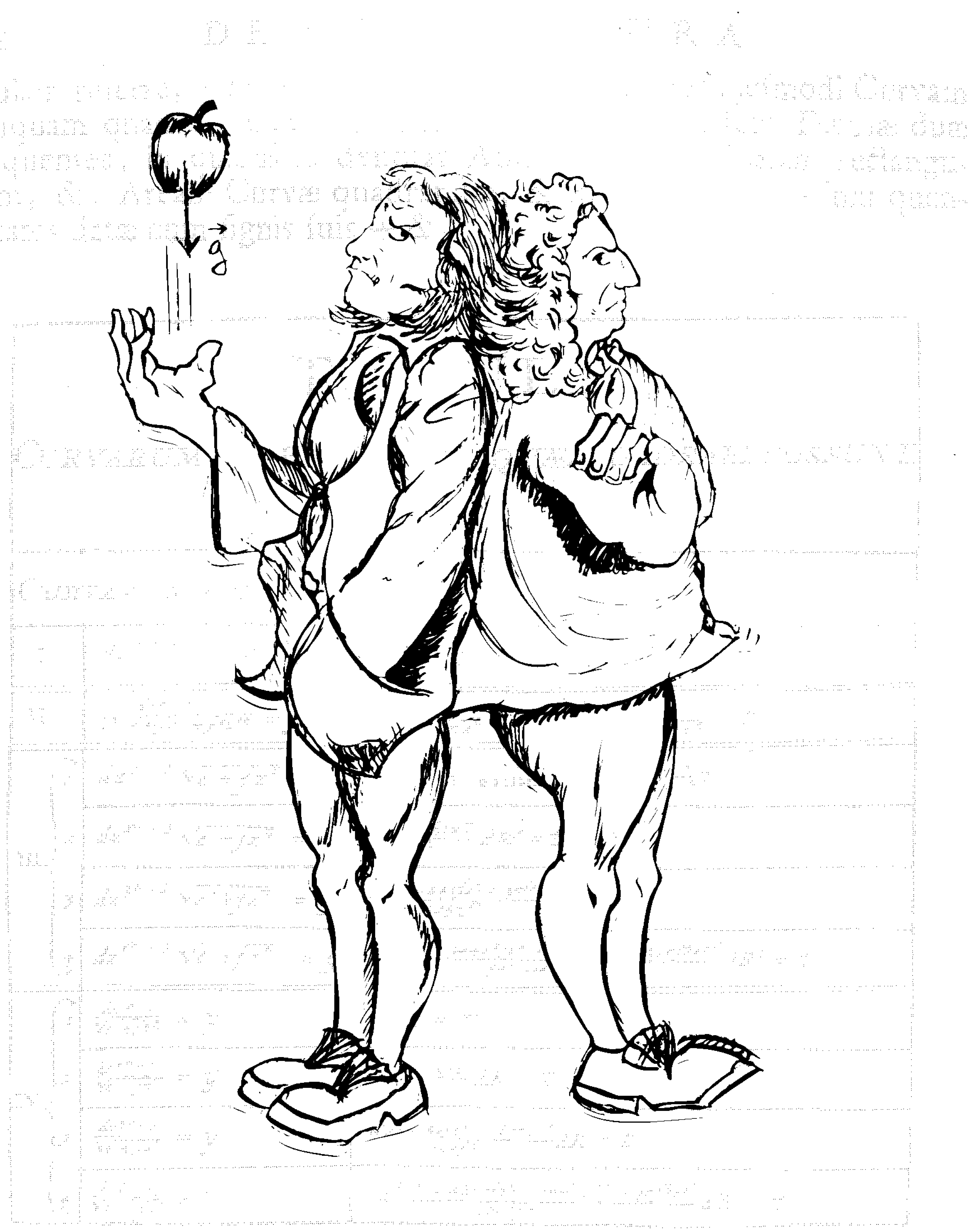
Axioma

La revista de los profesores y estudiantes de Matemática



ISSN 1515-744X

Año 3 - Número 13

Aχioma N° 13

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de Matemática, de venta exclusiva por suscripción. Hecho el depósito que marca la Ley.

Directores y Propietarios
Fernando Chorny
Raquel Susana Kalizsky
Andrea Liliana Morales
Gustavo Ernesto Piñeiro
Claudio Alejandro Salpeter
Gisela Beatriz Serrano

Colaborador permanente
Jorge Martínez

Ilustraciones
Fernando Chorny
María Eugenia Samuilov

Dirección postal
Av. Belgrano 2654 - 1° "6"
(1096) Buenos Aires
Argentina

Correo electrónico
axioma@nalejandria.com

En internet
www.nalejandria.com/axioma

Impresión y distribución
Agencia Periodística Cid
Avda. de Mayo 666, Capital Federal, Argentina.

Una publicación de
NAL Educativa S.A. (Nueva Alejandría)
Fray Justo Sta. Ma. De Oro 2366;
Piso 15 Of. D
Capital Federal (C1425FOH),
Argentina
Teléfono: 4773-8704

Registro de la Propiedad Intelectual N° 867689. ISSN: 1515-744X

Editorial

Estimados lectores:

Al reiniciar esta publicación y comunicarnos nuevamente con Uds. queremos transmitirles toda la emoción y las expectativas que nos provoca esta situación.

Cuando hace cinco años comenzamos a pergeñar este proyecto, mucha audacia, absoluta inexperiencia y enormes ganas de hacer componían nuestro mayor bagaje.

Palabras de aliento, colaboraciones de muchos interesados en nuestro crecimiento intelectual y nuestro propio ímpetu, nos permitieron llegar a escribir y distribuir el número 12 de Aχioma.

Transcurrieron más de dos años de largo silencio debido, en lo fundamental, a la ausencia de medios económicos que solventaran los gastos de publicación.

Hoy, asociados a NUEVA ALEJANDRÍA, portal educativo que nos ofreció un espacio en su página WEB y con cuyo auspicio logramos que esté leyendo este ejemplar, iniciamos esta nueva etapa.

¿Qué podrá encontrar en esta revista?

Nuestro planteo sigue siendo el mismo que cuando la iniciamos: queremos que los profesores y estudiantes de Matemática encuentren en estas páginas material de consulta para tratar algunos temas históricos, que puedan intercambiar experiencias de aprendizaje con otros colegas, que den libre vuelo a su imaginación y participen en la resolución de problemas o en la escritura de artículos adecuados a cualquiera de las secciones fijas de Aχioma.

Como dijimos en el N° 1, nuestro ansiado deseo es compartir, a través de estas páginas, con alumnos y profesores, la búsqueda del arte matemático: descubrir sus misterios, conocer e interpretar a sus artífices, cuestionar, investigar, crear, en fin, como bien dice Enzo Gentile "hacer matemática".

Un nuevo integrante hemos sumado a nuestras páginas, el talentoso y joven profesor Fernando Chorny, a quien damos una calurosa bienvenida.

Sumario

Marzo/ Abril de 2001

Combinatoria (Primera parte)

Los textos de Combinatoria suelen clasificar sus problemas dentro de ciertas categorías más o menos rígidas (combinaciones, permutaciones, variaciones con o si repetición, etc.), a cada una de las cuales está asociada una fórmula. Nuestra intención es proceder de una manera completamente diferente, ya que tenemos la convicción de que los problemas de Combinatoria son esencialmente inclasificables. En este trabajo, a partir de una serie de ejemplos especialmente seleccionados, explicaremos el razonamiento que subyace detrás de la solución de cada uno de estos problemas, exponiendo métodos generales para resolverlos y reduciendo al mínimo el número de fórmulas que sea necesario conocer de memoria.

por Gustavo Piñeiro *

Introducción:

Si quisiéramos usar un lenguaje formal podríamos decir que la Combinatoria es el arte de determinar el cardinal (es decir, la cantidad de elementos) de algún conjunto finito dado. Aunque evitaremos estas formalidades es interesante notar que, de alguna manera, esta definición nos predispone a pensar que cada problema de Combinatoria nos muestra un conjunto finito "armado y acabado", y que nos pide simplemente que determinemos la cantidad de elementos que posee. Sin embargo, al encarar la resolución de un problema concreto, veremos que resulta más conveniente tener en la mente una idea más dinámica de la situación.

Frente a un problema de Combinatoria nos será muy útil imaginar que el enunciado en realidad nos está dando las pautas para *construir* un cierto conjunto finito. Informalmente hablando, debemos pensar que el conjunto aún no existe y que el enunciado nos está diciendo qué elementos podemos usar para armarlo y bajo qué condiciones esos elementos se combinan entre sí. Nuestra tarea principal consistirá en hallar la mejor estrategia para construir efectivamente el conjunto. Una vez que hayamos cumplido esta tarea, la determinación de la cantidad de elementos será un trabajo relativamente sencillo.

Estudiemos esta manera de pensar y de proceder a la luz de algunos problemas concretos.

Un problema resuelto:

Problema 1: ¿Cuántos números de tres cifras diferentes pueden formarse usando los dígitos 2, 3, 4, 5 y 7?

Solución:
Adoptando la disposición mental de la que hemos hablado en la introducción, debemos imaginar que en realidad el problema nos está pidiendo *construir* todos los números de tres cifras diferentes que usen solamente los dígitos 2, 3, 4, 5 y 7. Intentaremos en primer lugar hacer una lista completa de todos estos números.

Al hacer esta lista debemos estar seguros, por una parte, de que no omitiremos ningún número y, por otra, de que no incurriremos en ninguna repetición. Para ello es preferible proceder de una manera ordenada, siguiendo alguna pauta regular que nos garantice que cada número aparecerá en la lista una y sólo una vez.

Una buena pauta consiste en escribir en primer lugar todos los números que comienzan con 2. A continuación todos los que comienzan con 3, luego con 4 y así sucesivamente.

2 _ _

3 _ _

4 _ _

5 _ _

7 _ _

Es decir, *elegimos* primero la cifra 2 y escribimos todos los números que comienzan con esa cifra. Luego elegimos la cifra 3 y escribimos los números que comienzan con ella y así sucesivamente.

Concentrémonos ahora en los números que comienzan con 2. ¿Cómo podemos listarlos de forma completa y sin repeticiones? Podemos escribir primero todos los números cuya segunda cifra es 3, luego los que tienen segunda cifra igual a 4, etc. (La segunda cifra no puede ser 2 porque los tres dígitos deben ser diferentes entre sí). En otras palabras, fijado el dígito inicial, vamos eligiendo sucesivamente todas las posibles segundas cifras.

23 _

24 _

25 _

27 _

Finalmente, tendríamos que listar los números que caen dentro de cada una de estas cuatro categorías. Esto es sencillo, por ejemplo es fácil ver que sólo hay tres números que comienzan con 23 (234, 235, 237), tres que comienzan con 24 (243, 245, 247), etc.

Nuestra lista comenzaría entonces así:

Números con primera cifra 2:
234 235 237
243 245 247
253 254 257
273 274 275

Números con primera cifra 3:
324 325 327
342 345 347
352 354 357
372 374 375

Y así sucesivamente.

Observemos que cada elemento del conjunto se obtiene como resultado de tres elecciones sucesivas, en cada una de las cuales seleccionamos uno de los dígitos que lo forman.

La estrategia que hemos usado para construir la lista nos dirá el modo de obtener, mediante el cálculo directo, el cardinal del conjunto que estamos construyendo.

Observemos que la cantidad de números que comienzan con 2 es la misma que la cantidad de los que comienzan con 3. Es claro que también es igual a la cantidad de los que comienzan con 4, 5 o 7. Dado que son cinco las posibles cifras iniciales podemos decir que la respuesta del problema es 5 x (cantidad de números que comienzan con 2).

Entre los números que comienzan con 2, tenemos la misma cantidad de ellos con segunda cifra 3 que con segunda cifra 4, 5 o 7. Por lo tanto, dado que hay cuatro opciones para la segunda cifra:

Respuesta del problema = 5 x 4 x (cantidad de números que comienzan con 23)

Hay tres números que comienzan con 23 (pues hay tres posibles cifras para agregar: 4, 5 ó 7). Por lo tanto:

Respuesta del problema = 5 x 4 x 3

Respuesta del problema = 60

Hay 60 números de tres cifras diferentes que usan los dígitos 2, 3, 4, 5 o 7.

Hemos resuelto de esta manera el Problema 1. La resolución de este problema nos enseñará dos lecciones importantes. La primera lección está plasmada en la Idea General que enunciamos aquí abajo, veremos la segunda un poco después:

Idea General: El cálculo que nos da la solución del problema es simplemente el reflejo del método que usaríamos para listar ordenadamente todos los elementos del conjunto cuyo cardinal queremos determinar. Por lo tanto el quid de la solución del problema consiste en establecer claramente dicho método.

Inclasificables:

Decíamos al comienzo de esta nota que los textos de Combinatoria suelen clasificar sus problemas dentro de ciertas categorías más o menos rígidas. Un texto clásico, por ejemplo, hubiese dicho que nuestro Problema 1 cae dentro de la categoría llamada *variaciones sin repetición* y hubiese indicado la fórmula en la cual se deben reemplazar los datos del enunciado.

Deliberadamente o no, esta clasificación genera en los lectores la idea de que para resolver un problema de Combinatoria se debe en primer lugar determinar a qué categoría corresponde, para luego aplicar la fórmula respectiva. Por nuestra parte afirmamos que esta forma de proceder es poco práctica ya que los problemas de Combinatoria son esencialmente inclasificables. Veamos un ejemplo.

Problema 2: En un bar se ofrecen, como promoción, dos tipos de desayuno. El desayuno A, que consta de un jugo de naranja y un sándwich, y el desayuno B, que incluye un café y dos medialunas. Tres amigos, Xavier, Yolanda y Zulema, se encuentran allí todas las mañanas para desayunar. Cada uno de ellos elige una de las dos promociones.

a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden combinar sus pedidos?
b) ¿Cuántos pedidos diferentes pueden recibir en la cocina?

Solución:

Es interesante observar que tanto la pregunta a) como la pregunta b) se refieren a los mismos desayunos. Pero, como veremos a continuación, la respuesta en cuanto a la cantidad de pedidos diferentes cambia completamente si la pregunta está formulada desde el punto de vista de los tres amigos (punto a) del problema) o desde el punto de vista del cocinero del bar (punto b).

Esto muestra que una clasificación rígida de los problemas es inconveniente, pues los mismos datos en la misma situación nos conducen a soluciones diferentes dependiendo de algo tan intangible como un punto de vista.

¿En qué consiste la diferencia? Es razonable suponer que si un día Xavier pide la promoción A, Yolanda la A y Zulema la B, mientras que otro día Xavier pide la B y Yolanda y Zulema la A, entonces los amigos dirán que esos días han combinado sus desayunos de manera diferente. Son dos elementos distintos del conjunto de todos sus pedidos posibles. Sin embargo, en ambos días, el cocinero ha recibido dos pedidos de desayuno A y uno de desayuno B, a él no le informan qué cliente pidió cada promoción. Para el cocinero, en ambas ocasiones ha recibido el mismo pedido.

Se ve entonces que es preferible olvidarse completamente de toda clasificación y mantener en cambio la mente abierta al razonamiento.

Para resolver la parte a) del problema podemos hacer la lista completa de todos los pedidos, desde el punto de vista de los amigos (indicamos primero el pedido de X, luego el de Y, y finalmente el de Z):

1)	AAA
2)	AAB
3)	ABA
4)	ABB
5)	BAA
6)	BAB
7)	BBA
8)	BBB

Para armar la lista hemos seguido un procedimiento similar al indicado en el Problema 1. La respuesta para la parte a) entonces es que hay, desde el punto de vista de los amigos, 8 pedidos diferentes.

Desde el punto de vista del cocinero, los pedidos que en la lista llevan los números 2, 3 y 5 son en realidad el mismo pedido. Del mismo modo los pedidos 4, 6 y 7. Para el cocinero hay entonces cuatro pedidos diferentes (en uno se piden tres desayunos A, en otro se piden dos, en otro uno y en el restante ninguno).

