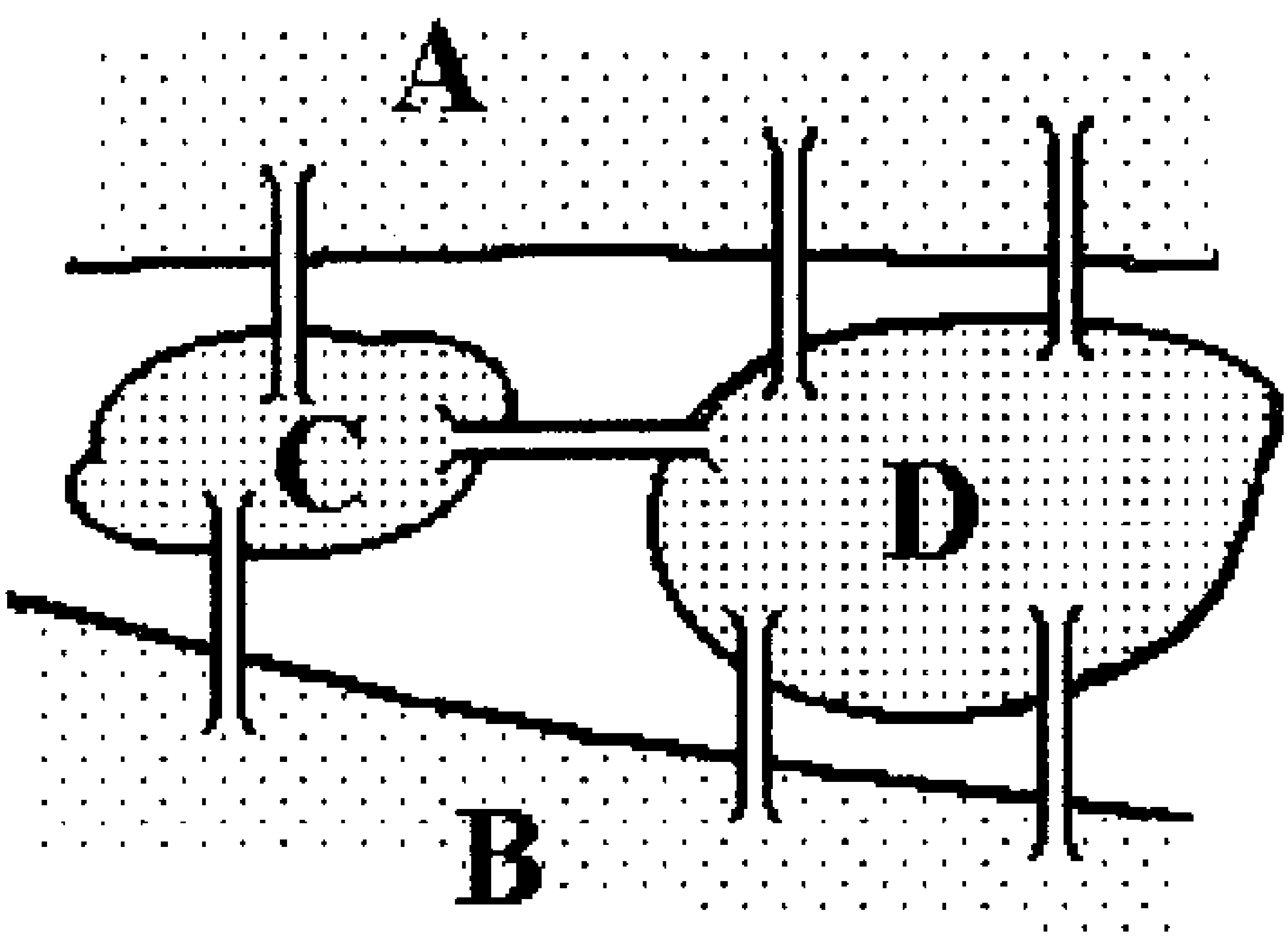
Aχioma

La revista de los estudiantes del Profesorado de Matemática Dr. Joaquín V. González



CURIOSIDADES MATEMATICAS:
Los puentes sobre el río Pregel
(Página 15)

Julio/ Agosto de 1996 **Año 1 - N° 2**

Aχioma Nº 2

Aχioma es una publicación bimestral dirigida a estudiantes y profesores de matemática.

Staff y colaboradores

Daniela Bottala
Raquel Kalizsky
Andrea Morales
Gustavo Piñeiro
Claudio Salpeter
Gisela Serrano de Piñeiro

Dirección postal

Sucursal 2 B
Casilla de Correo 72
(1402) Capital.

Impresa en:
El Apunte - Junín 979 - Bs. As.

Sumario:

Editorial

Con mucho optimismo hemos trabajado en la redacción del número dos de Aχioma.

Pese a nuestro escaso tiempo, excusa apropiada para esta ocasión, ha sido nuestro deseo mantener e intentar mejorar la calidad de la revista.

Las investigaciones que llevamos a cabo en la elaboración de algunas notas, aunque precarias, han resultado para nosotros de un valor inestimable. No sólo por los "tesoros" descubiertos en algunos libros sino también porque nos han permitido divisar el vasto campo del proceso histórico matemático, cuya fertilidad incita y clama a profesores y alumnos a recorrer su morada.

Las cartas recibidas nos han emocionado de tal manera, que ya no podríamos permitirnos no continuar en esta empresa.

Es posible que no hallemos las palabras convenientes para expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que nos han acercado sus sugerencias, críticas, artículos, o sus palabras de aliento; sin ellas, nuestra tarea hubiese resultado mucho más difícil.

Por último, queremos agradecer muy especialmente al profesor Jorge Martínez quien, además de aportarnos gran material para nuestro trabajo, nos da la oportunidad de recibir las enseñanzas que, con gran pasión, vuelca a diario, tanto dentro como fuera del aula.

Julio/Agosto de 1996

Año 1 - Nº 2

Congruencias, Criterios de Divisibilidad y el Teorema de Fermat

En la presente sección trataremos, a lo largo de varias notas, temas que nos atraen por su importancia y por su riqueza. Hoy continuaremos con la segunda parte de Congruencias, iniciado en Aχioma Nº 1.

En la primera nota de esta serie hemos estudiado ya dos importantes propiedades de las congruencias. La **Propiedad 1**, recordemos, dice que $a \equiv a\,(m)$ para cualesquiera a y m números enteros. Y la **Propiedad 2** asegura que si $a \equiv b\,(m)$ entonces $b \equiv a\,(m)$.

Antes de enunciar la tercera de las propiedades nótese que $27 \equiv 15\,(4)$ (pues 27-15 es múltiplo de 4); y que del mismo modo $15 \equiv 3\,(4)$ (ya que 15-3 también es múltiplo de 4).

¿Hay alguna relación entre los números 27 y 3? La respuesta es que sí, ya que $27 \equiv 3\,(4)$. Como generalización de este ejemplo tenemos la siguiente:

> **Propiedad 3:**
>
> Si $a \equiv b\,(m)$ y $b \equiv c\,(m)$ entonces $a \equiv c\,(m)$.

Las **Propiedades 1, 2 y 3**, dicen que la congruencia es una relación de equivalencia.

Observemos que, según nuestra definición, un número a es congruente a 0 módulo m si y sólo si a-0 (o sea a) es múltiplo de m. Tenemos así:

> **Propiedad 4:**
>
> Si a es entero, $a \equiv 0\,(m)$ si y sólo si a es múltiplo de m. **Más aún,** r es el resto al dividir a por m si y sólo si $a \equiv r\,(m)$ y $0 \leq r < m$.

Si retomamos los ejemplos anteriores, como $27 \equiv 15\,(4)$ y $15 \equiv 3\,(4)$ entonces la **Propiedad 3** nos dice que $27 \equiv 3\,(4)$. Por la **Propiedad 4** concluimos que 3 es el resto al dividir 27 por 4. Esta última conclusión podía obtenerse inmediatamente efectuando la división de 27 por 4. Veremos en breve algunos ejemplos más interesantes de aplicación de estas propiedades.

Observemos que $19 \equiv 7\,(3)$ y que $8 \equiv 5\,(3)$. Notemos también que $19+8 \equiv 7+5\,(3)$ y que $19.8 \equiv 7.5\,(3)$. En general, tenemos la siguiente:

> **Propiedad 5:**
>
> Si $a \equiv b\,(m)$ y $c \equiv d\,(m)$ entonces $a+c \equiv b+d\,(m)$ y también $a.c \equiv b.d\,(m)$.

Proponemos al lector como ejercicio que demuestre las **Propiedades 3, 4 y 5**. Como consecuencia de esta última propiedad, tenemos además que si $a \equiv b\,(m)$ entonces para todo n natural vale que $a^n \equiv b^n\,(m)$.

La conslusión importante que se deduce de las **Propiedades 1 a 5** es que, a los efectos de las operaciones "enteras" (suma, resta, producto y potenciación), es posible operar con la congruencia módulo m del mismo modo que con la igualdad. Además, en cualquier momento del cálculo es posible reemplazar un número a por un número b si $a \equiv b\,(m)$.

Apliquemos estas reglas de cálculo para hallar el resto de la división de 23^{61} por 4. Como el resto al dividir 23 por 4 es igual a 3; entonces (por la **Propiedad 4**) $23 \equiv 3\,(4)$ y además (**Propiedad 5**) $\boxed{23^{61} \equiv 3^{61}\,(4)}$. Pero calcular 3^{61} es todavía difícil. Sin embargo $3 \equiv -1\,(4)$ y entonces vale $\boxed{3^{61} \equiv (-1)^{61}\,(4)}$;

y siendo $\boxed{(-1)^{61} = -1}$ se deduce que $\boxed{23^{61} \equiv -1\,(4)}$. Finalmente, como $-1 \equiv 3\,(4)$ se sigue que $23^{61} \equiv 3\,(4)$. Encontramos así que el resto al dividir 23^{61} por 4 es 3.

El cálculo completo puede escribirse así:

$$23^{61} \equiv 3^{61} \equiv (-1)^{61} \equiv \\ \equiv -1 \equiv 3\,(\text{mód}\,4)$$

Una aplicación interesante de la teoría de congruencias se da en la búsqueda o la justificación de criterios de divisibilidad. Es bien sabido que un número entero es múltiplo de 3 si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Por ejemplo, en el caso del número 4.567, si efectuamos la suma 4 + 5 + 6 + 7 da por resultado 22. Como 22 no es múltiplo de 3 entonces tampoco lo es 4.567.

¿Por qué finciona este criterio? Recordemos primeramente que para saber si un número entero es múltiplo de m, basta con observar si es *congruente a cero* módulo m (**Propiedad 4**). Por otra parte, 4.567 es:

$$4.10^3 + 5.10^2 + 6.10 + 7$$

Se trata entonces de ver a cuánto es congruente módulo 3 esta última suma. Será interesante para ello observar el comportamiento de las potencias de 10. Ya que $10 \equiv 1(3)$, entonces $10^n \equiv 1^n \equiv 1(3)$ cualquiera sea la potencia n. Es decir *todas las potencias de 10 son congruentes a 1 módulo 3*. Por lo tanto:

$$4.10^3 + 5.10^2 + 6.10 + 7 \equiv \\ 4 + 5 + 6 + 7\,(\text{mód}\,3)$$

Esto nos dice que 4.567 tiene el mismo resto en la división por 3 que 22, la suma de sus cifras. Lo cual no sólo nos confirma que 4.567 no es múltiplo de 3, sino que además nos dice que su resto es 1.

Para demostrar que el criterio es realmente siempre correcto, debemos intentar la deducción hecha para el número 4.567, pero con un número entero *genérico*. Sea entonces un número entero m con cifras

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0$$

Luego:

$$m = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

Como todas las potencias de 10 son congruentes a 1 módulo 3, entonces:

$$m \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_0 (3)$$

Por lo que el resto de m al dividir por 3 es igual al resto del número que se obtiene al sumar sus cifras. En particular m será múltiplo de 3 sólo si lo es la suma de sus cifras.

¿Qué ocurre con el número 7? En apariencia no existe un criterio de divisibilidad conocido para él. Tratemos de analizar qué ocurre en esta situación. Notemos que una parte fimdamental de la deducción anterior se basó en el conocimiento de las congruencias módulo 3 de las potencias de 10. Veamos entonces sus congruencias módulo 7.

$$10^0 \equiv 1(7)$$
$$10^1 \equiv 3(7)$$
$$10^2 \equiv 2(7)$$
$$10^3 \equiv 6 \equiv -1(7)$$
$$10^4 \equiv 4 \equiv -3(7)$$
$$10^5 \equiv 5 \equiv -2(7)$$
$$10^6 \equiv 1(7)$$

A partir de la potencia sexta las congruencias se repiten cíclicamente. Por lo tanto, si como antes

$$m = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

entonces

$$m \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 \\ -3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7 + \ldots (7)$$

Es decir que, por ejemplo, si queremos conocer el resto al dividir por 7 del número 9.312.715, entonces debemos hacer: 5 + 3.1 + 2.7 - 2 - 3.1 - 2.3 + 9 (desde atrás hacia adelante las cifras deben ser multiplicadas por 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, etc.). La cuenta da 20, cuyo resto al dividir por 7 es 6. Por lo tanto el resto de 9.312.715 en la división por 7 es también 6. En particular, el número el múltiplo de 7 si y sólo si el resultado de la operación lo es.

Hemos descubierto así un criterio de divisibilidad por 7. La causa de que este criterio no esté muy difundido es que no resulta tan simple como los criterios correspondientes a 3, 4, 5, 9 u 11. **A propósito de**

ello, invitamos al lector a redescubrir y demostrar los criterios de divisibilidad correspondientes a estos últimos números.

Nuestra tarea de investigación no finaliza en este punto. Como es evidente, la aparición de las potencias de 10 se debe a que nuestro sistema de numeración tiene esa base. ¿Qué ocurre con otras bases de numeración?

Recordemos que un número m se escribe como

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0$$

en base b si $0 \le a_i \le b-1$ para todo i, y además:

$$m = a_n\, b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

Así como antes estudiamos las congruencias de las potencias de 10, ahora deberemos estudiar el comportamiento de las potencias de b.

Por ejemplo, supongamos que m está escrito en base 9,

$$m = a_n\, 9^n + a_{n-1}\, 9^{n-1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_2\, 9^2 + a_1\, 9 + a_0$$

y queremos determinar un criterio para la divisibilidad por 8. Como $9 \equiv 1\,(\text{mód}\, 8)$ entonces todas las potencias de 9 serán también congruentes a 1, por lo tanto

$$m \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_0 (8)$$

Y así el criterio de divisibilidad por 8 para base 9 se basa en la suma de las cifras del número, del mismo modo que el criterio para 3 en base 10. Por ejemplo, si m = 345 (en base 10) es 423 en base 9. Como 4 + 2 + 3 = 9, que tiene resto 1 al dividir por 8, entonces m tiene también el mismo resto. En relación con este tema, sugerimos al lector los siguientes ejercicios:

1) Hallar un criterio de divisibilidad por 9 para números escritos en base 4.

