) = -[4+(-7)] = -4 + (-(-7)) = -4 + 7$. El resultado final es que han cambiado los signos de los números que están dentro del paréntesis; pero ésta es simplemente una descripción abreviada de una serie de operaciones de suma.

Gustavo Piñeiro*

*Licenciado en Ciencias Matemáticas de la UBA.

Lectura recomendada:

* GENTILE, Enzo - *Notas de Álgebra I* - Eudeba.

Problemas Propuestos

1. *De "Snark" - lista de e-mail - John Abreu:* Recordé el siguiente truco:

a.- Escribe dos fracciones cuyo producto sea 2; por ejemplo:

$$\frac{11}{13} \text{ y } \frac{26}{11}$$

b.- Súmale 2 a ambas fracciones:

$$\frac{37}{13} \text{ y } \frac{48}{11}$$

c.- Divide ambas fracciones:

$$\frac{407}{624} \text{ o } \frac{624}{407}$$

d.- Eleva el numerador al cuadrado y súmale el denominador al cuadrado:

$407^2 + 624^2 = 165649 + 389376 = 555025$

e.- Saca la raíz cuadrada del resultado:

$$\sqrt{555025} = 745.$$

f.- CONCLUSIÓN:

$$407^2 + 624^2 = 745^2 \ldots$$

UNA TERNA PITAGÓRICA!!!!!

PROBLEMA: ¿Funciona siempre este método? Si funciona, demostrarlo; en caso contrario dar un contraejemplo.

2. *De "Notas de Álgebra I" - Enzo R. Gentile - EUDEBA:* Una banda de 13 piratas obtuvo un cierto número de monedas de oro. Los mismos trataron de distribuirlas entre sí equitativamente, pero les sobraban 8 monedas. Imprevistamente dos de ellos contrajeron sarampión y murieron. Al volver a intentar el reparto sobraban ahora 3 monedas. Posteriormente 3 de ellos se ahogaron comiendo caramelos... con papel. Pero al intentar distribuir las monedas quedaban cinco. Se trata de saber cuántas monedas había en juego y también si Morgan estaba entre los piratas.

3. *De "Matemáticas para los estudiantes de humanidades" - Morris Kline - Ed. Fondo de Cultura Económica:* Para ilustrar las virtudes del cálculo, Fermat enseñó que se podía utilizar para demostrar que de todos los rectángulos con el mismo perímetro el cuadrado es el de área máxima. Haz esta misma demostración.

4. *De "Introducción a las Matemáticas finitas" - Walter Feibes - Ed. Limusa:* Si todas las calles siguen un arreglo rectangular, ¿en cuántas maneras puede uno caminar 6 cuadras hacia el oeste y 8 cuadras hacia el norte?

5. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola:* Demuestre que $\sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{3} > 2$.

Soluciones a los Problemas de Axioma N° 10:

1. Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola: *La suma de tres números naturales es mayor que su producto, y la suma de dos de dichos números es igual a 33. Encuentre los tres números.*

Dichos números son 1, 1 y 32 ; ya que de lo contrario el producto será mayor que la suma.

2. Colaboración de Gustavo Piñeiro: *Un número x es el a% del número A y el b% del número B. Calcular que porcentaje representa x del número A+B.*

Pensemos que A+B es el 100% y queremos averiguar qué porcentaje representa x.

Para ello tenemos que calcular cuánto vale $\frac{100x}{A+B}$.

Como x es el a% de A entonces $a = \frac{100x}{A}$.

Del mismo modo $b = \frac{100x}{B}$, luego $A = \frac{100x}{a}$ y $B = \frac{100x}{b}$.

Tenemos entonces que $A+B = \frac{100x}{a} + \frac{100x}{b} = \frac{100x(a+b)}{ab}$

Por lo tanto $\frac{100x}{A+B} = \frac{ab}{a+b}$. En consecuencia x representa el $\frac{ab}{a+b}$% de A+B.