Un Principio General:

Hemos establecido entonces una Idea General para la resolución de problemas de Combinatoria y hemos mostrado la inconveniencia de las clasificaciones rígidas. Volvamos ahora al Problema 1 para extraer de él una segunda moraleja.

Al resolver el Problema 1 el cálculo que nos permitió hallar la solución fue el producto 5 x 4 x 3. En él, el factor 5 refleja el hecho de que había 5 cifras distintas que podían ser el primer dígito del número, es decir, teníamos 5 elecciones posibles para el primer dígito. El factor 4 refleja el hecho de que, dada la primera cifra, teníamos 4 elecciones para la segunda. El factor 3 refleja el hecho de que, dadas las dos primeras cifras, teníamos 3 opciones para la tercera.

Generalizando esta situación, podemos enunciar el siguiente principio:

> **Principio General de Enumeración:** Supongamos que para construir cada elemento del conjunto debemos realizar k elecciones sucesivas. Para la primera elección tenemos n_1 opciones. Una vez realizada la primera elección, tenemos n_2 opciones para la segunda. Una vez realizadas las dos primeras elecciones, tenemos n_3 opciones para la tercera, y así sucesivamente. Entonces, la cantidad total de elementos del conjunto puede calcularse como $n_1.n_2.n_3....n_k$.

En el Problema 1, para construir cada número debemos elegir sucesivamente los tres dígitos que lo forman (k = 3). Tenemos 5 opciones para el primer dígito ($n_1 = 5$). Elegido el primer dígito, hay 4 opciones para el segundo ($n_2 = 4$). Elegidos los dos primeros tenemos tres opciones para el tercero ($n_3 = 3$). Por lo tanto, el Principio General de Enumeración nos dice, como ya sabíamos, que la cantidad total de números es 5 x 4 x 3 = 60.

El mismo razonamiento puede aplicarse para resolver mediante el cálculo la parte a) del Problema 2. Cada pedido consta de tres elecciones sucesivas (las elecciones de Xavier, Yolanda y Zulema respectivamente). Para cada elección hay dos opciones posibles (cada uno puede optar por el desayuno A o el B). La solución se obtiene entonces efectuando el producto 2 x 2 x 2 = 8.

Este principio, en cambio, no es aplicable a la parte b) del Problema 2. Implícita en el Principio General de Enumeración subyace la idea de que, al construir los distintos elementos del conjunto es relevante en qué orden se hacen las elecciones (en el enunciado del principio se habla de una *primera elección*, una *segunda*, etc.) Si las mismas elecciones se hacen en orden diferente, se obtienen diferentes elementos del conjunto. En el Problema 1, los elementos 324 y 423 son diferentes, en la parte a) del Problema 2 los elementos ABA y BAA son también diferentes.

En la parte b) del problema 2, en cambio, sólo es relevante la *cantidad* de veces en que se hace cada elección, pero no en *qué orden* se hacen. A los efectos de este problema, AAB y ABA representan el mismo elemento.

El Principio General de Enumeración es sólo aplicable entonces a situaciones en las cuales es relevante el *orden* en el que se hacen las elecciones. En la segunda nota de esta serie veremos como se procede en otras circunstancias.

Comentarios sobre el factorial:

Problema 3: ¿Cuántos números de cinco cifras diferentes pueden formarse usando los dígitos 2, 3, 4, 5 y 7?

Solución:
Este problema es una variante sencilla del Problema 1 y puede resolverse por aplicación del Principio General. Repitiendo el razonamiento que hemos hecho para el Problema 1 podemos concluir que en este caso la solución es 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120.

El Problema 3 nos permite introducir una notación de uso frecuente en Combinatoria. Nos referimos al factorial. Si $n \geq 1$ se define n! (*n factorial* o *factorial de n*) como el producto de todos los números enteros entre 1 y n (inclusive). Por ejemplo:

1! = 1
2! = 1 x 2 = 2
3! = 1 x 2 x 3 = 6
4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24
5! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120
6! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 = 720

Se define también 0! = 1.

Por lo tanto, el resultado de este problema puede expresarse como 5!.

A medida que n crece, el cálculo de n! se hace cada vez más laborioso. Existe, en cambio, una fórmula muy sencilla (conocida como fórmula de Stirling) que permite hallar de manera simple una buena aproximación del valor de n!. La fórmula dice que:

$n! \cong (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n}$

Por ejemplo, para 25! la fórmula nos da un valor aproximado de 1,546 x 10^{25} mientras que el valor exacto es 15.511.210.043.330.985.984.000.000 (unos 1,551 x 10^{25}).

Aunque es notable que en la fórmula de Stirling aparezca el número π, no es tan sorprendente en cambio que aparezca *e*. En efecto, otras dos fórmulas vinculan a este famoso número irracional con el factorial.

La primera fórmula es bastante bien conocida y afirma que el número e es igual a la suma de la serie 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + ...

La segunda fórmula se relaciona con la definición de la llamada función gamma. Esta función se define como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

donde Γ es la letra griega gamma mayúscula. Obsérvese en la definición que la variable es α, mientras que x es solamente una *variable muda* de integración.

Esta función está definida para cualquier número real positivo y para todo número negativo que no sea entero. Cuando a se aproxima a 0 o a un entero negativo el valor de $\Gamma(\alpha)$ tiende a infinito.

La función gamma tiene importantes aplicaciones en Probabilidad, donde interviene en la definición la distribución que lleva ese mismo nombre, la cual está estrechamente relacionada con las sumamente importantes distribuciones de Poisson y Exponencial.

Puede probarse además (aunque la demostración escapa a los propósitos de esta nota) que si n es un entero positivo cualquiera, entonces:

$\Gamma(n) = (n - 1)!$

Esta última igualdad, por su parte, permite definir de manera natural el factorial de cualquier número real positivo (y cualquier negativo que no sea entero), basta para ello definir $\alpha! = \Gamma(\alpha + 1)$. Así por ejemplo, $(0,5)! = 0,5\pi^{1/2}$.

Otros problemas:

Problema 4: ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras pueden formarse usando los dígitos 2, 3, 4, 5 y 7?

Solución:
Para resolver este problema imaginemos nuevamente que vamos a construir la lista de todos los números capicúas de cinco cifras que usan los dígitos 2, 3, 4, 5 y 7. Recordemos que un número capicúa es aquél que no cambia si se lo lee de izquierda a derecha o al revés (por ejemplo 23532 es capicúa, pero 23523 no lo es).

En la lista escribiremos en primer lugar todos los números que comienzan con 2, luego los que comienzan con 3, luego con 4 y así sucesivamente. Tenemos 5 opciones para la primera cifra.

Al escribir los números que comienzan con 2, los vamos ordenando de acuerdo a la segunda cifra. Primero escribimos los que comienzan con 22, luego con 23 y así sucesivamente. Tenemos 5 opciones para la segunda cifra.

Cuando escribimos los que comienzan con 22, los vamos ordenando de acuerdo a la tercera cifra. Primero los que comienzan con 222, luego 223 y así sucesivamente. Tenemos 5 opciones para la tercera cifra.

¿Cuántos números capicúas de cinco cifras existen que comiencen con 222? Para que el número sea capicúa, la primera cifra debe ser igual a la última y la segunda debe coincidir con la penúltima. Por lo tanto hay un solo número capicúa que comienza con 222, el número es el 22222. Un solo número capicúa comienza con 223, es el 22322. Y así sucesivamente. Es decir, dadas las tres primeras cifras, hay sólo una opción tanto para la cuarta como para la quinta cifra.

La cantidad total de números capicúas es entonces:
Resultado = 5 x 5 x 5 x 1 x 1 = 125

Hay 125 números capicúas de 5 cifras que pueden formarse con los dígitos 2, 3, 4, 5 y 7.

La lista total de todos ellos comenzaría así:

Números que comienzan con 2:
Comienzan con 22:
22222 22322 22422 22522 22722
Comienzan con 23:
23232 23332 23432 23532 23732
Comienzan con 24:
24242 24342 24442 24542 24742
Comienzan con 25:
25252 25352 25452 25552 25752
Comienzan con 27:
27272 27372 27472 27572 27772

Números que comienzan con 3:
Comienzan con 32:
32223 32323 32423 32523 32723
Etc.

Problema 5: ¿Cuántos anagramas pueden formarse con las letras A, B, C, D, E y F, con la condición de que las letras A y B aparezcan juntas y en ese orden?

Solución:
Entendemos por anagrama una ordenación cualquiera de las letras (una vez cada una, sin omisiones ni repeticiones). Es indiferente si la palabra resultante tiene o no tiene sentido. Algunos anagramas son ABDFCE, DBEFAC ó CBAFDE. A los efectos de este problema, el primer anagrama es aceptable mientras que los otros dos no lo son.

Dado que las letras A y B deben aparecer siempre juntas y en ese orden, podemos muy bien suponer que ambas forman una única letra: la letra doble AB. Tenemos entonces en realidad cinco letras para formar los anagramas: AB, C, D, E y F.

Al formar el anagrama cada letra sólo puede aparecer una vez. Estamos entonces en las mismas condiciones que en el problema 3. La solución es por lo tanto 5! = 120.

Problema 6: ¿Cuántos anagramas pueden formarse con las letras A, B, C, D, E y F, con la condición de que las letras A y B aparezcan juntas, en cualquier orden?

Solución:

Ya que hemos resuelto el problema 5, una buena idea para construir la lista completa de todos los anagramas es listar en primer lugar todos los anagramas en los que aparezca AB y a continuación todos aquellos en los que aparezca BA. Es claro que la cantidad total de anagramas será la suma de las cantidades de ambas listas.

Los anagramas en la primera parte de la lista corresponden a la solución del Problema 5. La segunda parte de la lista tiene exactamente la misma cantidad que aquélla, pues en este caso los anagramas se forman también con cuatro letras simples C, D, E, F, y una letra doble: BA. La respuesta del problema es: Hay en total 120 + 120 = 240 anagramas.

Dejamos planteado para los lectores el siguiente problema:

Problema 7: Cuando se escriben números en base 16 se agregan a los 10 dígitos decimales las letras A, B, C, D, E y F para representar las "cifras" 10, 11, 12, 13, 14 y 15 respectivamente. Así por ejemplo el número que, en base 16, se escribe como 1AB equivale, en base 10, a $11 + 10 \times 16 + 1 \times 16^2 = 427$. De esta manera, cada anagrama formado con esas seis letras puede leerse como un número escrito en base 16.

La pregunta es ¿cuántos de los anagramas que pueden formarse con las letras A, B, C, D, E y F corresponden, en base 16, a números pares?

Cerramos con un pequeño problema de ingenio: ¿cuál es la palabra castellana más larga que utilice únicamente las letras A, B, C, D, E y F (eventualmente varias veces cada una) y que, en base 16, represente un número *primo*?

* Lic. en Cs. Matemáticas - U.B.A.

Cálculo Diferencial e Integral
Newton y los gigantes

En este artículo –que no pretende en modo alguno ser exhaustivo– vamos a mencionar algunos personajes y a explorar algunos resultados previos con los que contaron los creadores del Cálculo para el desarrollo de sus teorías, postergando para otra oportunidad la etapa de formalización rigurosa que se da recién en el siglo XIX, con los aportes de Cauchy y Weierstrass, entre otros.
"Si he ido algo más lejos que los demás fue porque me coloqué sobre los hombros de gigantes." Ya por sincera admiración, ya por falsa modestia, con estas célebres palabras, Sir Isaac Newton nos da una lección de historia. *Conocer la evolución de un proceso es indispensable para una más profunda interpretación del resultado en que ese proceso desemboca.*

por Fernando Chorny*

Los primeros rudimentos de los conceptos de derivada e integral aparecen como idea en la mente del hombre en relación a los dos aspectos más evidentes de la naturaleza: la variabilidad y la multiplicidad. Sin embargo, ambas nociones están ligadas, en definitiva, a las abstractas y escurridizas nociones de límite y de secuencia de términos infinitos.
Comenzamos por la antigua Grecia y por los griegos, quienes, naturalmente más preocupados por los problemas geométricos de áreas y volúmenes, profundizaron más en la cuadratura de curvas que en el cálculo de derivadas (más relacionado con la mecánica, las variaciones de un fenómeno en un período de tiempo, etc.)

Otros problemas:

Parece haber sido Eudoxo quien dio la clave para resolver de un modo riguroso el problema de comparar figuras rectilíneas y curvilíneas, con el fin de rectificar o cuadrar curvas (calcular la longitud de una curva o el área encerrada por ella).
Los matemáticos anteriores ya habían sugerido que el camino más natural consistiría en inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea. Una vez hecho esto se procedería a multiplicar el número de lados o de caras indefinidamente, con lo que la figura rectilínea se iría aproximando cada vez más a la figura curvilínea. Lo que no sabían era cómo cerrar el razonamiento, ya que la idea de límite les era aún desconocida.
Arquímedes menciona a Eudoxo como el responsable del que más tarde sería conocido como método de exhaución:

"Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano."

La prueba de esta proposición depende de lo que hoy conocemos como principio de arquimedianidad y que es uno de los posibles axiomas equivalentes que se utilizan para caracterizar al conjunto continuo de los números reales. En nuestros símbolos sería:

Dado un M fijo

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\, n \in N:\ \frac{M}{n} < \varepsilon$$

Es decir, para cualquier número previamente fijado, siempre existirá un natural suficientemente grande como para que el cociente entre ese número fijado y el número natural sea tan chico como uno quiera.

El tratamiento por exhaución de problemas relacionados con longitudes y superficies que involucran figuras curvilíneas se suele hacer por reducción al absurdo.

Arquímedes, el primero que integró

Veamos un ejemplo en el que se aplica el método de exhaución de Eudoxo para la demostración de un teorema geométrico. La idea es comprender su funcionamiento y, a partir de entonces, analizar el método que utilizó Arquímedes para cuadrar un arco de parábola.

La demostración, con notación actualizada, está extraída del Libro XII de los Elementos de Euclides.

Teorema: "Las áreas de dos círculos son entre sí como las de los cuadrados construidos sobre sus diámetros."

Demostración:

Sean los círculos c y C, de diámetros d y D y áreas a y A respectivamente. La tesis del teorema puesta en símbolos sería:

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

La idea de la demostración es proceder por el absurdo descartando la posibilidad de que la igualdad no se verifique. Supongamos, para ello, que fuera

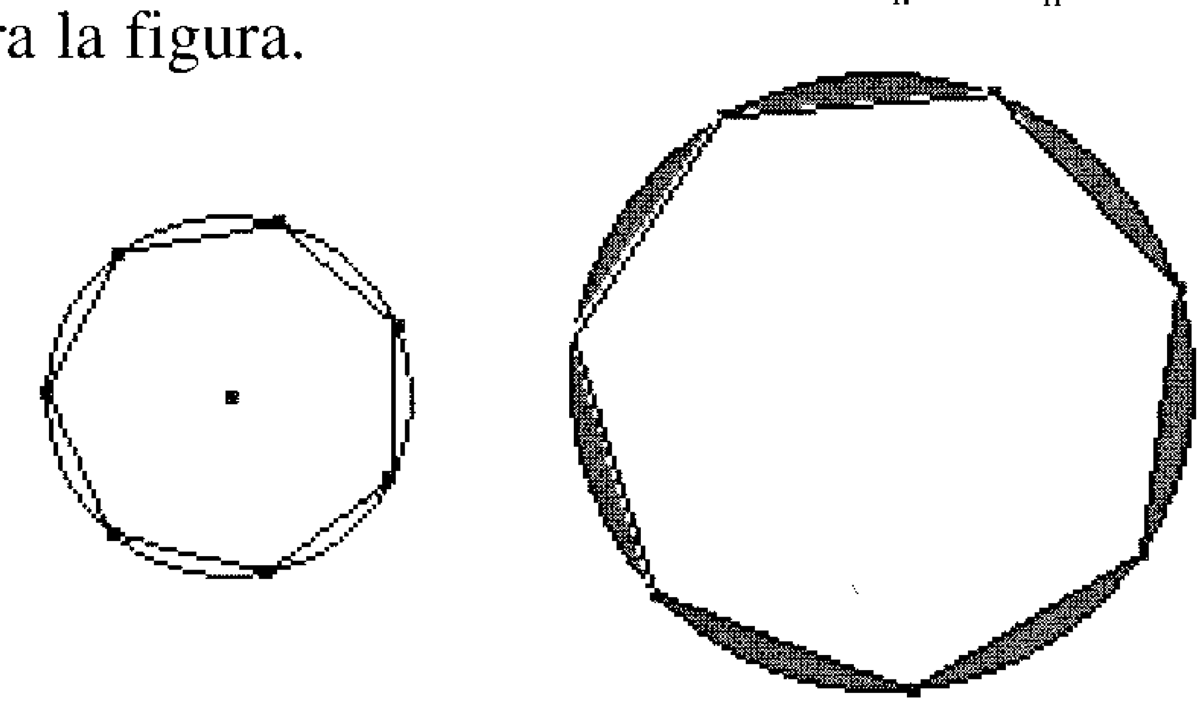
$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$$

Entonces debe existir a'< a tal que:

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

Llamemos a-a'=ε

Inscribimos en c y C dos polígonos regulares de n lados de tal forma que sus áreas son P_n y p_n, como muestra la figura.



