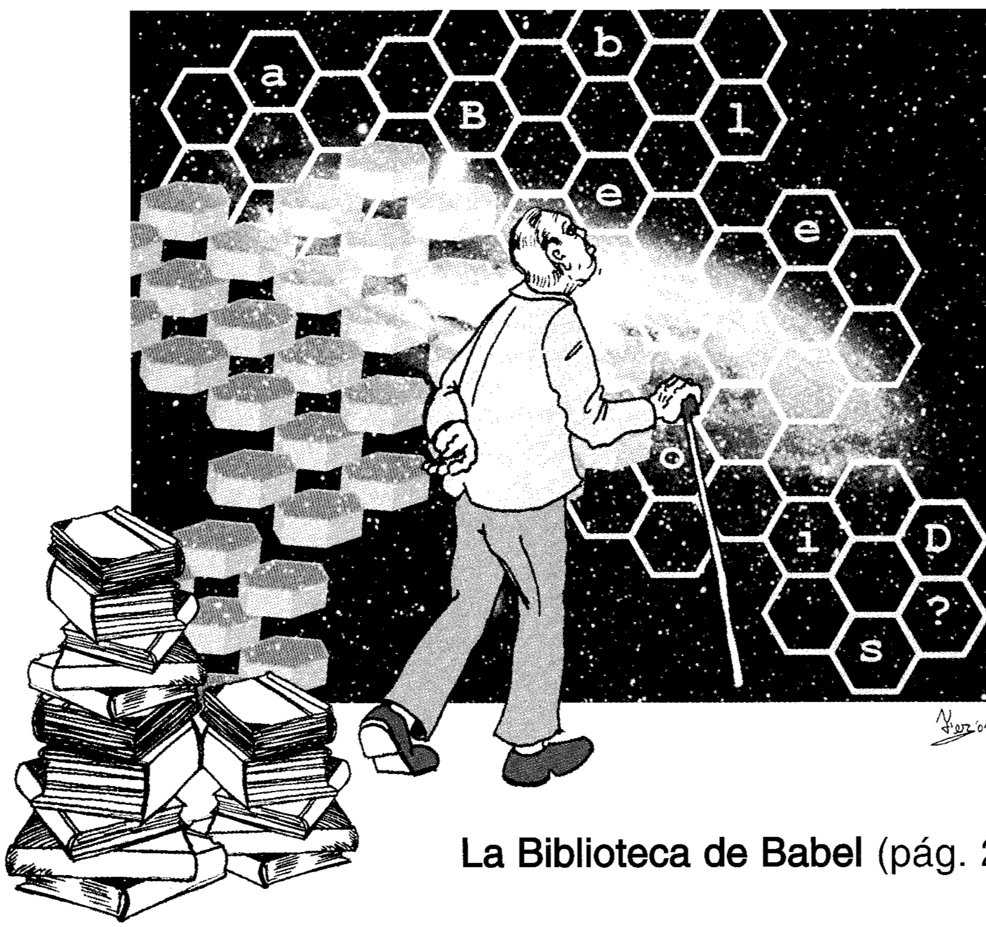
Axioma

La revista de los profesores y estudiantes de Matemática



La Biblioteca de Babel (pág. 24)

ISSN 1515-744X
9 771515 744000

Año 3 - Número 17

Aχioma Nº 17

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de Matemática, de venta exclusiva por suscripción. Hecho el depósito que marca la Ley.

Directores y Propietarios
Fernando Chorny
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Gustavo Ernesto Piñeiro
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaboradores permanentes
Pablo Bonucci
Jorge Martínez

Colabora en este número
Pablo Ingrassia

Portada
Ilustración: Fernando Chorny
Arte Digital: Julia Salerno

Dirección postal
Av. Belgrano 2654 - 1º "6"
(1096) Buenos Aires
Argentina

Correo electrónico
axioma@nalejandria.com

En internet
http://www.nalejandria.com/axioma

Impresión y distribución
Agencia Periodística Cid
Avda. de Mayo 666, Capital Federal, Argentina.

Una publicación de
NAL Educativa S.A. (Nueva Alejandría)
Uruguay 1112; Piso 6
Capital Federal (C1016ACD),
Argentina
Teléfono: 5811-0121

ISSN: 1515-744X

Editorial

Queridos amig@s:

Los que leemos e intentamos hacer Matemática conocemos la costumbre de establecer convenciones para organizar nuestro pensamiento.

Una convención nos dice que después del 31 de diciembre volveremos a cero nuestros calendarios y daremos por terminado el ciclo de Aχioma 2001.

Será el momento indicado para evaluar nuestra tarea, para cuestionarla, para esperar más que nunca los mensajes y críticas de nuestros lectores; para tomar envión y lanzarnos hacia un marzo de 2002 que nos reencuentre a través de Aχioma 18.

Es un lugar común en nuestras notas editoriales (y en las de casi todas las publicaciones culturales no masivas) dedicar unas líneas para reparar en lo difícil que es llevar adelante todo tipo de proyecto educativo en nuestro país.

Aunque nuestro reclamo por el apoyo que la educación merece parezca siempre el mismo, la situación es más desesperante. Porque seguimos adelante a pesar de los obstáculos, pero los obstáculos son cada vez mayores.

Sin embargo, continuaremos tirando de la soga en esta cinchada contra los poderosos defensores de la corrupción y la ignorancia. Y, cualquiera sea el final de la batalla, siempre será reconfortante saber que ustedes seguirán junto a nosotros, haciendo fuerza para el mismo lado.

Sumario

Noviembre/Diciembre de 2001

Lógica Matemática (Segunda Parte)

"El trabajo de Turing en la construcción de tablas de comportamiento parece inmerso en la cuestión de la programación de computadoras, tanto más cuanto Turing utilizó una notación abreviada equivalente a la definición de subrutinas. Aunque no puede decirse que la idea de la programación tenga su origen en el trabajo de Turing, la verdad es que en éste la idea es formalizada de tal modo que es difícil de creer que las computadoras todavía no existieran. Sin embargo un asunto tiene que enfatizarse: en su trabajo Turing no estaba considerando las máquinas de computación (que llegarían sólo diez años más tarde), lo que Turing hacía era modelar la acción de la mente humana." (Andrew Hodges, 1998)

por *Gustavo Piñeiro**

Hemos comentado en la nota anterior que un algoritmo es, informalmente hablando, un procedimiento mecánico (o una receta) para resolver un problema determinado. Específicamente serán de nuestro interés los problemas matemáticos que involucran números enteros positivos.

Normalmente un algoritmo se expresa como una serie de instrucciones que deben seguirse paso a paso al pie de la letra (de la misma manera en que una computadora ejecuta los pasos de un programa). Supongamos, por ejemplo, que nuestro problema consiste en calcular la parte entera de la raíz cuadrada de un número natural dado[(1)]. Es decir, queremos escribir un algoritmo que acepte como entrada cualquier número natural n y que nos dé como salida la parte entera de $\sqrt{n}$. Como primer intento podríamos plantear sencillamente el "algoritmo" siguiente:

Propuesta I:

Entrada: n.
Paso 1: Calcule la parte entera de $\sqrt{n}$ y llámela k.
Salida: k.

Sin embargo, como es fácil imaginar, las instrucciones que acabamos de escribir no constituyen genuinamente un algoritmo. La instrucción principal de nuestro ejemplo dice sencillamente "resuelva el problema", sin indicarnos realmente el modo de hacerlo. Para que un conjunto de instrucciones constituya verdaderamente un algoritmo, deberíamos estar seguros de que cada uno de sus pasos puede ser ejecutado **mecánicamente**; mientras que en la Propuesta I no tenemos ninguna garantía de que el **Paso 1** cumpla esa condición.

Una respuesta mejor para nuestro problema de hallar un algoritmo que calcule $\sqrt{n}$ estaría dada por el siguiente conjunto de instrucciones:

Propuesta II:

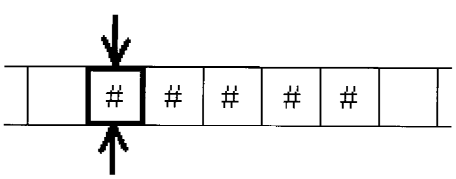
Entrada: n.
Paso 1: Asigne a la variable k el valor 1.
Paso 2: Eleve k al cuadrado.
Paso 3: Si k^2 es menor o igual que n, sume 1 al valor de k y vaya al paso 2.
Paso 4: Si k^2 es mayor que k, vaya al paso 5.
Paso 5: Reste 1 al valor de k.
Salida: k.

Es fácil ver que si seguimos estas instrucciones paso a paso calcularemos, en efecto, la parte entera de $\sqrt{n}$. Por ejemplo, si n = 22, las instrucciones nos llevan a calcular 1^2, 2^2, 3^2,... Estos cálculos llegan hasta 5^2, que es el primer número que excede a 22. La salida es, en consecuencia, k = 4. Dado que $\sqrt{22}$= 4,6904..., entonces hemos llegado a la respuesta correcta.

La Propuesta II es un **refinamiento** de la Propuesta I, ya que aquélla está construida subdividiendo cada instrucción de ésta en pasos más sencillos. Pero ¿es cierto que cada paso del segundo algoritmo puede realizarse mecánicamente? Analicemos: cada instrucción de la Propuesta II nos pide, o bien elevar un número al cuadrado, o bien sumarle o restarle una unidad, o bien comparar dos números enteros. Nuestra familiaridad con calculadoras y computadoras nos indica que, en efecto, todas estas operaciones pueden efectuarse mecánicamente. Pero, si no contásemos con esa familiaridad ¿cómo podríamos tener la absoluta certeza de que existe un procedimiento mecánico para, por ejemplo, elevar un número al cuadrado? El modo de lograr esta certeza sería refinar una y otra vez la Propuesta II hasta lograr un conjunto de instrucciones que sean tan sencillas que no quepa ninguna duda de que pueden ser ejecutadas mecánicamente. La idea central de Turing es que, el último refinamiento del algoritmo será, a la larga, una máquina de Turing.

Retorno a Turing

Recordemos que una máquina de Turing (o máquina T) es una máquina abstracta que consta de una cinta en la cual se anotará la entrada y la salida del algoritmo. La cinta está dividida en celdas o casillas, cada una de las cuales puede contener un símbolo #, o bien puede estar vacía. La cinta, además, es potencialmente infinita tanto hacia la derecha como hacia la izquierda aunque la cantidad inicial de símbolos # es siempre finita. Convenimos en que una sucesión de n símbolos # consecutivos (que anotamos $\#^n$) representa al número natural n.
La máquina consta también de un cursor que puede "ver" el contenido de una casilla a la vez.



Cuando la casilla observada está vacía el cursor puede, si sus instrucciones así lo indican, anotar en ella un símbolo #. Si la casilla tiene ya un símbolo #, el cursor puede borrarlo dejando la casilla vacía. El cursor, finalmente, puede moverse a razón de una casilla por vez, tanto hacia la derecha como hacia la izquierda.

Las operaciones de la máquina están regidas por un programa que le indica al cursor qué acción debe tomar en función del símbolo que esté señalando y del "estado interno" de la propia máquina. Un ejemplo de programa es el siguiente:

	#	0
q_1	$0Dq_2$	$0Iq_1$
q_2	$\#Sq_0$	$0Dq_2$

Donde q_0, q_1, q_2 son los estados posibles de la máquina; D, I, S indican los movimientos del cursor (derecha, izquierda y en el mismo lugar, respectivamente); 0 indica que la casilla que está viendo el cursor debe quedar vacía y # significa que debe escribirse en ella ese símbolo. El estado q_1 es el estado inicial y q_0 es el estado final. Cuando la máquina llega a éste último estado detiene su acción (lo que haya quedado escrito en la cinta es la salida del algoritmo).

La instrucción superior izquierda, por ejemplo, quiere decir que si la máquina está en el estado q_1 y el cursor ve un # entonces esa casilla queda vacía, el cursor se mueve a la derecha y la máquina pasa al estado q_2.

Evidentemente todas las operaciones indicadas (mover el cursor un lugar a la derecha o a la izquierda, borrar o anotar un símbolo) pueden ser ejecutadas mecánicamente. Por lo tanto, toda operación que pueda reducirse a estos pasos elementales (y en consecuencia de ello, pueda traducirse a una máquina T) será necesariamente una operación algorítmica. La **Tesis de Turing** (discutida en la nota anterior) dice que, recíprocamente, toda operación algorítmica puede reducirse a esos pasos fundamentales y que entonces puede representarse mediante una máquina T.

En el artículo donde presenta por primera vez su tesis[2], Turing ofrece el siguiente argumento como justificación de la misma[3]: Cuando realizamos un cálculo, los humanos observamos cifra por cifra los números involucrados en el mismo cálculo y, en cada paso elemental (o irreducible) escribimos o borramos un símbolo. Finalmente, nuestro modo de proceder está siempre regido por nuestro "estado mental" en cada instante (análogo al "estado interno" de una máquina de Turing). Es de este modo, que Turing explica por qué efectivamente cada procedimiento algorítmico se puede reducir a los pasos elementales que son descriptos por una máquina T.

Es interesante observar que Turing analiza los pasos que sigue una **persona** (no un artefacto) al realizar un cálculo. Por lo tanto, al definir su máquina, Turing estaba intentando dar un modelo matemático del funcionamiento del cerebro humano. Es decir, al momento de escribir su artículo Turing consideraba que el cerebro funciona de manera esencialmente igual al de una computadora (la complejidad del cerebro es, desde luego, mucho mayor que el de cualquier computadora actual, pero la diferencia entre ambos residiría sólo en una cuestión de complejidad, no en una cuestión de naturaleza esencial).

Escritos posteriores indican que algunos años después de la publicación de su artículo, Turing modificó esta primera convicción y que pasó a considerar que el cerebro humano tiene en realidad capacidades que son imposibles de alcanzar por una computadora, ni siquiera en teoría[4]. Concreta-mente, en esta segunda etapa de su pensamiento, Turing creía que los presentimientos o la intuición (muy comunes en el trabajo científico) son procesos completamente ajenos a la naturaleza de una computadora y que marcaban una diferencia real entre mente humana y computadora mecánica. Debemos decir que esta convicción era compartida nada menos que por Kurt Gödel, entre otros.

Las ideas de Turing, sumadas al desarrollo posterior de la computación, abrieron una polémica que hasta el día de hoy no se ha resuelto: ¿es el cerebro humano una computadora (extraordinariamente compleja, pero computadora al fin) o, por el contrario, existe una diferencia esencial entre "computadora" y "cerebro" por la cual aquélla, no importa cuán grande sea su complejidad, nunca podrá tener capacidades equivalentes a las de éste? No existe por el momento (y tal vez nunca exista) un acuerdo unánime acerca del cuál es la respuesta a esa pregunta. En la actualidad, sólo por citar algunos ejemplos, el físico-matemático Roger Penrose es defensor de la convicción de Gödel, según la cual el cerebro es esencialmente superior a una computadora y que no pueden equipararse, ni siquiera en teoría (véase, por ejemplo, el libro de su autoría citado en la bibliografía). Por el contrario, el filósofo Daniel Dennett y el matemático Douglas Hofstadter sostienen la idea opuesta, es decir, que el cerebro es fundamentalmente una computadora muy compleja y que es posible, al menos en teoría, que en el futuro lejano las computadoras artificiales lleguen a equipararse al cerebro humano en sus capacidades (véanse también los libros de estos autores citados en la bibliografía).

El autor de este artículo debe decir que simpatiza con esta última postura. Personalmente, creo que la idea de que el cerebro humano es esencialmente superior a una computadora es el último reducto del antropocentrismo. Ya hemos aprendido que la Tierra no es el centro del Universo; sabemos que tenemos antepasados comunes con los chimpancés y, de hecho, con todos los demás animales y plantas del planeta. Nos falta ahora asumir que nuestro cerebro es una extraordinaria computadora que no tiene una naturaleza esencialmente superior a la de las computadoras inanimadas.