2) Hallar un criterio de divisibilidad por 7 para números escritos en base 2, 6 y 8.

Investigue por su cuenta y descubra nuevos criterios de divisibilidad para diferentes bases de numeración.

Volvamos a la secuencia de potencias de 10 que analizamos al estudiar el criterio de divisibilidad por 7. Dijimos en esa oportunidad que a partir de la potencia sexta, la sucesión de congruencias se repite cíclicamente. En general, si estudiamos las congruencias módulo m de las potencias de un número b, veremos que muchas veces (aunque no siempre) existe un exponente n tal que $b^n \equiv 1\,(m)$ y que a partir de él las congruencias se repiten cíclicamente.

Para las potencias de 10, módulo 7, ese exponente es n=6 ¿Es posible, dados b y m, predecir cuál será el exponente en caso de que exista? Previo a responder esta pregunta, demos una nueva definición:

Definición: Diremos que dos números enteros no nulos r y s son *coprimos* si su único divisor positivo en común es el 1.

Por ejemplo, 6 y 35 son coprimos. En cambio 9 y 15 no lo son, pues por ejemplo el 3 es un divisor común de ambos. Como el *único* divisor positivo del 1 es el propio número, entonces todo entero no nulo es coprimo con el 1.

Definición: Dado un número natural m, se define $\Phi(m)$ como la cantidad de números k tales que k es coprimo con m y $1 \le k \le m$.

Por ejemplo, si queremos calcular $\Phi(6)$, debemos contar cuantos, de entre los números de 1 a 6 son coprimos con 6. Los números 1 y 5 lo son. En cambio no así 2, 3, 4 y 6. Por lo tanto $\Phi(6) = 2$.

Por otra parte $\Phi(7) = 6$. Veamos por qué. Como 7 es primo, sus únicos divisores positivos son 1 y 7. Luego, si un número no es divisible por 7, automáticamente sólo puede tener en común con él, el divisor 1 y por ende es coprimo con 7. En general, *un número es coprimo con un primo p si y sólo si no es divisible por él.*

Como ninguno de los números del 1 al 6 puede ser divisible por 7 entonces todos ellos son coprimos con 7 y así $\Phi(7) = 6$ como habíamos dicho. Más en general, si p es un número primo el razonamiento anterior sigue valiendo y se tiene entonces que $\Phi(p) = p - 1$.

Queda definida una fimción Φ (la fimción *fi* de Euler) del conjunto de los números naturales en sí mismo. Esta fimción Φ tiene muchas propiedades sumamente importantes. Una de ellas está dada por el siguiente:

> **Teorema 1:** Sean b y m dos enteros no nulos y coprimos entre sí. Si $n = \Phi(m)$, entonces $b^n \equiv 1(m)$

El teorema nos da entonces (si b y m son coprimos) un exponente n tal que $b^n \equiv 1(m)$.

Por ejemplo, si m=7 y b=10, el teorema nos da n=6, como ya habíamos descubierto. Si para m=7 tomamos b=6 entonces el teorema nos da nuevamente n=6 y, si bien es cierto que $6^6 \equiv 1(7)$ también es verdad que $6^2 \equiv 1(7)$.

Esto significa que, si bien el teorema nos da un exponente correcto, es decir un exponente tal que $b^n \equiv 1(m)$ no nos dará siempre el *menor* de todos ellos. Puede probarse sin embargo que este mínimo exponente será siempre un divisor de $\Phi(m)$. En el ejemplo anterior, 2 es divisor de 6.

Si b y m no son coprimos, las potencias también se repetirán cíclicamente, sin embargo no existirá un exponente n tal que $b^n \equiv 1(m)$

En el caso particular en que m es un número primo (llamémoslo entonces p), y recordando que $\Phi(p) = p - 1$, tenemos el siguiente :

> **Teorema 2:** Sean b y p dos enteros no nulos, p primo y b no divisible por p. Entonces $b^{p-1} \equiv 1(p)$

Este último se conoce como el Teorema de Fermat (o pequeño Teorema de Fermat); mientras que el Teorema 1 es la Generalización de Euler del Teorema de Fermat.

Uno y otro teorema facilitan mucho los cálculos con congruencias; sobre todo cuando se trabaja con potencias de altos exponentes.

Por ejemplo, tomemos un cálculo similar al inicial y busquemos el resto de 23^{61} en la división por 9. Notemos que $\Phi(9) = 6$ (1,2,4,5,7 y 8 son coprimos con 9) y que 23 y 9 son también coprimos. Luego el tanto el **Teorema 1** como el **Teorema 2** nos dicen que $\boxed{23^6 \equiv 1(9)}$ (las potencias de 23, módulo 9, se repiten cíclicamente de 6 en 6). Por otra parte 61 = 6.10 + 1.

Esto nos dice que, al llegar a la potencia 61, hemos recorrido 10 ciclos de 6 y una potencia más. Se tiene entonces que:

$$23^{61} \equiv 23^{6.10+1} \equiv (23^6)^{10}.23$$
$$\equiv 1^{10}.23 \equiv 23 \equiv 5(9)$$

Al recorrer los 10 ciclos de seis potencias, hemos vuelto al 1, una potencia más nos deja en 23, que es congruente a 5 módulo 9. El resto de 23^{61} es finalmente 5.

Nota aclaratoria:

El **Teorema 2,** llamado **Pequeño Teorema de Fermat,** no debe ser confimdido con el más famoso **Último Teorema** o **Gran Teorema de Fermat**. Este último establece que si n es mayor que dos entonces no existen números enteros positivos x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$.

Gustavo Piñeiro*

*Lic. en Ciencias Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* GENTILE, ENZO - *Aritmética Elemental* - Washington, D.C., Serie de Matemática Monografía Nº 25 -O.E.A., 1985.
* GENTILE, ENZO - *Aritmética Elemental en la Formación Matemática* - Buenos Aires, O.M.A., 1991
* GENTILE, ENZO - *Notas de Algebra I* - Buenos Aires, EUDEBA, 1988.

Logaritmos

Los logaritmos, aquellas complicadas expresiones que por generaciones han sido el horror de muchos alumnos, han suscitado siempre las mismas preguntas: ¿qué son y para qué sirven? Quizás esta breve descripción de su proceso histórico devele algunos de sus misterios, aunque seguro no responderá con justeza los anteriores cuetionamientos.

Marco histórico

El paso de la Edad Media a los tiempos modernos estuvo marcado por transformaciones, cuyos resultados generaron un nuevo estilo de vida. A fines del siglo XV, con la decadencia del feudalismo en Europa, aumenta el poder de una nueva clase social: la burguesía. Esta comienza a otorgar préstamos a interés, condenados hasta ese entonces como usura. El advenimiento del capitalismo, que estimula la acumulación de riquezas y justifica el lucro, se ve afianzado además, por los grandes descubrimientos geográficos, que permiten a algunos puertos europeos convertirse en pequeñas capitales financieras y bancarias. Son tiempos de grandes cambios culturales y, sobre todo, de un apasionado retorno a las fuentes antiguas. En cuanto a la ciencia, se origina un proceso de secularización de la misma, donde el científico es generalmente el burgués. El hombre comienza a observar la naturaleza, a experimentar, a usar su razón con verdadero espíritu de investigación. La Matemática, inactiva desde el siglo IV d.C. en que murieron Pappus y Diofanto, también reaparece en esta época. Afortunadamente, los árabes, que habían traducido los antiguos manuscritos griegos, fueron durante más de un milenio los leales guardianes de aquellos saberes.

Italia abre el camino con Scipio Ferro (1465-1526), Niccolo Fontana -apodado Tartaglia- (1500-1557) y Girolamo Cardan (1501-1576). En Alemania surgen Stífel, Durero y Copérnico. La escena se traslada nuevamente a Italia con Galileo Galilei (1564-1642). Vive en esta época también el gran astrónomo alemán Johann Kepler (1571-1630). En la última mitad de siglo XVI Francia produce a François Viète, Escocia a John Napier y en Suiza nace Jobst Burgi.

Descubrimiento de los logaritmos: causas

A partir del siglo XVI los cálculos que se precisaban hacer, debido principalmente a la expansión comercial y al perfeccionamiento de las técnicas de navegación, eran de tal magnitud que surgía la necesidad de encontrar algoritmos menos laboriosos que los utilizados hasta entonces (algoritmos de la multiplicación, de la división, etc.).

El descubrimiento de los logaritmos no se produjo aisladamente, por un único proceso. Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto. Ambos caminos inspiraron respectivamente a John Napier y a Jobst Bürgi en el descubrimiento de los logaritmos.

Henry Briggs (que fue el primero que hizo las tablas logarítmicas en base 10), en el año 1631, en su obra *Logarithmall Arithmetike*, explica el objetivo de la invención de los logaritmos: "Los logaritmos son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de aritmética y geometría... Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad...

En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino también de astronomía."

Precursores: Arquímedes y Stífel.

Los orígenes del descubrimiento, o invención, de los logaritmos se remontan hasta Arquímedes, en la comparación de las sucesiones aritméticas con las geométricas. Para comprender tal comparación escribamos, por ejemplo, las siguientes dos sucesiones:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

A los números de la sucesión primera, que es aritmética, los llamaremos logaritmos; a los de la sucesión de abajo, que es geométrica, los llamaremos antilogaritmos.
La regla de Arquímedes, según expresa Hoeben, dice que "para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado".
Esta comparación de dos sucesiones vuelve a aparecer en el siglo XVI en los trabajos de un matemático alemán, el suavo Miguel Stífel (1487-1567), que publicó en Nuremberg su *"Arithmetica integra"* en el año 1544. En esta obra se encuentra por primera vez el cálculo con potencias de exponente racional cualquiera y, en particular, la regla de la multiplicación: $a^n.a^m = a^{n+m}$, para todo n,m racionales.
Stífel da también la primera tabla de logaritmos que existe, aunque en forma muy rudimentaria. Contiene sólo los números enteros desde -3 hasta 6, y las correspondientes potencias de 2:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

A los números de la sucesión superior los denominó *exponentes*.
Pero para hacer realmente aplicables los logaritmos al cálculo numérico, le faltaba a Stífel todavía un medio auxiliar importante, las fracciones decimales; y sólo cuando se conocieron éstas -después del año 1600- surgió la posibilidad de construir verdaderas tablas logarítmicas.
En una parte de su libro Stífel hace la siguiente observación: "Se podría escribir todo un libro nuevo sobre las propiedades maravillosas de esos números, pero debo ponerme coto a mí mismo en este punto y pasar de largo con los ojos cerrados". Más adelante agrega: "La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquélla corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo (potenciación) en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada".
Por ejemplo, si se tuviera que multiplicar 2 por 16, sólo se tendría que sumar los números de la sucesión aritmética que se hallan encima de aquéllos, es decir, 1 y 4, obteniéndose 5. Debajo de éste encontramos el número 32 de la sucesión geométrica, que es el resultado de la multiplicación. Para efectuar una división se realiza una sustracción. Así, 256 dividido 32, se hace $8 - 5 = 3$, debajo del cual se ve el número 8, que es el resultado de la división. La potenciación, llamada por Stífel "multiplicación por sí mismo", se efectúa por la suma "consigo mismo" del correspondiente número aritmético. Es decir, para hacer 4^3 se suma tres veces el número 2, que es el correspondiente en la sucesión aritmética al número 4. O sea, $2+2+2=6$ o $2 . 3 = 6$, debajo del cual encontramos el 64. La radicación se obtiene mediante la división. Así, la raíz cúbica de 64, se obtiene dividiendo al número 6 (que es el correspondiente aritmético de 64) por 3. Es decir, $6:3=2$, debajo del cual encontramos el 4.

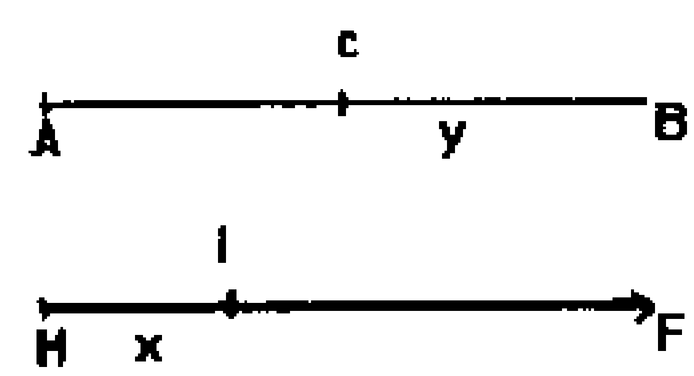
John Napier

Durante la última parte del siglo XVI, Dinamarca llegó a ser un importante centro de estudios sobre problemas relacionados con la navegación. Dos matemáticos daneses, Wittich y Clavius (cuya obra *De Astrolabio* se publicó en 1593), sugirieron la aplicación de las tablas trigonométricas para abreviar los cálculos (mediante la utilización de las fórmulas del seno y del coseno de la suma de dos ángulos). Este recurso de cálculo sirvió probablemente de inspiración al escocés John Napier (1550-1617), cuyo nombre latinizado es Neper, en la deducción de un método sencillo para multiplicar senos de ángulos por un proceso de adición directa. El descubrimiento de Napier fue ávidamente acogido por los astrónomos Tycho Brahe y Johann Kepler. En el año 1614 en Edimburgo aparecen sus *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, es decir, las primeras tablas de logaritmos, sin embargo, no se describe aquí la forma en que fueron construidas. Recién en el 1619, dos años después de su muerte, aparece el procedimiento utilizado bajo el título *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.

Napier fue el inventor de la palabra logaritmo (del griego "logos": razón y "arithmos": número), número de razones, pues en el caso de ser el logaritmo un número entero, es el número de factores que se toman de la razón dada (base) para obtener el antilogaritmo.

Además, introdujo los logaritmos mediante una concepción cinemática, cuyo origen, según él se imaginaba, era un movimiento sincrónico, una especie de fluctuación entre dos sucesiones. A continuación describimos esta concepción.

Sea un segmento AB y una semirrecta HF. Supongamos que los móviles c e i parten simultáneamente de A y H con la misma velocidad inicial y en dirección a B y F, respectivamente.



Supongamos que el móvil c tiene una velocidad numérica igual a la distancia y; además, el móvil i se desplaza con una velocidad uniforme numéricamente igual a su velocidad inicial. Napier definió la longitud x como el logaritmo de y.

Recurriendo al cálculo diferencial e integral podemos escribir:

$$y = \text{veloc. de c} = \frac{-dy}{dt}$$

veloc. de c en A =

$$= \text{veloc. de c en i} = \frac{dx}{dt}$$

Por lo cual:

$$\frac{dy}{y} = -dt \quad (1) \qquad \text{y además}$$

$$dt = \frac{dx}{\text{velocidad de c en A}} \quad (2)$$

Napier toma el valor 10^7 para la velocidad de c en A, con el objeto de eliminar la dificultad surgida al utilizar fracciones.

Partiendo de (1) e integrando, tendremos:

$$\ln y = -t + K$$

con K un número real.