El principio de exhaución asegura que si a una cantidad dada le extraemos una parte no menor a su mitad y repetimos esta operación con lo que quede, un número suficiente de veces, conseguiremos hacer la cantidad más pequeña que cualquier número prefijado.

Ahora, si consideramos como esa cantidad dada a las áreas intermedias que quedan fuera de los polígonos (está sombreada en una de las figuras), la estaremos disminuyendo en más de su mitad cada vez que dupliquemos el número de lados del polígono.

Según el principio de exhaución estas áreas se pueden hacer tan pequeñas como se quiera, es decir, para n suficientemente grande será

$a - p_n < \varepsilon$, como era

$\varepsilon = a - a'$ tenemos

$a - p_n < a - a'$, de donde

$p_n > a'$ (*)

Ya se sabía desde antes (las propiedades geométricas que no involucraban curvas casi no tenían secretos para los griegos, maestros de la geometría) que

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

Como habíamos supuesto

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$$

Resulta

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$$

Pero acabamos de probar (*) que $p_n > a'$; por lo que deberá ser $P_n > A$, lo cual resulta absurdo pues el área de un polígono inscripto no puede ser mayor que la de la circunferencia que lo circunscribe. El absurdo provino de suponer

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$$

Con consideraciones análogas se descarta la posibilidad de que sea

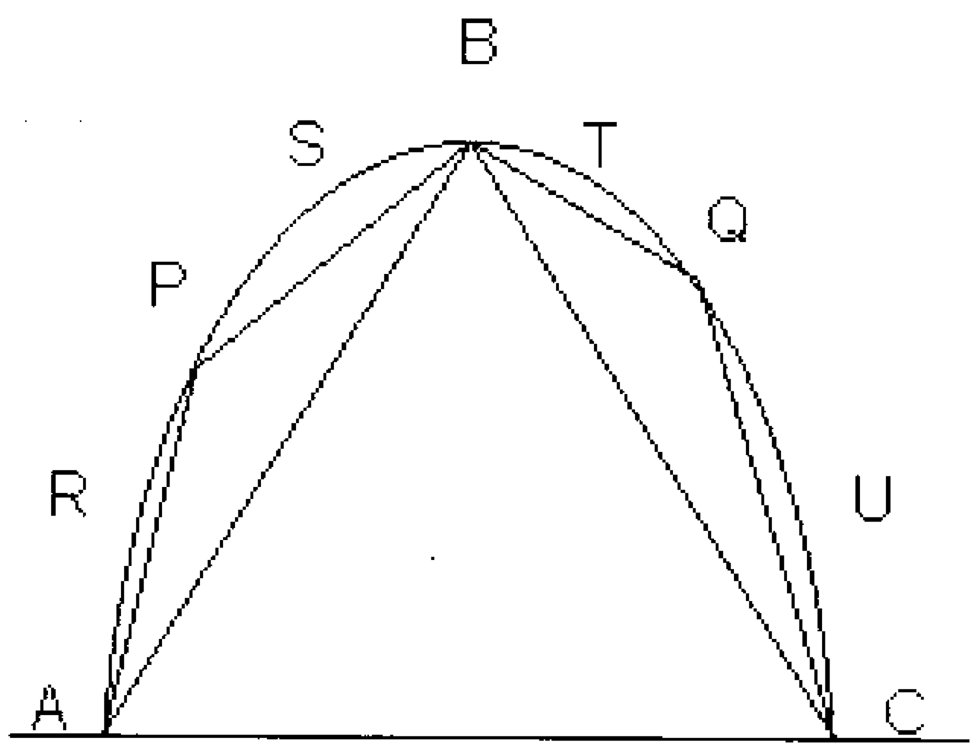
$$\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$$

Con lo que la tesis del teorema queda demostrada.

Nota: El lector podrá observar que una demostración actual del teorema precedente sería de lo más trivial, si escribiéramos el área de las circunferencias como $\pi.r^2$. Pero la demostración anterior no depende del conocimiento de π como relación entre las longitudes del radio y la circunferencia. De hecho, el método geométricamente más intuitivo para lograr aproximaciones de π consiste justamente en inscribir polígonos, con número de lados cada vez mayor, en una circunferencia.

El método de exhaución es la versión griega del cálculo integral. Los rudimentos del concepto de límite casi se podían olfatear, ¡Y faltaba tanto tiempo para que fueran establecidos con rigor!

Arquímedes usa este método en su cuadratura de la parábola, demostrando que el área de un segmento parabólico $\overset{\frown}{APBQC}$ (que denotaremos simplemente APBQC) es igual a cuatro tercios del área de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura. (Utilizaremos la notación A_{ABC} para referirnos al área del triángulo ABC)



El camino de la demostración consiste en probar que

$A_{ABC} = 4[A_{APB} + A_{BQC}]$ (1)

Una vez probado esto se puede repetir el razonamiento para ver que

$A_{BQC} = 4[A_{BTQ} + A_{QUC}]$ (2) y

$A_{APB} = 4[A_{ARP} + A_{PSB}]$ (3)

Llamando $T = A_{ABC}$ se tiene (por (1))

$T/4 = A_{APB} + A_{BQC}$ (4)

Sumando (2) y (3) se tiene

$A_{APB} + A_{BQC} = 4[A_{BTQ} + \quad + A_{QUC} + A_{ARP} + A_{PSB}]$

Igualando con (4) y despejando

$T/4^2 = A_{BTQ} + A_{QUC} + \ A_{ARP} + + A_{PSB}$

Lo que muestra que la "partición en triángulos" para aproximar el área del arco de parábola nos lleva a la serie

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \ldots + \frac{T}{4^n} + \ldots$$

Nosotros sabemos que esta serie converge a $\frac{4}{3}T$, como dice la tesis del teorema, pero Arquímedes (que como buen griego no se metía con los infinitos) se limitó a descartar por el absurdo las posibilidades de que fuera

$$A_{APBQC} < \frac{4}{3}T \text{ ó}$$

$$A_{APBQC} > \frac{4}{3}T$$

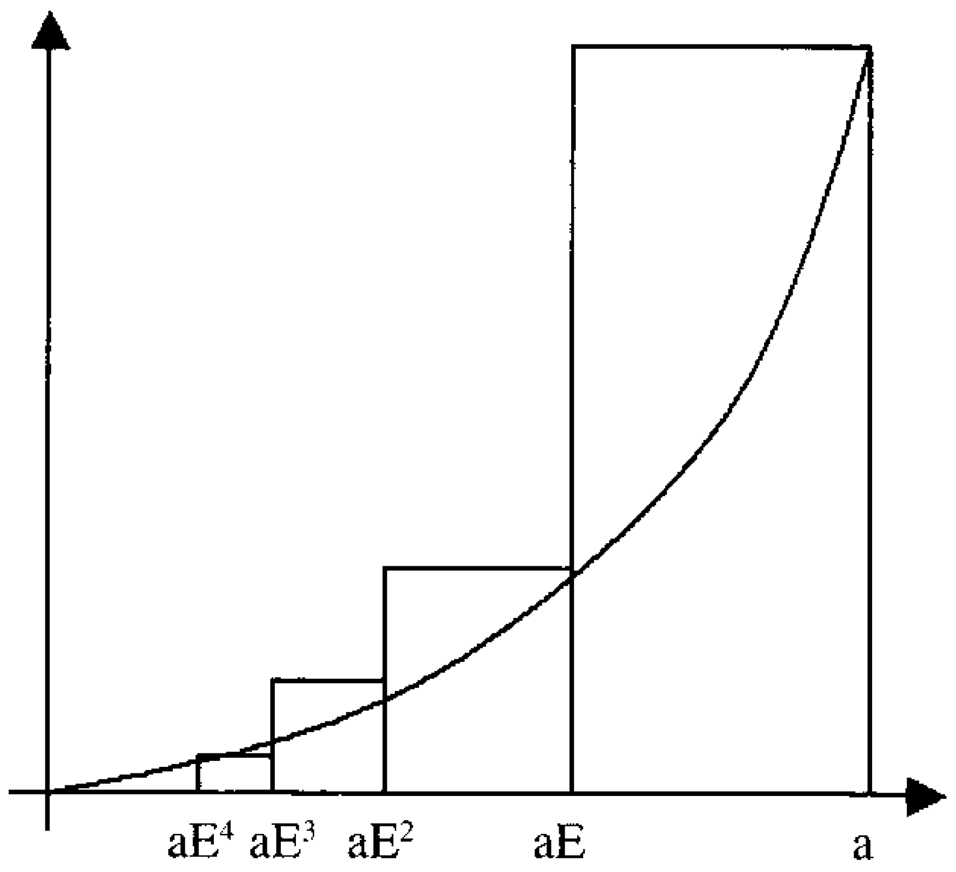
En la obra de Arquímedes figuran otros problemas[1] que, junto con el del área de segmento de parábola, desembocan en la integral $\int x^2\,dx$, pero no sabemos si Arquímedes era consciente de esto. Él resolvió cada problema utilizando su conocimiento de las propiedades particulares de cada figura estudiada, pero aparentemente no llegó a intuir que en muchos casos estaba rondando alrededor de la misma idea. Un "Cálculo integral" sería aquél que permitiera hallar una clasificación de los problemas, es decir generalizar la forma de encarar cada problema, lo cual requiere un esfuerzo de abstracción y de formalización de conceptos que Arquímedes no alcanzó (no es para desmerecerlo, se necesitaron casi dos mil años de esfuerzo humano para lograrlo). Podemos pensar que la obra admirable de Arquímedes, de la que ha surgido todo el cálculo integral –según declaran sus propios creadores– es en realidad lo contrario del cálculo integral.

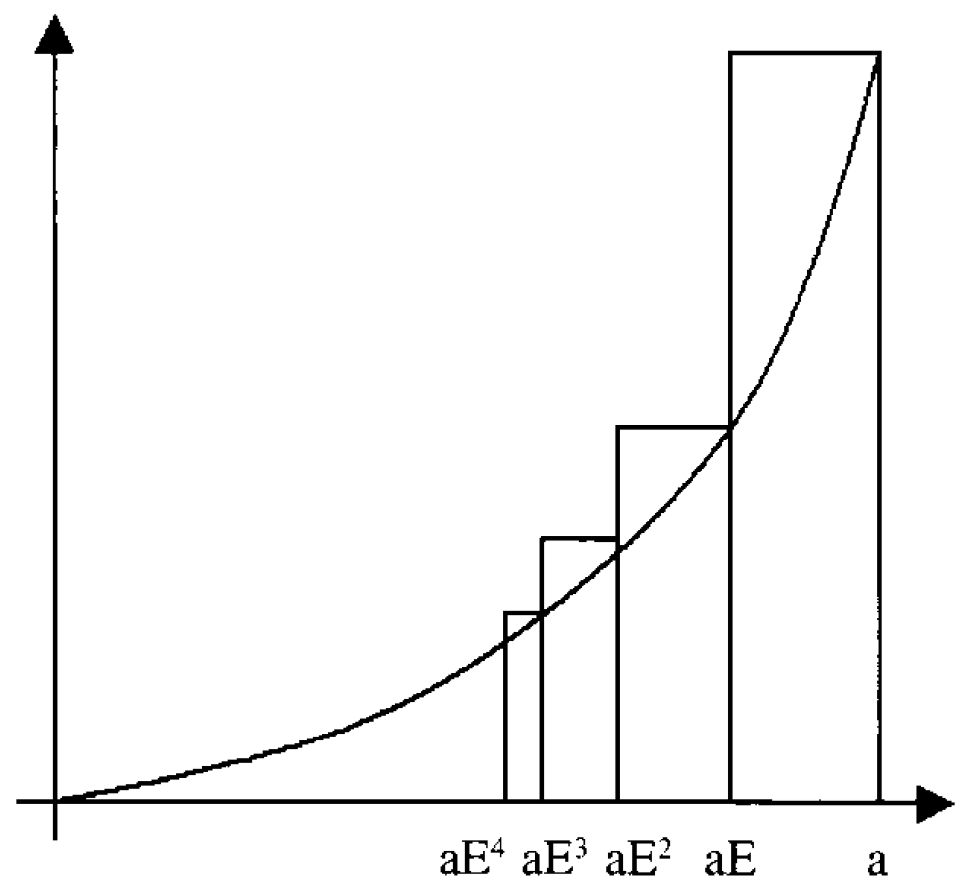
Fermat, la musa de Newton

Fermat era francés. Nació en el año 1601 y murió en 1665. Lo conocemos por su "afición" a la Teoría de Números y por el famoso teorema[1] que lleva su nombre y que sostiene la inexistencia de soluciones enteras para la ecuación $x^n + y^n = z^n$ donde n es un natural mayor que dos. Sin embargo, el calificativo de "aficionado" denota el mero hecho de que Fermat no ganaba dinero haciendo matemática, pues su profesión estaba orientada hacia los asuntos legales. De todas formas, si sólo se calificara de "matemáticos" a quienes perciben un rédito económico por sus investigaciones, por cierto que la Matemática sería una profesión (al menos en nuestro país) prácticamente desierta.
Más allá de la Teoría de Números, veremos que las investigaciones de Fermat tienen un alcance mucho mayor. Hay quienes lo han considerado el más grande de los matemáticos del siglo XVII.
La joven geometría analítica (cuyos puntos habitan en un sistema de coordenadas que bien podrían haberse llamado "Fermatianas") sería una piedra fundamental en la construcción del Cálculo.
Fermat investigó sobre el tratamiento de curvas derivables y lo que veremos a continuación es un método que desarrolló para determinar el área bajo una curva de ecuación potencial $y=x^n$

Problema:

Sea calcular el área comprendida entre la curva de ecuación $y=x^n$, el eje de abscisas, y los bordes verticales que pasan por $x=0$ y $x=a$.
Fermat considera los subintervalos formados por los puntos de abscisas a, a.E, a.E^2, ..., a.E^n, donde $0<E<1$.
Una vez tomados estos subintervalos como bases de rectángulos considera las ordenadas de esos puntos en la curva para circunscribir los rectángulos.





Dos particiones posibles. En la primera es $E=\frac{1}{2}$; en la segunda es $E=\frac{4}{5}$. El gráfico no respeta escalas, pero si un hecho a observar: cómo los intervalos se estrechan hacia la izquierda (cuando el exponente de E crece) pero además resultan más estrechos en la segunda partición que en la primera, por ser E más cercano a 1.