Máquina universal

Cada máquina de Turing queda caracterizada por el programa que rige su comportamiento. Es decir, dos máquinas de Turing son iguales si y sólo si son iguales (símbolo a símbolo) sus respectivos programas. Utilizaremos esta definición para mostrar una manera de enumerar, una por una, todas las máquinas de Turing posibles.

Convengamos en adoptar el siguiente código:

1 = símbolo 0 (o casilla vacía)
2 = símbolo #
3 = letra D
4 = letra I
5 = letra S
6 = estado final de la máquina (q_0), que indica el final del cálculo.
7 = estado inicial de la máquina (q_1), en el que se encuentra al comenzar.
8 = estado dos de la máquina (q_2).
......
n = estado n - 6 de la máquina (q_{n-6}).

Con esta convención, todo programa de una máquina de Turing puede transformarse en una sucesión finita de números naturales. Por ejemplo, el programa siguiente:

	#	0
q_1	$0Dq_2$	$0Iq_1$
q_2	$\#Sq_0$	$0Dq_2$

bajo la suposición de que leemos la tabla de izquierda a derecha y de arriba abajo, y de que la fila k-ésima contiene las instrucciones que corresponden al estado q_k, se transforma en la sucesión 1-3-8-1-4-7-2-5-6-1-3-8 (que es simplemente la traducción de 0-D-q_2-0-I-q_1-#-S-q_0-0-D-q_2).
Notemos que toda sucesión que sea la traducción del programa de una máquina T tendrá necesariamente las siguientes características:

a) Estará formada por una cantidad par de ternas de números naturales. Más precisamente, si la máquina tiene n estados, la sucesión tendrá 2n ternas.
b) El primer número de cada terna será 1 o 2.
c) El segundo número de cada terna será 3, 4 o 5.
d) Si la máquina tiene n estados, el tercer número de cada terna será mayor o igual que 6 y menor o igual que n + 6.

Recíprocamente, toda sucesión que cumpla las condiciones anteriores será la traducción de una máquina de Turing de n estados. Por ejemplo la sucesión 2-5-7-1-5-7 es la sucesión que designa a la siguiente máquina:

	#	0
q_1	$\#Sq_1$	$0Sq_1$

El código que hemos descrito nos da un método para enumerar una por una todas las máquinas T existentes. Para ello, en primer lugar enumeramos las sucesiones correspondientes a todas las máquinas de un solo estado, ubicadas siguiendo el orden lexicográfico(5). La lista de todas las máquinas de un estado comenzaría entonces así:

1-3-6-1-3-6 1-3-6-1-3-7 1-3-6-1-4-6
...

Un simple razonamiento combinatorio (véase Aχioma Nº 13) nos permite deducir que existe un total de 144 máquinas de Turing de un estado.

A continuación de las máquinas de un estado enumeramos las máquinas de dos estados, luego las de tres estados y así sucesivamente (la cantidad total de las máquinas de n estados es $(6n + 6)^{2n}$). Si procedemos de esta manera tarde o temprano toda máquina T aparecerá en nuestra lista una y sólo una vez.

Dicho sea de paso, este razonamiento nos permite demostrar que el conjunto de todas la máquinas de Turing tiene cardinal $\aleph_0$, es decir que existe una función biyectiva entre este conjunto y el conjunto de los números naturales. La definición de la biyección es clara: basta asignar el número 1 a la primera máquina de nuestra lista, 2 a la segunda máquina y así sucesivamente.

Observemos también que el proceso de enumerar todas las máquinas de Turing puede realizarse fácilmente mediante un algoritmo. Este algoritmo, de acuerdo a la tesis de Turing, puede a su vez representarse mediante una máquina T. Deducimos entonces que existe una máquina de Turing cuyo programa le permite enumerar, una por una, todas las máquinas de Turing existentes (incluida ella misma). Esta máquina se denomina **máquina universal de Turing** y la indicaremos con la letra U.

Funciones no recursivas

Recordemos ahora que cada máquina de Turing (llamémosla Z) define una función $F_Z : A \subseteq N \to N$, cuyo dominio A es el conjunto de todos los $n \in N$ para los cuales se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) La sucesión de n símbolos # consecutivos (o $\#^n$) es una entrada válida para la máquina Z (es decir, tomando $\#^n$ como entrada la máquina llegará en algún momento al estado final y se detendrá).
b) La salida de $\#^n$ es $\#^m$ para algún $m \in N$.

Dadas estas condiciones, para cada $n \in A$ definimos $F_Z(n) = m$.

Puede ocurrir que A sea vacío. Por ejemplo, es fácil ver que éste es el caso de la máquina 2-5-7-1-5-7, en cuyo programa no aparece el estado final q_0:

Definición: Una función F: $D \subseteq N \to N$ es **recursiva parcial** si y sólo si existe una máquina de Turing Z tal que A = D y tal que para todo $n \in A$, $F_Z(n) = F(n)$. Es decir, una función es recursiva parcial si existe un algoritmo que permite calcular su valor para cada n de su dominio y que se "cuelga" si intenta calcular el valor de F(n) para algún n que no pertenezca a él. Si D = N, la función se denomina **recursiva**.

En la sección anterior hemos dado un método algorítmico para numerar todas las máquinas de Turing. Podemos utilizar este método para numerar ahora todas las funciones recursivas parciales. Simplemente llamaremos F_k a la función definida por la máquina T que lleva el número k.

Podemos asegurar que la sucesión $F_1, F_2, F_3,...$ contiene a todas las funciones recursivas parciales (incluyendo algunas con dominio vacío), aunque, es importante aclarar, que una misma función puede aparecer varias veces en la sucesión (ya que distintos algoritmos pueden calcular la misma función).
Dado que el conjunto de todas las funciones de N

en N no es numerable (tiene la potencia del continuo) y el conjunto de todas las funciones recursivas parciales es numerable (pues no puede ser mayor al conjunto de todas las máquinas T), deducimos fácilmente que existen funciones que no tienen asociadas ninguna máquina de Turing (es decir, no son calculables por ningún algoritmo). Veamos a continuación un ejemplo explícito de una tal función, a la que llamaremos G y cuyo dominio será N.

Instrucciones que definen G(n):

Entrada: n.
Paso 1: Utilice la máquina U para generar el programa de la n-ésima máquina T.
Paso 2: Determine si n pertenece al dominio de F_n.
Paso 3: Si en el paso 2 la respuesta es sí, calcule $F_n(n)$ usando el algoritmo hallado en el paso 1 y defina $G(n) = F_n(n) + 1$.
Paso 4: Si en el paso 2 la respuesta es no, defina $G(n) = 1$.
Salida: G(n).

Demostremos que la función G no es recursiva parcial. Utilizaremos un razonamiento por reducción al absurdo. Supongamos que G fuera recursiva, entonces existiría un número n tal que $G = F_n$. Veremos a continuación que esto es imposible.

Notemos que $G = F_n$ si y sólo si ambas funciones tienen el mismo dominio A y $G(m) = F_n(m)$ para cada $m \in A$. Ahora bien, si n no pertenece al dominio de F_n entonces automáticamente $G \neq F_n$, ya que n sí pertenece al dominio de G (concretamente $G(n) = 1$) y por lo tanto los dominios serían diferentes.

Si, en cambio, n pertenece al dominio de F_n entonces también $G \neq F_n$, ya que $G(n) \neq F_n(n)$ porque $G(n) = F_n(n) + 1$. Hemos probado entonces que para todo $n \in N$, $G \neq F_n$. Por lo tanto G no es recursiva parcial y, consecuentemente, no existe ningún algoritmo que permita calcularla.[6]

Respuesta al Entscheidungsproblem

No existe ningún algoritmo que permita calcular la función G. Pero, el conjunto de instrucciones que hemos titulado **Instrucciones que definen G(n)** ¿no es justamente un algoritmo que calcula el valor de G(n) para cada n? ¿Cómo podemos salir de esta aparente contradicción? Decíamos al comienzo de esta nota que un conjunto de instrucciones no es *ipso facto* un algoritmo. Para que realmente lo sea, debemos estar seguros de que cada instrucción puede ejecutarse mecánicamente. La única conclusión que nos permite evitar la paradoja es: el conjunto de instrucciones que define a G no es realmente un algoritmo.
¿Es posible ejecutar mecánicamente el **Paso 1**? Evidentemente sí, ya que este paso nos pide realizar un cómputo mediante una máquina de Turing. La misma respuesta puede darse en relación al **Paso 3**. El **Paso 4** es también mecánico, pues consiste simplemente en asignar el valor 1 a una variable (consiste en escribir un # en determinado lugar de la cinta de una máquina de Turing).

Por lo tanto, sólo puede ser el **Paso 2** el que no puede ejecutarse mecánicamente, el que no puede reducirse a una serie de pasos elementales. Es decir, no existe ningún algoritmo que, dado un número n, nos permita determinar si n pertenece o no al dominio de la función F_n. En otras palabras, no existe un algoritmo que nos permita saber si la entrada $\#^n$ es válida para la n-ésima máquina de Turing.

Para que una entrada sea válida para una máquina T, ésta debe detener su cómputo en algún momento. Es por ello que al problema de determinar si $\#^n$ es válida para la n-ésima máquina de Turing se lo suele llamar "el problema de la parada de la máquina de Turing" o, simplemente "el problema de la parada" (*the halt problem*, en inglés).

El *Entscheidungsproblem*, por otra parte, es el problema (planteado por Hilbert) que pide decidir si, dada una cierta rama de la Matemática, será posible hallar un algoritmo que resuelva todos los problemas que puedan plantearse en ella. El razonamiento anterior nos muestra que la respuesta al *Entscheidungsproblem* es negativa. En efecto, en la teoría de algoritmos el problema de la parada no es resoluble algorítmicamente. Por lo tanto no es posible resolver mecánicamente todos los problemas de esa rama del conocimiento.[7]

Es importante destacar que la imposibilidad se refiere a la existencia de un método general que permita decidir si para cualquier n, la entrada $\#^n$ es válida para la n-ésima máquina T (el mismo método para todos los valores de n)[8]. Sí es posible, en cambio, resolver la cuestión para valores específicos de n, usando en cada caso mecanismos diferentes. Por ejemplo, como dijimos más arriba, para una máquina en cuyo programa no aparezca q_0 es fácil demostrar que ninguna entrada es válida.

Se insinúa aquí un argumento a favor de la idea de que la mente humana es esencialmente superior a una computadora. Este argumento diría así: el problema de la parada no puede resolverse algorítmicamente, esto significa que es imposible que una computadora pueda determinar (ni si quiera en teoría) si, dado un número n cualquiera, $\#^n$ es válida para la n-ésima máquina T. La computadora podrá resolver la cuestión para algunos valores de n, pero no tendrá un método para responderla

cualquiera sea el n que se le presente.
Ahora bien, seguiría diciendo el argumento, la mente humana, en cambio, sí puede resolver el problema de la parada para cualquier n que le presentáramos, ya que la mente puede, con ingenio y habilidad, ir creando para los distintos valores de n los métodos necesarios para resolver la cuestión. De este modo, ya que la mente puede resolver un problema que las computadoras nunca serán capaces de solucionar, queda probado que el cerebro es superior a la máquina.

Aunque tal vez convincente a simple vista, el argumento es falaz. En primer término adolece de un error lógico insalvable: da por supuesto lo que quiere demostrar. En efecto, el argumento supone que la mente "con ingenio y habilidad" puede resolver cuestiones imposibles de abordar para una máquina, siendo que es esto justamente lo que pretende probar. Por otra parte, ¿existe alguna garantía de que realmente un humano (un matemático genial, si se quiere) será siempre capaz de crear los métodos necesarios para resolver el problema de la parada para un n específico? Podemos responder esta pregunta: la respuesta es no. Tampoco la mente humana puede resolver totalmente este problema.

Esta última afirmación será demostrada en la tercera nota de esta serie cuando probemos el Teorema de la Incompletitud de Gödel. Veremos allí que existen infinitos valores de n para los cuales la afirmación "$\#^n$ es válida para la n-ésima máquina T" es indecidible, es decir, no puede ser demostrada ni refutada a partir de los axiomas de la Matemática. Es más, es imposible determinar a priori cuáles son exactamente los valores n para los cuales las afirmaciones correspondientes son indecidibles: toda afirmación que aún no haya sido demostrada puede resultar indecidible.

Por otra parte, aunque se supiera, para algún n concreto, que la afirmación "$\#^n$ es válida para la n-ésima máquina T" es indecidible, cualquier método que se cree para decidir su verdad o falsedad (como por ejemplo la incorporación de nuevos axiomas a la teoría) dejará siempre infinitos valores de n sin decidir. Por lo tanto, ningún matemático, no importa cuán grande sea su genialidad, podrá jamás resolver completamente el problema de la parada. El partido entre cerebro y computadora sigue empatado.

* Lic. En Matemáticas - UBA.

Bibliografía

· ANDERSON, Alan (Editor) - Controversia sobre mentes y máquinas - Madrid, Orbis S. A., 1985.
· DENNETT, Daniel; HOFSTADTER, Douglas - The Mind's I - Nueva York, Basic Books, 1981.
· HODGES, Andrew - Turing - Bogotá, Editorial Norma, 1998.
· HOFSTADTER, Douglas - Gödel, Escher y Bach - Barcelona, Tusquets, 1992.
· MARTINÓN, Antonio (Editor) - Las matemáticas del siglo XX - Madrid, Nivola, 2000.
· PENROSE, Roger - La mente nueva del emperador - México D.F., Fondo de Cultura Económica, 1996.

(1) El conjunto de los números naturales será, a los efectos de esta nota, el conjunto N = {1, 2, 3, 4,...}. Actualmente, en cambio, existe en los libros de texto una fuerte tendencia a definir N como el conjunto N = {0, 1, 2, 3,...}.
(2)"On computable numbers with an aplication to the Entscheidungsproblem", en el Proceedings of London Mathematical Society, vol. 42 (1937), pp. 230 - 265.
(3) Decíamos en la nota anterior que la Tesis de Turing no puede ser demostrada matemáticamente. Por lo tanto, cualquier argumento que intente justificarla debe ser necesariamente de carácter extra-matemático.
(4) La pregunta de si las máquinas pueden pensar preocupó a Turing durante décadas. En 1950, por ejemplo, presentó la idea de un test (hoy conocido como Test de Turing) que permitiría en teoría determinar si una computadora piensa o no. La idea del test es que si la computadora, ante preguntas de carácter general, puede dar respuestas que no se distingan de las que daría una persona, entonces puede decirse que la máquina efectivamente piensa. El test ha sido desde su formulación motivo de mucha controversia. Puede verse una discusión muy interesante sobre él en el libro "The Mind's I", citado en la bibliografía. El artículo original de Turing en el cual presenta su test está reproducido en el libro "Controversia sobre mentes y máquinas", citado también en la bibliografía.
(5) El orden lexicográfico (u orden del diccionario) dice que las sucesiones deben ordenarse por su primera cifra, a igualdad de ésta se ordenan por la segunda cifra, y así sucesivamente.
(6) Existe una notable similitud entre esta demostración y la "demostración diagonal" de Cantor de la innumerabilidad de los números reales.
(7) Curiosamente, el primer problema del cual se demostró que no es resoluble algorítmicamente es un problema de la teoría de algoritmos. El Entscheidungsproblem está estrechamente relacionado con el décimo problema de Hilbert (enunciado en su famosa conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900). Este problema pregunta si existe un algoritmo que permita resolver cualquier ecuación diofántica (ecuación con coeficientes enteros, de la que se buscan soluciones enteras). En 1970 los norteamericanos Martín Davis, Hilary Putnam y Julia Robinson, junto con el ruso Yuri Matijasevich, dieron una respuesta negativa para el décimo problema de Hilbert.
(8) No es válida la siguiente respuesta: ingrese a $\#^n$ en la n-ésima máquina T y espere a ver si la ésta se detiene. La falla consiste en que si $\#^n$ resulta ser una entrada no válida deberíamos esperar una cantidad infinita de tiempo para tener la respuesta.