Si $t=0$, entonces $K = \ln 10^7$ (ya que longitud de AB es 10^7). Entonces:

$$\ln y = -t + \ln 10^7 \qquad (3)$$

Ahora bien, de (2), $10^7 dt = dx$

Entonces integrando: $x = 10^7 t$.

Por lo tanto, el logaritmo que define Napier es:

$x = 10^7 t$

$= 10^7(\ln 10^7 - \ln y)$ por (3)

$$= 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right)$$

Es decir, el logaritmo definido por Napier es:

$$10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$$

Jobst Bürgi

El descubrimiento de los logaritmos es un claro ejemplo de lo habituales que resultan las duplicidades en las innovaciones.

Es sabido hoy, que el relojero y constructor de instrumentos suizo Jobst Bürgi (1552-1632), se hallaba en posesión de este conocimiento antes que Napier, incluso se afirma que concibió la idea del logaritmo ya en el año 1586, estimulado por las observaciones antes mencionadas de Stífel en el *Libro de cálculo* de Simón Jacob (1565). Pero, según se dice, fue por falta material de tiempo que no lo dio a publicidad, motivo por el cual el astrónomo Kepler pudo echarle en cara el hecho de "haber dejado en el desamparo al hijo de su espíritu, en vez de educarlo para la publicidad". Se dice que así procedió, pues, como se le decía en latín, era un "secretorum suorum custos" (guardián de sus secretos).

Hubo que esperar hasta el año 1620 para que Bürgi publicara en Praga sus tablas logarítmicas bajo el título *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen*. Estas tablas se publicaron en circustancias exteriores desfavorables (8 de noviembre de 1620: Conquista de Praga) y permanecieron desconocidas. Bürgi ve que el valor práctico de las sucesiones de Stífel es aplicable con provecho en el caso de que sus respectivos términos se aproximen uno al otro, lo más posible. A la vez observa que las propiedades logarítmicas no se extendían solamente sobre la sucesión de potencias de base dos, sino sobre sucesiones con cualquier razón racional q.

Bases de Napier y Bürgi

Existe la creencia general de que Napier ha sido el inventor de los logaritmos naturales, cuya base es el número e. Pero esto es absolutamente falso.

Es sabido que Bürgi utilizó como base (aunque él no lo supiera)

$$(1+\frac{1}{10^4})^{10^4} = 2{,}7184593$$

que está muy cercano al verdadero valor de e.

Bürgi parte de una progresión aritmética de primer término 0 y razón 10 y último término 32000. Estos números, que serían nuestros logaritmos, los denomina números rojos. La progresión geométrica correspondiente empieza con el número 10^8 y la razón (que la elige, al igual que Napier, cercana a la unidad, para lograr de este modo, que los sucesivos términos de la progresión geométrica difieran muy poco entre sí) es 1,0001. Estos son sus números negros. La tabla es de doble entrada, entrando con los números rojos, de manera que Bürgi construyó una tabla de antilogaritmos.

Para poder comprobar el surgimiento del número e en el sistema de Bürgi, debemos multiplicar a cada término de la progresión aritmética por 10^{-5}.

Si elegimos un término rojo, por ejemplo 10, y su correspondiente negro, $1{,}0001.10^8$ podemos efectuar la siguiente deducción:

$$\begin{aligned} 10^{-4} &= \log_a 1{,}0001.10^8 \\ &= \log_a 1{,}0001 + \log_a 10^8 \\ &= \log_a 1{,}0001 \end{aligned}$$

Por lo tanto $a^{10^{-4}} = 1{,}0001$

y de aquí $a = 1{,}0001^{10^4} \cong e$

La tabla de Napier no daba los logaritmos de la sucesión de los números naturales, sino de los valores de los senos de 0° a 90°, en la cual, para obviar los números negativos y para que los términos de su progresión geométrica sean potencias enteras muy próximas a un seno dado, eligió como razón un número próximo a la unidad, pero menor que ella: 0,9999999.

En realidad Napier no habla de base alguna, pero la que se deduce de sus cálculos se aproxima mucho a la expresión $\frac{1}{e}(1-\frac{1}{3}10^{-14})$ que es algo menor que la recíproca del logaritmo natural.

Henry Briggs y posteriores

Las tablas de Napier, aparecidas en 1614, causaron un gran impacto en toda Europa, pero especialmente en Henry Briggs (1561-1630), profesor de geometría de Oxford. Briggs visitó a Napier en Edimburgo y, después de una discusión, llegaron a la conclusión de que el logaritmo de 1 debía ser igual a 0, mientras que el logaritmo de 10 debía ser igual a 1. Así nacen los logaritmos de "base vulgar" o logaritmos de Briggs.

La tarea de construir la primer tabla de logaritmos en base 10 fue asumida por Briggs, puesto que Napier no poseía ya fuerzas para emprender un trabajo de esa envergadura.

En SIGMA, El Mundo de las Matemáticas aparece el siguiente relato del primer encuentro entre el barón de Merchiston, John Napier, y Henry Briggs: *"no podía tener* *tranquilidad en sí, hasta que no hubiera visto a la noble persona de cuya sola invención éstos eran... Mr. Briggs señala un día determinado para encontrarse en Edimburgo; pero falló en su propósito, de modo que Lord Napier temía que no viniera. Sucedió que un día, cuando John Marr y Lord Napier estaban hablando de Mr. Briggs: 'Ah, John -decía Merchiston-, ahora Mr. Briggs no vendrá': en el mismo instante alguien llama a la puerta; John Marr se apresuró a bajar y resultó ser, para su gran alegría, Mr. Briggs. Conduce Mr. Briggs a la habitación de Milord, donde estuvieron casi un cuarto de hora, cada uno contemplando al otro con admiración, antes de que se dijera ni una palabra; finalmente, Mr. Briggs comenzó: 'Milord, he emprendido este largo viaje para ver a vuestra persona, y para saber mediante qué mecanismo de inventiva o ingenio pensásteis por primera vez en esta ayuda tan excelente para la astronomía, a saber, los logaritmos. Pero, Milord, me extraña que, habiéndolos descubierto vos, nadie los haya descubierto antes, cuando ahora que los conocemos parece tan fácil.'* "

En el año 1617, año de la muerte de Napier, Briggs publicó sus *Logarithmorum chilias prima*, que comprende los logaritmos de los números 1 a 1000, con una precisión de 14 decimales. En 1624 en su obra *Arithmetica logarithmica*, ya aparece la palabra *característica* (parte entera). La palabra *mantisa* (parte decimal) fue utilizada por primera vez por Wallis en 1693. Las tablas que en la obra de Briggs aparecen contienen los logaritmos decimales de los números 1 a 20000 y de 90000 a 100000, con 14 cifras decimales de precisión.

Entre 1614 y 1631 existen más de veinte obras publicadas sobre este tema, incluida una de Adrián Vlacq y E. Decker, quienes en 1628 publican en Holanda los logaritmos desde 1 a 100000, aproximados hasta 10 cifras decimales.

Edward Wright (1559-1615) publicó una traducción inglesa del tratado de Napier, aparecido en 1614, en la que se encuentran algunos logaritmos naturales. John Speidell, en una obra titulada *New logarithmes*, publicada en Londres en 1619, reajusta los logaritmos de Napier introduciendo a partir de las funciones trigonométricas, los logaritmos naturales (en base e). El inventor de la "Regla de cálculo", William Oughtred (1574-1660) enunció de forma explícita, hacia 1650, las propiedades siguientes:

a) $\log m.n = \log m + \log n$

b) $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$

c) $\log x^n = n \log x$

Logaritmos y antilogaritmos

Como habíamos visto anteriormente, Stífel propuso dos sucesiones: una aritmética (que llamamos logaritmos) y otra geométrica (que llamamos antilogaritmos). Pero esta primitiva tabla de logaritmos y antilogaritmos no es suficiente para poder llevar a cabo multiplicaciones y otras operaciones, a no ser que sea posible ampliarla y completarla de modo que comprenda todos los números cuyo producto se desea obtener.

Para distinguir los logaritmos correspondientes a una determinada sucesión geométrica, de los logaritmos correspondientes a otra sucesión geométrica, designamos por a la base de la sucesión y escribimos esta a como adjetivo matemático en la parte inferior derecha, para señalar qué tablas de logaritmos estamos usando.

El logaritmo de un número p en una cierta base a es el exponente al que debe elevarse la base a para obtener dicho número p. Análogamente, si m es el logaritmo de p en una base a, entonces p es el antilogaritmo de m en dicha base. En símbolos:

$$p = a^m \Rightarrow m = \log_a p$$
$$\text{o bien,} \quad p = anti\log_a m$$

Esta notación permite escribir la regla de la multiplicación en otra forma:

$$q = a^n \Rightarrow n = \log_a q$$
$$\text{o bien,} \quad q = anti\log_a n$$

Entonces :

$$p.q = a^{m+n} \Rightarrow m + n = \log_a p.q$$

De aquí:

$$p.q = anti\log_a(m+n)$$
$$= anti\log_a(\log_a p + \log_a q)$$

Esta conclusión expresa que el logaritmo, en una cierta base, del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de dichos números en la misma base. Del mismo modo pueden deducirse las restantes reglas conocidas.

Tablas en base 2

Toda tabla de logaritmos es a la vez tabla de antilogaritmos. Como ejemplo de tabla logarítmica, a tres decimales, podemos escribir la siguiente, basada en la progresión geométrica 2^n, es decir, con base igual a 2:

$n = \log_2 N$	$N = anti\log_2 n$	
0	1	1,000
0,5	$\sqrt{2}$	1,414
1	2	2,000
1,5	$\sqrt{2^3}$	2,828
2	4	4,000
2,5	$\sqrt{2^5}$	5,657
3	8	8,000
3,5	$\sqrt{2^7}$	11,314
4	16	16,000
...	.....	....

Los números n de la sucesión aritmética son logaritmos, los números N de la sucesión geométrica 2^n son antilogaritmos.

Por ejemplo:

$$\log_2 2{,}828 = 1{,}5 \quad \text{o}$$
$$anti\log_2 1{,}5 = 2{,}828$$

Si quisiéramos multiplicar, por ejemplo, 2,828 x 5,657, se procedería del siguiente modo.

La tabla dice que:

$$\log_2 2{,}828 = 1{,}5 \Rightarrow anti\log_2 1{,}5 = 2{,}828$$
$$\log_2 5{,}657 = 2{,}5 \Rightarrow anti\log_2 2{,}5 = 5{,}657$$

Luego:

$$\begin{aligned} &2{,}828x5{,}657 = \\ &= anti\log_2(\log_2 2{,}828 + \log_2 5{,}657) \\ &= anti\log_2(1{,}5+2{,}5) \\ &= anti\log_2 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Tablas en base 10

Para las aplicaciones prácticas, la base de las tablas logarítmicas es 10, por ser 10 la base de nuestro sistema de numeración. Esto simplifica los cálculos de las tablas logarítmicas por la siguiente razón: siendo la base10, los números fundamentales de las tablas están contenidos en las dos sucesiones

Log	-2	-1	0	1	2	3
Antilog	0,01	0,1	1	10	100	1000

Podría hacerse, por ejemplo, el siguiente cálculo:

$$\log_{10}\sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = 0{,}5$$

Sabiendo que

$$\sqrt{10} \cong 3{,}162 \Rightarrow \log_{10} 3{,}162 = 0{,}5$$

Si quisiéramos averiguar, por ejemplo, el $\log_{10} 31{,}62$, se procedería de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &31{,}62 = 3{,}162x10 \Rightarrow \log_{10} 31{,}62 = \\ &= \log_{10}(3{,}162x10) \\ &= \log_{10} 3{,}162 + \log_{10} 10 \\ &= 0{,}5+1 \\ &= 1{,}5 \end{aligned}$$

De manera similar:

$$\begin{aligned} &\log_{10} 316{,}2 = \\ &= \log_{10}(3{,}162x100) \\ &= \log_{10} 3{,}162 + \log_{10} 100 \\ &= 0{,}5+2 \\ &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Es decir, que a pesar de que se altere el lugar de la coma en un número, no se modifica en nada el valor de la cantidad que está a la derecha de la coma en su logaritmo.

Por lo tanto, si tuviéramos los logaritmos de todos los números comprendidos entre 1 y 10, a intervalos suficientemente pequeños, tendríamos todo lo necesario para multiplicar logarítmicamente. Supongamos que necesitáramos multiplicar 1,536 x 77. Las tablas nos darían:

$$\log_{10} 1{,}536 = 0{,}1864$$
$$\log_{10} 7{,}7 = 0{,}8865 \Rightarrow \log_{10} 77 = 1{,}8865$$

$$\begin{aligned} &\text{Entonces;} 1{,}536x77 = \\ &= anti\log_{10}(0{,}1864+1{,}8865) \\ &= anti\log_{10} 2{,}0729 \\ &= anti\log_{10}(2+0{,}0729) \\ &= 10^{2+0{,}0729} \\ &= 10^2.10^{0{,}0729} \\ &= 100.anti\log_{10} 0{,}0729 \\ &= 100.1{,}183 \\ &= 118{,}3 \end{aligned}$$

El resultado de la anterior multilplicación es aproximado (con un error menor de tres centésimas) dado que se han usado tablas con sólo cuatro cifras decimales.

Construcción de una tabla en base 10

Para construir una tabla de logaritmos en una base 10, puede comenzarse por construirse una tabla de antilogaritmos. Por ejemplo:

Antilog.: 1 2 3 4 5 6 ...

Y calcularse sus logaritmos de la forma siguiente:

$1 = 10^0 \Rightarrow \log_{10} 1 = 0$

Luego, por multiplicación hallamos: $2^{10} = 1024$ que sólo difiere de 1000 en menos del 2,5%,

$$2^{10} \cong 10^3 \Rightarrow 2 \cong 10^{\frac{3}{10}} = 10^{0,3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_{10} 2 \cong 0,3$$

Nuevamente por multiplicación:

$$3^9 = 19683 \cong 20000 =$$
$$= 2.10000 \cong 10^{0,3}.10^4 = 10^{4,3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cong 10^{\frac{4,3}{9}} \cong 10^{0,48} \Rightarrow \log_{10} 3 \cong 0,48$$

Y así sucesivamente obtenemos el siguiente esquema de tabla de logaritmo:

N	logN	N	logN
1	0	10	1
2	0,3	20	1,3
3	0,48	30	1,48
4	0,6	40	1,6
5	0,7	50	1,7
6	0,78	60	1,78
7	0,84	70	1,84
8	0,9	80	1,9
9	0,95	90	1,95
Antilog. n	n	Antilog.n	n

Construcción de la tabla de Briggs

Briggs, al formar su tabla de logaritmos, escribió una sucesión aritmética cualquiera (logaritmos) cuyo primer término era 1, y una sucesión geométrica (antilogaritmos) cuyo primer término era precisamente la razón o base de esta sucesión. Por ejemplo si la razón es 10:

$n = \log_{10} N$	$N = anti\log_{10} n$
1	10
0,875	$10^{\frac{7}{8}} \cong 7,4980$
0,750	$10^{\frac{3}{4}} \cong 5,6234$
0,625	$10^{\frac{5}{8}} \cong 4,2170$
0,500	$10^{\frac{1}{2}} \cong 3,1623$
0,375	$10^{\frac{3}{8}} \cong 2,3714$
0,250	$10^{\frac{1}{4}} \cong 1,7783$
0,125	$10^{\frac{1}{8}} \cong 1,3385$
0	1

Extrayendo raíces de grado más elevado podrán hacerse tan pequeños como se desee los intervalos entre los números de la columna de la izquierda (logaritmos).