Las áreas de los rectángulos son (ver figura b)

I: $a^n(a-aE) = a^{n+1}(1-E)$
II: $(aE)^n(aE-aE^2) = a^{n+1}E^{n+1}(1-E)$
III: $(aE^2)^n(aE^2 - aE^3) = a^{n+1}E^{2n+2}(1-E)$
IV: $(aE^3)^n(aE^3-aE^4) = a^{n+1}E^{3n+3}(1-E)$
$\vdots$
m: $(aE^{m-1})^n(aE^{m-1}-aE^m) = a^{n+1}E^{(m-1)n+(m-1)}(1-E)$

Para hallar la suma de esta serie infinita se puede considerar los segundos miembros de las igualdades anteriores. Extrayendo factor común estamos ante la suma

$$a^{n+1}(1-E)\ [E^{n+1}+E^{2n+2}+E^{3n+3}+\ldots+E^{m\,n\,+\,m}+\ldots] =$$
$$=a^{n+1}(1-E)\ [E^{n+1}+(E^{n+1})^2+(E^{n+1})^3+\ldots+(E^{n+1})^m+\ldots]$$

El corchete encierra una serie geométrica de razón $E^{n+1}<1$, con lo que la suma de las áreas es

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\ldots+E^n}$$

Esta última igualdad se puede probar por inducción. Ahora, cuando E tiende a 1, esto es, cuando las aproximaciones se acercan al área buscada, resulta claro en el segundo miembro de la igualdad que dicha área es $a^{n+1}/(n+1)$, es decir

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

La herencia de Newton

Hasta ahora hemos mencionado algunos métodos aislados, sin duda efectivos, para resolver problemas particulares relativos a las áreas encerradas por curvas. Podemos decir que, para mediados del siglo XVII la humanidad ya había reunido un bagaje importante de conocimiento referido al tema. No es casual, por lo tanto, que dos personajes, simultáneamente y en lugares distintos encontraran en todo ese material la semilla fecundada de lo que serían las bases del cálculo diferencial e integral.

Newton o Leibniz o cualquier genio (no es que haya muchos, pero cada tanto aparecen) que tomara la posta de lo que habían dejado los demás tendría frente a sí las condiciones dadas para llevar el tratamiento de los casos particulares a la abstracción de las reglas generales que constituirían finalmente el método del Cálculo. Es decir, a mediados del siglo XVII las condiciones necesarias para que la humanidad descubriera el Cálculo diferencial e integral ya habían sido alcanzadas.

La obra de Newton y algunos comentarios simpáticos sobre su vida

Llegó al mundo en el año 1642 (recordamos este año porque es el mismo en el que muere Galileo). Nació en la aldea de Woolsthorpe, en forma prematura, como si estuviera predestinado a ser un "adelantado", y en Navidad, acentuando la idea de que, para la ciencia, buen sentido tendría organizar su historia en las eras a.N y d.N. Era tan pequeño que la madre y las comadronas que asistieron el parto pensaron que no sobreviviría. Dado que sería brutalmente exagerado imaginar un bebé (inclusive uno muy prematuro) de tan sólo 100 gramos de peso, quedamos privados de una divertida hipótesis histórica, según la cual el pequeño Isaac habría nacido pesando exactamente 1 Newton.

Su padre murió antes de su nacimiento. Eran una familia de granjeros y Newton pasó su infancia en Woolsthorpe. Como era de pequeña contextura física, no participaba de los juegos violentos de sus compañeros y prefería dedicarse a la contemplación de la naturaleza, gran fuente de inspiración para la formulación de las preguntas más curiosas. Era muy hábil y frecuentemente sorprendía a los adultos con inventos mecánicos, construcción de relojes o experimentos diversos.

Fue a la escuela de Grantham, a unos kilómetros de su aldea, donde sufría el maltrato del camorrista de la escuela, quien una vez golpeó a Newton en el estómago. Alentado por un profesor (tal era la pedagogía de la época), Newton desafió a su enemigo a un combate limpio y, haciendo valer sus puños, le aplicó el principio de acción y reacción y se cobró la revancha buscada. Después de demostrar su fuerza llegó la hora de sacar a relucir su genio y no tardó en convertirse en el estudiante más avanzado del colegio.

Newton ya estaba terminando la escuela media y se preparaba para ingresar a la universidad de Cambridge. Durante su estada en Grantham se alojaba en la casa de un boticario. En el fondo de la botica había algunos libros de química que Newton descubrió y devoró con la avidez del hombre de ciencia interesado por incorporar siempre la mayor cantidad de conocimiento posible. De hecho la química (en ese entonces la alquimia) sería una de las grandes ocupaciones de nuestro gran físico y matemático.

Aparentemente no fueron sólo libros lo que Isaac encontró en el fondo de la botica, pues se entreveró con la hijastra del boticario y terminaron comprometiéndose antes de que, a los 19 años de edad, Newton partiera hacia Cambridge. En el fondo de la botica quedaron expuestas y planteadas las opciones amorosas de Newton: la Mujer o la Ciencia. Predominó la última: Newton viajó a Cambridge y dedicó su larga vida al estudio de la física, la alquimia, la matemática y la teología. La hijastra del boticario (seguramente tras sufrir algunas penas) se casó con otro hombre y Newton, deslumbrado por el estudio de la Naturaleza, jamás se volvió a enamorar de una mujer.

Llegado a Cambridge, Newton estableció contacto con el que sería su maestro y mentor, el doctor Isaac Barrow (1630-1677). Barrow dictaba conferencias sobre geometría, en las que exhibía sus estudios sobre el trazado de rectas tangentes a una curva y sobre el cálculo de áreas.

No eran pocos, como ya dijimos, los resultados que se conocían cuando Newton comenzó a desarrollar el Cálculo. Descartes (junto con Fermat, padre de la geometría analítica), Kepler (descubridor de las leyes que rigen el movimiento de los planetas) y Galileo (movimiento de los cuerpos, de donde Newton formularía los principios de la dinámica) son algunos de esos gigantes sobre cuyos hombros Newton se posó con tan ciega y justificada confianza.

Cuando en el año 1664 la peste bubónica se extendió por Europa, las universidades fueron cerradas y Newton buscó refugio en el aislamiento de su aldea natal.

Hay que observar que si los cultivos que su madre practicaba en la granja de Woolsthorpe se hubiesen limitado a las papas, las remolachas y las zanahorias, la historia de la ciencia se habría visto privada de una de sus más famosas anécdotas. Porque Newton aprovechó ese período de aislamiento para meditar sobre algunos temas de investigación que venía elaborando; y alguna de esas tardes habrá decidido hacerlo a la sombra de un manzano...

En esa época, a la edad de 25 años, Newton desarrolló su obra "Fluxiones". La palabra fluxión significa fluir, cambiar. Los procesos de cambio que tienen lugar en un transcurso de tiempo determinado son los que dan lugar al concepto de derivada.

No fue Newton el único que se aventuró en estas investigaciones. El Cálculo diferencial e integral fue desarrollado simultáneamente por Gottfried Wilhelm Leibniz a quien le debemos muchos detalles de la notación moderna, los diferenciales, el símbolo de integral e inclusive el término "función".

La pregunta que surge de modo natural es: ¿Por qué habiendo tantos antecedentes e investigaciones previas, consideramos a Newton y Leibniz como los creadores del Cálculo? Hay dos razones principales:

1) Como vimos en los trabajos de Arquímedes y Fermat, ellos (al igual que tantos otros que no hemos mencionado) desarrollaron sus métodos para problemas particulares; un método para integrar la función cuadrática, un método para integrar la función potencial, etc. No hallaron reglas generalizables a todas las funciones.

2) Fermat había deducido por separado los teoremas que en nuestros símbolos serían:

$$(x^n)' = n\, x^{(n-1)}$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Pero justamente él, Fermat, el maestro de la intuición, capaz de intuir un teorema que tendría en jaque a la humanidad por más de 350 años, no vio la relación entre los procesos de integración y derivación. El descubrimiento crucial de Newton y Leibniz es el no mal llamado Teorema Fundamental del Cálculo, el que revela a la integración y a la derivación como procedimientos inversos y que permite el cálculo inmediato de integrales definidas mediante un corolario bautizado con el nombre de Barrow, el maestro de Newton.

La importancia del Teorema Fundamental del Cálculo es tan decisiva que, a la hora de adjudicar a alguien la invención del Cálculo, hace perfectamente tolerable la falta de rigor con que esta disciplina se había desarrollado hasta entonces. El rigor llegaría casi 200 años más tarde, a partir del concepto de límite y de la caracterización de los números reales como conjunto continuo.

En 1669 Barrow cedió la cátedra de Cambridge a su mejor discípulo.

Alrededor de los 50 años, cuando ya estaba grande para algunos trotes, Newton cometió un error en la organización de su tiempo. Las observaciones astronómicas requerían su desvelo nocturno. El día estaba dedicado al desarrollo de sus cálculos. Newton olvidó que los hombres necesitan alimentarse y dormir y, como es natural, cayó enfermo.

Tardó un año en restablecerse y cuando regresó al ambiente científico recibió la noticia de que el Cálculo era conocido en Europa y que su creación era atribuida a Leibniz.

Hasta aquel momento siempre se habían respetado y ninguno había puesto jamás en duda la honestidad del otro. Pero a partir de entonces se desató una competencia que no tardó en pasar a ser una cuestión de interés nacional; ingleses y alemanes se alistaban en defensa de sus representantes intelectuales.

Newton era una personalidad valorada y respetada en Inglaterra. Fue nombrado director de la Casa de la Moneda y honrado con un título de nobleza: Sir Isaac Newton.

Aunque estaba alejado de la universidad, los años no conspiraron contra la genialidad. Leibniz y Johann Bernoulli habían lanzado dos desafío a la comunidad matemática que en seis meses nadie había podido resolver. Los problemas llegaron a oídos de Newton. Acaso cansado después de una larga jornada en la Casa de la Moneda, Newton regresó a su hogar y, de igual modo en que otras noches cenaba y se iba a dormir o se distraía en alguna lectura, tomó los problemas de Leibniz y los resolvió en un par de horas. Mandó las soluciones en forma anónima a la Royal Society, buscando eludir la participación en discusiones científicas. Pero cuando las brillantes soluciones llegaron a las manos de Bernoulli, éste comentó, no sin admiración: "Reconozco al león por su garra."

Uno, humilde estudiante de matemática que lucha –muchas veces sin éxito– para dar con la sustitución adecuada que permite el cálculo de una miserable integral, se pregunta de qué manera podía funcionar –en ese plano sobrehumano y distante– un cerebro como el de Sir Isaac Newton, maquinaria perfecta de la creación, no sólo del Cálculo diferencial e integral, sino de su aplicación a las leyes del movimiento que permitieron, entre otras cosas, enviar un cohete tripulado a la luna 242 años después de su muerte.

* Profesor de Matemática y Astronomía, egresado del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González".

Bibliografía:

· Eric Temple Bell, "Los grandes matemáticos (desde Zenón a Poincaré)", Losada S.A., Buenos Aires, 1948

· Isaac Newton, "Tratado de la cuadratura de las curvas", Universidad Autónoma de puebla, México, 1984 (edición facsimilar de 1723)

· "Análisis infinitesimal", Gottfried Wilhelm Leibniz, Tecnos, Madrid, 1994

· Carl B. Boyer, "Historia de la matemática", Alianza Universidad, Madrid, 1994

· Nicolas Bourbaki, "Elementos de historia de las matemáticas", Alianza Universidad, Madrid, 1972

· Simon Singh, "El último teorema de Fermat", Editorial Norma, Colombia, 1999

[1] El volumen de la pirámide (Eudoxo), el centro de gravedad del triángulo, el área de la espiral de Arquímedes ($\rho = c.\omega$ en coordenadas polares)

[2] Para quienes sospechan que Fermat no era poseedor de la demostración que aseguraba haber pergeñado, sería más apropiado hablar de "conjetura" y no de teorema; este teorema-conjetura fue demostrado por el inglés Andrew Wiles ¡recién en 1994!

Exponenciales y logarítmicas

Es bastante común que en los libros de texto el tema "exponenciales y logaritmos" se trate exclusivamente a través de ejercicios numéricos (como resolución de cálculos o de ecuaciones) cuyas soluciones se obtienen únicamente a partir de las definiciones o de las propiedades básicas.
La idea de esta nota es dar otra mirada a las funciones exponenciales y logarítmicas. Reconoceremos no sólo su gran importancia histórica como elementos fundamentales para operar, sino también su relevancia actual al estar íntimamente relacionadas con muchos procesos naturales (como procesos de descomposición radiactiva, de crecimiento de poblaciones, etc.)
La nota estará organizada a la manera del esquema de una clase de nivel medio. Escribiremos en itálica preguntas que podemos plantear a los alumnos para motivar sus reflexiones sobre el tema.

por Gisela Serrano *

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son aquellas de la foma:

$f(x) = a^x$ con $a \in \Re$, $0 < a$ y $a \neq 1$

¿Qué ocurre si a = 0? ¿Y si a = 1?
¿Qué ocurre si a < 0?

Una propiedad fundamental de las funciones exponenciales es que su aumento (o disminución) en un determinado intervalo de tiempo es proporcional a la cantidad que se toma como inicial. Simbólicamente lo expresaremos:

$\frac{a^{x+t}}{a^x} = a^t$ donde t es el período de tiempo transcurrido.

Por ejemplo, las amebas se reproducen por bipartición, esto significa que duplican la cantidad inicial en un período de tiempo y al cabo de otro período igual vuelven a duplicar esta última cantidad. Por lo tanto, la cantidad de amebas que habrá en un determinato instante (si no median otros factores) puede calcularse a partir de conocer la cantidad inicial de las mismas y el tiempo que ha transcurrido desde ese instante.
Llamemos C a la cantidad inicial de amebas y tomemos como unidad de tiempo aquel que es necesario para que se dupliquen:

Cuando comenzamos las observaciones (t = 0) tendremos C amebas, ya que ésta es la cantidad inicial.
Luego de transcurrida una unidad de tiempo (t = 1) tendremos 2.C amebas, se duplicó la cantidad anterior.
Por lo tanto para t = 2, tendremos $2.(2.C) = 2^2.C = 4.C$ amebas, duplicamos nuevamente la cantidad anterior.
Para t = 3, tendremos $2.(2^2.C) = 2^3.C = 8.C$ amebas, y así sucesivamente.
Por ejemplo, la cantidad de amebas para t = 10 es de $2^{10}.C$ amebas o lo que es lo mismo 1024 veces la cantidad inicial. O sea que la fórmula para obtener la cantidad de amebas a partir de los períodos de tiempo transcurridos será:

$$A(t) = C \,.\, 2^t$$

Reiteramos que estamos suponiendo que no existen factores que limiten este crecimiento, de hecho (y por suerte) en la naturaleza existen estos límites naturales; de lo contrario en poco tiempo estaríamos tapados por amebas.

Veamos un problema: En un banco duplican nuestro dinero al finalizar un año de depósito. En este mismo banco ideal nos permiten extraer y reinvertir nuestro dinero en cualquier momento y la cantidad de veces que deseemos, obteniendo el interés proporcional. Por ejemplo: Si para simplificar colocamos \$1, y lo dejamos 1 año completo, obtendremos \$2 al finalizar dicho año.

¿Qué ocurre si a los 6 meses ($\frac{1}{2}$ año) lo retiramos y lo volvemos a invertir?

A los 6 meses retiramos: $\$1 + \$\frac{1}{2} = \$1{,}5$; lo reinvertimos y al finalizar el año obtendremos:

$$\$(1 + \frac{1}{2}) + \$\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \$(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) =$$

interés de la segunda mitad del año

$$= \$(1 + \frac{1}{2})^2 = \$2{,}25$$

¡Obtenemos más dinero! ¿Y si lo retiramos y reinvertimos cada cuatrimestre?

Primer cuatrimestre: $\$\,(1 + \frac{1}{3})$

Segundo cuatrimestre: $\$\,(1 + \frac{1}{3}) + \$\,\frac{1}{3}\,(1 + \frac{1}{3}) =$
$= \$\,(1 + \frac{1}{3})^2$

Tercer cuatrimestre: $\$\,(1 + \frac{1}{3})^2 + \$\,\frac{1}{3}\,(1 + \frac{1}{3})^2 =$

$$= \$\,(1 + \frac{1}{3})\,(1 + \frac{1}{3})^2 = \$\,(1 + \frac{1}{3})^3$$

Al final del año obtenemos aproximadamente \$ 2,37.