Estimaciones

Esta es la charla que brindó el Dr. Adrián Paenza en la Semana de la Matemática, que se realizó en el marco del 180º aniversario de la fundación de la Universidad de Buenos Aires.
Al principio en tono serio -pues el tema lo amerita- explicó el porqué de su participación en la defensa irrestricta de la educación pública y gratuita. A continuación se explayó, con el buen humor y sencillez que lo caracterizan, sobre un tema que no se suele trabajar en la escuela secundaria y que tanto nos permitiría desarrollar el sentido común.

La educación es un bien sagrado que debemos conservar al alcance de toda la gente, independientemente de su poder adquisitivo. Hay que tener conciencia de que hay mucha gente que dio su vida para que nosotros hayamos podido hacer lo que hicimos y podamos seguir haciéndolo: continuar renovándonos con grupos de investigación, con profesionales, con científicos y con el grado de excelencia que tiene la Universidad.
Yo los estoy invitando a pensar que la única alternativa que tenemos para salir adelante es, efectivamente, con gente que esté educada. Y para poder estar educado, la educación tiene que estar al alcance de todos, y necesitamos defender eso. Necesitamos defenderlo todos los días y mucho; no es una tarea para los otros, es una tarea para NOSOTROS. Yo soy un privilegiado y a lo mejor, varios de ustedes también. Un privilegiado de haber podido llegar hasta acá. Necesitamos tener conciencia de solidaridad para los que no pueden. Nosotros tenemos el espacio interno para poder estar hoy, aquí, sentados, haciendo una charla de matemática, digamos... hasta, de algún modo, divirtiéndonos, entrenando ese músculo que es el cerebro. Pero no podemos ignorar que vivimos en esta sociedad, en esta Argentina con tantos problemas. Nosotros hemos aceptado continuar con esta Semana de la Matemática y hacer las charlas que estaban previstas, solamente por respeto a ustedes pero, al mismo tiempo, para poder marcar nuestra enfática defensa de la educación pública y gratuita. Gracias por haber venido.

A continuación, contó la experiencia de uno de los ex alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Gerry Garbulsky, doctor en Física en el Instituto de Tecnología de Massachussetes (MIT). Gerry le relató cómo fue su prueba de admisión en una empresa en E.E.U.U. a la que se presentó cuando había terminado su tesis doctoral.

La empresa, al margen de haberle hecho distintas entrevistas, en una de ellas (que parecía ser una entrevista de sentido común) le preguntó: "¿Cuántos afinadores de piano cree que hay en Boston? Le aclaro, no quiero que me diga si hay 243, quiero que haga una estimación." Otra pregunta que le hicieron fue: "¿Cuántas ratas hay en esta ciudad?". Para responder, había que tratar de encontrar un número que tuviera algún sentido, de poder estimar un resultado posible. Más tarde, citaron a las 40 personas que habían decidido contratar, les enviaron a sus casas cajas con libros y se suponía que cada uno tenía que llegar al seminario que duraría 6 días, habiendo leído esos libros. Gerry se dio cuenta de que era una caja enorme, que no tendría la oportunidad de leerlos a todos. De lo que se trataba era de conseguir alguna información relevante; era parte de la prueba saber qué 20% de información procesar como para que no se note que falta el 80%. Es decir, formaba parte de la prueba esto de tener sentido común.

Quiero contarles algo que tiene que ver con las estimaciones y las sorpresas. Nosotros hablamos muchas veces de millones, de miles de millones, etc. Yo les quiero preguntar: ¿cuál creen que es la diferencia que hay entre 10^6 y 10^9? O sea, entre 1 millón y 1 000 millones. Antes que me contesten, yo sé que hay una diferencia de tres ceros, pero digo ¿ustedes tienen noción de lo que significa la diferencia entre uno y otro? Por ejemplo, supongamos que uno tuviera que estimar la diferencia entre 1 millón de segundos y 1000 millones de segundos. Cuando uno mira esto, hace la cuenta y calcula en días cuánto es 1 millón de segundos; resulta un poco más de 11 días. En cambio, 1000 millones de segundos son unos 32

años. ¡Es una gran diferencia!
Quiero ahora leerles esto que no escribí yo, pero que da clara idea de que no estimamos, no sabemos de qué estamos hablando cuando nos hablan de los números. Todos ustedes escucharon la historia de Santa Claus... Santa Claus se supone que le reparte juguetes a todos los chicos buenos del mundo, bajando por la chimenea (bueno, acá no hay chimeneas pero no importa). Existen aproximadamente 2 000 millones de chicos en el mundo, teniendo en cuenta que el año pasado la población mundial llegó a 6 000 millones de personas. Como Santa Claus no visita chicos musulmanes, ni judíos ni budistas, esto reduce su trabajo en la noche de Navidad, teniendo sólo que visitar 378 millones de chicos. Vamos a suponer que hay aproximadamente 3,5 chicos por casa, o sea que le toca visitar 108 millones de hogares, suponiendo que hay, por lo menos, un niño bueno por casa. Santa Claus tiene, increíblemente, alrededor de 31 horas de navidad para realizar el trabajo. ¿Se entiende por qué? Porque vuela en contra del huso horario, viaja de Este a Oeste. Esto le da 968 visitas por segundo; es decir, para cada casa cristiana con un niño bueno, Santa Claus tiene alrededor de 1 milésima de segundo para hacer esto: tiene que estacionar el trineo, bajar, entrar por la chimenea, llenar las botas de regalos, distribuir los demás regalos por el arbolito, comer los bocaditos que le dejaron, treparse nuevamente por la chimenea, subirse al trineo y llegar a la siguiente casa. ¡Una milésima de segundo para hacer eso! Suponiendo que cada una de esas 108 millones de paradas estén equidistribuidas por la geografía de la Tierra, estamos hablando de alrededor de 1248 km entre casa y casa, esto significa que Santa tiene que hacer un viaje de 121 millones de kilómetros, sin contar, claro, los descansos o paradas para ir al baño... Por lo tanto, el trineo de Santa Claus se mueve a una velocidad de 1040 km/seg, es decir, 3000 veces la velocidad del sonido. Hagamos una comparación: el vehículo más rápido fabricado por el hombre es la nave conocida con el nombre de Ulises Space Clod y ésta viaja a una velocidad máxima de 44 km/seg. Un reno convencional (vieron que Santa Claus tiene renos que le llevan los trineos) puede correr como máximo 24 km/h, o lo que es lo mismo, unos 0,007 km/seg. La carga del trineo le agrega otro elemento interesante porque, suponiendo que cada chico va a recibir un juguete de tamaño mediano, digamos de 1 kg, el trineo estaría cargando unas 500000 toneladas, sin contar el peso de Santa Claus. En la Tierra, un reno normal no puede acarrear más de 150 kg, y aun suponiendo que pudiera acarrear 10 veces el peso normal, el trabajo obviamente no lo podrían hacer 8 o 9 renos, como nos contaron a nosotros; Santa Claus necesitaría unos 360000 renos, lo que va a incrementar la carga, porque los renos pesan también, otras 54000 toneladas, sin contar el peso del trineo.

Más allá de la broma, serían 600000 toneladas viajando a 1040 km/seg que sufren una resistencia al aire enorme!!!! lo que calentaría los renos de la misma forma que se calienta la cubierta de una nave espacial al ingresar a la atmósfera terrestre. Por ejemplo, los dos renos de adelante, absorberían 14 quintillones de joules por segundo cada uno, por lo que se calcinarían casi instantáneamente, exponiendo a los renos que siguen y creando ensordecedores booms sónicos. Todos los renos se vaporizarían en un poquito más de 0,004 seg más o menos, cuando Santa Claus esté a punto de realizar su 5.ª visita.

No, no llega. Si no importara todo lo anterior, hay que considerar el resultado de la desaceleración de 1040 km/seg: el tipo tiene que frenar para bajar, o sea que en 0,001 seg, suponiendo un peso de Santa Claus de 150 kg, estaría sujeto a una fuerza centrífuga de unos 17500 g y se incrustaría en el frente del trineo con una fuerza de unos 2 millones y pico de kilos, rompiendo al instante sus huesos y desprendiendo todos su órganos, reduciendo al pobre Santa Claus a una masa informe, aguada y temblorosa. ¡Pobre Santa! Si aún con todo esto, alguno de nosotros tiene derecho a reclamarle a Santa Claus que no le trajo lo que le pidió, ...pobre tipo. Bueno, esto implica que nunca hacemos ni una cuenta.

Esto no es mío, esto me lo mandó Hugo Scolnik; tampoco creo que sea de él pero me pareció interesante y tenía ganas de contarles por qué uno no hace cuentas, por qué uno no estima. Una cuenta que quería hacer con ustedes es la siguiente: ¿Ustedes saben cuánta sangre tiene un ser humano en promedio, la cantidad máxima que tiene?... 5 litros es una barbaridad, nadie tiene más de 4, pero pongamos que tiene 5 litros. Vamos a estimar la cantidad de sangre que hay en el mundo para ver si es mucha, poca,... Bueno, digamos de los humanos vivos, no hablemos de los animales. ¿Cuántas personas hay? Somos 6000 millones. Vamos a calcular por exceso, suponiendo que todo el mundo, grandes, chicos, todos tienen 5 litros. Hay 30000 millones de litros, o sea 30.10^9 litros. Ahora, 1 litro son 1000 cm^3, quiero calcular en metros cúbicos cuánto es, es decir, quiero fabricar un cubo y saber de cuántos metros o kilómetros lo tengo que hacer para ver dónde meter toda la sangre, ¿se entiende lo que digo? Quiero hacer dos cuentas: calcular de qué dimensiones tendría que armar un cubo para poder guardar toda la sangre del mundo y, por otro lado, ver si yo tiro toda la sangre en el océano o en un mar, cuánto más profundo se haría el océano o el mar.

Hagamos las cuentas: 1 litro son 1000 cm^3, con lo cual 1000 litros son 10^6 cm^3 y la cuenta es: si 1 m es 10^2 cm, 1 m^3 es 10^6 cm^3, ¿estamos de acuerdo? Con lo cual, 1000 litros es 1 m^3, entonces, ¿cuántos m^3 de sangre hay en total? Si había 30.10^9 litros de sangre, hay 30.10^6 m^3. En total hay 30 millones de m^3 de sangre.

Ahora la pregunta es la siguiente: ¿cómo harían ustedes para calcular las dimensiones de un cubo en el que entre esa sangre? Si uno quisiera hacer un cubo, tendríamos que sacar la raíz cúbica de 30.10^6 m^3. Calculemos esto: si nosotros hiciéramos un cubo de 300 m de lado, o sea 3 cuadras de ancho por 3 cuadras de largo por 3 cuadras de alto, ¿qué volumen tendría? Sería $(3.10^2 m)^3 = 27.10^6$ m^3. Estamos bastante cerca, si pusiera uno de 3, 1.10^2 m en lugar de 3.10^2 m, andaríamos ahí. Esto quiere decir que toda la sangre del mundo entra en un cubo de 300 m de lado. ¡No hay tanta sangre entonces! Para mí fue una sorpresa enterarme de que toda la sangre entraría ahí, en un cubo tan pequeño.

Quiero hacer una reflexión con respecto al agua, es decir, cómo se incrementaría la altura. El mar Muerto tiene, aproximadamente, una superficie de 1000 km^2. Me gustaría hacer la siguiente cuenta con ustedes: si tuviera una base de 1000 km^2 y tirara toda la sangre ahí, ¿cómo haríamos para averiguar en cuánto se incrementó la base por la altura h, que no sé cuál es? Tendría que poner que

$\mathbf{h}$ .1000 $km^2 = 30.\ 10^6\ m^3$

Entonces $\mathbf{h} = 30.\ 10^6\ m^3{:}10^3\ km^2 = 30.\ 10^6\ m^3{:}10^3.10^6\ m^2 = 30.10^{-3}\ m = 0{,}03\ m = \mathbf{3\ cm}$.

O sea que si uno tirara toda la sangre del mundo arriba del mar Muerto, se elevaría la altura del mar Muerto en 3 cm. ¡Es increíble la cantidad de agua que hay en el mundo! La sangre que hay es muy poquita, pero la cantidad de agua es impresionante. Nosotros no tenemos noción de lo que significan los números, no sabemos estimar.

¿Saben por qué traje lo del cubo? (*muestra un cubo de Rubik a la audiencia*). Esto también lo leí, en la caja donde viene envuelto este cubo. En la parte de afuera dice lo siguiente: "Tiene más de 4.10^9 posiciones posibles.". Mientras veníamos caminando con Alicia (Dickenstein) hacia aquí, le dije: Calculemos si da lo que yo leí que da. Lo curioso es comparar con el dato de la cubierta... Si llegan a ser 4.10^{19} posiciones posibles y dicen que son más de 4.10^9, es como si uno entrara a la Ciudad de Buenos Aires y dijera: Che, ¿Buenos Aires cuántos habitantes tiene? Y..., tiene más de dos. Está mal esto. No es falsa la información, pero si llegara a tener 4.10^{19} posiciones posibles y nos dice que tiene más de 4.10^9, nos está invitando a pensar algo equivocado.

Quiero contarles un problema que se planteó hace un tiempo, fue muy curioso. Vieron que cambiaron las patentes hace unos cinco años, tenían 7 números y adelante había una letra que indicaba dónde estaba patentado un auto, en qué provincia, o si era de la Capital Federal, etc. Alguien tomó la determinación de patentarlos todos de nuevo pero haciéndolo de la siguiente manera: en lugar de tomar números, permitamos letras. Pongamos 3 letras y 3 números. Para que alguien haya pensado eso, naturalmente tiene que pensar que tiene que haber más posibilidades que autos y también, haberse dado un pequeño margen, porque no va a poner justo la cantidad de autos que hay y dentro de dos años hay que agregar otra letra. Es decir, tiene que haber pensado con una mínima proyección de futuro. Entonces hicieron la cuenta y dijeron: "Vamos a hacer como era antes, y que la primera letra indique la provincia". Ahora miremos, si el alfabeto tiene 26 letras (sin contar la *ch*, la *ll* y la *ñ*), ¿cuántas posibilidades hay, libremente? ¿Cuántas letras pueden ir? En el primer lugar pueden ir 26 letras, lo mismo en el segundo y en el tercero. ¿Cuántos dígitos posibles hay? 10.10.10, o sea en total habría $26^3.10^3 = 17\ 576\ 000$ posibles patentes. ¿Estamos de acuerdo? Pero en cuanto uno dice: voy a poner la C para los autos de Capital, ¿cuántas patentes quedan para la Capital? $26^2.10^3 = 676\ 000$. ¿Entienden lo que pasó? Hicieron una macana porque si querían fijar la letra, esto por supuesto en La Rioja anda bien pero en la provincia de Buenos Aires, no. Pero ya lo habían hecho, no sé si se dieron cuenta de que acá cualquier patente tiene cualquier letra: no pudieron hacer como habían pensado. Con 17 millones hubiera estado bárbaro, pero con esto no. Les salió mal. Por eso dejaron libre todas las letras y pusieron que todas las patentes que empiezan con la letra R son autos anteriores a un modelo de 19..., etc., etc. Esta era una cuenta mínima para hacer.

Ustedes escucharon hablar muchas veces de que si uno pone en un tablero de ajedrez una pepita de oro de 1 g en la primera casilla,... ¿lo conocen, verdad? Vamos a ponerlo de esta forma: ¿cuánto pesaría el tablero si pongo así: 1, 2, 4, 8, 16, ..., pepitas de 1 g en las 64 casillas? La respuesta es $2^{64} - 1$ gramos, que es igual, aproximadamente, a $1{,}845.10^{19}$ g o sea unos 18 trillones de gramos o sea unos 18 mil millones de kilos o, simplificando, 18 millones de toneladas. Ahora, supongamos que le dicen a uno: "Llevate las pepitas, ponete una pepita por segundo en el bolsillo". Tardaría esta cantidad: 18 trillones de segundos. Un año tiene, si no hice mal la cuenta, aproximadamente, un múltiplo de 10^7 seg, en el orden de unos 40 millones de segundos. Entonces estaría tardando alrededor de 10^{11} años. El tipo estaba muy apurado, inclusive habló con Santa Claus por el tema del trineo, sí no se pudo llevar nada.