Es conocida la propiedad por la cual si tomamos tres números consecutivos cualesquiera a,b,c de una sucesión aritmética el segundo de ellos es la media aritmética de los otros dos, es decir: $b = \frac{a+c}{2}$.

Análogamente, dados tres números consecutivos cualesquiera A, B, C de una sucesión geométrica, el segundo de ellos es la media geométrica de los otros dos, es decir: $B = \sqrt{A.C}$.

Utilizando esta propiedad, Briggs convirtió una tabla de antilogaritmos (o sea, que tiene los logaritmos a intervalos regulares, en la columna de la izquierda), en una tabla de logaritmos (que tiene los antilogaritmos a intervalos regulares, en la columna de la izquierda). En la siguiente tabla puede verse una aplicación de este método a las sucesivas aproximaciones del valor del $\log_{10} 5$:

$N = anti\log_{10} n$	$n = \log_{10} N$
$A = 1$	$a = 0$
$B = 10$	$b = 1$
$C = \sqrt{AB} = 3,162277$	$c = \frac{1}{2}(a+b) = 0,5$
$D = \sqrt{B.C} = 5,623413$	$d = \frac{1}{2}(b+c) = 0,75$
$E = \sqrt{CD} = 4,216964$	$e = \frac{1}{2}(c+d) = 0,625$
$F = \sqrt{DE} = 4,869674$	$f = \frac{1}{2}(d+e) = 0,6875$
$G = \sqrt{DF} = 5,232091$	$g = \frac{1}{2}(d+f) = 0,71875$
$H = \sqrt{FG} = 5,048065$	$h = \frac{1}{2}(f+g) = 0,703125$
$I = \sqrt{FH} = 4,958067$	$i = \frac{1}{2}(f+h) = 0,6953125$
$J = \sqrt{HI} = 5,002865$	$j = \frac{1}{2}(h+i) = 0,6992187$

Se evidencia aquí la laboriosidad de hombres como Briggs y Vlacq, que calcularon sus logaritmos con 14 y 10 cifras decimales exactas respectivamente.

Analogías entre los sistemas de Bürgi y Napier

Con el fin de observar la relación que hay entre ambos sistemas, calculemos, por ejemplo, en el sistema de logaritmos de Bürgi, las potencias correspondientes a dos términos consecutivos de la progresión geométrica de razón 1,0001. Tomemos como exponentes y e $y+1$, con y entero:

$1,0001^y = x \quad 1,0001^{y+1} = x + dx$

Por sustracción se deduce,

$$dx = x + dx - x$$
$$= 1,0001^{y+1} - 1,0001^y$$

$$= 1{,}0001^y.(1{,}0001-1)$$
$$= x.10^{-4}$$
$$= \frac{x}{10^4}$$

Una vez determinado el valor de x correspondiente a un valor de y, Bürgi obtiene el que corresponde al siguiente:

$y+1$, por adición a x de $\frac{x}{10^4}$.

Con el propósito de completar sus tablas e intercalar términos en sus progresiones, toma las potencias correspondientes a dos exponentes y e $y+dy$:

$$x = 1{,}0001^y \qquad x + dx = 1{,}0001^{y+dy}$$

siguiendo un razonamiento análogo al anterior, obtenemos:

$$dx = 1{,}0001^y.(1{,}0001^{dy} - 1)$$
$$\cong x.dy.10^{-4}$$

NOTA:
Ya Bürgi había detectado esta aproximación:

$1{,}0001^{dy} \cong 1 + dy.10^{-4}$. *Hoy en día se puede obtener por la aproximación del polinomio de orden 1 de Taylor, de la siguiente manera:*
Recordemos que el polinomio de Taylor de orden 1 puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

Sea $f(x)=x^{dy}$ *entonces* $f'(x)=dy\, x^{dy-1}$

Si tomamos $x_0=1$ *y* $x=1{,}0001$ *obtenemos*

$$1{,}0001^{dy} \cong 1 + dy.10^{-4}$$

Por lo cual obtenemos la expresión más general:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10^4}{x} \qquad (1)$$

Tenemos así, una ecuación de diferencias para el sistema de logaritmos de Bürgi, que éste mismo aplicó para el cálculo de su tabla.

De igual modo se deduce que los logaritmos de Napier satisfacen la ecuación de diferencias

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10^7}{x} \qquad (2)$$

Finalmente podemos observar la íntima relación entre ambos sistemas. Haciendo un cambio de escala, en lugar de y, $z = \frac{y}{10^4}$; y tomemos en lugar de dy a $dz = \frac{dy}{10^4}$, entonces obtendremos, reemplazando en (1):

$$\frac{dz.10^4}{dx} = \frac{10^4}{x} \text{ entonces}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

De la misma forma podemos trabajar la ecuación de diferencia de Napier, mediante un cambio de escala, llamemos en lugar de y, $z = \frac{-y}{10^7}$; y tomemos en lugar de dy a $dz = \frac{-dy}{10^7}$, así obtendremos, reemplazando en (2):

$$\frac{dz.(-10^7)}{dx} = \frac{-10^7}{x}$$ por lo tanto, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

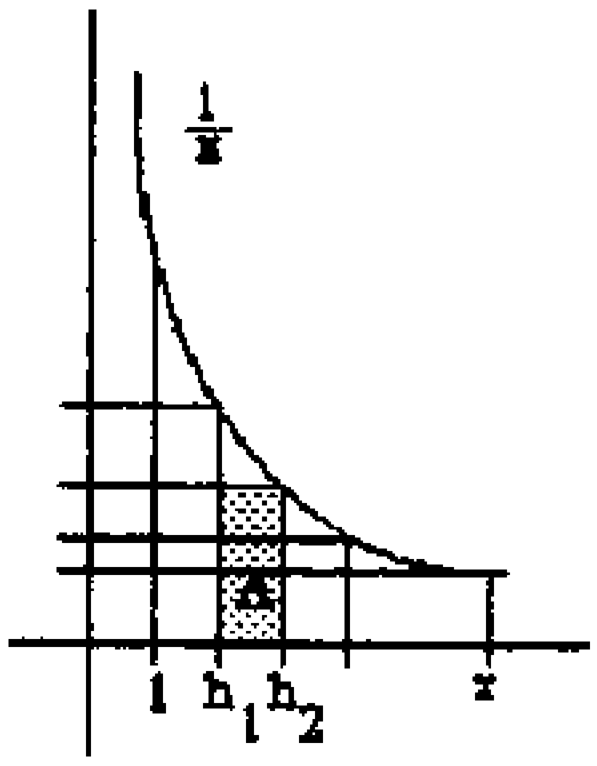
Queda claro que en ambos sistemas llegamos a la misma ecuación de diferencias.

Veamos ahora una interpretación geométrica de ambos sistemas.

Si partimos de la ecuación de diferencias $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; obtenemos $dy = \frac{dx}{x}$ (3)

Tomemos una partición $\{1, h_1, h_2, \ldots, h_n, x\}$ en el intervalo $[1,x]$ para un x cualquiera. Podemos pensar que dy irá variando para cada valor h_i de la partición, ya que $dy_k = y_k - y_{k-1}$. De (3) obtenemos que $dy_k = \frac{dh}{h}$ (en particular $dy = dy_x = \frac{dx}{x}$).

Por otra parte, observemos el gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$ y averigüemos el área de cada uno de los "rectángulos inferiores" que dependerá de la partición que hayamos tomado.



Por ejemplo,

$\frac{dh_2}{h_2}$ = Area del rectángulo inferior A.

En general,

$\frac{dh}{h}$ =Area de un rectángulo inferior cualquiera.

Para hallar el área total debemos sumar todos los rectángulos inferiores. De este modo

obtenemos: $\sum_{h=1}^{x}\frac{dh}{h}$, pero por ser $\frac{dh}{h}=dy_h$ tendremos que la

$\sum_{h=1}^{x}\frac{dh}{h}=\sum_{h=1}^{x}dy_h$.

Definamos $y_0=0$ entonces

$$\sum_{h=1}^{x}dy_h=\sum_{h=1}^{x}(y_h-y_{h-1})$$

$$=y_1-y_0+y_2-y_1+...$$
$$...+y_h-y_{h-1}+y_x-y_h$$
$$=y_x-y_0$$
$$=y_x$$

Pero y_x es y ya que es éste el que depende de x, por lo tanto

obtenemos $y=\sum_{h=1}^{x}\frac{dh}{h}$.

De esta interpretación se llega inmediatamente, como veremos a continuación, a los logaritmos naturales, mediante los conocimientos actuales del cálculo integral.

Pensemos una partición en que $h\to 0$ para que el valor del área de cada rectángulo se aproxime más a la de la zona sombreada y como el intervalo $[1,x]$ es continuo, integramos para calcular el área

$$y=\int\frac{dh}{h}=\ln h|_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x$$

Pero para poder aceptar esta interpretación del logaritmo debe comprobarse que se cumpla la propiedad fundamental, por la cual el logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores; lo que puede demostrarse muy fácilmente.

Este último análisis se corresponde también con el proceso histórico. En el año 1650, gracias a los adelantos en geometría analítica y en el cálculo infinitesimal, pudo llegarse a los resultados anteriores.

****

Con estos descubrimientos, de principio del siglo XVII, se lograron efectuar operaciones que anteriormente ni siquiera podían pensarse.

Recién en el siglo XVIII el gran matemático Leonard Euler descubriría las profundas relaciones entre la función exponencial $a^x=b$ y su inversa $x=\log_a b$.

En palabras de Egmont Colerus: *Sin embargo, aún no se sospechaba que el nuevo método calculístico, sobre todo en sus últimos principios constructivos,*
simultáneamente se transformaría en eje de toda la Matemática infinitesimal. Nadie pensaba aún en que la función logarítmica se habría de transformar en un puente tendido sobre el camino que lleva a la solución de integraciones, aparentemente insolubles. Y menos aún se pensaba en el futuro del mágico número e, para el cálculo de intereses y de probabilidades.

Andrea Morales
Claudio Salpeter
Gisela S.de Piñeiro
Agustín Tonelli

Bibliografía

* COLERUS, EGMONT - *Historia de la Matemática.*
* COLLETTE, JEAN PAUL - *Historia de las Matemáticas I* - México, Siglo XXI ediciones, 1986.
* HOEBEN, LANCELOT - *La Matemática en la Historia del hombre.*
* HOFMAN, JOSEPH E. - *Historia de la Matemática* - U.T.E.H.A.
* HOÜEL, J.- *Tablas de logaritmos* - Buenso Aires, El Ateneo, 1979.
* KLEIN, FELIX - *Matemática elemental de un punto de vista superior.*
* NEWMAN, JAMES R. - *Sigma El Mundo de las Matemáticas* - Barcelona, Grijalbo,1994.
*REY PASTOR, J. - BABINI, JOSE - *Historia de la matemática (vol. 2.) Del Renacimiento a la Actualidad* - Barcelona, Gedisa, 1985.
* WIELEITNER, H. - *Historia de las Matemáticas* - Barcelona, Labor, 1932.

Curiosidades matemáticas

Los puentes sobre el río Pregel

En esta sección trataremos sobre temas matemáticos no muy conocidos y que esperamos sirvan tanto para el enriquecimiento personal como para ser llevados al aula.

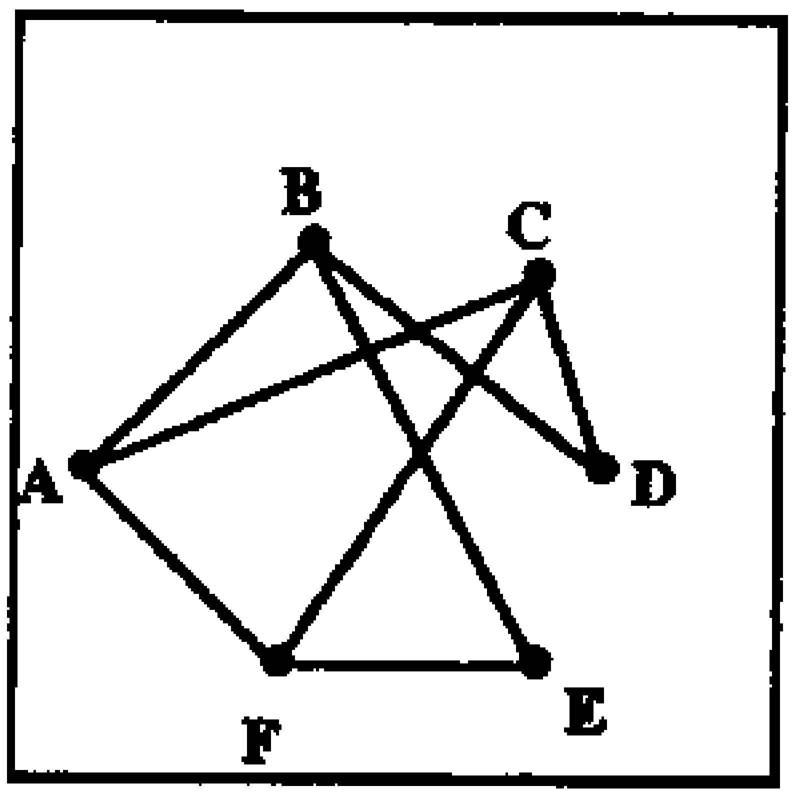
Es una tibia mañana de primavera en Ginebra y los embajadores de seis países europeos deben reunirse para negociar importantes tratados de comercio. Con el fin de preservar el anonimato de los reunidos, nos limitaremos a llamarlos con las iniciales de sus apellidos. Curiosamente las iniciales son A, B, C, D, E y F.

Los embajadores se sentarán a una mesa redonda (símbolo de igualdad) y es tarea del anfitrión el determinar en qué lugar se sentará cada uno. Tarea muy difícil, pues existen entre algunos de los seis diplomáticos fuertes motivos de pelea. El objetivo, en bien de la amistad y del comercio, es que nunca queden sentados uno junto a otro dos embajadores que estén enemistados entre sí.

Discretas averiguaciones han permitido determinar que A suele siempre discutir agriamente con D y con E. Por su parte B no soporta la cercanía de C ni de F; mientras que D está sumamente disgustado con F. ¿Es posible sentar a los embajadores alrededor de la mesa redonda de modo tal que reine la paz?

(Antes de seguir leyendo, intente el lector resolver el problema).