Aquí ya podemos intentar ver con los chicos, sin realizar todas las cuentas, qué cantidad de dinero retiraremos al finalizar el año si reinvertimos cada trimestre.

Como se ve fácilmente esta cantidad será: $\$\,(1 + \frac{1}{4})^4$ que es aproximadamente \$ 2,44. Asimismo podemos encontrar una fórmula que nos dé la cantidad de dinero que obtendremos al finalizar el año cualquiera sea la cantidad de veces en que lo subdividimos (para hacer retiros y reinversiones). Ésta sería:

$$\$\,(1 + \frac{1}{n})^n$$

donde n es la cantidad de veces en que "partimos" el año.

Por ejemplo si hiciéramos esta operación cada día del año, retiraríamos al finalizar el mismo $\$\,(1 + \frac{1}{365})^{365}$ es decir aproximadamente \$ 2,71.

Uno comienza a sospechar que si cada segundo del día retiramos y reinvertimos el dinero nos haremos millonarios, pero no es así. Si seguimos con el mismo procedimiento vemos que nos acercamos cada vez más al número 2,7182818... ¡y de allí no pasamos! Este número que hemos obtenido es un número irracional y se lo denomina con la letra ***e*** (de la misma forma que usamos π, para otro número irracional). Su definición formal es la misma a la que hemos arribado con nuestro problema: ***e*** es el valor al que nos acercamos si reemplazamos en $(1 + \frac{1}{n})^n$ valores cada vez más grandes de n.

Analicemos las funciones exponenciales más en detalle. Aquí trabajaremos con un ejemplo, y a partir de una tabla de valores haremos un gráfico de $f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
0	1
1	2
-1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$

(Podemos aprovechar para recordar que no es necesario marcar en el gráfico los valores no convenientes de la tabla)

¿Qué valores puede tomar x? o sea, ¿cuál es el dominio de f(x)?
¿Qué ocurre si tomamos valores de x muy chicos? Ídem con muy grandes.

A partir de esto podemos introducir una primera noción de límite diciendo que "muy a la izquierda" se "acerca mucho" a 0. Y podemos decirles también que a la recta y = 0 se la llama asíntota horizontal (a izquierda, en este caso) de la función.

¿Cuáles son todos los valores de x que hacen cierta la siguiente igualdad f(x) = 0? o lo que es lo mismo ¿cuál es el conjunto de ceros de f(x)?
¿Qué valores podemos esperar obtener si aplicamos f(x) a todos los posibles valores de x? o sea, ¿cuál es la imagen de f(x)?

Recién cuando tengamos todos estos datos completaremos el gráfico, a fin de destacar que solamente con algunos puntos que obtengamos a partir de una tabla de valores no podemos darnos una idea cabal de cómo realizar el gráfico de una función desconocida.

Analizamos intervalos de crecimiento y decrecimiento, a partir del gráfico, ya que aún no tenemos las herramientas necesarias para hacerlo analíticamente.

Un estudio similar podemos hacer con las funciones: 3^x, e^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Para el gráfico de e^x, podemos hacer notar que como $2 < e < 3$ entonces $2^x < e^x < 3^x$ para cualquier valor de x.

A partir de las distintas gráficas podemos concluir, entre todos, que las funciones exponenciales son biyectivas y que en consecuencia tienen inversa. Dibujamos, en cada uno de los ejemplos, la inversa.

En una función exponencial al reemplazar la x por distintos valores obtenemos potencias de igual base y ya en los primeros años, vimos qué propiedades son válidas en esos casos. Recordémoslas, para todo $a \in \Re$:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^x . a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{x.y}$

Resolvamos ahora algunas ecuaciones sencillas donde aparecen exponentes, variando de lugar la incógnita:

$3^2 = x$	entonces $9 = x$ Solución = $\{9\}$
$x^4 = 16$	entonces $x = -2$ o $x = 2$ Solución = $\{-2; 2\}$
$2^x = 8$	

¿A qué número debo elevar 2 para que dé 8? Esta pregunta se puede escribir como ¿cuál es el $log_2 8$ (logaritmo en base 2 de 8)?.

En este caso es fácil encontrar el valor de x. Tanteando, sabemos que el valor de x buscado es 3. ¿Cómo haremos sin embargo para resolver, por ejemplo, $2^x = 6$? ¿Cuál es el valor de $log_2 6$?

Podemos sugerirles a los chicos que tanteen con sus calculadoras para obtener dicho valor y otros similares (por ejemplo cambiando la base) en forma aproximada. Luego daremos una definición más formal de logaritmo.

Funciones logarítmicas

Llamamos logaritmo en base a de un número b al número c que cumple que a elevado a la c nos da b. En símbolos:

$$log_a b = c \iff a^c = b$$

donde, como dijimos al definir la función exponencial, $a \in \Re$, $0 < a$ y $a \neq 1$

¡Cuidado! Es conveniente aclarar que cuando leemos logaritmo en base 2 de 6, ese "de" no significa multiplicación. La expresión $log_2 6$ es toda una misma expresión como, por ejemplo, $\sqrt{3}$ (raíz de 3).

Por la definición que dimos de logaritmo se ve que en realidad es la inversa de una función exponencial. Así el $log_2 x$ es la inversa de 2^x. Podemos aquí recordar el gráfico de 2^x y su inversa y averiguar algunos valores de $log_2 x$. Aprovechamos para analizar la función $log_2 x$; su dominio, imagen, ceros, positividad y negatividad, crecimiento y decrecimiento, asíntotas en forma intuitiva (en este caso tendrá una síntota vertical en x = 0).

Los logaritmos surgieron históricamente para facilitar la resolución de cálculos complejos. Así, a fines del siglo XVI, las investigaciones astronómicas (para mejorar las técnicas de navegación) y los cálculos sobre inversiones financieras, motivaron la búsqueda de nuevos algoritmos que permitieran operar con mayor agilidad con grandes números. John Napier (o Neper) y Jobst Bürgi, encontraron en forma independiente la solución a esta cuestión, trabajando con sucesiones aritméticas y geométricas.
Veamos, en un ejemplo sencillo, en qué consistió esta técnica. Tomemos las siguientes sucesiones:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (suc. aritmética)

2 4 8 16 32 64 128 256 512 (suc. geométrica)

La sucesión aritmética nos indica a qué exponente debemos elevar el número 2 para obtener el número correspondiente en la sucesión geométrica (por ejemplo: $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; etc.). O lo que es lo mismo, en la sucesión aritmética tendremos los logaritmos en base 2 de los números de la sucesión geométrica.

Observemos cómo se facilitan las operaciones trabajando con esta tabla.
Supongamos que queremos calcular *16* x *32* (de más está decir que no fueron estos los cálculos que motivaron la invención de los logaritmos pero nosotros trabajaremos con números pequeños a fin de facilitar los ejemplos). Escribimos cada número como potencia de 2. Usando la tabla, tendremos que $16 = 2^4$ ya que $log_2\ 16 = 4$; y $32 = 2^5$ pues $log_2\ 32 = 5$.
Entonces:

$$16 \times 32 = 2^4 \times 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$$

como 9 es el logaritmo en base 2 de *512* (en la tabla: al 9 de la sucesión aritmética le corresponde el *512* en la sucesión geométrica), concluímos que *16* x *32* = *512*
Cuando multiplicamos dos potencias de igual base, los exponentes (o logaritmos) se suman. Al multiplicar los números cuyos logaritmos en base 2 son 4 y 5 obtenemos el número con logaritmo 9 en base 2, es decir *512*.
Otro ejemplo: Para multiplicar *8* x *32* sólo debemos observar que a *8* le corresponde, en la fila superior, el número 3 y a *32*, el 5. Entonces *8* x *32* es el número cuyo logaritmo es 3 + 5 = 8. Buscamos 8 en la fila superior y vemos que el resultado es *256*.
Los logaritmos, entonces, "transforman" multiplicaciones en sumas. Podemos expresar del siguiente modo la propiedad que hemos usado en estos ejemplos:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Es decir, el logaritmo (o exponente) que corresponde a una multiplicación es la suma de los logaritmos (o exponentes) de los factores.

Analicemos la validez de la propiedad distributiva del logaritmo con respecto a la multiplicación y con respecto a la suma.
¿Qué ocurre si tenemos una división? Como sabemos, toda división se puede transformar en un producto; esto es lo que haremos y luego estaremos en la misma situación que en los ejemplos anteriores.
Por ejemplo si queremos calcular *32* : *8*,

$$32 : 8 = 32 \times 8^{-1} = 2^5 \times 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4$$

Les propondremos luego a los chicos calcular 16^2, 16^3, 16^4 utilizando la tabla y que extraigan de ello una regla general,

$$log_a\ b^x = x \cdot log_a\ b$$

También podemos trabajar con raíces de distintos índices.

Observemos por otra parte que nuestra tabla no nos permite calcular en forma exacta el valor del producto de 50 x 13, sólo podemos estimarlo diciendo por ejemplo que estará comprendido entre 32 x 8 (256) y 64 x 16 (1024). Con este mismo problema se toparon Napier y Bürgi, y a partir de él vieron la conveniencia de que los números de la sucesión geométrica no se apartaran tanto uno de otro. Para ello tomaron, en lugar de base 2, bases muy cercanas a 1, Napier por defecto y Bürgi por exceso. Fue a partir de trabajar con estas bases cercanas a 1 que ambos llegaron en forma natural a buenas aproximaciones del número e. Es por esto que al logaritmo de base e se lo denomina logaritmo natural o neperiano (ya que los trabajos de Napier fueron los primeros en publicarse). Otra base que utilizamos frecuentemente (debido a la base de nuestro sistema de numeración) es la 10. Para abreviar se utilizan las siguientes notaciones:

$log_e\ x$ lo escribiremos como $ln\ x$
$log_{10}\ x$ lo escribiremos como $log\ x$

Sus tablas correspondientes están incorporadas a las calculadoras científicas. Así, si queremos calcular por ejemplo *ln* 5, o sea queremos hallar a qué número debe elevarse e para que nos de 5, simplemente debemos teclear en la calculadora (el orden en que se debe presionar las teclas dependerá del modelo de la calculadora con que se trabaje).

$$3^x = 5$$
$$x = log_3\ 5$$

pero veamos que podemos resolverla de otra manera, por ejemplo aplicando logaritmo natural a ambos miembros

$$3^x = 5$$
$$ln\ 3^x = ln\ 5$$
$$x \cdot ln\ 3 = ln\ 5$$
$$x = \frac{ln 5}{ln 3}$$

Por lo tanto hemos llegado a que $log_3 5 = \frac{ln 5}{ln 3}$.

Esta igualdad vale en general:

$$log_a b = \frac{ln\, b}{ln\, a}$$

Las funciones exponenciales y logarítmicas son, entonces, las dos caras de una misma moneda y ambas son esenciales para trabajar con procesos de crecimiento en la naturaleza.

Veamos ahora algunos ejemplos:

1. En 1947, el químico norteamericano W.F. Libby descubrió la técnica para determinar la antigüedad de fósiles conocida como del Carbono 14 (C^{14}). Veamos en qué consiste esta técnica. Todos los tejidos vivos contienen carbono 12 (C^{12}). A su vez, mientras dura su vida, el tejido absorbe C^{14} de la atmósfera, manteniendo cierta relación entre ambos tipos de carbono en el tejido. Cuando el organismo muere ya no absorbe C^{14} y por lo tanto la concentración de éste comienza a decaer. El período de semidesintegración del C^{14} es de aproximadamente 5730 años (esto significa que luego de 5730 años habrá la midad de C^{14} que al comienzo de este período). Observando cuánto ha decaído la concentración de C^{14} puede determinarse, con cierto margen de error, en qué momento ha fallecido el organismo estudiado. Esta técnica resulta razonablemente exacta para fósiles de hasta 50 000 años.

Esta situación podemos describirla mediante una función exponencial ya que, según vimos, éstas sirven para describir procesos en los cuales la cantidad en que disminuye una sustancia (en un determinado intervalo de tiempo) es proporcional a la cantidad inicial de dicha sustancia.

Tomemos la función: $f(t) = C \,.\, e^{kt}$, donde t representa el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo; k es una constante; C es la cantidad inicial de carbono 14 en el tejido y f(t) la cantidad de carbono 14 en el instante t.

Sabemos que $f(0) = C$ y que $\frac{1}{2} . C = C \,.\, e^{k5730}$

despejando obtenemos $k = - ln \frac{2}{5730}$

Con lo cual la función buscada será:

$$f(t) = C \,.\, e^{-\ln\left(\frac{2}{5730}\right)t}$$

A partir de ella podemos plantearles los siguientes problemas:

a) Calcular la fórmula que nos da el porcentaje de carbono 14 que tiene un fósil en la actualidad, conocido el tiempo que ha transcurrido desde su muerte.

b)Calcular la fórmula que nos da el tiempo que ha transcurrido desde la muerte del tejido a partir de la cantidad de carbono 14 que tiene el fósil en la actualidad.

c) Calcular la edad de un fósil si tiene 18% de su C^{14} original.

d) Ídem con 17% y 19%.

e) ¿Cómo varía el cálculo de la antigüedad del fósil si hay pequeños errores de medición de la proporción de C^{14} en la actualidad?

f)Por esta técnica se ha datado la madera de la embarcación funeraria que se encontró en la tumba del faraón Seostris III como del año 1670 a.C. ¿Qué porcentaje del C^{14} inicial tenía?

2. Como ya vimos, las funciones exponenciales están relacionadas con el interés compuesto y, por las mismas razones, con la inflación y la devaluación sostenidas.

Nuestro país tuvo un índice inflacionario del 0,1% en 1996. De mantenerse ese índice en los siguientes 20 años, ¿qué valor tendría un bien valuado en \$50 000 en ese momento?

3. Si bien como dijimos en el caso de las amebas, el crecimiento de una población está íntimamente relacionado con las funciones exponenciales, hay factores como la competencia entre los individuos de una misma especie por el alimento y el hábitat que no hemos tomado en cuenta. La curva logística o de saturación fue utilizada por el sociólogo belga P.F. Verhurst cerca de 1840 para estudios relacionados con el aumento de la población humana.

$$f(t) = \frac{M.N}{N+(M-N)e^{-c.M.t}}$$

donde $N = f(0)$ y $M = \frac{r+c}{c}$, donde r es una constante de "crecimiento" y c es una constante de "competencia".

En la actualidad dicha curva se utiliza para problemas tan diversos como el crecimiento de las moscas de la fruta en biología, y tasas de aprendizaje en psicología. En un trabajo de M. Andériz, B. Orradre, C. Ollobarren - *La función logística y el control de calidad en un servicio hospitalario* – se muestra cómo a partir de esta función se pueden predecir la cantidad de pacientes que ingresarán a una institución y evaluar de esta manera (en cierta forma) la calidad asistencial de la misma. Tomemos la función:

$$Y = \frac{1886}{1+2{,}76e^{-0{,}19X}}$$

donde X representa la cantidad de años transcurridos a partir de 1989 e Y la cantidad de pacientes esperados en determinada institución. Calculen:

a) la cantidad de pacientes que se espera ingresen durante el año 2001,

b) ¿en qué año ingresaron 1 185 pacientes?

4. La curva que describen los cables de alta tensión también está relacionada con las funciones exponenciales.

Esta curva lleva el nombre de Catenaria, debido a que es la forma que toma una cadena en suspensión libre. La expresión que la describe, suponiendo que el punto más bajo se encuentra en x=0 es:

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

siendo $a = \frac{T}{p}$ donde T es la tensión que actúa horizontalmente en el punto más bajo de la cadena y p es el peso específico de la cadena o del cable.