Última observación: ustedes deben haber visto en la muestra que está el teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras tiene una particularidad, más allá de las demostraciones cada vez más elegantes que hay y más lindas (yo no sé por qué a nosotros, cuando estábamos en el colegio secundario, no nos daban -a mí, por lo menos- esas demostraciones). Una cosa interesante es lo siguiente (lo que voy a decir contiene un error, me gustaría que Uds. me dijeran dónde está): vamos a suponer que los griegos supieran el teorema de Pitágoras, habían hablado con Pitágoras y se los dejaba usar. Ellos lo usaban para construir ángulos rectos; tomaban, por ejemplo, una soga, ponían 3 m en uno de los lados del triángulo, 4 m en el otro y el tercer lado de 5 m, así les quedaba un ángulo recto. Pero ¿estaban usando el teorema de Pitágoras u otra cosa? Porque el teorema de Pitágoras, ¿qué dice?: dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, pero dice dado un triángulo que tiene un ángulo recto. Lo que uno está usando es al revés: si uno tiene un triángulo tal que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo tiene un ángulo recto. Eso no dice el teorema de Pitágoras. Habría que demostrar otra cosa, habría que demostrar que los únicos triángulos que cumplen con el teorema de Pitágoras ¿cuáles son?, los rectángulos. Yo los invito a que traten de ver si son capaces de demostrar que todo triángulo que cumpla la propiedad ésa, es un triángulo rectángulo. Esto es la vuelta del teorema de Pitágoras, no es el teorema de Pitágoras, es otra cosa.

Díganme ahora una terna de números enteros que cumpla el teorema de Pitágoras. **3, 4 y 5** ①. Teniendo una terna, ¿ustedes pueden fabricarse otras ternas a partir de ésta? Le responden *6, 8 y 10.* ¿Por qué hiciste esto? ¿Cumple? $6^2 = 36$, más 8^2 que es 64, da 100 que es 10^2. Pero, ¿qué hiciste? Multiplicaste por 2. ¿Si hubieras multiplicado por 3, también serviría? ¿Qué estaríamos tentados de decir? Si yo tengo 3, 4 y 5, si hago 3k, 4k y 5k, siendo k cualquier natural, va a ser una terna. ¿Por qué va a ser cierto esto? Porque $(3k)^2 + (4k)^2 = k^2(3^2 + 4^2) = k^2 5^2$. Con estos números, entonces, se fabrican infinitas ternas; hay tantas ternas de este tipo como números naturales. Ahora, ¿son las únicas ternas de números enteros que cumplen esto? Voy a poner otra, por ejemplo: **5, 12 y 13** ② -. Esto es $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. La pregunta es: ¿se podrá obtener ② de ①? No, y la justificación es que para ningún k, puede ser $3k = 5$, porque 5 es primo.

Quiero mostrarles que estas ternas, que no se obtienen unas de otras, se llaman primitivas y lo interesante es ver cuántas ternas primitivas hay. Voy a escribir cuáles son las 12 primeras ternas primitivas con números de dos dígitos nada más. Las voy a escribir todas, porque me parece que es interesante que ustedes puedan preguntarse cómo fabricar ternas y cómo fabricar ternas primitivas, o cómo las encuentran, y cuántas hay, de qué depende; no voy a dar la respuesta, me parece interesante que lo piensen. Como dije: 3, 4 y 5; 5, 12, y 13; 7, 24 y 25; 8, 15 y 17; 9, 40 y 41; 11, 60 y 61; 12, 35 y 37; 16, 63 y 55; 20, 21 y 29; 28, 45 y 53; 33, 56 y 65; 48, 55 y 73. Estas son las 12 ternas primitivas que hay, que no involucran ningún número de tres dígitos. Si hay alguien a quien le interesa esto hay muchas cosas escritas. ◣

Nota: Ver Aχioma 16: La ecuación diofántica $x^2+y^2+z^2$, pág. 9

Métodos Numéricos

En esta nota presentamos tres métodos numéricos simples para aplicar a la resolución de ecuaciones polinómicas, estudiando intuitivamente la eficacia de cada uno. Con distinto nivel de complejidad, los tres métodos pueden ser llevados al aula y ser utilizados también para ilustrar que ir aproximando una raíz es una forma de definir un número real.

*Fernando Chorny**

En los dos últimos números de Axioma, desde la sección Historia, enfocamos el problema de la resolución de ecuaciones polinómicas de grados 3 y 4. Por otra parte, está demostrado (Abel y Galois) que no existen fórmulas resolutorias para ecuaciones generales de grado mayor que 4.

Podemos preguntarnos: ¿Por qué es tan popular la fórmula resolutoria de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ en comparación con las fórmulas que resuelven las ecuaciones $ax^3+bx^2+cx+d=0$ y $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$? ¿Por qué la primera fórmula es tema de estudio en cualquier libro de matemática de nivel medio mientras que a las otras dos apenas se las puede hallar, con suerte, en el apéndice de algunos libros, en calidad de comentario curioso?

La respuesta es bastante elemental: la fórmula resolutoria para la ecuación de segundo grado es más simple y más práctica.

Una situación similar ocurre con los criterios de divisibilidad de números enteros. Todos sabemos de un vistazo si un número es o no múltiplo de 5. Pero no todos recordamos el criterio de divisibilidad por 7. Dice Norberto Fava en su libro El Número: *"Teó-ricamente es posible establecer un criterio de divisibilidad por cualquier número primo. Pero ocurre en la mayoría de los casos que la aplicación del criterio resulta más complicada que el correspondiente algoritmo de división entera, en cuyo caso el criterio carece de valor práctico."*

El objetivo de esta nota es mostrar algunos de los métodos numéricos para resolver ecuaciones polinómicas, comparándolos según su eficacia y rendimiento. Se entiende que un método es más rendidor que otro si permite aproximarse a la raíz de una ecuación involucrando una menor cantidad de cálculos, o bien si el algoritmo de estos cálculos es más simple.

Todos los métodos que veremos, con distinto nivel de complejidad, son accesibles para ser llevados al aula y se basan en considerar que las raíces de una ecuación de la forma $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ son los ceros de la función continua

$f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$.

Primer método: Teorema de Bolzano

Recordemos el enunciado de este teorema:

Si f es una función continua en el intervalo [a;b] y f(a).f(b)<0 (esto es, si f(a) y f(b) tienen signos opuestos), entonces existe al menos un número real $c \in (a,b) / f(c)=0$.

Es habitual en los textos comenzar a hablar de los números irracionales demostrando por el absurdo la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Nosotros nos proponemos hallar una aproximación decimal de $\sqrt{2}$ mediante el teorema de Bolzano.

Sea $f: R \to R / f(x)=x^2-2$. Es evidente que $\sqrt{2}$ es uno de los ceros de esta función. Este valor se obtiene como solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ (la otra solución real es $-\sqrt{2}$)

El procedimiento para ir aproximando el valor de $\sqrt{2}$ es encontrar entornos de $\sqrt{2}$ cuyos extremos estén cada vez más próximos y, a la vez, verifiquen la hipótesis de Bolzano. En un simple gráfico de la función $f(x)=x^2-2$ puede verse que

$1< \sqrt{2} <2$ es decir

$\sqrt{2} \in [1 ; 2]$ y, desde luego, se cumple que $f(1).f(2)=(-1).2=-2<0$

Podemos partir el intervalo [1;2] en (por ejemplo) dos subintervalos de igual amplitud, hallando el punto medio entre 1 y 2: $[1;2]=\left[1;\frac{1+2}{2}\right]\cup\left[\frac{1+2}{2};2\right]=[1;1,5]\cup[1,5;2]$

En general:

$$[a;b]=\left[a;\frac{a+b}{2}\right]\cup\left[\frac{a+b}{2};b\right] \quad \text{con } a<b \qquad (1)$$

Por ser $\sqrt{2}$ irracional descartaremos la posibilidad de que coincida con los extremos de los intervalos que se irán definiendo según (1). Ahora basta con identificar cuál de los dos subintervalos continúa verificando las hipótesis de Bolzano y, por lo tanto, contiene a $\sqrt{2}$. Observamos entonces que f(1).f(1,5) = (-1).0,25 = -0,25<0, con lo que $\sqrt{2} \in [1;1,5] \subset [1;2]$. El intervalo $[1;1,5]$ volverá a ser partido y el procedimiento se repetirá siempre con el mismo criterio, hasta agotar la paciencia del calculador y de sus lectores.

Este proceso iterativo, en el que la creatividad ha cedido el protagonismo en favor de la mecanización más tediosa, es el lugar común que tienen los métodos de cálculo numérico. Ahora se trata de programar a una computadora para que haga el trabajo sucio: el de repetir tantas iteraciones como queramos, hasta aproximar $\sqrt{2}$ con tantas cifras decimales correctas como necesitemos.

Cómo lo hace Excel

La planilla de cálculo Excel es una herramienta adecuada. Además, desde lo didáctico, es una aplicación concreta, permanente y con verdadero sentido, del concepto de función. Veamos una manera de utilizarla. Construimos la siguiente tabla, donde $f(x) = x^2 - 2$

	A	B	C	D	E	F
1	X_1	X_2	$F(X_1)$	$F(X_2)$	$(X_1+X_2)/2$	F((X1+X2)/2)
2	1	2	-1	2	1,5	0,25
3						

Para explicar la programación de la planilla acordemos la siguiente convención de notación:

A2 = 1 significa que el valor 1 ha sido asignado a la celda de coordenadas A2. Programemos toda la segunda fila de la siguiente manera:

A2 = 1

B2 = 2

C2 = A2^2-2 [i]

D2 = B2^2-2

E2 = (A2+B2)/2

F2 = E2^2-2

Controle el lector que, frente a estas instrucciones, la planilla completará la segunda línea con los valores que aparecen en la Tabla 1.

Como se ve, las celdas de las columnas C, D, E y F están en función de los valores de las columnas A y B. Mediante la opción *copiar-pegar*, Excel programa automáticamente las demás celdas de las columnas C, D, E y F referidas a sus respectivas filas. Así, la fila 3 sería

C3 = A3^2-2   D3 = B3^2-2   E3= (A3+B3)/2

F3 = E3^2-2

Y, en general

Cn = An^2-2   Dn = Bn^2-2   En = (An+Bn)/2

Fn = En^2-2.

El tema ligeramente más delicado está en la programación de las columnas A y B. Ya definimos A2=1 y B2=2. Estos son los valores de las variables indeterminadas, es decir, las que elegimos arbitrariamente (mientras se cumpla la hipótesis de Bolzano) para iniciar el proceso iterativo. Programamos ahora A3 y B3:

A3 = SI(C2*F2<0,A2,E2)

B3 = SI(D2*F2<0,B2,E2)

Este código en A3 (análogamente en B3) es la programación de un condicional y significa: "Si el producto de los valores de las celdas C2 y F2 es negativo, asigne a esta celda el valor de A2. En caso contrario asígnele el valor de E2".

Se recomienda al lector que interprete estas instrucciones completando "a mano" algunas filas de la Tabla 1.

Por último, programamos una columna G llamada "Error" que medirá la diferencia (en valor absoluto) entre la aproximación de la columna A y el valor de $\sqrt{2}$ que Excel tiene calculado con 14 cifras decimales correctas: G2 = ABS(A1-RAIZ(2))

Acá exhibimos las columnas A, B y G de la Tabla 1 hasta la línea 22, después de 20 iteraciones:

	A	B	G
1	X1	X2	Error 2
2	1	2	0,41421356237309
3	1,00000000000000	1,50000000000000	0,41421356237309
4	1,25000000000000	1,50000000000000	0,16421356237309
5	1,37500000000000	1,50000000000000	0,03921356237309
6	1,37500000000000	1,43750000000000	0,03921356237309
7	1,40625000000000	1,43750000000000	0,00796356237309
8	1,40625000000000	1,42187500000000	0,00796356237309
9	1,41406250000000	1,42187500000000	0,00015106237309
10	1,41406250000000	1,41796875000000	0,00015106237309
11	1,41406250000000	1,41601562500000	0,00015106237309
12	1,41406250000000	1,41503906250000	0,00015106237309
13	1,41406250000000	1,41455078125000	0,00015106237309
14	1,41406250000000	1,41430664062500	0,00015106237309
15	1,41418457031250	1,41430664062500	0,00002899206059
16	1,41418457031250	1,41424560546875	0,00002899206059
17	1,41418457031250	1,41421508789062	0,00002899206059
18	1,41419982910156	1,41421508789062	0,00001373327153
19	1,41420745849609	1,41421508789062	0,00000610387700
20	1,41421127319335	1,41421508789062	0,00000228917973
21	1,41421318054199	1,41421508789062	0,00000038183110
22	1,41421318054199	1,41421413421630	0,00000038183110

Estos resultados deben interpretarse como el encaje de intervalos

$$[1;2] \supset [1;1,5] \supset [1,25;1,5] \supset \ldots \supset \left[1{,}41421318054199 0;\ 1{,}4142141342 16300\right]$$

donde $\sqrt{2} \in \bigcap_{i=1}^{20} [a_i; b_i]$

La inspección de esta tabla aporta claridad acerca de la definición de un irracional como un encaje de intervalos y es consistente con la idea de que la necesidad de ampliar un conjunto numérico resulta siempre de buscar soluciones a ecuaciones que no eran resolubles en el conjunto numérico primitivo (en este caso, la ecuación $x^2 - 2 = 0$, sin soluciones en Q). Por supuesto, para este encaje de intervalos, resulta ser $\sqrt{2}=\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i;b_i]$, pero el concepto teórico excede el humilde y finito poder de cálculo de la planilla.

Para cerrar esta primera parte sugerimos al lector:
- Una vez programada la planilla que da la Tabla 2 asigne los valores de A22 y B22 a las celdas A2 y B2 respectivamente, para comenzar el proceso de acotación con más cifras decimales correctas (es equivalente a duplicar el número de filas de la tabla)
- Reprograme esta planilla para hallar la raíz perteneciente al intervalo [2;2,1] en la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$. (Esta ecuación fue estudiada por Newton con un método más poderoso que pronto veremos).
- Un buen problema para plantear en el aula y apuntar a la idea de aproximar por tanteo puede ser: "Calcular 5 cifras decimales correctas del número $\sqrt{3}$ utilizando en la calculadora sólo los dígitos, la coma decimal, la tecla x y la tecla = "

Método de las partes proporcionales

Es un método más eficiente que el anterior y es sumamente accesible para llevar al aula, ya que sólo requiere el manejo de la ecuación de la recta. Continuaremos testeando los métodos con el mismo "reactivo", nuestra querida función $f(x)=x^2-2$, a los fines de comparar sus rendimientos.
La idea es la siguiente: sabiendo que $f(x)=x^2-2$ tiene una sola raíz real en el intervalo [1;2] y que es creciente en dicho intervalo, conseguiremos una aproximación si hallamos la intersección entre el eje de abscisas y la recta que pasa por los puntos (1; f(1)) y (2; f(2))
Este procedimiento puede repetirse por iteración, según muestra la figura 3 y según desarrollamos analíticamente a continuación:

Supongamos que la raíz buscada está en el intervalo [x1;x2], es decir f(x1).f(x2)<0
Buscamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (x1; f(x1) y (x2; f(x2). Esta ecuación es:

$$y=(x-x_1)\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}+f(x_1) \qquad (2)$$

Reemplazando según $f(x)=x^2-2$ y desarrollando la expresión (hágalo) se obtiene:

$$y=x(x_2+x_1)-x_1x_2-2$$

fig.2

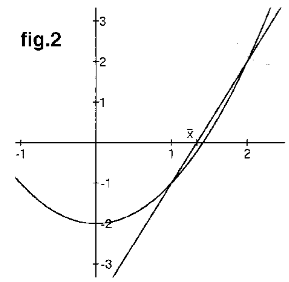
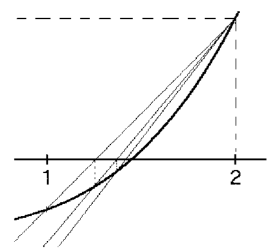


fig.3



Como en este ejemplo la concavidad de la curva hará que nos vayamos aproximando a $\sqrt{2}$ por la izquierda, podemos tomar $x_2=2$, (fijo) con lo que tendríamos $y=x(2+x_1)-2x_1-2$
Ahora igualamos a 0 para hallar la mejor aproximación $\bar{x}$. Haciendo esto será:

$$\bar{x}(2+x_1)-2x_1-2=0$$

de donde resulta

$$\bar{x}=\frac{2+2x_1}{2+x_1}$$

Una nueva tabla nos permitirá apreciar el funcionamiento de este método iterativo. La programación es muy simple: B1 = (2+2*A1)/(2+A1) y A2 = B1. Estas fórmulas se pegan a lo largo de las filas y Excel las programa análogamente realizando así las iteraciones. La tercera columna es C1 = ABS(B1-RAIZ(2)), y lo que da es, a modo ilustrativo, el valor absoluto de la diferencia entre la aproximación lograda en B y el valor de $\sqrt{2}$ que Excel tiene calculado con 14 cifras decimales correctas.