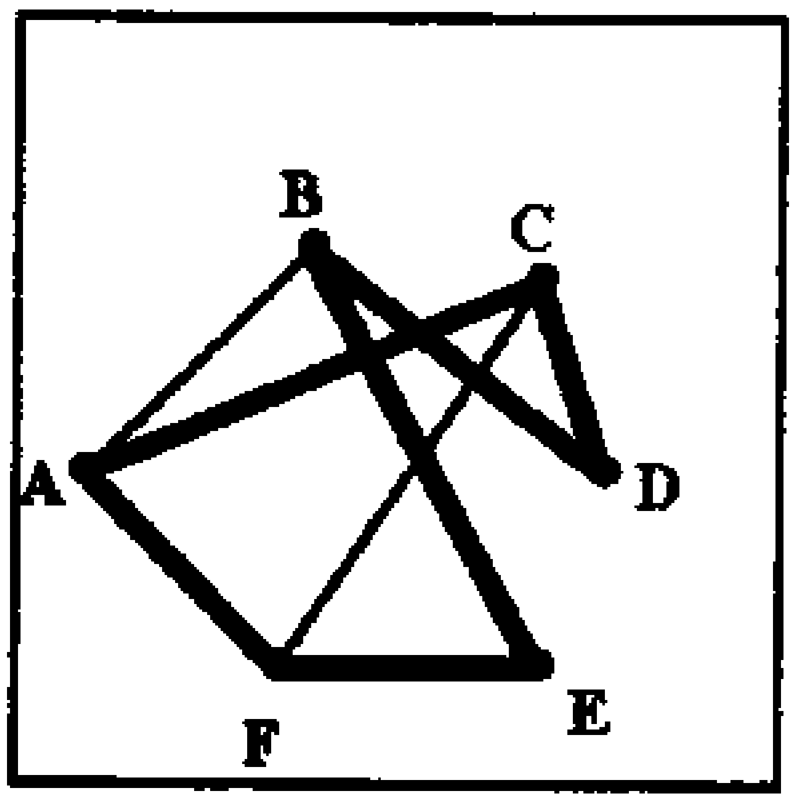
Se devanaba los sesos el anfitrión hasta que, tras varios kilogramos de papeles garabateados, se le ocurrió dibujar el siguiente diagrama:



Donde cada punto representa a uno de los embajadores y dos embajadores están unidos por una línea si y sólo si no están peleados entre sí. Por lo tanto, el diagrama nos indica cuáles son los pares de diplomáticos que pueden sentarse uno junto al otro en la mesa.

El embajador A puede sentarse junto a B, quien a su vez puede sentarse junto a E, quien puede sentarse junto a F... Es claro que la reunión alrededor de la mesa podrá efectuarse en paz sólo si es posible prolongar la oración anterior hasta abarcar a todos los embajadores una vez cada uno (y volver finalmente de nuevo a A). Es decir, el problema tendrá solución si y sólo si existe un camino en el diagrama que sea cerrado y que pase una y sólo una vez por cada punto.

Tal como se ve en la figura más abajo un tal camino existe, por lo que el anfitrión pudo finalmente sentar a los diplomáticos alrededor de la mesa de un modo conveniente.



Los diplomáticos deben sentarse en el siguiente orden: A, C, D, B, E, F.

Un diagrama formado por una cantidad finita de puntos, unidos por líneas se denomina **un grafo**. Los puntos son los **vértices** del grafo, las líneas son las **aristas** del mismo.

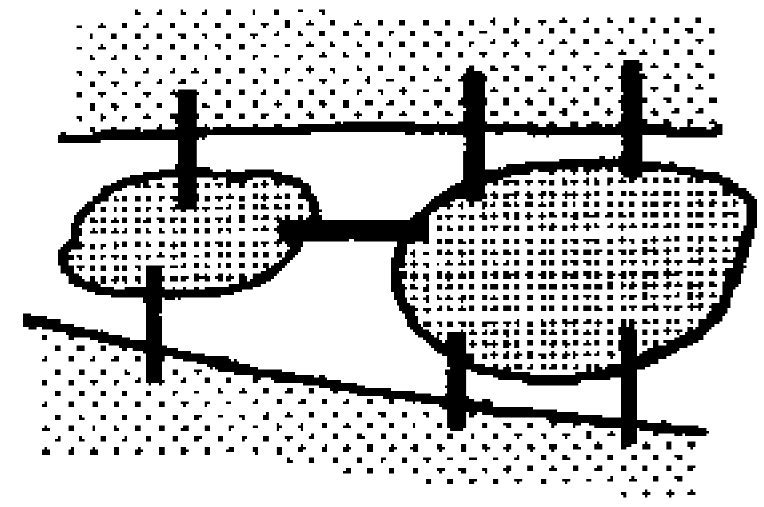
Es importante destacar que la forma en que están dibujadas las aristas es totalmente irrelevante. Lo importante es cuál vértice está conectado con cuál.

Los grafos tienen una gran utilidad como medio para dar representaciones manejables de situaciones complejas.

Un ejemplo lo hemos visto en el problema de los embajadores antes planteado. En esta situación, la solución del problema consistió en hallar un camino en el grafo que fuese cerrado y que pasara una y sólo una vez por cada vértice. Un tal camino se denomina un **ciclo hamiltoniano**. Así llamado en recuerdo de un juego creado y comercializado por el físico-matemático irlandés William R. Hamilton (1805-1865). El juego, llamado "La vuelta al mundo" consistía esencialmente en la búsqueda de un ciclo hamiltoniano en el grafo formado por los vértices y aristas de un dodecaedro regular. Para darle atractivo comercial, los primeros representaban ciudades importantes del mundo y las segundas eran las rutas que las conectaban.

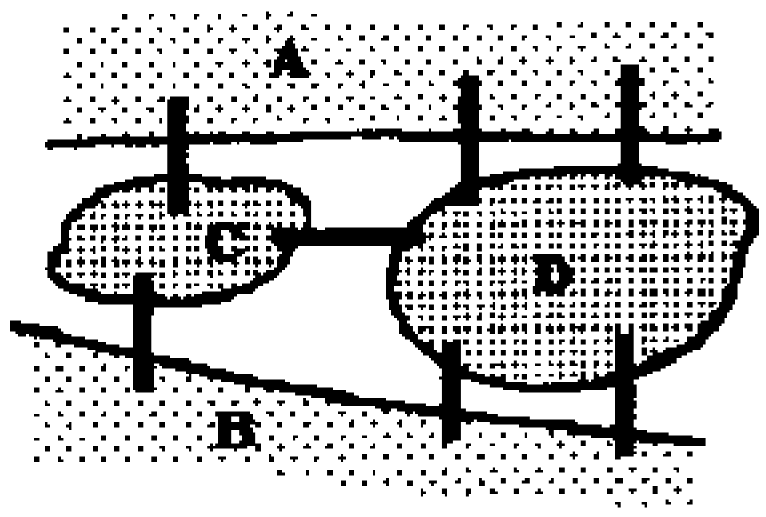
Sin embargo, el más famoso de los problemas relacionados con grafos es el de los Puentes de Königsberg.

A principios del siglo XVIII, la ciudad de Königsberg (Prusia Oriental, hoy Kaliningrado) estaba atravesada por el río Pregel y frente a la ciudad había dos islas. Siete puentes estaban tendidos sobre el río. Cuatro puentes salían de la isla mayor (dos puentes hacia cada orilla). Dos puentes salían de la menor de las islas (uno a cada orilla). Un séptimo puente conectaba las dos islas.

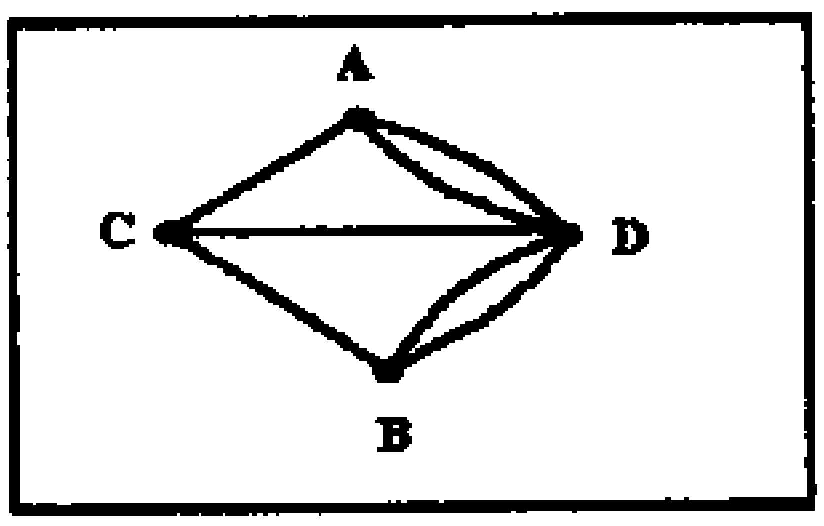


Los habitantes de Königsberg se preguntaban si sería posible hacer un recorrido de modo tal de pasar una sola vez por cada puente, sin omitir y sin repetir ninguno.

El problema llegó a oídos de Leonhard Euler (1707-1783), el más grande matemático de su época, quien presentó la solución a la Academia rusa de San Petersburgo en 1735. Siguiendo a Euler llamemos A y B a las orillas del río Pregel y C y D a las islas.



Construyamos un grafo donde cada una de las cuatro regiones (dos orillas, dos islas) está representada por un vértice y cada puente es una arista.



El problema se reduce a encontrar un camino (no necesariamente cerrado) que recorra una vez cada **arista** sin omitir y sin repetir ninguna (el camino puede, y de hecho debe, pasar más de una vez por un vértice). Un tal recorrido se denomina un camino euleriano (ciclo euleriano si es cerrado).

Euler observó lo siguiente: supongamos que exista un camino y que X es algún vértice del grafo. Si X no es el vértice inicial ni el vértice final del camino; entonces por cada arista que llega a X debe haber una arista que salga de él. Por lo tanto si X no es inicial ni final entonces debe salir de él una cantidad *par* de aristas.

Inversamente, si de un vértice sale una cantidad impar de aristas, entonces ese vértice debe ser el inicial o el final del camino. Como sólo puede haber un vértice inicial y un vértice final entonces la cantidad de vértices con cantidades impares de aristas debe ser a lo sumo dos.

El razonamiento anterior es completamente general. De hecho vale que la condición necesaria y suficiente para que exista un camino euleriano en un grafo es que haya a lo sumo **dos vértices** con una cantidad impar de aristas saliendo de él. La condición necesaria y suficiente para que exista un ciclo euleriano es que todos los vértices tengan una cantidad par de aristas.

En el problema de los siete puentes sobre el río Pregel, como todos los vértices tienen una cantidad impar de aristas (tres los vértices A, B, C y cinco el vértice D) entonces el recorrido es imposible.

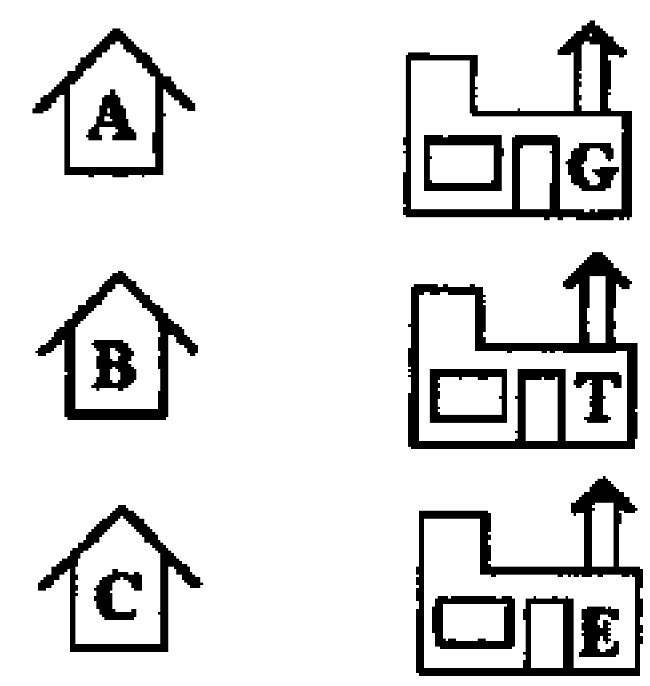
El trabajo completo de Euler con la resolución del problema de los puentes de Königsberg puede leerse en el Tomo 4 de "Sigma, el Mundo de las Matemáticas" de James R. Newman (ed. Grijalbo). Parte del mismo, con comentarios sobre metodología didáctica, se halla en el módulo de "Matemática" del programa Pro-Ciencia del CONICET. La bibliografía sobre grafos, y en particular sobre este problema es muy extensa y la bibliografía sugerida al final de esta nota no debe tomarse como un índice exhaustivo.

Volviendo a los grafos, llamemos *pares* a los vértices que tienen una cantidad par de aristas, e *impares* a los otros. Hemos dicho que si un grafo tiene a lo sumo dos vértices impares entonces existe un camino euleriano. Si no tiene ningún vértice impar entonces en particular hay un ciclo. ¿Qué ocurre si hay tan sólo un vértice impar? La respuesta es que esta situación nunca puede darse. En efecto:

En un grafo cualquiera sólo puede haber una cantidad par de vértices impares. Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de esta última afirmación.

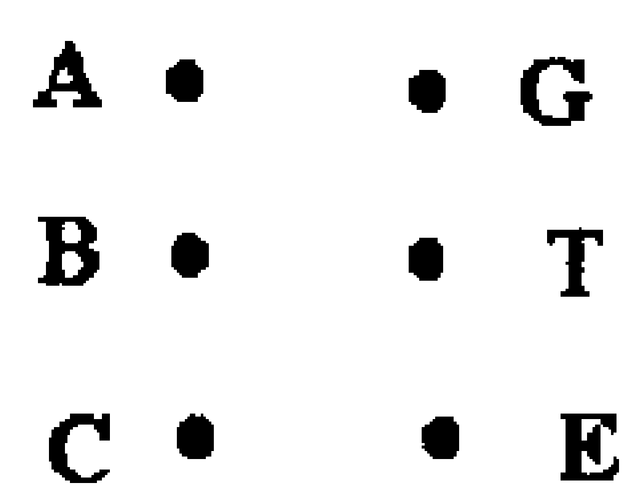
Así como tenemos una condición sencilla para determinar si existe ó no un camino euleriano, se podría desear que haya también una condición sencilla para establecer si existe o no un camino (o un ciclo) hamiltoniano. Sin embargo el deseo quedaría insatisfecho. A la fecha, no se conoce una condición necesaria y suficiente para la existencia de un camino (o un ciclo) hamiltoniano. El determinar si existe o no una tal condición es actualmente un problema abierto. Con los conocimientos actuales, la única forma de establecer la existencia o no de un camino (o un ciclo) hamiltoniano consiste en probar una por una todas las posibilidades hasta hallar un camino. O bien hasta descartarlos a todos. La razón principal del interés en la determinación de estos caminos y ciclos es la posibilidad de establecer en la estructura anárquica del grafo un ordenamiento de sus vértices (lineal o circular). Esto permitiría a su vez la inspección, rotulación y estudio ordenado de los vértices del grafo en cuestión.

Otro problema clásico vinculado con los grafos es el siguiente. Tenemos tres casas (A, B y C) y tres centrales de servicios (de gas, de teléfonos y de electricidad).