Calculen:

a) ¿A qué distancia de la superficie se encontrará el punto más bajo de la curva catenaria?

b) Si tomamos una cadena de plata de 40 cm por sus extremos, separándolos entre sí 30cm, ¿qué diferencia habrá entre la altura a la que se encuentran los extremos y la altura del punto más bajo de la curva? (Tomar a = 11.705652)

Estos problemas, desde ya, no agotan las diversas aplicaciones que tienen las funciones exponenciales y logarítmicas. Invitamos a los lectores a investigar sobre otras aplicaciones o ejercicios interesantes que las utilicen y hacernos llegar sus hallazgos. ◣

* Profesora de Matemáticas y Astronomía egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Bibliografía: Más sobre...

· historia de la Matemática: BOYER, Carl – *Historia de la Matemática* – Madrid, Alianza Editorial S.A., 1996 (cuarta reimpresión).

· historia de las funciones logarítmicas: *Logaritmos* – MORALES y otros - en Axioma N° 2 – Julio/Agosto de 1996.

· método de carbono 14: COMAP, the Consortium for Mathematics and Its Applications - http://www.comap.com

· función logística: COMAP, the Consortium for Mathematics and Its Applications - http://www.comap.com

· La función logística y el control de calidad en un servicio hospitalario - M. Andériz, B. Orradre, C. Ollobarren (Servicio de Medicina Interna. Hospital de Navarra. Pamplona): http://www.cfnavarra.es/salud/anales/textos/textos3/orig2.html

· catenaria: PISKUNOV, N. – *Cálculo Diferencial e Integral* – Fondo Editorial Sudamérica, tomado de 3° edición Editorial Mir, 1977.

El Amanecer de la Astronomía

Es casi imposible, para cualquier ser humano, al observar en la noche el cielo colmado de estrellas, dejar de plantearse una serie de preguntas, que lleva en gran parte a otra serie de cuestiones relacionadas con la propia existencia: "¿Cómo empezó el Universo?", "¿Cómo se creó la vida?", "¿A qué distancia se encuentran las estrellas?"...
Más atrás en el tiempo, mujeres y hombres como nosotros, habrán intentado encontrar respuestas a otros interrogantes que, seguramente, no debieron haber sido tan distintos de los que hoy tenemos.
Esta es una invitación a redescubrir lo que ya han revelado nuestros antecesores, con más o menos acierto, acerca de algunas de esas cuestiones a lo largo de la historia de la humanidad.

por Andrea Morales *

No hay duda entre los historiadores y antropólogos que la astronomía es una de las ciencias más antiguas. Pueblos primitivos, con climas propicios, observaron impresionados en sus largas noches, hechos que se repetían cíclicamente como los cambios en la salida y entrada del sol, las fases de la luna, la aparición y desaparición de algunas constelaciones que a su vez tenían una gran relación con los cambios de las estaciones. Por supuesto trataron de explicarse la sucesión de los días y las noches. De esta manera contaron con muchos medios para comenzar a medir la marcha del tiempo, indispensable para su subsistencia.
Asimismo, la ubicación del recorrido aparente del sol y la posición de las estrellas, orientaron al hombre primitivo también en sus viajes.
Un difícil problema surgió cuando los primitivos científicos trataron de estimar las distancias relativas de las estrellas de una constelación, o las alteraciones en la distancia de una estrella móvil (planeta) que se acercaba a una fija, o la variación de las distancias entre la luna y las constelaciones, a través de las cuales aquélla no deja de desplazarse.
Al principio se intentaría medir dichas distancias con una cuerda, pero pronto se debió advertir que tales longitudes disminuían cuando la cuerda se acercaba a los ojos. Posteriormente habría surgido la idea de que las distancias astronómicas no eran lineales, sino angulares, la idea de ángulo fue una invención geométrica y astronómica de fundamental importancia. Se elaboraron calendarios sobre la base de la experiencia de acontecimientos meteorológicos, sobre el ciclo de la luna, sobre el ciclo del Sol. Estos calendarios pudieron ir mejorándose a medida que se repetían y perfeccionaban las observaciones.

La humanidad contó entonces con una importante acumulación de conocimientos antes de la invención de la escritura.

El pueblo egipcio

El pueblo egipcio se familiarizó con las estrellas desde la edad prehistórica. Este conocimiento se manifestó y evolucionó simultáneamente con la transformación de su sociedad agricultora en una que dominó la alfarería, los textiles y la metalurgia.

En los primeros tiempos los egipcios vivían en gens, pequeñas extensiones de tierra y, al agruparse en comunidades mayores, integraban los llamados nomos.
De ahí la palabra astronomía, que deriva de las dos palabras griegas *astron*: astro y *nomos*, relativo a la ley (que era la que establecía aquellas subdivisiones en nomos).

Eran llamados astrónomos las personas que distribuían las estrellas en grupos (constelaciones) y sometían a su observación los movimientos del sol, la luna, los planetas y otros cuerpos celestes. La minuciosa observación, efectuada con regularidad, del sol, la luna y las estrellas fue la que sirvió de principal fundamento para el desarrollo de los conocimientos astronómicos, los cuales, junto a las necesidades de la vida económica, estuvieron estrechamente ligados a los intereses prácticos de la sociedad humana.

La necesidad de calcular períodos de crecimiento de las aguas del Nilo, la necesidad de orientarse al cruzar desiertos y el mar Mediterráneo, y las relaciones comerciales, exigían que el tiempo fuese contado con regularidad y corrección. De esta manera el hombre comenzó a darse cuenta de ciertas periodicidades, y esto originó un estímulo para el desarrollo de la astronomía.

En un principio los egipcios trataron de medir el tiempo por medio de la Luna, pero descubrieron ambigüedades en el método y lo transformaron en un calendario solar.
El año fue dividido al principio en 12 meses de tres décadas cada uno, pero luego agregaron una estación de cinco días feriados.

Una estrella, Sirio, fue motivo de especial atención. Después del sol es la estrella más brillante en el cielo. Era para ellos una estrella sagrada y la llamaron Sothis. Algunos historiadores afirman que fue la base de un calendario oficial que se venía utilizando desde tiempos remotos, con un año de 365 días y 1/4, el cual tenía comienzo el primer día que Sirio se presentaba en la línea del atardecer en el horizonte. Su aparición coincidía con el comienzo del desborde anual del Nilo que, al extender el limo de sus arrastres, abona los campos y era base de su felicidad, de ahí que Sirio haya sido una estrella sagrada para el pueblo egipcio.

La capacidad astronómica de los primeros egipcios no sólo se comprueba por su calendario, las tablas de culminación y salida de las estrellas, sino también por algunos de sus instrumentos, como un ingenioso reloj de sol.

Mesopotamia

La relación de la astronomía con los pueblos de la Mesopotamia es un tanto confusa, ya que las hazañas en esta ciencia son inferiores a las logradas en Matemática , sin embargo fueron elogiados más por la primera que por la segunda.
La confusión puede radicar en que los principales descubrimientos fueron hechos por los caldeos, posteriores a los babilónicos.

Aún así, los babilonios sentaron las bases matemáticas, sin las cuales no puede haber astronomía científica, y comenzaron una larga serie de observaciones. Crearon el arte de las observaciones astronómicas. Por aquellos tiempos ya estaban familiarizados con un simple reloj de sol (gnomon) y con una especie de clepsidra.

Crearon el año babilónico de 360 días. Su calendario se fundó, sobre todo en la luna. Este calendario babilónico fue el modelo del judío, así como del griego, del romano y aún todavía influye en el calendario eclesiástico de nuestros días.

Otro aporte importante de parte de los babilonios fue la invención de la semana. Un mes lunar se subdivide en períodos más breves, las fases de la luna.
Introdujeron el concepto fundamental de la igualdad de las horas, sin el cuál los cálculos astronómicos se tornaban infructuosos.

Los astrónomos babilonios fueron los que introdujeron las 12 constelaciones del zodíaco. El motivo de este invento se debe a que las órbitas descriptas por la luna y los planetas están en una franja estrecha, llamada banda zodiacal, que contiene la eclíptica. La eclíptica es el camino que el sol, visto desde la Tierra, sigue en el mapa de las estrellas.

Era importante reconocer las estrellas próximas a la eclíptica por razones de calendario, ya que en la cuenta del tiempo, la luna y los cinco planetas visibles a simple vista, tenían un papel privilegiado.
Entonces, se consiguió agrupar en constelaciones algunas estrellas situadas a lo largo de la eclíptica. Como consecuencia nacieron los signos zodiacales (la palabra zodíaco es griega y significa círculo de los animales, ya que en la mayoría de las constela-

ciones veían animales): 12 zonas del cielo de igual amplitud, cuyo nombre venía dado por la constelación zodiacal más próxima.
Se debe tener presente que los signos, ya no coinciden con las correspondientes constelaciones en el tiempo, porque debido al fenómeno de precesión de los equinoccios[1], las constelaciones han variado su posición en la bóveda celeste, a través de los milenios transcurridos.
La principal contribución del pueblo babilonio tuvo carácter general. Fueron los fundadores de la astronomía científica ya que los admirables resultados que obtuvieron tanto los caldeos como los griegos son consecuencia de los fundamentos babilónicos.

Los griegos y el movimiento de los planetas

Desde tiempos muy antiguos se observó seguramente, que en las constelaciones zodiacales existen cinco astros que modifican constantemente su posición en el cielo, con respecto a las demás estrellas que parecen fijas. Los griegos los llamaron planetas, o sea estrellas errantes, viajeras (del verbo griego *plando*, vagar).

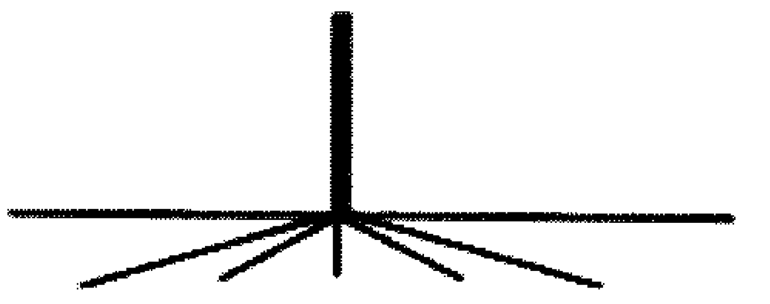
Los griegos heredaron ideas egipcias inmemoriales y un estímulo aún mayor de parte de los babilonios, pero la astronomía científica, la cual se entiende como un sistema de explicaciones racionales de los movimientos de los cuerpos celestes parte del deseo típico del pueblo griego de dar tales explicaciones.

El primer científico jonio fue Tales de Mileto, astrónomo y matemático. Tales dominaba los conocimientos babilónicos. Aprendió de los egipcios la recurrencia periódica de los eclipses. Trató de utilizar hechos para resolver problemas.

El conocido método que utilizó para medir la altura de las pirámides a partir de la longitud de su sombra y el ángulo que forman los rayos del sol con la horizontal, es utilizado hoy en día para determinar la altura de las montañas de la luna.

Otro de los sabios griegos dedicado a la astronomía fue Anaximandro (610-545 a.C.), conciudadano y compañero de Tales. Su mejor obra científica corresponde al campo de la astronomía mediante un instrumento: el gnomon, ya mencionado anteriormente.
El gnomon permitía al astrónomo determinar las longitudes del año y del día, puntos cardinales, el meridiano, el mediodía verdadero, los solsticios y los equinoccios, y la duración de las estaciones. Una gran cantidad de información podía obtenerse mediante este sencillo aparato.

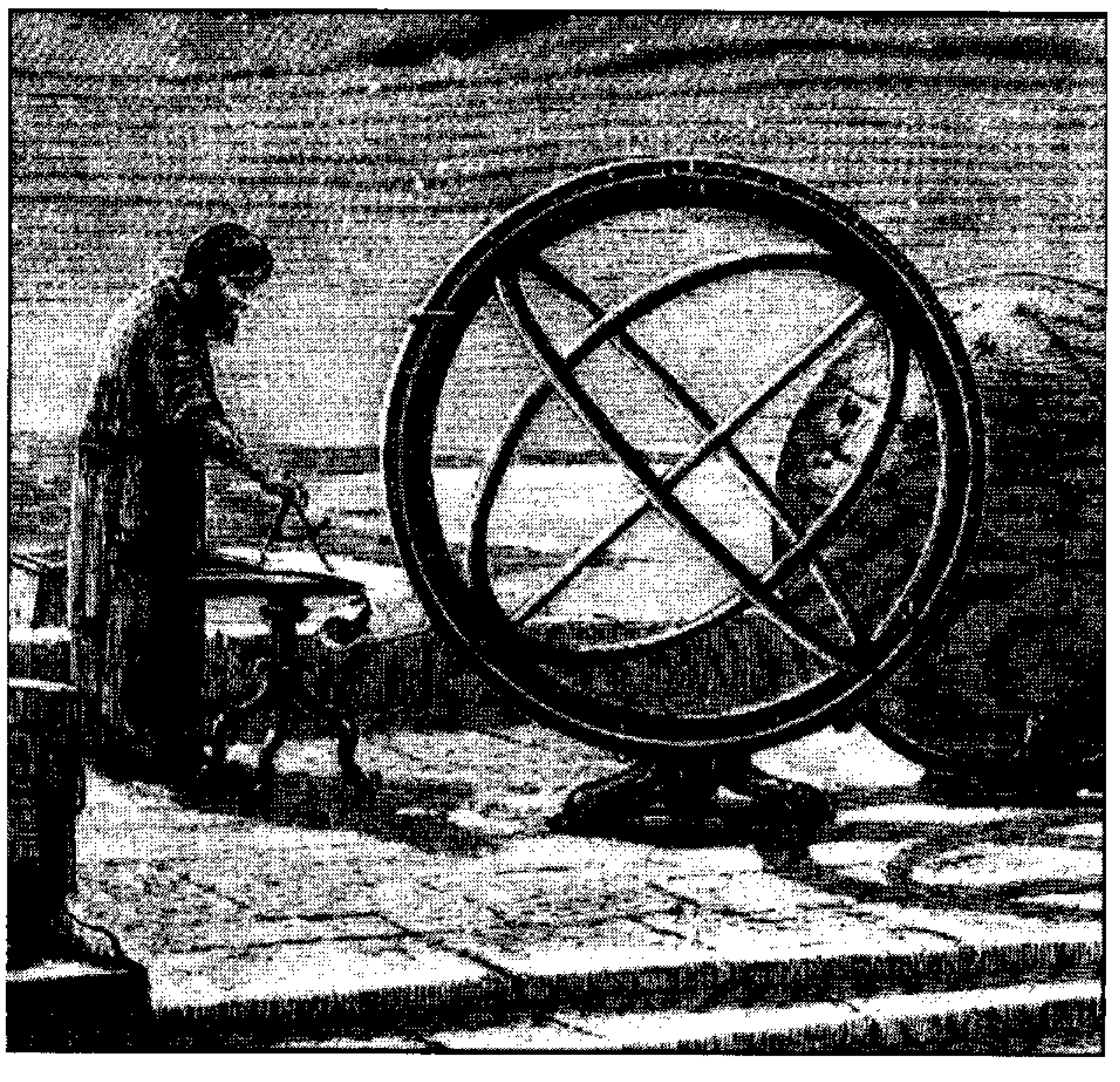
El gnomon es un dispositivo muy simple: una varilla colocada en posición vertical.
Al marcarse las líneas de sombra proyectadas sobre el piso a lo largo del día, con la mayor frecuencia posible, durante días e inclusive durante todo un año, indica claramente el mediodía (la sombra más corta), los puntos cardinales, las estaciones del año y otros datos importantes para el estudio astronómico.



Se dice que Anaximandro construyó el primer mapamundi y un globo celeste que mostraba la forma de las constelaciones.

[1]Precesión de los equinoccios: para explicar este fenómeno (decubierto por Hiparco en el siglo I a.C.) necesitamos saber qué significan los puntos equinocciales. Son los dos puntos del mapa de las estrellas donde se cruzan el ecuador y la eclíptica. El ecuador o línea equinoccial es el plano perpendicular al eje de rotación de la Tierra que pasa por el centro de ella. Durante períodos cortos, alrededor de un siglo, el eje de la Tierra apunta siempre a la misma estrella. Si comparáramos un mapa de las estrellas construido en la época de los griegos con uno actual, veríamos que el zodíaco de entonces está casi en el mismo lugar que ahora, pero que el eje de la Tierra se ha movido unos 10º aproximadamente, es decir que los puntos equinocciales ya no coinciden con los de aquella época. A ese cambio de dirección del eje se lo llama precesión de los equinoccios.