	A	B	C
1	1,20000000000000	1,37500000000000	0,21421356237310
2	1,37500000000000	1,40740740740741	0,03921356237310
3	1,40740740740741	1,41304347826087	0,00680615496569
4	1,41304347826087	1,41401273885350	0,00117008411223
5	1,41401273885350	1,41417910447761	0,00020082351959
6	1,41417910447761	1,41420765027322	0,00003445789548
7	1,41420765027322	1,41421254801536	0,00000591209987
8	1,41421254801536	1,41421338833677	0,00000101435773
9	1,41421338833677	1,41421353251318	0,00000017403632
10	1,41421353251318	1,41421355724994	0,00000002985991
11	1,41421355724994	1,41421356149410	0,00000000512315
12	1,41421356149410	1,41421356222228	0,00000000087899
13	1,41421356222228	1,41421356234722	0,00000000015081
14	1,41421356234722	1,41421356236866	0,00000000002588
15	1,41421356236866	1,41421356237233	0,00000000000444
16	1,41421356237233	1,41421356237296	0,00000000000076
17	1,41421356237296	1,41421356237307	0,00000000000013
18	1,41421356237307	1,41421356237309	0,00000000000002
19	1,41421356237309	1,41421356237309	0,00000000000000

Comparando la columna G de la Tabla 2 con la columna C de la Tabla 3 se puede observar que el método de las partes proporcionales en sólo 9 pasos supera la aproximación que Bolzano consiguió en 22.

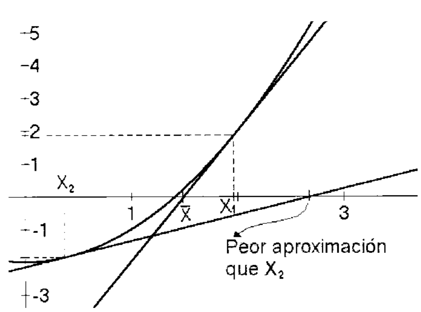
El método de Newton-Raphson

Este último método que veremos es todavía más veloz que el anterior. Además es una elegante y concreta aplicación de la derivada, en su interpretación clásica de pendiente de la recta tangente a un punto en la gráfica de su función primitiva.

Si en la gráfica de la función $f(x)=x^2-2$ (figura 4) tomamos una aproximación x_1 por derecha de la raíz $\bar{x}$ observamos que se puede obtener una mejor aproximación $x_0 \in (1;2)$ si hallamos la intersección entre el eje de abscisas y la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_1; f(x_1))$. La pendiente de esta recta viene dada por la derivada $f'(x1)$[ii].
Hallemos $f'(x_1)$ y la ecuación de la recta tangente
$y = m x + b$ (3)
La pendiente es $m = f'(x_1) = 2x_1$ (4)
Además, como $(x_1; f(x_1))$ es un punto de la recta resulta:
$f(x1) = m x_1 + b \quad b = f(x_1) - m x_1$
Reemplazando con (4) y con la definición de f tenemos
$b = x_1^2 - 2 - 2 x_1^2$
$b = -x_1^2 -2$
Con lo que la recta buscada tiene por ecuación $y = 2 x_1 x - (x_1^2 + 2)$
La intersección de esta recta con el eje de abscisas es la aproximación $\bar{x}$ buscada y se obtiene igualando a 0:

$$2x_1\bar{x} - (x_1^2 + 2) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1^2 + 2}{2x_1} = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1} \quad (5)$$

Puede verse, mediante una simple tabla, cuya programación es análoga a la de la Tabla 3, que un



proceso iterativo regido por la fórmula (5) aproxima el valor de $\sqrt{2}$ en menos pasos todavía que los del método anterior.

	A	B	C
1	1,20000000000000	1,37500000000000	0,21421356237310
2	1,37500000000000	1,40740740740741	0,03921356237310
3	1,40740740740741	1,41304347826087	0,00680615496569
4	1,41304347826087	1,41401273885350	0,00117008411223
5	1,41401273885350	1,41417910447761	0,00020082351959

En la Tabla 4 la celda A1 muestra el comienzo del proceso iterativo con la aproximación x=1,2. Volvemos a destacar que la columna C mide la distancia de la aproximación calculada por Newton- Raphson al valor de $\sqrt{2}$ con 14 cifras decimales correctas y nos sirve para observar que Newton-Raphson logra en sólo 5 iteraciones el resultado que el método de las partes proporcionales logró en otras 19 y lo que Bolzano no alcanzó en 20.

Se recomienda al lector probar estos mismos métodos en otras ecuaciones polinómicas de grados superiores, en particular para la que surge del problema mencionado en Aχioma 16: "Dividir al número 10 en tres partes que estén en progresión geométrica y tales que el producto de las dos primeras sea 6".

Destacamos que, para ser llevados al aula, el orden de eficacia de los métodos coincide con el de dificultad en cuanto a los contenidos. Por otra parte, los tres métodos son sumamente intuitivos desde la interpretación gráfica, como se vio en el tratamiento superficial que les dimos en esta nota. El hecho de que las funciones polinómicas sean fáciles de evaluar y de derivar hace que las aplicaciones de estos métodos para ecuaciones de grados superiores sean completamente análogas al de la ecuación de segundo grado que estudiamos aquí y no presenten una dificultad mayor, cosa que sí ocurría en la búsqueda teórica de fórmulas resolutorias.

Por último, sería tema para desarrollar en otra oportunidad la extensión de estos métodos a la búsqueda de raíces de funciones trascendentes (por ejemplo f(x) = x . ln x -2), a partir del desarrollo de sus polinomios de Taylor.

* Profesor de Matemática y Astronomía egresado del I.S.P "Dr. J. V. González"

Bibliografía

· "Cálculo numérico y gráfico", Manuel Sadosky, Ediciones Librería del Colegio, Buenos Aires, 1967
· "Cálculo infinitesimal de una variable", Juan de Burgos, McGraw-Hill, Madrid 1994
Software: "Microsoft Excel"

(i) La notación A2^2-2 significa $(A2)^2 - 2$
(ii) El hecho de que la aproximación deba ser tomada por derecha tiene que ver con la concavidad de la curva. Obsérvese que la intención de aproximar mediante este procedimiento fracasa si escogemos la aproximación por izquierda x^2. En la bibliografía citada esta problemática en la aplicación del método de Newton-Raphson está estudiada con gran detalle. (ver figura 4)

Entrevista a Juan Foncuberta

La revista Axioma, en esta oportunidad, ha entrevistado al Profesor Juan Foncuberta, a quien consideramos uno de los referentes más autorizados de estos tiempos a emitir opinión en materia educativa. El Prof. Foncuberta no sólo nos abrió las puertas de su hogar, sino también las de su vasta experiencia en el ámbito de la formación primaria, secundaria, terciaria y universitaria.

Axioma: ¿Dónde realizó sus estudios terciarios?
Foncuberta: Estudié en el Instituto Joaquín V. González, cuando éste todavía no se llamaba así. En aquella época estaba ubicado en el barrio de Belgrano, en la calle José Hernández. Allí había una escuela alemana (estamos hablando del año 1951).
A: ¿La carrera duraba cuatro años, igual que ahora?
F: Sí, pero también estaban los colegios Normales que otorgaban títulos de profesor en tres años. La idea era que los docentes con título intermedio dieran clase hasta tercer año y los que se graduaban en cuatro años, en los niveles superiores. Yo me recibí de Profesor de Matemática en cuatro años. Para ese entonces ya no estaba, por ejemplo Rey Pastor. En todos los profesorados había profesores que eran reconocidos en la Universidad: Batana y Charola en Física, Barbagelata en Latín, Mantovani en Educación... Este contacto Univer-sidad-Profesorado se perdió con una intervención que desalojó a gran parte de los profesores, y este hecho perjudicó a nuestro Instituto, sin duda. Después, el Profesorado se mudó a Av. De Mayo, y luego a la Av. Rivadavia, donde se encuentra en la actualidad.
A: ¿Usted llegó a dar clases en la Av. Rivadavia?
F: Sí, hasta que, anticipadamente, nos llegó la jubilación masiva en el año 1990, por orden del ministerio. Estas jubilaciones fueron hechas sin un objetivo predeterminado.
A: ¿En qué medida lo afectó ese "retiro"?
F: Bueno, en realidad no sufrí tanto, hubo profesores a los que les dolió mucho más; sentí, eso sí, cierta nostalgia. En ese entonces yo trabajaba en el Normal N° 1, en el Instituto J. V. González y en el Profesorado Técnico. Algunas autoridades pidieron por algunos profesores. A mí me autorizaron a seguir y permanecí en actividad 6 meses más. Sin embargo, ya no era lo mismo, pues yo vivía con el temor de que dentro de 6 meses me ocurriera lo mismo. Finalmente decidí dejar. Yo creo que para dar clase hay que tener esperanza de futuro; es decir, todos los años intentar cambiar algo en la manera de dar clases.
A: ¿Tuvo, más tarde, oportunidad de volver a trabajar en el Instituto J. V. González?
F: No. Al poco tiempo de dejar el Profesorado, me contrataron en el Ministerio, junto a otros profesores como Maria J. Guasco y Leopoldo Varela, por el tema de la reforma educativa..
A: Trabajar con el profesor Varela, ¿fue muy significativo para usted?
F: Si, Varela tenía mucha "polenta" y capacidad. Él daba Historia de la Matemática, a la que consideraba como una materia esencial en la formación del Profesor de Matemática. A mí no me parece que se pueda prescindir de ella y, sin embargo, no en todos los profesorados figura. Y en unos cuantos lugares en donde sí se dicta es gracias a Varela, pues él diseñó los planes de estudio de muchos de ellos.
Yo lo veo desde este punto de vista: creo que a los chicos les puede atraer y, además, brindarles cultura general. Una cosa grave es que los alumnos desconozcan la Historia de la Ciencia, y esto es terrible porque la ciencia cambió al mundo y al pensamiento. Lo grave es que los egresados no tienen idea de quiénes fueron, por ejemplo, Galileo, Newton, Copérnico etc.
A: Quizás en la Escuela Primaria ya se debiera hablar de ciertos aspectos de la Historia de la Ciencia y de la Matemática, y así mejorar la enseñanza de ésta última.
F: Sí, es verdad. Pero de todos modos, yo estoy muy desalentado porque, a pesar de los esfuerzos que se hacen, la enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria no mejora.
A: ¿Usted por qué piensa que debe estar la Matemática en la currícula de los colegios secundarios?

F: En principio podría no estar. Lo importante no es la materia en sí, sino lo que puede dar esa materia. El defecto principal (no sólo en Matemática, sino también en Historia, Física, etc.) es que no se hace pensar a los alumnos. Yo creo que no debe llegarse a que los chicos pregunten ¿para qué sirve? Si uno les da una actividad interesante, que los mantenga ocupados, entonces nadie va a preguntar para qué sirve.

En realidad, hay muy pocas cosas en el colegio secundario que sirvan para algo. Creo que los programas de estudio tienen gran parte de la culpa. En los nuevos programas hay muy poco de nuevo. A mí me parece que se tendría que "mezclar" un poco más. Además, no suelen aprovecharse los temas. Por ejemplo, cuando los chicos empiezan a contar ya se les puede enseñar el centímetro (sólo el centímetro). Podría pedírseles que dibujen un caminito (en vez de segmento) y preguntarles cuántos pasitos hay que dar para adelante o cuál de los caminitos es el más largo. Estos ejemplos pueden llevarse a cabo en un primer grado sin inconvenientes y, sin embargo, el segmento y la medición se enseñan más tarde.

A: ¿Usted cree que hay falta de creatividad?

F: No sólo de creatividad. Habría que diseñar un programa en donde se avance en los contenidos. Por ejemplo, los maestros explican áreas terminando la primaria. La geometría, entonces, es muy poco vista y, en general, es más útil, tiene más posibilidades de aplicación. Se debería trabajar más (tanto en secundaria como en primaria) la longitud de circunferencia, superficies y mediciones.

Estoy en contra de la enseñanza excesiva de las fracciones, porque no son utilizadas tan frecuentemente en la vida cotidiana, salvo las elementales. Ahora bien, el concepto sí es importante. Pero suelen olvidarse de los decimales, que se pueden enseñar en primer grado con su lenguaje; en vez de decir centésimos se los puede llamar centavos. En cuanto a la enseñanza secundaria, el primer año es trágico. Como afirma el Dr. Luis Santaló, no se aprovecha nada de lo hecho en primaria. El alumno ve, sorprendido, que comienzan de nuevo con los números más sencillos y ningún problema. Los ejercicios combinados demasiado extensos confunden y hasta provocan temor. ¡Incluso es más importante poner paréntesis que sacarlos!

A: ¿Los métodos de enseñanza han cambiado mucho desde la época en que usted iba a la escuela?

F: La diferencia está en que nosotros éramos hijos de la autoridad. Si había que estudiar, por ejemplo, polinomios, nadie discutía eso, por algo sería..., sería bueno para la vista, para la piel, por algo te lo daban para estudiar. La insistencia en esa álgebra tan complicada del tercer año del colegio secundario, hace que, cuando algunos alumnos llegan a la universidad, respondan que $a+3a$ es igual a $3a^2$. A los chicos hay que dejarlos que descubran los conceptos por sí mismos. Si se les plantea una ecuación de segundo grado, seguramente tratarán de despejar la incógnita. Ese esfuerzo es bueno. Primero que se esfuercen y después veremos...

A: ¿Habría que cambiar los planes de estudio en el colegio secundario?

F: Hay que cambiar los programas de manera que el profesor no tienda a hacer siempre lo mismo. En eso también los textos son culpables. Para poder editar un libro y venderlo, hoy en día se crean ejercicios cada vez más complicados en cuanto a la mecánica; y no se trata de complicar las cosas, se tiene que entender bien lo sencillo. En trigonometría, se enseña la secante, la cosecante, etc., las identidades trigonométricas, pero ¿para qué sirve eso?

Cuando se enseña, por ejemplo, suma de ángulos interiores de polígonos, se debe procurar que los alumnos estimen primero esos ángulos, luego los midan y, por último, que vean la necesidad de utilizar la demostración como forma de comprobar la verdad de las conjeturas que surjan.