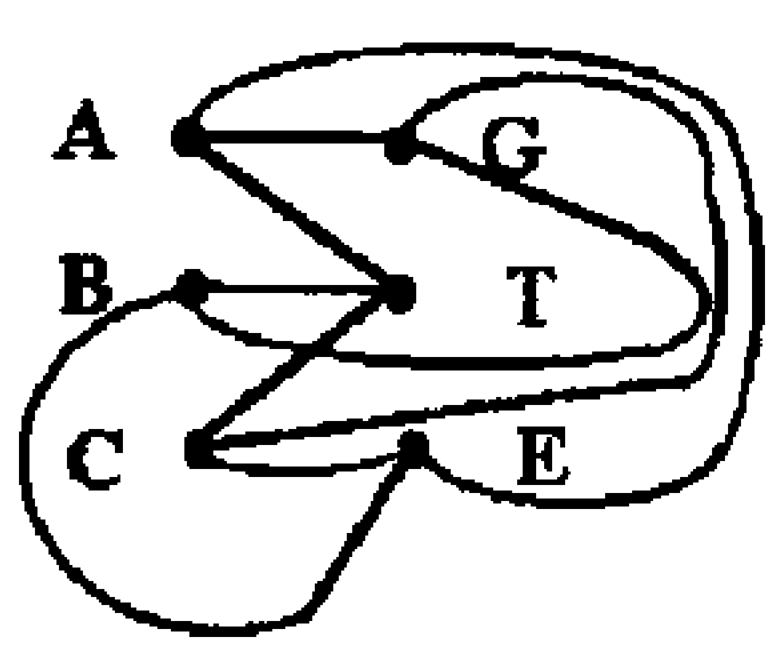
El objetivo es conectar cada una de las casas con cada una de las centrales de modo tal que ninguna de las nueve líneas de conexión se cruce con otra.

El problema se traduce a grafos de modo evidente.

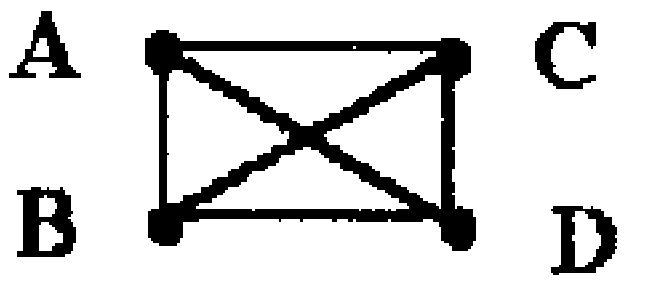


El objetivo se convierte en completar las aristas del grafo de modo tal que cada uno de los vértices A, B, C quede conectado con cada uno de los vértices G, T, E; sin que dos aristas se corten mutuamente.

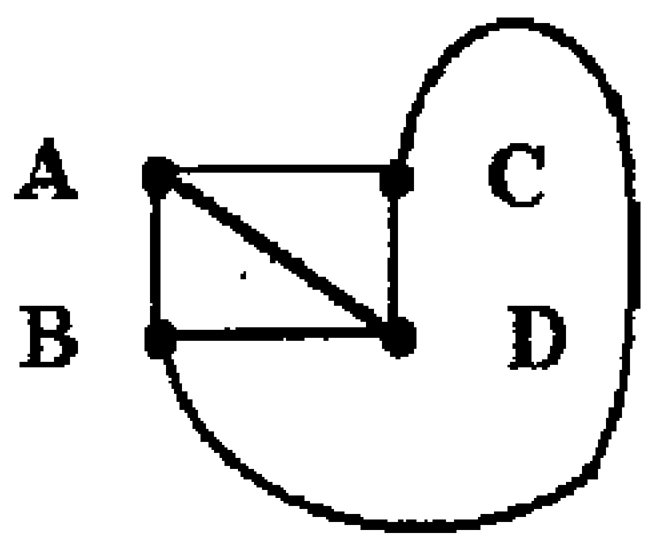
Un intento fallido de resolver el problema se muestra más abajo.



Si un grafo puede dibujarse de modo tal que ninguna de sus aristas se cruce con otra, entonces se dice que ese grafo es *planar*. Observemos por ejemplo el siguiente grafo:



Podría quizás pensarse en primera instancia que no es un grafo planar. Sin embargo, si "deformamos" un poco una de sus aristas podremos lograr que se vea así:



Obtenemos de este modo una representación planar de él. Ambas figuras corresponden en realidad al *mismo* grafo (son dos formas de representar el mismo ente matemático). Pues como ya fue dicho, lo importante en un grafo no es la forma en que se dibujen sus aristas, sino cuáles son los pares de vértices que éstas conectan. En una y otra figura tenemos un grafo de cuatro vértices todos ellos conectados entre sí. Por lo tanto los dos grafos son realmente iguales (o, mejor dicho, ambas figuras son representaciones del mismo grafo).

A los efectos prácticos, podemos pensar a las aristas como tiras de goma deformables y a los vértices como clavos que adhieren sus extremos al papel. Una deformación de las aristas no altera la esencia del grafo.

Volviendo al problema de las tres centrales. La pregunta sería entonces si el grafo en el que hay tres vértices (A, B, C) cada uno de ellos conectado con cada uno de los tres vértices G, T y E admite una representación planar. La respuesta resulta ser negativa.

Aunque la demostración es demasiado extensa para incluirla aquí, lo cierto es que no es posible conectar las tres casas con las tres centrales sin que al menos dos de las líneas de conexión se crucen.

El grafo correspondiente al problema de las centrales (llamado $K_{3,3}$) es uno de los ejemplos más simples de grafos no planares. Otro ejemplo de grafo no planar es aquel que tiene cinco vértices, todos ellos conectados entre sí (este grafo es denominado K_5, el equivalente de cuatro vértices, K_4, es planar como ya hemos visto).

Aunque todos los problemas que hemos citado en relación con los grafos parecen provenir de los juegos de ingenio; los grafos tienen también profundas aplicaciones a problemas más "serios". Desde la clasificación de compuestos orgánicos en biología o la clasificación de cristales en química; hasta el diseño de redes informáticas o la modelización de algoritmos en computación. Incluso los grafos son un recurso eficaz para modelar la red vial de una ciudad y estudiar de ese modo las posibilidades de mejoramiento del tránsito

Gustavo Piñeiro*

* Lic. en Matemáticas de la U.B.A.

Bibliografía:

* GARDNER, MARTIN - *Rosquillas Anudadas* - Barcelona, Labor, 1987.
* NEWMAN, JAMES R. - *Sigma, el Mundo de las Matemáticas* - Barcelona, Grijalbo, 1994.
* RADEMACHER, HANS y TOEPLITZ, OTTO - *Números y Figuras* - Madrid, Alianza Editorial, 1970.
* STEWART, IAN - *Ingeniosos Encuentros entre juegos y Matemática* - Barcelona, Gedisa Editorial, 1990.
* TAHAN, MALBA - *El Hombre que Calculaba* - Bogotá, Editorial Panamericana, 1994.
* TORANZOS, FAUSTO - *Introducción a la teoría de grafos* - Washington D.C., Serie de Matemática Monografía N° 15 - O.E.A., 1976.
* *Matemática, Metodología de la Enseñanza* - Buenos Aires, Programa Pro-Ciencia - CONICET, 1986.

LA EDUCACION

Dr. Albert Einstein

A continuación se reproduce un discurso pronunciado por Albert Einstein en 1936, publicado en 1950. El mismo ha sido extraído del libro Mis Creencias.

Los aniversarios suelen dedicarse sobre todo a exámenes retrospectivos, en particular para evocar el recuerdo de personajes que se han destacado por el fomento de la vida cultural. No debe menospreciarse, por supuesto, este homenaje amistoso a nuestros predecesores, en tanto se considera que este recuerdo de lo mejor del pasado estimula a quienes en el presente se encuentran bien dispuestos para un valeroso esfuerzo en el mismo sentido. Mas esto tendría que hacerlo alguien que, desde su juventud, haya estado en contacto con este país y estuviera familiarizado con su pasado, no un individuo que, como un gitano, ha vagado siempre de un lugar a otro y ha acumulado experiencias en toda clase de países.

No me queda, entonces, más opción que hablar de cuestiones que, ahora y siempre, con independencia del tiempo y del espacio, se relacionan con problemas educativos. No pretendo ser una autoridad en la materia, en especial cuando personas inteligentes y bien intencionadas de todos los tiempos han estudiado los problemas de la educación y han expresado clara y repetidamente sus ideas sobre ellos. ¿De dónde puedo sacar yo el valor, que soy en parte lego en el campo de la pedagogía, para exponer opiniones sin más fundamento que mi experiencia y mis creencias personales? Si se tratase de una cuestión científica, sin duda me sentiría inclinado a guardar silencio.

Pero el caso difiere cuando se trata de hombres en actividad. Aquí no es suficiente el conocimiento de la verdad; al contrario, este conocimiento debe renovarse de manera contínua a través de esfuerzos incesantes. Es como una estatua de mármol que se alza en el desierto y a la que la arena amenaza sepultar. Las manos generosas deben trabajar siempre para que el mármol siga brillando a la luz del sol. Estas manos mías forman también parte de todas esas manos serviciales.

La enseñanza ha sido el instrumento más idóneo para transmitir el tesoro de la tradición de una generación a otra. Esto acaece aún hoy en mayor grado que en tiempos anteriores, pues a causa del desarrolllo moderno de la vida económica se ha debilitado la familia como portadora de la tradición y de la educación. La continuidad y la preservación de la humanidad dependen, por tanto, en un nivel mayor que antes, de las instituciones de enseñanza.

A veces sólo se ve a la escuela como instrumento para transmitir el máximo de conocimientos a la generación presente. Pero esto no es exacto. El conocimiento está muerto; la escuela, en cambio, sirve a los vivos. Deberían cultivarse en los individuos jóvenes cualidades y aptitudes valiosas para el bien común. Mas ello no significa que haya que destruir la individualidad y que el individuo se convierta en simple instrumento de la comunidad, como una abeja o una hormiga. Una comunidad de individuos moldeados con el mismo patrón, sin originalidad ni objetivos propios sería una sociedad empobrecida sin posibilidades de evolución. El objetivo ha de ser, al contrario, formar individuos que actúen y piensen con independencia y que consideren, no obstante, su interés vital más importante el servicio a la comunidad. Por lo que he podido observar, el sistema de educación inglés es el que más se aproxima a este ideal.

Pero, ¿cómo alcanzarlo?

¿Se debe, quizá, tratar de moralizar? En modo alguno. Las palabras son y siguen siendo un sonido vacío, y el camino de la perdición siempre ha estado sembrado de fidelidad verbal a un ideal. Las grandes personalidades no se forman con lo que se oye o se dice, sino mediante el trabajo y la actividad.

Por consiguiente, el mejor método de educación ha sido siempre aquél en que se urge al discípulo a la realización de tareas concretas. Esto se aplica tanto a los primeros intentos de escribir del niño de la escuela primaria, como a una tesis universitaria, o a la simple memorización de un poema, a escribir una composición, a interpretar o traducir un texto, a resolver un problema de matemáticas o a la práctica de un deporte.

Mas, detrás de cada triunfo está la motivación que constituye su fundamento y que a su vez se ve fortalecida por la consecución del fin del proyecto. Ahí residen las principales diferencias, esenciales para el valor educativo de la escuela. El mismo esfuerzo puede surgir del temor y la coacción, del deseo ambicioso de autoridad y honores, de un interés afectivo y un deseo de verdad y comprensión, y por tanto de esa curiosidad divina que todo niño sano posee, si bien tan a menudo se debilita prematuramente. La influencia educativa que ejerce sobre el alumno la ejecución de un trabajo puede ser muy distinta, según provenga del miedo al castigo, la pasión egoísta o el deseo de placer y satisfacción. Y nadie sostendrá, creo, que la administración del centro de enseñanza y la actitud de los profesores no influye en la formación de la psicología de los alumnos.

Para mí lo peor de la escuela es que utiliza como fundamento el temor, la fuerza y la autoridad. Este tratamiento destruye los sentimientos sólidos, la sinceridad y la confianza del alumno en sí mismo. Crea un ser sumiso. No es extraño que tales escuelas sean comunes en Alemania y Rusia. Sé que los centros de enseñanza de este país están libres de este mal, que es el más dañino de todos; lo mismo sucede en Suiza y por cierto en todos los países con gobiernos democráticos. En cierto modo es fácil liberar a los centros de enseñanza de este grave mal. El poder del maestro debe basarse lo menos posible en medidas coactivas, de modo que la única fuente de respeto del alumno al profesor sean las cualidades humanas e intelectuales de éste.

El motivo que enunciamos en segundo lugar, la ambición, o dicho en forma más moderna, la busca de respeto y consideración de los demás, es algo que se halla muy enraizado en la naturaleza humana. Si no se diese un estímulo mental de este género, sería del todo imposible la cooperación entre los seres humanos. El deseo de obtener la aprobación del prójimo es, desde luego, uno de los poderes de cohesión más importantes de la sociedad. En este complejo de sentimientos, se hallan unidas de manera estrecha fuerzas constructivas y destructivas. El afán de aprobación y reconocimiento es un estímulo sano, pero el designio de ser reconocido como el mejor, el más fuerte o más inteligente que el prójimo o el compañero de estudios, conduce muy pronto a una actitud psicológica en exceso egoísta, que puede resultar dañosa para el individuo y la comunidad. Así, la institución de enseñanza y el profesor deben cuidarse de emplear el fácil método de fomentar la ambición personal para impulsar a los alumnos al trabajo diligente.

No pocas personas han citado en este sentido la teoría de la lucha por la vida y de la selección natural de Darwin como una autoridad para fomentar el espíritu de lucha. Hay quienes han intentado también demostrar de manera seudocientífica que es necesario la destructiva lucha económica, fruto de la competencia entre los individuos. Esto es un error, pues el hombre debe su fuerza en la lucha por la vida al hecho de ser un animal social. Lo mismo que la contienda entre las hormigas de un mismo hormiguero impediría la supervivencia de éste, el enfrentamiento entre los miembros de una misma comunidad humana atenta contra su supervivencia.

Por consiguiente, tenemos que prevenirnos contra quienes predican a los jóvenes el éxito, en el sentido habitual, como objetivo de la vida. Pues el hombre que triunfa es aquel que recibe mucho de sus semejantes, por lo general mucho más de lo que corresponde al servicio que presta. El valor de un hombre debería juzgarse en función de lo que da y no de lo que recibe.

La motivación más gratificante del trabajo, en la escuela, en la vida, es el placer que proporciona el trabajo mismo, el que ofrecen sus resultados y la certeza del valor que tienen estos logros para la comunidad. Para mí la tarea decisiva de la enseñanza es despertar y fortalecer estas fuerzas psicológicas en el joven.

Esta base psicológica genera por sí sola un deseo gozoso de obtener la posesión más valiosa que pueda alcanzar un ser humano: conocimiento y destreza artística.