En el siglo VI a.C. Pítágoras postuló la hipótesis de que la Tierra no era plana, sino esférica. El dogma de la perfección esférica y sus consecuencias cosmológicas, pueden considerarse el núcleo de la ciencia pitagórica primitiva.
Los babilonios describieron con cierta precisión el movimiento de los planetas mediante tablas, pero Pitágoras, no se satisfizo con descripciones, pretendió explicar, justificar los fenómenos.
Un paso importante en la doctrina pitagórica fue el hecho de entender que los planetas no podían ser "errantes", sino que debían tener movimientos circulares y uniformes propios.



Aristóteles atribuye un significado religioso al concepto de Universo. Aseguraba que la Tierra se encontraba en el centro de esferas concéntricas de cristal sobre las cuales estaban situados los planetas. En el exterior se encontraba la esfera de las estrellas fijas, perfecta e inmutable.
En aquella época, los asteroides y los planetas Urano, Neptuno y Plutón eran desconocidos, ya que su luz es demasiado débil para poderlos ver a simple vista.
Un pensador griego que estudió exhaustivamente los planetas fue Hiparco, que vivió entre los años 190 y 120 a.C.. Fue un verdadero astrónomo ya que observaba personalmente de manera detallada y luego intentaba sacar conclusiones de tales informaciones. Inventó la escala de magnitudes estelares todavía utilizada hoy, compiló el primer catálogo de estrellas, que tiempo después reemprendió Tolomeo. Descubrió el fenómeno de la precesión. Midió las posiciones de los planetas utilizando círculos graduados a 360º, sistema inventado por los babilonios. Fue el primero en afirmar que la distancia al sol es del orden de los millones de kilómetros, y midió la distancia a la luna con un error de sólo el 11%.
Claudio Tolomeo (127-145 d.C.) fue quien propuso un nuevo sistema geocéntrico, que a diferencia del propuesto por Aristóteles, superaba los problemas de los movimientos retrógrados de algunos planetas. Postuló que cada planeta se movía a lo largo de un breve recorrido circular mientras efectuaba la revolución alrededor de la Tierra.
La disposición exacta de estos círculos provocó largas discusiones durante siglos.

Durante unos 800 años los centros del saber estuvieron en Oriente. Textos griegos fueron traducidos al árabe y astrónomos orientales prosiguieron el estudio de la astronomía durante la oscuridad europea.

Después de los siglos de oscuridad....

En el siglo XV Niklas Koppernigk (1473-1543), conocido como Nicolás Copérnico, miembro del clero polaco, se dedicó a analizar los errores del sistema de Tolomeo. Propuso que la Tierra debía considerarse como un planeta más y que todos ellos giraban alrededor del sol describiendo órbitas circulares. Para su época concibió una teoría realmente audaz, ya la Tierra no se encontraba en el centro del universo, sino el Sol.

Todas las obras escritas por Copérnico fueron condenadas por la iglesia católica en el año 1616.
A finales del siglo XVII, Tycho Brahe desarrolló un modelo que superaba las objeciones por parte de la iglesia en contra del modelo heliocéntrico. Propuso entonces un sistema de movimientos de los planetas, un tanto complicado, en el cual todos los planetas excepto la Tierra, giraban alrededor

del sol, el que a su vez orbitaba alrededor de la Tierra. Además, la habilidad que adquirió Brahe para medir la posición de las estrellas en la bóveda celeste fue insuperable, y gracias a la observación de la supernova de 1572, demostró el continuo cambio de la posición de las estrellas, lo cual explicaba que la esfera sobre la que se encontraban las estrellas no era inmutable en el tiempo.
Tycho Brahe murió antes de poder probar su teoría, dejando las mediciones precisas que efectuó, a su discípulo Johanes Kepler (1571-1630).
Kepler interpretó estos datos de una manera más clara. Afirmó que los planetas se mueven alrededor del sol según órbitas elípticas. Estas órbitas calculadas por Kepler explicaban de una manera perfecta los movimientos de los planetas. También supo interpretar que los planetas se desplazan por sus órbitas a velocidades diferentes: cuanto más cerca están del sol, mayor es la velocidad con que giran a su alrededor.
Recién en 1610 se pudo demostrar esta nueva teoría gracias al empleo del anteojo de Galileo en la primera mitad del siglo XVII. Con este novedoso instrumento para observar el cielo, Galileo descubrió la existencia de manchas solares, cuya posición cambiaba con el tiempo y supuso que también el Sol giraba sobre sí mismo. Observó los cuatro satélites principales de Júpiter y estableció las fases de Venus dentro de otros tantos descubrimientos que hicieron evolucionar de manera vertiginosa esta ciencia.

El físico inglés Isaac Newton, en el siglo XVIII, dio a conocer su Ley de Gravitación Universal, afirmó que todo objeto de la Tierra cae al suelo atraído por ésta y que existe una atracción mutua entre los cuerpos celestes, pero se mantienen dentro de sus respectivas órbitas debido a la enorme velocidad con que se mueven.
Pero tal vez su aporte más importante radica en el hecho que junto con Galileo fueron los que dieron a la astronomía rigurosidad en las investigaciones matemáticas y observacionales, concentrando la atención en el aspecto físico de los cuerpos celestes.

A partir de aquí, la astronomía, que anteriormente se había ocupado principalmente de las posiciones de los cuerpos celestes, se convierte en una ciencia física que busca las causas de los movimientos visibles en el cielo e investiga la constitución y la naturaleza de los cuerpos que habitan el espacio.
Aquí comienza la astronomía moderna, cuyos principales hallazgos profundizaremos en los siguientes artículos dedicados a esta sección.
A continuación, unas palabras de Albert Einstein, que rescató la publicación Universo en agosto del 2000:

Alocución a los niños

"Pensad que las cosas maravillosas que podéis aprender en vuestras escuelas son la obra de muchas generaciones de todos los países de la Tierra, creada gracias a una tendencia inspirada y a costa de grandes fatigas. Todo ello se coloca en vuestras manos como vuestra herencia, para que la recibáis, la honréis, la sigáis formando y la leguéis fielmente a vuestros hijos. De esta manera, nosotros, los mortales, nos transformamos en inmortales por medio de aquello que creamos en común de las obras que perduran".

* Profesora de Matemáticas y Astronomía egresada del I.S.P. "Dr. Joaquín V. González"

Bibliografía:

- SARTON George, Historia de la Ciencia, Cambridge, 1952.
- S.A., El Universo, enciclopedia de la Astronomía y el espacio, Barcelona, 1997.
- BABINI José, El saber en la historia, Centro Editor América Latina.
- SAGAN Carl, Cosmos, Barcelona, Planeta, 1980.

Comentarios de textos

por Jorge Martínez *

El tío Petros y la conjetura de Goldbach
Apóstolos Dioxadis - Ediciones Barcelona, 2000
166 páginas

Densa novela en la cual el sobrino de Petros Papachristos narra las peripecias de su tío, un solitario matemático obsesionado por la conjetura de Goldbach (todo entero par mayor que 2 es suma de dos números primos). El misterioso tío es rechazado por su familia, que lo califica de "fracasado".
Pero, el tío tiene un pasado: niño prodigio, catedrático de Análisis en la Universidad de Munich, investigador en ecuaciones diferenciales y promesa de genio maduro.
Un viaje a Inglaterra marca el comienzo de su obsesión, pues es allí donde comienza a ocuparse del problema de Goldbach. Sus contactos personales con Hardy y el genial Ramanujan lo empujan definitivamente a abandonar todo y dedicarse a la Teoría de Números. Detrás de la puerta abierta espera el sacrificio y el fracaso, aunque también el éxito, si se miran las cosas con el particular prisma con el cual Petros ve la vida.
Su sobrino develará los misterios de Petros, a través de una complicada relación personal basada en la terna amor-odio-enigma, que es a veces lacerante para el joven pues su tío no le reconoce dotes matemáticas, a pesar de su indudable genio.
Los diálogos son memorables, tomando a veces el carácter de verdaderas clases magistrales con debate posterior y la novela resultará apasionante para personas versadas en Matemática, pues esta ciencia es la verdadera protagonista de la novela.
A los profanos podría parecerles que los diálogos son crípticos y demasiado técnicos, pero la Matemática del número brilla con todo su esplendor en ellos, y por ello vale la pena meterse en este mundo vibrante de ficción didáctica que propone Dioxadis.◣

Beppo Levi. Italia y Argentina en la vida de un matemático.
Laura Levi - Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2000
94 páginas

Beppo Levi, nació en Turín (Italia) en 1875, en el seno de una familia judeoitaliana. Se doctoró en matemática en el año 1896 y en sus estudios tuvo la posibilidad de formarse con eximios profesores como Segre, Peano y Volterra.
Levi ejerció la enseñanza secundaria en varias regiones de Italia hasta 1906, año en el que gana por concurso la cátedra de Geometría Proyectiva y Descriptiva en la Universidad de Cagliari (Cerdeña). Allí es donde comienza su larga carrera como investigador, continuando en Universidades como Parma y Bologna, alternando docencia e investigación hasta 1938, fecha en que abandona su cargo debido a la promulgación de las leyes raciales en Italia. En 1939 se traslada a Argentina, a la edad de 64 años, donde un año después asume como director del recién fundado Instituto de Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. Luego de 20 años de fecunda actividad en la Argentina, el notable matemático muere en Rosario en 1961.
Así como en el "Abbaco" de 1922, Levi reveló su preocupación por la enseñanza de la matemática elemental; en "Leyendo a Euclides" resulta evidente su vocación epistemológica, así como también una profunda formación matemática y filosófica.
En este libro Laura Levi, su hija, alterna en forma amena aspectos de la vida y obra de su padre, detallando su evolución matemática y los datos biográficos más relevantes.
En síntesis, un admirable matemático es visto por su hija a través de un cálido recuerdo, en tres facetas complementarias: como hombre, docente e investigador.◣

* Profesor de Matemática, egresado del I.E.S.Nº2 "Mariano Acosta"

Laerteius de Pérgamo

por Claudio Salpeter

No es poco decir que ciertos fragmentos de la car comida obra de Laerteius de Pérgamo han sido arrancados, literalmente hablando, de las ardientes manos cristianas y musulmanas.

Sin duda, el caprichoso destino ha querido que unas pocas líneas –cuyo valor el historiador ya ha comenzado a intuir– puedan ser contempladas, analizadas y hasta criticadas del mismo modo, aunque con menor crudeza, que los paradigmáticos diálogos del filósofo idealista o las aventuras geométricas del creador de los *Elementos*.

Del *Comentario* de Proclo podemos inferir que Laerteius nació en Pérgamo aproximadamente en el año 243 a.C. y murió sesenta y tres años más tarde. El dato no es seguro, incluso Proclo duda: *"...por lo que Laerteius habría vivido igual tiempo que su conciudadano Tercetes: sesenta y tres años"*. Nada más nos dice Proclo de Tercetes.

Es absolutamente probable que Laerteius haya estudiado en Alejandría. Sin duda conoció tanto a Arquímedes como a Apolonio. Sin embargo, aquellos dos colosos nunca lo mencionan. Es posible que este desprecio de los dos maestros haya impulsado a Laerteius a emigrar a Corinto, donde residió hasta su muerte.

Se conservan de Laerteius unos cuantos tratados sobre geometría plana, estereometría y aritmética (teoría de números), muchos de ellos a medio terminar. Una de aquellas obras nos resulta hoy estimable; el resto, no hubiera deshonrado las llamas.

Se trata pues del tratado *Sobre las lúnulas.* El libro en cuestión nos ha llegado en forma incompleta.

Según Proclo (y de acuerdo con Eudemo) Hipócrates de Quíos fue el primer hombre que consiguió cuadrar una lúnula; posiblemente, buscando la cuadratura del círculo, cuestión –como se sabe– de absoluta imposibilidad pese a los esfuerzos proclamados de innumerables profanos. Hipócrates sólo cuadró tres; las dos restantes estuvieron a cargo de J. Wallen (en 1776) y Clausen (en 1840). En total, sólo cinco son las lúnulas cuadrables. Laerteius pretendió cuadrar dieciocho.

Sus demostraciones son tan ingeniosas como incorrectas. En una de ellas, "cuadra" la lúnula formada por un arco de circunferencia y un arco de semicircunferencia, de diámetro igual a una de las bases de un pentágono inscripto en la primera circunferencia. Pero además, Laerteius exige que la suma de los cuadrados de tres de los cinco lados del pentágono sea igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. Cierto aprecio –y piedad– al improbable lector de estas páginas, me impide esbozar aquí alguna explicación de esta cuadratura. W. Bretschneider ha detectado en esa demostración cuanto menos siete errores, agregando que *"dos de ellos los hubiera evitado fácilmente un colegial de nueve años"*. El consabido humor de Bretschneider perdona su acto irónico pero no redime al hombre de Pérgamo.

Las demostraciones de Laerteius son por momentos exasperantes. En ocasiones, vuelve a probar de idéntica manera algo demostrado dos líneas más arriba. Otras veces finaliza su deducción con un resultado opuesto al enunciado en la tesis. Añade hipótesis no contempladas en un principio pero que le son de utilidad para una determinada implicación. Abundan los *"...como ya demostró...., en su libro..."*, demostraciones y textos que, las más de las veces, sólo figuran en su fértil imaginación.

He de confesar mi perplejidad ante el hallazgo de estas demostraciones diabólicas. Páginas enteras de argumentos falaces. Algunas figuras toscamente perpetradas; otras, producidas con extrema precisión. Me sorprendió, en las primeras lecturas, la ausencia total de un método, no ya en el sentido del palimpsesto de Arquímedes, sino en la exposición misma. No se distingue organización alguna en los escritos matemáticos de Laerteius. Sus pensamientos parecen surgir en un orden (o desorden) diferente al común de los humanos. Como argumenta poéticamente Bretschneider: *"giran ideas, danzan las palabras, ríen los esquemas; no se entiende nada"*.

En ese despiadado regadío de elucubraciones, en ese desparpajo de letras griegas, percibo, sin embargo, un orden. En el caos de su ciencia hay unidad. Su eje central (me atrevo a intuirlo) es el hallazgo de la respuesta a una pregunta aún no formulada. Sabe que encontrando la primera, la segunda sería retórica. Su espacio lo colman el número, la forma y el pensamiento.

W. Bretschneider –que sólo conoce del griego su matemática– concluye no sin provocación: *"Hoy, Laerteius adornaría las vitrinas de algún nosocomio"*.

Dejemos que Bretschneider ría. Por mi parte, prefiero explorar otras campiñas.

Más de un comentador de la obra de Laerteius ha elogiado (tal vez, para condenarlo) su dispar pensamiento filosófico. Otros han reprochado (para alabarlo) su absoluta nulidad en esta materia. Hay quien prefiere negar ambas posturas -Ernst Szgarbó, si la memoria no me traiciona-, y postular la coexistencia simultánea de ambas. En cierto período de su vida siguió al cinismo de Antístenes, aunque a la manera eremítica de Diógenes. Se destacan de esta época sus rigurosos votos de silencio y de promiscuidad. Ya instalado en Corinto, en plena labor científica, pocos niegan su inclinación a las escépticas ideas emergidas de la Escuela de Pirrón.