A: Muchos profesores utilizan la metodología de la que usted nos da cuenta. Sin embargo, en el transcurso del año, uno de los problemas que se genera en el curso es el desinterés de unos cuantos alumnos debido a las bajas notas que obtienen. ¿Se pueden hacer clases participativas igualmente?

F: Es lógico que esas cosas ocurran, porque los cursos son muy numerosos y uno no le puede dedicar suficiente tiempo. Yo reconozco que eso es una dificultad pero, de todos modos, de la otra forma también esos alumnos perderían el interés, con el agravante de que, además, se perderían muchos talentos.

A: ¿Cómo está actualmente la formación de los docentes de Matemática en los institutos terciarios?

F: Los institutos son una copia mala de la facultad

de Ciencias Exactas o Ingeniería, y no pueden mejorar porque los alumnos no tienen tiempo y los profesores enseñan muchos contenidos.
La formación de los docentes debe ser distinta de la actual. Se debe procurar que los alumnos trabajen solos, no sin ayuda, pero sí más individualmente.
Otro problema es que se han multiplicado las materias. Hay tantas, que si uno tiene interés en una de ellas no encuentra tiempo para dedicarle. Porque si lo hace, no se recibe más. Se quiere hacer mucho y no se hace hincapié en lo verdaderamente fundamental, como leer algún artículo por puro placer o alguna nota lateral sobre un determinado tema. Esto en la universidad también sucede.
A: ¿Cómo ve la unión del Profesorado con la Universidad? ¿Es favorable? ¿Se pierde autonomía?
F: Me parece que los convenios actuales tienen que ser diferentes, pero me parece peor ese aislamiento que el profesorado tuvo durante muchos años, esa especie de lucha contra la universidad. El Instituto del profesorado J. V. González se cerró sobre sí mismo, debió haber traído profesores universitarios con vocación docente, que los hay, como el Dr. Fava por ejemplo.
Aunque incluso los profesores de Exactas, cuando trabajan dictando clases en alguna otra Facultad, se convierten, también ellos, en "practicantes de integrales". Se quedan estancados, igualados por la rutina con los demás profesores. Saben resolver problemas complicados pero no comunicar la esencia de la Matemática.
La falta de interés por la propia tarea docente es uno de los peores males. Es decir, se perdió el interés del profesor como profesional. Interesarse por el trabajo, estar siempre pensando: "¿qué le puedo preguntar al alumno para que le interese algún tema?", "¿cómo puedo hacer para embromarlo (en el buen sentido)?"; no hacer preguntas tradicionales, que aprendan a ingeniárselas como puedan. Además, hay que sacarle el jugo a los problemas, no quedarse con la primera respuesta que se obtenga, aunque sea la correcta.
Yo tenía un curso de Matemática para Biología. Allí empecé a hacer cosas algo extravagantes. Con el tema vectores, por ejemplo, aproveché a dar tres temas: vectores, potencias con exponente negativo y notación científica, a propósito de la fórmula de atracción de dos cargas eléctricas, que dicho sea de paso, les sirve para repasar simplificación de unidades. Entonces surgen las primeras preguntas: ¿qué es un microCoulomb?, ¿qué significa 10 elevado a la 6? Uno va aumentando progresivamente la dificultad, pero lo importante es que los chicos ven que 10 a la 6 tiene cierto sentido y no es sólo un ejercicio matemático.
O, por ejemplo, al poco tiempo de haber enseñado la integral les doy la idea de trabajo (fuerza por distancia) y luego la noción de área, pero insisto mucho en que primero las calculen aproximando, con trapecios, rectángulos, contando cuadraditos. Esto se podría enseñar perfectamente en la escuela secundaria, previa enseñanza de la semejanza para la utilización de escalas. Entonces, ante la pregunta "¿cómo se averigua el trabajo de una fuerza variable?", ellos ya saben que cualquier cosa que varíe puede encararse con derivadas o integrales. El tema derivadas también lo doy en el comienzo del curso con el cálculo de velocidades instantáneas, pero siempre, en primer lugar, aproximadamente, y luego, aplicando la definición. No me interesa que sepan derivar funciones "largas".
A: Los profesores de Análisis suelen enfatizar más el cálculo que el concepto.
F: Es verdad. Nadie entiende qué significa, por ejemplo, un problema económico. Repito: no se le sabe sacar el jugo.
Hay que hacer menos problemas y aprovecharlos mejor. Hay que entender que las fórmulas no son algo frío, las fórmulas hablan siempre, dicen cosas, son una manera rápida de expresar algo.
En el profesorado habría que cambiar materias, algunas materias específicas deberían ser optativas.
A: ¿Deberían ser optativas las materias pedagógicas?
F: No sé, porque estoy alejado de los actuales planes de estudio, pero sí sé que una vez una alumna me dijo que había aprendido didáctica y psicología con los profesores de matemática y no con los psicólogos del profesorado. Me parece una exageración, pero quizás esas materias también deban revisar sus métodos. Es bueno reflexionar sobre estas cuestiones psicológicas y pedagógicas, pues en los profesorados de provincia creo que ocupan un 33% de la carrera; es mucho.
A: En los programas de la provincia de Buenos Aires, con estas nuevas reformas, bajaron al nivel Polimodal, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales, ¿le parece acertada la medida?
F: En cuanto saben derivadas se les puede dar perfectamente el tema ecuaciones diferenciales. Pero depende de lo que se haga, porque no puede ser que el alumno sólo sepa sustituir aquí y allá y los diversos métodos de integración. El profesor debe ser sensato.
A: Creo que muchas veces, estas propuestas de

ejercicios largos tienen que ver con la inseguridad del profesor, es decir, lo sacan de su estructura de resolver una cuenta de doscientos renglones y no tiene demasiadas herramientas después de eso.

F: Sí. Yo me pregunto, por ejemplo, qué valor tienen esos ejercicios que se dan en primero, segundo o tercer año del secundario, tan largos. Del mismo modo que enseñar expresiones periódicas: en segundo año no tiene sentido. Estas expresiones son importantes como introducción a la teoría, es decir, nadie usa números periódicos en la vida diaria. En realidad, es la introducción al número real. En ese momento uno dice: "lo que es periódico es racional". Ahí es donde conviene enseñar el concepto. Pero a chicos de segundo año enseñarles, por ejemplo, el número cero coma siete periódico... Él no sabe ni sumar pero escribe que aquello es igual a 7/ 9. Después se le pregunta cuánto es 0,2 por 0.3 y no sabe qué hacer (ni con la calculadora). Creo que hay mucho para cambiar, pero hay que tener coraje para hacer lo que uno quiere.

A: Pero más de una vez, se tiene en contra a las autoridades del colegio. Además, hay mucha presión por parte de los padres, sólo interesados en que sus hijos "aprueben".

F: Sí, por eso yo creo que hay que sacar la evaluación (es decir, la nota) del centro de la educación. Si alumnos, autoridades, padres y maestros trabajan con vista a las notas, no hay educación posible. Eso no es sólo un mal argentino. Estaba leyendo un artículo sobre educación matemática y comentaba que el nivel en Estados Unidos es, en general, malo, desde el nivel primario hasta el universitario. Por ejemplo, hay maestros que no saben que al dividir se puede aumentar y al multiplicar disminuir; bueno, aquí... ni qué decir, la falta de información es notable. En general, aprendieron mal y transmiten ese método de aprendizaje.

A mí me parece que valdría la pena que los chicos tuvieran una mejor formación. Es bueno hasta para entretenerlos: si el chico se va con un problema, tiene la mente ocupada, y eso es bueno.

La enseñanza es más democrática cuando hay participación del alumno. Si se le da un problema o una actividad, entonces no siempre se destacan los "tragas". A veces, el alumno que no es tan bueno, resuelve uno de esos problemas y se valoriza a sí mismo.

Por ejemplo, el problema de la ecuación de la recta. Yo opino que con una ecuación basta, sin embargo, se da también la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, la segmentaria, etc. Un tema tan fácil como es ese se convierte en trágico.

A: ¿Qué opina de estas nuevas universidades, donde buena parte de los profesores acuden sólo en busca de un título de grado?

F: Primero han hecho una especie de cuco: si no tenés el título... Pero resulta que ese título no tiene nada que ver con la matemática, como el de Licenciado en Gestión Educativa, que es la carrera a la que acude mayor cantidad de docentes que aspiran sólo a un título universitario. Por lo tanto, como todo lo que hacemos acá, es teatro; creo que es por eso que hay tantos buenos actores en la Argentina. Uno también puede formarse leyendo libros, asistiendo a cursos en donde se informa de tal tema para luego investigarlo. Y lo peor de todo esto es que se premia al que entra en la bicicleta. Alguien que tiene un "montón de papeles" termina ganándole el puesto al que verdaderamente se lo merece.

A: Por ejemplo, la U.T.N. (Universidad Tecnológica Nacional) ahora no acepta profesores con título terciario. Lo obligan a hacer alguna licenciatura.

F: Sí, y además, hay gente que no puede pagarla, ¡porque todas estas carreras son pagas!. Es todo un negocio.

A: ¿Cree que esto responde a un plan pensado en la última reforma educativa?

F: Creo que, en general, todos estos cambios no son una cosa seria. Hubo cambios, en otra época, muy buenos. Por ejemplo, el Prof. Jaime estuvo en el Profesorado J. V. González diseñando los programas de estudios aún vigentes, ¡y analizó hasta las horas de cada carrera!

Ahora se juntan tres o cuatro personas con excelentes conocimientos del área, venden una idea como asesores y después tienen trabajo para bastante tiempo, porque los asesores son siempre los mismos aunque los gobiernos cambien. Quizás, el mismo que asesoró en la Ciudad de Buenos Aires ahora está asesorando en la provincia de Buenos Aires.

Estuve muy en contra de esta reforma educativa. A la gente del Ministerio le decía que estaban realizando cursos para los profesores, pero no para los profesorados. Parece poco sensato y antieconómico que los profesores egresen para que inmediatamente los "reciclen". Es una red de intereses. Por ejemplo, que no se paguen las ayudantías es malo. Al que empieza hay que pagarle porque si no, aunque sea brillante, a veces debe abandonar, pues necesita el dinero. Se tiene que ir de la universidad o trabajar gratis durante mucho tiempo. Y entonces quedan sólo los que pueden económicamente, que acumulan puntaje y antecedentes para concursos, con lo que obtienen seguramente el cargo. Es todo una cadena.

El Programa de Erlangen

A principios del siglo XIX surge una amplia variedad de ideas en torno a la Geometría. Aparecen nuevos resultados sobre la geometría del triángulo y de la circunferencia (entre otros, el bello teorema de "la circunferencia de los nueve puntos"); se demuestra que todas las construcciones de la geometría euclídea pueden realizarse con regla y una única circunferencia dada; se descubre la fructífera transformación geométrica conocida como inversión; se desarrolla sistemáticamente la geometría proyectiva; aparece la geometría n-dimensional; se crean las geometrías no euclídeas y Riemann expone "Sobre las Hipótesis en que se apoyan los Fundamentos de la Geometría". El Programa de Erlangen será la gloriosa síntesis de un período de pujante esplendor.

*Gisela B. Serrano**

Año 1872, Universidad de Erlangen, Bavaria, sur de Alemania. Con sólo 23 años Félix Christian Klein (1849 - 1925) es designado profesor en dicha universidad y en su discurso inaugural esboza el que luego se conocerá como el Programa de Erlangen.

Con él se logrará una visión unificada de la Geometría haciendo uso de la ya desarrollada teoría de Grupos de Transformaciones. Más aún, por la manera en que define la Geometría quedan incluidas en esta definición tanto la geometría euclídea como las geometrías no euclídeas.

En realidad, durante su estancia en Gottingen en 1871 Klein había publicado dos trabajos "Sobre las llamadas geometrías no euclídeas" en los cuales sistematizó las geometrías no euclídeas desde el punto de vista de la geometría proyectiva, construyendo modelos con los cuales se podían obtener todos los teoremas de las mismas.

Con esto superó uno de los grandes inconvenientes con los que se habían topado Bolyai y Lovachevsky, el de llegar a demostrar que las geometrías no euclídeas eran consistentes. Ambos habían construido las geometrías no euclídeas a partir de contradecir el V postulado. De allí en más habían deducido algunos teoremas, pero sin tener ninguna garantía de que no aparecería una contradicción más adelante. A partir de este nuevo enfoque, Klein pudo demostrar que nunca se encontraría contradicción en estas geometrías, ya que de ser así esto llevaría a una contradicción en los modelos, que estaban construidos a partir de la geometría euclídea. Por consiguiente si hubiese contradicción en las geometrías no euclídeas, necesariamente debería haber contradicción en la geometría euclídea.

La idea del Programa de Erlangen es que los teoremas de cada geometría se pueden referir sólo a las propiedades que permanecen invariantes (sin cambio) luego de aplicarles un grupo de transformaciones.

Para que un conjunto sea un grupo, debe estar definida una operación que cumpla estas propiedades:
a) la ley de cierre,
b) la propiedad asociativa,
c) la existencia del neutro,
d) la existencia del inverso.

Por ejemplo, para la geometría euclídea (o métrica) el grupo de transformaciones está formado por las traslaciones, simetrías y rotaciones con la operación de composición.

Así la geometría euclídea puede considerarse como el estudio de las propiedades que son invariantes bajo los movimientos rígidos: traslaciones, rotaciones y simetrías.

¿Qué dejan invariante estos movimientos?
Es fácil ver que si a una figura le aplicamos cualquiera de ellos, se conservan las distancias entre dos puntos de la misma, se conservan también los ángulos, el paralelismo y una elipse se transforma en otra elipse...

Observemos que estos movimientos pueden caracterizarse en forma algebraica de la siguiente manera:

$x' = ax + by + c$
$y' = dx + ey + f$

o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 = 1$; $|ae - bd| = 1$; $|a| = |e|$ y $|b| = |f|$

Veamos cómo funcionan estas definiciones en un ejemplo. Si tomamos el segmento con extremos en los puntos (1;1) y (2,3) y le aplicamos la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el segmento de extremos en los puntos (3; 1) y (4, 3), o sea que le hemos aplicado al segmento original una traslación.

Si en cambio le aplicamos la transformación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

obtendremos el segmento de extremos (-1; 1) y (-2; 3) o sea le hemos aplicado una simetría al segmento original.

Por último si le aplicamos la transformación dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

obtenemos el segmento de extremos en (-1; 1) y (-3; 2), por lo tanto hemos aplicado una rotación de centro (0; 0) con un ángulo de 90º.

¿Qué ocurre si quitamos algunas restricciones a las ecuaciones anteriores? Por ejemplo, si sólo pedimos que $ae-bd \neq 0$. El conjunto de transformaciones que obtenemos nuevamente conformarán un grupo, el que caracterizará a la llamada geometría afín.

Observemos que este grupo de transformaciones engloba a las anteriores ya que el grupo métrico no es más que un caso particular del grupo afin.

Podemos imaginar las transformaciones afines como las sombras que se obtienen al proyectar rayos paralelos y seccionarlos con un plano. Pensemos en las sombras que se obtienen sobre el piso al pasar por una ventana los rayos del sol (debido a la distancia, estos rayos pueden tomarse como paralelos). Bajo estas transformaciones ya no se conservarán las distancias, ni los ángulos, pero sí se conservará, por ejemplo, el paralelismo, y una elipse se seguirá transformando en otra elipse.

A su vez podemos generalizar aún más estas transformaciones, tomando

$$x' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$$

$$y' = \frac{Ax+By+C}{dx+ey+f}$$

Como ocurrió anteriormente, este nuevo grupo (conocido como proyectivo), engloba al afín ya que este es el caso particular en que $d = e = 0$ y $f = 1$.