3. De "Snark" - lista de e-mail: *¿Puede un número compuesto por 100 ceros, 100 unos y 100 dos ser un cuadrado perfecto?*

Respuesta dada por ***Gustavo Sanchez.***

No, la suma de sus cifras es 300, por lo que es múltiplo de 3 pero no de 9.

4. Colaboración de Gustavo Piñeiro: *Resolver*

$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

Nota: En el miembro de la izquierda hay una cantidad infinita de equis.

* *Respuesta dada por* ***Pablo Bonucci*** *(alumno de 4° año del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"):*

Aplicando logaritmo a ambos miembros:

$$\log_2 x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = \log_2 2$$

por propiedades de logaritmo, tenemos:

$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} . \log_2 x = \log_2 2$$

$$2 . \log_2 x = 1$$

$$\log_2 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

5. De "La probabilidad y sus aplicaciones" - Luis A. Santaló - Ed. Ibero-Americana: *Demuestre que la probabilidad de que un número entero dado al azar no contenga la cifra 6 es igual a cero.*

Respuesta dada en su libro por el Dr. Luis Santaló.

Vamos a contar los números enteros que no contienen la cifra 6. Se tiene

De 1 cifra hay 8 números que no contienen el 6
De 2 cifras hay 8.9 números que no lo contienen
De 3 cifras hay 8.9^2 números que no lo contienen
De 4 cifras hay 8.9^3 números que no lo contienen

y, en general, de h cifras hay 8.9^{h-1} que no contienen la cifra 6. Luego, entre los 10^h primeros números la probabilidad de que uno de ellos no contenga la cifra 6 vale

$$(9/10)^h - (1/10)^h \qquad (1)$$

Para considerar todos los números debemos hacer tender h a infinito. Con ello la expresión anterior tiende a cero y el teorema queda demostrado.

Naturalmente que lo dicho para la cifra 6 vale para cualquier otra.

El hecho de que el resultado parezca paradójico estriba en que mientras estamos dentro de números cuyo número de cifras no sea muy grande, la probabilidad (1) tiene un valor apreciable y solo tiende a cero muy lentamente cuando la cantidad de las cifras de los números tomados en consideración crece de manera considerable. Por ejemplo, entre los números inferiores a un millón (h=6), la probabilidad de que un número no contenga la cifra 6, calculando (1), resulta que vale 0,531; entre los números inferiores a mil millones (h=9) la probabilidad calculada por (1) vale 0,423. Es únicamente al ir considerando números cada vez más grandes que la probabilidad va tendiendo a cero.

Nota: *Sobre el cierre de esta edición recibimos la correcta resolución del problema 5 de* ***Gonzalo Píngaro*** *(alumno de 4° año del I.S.P. "Dr. Joaqín V. González").*

¡Hasta el próximo número!

Comentarios de textos

Hoy comentamos una gran obra que ya forma parte de la mitología bibliográfica de la matemática SIGMA- El mundo de las Matemáticas - James R. Newman (compilador)- Ediciones Grijalbo - 9° edición - Bs.As., 1983, seis volúmenes de aproximadamente 430 páginas cada uno.

Esta notable antología de 132 textos básicos del pensamiento matemático de todos los tiempos, compilada por el conocido J. R. Newman, basa sus méritos en la acertada selección de los autores que transitan sus páginas.

Organizada en 6 tomos, la obra data de 1956, año en que apareció su primera edición en Inglés. La obra consta de los siguientes contenidos por tomo:

Tomo I: *"Historias, biografías y estudio general".*

Este tomo se dedica a la Historia de Matemática y coexisten en él 15 autores. Son particularmente notables los artículos:

Declaración sobre la utilidad de la Aritmética de Robert Recorde.

La geometría de René Descartes.