Hacer surgir estos poderes psicológicos productivos es, por supuesto, más difícil que utilizar la fuerza o despertar la ambición individual, si bien tiene un mérito más elevado. Todo consiste en estimular la inclinación de los niños por el juego y el deseo infantil de reconocimiento y guiar al niño hacia dominios que sean beneficiosos para la sociedad; la educación se funda así en el anhelo de una actividad fecunda y de reconocimiento. Si la escuela consigue impulsar con éxito tales enfoques, se verá honrada por la nueva generación y las tareas que asigne a los educandos serán aceptadas como un don especial. He conocido niños que preferían la escuela a las vacaciones.

Una escuela de este tipo exige que el maestro sea una especie de artista en su actividad. ¿Qué puede hacerse para que prevalezca este espíritu en la escuela? No es fácil ofrecer aquí una solución universal que satisfaga a todos. Hay, sin embargo, condiciones fijas que deben cumplirse. En primer término, formar a los profesores para tales escuelas. En segundo lugar, conceder amplia libertad al profesor para seleccionar el material de enseñanza y los métodos pedagógicos que desee emplear. Es cierto que también en su caso se aplica aquellos de que el placer de la organización del propio trabajo se ve sofocado por la fuerza y la presión externas.

Quienes han seguido hasta aquí mis reflexiones con atención pueden formularse una pregunta. He hablado bastante del espíritu en que debe educarse a la juventud, según mi criterio. Nada he dicho, empero, sobre la elección de las disciplinas a enseñar ni sobre el método de enseñanza. ¿Debe predominar el idioma o la formación técnica de la ciencia?

Contesto: En mi opinión todo esto es de importancia secundaria. Si un joven ha adiestrado sus músculos y su resistencia física en la marcha y en la gimnasia, podrá más tarde realizar cualquier tarea ruda. Lo mismo sucede con el empleo de la inteligencia y el ejercicio de la aptitud mental y manual. No se equivocaba, pues, quien expresó: "Educación es lo que queda cuando se olvida lo que se aprendió en la escuela". Por tal causa no me interesa tomar partido en absoluto en la lucha entre los que defienden la educación clásica filológico histórica y los que prefieren la educación orientada hacia las ciencias naturales.

Deseo impugnar, por otra parte, la idea de que la escuela debe enseñar de manera directa ese conocimiento especial y esas aptitudes específicas que se han de utilizar después en la vida. Las exigencias de la vida son demasiado múltiples para que resulte posible esta formación especializada en la escuela. Además considero censurable tratar al individuo como una herramienta inerte.

La escuela tiene que plantearse siempre como objetivo que el joven salga de ella con una personalidad armónica, y no como un especialista. Pienso que este principio es aplicable, en cierto sentido, a las escuelas técnicas, cuyos alumnos se dedicarán a una profesión bien definida. Lo primero debería ser desarrollar la capacidad general para el pensamiento y el juicio independientes y no la adquisición simple de conocimientos especializados. Si un individuo domina los fundamentos de su disciplina y ha aprendido a pensar y a trabajar con autonomía, encontrará sin duda su camino, y además será mucho más hábil para adaptarse al progreso y los cambios, que el individuo cuya formación consista sólo en la adquisición de algunos conocimientos detallados.

En síntesis, quiero subrayar una vez más que lo dicho aquí de manera un tanto categórica no pretende ser más que la opinión personal de un hombre que *únicamente* se funda en su propia experiencia como alumno y como profesor.

** Albert Einstein nació el 14 de marzo de 1879 en Ulm, Alemania. Es considerado como el físico más eminente de este siglo. En 1905 dio a conocer la Teoría especial de la relatividad, llamada a revolucionar la ciencia astronómica. En ese mismo año formuló la Teoría del movimiento browniano con la que demostró la realidad de las moléculas y sus desplazamientos. También en esa fecha llegó a concebir la representación de la luz como cuantos de luz o fogones.. En 1916 completó la Teoría general de la relatividad, en la cual integraba su trabajo anterior. El terror fascista, sin embargo lo obligó a trasladarse a los Estados Unidos, donde en la Universidad de Princeton se dedicó a sus tareas específicas hasta el fin de sus días en 1955. Einstein fue un hombre polifacético a quien atrajeron los grandes problemas de su tiempo, sobre todo la paz y la integración universalista del hombre y la cultura.*

Una gran reforma educativa

Durante la vida de Möebius, que abarcó buena parte del siglo diecinueve, tuvo lugar un notable renacimiento de la ciencia y la educación alemanas. Ahora que Argentina está arrancando trabajosamente con una reforma educativa vale la pena recordar aquella reforma.

Entre 1800 y 1820 Alemania contaba con un sólo matemático verdaderamente importante -el genio Carl Friedrich Gauss (1777-1855)- y los matemáticos jóvenes deseosos de encarar estudios avanzados solían ir a París. Sólo diez años después la situación había cambiado radicalmente: Alemania se había convertido en el centro matemático y astronómico más importante del mundo. ¿Cómo lo lograron?

Parece una historia de gabinete. En 1806 las tropas francesas de Napoleón derrotaron a las fuerzas prusianas en la Batalla de Jena, no lejos de Leipzig. Fue una derrota devastadora, desmoralizadora, y tuvo un efecto traumático sobre Prusia. ¿Qué camino eligieron para dejar atrás el fracaso? La respuesta es, a la vez, sorprendente y obvia. Los alemanes entendieron que su inferioridad ante los franceses había sido una cuestión intelectual, y resolvieron, en consecuencia, transformar la sociedad mediante una reforma educativa. O sea, se trató de una revolución espiritual antes que política. De allí brotaron grandes científicos, entre los que tallaban los matemáticos Bessel, Dirichlet, Jacobi, Möebius, Plücker, Steiner, v. Staudt, entre otros.

El objetivo central de la reforma fue que la persona adquiriese autonomía económica e independencia cultural. El sistema educativo se convirtió en eje central de la sociedad, y los maestros se convirtieron en sus principales agentes. Los profesores de las escuelas secundarias pasaron a gozar de un elevado prestigio social -obtenían los puestos por sus valores científicos y se los trataba como eruditos.

El rol de profesor en las universidades fue redefinido; se le asignó la doble función de enseñar e investigar. Tradicionalmente estas dos funciones habían estado separadas, y la investigación sólo había sido llevada a cabo en las academias.

Las grandes universidades alemanas de este período -Berlín, Heidelberg, Göttingen, Leipzig, Munich-, bien dotadas económicamente y con excelentes bibliotecas, observatorios astronómicos y laboratorios, inventaron el doctorado moderno, al mismo tiempo que los departamentos de investigación donde los estudiantes graduados se preparaban para lograr ese título.

El *Gymnasien* -la típica escuela secundaria alemana- trabajó con iguales principios sociales y metodológicos. Gracias a ello hubo un semillero notable para el desarrollo de la matemática. Varios grandes matemáticos (como Kummer y Weierstrass) se convirtieron en profesores universitarios luego de haber hecho carrera como profesores del secundarios.

El *seminario*, originado en las universidades prusianas, fue otro desarrollo de gran efecto para la comunidad matemática. Una vez por semana el seminario brindaba ejercitación como complemento de las clases normales donde el alumno escuchaba pasivamente al profesor. Los seminarios eran el medio por el que se ponían en contacto científico con los profesores. Los estudiantes que tomaban parte de un seminario debían exponer un tema que le había asignado el profesor; y el profesor (y en menor medida los otros participantes también) comentaría y criticaría la exposición. Los seminarios estaban equipados con una pequeña biblioteca que ponía al alcance de los participantes publicaciones sobre investigaciones recientes.

El seminario fue establecido inicialmente para filología en todas las universidades de Prusia luego de 1810. Resultó ser un medio poderoso, no sólo para conectar a los alumnos con investigaciones recientes, sino también para entrenarlos en técnicas de investigación. Esto es históricamente importante porque los individuos podían convertirse en científicos por entrenamiento, aparte del genio natural que cada uno tuviera; y hasta permitió que personas sin especial talento produjeran resultados de importancia. Tras una demora, las otras dos disciplinas que eran materias escolares básicas (matemática, y la unión de geografía e historia) siguieron el ejemplo de la filología y establecieron seminarios. Estos seminarios fueron la semilla de los posteriores Institutos de Matemática.

Extraído de "El Acertijo" - La revista de los juegos de ingenio - Nº 19 - Diciembre 1995/Enero 1996 Bibliografía citada en el mismo Möebius and his band (Mathematics and Astronomy in Nineteenth-century Germany), editado por John Fauvel, Raymond Flood y Robin Wilson (Oxford University Press, Nueva York 1993).

Si se demuestra con éxito mi teoría de la relatividad,
Alemania me reclamará como alemán,
y Francia declarará que soy ciudadano del mundo.
Si mi teoría resulta ser falsa,
Francia dirá que soy alemán
y Alemania declarará que soy judío.

Albert Einstein (Conferencia en la Sorbona, París)

Problemas Propuestos

1. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola:* Sin utilizar calculadora, demuestre que la expresión

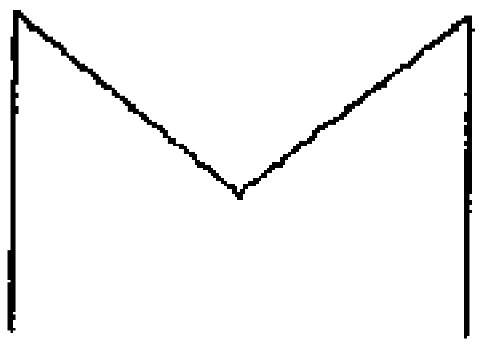
$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ es un número entero y encuéntrelo.

2. *Colaboración del Prof. Alfredo Cóccola:* En una playa de estacionamiento se pintaron en el piso, para su señalización, tres líneas paralelas de 13m, 11m y 8m respectivamente. Luego se decidió que las tres líneas debían tener la misma longitud. Si el costo por metro de prolongar las líneas es igual al de reducirlas, ¿qué largo debieron tener las líneas para economizar gastos?

3. *Colaboración del Prof. Fabián Valiño:* Calcule la siguiente suma: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$. Luego demuestre la validez del resultado obtenido.

4. *De Angela Dunn - "El Concurso de Belleza" - Ed. Juegos & Co. - Zugarto Ediciones:* Una imposibilidad matemática: Demuestre que el producto de cuatro enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

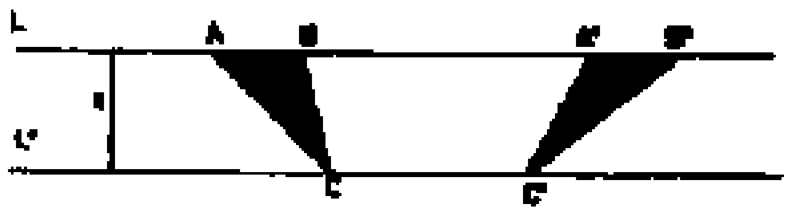
5. *Colaboración de Laura Bancalá:*



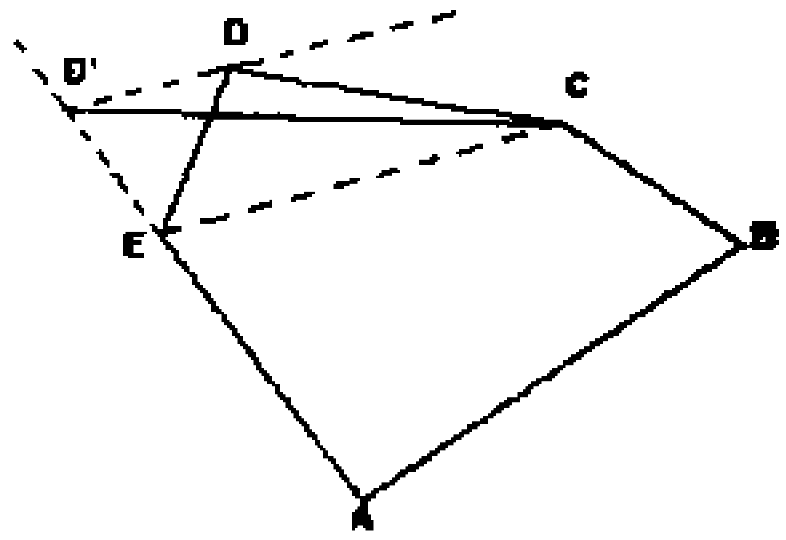
Con tres rectas formar exáctamente nueve triángulos (no contar los que estén incluídos unos en otros).

Soluciones a los Problemas de Axioma Nº 1:

1. *Dado el polígono ABCDE, hallar un cuadrilátero ABCD' que tenga la misma área. - Respuesta dada en Nota 11-O.M.A.-Geometría:* Recordemos el siguiente teorema. Sean L y L' rectas paralelas que distan a. Sean A, B, A' y B' puntos de L con distancia de A a B igual a la distancia de A' a B' y sean C y C' puntos de L'.

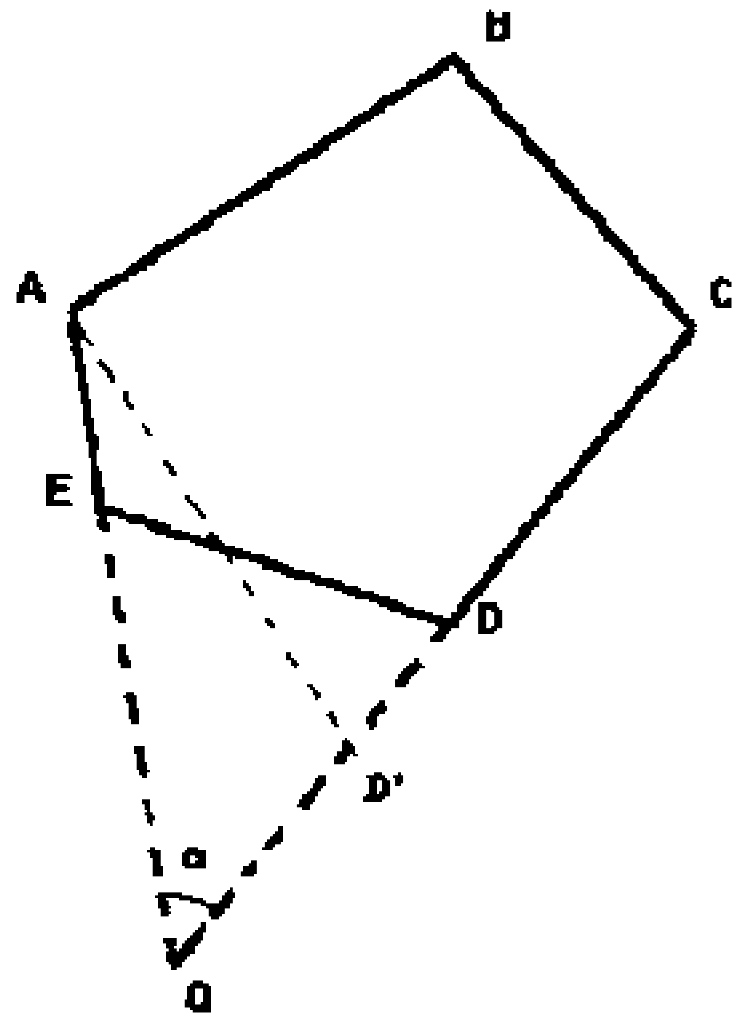


Entonces Area(ABC) = Area(A'B'C'). Si nuestro polígono es ABCDE:



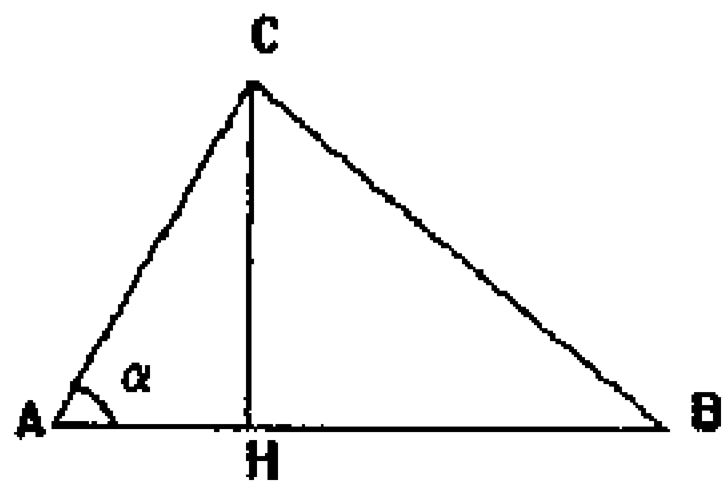
Tracemos una paralela a la diagonal EC por D, hasta cortar la prolongación del lado AE en D'. Luego Area(ECD) = Area(ECD').
Por lo tanto Area(ABCDE) = Area(ABCE) + Area(CDE) = Area(ABCE) + Area(CD'E) = Area(ABCD').