Podemos imaginar estas transformaciones como las sombras que se obtienen al proyectar rayos desde un punto y seccionarlos con un plano. Por ejemplo, pensemos en las sombras que se obtienen sobre un plano al seccionar un haz de luz que proyectamos desde una linterna. Bajo estas transformaciones ya no se conservará el paralelismo, pero, por ejemplo, una elipse se seguirá transformando en otra elipse.

Englobando a todas las anteriores y dejando de lado que en el tiempo de Klein ésta todavía no se había desarrollado, podemos encontrar también a la geometría topológica. En ella podemos imaginar a los objetos como dibujados sobre caucho y las transformaciones pueden pensarse como las deformaciones que se realizan sin romper el caucho. Bajo estas transformaciones las elipses no siempre se transforman en otra elipse, pero por ejemplo sí se conserva la idea de adentro y afuera.

Esta nueva manera de definir una geometría propuesta por Klein, no ya desde un conjunto de axiomas, sino a partir de objetos y un grupo de transformaciones es la que actualmente se utiliza en Matemática. En este sentido el trabajo sistematizador de Klein puede considerarse tan importante como el que hiciese Euclides en sus Elementos.◣

* Profesora en Matemática y Astronomía egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Bibliografía

· BOYER, Carl, *Historia de la Matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 1996.
· PAULOS, John Allen, *Más allá de los números. Meditaciones de un matemático*, Barcelona, Tusquets Editores S.A., 1998.
· PROCIENCIA Conicet, Programa de perfeccionamiento docente, *Geometría. Su enseñanza*, Buenos Aires, 1986.
· SANTALÓ, Luis A., *Geometrías no euclídeas*, Buenos Aires, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1976.
·http://www.maths.gla.ac.uk/~wws/cabripages/klein/introduction.html
·http://www.unirioja.es/Prensa/Noticias/l7.html
·http://www-history.mcs.stand.ac.uk/~history/Mathematicians/Klein.html

La Biblioteca de Babel

Claudio Salpeter

La diversidad de lenguas en el orbe puede adjudicarse a la ira de Dios (Génesis 11:7) frente a la vanidad humana, y tuvo lugar durante aquella remota construcción de la torre de Babel. Puede pensarse, igualmente, que el Creador quiso luego redimirse en la invención de un único lenguaje universal. Optó, me atrevo a formular, por el lenguaje del número y de las formas: la matemática. Galileo entrevió este afán divino cuando sostuvo que la naturaleza estaba *scritta in lingua matematica*. No estoy del todo seguro del éxito de esta singular y vasta empresa. Más admisible, tal vez, es la sentencia de Kronecker: *Dios hizo los números naturales, el resto es obra del hombre* o, como dijo un famoso gaucho desertor,

El Ser de todos los seres
sólo formó la unidá;
lo demás lo ha criado el hombre
después que aprendió a contar.

La santa verdad es que este lenguaje se presenta, en general, con cierto aire críptico y, como es sabido, no goza del fervor popular; tampoco suele ser llano su acceso. Cuando Alejandro de Macedonia le preguntó a su maestro, Menecmo, si existía algún atajo para el conocimiento de la geometría, éste le respondió: *Oh rey, para viajar por el país hay caminos reales y caminos para ciudadanos comunes, pero en geometría sólo hay un camino para todos.*

Una de las mejores narraciones de J. L. Borges es, sin duda, *La biblioteca de Babel*, obra publicada en 1941. Creo que esta breve pieza ha sido, tal vez, bastante leída y poco comprendida o, al menos, parcialmente comprendida (si es que esta insuficiencia es posible); en especial, claro está, por aquellos espíritus distanciados del mundo matemático. Temo que no esté a mi alcance, sin embargo, una interpretación final de sus páginas: me limitaré, quizá tediosamente, a bosquejar algunas alusiones de índole matemática que el autor ha reflejado en ellas; este es, pues, el objeto de este opúsculo. Sepa disculpar el paciente lector las referencias matemáticas harto sabidas por él y, sin duda, mucho mejor especificadas que las que aquí se mencionarán.

El relato, ejecutado por un narrador anónimo, comienza afirmando que *El universo (que otros llaman la Biblioteca) se compone de un número indefinido, y tal vez infinito, de galerías hexagonales.* Es dable suponer que estos hexágonos son regulares. Existen ciertos polígonos regulares que cubren, geométricamente hablando, todo el plano; esto es, puede rellenarse una superficie con ellos sin que queden huecos. Como se sabe, sólo tres figuras logran esta hazaña: los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos regulares. Unas líneas más adelante, el texto recalca la forma hexagonal: *Los idealistas arguyen que las salas hexagonales son una forma necesaria del espacio absoluto o, por lo menos, de nuestra intuición del espacio. Razonan que es inconcebible una sala triangular o pentagonal.* Nadie desconoce que en cada vértice, tres ángulos de 120º cada uno impiden, diligentemente, la proliferación de desagradables intersticios.

Tengo entendido que las abejas construyen sus panales en celdas hexagonales. Puede demostrarse que dada un área determinada, de los polígonos regulares que cubren el plano, el hexágono es el de menor perímetro. Esto indicaría una cierta capacidad de economía en el Constructor de la Biblioteca, y en las abejas.

Luego de hacer la descripción del universo, el narrador anónimo de *La biblioteca de Babel* confiesa *haber peregrinado en busca de un libro, acaso del catálogo de catálogos* (luego analizaremos estas últimas palabras), y que *espera pronto la muerte.* A continuación conjetura que la Biblio-teca es interminable y, tras esbozar una teoría circular de los místicos, da cuenta del número de libros, páginas, renglones y letras que hay en cada galería. En las letras del dorso de los libros y en las de las páginas hay inconexiones. El narrador, antes de exponer su solución a estos enigmas, indica que deben recordarse dos axiomas. El primero de ellos declara que la Biblioteca existe *ab aeterno*, de lo que se infiere *la eternidad futura del mundo* y que ella *sólo puede ser obra de un dios.* El segundo, que el número de símbolos es veinticinco. Los conforman la coma, el punto, el espacio y las veintidós letras del alfabeto. *De este axioma surge la teoría general de la Biblioteca, esto es, la naturaleza informe y caótica de casi todos los libros. Libros plagados de insensatas cacofonías, de fárragos verbales y de incoherencias.*

Un hallazgo producido quinientos años atrás permite descubrir la ley fundamental: *No hay, en la vasta Biblioteca, dos libros idénticos.* De aquí se infiere

que *la Biblioteca es total y que sus anaqueles registran todas las posibles combinaciones de los veintitantos símbolos ortográficos* (*número, aunque vastísimo, no infinito*). El hallazgo mencionado era *un libro tan confuso como otros, pero que tenía casi dos hojas de líneas homogéneas. Esas líneas contenían nociones de análisis combinatorio, ilustradas por ejemplos de variaciones con repetición ilimitada.*
Creo ya haber adelantado que el narrador de *La biblioteca de Babel* había indicado algunos números referidos al contenido de las galerías: *A cada uno de los muros de cada hexágono corresponden cinco anaqueles; cada anaquel encierra treinta y dos libros de formato uniforme; cada libro es de cuatrocientas diez páginas; cada página, de cuarenta renglones, cada renglón, de unas ochenta letras de color negro.* Permítame el lector aburrirlo con algunas cuentas. Cada libro tiene 410 páginas. Cada página tiene 40 renglones, esto es, hay 16 400 renglones en un libro. Cada renglón tiene 80 letras, esto es, hay 1 312 000 letras en un libro. Ya que sólo pueden utilizarse 25 símbolos, el número total de posibilidades de combinación de esos símbolos en los 1 312 000 "casilleros" es: $25^{1312000}$ (*número, aunque vastísimo, no infinito*). Si mi aritmética es precisa, se trata de un número de 1 834 098 cifras.
Regresemos al relato. La proclamación de esta teoría de la Biblioteca total justificaba al universo y, en consecuencia, a cada individuo. Miles buscaron su Vindicación en los libros (que todo lo contenían), aunque la posibilidad de que alguno encontrara la suya era ciertamente cero. Se esperó encontrar, además, *el origen de la Biblioteca y del tiempo.* Pero las posibilidades de hallar las respuestas eran remotas y, entonces, *a la desaforada esperanza, sucedió, como es natural, una depresión excesiva.* Algunos sugirieron cesar las búsquedas y construir, azarosamente, *esos libros canónicos*. Otros creyeron que debían eliminarse las obras inútiles y procedieron a invadir las galerías y quemar los libros.
El narrador expone luego una superstición: *En algún anaquel de algún hexágono (razonaron los hombres) debe existir un libro que sea la cifra y el compendio perfecto de todos los demás: algún bibliotecario lo ha recorrido y es análogo a un dios.* Ya habíamos mencionado la búsqueda del catálogo de catálogos, pero los hombres de la Biblioteca desconocían que Cantor les negaría ese privilegio.
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), nacido en San Petersburgo, Rusia, (aunque a los 11 años de edad emigró con su familia a Francfort, Alemania, donde vivió hasta su muerte) desarrolló la *Mengenlehre* (teoría de conjuntos), que tuvo, desde mediados del siglo XX, efectos profundísimos en la enseñanza de la matemática en todos sus niveles. Sus trabajos más importantes se refieren a los conjuntos infinitos. En primer lugar, consideremos la siguiente pregunta: ¿qué es el infinito? Cantor encontró una definición precisa de un conjunto infinito de elementos. Pensó en un axioma que había sido utilizado con gran soltura y que aparece en los Elementos de Euclides (alrededor del año 300 a.C.) bajo el título de Nociones Comunes. De éstas, la número cinco expresa famosamente: *El todo es mayor que la parte.* Bertrand Russell, sin embargo, nos advierte: *Este axioma es cierto para los números finitos. Los ingleses, por ejemplo, son sólo una parte de los europeos, y hay menos ingleses que europeos. Pero cuando llegamos a los números infinitos esto ya no es cierto.* He aquí, la definición de Cantor de conjunto infinito, en boca de Russell: *Un conjunto de términos es infinito cuando contiene como partes otros conjuntos que tienen tantos términos como él. Hay, por ejemplo, tantos números pares como números naturales:*

1, 2, 3, 4, 5, ad infinitum
2, 4, 6, 8, 10, ad infinitum

Como se ve, a cada número natural le corresponde su doble y a cada número par le corresponde su mitad. De esta manera, se concluía que los dos conjuntos tenían el mismo número de elementos. Utilizando estas correspondencias, Cantor demostró que el conjunto de los números naturales tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto de los números enteros y que el conjunto de los números racionales. Sin embargo, estos conjuntos tienen menos elementos que el conjunto de todos los números irracionales. A los números que indican la cantidad de elementos de un conjunto infinito se los llama *transfinitos*. El conjunto de los números naturales y todos los conjuntos que pueden ponerse en correspondencia con él tienen el mismo número de elementos. Cantor llamó a este número $\aleph$ (aleph, primer letra del alfabeto hebreo), y es el número transfinito más pequeño. Estas menudencias de los conjuntos infinitos fueron tratadas por Borges en *La doctrina de los ciclos* (Historia de la eternidad). En *La cifra* (1981), el mismo Borges escribió un poema titulado Nihon. Su primer parágrafo dice:

> *He divisado, desde las páginas de Russell, la doctrina de los conjuntos, la Mengenlehre, que postula y explora los vastos números que no alcanzaría un hombre inmortal aunque agotara sus eternidades contando, y cuyas dinastías imaginarias tienen como cifras las letras del alfabeto hebreo. En ese delicado laberinto no me fue dado penetrar.*

He mencionado a los destructores de los anaqueles. Sin embargo, el narrador arguye la futilidad de aquellas devastaciones , ya que la Biblioteca es tan

enorme que toda reducción de origen humano resulta infinitesimal. Si la Biblioteca es infinita (como conjetura el narrador al final) entonces es cierto que toda reducción humana es infinitesimal. En la aritmética transfinita existe un teorema que afirma que la diferencia entre un conjunto infinito y cualquiera de sus partes finitas es un conjunto infinito.
Georg Cantor encontró conjuntos mayores que el conjunto de los números naturales (es decir, números mayores que aleph). Pero en 1895 se le ocurrió la idea de considerar el mayor conjunto de todos los que existen. Cuatro años más tarde llegó a la conclusión de que tal engendro no podía existir. Cuando Bertrand Russell vio esta conclusión de Cantor, no se la creyó y escribió que Cantor debió haber sido "presa de una sutil falacia, que espero explicar en futuros trabajos". Dieciséis años más tarde, Russell admitía su error. Este hecho generó famosas paradojas o antinomias. La más conocida es quizás la del propio Russell: Un barbero de pueblo decía que él no afeitaba a nadie del pueblo que se afeitara a sí mismo, pero que afeitaba a todos los que no se afeitaban a sí mismos. Un día al barbero se le ocurrió preguntarse si debía afeitarse a sí mismo. Y se encontró entonces en medio de una paradoja. Consideremos a C como el conjunto de todos los hombres que no se afeitan a sí mismos. La pregunta es: ¿el barbero pertenece o no al conjunto C? Si el barbero pertenece a C entonces no se afeita por sí mismo; luego, es un hombre afeitado por el barbero, es decir, por sí mismo, con lo cual no pertenece al conjunto C. Es decir, si el barbero pertenece a C entonces no pertenece a C; esto es absurdo. Pensemos a hora que el barbero no pertenece a C, es decir, que se afeita a sí mismo; luego, es un hombre afeitado por el barbero, con lo cual no se afeita por sí mismo y entonces, pertenece a C. Es decir, si el barbero no pertenece a C entonces pertenece a C; y esto genera otro absurdo.
En La Biblioteca de Babel, el narrador busca el catálogo de catálogos. Pero éste no ha de existir. Supongamos que el conjunto A es el catálogo de catálogos y A1, A2, A3 son todos los catálogos existentes en la Biblioteca. Simbólicamente tenemos: A={A1,A2,A3}. Nos encontramos entonces con un catálogo que no está catalogado, el A. Deberíamos armar un catálogo B que lo incluyera: B={A, A1,A2,A3}. Ahora no está el catálogo B..., y así indefinidamente. El narrador anónimo suplica, desesperadamente, que ese libro total exista, pero Cantor ya ha destruido esa posibilidad.
El relato finaliza con la solución del narrador: *La Biblioteca es ilimitada y periódica*. Es decir, ese laberinto de galerías hexagonales compuestas por caóticos libros, ese desorden lingüístico, se repetiría en el mismo desorden, que el narrador caracteriza como el Orden, a la manera de los números periódicos. Refiriéndose a esa posible solución, el anciano peregrino de anaqueles, concluye no sin poesía: *Mi soledad se alegra con esa elegante esperanza.*
En la última página del cuento, hay una nota al pie en donde se dice que *Leticia Álvarez de Toledo ha observado que la vasta Biblioteca es inútil; en rigor, bastaría un solo volumen, de formato común, impreso en cuerpo nueve o en cuerpo diez, que constara de un número infinito de hojas infinitamente delgadas. (Cavalieri a principios del siglo XVII, dijo que todo cuerpo sólido es la superposición de un número infinito de planos).* [Alicia Ardila ha observado, a su vez, que Borges utiliza esta idea infinitesimal en *El libro de arena*]. El matemático Bonaventura Cavalieri (1598-1647) fue discípulo de Galileo. En una de sus obras, publicada en 1635, consideró un área como constituida por un número indefinido de rectas paralelas y equidistantes, y un volumen como compuesto por un número indefinido de áreas planas paralelas. Esta consideración ya había sido contemplada por Arquímedes (siglo III a.C.), aunque este hecho era desconocido en aquella época. Los trabajos de Cavalieri iban a influir bastante en la creación suprema de Newton y Leibniz: el cálculo infinitesimal. Esta rama de la matemática maneja procesos infinitos formalizados con rigor, pero este último detalle fue evitado por Cavalieri: *El rigor es asunto de los filósofos más que de los matemáticos.*
Es sabido que la obra de Jorge Luis Borges remite no pocas veces a campos matemáticos. Es posible, claro está, comprender la mayor parte (o toda) la prosa borgiana sin ser un experto geómetra; sin embargo, creo que una cierta comprensión del álgebra, amada por el poeta argentino, otorgará un placer al menos diferente del habitual. El matemático alemán Karl Wieierstrass sentenció que un matemático que no tenga también algo de poeta jamás será un completo matemático. Podríamos parafrasearlo diciendo que un poeta que no tenga también algo de matemático jamás será un completo poeta.
He intentado hacer notar, tal vez confusamente, algunos presupuestos matemáticos inmersos en las páginas de La biblioteca de Babel. Si algún lector puede llegar a enriquecer (siquiera someramente) su lectura con estos aportes, entonces estas líneas estarán justificadas.◣

Los seis números de la Creación

Si bien hoy en día sigue siendo muy discutible cómo empezó este Universo, los últimos estudios cosmológicos revelan que a partir del Big Bang, las fuerzas que entraron a jugar un importante papel en la creación y evolución de la materia se movieron dentro de valores muy precisos e increíblemente delicados; vale decir que no fue puro azar, sino que, a juzgar por recientes mediciones, pareciera como si algo o alguien hubiera estado siempre detrás de cada instante crucial a lo largo de estos 15.000 millones de años. Seis números apenas bastaron para la receta que dio origen a este Universo. Cualquier mínima variación en una sola cifra de alguna de estas seis constantes hubiera impedido la formación y el funcionamiento de cualquier tipo de estructura (llámese galaxia o átomo).