El analista del obispo Berkeley (donde éste ataca con rigor la noción de derivada debida a Newton)

La matemática como elemento en la historia del pensamiento de Alfred N. Whitehead (quien escribiera junto con Russell el conocido texto "Principia Mathematica" a principios del siglo)

Tomo II: *"El mundo físico".*

Es un tomo dedicado a la profunda relación existente entre la Matemática y la Naturaleza. Contiene 22 artículos, casi todos clásicos, entre los que descuellan:

La Matemática del movimiento de Galileo Galilei

Matemáticas de la herencia de Gregor Mendel

El principio de incertidumbre de W.Heisenberg

Tomo III: *"Probabilidades y estadística".*

Este tomo estudia la génesis del concepto de probabilidad y su empleo intensivo en otras ciencias así como los desarrollos que consolidaron a la Estadística a través del tiempo. De los 23 artículos que componen esta antología son notables, por históricos y por fundamentales, los siguientes:

Sobre la probabilidad de P. S. de Laplace

El azar de Henry Poincaré

Las matemáticas de los alimentos y de la población de Malthus

Del resto (aunque todos los artículos son excelentes) recomendamos:

La sociología aprende el lenguaje de las matemáticas de A. Kaplan.

Tomo IV: *"Números, espacio, grupos e infinito".*

Posiblemente sea éste el tomo más logrado; contiene 13 artículos, entre los que resaltan:

Arenario de Arquímedes

Números irracionales de R.Dedekind

Los siete puentes de Königsberg de Euler

Simetría de H. Weyl (recomendado para aquellos que se interesan por la estética y las formas)

El infinito de Hans Hahn

Tomo V: *"Estructura, lógica, arte y el matemático".*

Este tomo consta de 25 artículos dedicados a los fundamentos de la matemática, en interesantes secuencias epistemológicas. Entre estos artículos brillan:

Sobre la naturaleza de la verdad matemática de Carl Hempel

Análisis matemático de la lógica de G.Boole (donde se desarrollan las primeras ideas de lógica booleana)

El método axiomático de R.L.Wilder

Lógica simbólica de A.Tarski

... y uno de mis preferidos:

Cómo resolverlo de G.Polya

Tomo VI: *"Máquinas, cultura, curiosidades".*

El Tomo VI contiene una sensata mezcla temática en 25 artículos entretenidísimos, sobre todo los últimos diez dedicados a Matemática recreativa. Se destacan, por ejemplo:

¿Puede pensar una máquina? de A. M. Turing

Matemáticas de la música de James Jeans

Colección de paradojas de A. de Morgan

A modo de síntesis final

Antes de cerrar este breve comentario, es necesario recordar que esta obra vio la luz en 1956 y aún hoy es actual. En cada artículo, hay un admirable comentario previo de Newman, quien ubica a cada autor en espacio y tiempo y lo hace maravillosamente. Por último, la obra es en sí misma una fenomenal selección de temas esenciales de la Matemática, dedicada a un amplio espectro de lectores, en más de 2400 jugosas páginas. Amanece, que no es poco. Hasta la próxima.

Prof. Jorge A. Martínez*

* Prof. de Matemática, egresado del I.S.P. Nº 2 "Mariano Acosta".

Humor

A veces nos compenetramos tanto de lo que estamos estudiando que nos olvidamos del significado de ciertas palabras en el mundo real. Así le pasó a un amigo que nos contó lo siguiente:
Una tarde mi hermana menor estaba haciendo una torta. Leía atentamente la receta cuando yo pasaba por la cocina.
- Decime -me interrogó- ¿qué quiere decir una masa homogénea?
- Que esté igualada a cero -le respondí.
Y luego volví a mi habitación.

❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄

Un psicólogo pregunta a un ingeniero qué haría si se declarara un pequeño fuego y hubiera un jarro de agua sobre la mesa. El ingeniero responde obedientemente que apagaría las llamas con el agua. A renglón seguido el psicólogo se vuelve hacia un matemático y le pregunta qué haría si se iniciara un pequeño fuego y hubiera un jarro de agua en el alféizar de la ventana. El matemático contesta que trasladando el jarro del alféizar a la mesa se reducía el problema anterior, cuya solución ya se conocía.

❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄

Luego del naufragio de un barco, tres de los sobrevivientes, un químico, un físico y un matemático, luchan para salvar sus vidas en una balsa. Sólo tienen una lata de sardinas para comer y no tienen un abridor.
El químico propone sumergir la lata en el mar y dejar que las sales que éste contiene vayan desgastando la lata.
El físico sugiere calentar la lata al sol y luego sumergirla en el agua fría, luego volverla a calentar y sumergirla, y así reiteradamente para que la dilatación y contracción del metal terminen por quebrarlo.
Y el matemático mirándolos extrañado dice: Supongamos que tenemos un abridor...

La Enseñanza de la Matemática en todos los Niveles - *Prof. Luis Santaló*

Al enseñar matemática hay que impartir, primeramente y como en cualquier otra disciplina, una cierta cantidad de conocimientos. Hay que enseñar el lenguaje, las herramientas y los objetos con que la matemática trabaja. Pero junto con esto y por encima de ello, al enseñar matemática hay que enseñar a razonar, hay que educar el don típicamente humano del razonamiento, hay que conducir al alumno para que sienta el placer de pensar por cuenta propia, la satisfacción de llegar a resultados por sí mismo, sin que nadie se los haya dicho y sin que lo haya leído en ninguna parte.

Si la enseñanza de la matemática se limita a que el alumno aprenda el conjunto de conocimientos de un libro o de unos apuntes, dejándole la impresión de que todo problema que se le presente tendrá que irlo a buscar en ellos o en otros libros análogos, es una enseñanza incompleta, que en toda época habrá sido deficiente, pero que en el día de hoy, en un mundo cambiante a velocidades siempre crecientes, es no solo deficiente, sino mala. Hay que dar al alumno, por lo contrario, la idea de que los problemas que se les presenten en el futuro tendrá que resolverlos por sus propia cuenta, porque la mayoría serán nuevos y seria inútil buscarlos en los libros. El alumno debe perder el miedo a expresar sus opiniones y el profesor las debe ir moldeando para que la mayoría de las veces sean correctas. La enseñanza debe ser, fundamentalmente, potencial. Hay que mantener abierta la capacidad receptora de los alumnos y ágil su capacidad razonadora.

Debe ser una enseñanza basada en una continua ejercitación para plantearse y resolver problemas. Los libros, los apuntes y las tablas deben tenerse a mano como guía de los métodos generales y como instrumento más usuales, pero bien entendido que ellos no son el fin, sino la base de la enseñanza a impartir.

Es fácil dar ejemplos, en todos los niveles, de cómo en la actualidad cambia la matemática de uso corriente. Pensemos en el hombre común que haya seguido la escuela media hace unos veinte años. Se le enseñaron operaciones con raíces de cualquier exponente, productos y divisiones de polinomios complicados, teoremas sobre ángulos triedros.

Preguntémosle cuántas veces ha necesitado recordar estas cuestiones; posiblemente nunca. En cambio, al leer los diarios se encontrará con las elipses descriptas por los satélites artificiales, con el hecho de que en ellos desaparece la fuerza de la gravedad; con las dificultades para establecer un justo sistema proporcional para las elecciones a diputados de la Nación; con el control de calidad que se realiza en muchas industrias. Bien seguro que todo serán cosas nuevas para él. También es cierto que hace veinte años no era fácil prever que parte de la matemática superior iba a pasar a ser del dominio común y que, por tanto, debía introducirse en la segunda enseñanza. Lo mismo puede ocurrir ahora; no sabemos qué conocimientos matemáticos necesitará el hombre medio dentro de veinte años para no parecer un ignorante en su ambiente. Por esto, la única solución es despertarle la curiosidad, hacerle sentir la seguridad dentro de sus posibilidades para seguir aprendiendo cosas por sí solo. Que olvide los libros que estudió, pero conserve las ideas básicas sobre las cuales ir absorbiendo, por propia cuenta y cuando el caso se presente, las ideas en boga a medida que vayan apareciendo.