Larry Stalman, peligrosamente, simplifica la cuestión admitiendo que en las quizá vagas palabras de Laerteius *"...no hay violencia en el alma del animal..."* existe un claro sostén pitagórico (pitagorismo tardío si se quiere) así como también un notable anticipo del *ahimsa*. Conclusión insostenible a mi entender (opinión que comparte, con cautela, Richard O'Hunter en su laborioso libro ascético *The mind of a little god*, Oxford, Lowerly, 1983, págs.163-169). Tal vez, deba explicar mi desacuerdo. En esta amalgama de escuelas filosóficas atribuidas a Laerteius existe un elemento común no mencionado hasta aquí: su epicureísmo. En una de sus obras perdidas, *Adiaphoria*, Laerteius se aproxima al filósofo del jardín, en su aversión a toda idea de origen supersticioso: *"...no es adivinando como encontraremos a los dioses..."* (rescato estos pormenores gracias al desvelo del conocido y olvidado historiador musulmán del siglo XIII, Abuin Ben Faharid, quien elaboró un ínfimo aunque orientador sumario de la obra de aquél; compendio también perdido pero leído antes y comentado más tarde por la pluma tenaz de Sviranja Anguttara Mahamudra, de quien afortunadamente conservamos, casi intacto, su manuscrito). Hoy adivinamos en *Pensamientos vanos*, la única obra filosófica que nos ha llegado (aunque incompleta) del matemático de Pérgamo, no pocos ejemplos de su inquietud frente a los *"...que creen en las fantásticas ideas pitagóricas y en las inverosímiles creaciones de Platón..."*. Laerteius descree de todo tipo de superstición pero, como Epicuro, lejos estaba de ser antirreligioso. Creía, mas no explicaba, en la inconmensurabilidad de los dioses, y descreía (y sonreía) de los habituales atributos humanos que el vulgo (y muchos otros) les atribuía. En un oscuro parágrafo sostiene que *"...ellos* [los dioses] *nos observan, sin intervenir, sumidos en la intrincada disposición de infinitos desvelos..."*. Hay aquí, de paso, una raíz combinatoria cuya solución parece haber perseguido Laerteius. Lejos de comprender acabadamente el significado de aquellas palabras, me aventuro a decir que la disposición de infinitos desvelos resultaría, en número, infinita y, como consecuencia lógica, de imposible interpretación humana. Los desvelos han de ser, para Laerteius, todas las posibles configuraciones del Universo.

Por otra parte, y como último argumento a la desproporción de los dichos de Stalman, adjudicarle a Laerteius algún anticipo del *ahimsa* implicaría ignorar por completo sus, no refutadas hasta hoy, desavenencias violentas con Apolonio y sus discípulos, en sus primeros años en Pérgamo; más tarde, sus consabidas manifestaciones en Corinto (negándose a pagar ciertos impuestos injuriosos y en las que no desestimó insultos, sarcasmos o pedradas), refutarían de manera definitiva al crítico inglés.

Puede preguntarse el lector de estos caóticos datos, hasta qué punto merece la pena indagarse el pensamiento desordenado de Laerteius. Resalto primeramente la anárquica influencia (no siempre feliz) que han tenido sus especulaciones en sus creaciones matemáticas. Baste ver sus demostraciones enfermizas ya comentadas y su invención de un sistema de numeración en base 35 (que nunca utilizó). Por otra parte, no es menos cierto que su figura representa un símbolo. Como ya fuera alguna vez esbozado, Laerteius es su matemática, su pensamiento, su época; pero también es Grecia, las épocas, el Hombre. El individuo –único e inimitable– lleva impregnado en su ser la aterradora historia del cosmos.

Es costumbre del pueblo griego –y de toda civilización que honre a sus hombres y olvide sus obras– adornar con leyendas (no todas verdaderas) y anécdotas, la figura de sus pensadores; Laerteius no es la excepción. Tal vez la más famosa (y la única que mencionaré) sea aquella ocasión en que uno de sus discípulos (a todas luces Histiorocles) inquirió al maestro: *"¿la eternidad del alma ha de tornar a ésta, inmutable en el espacio y en el tiempo?"*. La respuesta de Laerteius –tajante, ancestral, lacónica– incita a la reflexión: *"No sé"*. No pocos han visto en esta declaración ciertas reminiscencias socráticas. Otros, una estructura primitiva de la duda cartesiana.

Sabemos que Laerteius buscó discípulos. Sabemos que sólo uno entendió sus ideas. Sabemos que éste fue Histiorocles (quien escribiera una *Vida de Laerteius*, irremediablemente perdida). Conjeturo que el maestro despreció al alumno. Tres veces menciona Laerteius a su discípulo en sus escritos (al menos, en aquellos que han llegado a nuestras manos). En una carta dirigida a Eutorión y que ha servido de preámbulo (conservado milagrosamente) a su extraviada obra *Sobre curvas, líneas y líneas curvas*, Laerteius se lamenta de la falta de rigurosidad matemática de su discípulo: *"...y ya conoces la constante ansiedad de Histiorocles, y cómo ésta lo ha llevado a hacer algunas afirmaciones sin antes haberlas demostrado..."*. ¿Por qué Laerteius no se molesta en aclarar a qué *afirmaciones* se refiere? ¿El discípulo supera al maestro? Histiorocles ha de ser posiblemente un joven talentoso, con la comprensible (y esperable) ansiedad que otorgan los años mozos. Su sed de conocimiento y su indudable capacidad son percibidos por Laerteius tempranamente. El anciano comienza a menospreciar al mancebo.

En *Pensamientos vanos*, Laerteius ultraja a su alumno: *"...pero entonces pude comprobar, azorado, la inmutabilidad de aquella sustancia primitiva que perdura en el tiempo de igual modo que la distraída mirada del niño descansa en la súbita penumbra de un mañana irrecuperable. Histiorocles no entiende esta analogía ¿He de hacerla más comprensible a su ingenio y privar, de esta manera, a muchos otros, del deleite de tan bello símil?..."*. No cabe duda que para esta época la relación entre ambos, alumno y maestro, se ha tornado irreconciliable. Laerteius cuenta, al menos, con el poder de las letras; Histiorocles, sólo posee un resignado mutismo.

Y casi al final de la misma obra Laerteius vuelca todo el bagaje de su desaire en estas oprobiosas palabras, resumiendo en ellas (o mejor dicho, dando a entender con ellas) su definitivo distanciamiento del joven discípulo: *"...una y mil veces se lo he repetido: al principio con suma delicadeza, al final, con dolor y severidad. Ni siquiera así comprendió"*. Destaquemos que en este pasaje Laerteius no menciona a Histiorocles, pero es claro que la omisión enfatiza su crudeza.

Ernst Szgarbó propone una solución para descubrir el motivo del desprecio: *"Histiorocles podría ser un hijo bastardo de Laerteius. El primero no reconoce al segundo como su progenitor. Éste, desairado en lo más profundo de su corazón, intenta desacreditarlo. Posiblemente lo haya conseguido. Hoy, ya nadie recuerda a Histiorocles"*. La propuesta de Szgarbó no convence. A mi pregunta: "¿Por qué Histiorocles no reconocería a Laerteius como su padre?", el filólogo rumano presenta el silencio como única respuesta. Larry Stalman –¿cuándo no?– sostiene con poca fortuna que *"Histiorocles fue, sin duda, un pésimo estudiante"*. No me tomaré el trabajo de refutar su agotadora trivialidad.

Lejos de opacar la trayectoria, la fama y el talento (no siempre reconocido) de Laerteius, el dilema con Histiorocles ha de mostrar un elemento común en demasiados científicos y pensadores: el temor (o la envidia, o ambos) hacia sus sucesores, justificable hasta cierto punto. Pero resolver el conflicto presentando esta conclusión significaría optar –a la manera de Stalman– por el camino más sencillo; quizá un buen camino.

Hay otra explicación menos simple e indulgente pero más hermosa. Y entre lo bueno y lo bello, elijo lo bello. Como dijera un gran dublinés: "lo bueno puede no ser bello; lo bello siempre es bueno". Histiorocles ha percibido en su maestro el infinito dolor del hombre no reconocido. Ha presenciado (o le han contado) la incansable búsqueda de una verdad que compensara su precaria y casi anónima existencia. Tal vez, lo ha visto sollozar. Decidió compartir la desdicha. Laerteius, al principio, vio en Histiorocles un adversario. Luego, sobrevino en él la habitual desconfianza. Por último, adivinó el acto piadoso, inaceptable. Amó a su discípulo, y por ello, por amor, lo despreció.[1]

He adivinado en la obra de Laerteius al individuo en su constante y eterna contradicción. He elaborado alguna conjetura; nada he demostrado. Me ha sido vedado penetrar en su creación matemática. Creo justificar y entender al filósofo. No sé si he comprendido al hombre.

La trágica muerte de Laerteius ha motivado, tal vez, estas notas. A sus sesenta y tres años, Laerteius de Pérgamo fue descubierto apuñalado entre el rocío de un fresco y frondoso bosque de Corinto. Su asesino y exégeta, Histiorocles, lo lloró amargamente.

[1] *He leído que un pensador alemán ha conjeturado que Histiorocles nunca existió o, más apropiadamente, que Histiorocles fue el mismo Laerteius. No creo en esta explicación; ni siquiera me complace. Podría replicarse, por ejemplo, un argumento simétrico con el mismo efecto intrascendente.*

Problemas y juegos de ingenio

En esta sección, como es habitual en Aχioma, proponemos algunos problemas y los invitamos a enviar sus soluciones o a compartir con los lectores otros problemas que deseen aportar. Atentos a que la historia de la ciencia y de la matemática se fue escribiendo con aportes de distintas mentes, recalcamos lo valorables que pueden llegar a ser los intentos incompletos o resultados parciales que también quieran compartir.

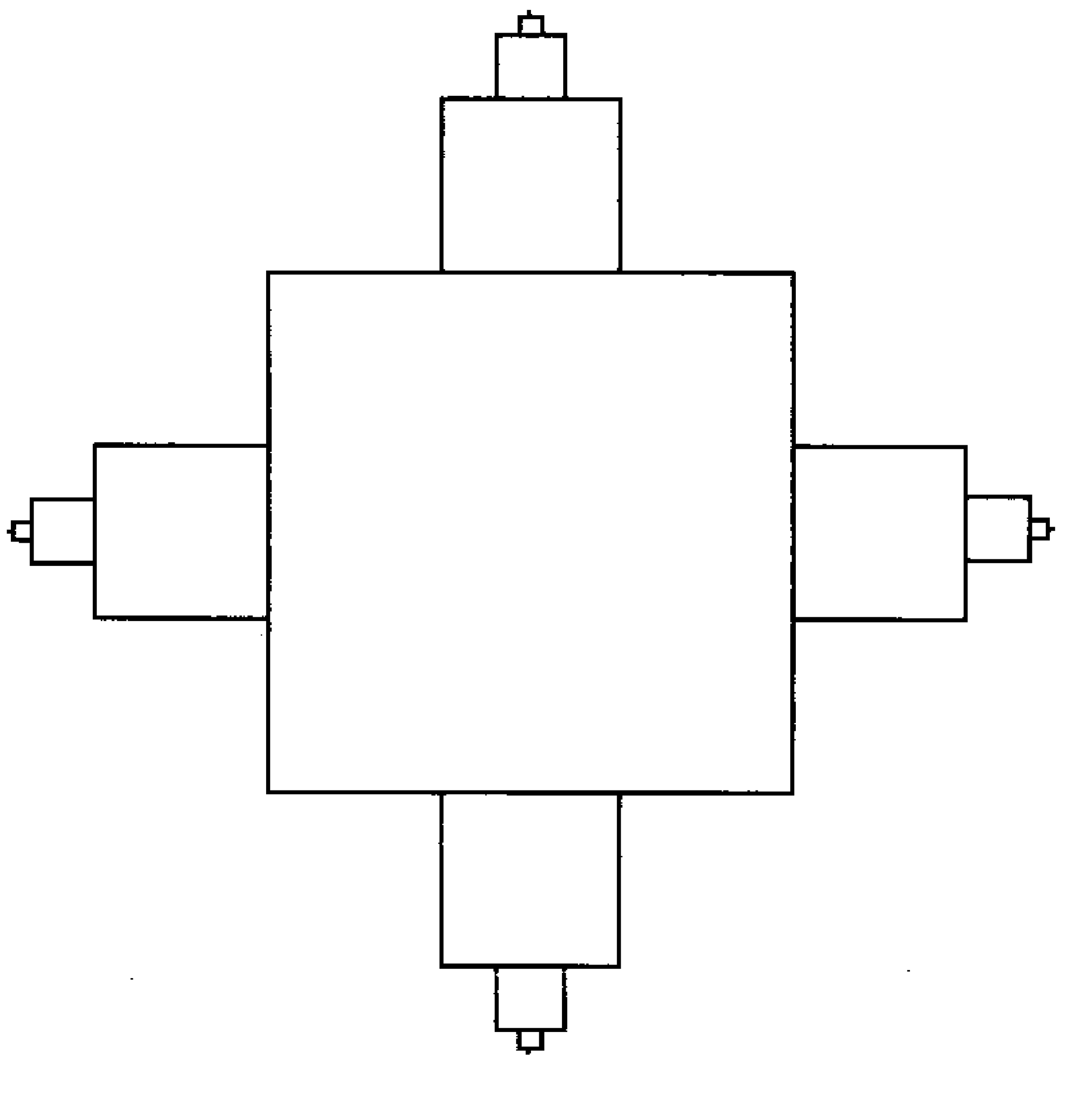
1. *Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro:*
La profesora de Alfredo y Bernardo les ha pedido que calculen ln(arctg x) – ln(arctg y), para ciertos valores de “x” e “y” ($x > y > 0$). Ambos alumnos efectuaron el cálculo usando una calculadora científica. Alfredo trabajó (correctamente) con la calculadora en modo RAD, pero Bernardo usó la calculadora en modo DEG. Sin embargo, ambos obtuvieron el mismo resultado *¿por qué?*

2. *Extraído de “La probabilidad y sus aplicaciones” – SANTALO, L. – Buenos Aires, Ibero-Americana, 1955.*
Calcule la probabilidad de que dos números enteros dados al azar sean primos entre sí. (Se aceptan aproximaciones)

3. *Extraído de “Cómo plantear y resolver problemas” – POLYA, G. – México D.F., Trillas, 1965.*
En un tetraedro cualquiera, dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son ortogonales. Además, cada una de esas aristas es perpendicular a la línea, de longitud b, que une sus puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b.

4. *Extraído de “Aritmética Elemental en la formación matemática” – GENTILE, E. – Buenos Aires, Olimpíada Matemática Argentina, 1992.*
Probar que hay un único primo p tal que 2p + 1 es un cubo.

5. *Colaboración del Lic. Gustavo Piñeiro*
Consideremos la siguiente figura: tomamos un cuadrado unitario, dividimos cada uno de sus lados en tres partes iguales y sobre cada tercio central dibujamos un cuadrado de lado 1/3. Repetimos la operación sobre cada uno de los lados “exteriores” de estos cuatro cuadrados más pequeños: dividimos el lado en tres partes iguales y sobre el tercio central dibujamos un cuadrado de lado 1/9. Repetimos esta construcción *ad infinitum* obteniendo como resultado una figura de aspecto similar a la siguiente:



Hallar el área total de la figura.
Hallar el perímetro total de la figura.
Hallar el área del menor cuadrado que es capaz de contener a la totalidad de la figura.

¡¡Hasta el próximo número!!

Aχioma

La Revista de los profesores y estudiantes de Matemática

Adelantos Aχioma 14

Apuntes sobre... Combinatoria (2º parte)

Astronomía: Instrumentos Astronómicos

Etnomatemática – Bill Barton en Argentina

Historia: Plimpton 322.

Comentarios de Textos.

Invitamos a nuestros lectores -los de siempre y los que vendrán- a hacernos llegar sus críticas, sus sugerencias, su parecer con respecto a esta nueva etapa de Aχioma, y todas aquellas cosas que considere de valor o de interés para la revista.
Sepa el amigable lector que recibir su correspondencia genera en cada uno de nosotros un renovado estímulo. Tanto la aprobación -que nos afirma en nuestro camino- como la dura crítica -que nos invita a mejorar constantemente- constituyen un alimento inapreciable para nuestra labor.
El lector puede contactarse con nosotros a través de nuestro correo electrónico o postal.