*Pablo Ingrassia**

N El cosmos es tan vasto debido a que hay un número de una importancia crucial en la naturaleza: 10^{36}, es decir, un sixtillón o 1.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000. Este número mide la resistencia que deben vencer los átomos para mantenerse unidos frente a las enormes fuerzas gravitatorias que existen entre ellos. Si este número tuviera unos ceros menos, solamente podría existir un Universo en miniatura. Ninguna criatura podría crecer más allá que el tamaño de un insecto sin ser estrujada por la atracción gravitatoria, por lo cual nunca hubiera existido la evolución biológica.

ε Este otro número, cuyo valor es 0,007, define cuán firmemente el núcleo atómico se mantiene unido y cómo fueron hechos todos los elementos que conforman nuestro Universo. Dicho valor controla el poder del Sol, y cómo las estrellas transmutan el hidrógeno en los sucesivos elementos de la tabla periódica. Si este número fuera 0,006 o bien 0,008, la vida no podría existir ya que todo el Universo estaría formado únicamente por hidrógeno y no habría estrellas.

Ω El número cósmico Omega mide la cantidad de materia en nuestro Universo: galaxias, gas y materia oscura. Este número nos cuenta acerca de la importancia entre la gravedad y la energía de expansión en el Universo. Si Omega fuera demasiado alto, el Universo podría haber colapsado hace tiempo; si en cambio tuviera un valor muy bajo, ninguna galaxia o estrella se habría formado.

Q Las semillas de todas las estructuras cósmicas (estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias) fueron todas impresas en el Big Bang. La fábrica de nuestro Universo depende de un número: 0,00001. Si este número fuera todavía menor, el Universo sería inactivo y desestructurado. Si en cambio fuera algo mayor, el Universo sería un lugar violento dominado por enormes agujeros negros, sin la posibilidad de que pudieran coexistir estrellas con sistemas planetarios.

λ Este número fue el mayor descubrimiento científico de 1998. Una inesperada nueva fuerza: la "antigravedad" aparece como la encargada de controlar la expansión de nuestro Universo. Aunque su efecto no es discernible dentro de escalas menores a mil millones de años, Lambda está destinado a ser la fuerza dominante por sobre la gravedad y las demás fuerzas cuando nuestro Universo se torne completamente oscuro y sin estrellas. Afortunadamente para nosotros, Lambda es muy pequeño, de otro modo sus efectos podrían haber frenado galaxias y estrellas en formación, sofocando la evolución cósmica antes de que todo comenzara.

D El último número está referido a la dimensión espacial de nuestro mundo: 3. La vida no podría existir en 2 o 4 dimensiones. El tiempo es considerado como la cuarta dimensión, pero es muy diferente a las otras tres ya que se mueve siempre en una misma dirección: hacia el futuro. Cerca de los agujeros negros, la distorsión del espacio-tiempo llega a ser tan elevada que la luz se mueve en círculos y el tiempo comienza a tornarse cada vez más lento, hasta detenerse.

Como puede observarse, la más mínima variación en cualquiera de estos seis números hubiera modificado de manera drástica la forma y evolución de este Universo. Sería lógico pensar que antes del Big Bang podrían haber existido otros Universos inimaginables para nuestra mente, en donde los seis números pudieron haber variado quizás, impidiendo en algunos casos la formación de estructuras y haciendo que colapsara violentamente en una sucesión de infinitas creaciones y destrucciones de Universos, cada uno distinto del anterior, hasta dar con un Big Bang adecuado, apto para crear espacio, tiempo y materia que evolucionara en vida y conciencia.

* Profesor en Matemática y Astronomía egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Comentarios de textos

*Jorge A. Martínez**

Leonhard Euler, Iván Castro Chadid, Editorial Iberoamérica, 1996, 79 páginas.

Leonhard Euler, (Basilea 1707, Rusia 1783) ha sido uno de los más prolíficos y brillantes matemáticos de toda la historia. Incursionó en todas las ramas de la Matemática de su época y su gran producción ha dejado tópicos inolvidables .

Su dedicación temprana a la teoría de números hace que en 1736 presente la primera de tres pruebas del llamado PTF (pequeño teorema de Fermat): "Si p>0 es primo entonces $a^p \equiv a \pmod p$ con a natural".

Interesado en este resultado, al que asignaba gran porvenir, vuelve a demostrarlo en 1742 en célebre carta que envía a su amigo C. Goldbach, y hay aún una tercera prueba en 1758, que sería reproducida luego por Gauss.

Tratando de ampliar ideas , introduce la después llamada función Φ de Euler, la cual lo llevaría a demostrar el teorema de Euler - Fermat: "Si a y m son naturales coprimos y m>1 entonces $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$", logrando un avance importante de la teoría de números del momento.

El paso de Euler por el Cálculo fue también decisivo para el progreso de esta disciplina. En 1748, se publica en Lausana el reconocido "*Introductio in Analysi infinitorum*" donde introduce el concepto de logaritmo presentándolo como un exponente. En el capítulo VII introduce al número e probando que $e^x \approx (1+\frac{X}{N})^N$ para "N infinitamente grande".

Se comprende que hoy, algunos llamen a e número de Euler. En 1755, publica en San Petersburgo su tratado "*Institutiones calculi differentialis*", donde el tema principal son las series. Este tratado, rico en algoritmos, no alcanzó a juicio de la crítica el nivel excelso del "*Introductio*". Pero en 1768, el genio de Basilea volvería a sorprender al público culto con su magnífico "*Institutiones calculi integralis*", donde desarrolla la teoría básica de ecuaciones diferenciales y pormenoriza sus ingeniosas sustituciones para el cálculo de integrales.

No podía, por supuesto, escapar el Álgebra al influjo del maestro. En 1770, ya ciego, publica el famoso "*Introducción al Algebra*", en el cual el primer tomo se dedica a operaciones con enteros, racionales e irracionales, mientras que el segundo barre la teoría general de ecuaciones. Este texto, dicho sea de paso, mantuvo vigencia didáctica en Europa por varias décadas.

Entusiasmado por la Astronomía de posición, escribió una gran cantidad de pequeños ensayos sobre el tema y, en especial, sobre trigonometría esférica. La Física del XVIII recibiría su notable y esclarecedor aporte a través de la sugestiva y completa obra titulada "*Cartas a una princesa alemana*".

Euler, osciló siempre entre la Matemática clásica y la ingeniosa y novel, donde inventaba teorías y problemas, siendo que ya en 1736 había resuelto el famoso problema de los siete puentes de Konigsberg inaugurando así los estudios de la después llamada Topología Combinatoria. En 1750, Euler retoma esta temática y en detallada carta a Goldbach le comunica que si un poliedro puede ser deformado con continuidad hasta convertirse en superficie esférica entonces el número de caras más el número de vértices es el número de aristas más dos. Este resultado, permitió a Euler demostrar que sólo hay cinco poliedros regulares. El 18 de septiembre de 1783 fallece Euler en pleno trabajo mientras calculaba la órbita de Urano.

Iván Castro Chadid, matemático de la Universidad Javeriana de Colombia, ha logrado compactar en esta obra los aspectos matemáticos del genio suizo, en una exposición concisa y clarísima, donde no sólo se tratan los detalles biográficos de Euler, sino que además se demuestran con precisión gran cantidad de resultados eulerianos. Este libro, puede ser una ayuda inestimable para aquellos interesados en la historia de la Matemática, pero también el lector culto puede consultarlo con provecho omitiendo ciertas fórmulas y enunciados sin perder lo fundamental de la información. En resumen: una muy buena biografía matemática de un verdadero grande, lograda con un razonable esfuerzo didáctico y preocupación notoria por explicar la dimensión histórica de las ideas científicas de la época.

* Profesor de Matemática, egresado del IES Nº 2 "Mariano Acosta"

Problemas y juegos de ingenio

Con este número de Axioma nos despedimos de nuestros lectores hasta marzo de 2002. Desde esta sección cerramos el ciclo 2001 publicando las soluciones a los problemas que quedaron pendientes (aunque no todas por falta de espacio). Felizmente, hemos contado, una vez más, con la colaboración de nuestros lectores.

Axioma 14

1. Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro
Tome una calculadora científica. Asegúrese que esté en modo DEG. Teclee el primer número que le pase por la mente. Oprima, en ese orden, las teclas sin, cos, sin. Déjeme pensar... el visor muestra un número muy cercano a 0,01745. ¿Cómo adiviné?

Respuesta dada por Marcela Bartomeo

Si ingreso cualquier número en la calculadora (que está en modo DEG) y oprimo la tecla SIN seguro que el resultado que muestra el visor está entre -1 y 1 (porque estos son los valores entre los que varía el seno). Ahora, si voy a oprimir la tecla COS, este número que está en el visor representa un ángulo que varía su amplitud entre -1º y 1º. Como el coseno es el mismo para ángulos opuestos del primer y cuarto cuadrante, vamos a tomar el módulo del valor que aparece en pantalla. Pero Cos 1º 0,9998477 y Cos 0 = 1 (A)
Como ahora voy a oprimir nuevamente la tecla SIN, estos números representan grados, entonces lo que aparezca en la pantalla va a variar entre Sin 0,9998477º y Sin 1º. Los calculamos:
Sin 0,9998477º = 0,0174497 y Sin 1º = 0,0174524 (B). Por eso el resultado siempre es cercano a 0,01745.

3. Fuente: Tsan Wagon (Macalester College)
¿Existe algún conjunto finito de puntos en un plano (3 ó más puntos) tales que tres cualesquiera de ellos no estén alineados y que para tres puntos cualesquiera el centro de la circunferencia que los contiene pertenezca también al conjunto?

Solución propuesta por los autores del problema:

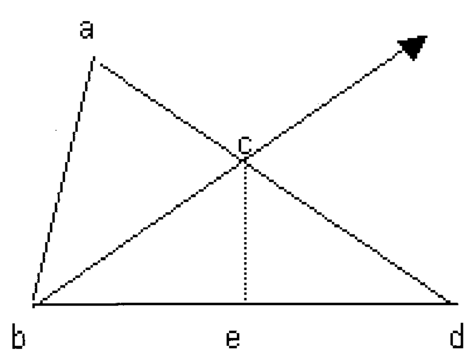
Supongamos que el conjunto existe. Elijamos los tres puntos a, b y c tales que C(a,b,c) sea la circunferencia con menor radio en el conjunto. Sea d el centro de esa circunferencia. Si alguno de los ángulos adb, bdc o cda mide menos de 120º, entonces el círculo determinado por esos tres puntos es menor que C(a,b,c). Por lo tanto tenemos que suponer que dichos ángulos son todos de 120º (o sea, el triángulo es equilátero). Sea e el centro de C(a,b,d). Se puede probar que los puntos e, c y d quedan alineados, lo cual contradice una de las condiciones pedidas. Llegando por cualquier camino a contradicciones, está demostrado que el conjunto pedido no existe.

Axioma 15

5 . Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro
Demuestre que el número de oro φ puede escribirse como $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, es decir, demuestre que $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Respuesta dada por Marcela Bartomeo

Me basé en un problema en el que se pide expresar el lado y la apotema del decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscripta. Construimos la siguiente figura:



Datos: adb isósceles, $\hat{a}=\hat{b}=\frac{2\pi}{5}$; $\hat{d}=\frac{\pi}{5}$; bisectriz de $\hat{b}$; bcd isósceles; ce altura del lado bd en el bcd, por lo tanto mediatriz de bd.

Por propiedad de la bisectriz de los ángulos interiores de un triángulo, tenemos:

$\frac{ac}{cd}=\frac{ab}{bd}$ (1)

Por construcción tenemos:

ab=bc=cd $\Rightarrow$ ab=cd (2)

ac+cd=ad y ad=bd $\Rightarrow$ac+cd=bd $\Rightarrow$ac=bd-cd (3)

Reemplazamos (2) y (3) en (1)

$$\frac{bd-cd}{cd}=\frac{cd}{bd}$$

Ahora despejamos cd en función de bd:

(bd-cd).bd=cd^2

cd^2+cd bd-bd^2=0

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$cd_{1,2}=\frac{-bd\pm\sqrt{bd^2+4bd^2}}{2}=\frac{-bd\pm bd\sqrt{5}}{2}$$

Entre las dos soluciones, por tratarse de la medida de un segmento (que debe ser positiva) consideramos

$$Cd_1=\frac{-bd\pm\sqrt{bd^2+4bd^2}}{2}=\frac{-bd\pm bd\sqrt{5}}{2}$$

Ahora volvemos a la figura para calcular cos $\hat{d}=\frac{ed}{cd}$. Pero $\hat{d}=\frac{\pi}{5}$ y $ed=\frac{bd}{2}$, entonces

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\frac{bd}{2}}{\frac{bd\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Axioma 16

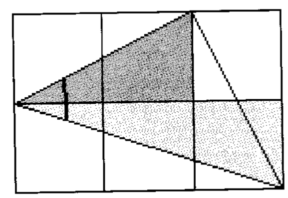
2. Propuesto en la Semana de la Matemática organizada por la FCEN - UBA:

a) Demostrar que $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$

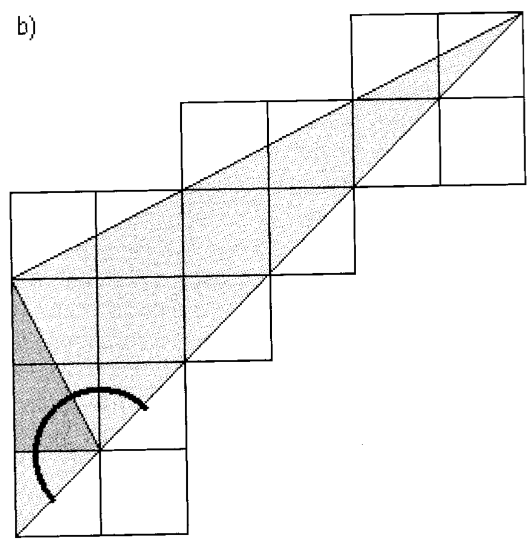
b) Demostrar que $\operatorname{arctg}(1)+\operatorname{arctg}(2)+\operatorname{arctg}(3)=\pi$

Soluciones propuestas gráficamente en la misma Semana de la Matemática organizada por la FCEN - UBA. Como diría el hindú Baskhara: ¡observa!

a)



b)



Nota:

Hemos recibido, después del cierre de edición, soluciones al problema 2 de Aχioma 16 de parte de Gustavo Krimker y de Jorge Martínez Manghi. Les agradecemos las mismas.