Al nivel superior, los ejemplos son todavía más abundantes. Cualquier ingeniero recibido hace veinte años, o se ha convertido en un simple constructor rutinario o ha tenido que aprender muchas cosas que no le fueron enseñadas durante su carrera. La electrónica ha obligado a estudiar teorías nuevas como la de información, circuitos, modulación, todas ellas con una fuerte e imprescindible base matemática. En el futuro, el hecho se presentará todavía en forma más aguda. Por esto la enseñanza debe perder el carácter estático de otras épocas, para pasar a una enseñanza dinámica, con menos conocimientos terminados, pero más ideas en embrión, aunque bien firmes, para que el alumno las desarrolle más tarde en la dirección que las necesidades le aconsejen.

Otra característica general de la enseñanza de la matemática, en todos los niveles, es que debe enseñar a clarificar, puntualizar y plantear sin ambigüedad los problemas. Aparte de si sabe o no resolver, todo problema matemático debe ser claro. Puede muy bien un alumno, aunque sea bueno, no atinar a resolver un problema, aun estando dentro de sus posibilidades, pero debe procurarse que sepa siempre enunciarlo bien y exponer con claridad los fines perseguidos y las dificultades encontradas. La matemática trata únicamente problemas claramente planteados. Enseñar a poner orden ante un montón confuso de ideas es uno de los principales objetivos de la enseñanza de la matemática.

Correo de lectores

El profesor Pablo Ingrassia nos ha hecho llegar un interesante artículo, referido al choque del avión de Austral, ocurrido en el mes de octubre de 1997. Detalla allí los cálculos efectuados basados en suposiciones de velocidad y altitud, enmarcados en las clásicas fórmulas de la caída libre, para encontrar la razón física que impidió hallar los restos de la nave y de los sobrevivientes. *"...Suponiendo que el DC-9 cayó desde una altura de 9000m. El tiempo de caída fue de 42,85 segundos. La velocidad en el momento del impacto habría sido de:*

$$V_f = V_0 + g.t$$
$$V_f = 0 + 9{,}8\ {}^{m}/_{s^2}\ .\ 42{,}85\ s$$
$$V_f = 419{,}93\ {}^{m}/_{s}$$

Esos 419,93 m/seg equivalen a 1511,74 km/h, pero teniendo en cuenta el rozamiento con el aire en la caída, el valor de la velocidad final se reduciría a una cifra menor, estimada por los técnicos en 1100 km/h, es decir 305,5 m/seg. Al mismo tiempo, el cráter que produjo la aeronave tenía una profundidad de 5m, vale decir que el DC-9 se frenó en una distancia de 5m; y el tiempo que empleó en recorrer tan pequeño tramo fue del orden de las décimas de segundo (para el siguiente cálculo se tomará 1/10 de segundo) entonces la desaceleración en dicho instante fue de:

$$d = V_0.t + \frac{a.t^2}{2}$$
$$a = 2.\left(\frac{d - V_0.t}{t^2}\right)$$
$$a = 2.\left(\frac{5m - 305{,}5\frac{m}{s}.0{,}1s}{(0{,}1s)^2}\right)$$
$$a = -5110\ {}^{m}/_{s^2}$$

En términos de G, o sea, en valores de gravedad terrestre, la desaceleración fue de ***521G.*** *Esta cifra es fatal para un organismo como el cuerpo humano y para una célula como el DC-9, que no fue diseñada para soportar tan enormes tensiones, y es por ello que todo se desintegró prácticamente en un instante."*

❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄

Nos escribe una lectora consecuente para ponernos al tanto de una discusión que ya tiene carácter histórico y que ahora ha resurgido, traída de la mano de los CBC.

¿TIENE SENTIDO UNA POLÉMICA SOBRE LA ENSEÑANZA DE CONJUNTOS?