Respuesta dada por Agustín Tonelli



Queremos que: Area(ABCDE)=Area(ABCD'), esto ocurre si y sólo si Area(AQD')=Area(EQD) (1)

Calculemos el área de un triángulo de la siguiente forma:



$$\text{Area}(ABC)=\frac{\overline{AB}\,\overline{CH}}{2}$$

como $sen\alpha=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$ entonces

obtenemos $\text{Area}(ABC)=\frac{\overline{AB}\,\overline{AC}\,sen\alpha}{2}$

Tenemos entonces:

$$Area(AQD')=\frac{\overline{AQ}\cdot\overline{QD'}\cdot sen\alpha}{2}$$

$$Area(EQD)=\frac{\overline{EQ}\cdot\overline{QD}\cdot sen\alpha}{2}$$

Entonces,

$$\frac{\overline{AQ}\cdot\overline{QD'}\cdot sen\alpha}{2}=\frac{\overline{EQ}\cdot\overline{QD}\cdot sen\alpha}{2}\Leftrightarrow$$

$$\overline{AQ}\cdot\overline{QD'}=\overline{EQ}\cdot\overline{QD}\Leftrightarrow\frac{\overline{AQ}}{\overline{EQ}}=\frac{\overline{QD}}{\overline{QD'}}$$

$$\Leftrightarrow\overline{QD'}=\frac{\overline{QD}\cdot\overline{EQ}}{\overline{AQ}}$$

Con lo cual queda determinado D'.

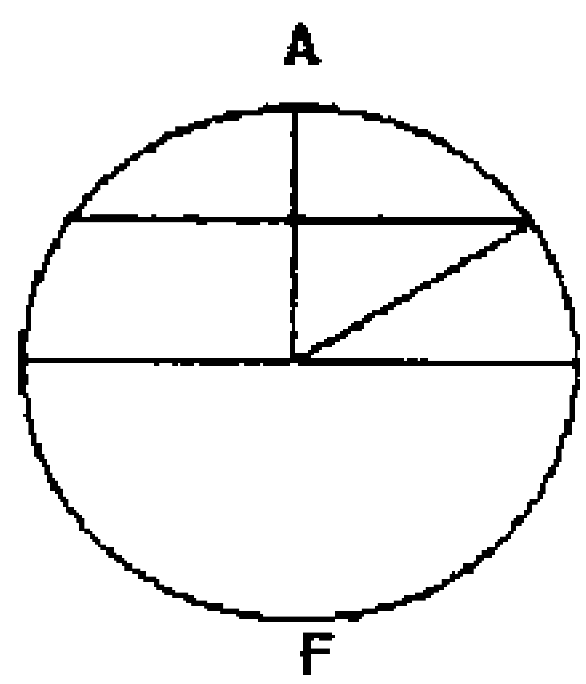
2. *De Enzo Gentile - "Notas de Álgebra I" - Ed. EUDEBA. ¿Cuántas líneas quedan determinadas en el plano por diez puntos no alineados de a tres?*
Como dos puntos determinan una única recta, no importa el orden en que me den esos puntos, tenemos que contar todas las formas de elegir dos puntos de los 10, sin importarnos el orden, esto es:

$$C(10,2)=\frac{10!}{8!.2!}=45$$

Este razonamiento es válido siempre y cuando no tengamos tres puntos que estén alineados, ya que de ser así dos elecciones distintas de pares de puntos determinan la misma recta.

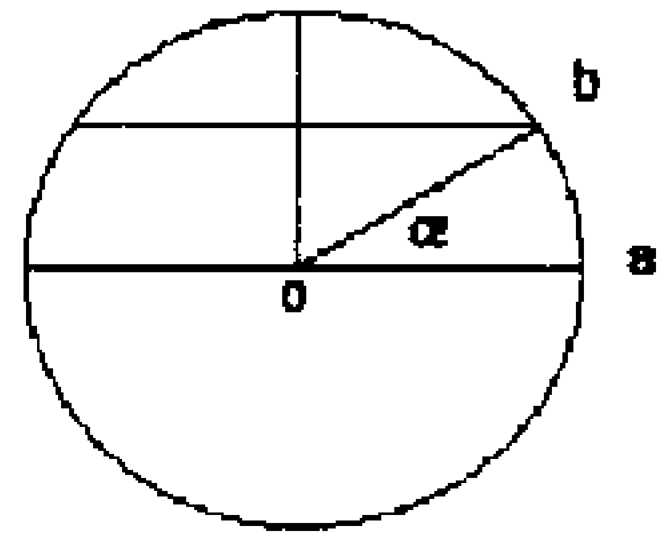
3. *De Pablo Coll - "Primer Congreso Argentino de Juegos de Ingenio Allen '95" - A.J.I.R.A. ¿Es posible armar un dado con hendiduras para que las caras sumen 1,2,3,4,5 y 6 como en los dados comunes?*
No, ya que en los dados comunes la suma de todos los puntos es un número impar 1+2+3+4+5+6=21; y en un dado con hendiduras cada muesca se suma dos veces, por lo tanto al sumar el valor de todas las "caras" el resultado siempre será un número par.

4. *Un nenúfar está a 10 pulgadas por encima de la superficie del agua, y que si se lo inclinara hacia un lado desaparecería bajo la superficie en un punto situado a 21 pulgadas de donde originalmente estaba. ¿Cuál es la profundidad del lago? - Respuesta dada en "Los Acertijos de Sam Loyd" - Sam Loyd - Ed. Juegos & Co.* - Dice Euclides: "Cuando dos cuerdas de un arco se intersectan en el interior de un círculo, el producto de las partes de una será igual al producto de las partes de la otra". En la siguiente ilustración la superficie del agua forma la cuerda de un arco, y como cada parte de esta cuerda es de 21 pulgadas, el producto es 441 pulgadas.



El tallo del nenúfar forma la otra cuerda, y como su altura por encima del agua forma parte de la cuerda, esa parte, 10 pulgadas, multiplicada por la otra parte debe dar las mismas 441 p. que se obtienen a partir del producto de las partes de la otra cuerda. De modo que dividimos 441 por 10 y obtenemos 44,1 como medida de la otra parte de esa cuerda. Sumando 10 y 44,1 obtenemos la medida 54,1 como longitud de la cuerda desde A a F, que es el diámetro del círculo. Debemos dividirlo por la mitad para obtener el radio; 27,05.
Como la flor se erguía a 10 p. por encima de la superficie del agua, debemos deducir esas 10p. para obtener la profundidad del lago, que sería 17,05 p.

Otra forma:



Llamemos α al ángulo que forma el nenúfar inclinado con el fondo del lago. Luego, tendremos que:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{oa}}{\overline{ob}} \quad y$$

$$sen\alpha=\frac{\overline{ab}}{\overline{ob}}$$

reemplazando:

$$\cos\alpha=\frac{12}{\overline{ob}} \quad y$$

$$sen\alpha=\frac{\overline{ob}-10}{\overline{ob}}$$

despejando obtenemos:

$$\cos^2\alpha+sen^2\alpha=$$

$$=\frac{21^2}{\overline{ob}^2}+\frac{(\overline{ob}-10)^2}{\overline{ob}}=1$$

$$21^2 + \overline{ob}^2 - 20\,\overline{ob} + 100 = \overline{ob}^2$$

$$17{,}05 = \overline{ob}$$

5. Colaboración del Prof. Gustavo Krimker. Encontrar el término general de la siguiente sucesión:
1; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0;...

Respuestas dadas por el Prof. Martinez:

a) $a_n \begin{cases} a_{4n+1} = 1 \\ \text{el resto } 0 \end{cases}$

b) $máx\{0, sen(n\frac{\pi}{2})\} =$

$$= \frac{sen(n\frac{\pi}{2}) + \left|sen(n\frac{\pi}{2})\right|}{2}$$

Respuesta dada por Agustín Tonelli y Claudio Salpeter

$$a_n = [\frac{n+3}{4}] - [\frac{n+2}{4}]$$

Este resultado puede generalizarse para las sucesiones de la forma:
1,0,0,0,...,0,1,0,0,0,...,0,1,....
es decir, un 1 seguido de k ceros, con la fómula:

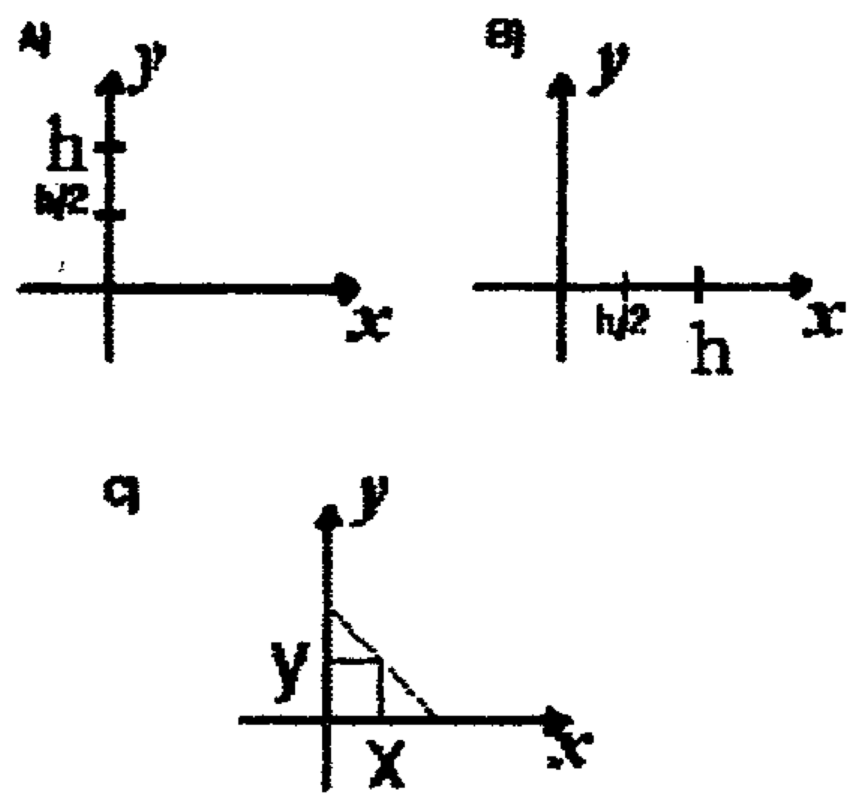
$$a_n = [\frac{n+k}{4}] - [\frac{n+k-1}{4}]$$

Respuesta dada por Gustavo Piñeiro y Gisela S. de Piñeiro

$$a_n = \frac{\left|sen(n\frac{\pi}{2})\right| - sen(n\frac{3\pi}{2})}{2}$$

6. Una vara está apoyada verticalmente sobre una pared. Su extremo inferior comienza a deslizarse por el piso siguiendo una trayectoria rectilinea perpendicular a la pared. ¿Qué curva describe el centro de la vara?

Respuesta dada por Fernando Chorny - estudiante de 1° año del Prof. de Matemática



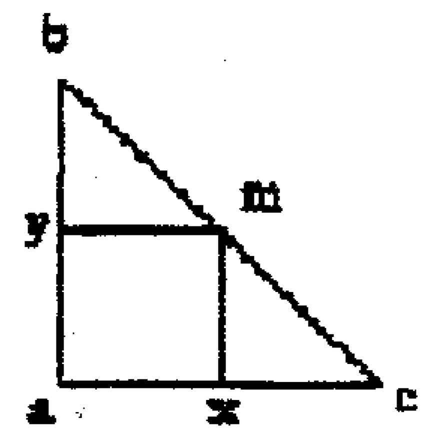
Imaginemos tres posiciones de la barra:

A) posición inicial: está apoyada contra la pared en posición completamente vertical. Si su altura es h las coordenadas del punto medio son (0,h/2).

B) posición final: está recostada en el piso en posición completamente horizontal. Las coordenadas del punto medio son (h/2,0).

C) una posición intermedia cualquiera: las coordenadas del punto medio son (x,y).

De A), B) y C) podemos decir que se trata de encontrar la función que nos dé un valor de y para cada x del dominio [0,h/2]
En el siguiente gráfico quedó formada la figura:



Si observamos la figura que quedó formada en el gráfico C):
$\hat{b} = x\hat{m}c$ por correspondientes entre $\overline{ab}$ y $\overline{mx}$ cortadas por $\overline{bc}$.
$\hat{c} = y\hat{m}b$ por correspondientes entre $\overline{ym}$ y $\overline{ac}$ cortadas por $\overline{bc}$.
$\overline{bm} = \overline{mc}$ por ser m punto medio de $\overline{bc}$ (no olvidemos que m es h/2, el punto medio de nuestra barra).
Luego, por el segundo criterio de congruencia de triángulos, $y\hat{b}m = x\hat{m}c$.
Volviendo al gráfico C), cada uno de los dos "triangulitos" (que, ahora sabemos, son congruentes) tiene un cateto que mide x, un cateto que mide y y una hipotenusa que mide $\frac{h}{2}$. Ahora, por Pitágoras, es:

$x^2 + y^2 = (\frac{h}{2})^2$ de donde,

como $\frac{h}{2} > x$, entonces

$$y = \sqrt{(\frac{h}{2})^2 - x^2}$$

Tenemos entonces la curva que describe el punto medio de la barra, y el gráfico de esta función es un cuarto de circunferencia de radio $\frac{h}{2}$.

¡Hasta el próximo número! ¡Felices soluciones!