Seguramente, para muchas personas con formación matemática, esta polémica no parece tener sentido; pero la discusión tiene una razón de ser, ya que después de años en los cuales se enseñó teoría de conjuntos en la escuela primaria y secundaria en forma abusiva y muchas veces sin conectar estos conceptos con otros que se definen en base a ellos, en la actualidad los CBC de la nueva Ley de Educación casi no mencionan los conjuntos. Este hecho ha llevado a sacar, apresuradamente, la conclusión de que los conjuntos están prohibidos en la enseñanza a nivel escolar.

Si bien no tiene sentido enseñar las operaciones entre conjuntos (unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento) si luego no se van a aplicar en nada y tampoco lo tiene clasificar las relaciones (de equivalencia, orden estricto y orden amplio) con sus propiedades, si luego no se verán ejemplos de ellas, tampoco tiene sentido dejar de mencionar que N, Z, Q, R, son conjuntos; que también lo es el dominio de una función y tantos otros temas que los CBC mencionan y llevan implícito que los conjuntos existen.

Todos los extremos son malos, pero luego de una "fiebre conjuntista" que llevó a que los alumnos "sumaran" conjuntos en los primeros grados, no se puede caer ahora en el extremo opuesto.

Los trabajos de Galois, alrededor de 1830 incluyen conjuntos; el que es considerado el padre de

la Teoría de Conjuntos, George Cantor, la elaboró entre 1874 y 1884.
Existe bibliografía suficiente que acredita que no se está hablando de una "moda".
Creo que uno de los peores errores en los que caemos los docentes es el de deformar la ciencia que se está enseñando. De la misma manera que generaciones de estudiantes hemos padecido las fracciones "aparentes", "puras", "propias" e "impropias" y los tristemente célebres "seis casos de factoreo", ahora nuevos nubarrones se avecinan: ¿dejarán de tener dominio las funciones en el contexto escolar?, ¿se enseñará combinatoria sin mencionar un conjunto de n elementos?... etc., etc... Si suponemos que la escuela tiene que dar una introducción a distintas áreas, relacionarlas entre sí y dar importancia a una formación básica que no por ser elemental debe dejar de ser sólida y correcta, estaremos de acuerdo en que esta polémica nos atañe, ya que se ha instaurado sin que tengamos del todo claro quién la propone ni cuáles son sus fundamentos.
Para terminar, creo que es importante tener en cuenta que debemos dar respuesta quienes hemos estudiado matemática, que debemos escuchar e incorporar las opiniones de quienes saben más que nosotros de nuestra materia y también se interesan por su enseñanza y que no es acertado permitir que se impongan "modas" desde otros lugares.

Prof. Irene Zapico*

*Profesora egresada del I.S.P. - "Dr. Joaquín V. González"

Fe de erratas de Aχioma N°10:

Pág.13: donde dice $a_1 + b_1\sqrt{k_1}$ debió decir $2^{3021376}(2^{3021377} - 1)$
Pág.30: *Solución a los...* problema 1: donde dice $g(1) = f(1) - 1 < 1$, debió decir $g(1) = f(1) - 1 < 0$

INFORMACIÓN

El pasado 8 de Mayo, Aχioma convocó a la proyección de la película Moëbius en el I.S.P. "Joaquín V. González. Una concurrencia nutrida de alumnos y docentes de diversas instituciones escuchó una charla introductoria sobre topología a cargo de nuestro compañero, el Lic. Gustavo Piñeiro.
También tuvimos la oportunidad de presenciar una demostración del siguiente enunciado, a cargo del prof. Gustavo Krimker: *En todo instante existen dos puntos antípodas del planeta donde se registra la misma temperatura.*
Agradecemos la atención brindada por los miembros de la Institución y, muy especialmente, a su Rector Prof. Alfredo Cóccola, por habernos facilitado las instalaciones.

Por razones técnicas, la presente edición llega a Ud. con gran demora. Esperamos sepa disculparnos y deseamos reencontrarnos en el próximo número, ya regularizada la entrega. ¡Gracias y hasta entonces !