

Ομοιόμορφη και μη Ομοιόμορφη Κωδικοποίηση PCM  
Κωδικοποίηση Huffman

Γενικές Πληροφορίες

***Κωδικοποίηση PCM***

Η PCM είναι μια μέθοδος κωδικοποίησης κυματομορφής, η οποία μετατρέπει ένα αναλογικό σήμα σε ψηφιακά δεδομένα. Τυπικά, το σχήμα PCM αποτελείται από τρία βασικά τμήματα: έναν δειγματολήπτη, έναν κβαντιστή, και έναν κωδικοποιητή. Η έξοδος του κωδικοποιητή είναι μια ακολουθία από κωδικές λέξεις (σύμβολα) σταθερού μήκους  $N$  bits.

Στην άσκηση αυτή, θα επικεντρωθούμε στη λειτουργία του κβαντιστή.

***Ομοιόμορφος Κβαντιστής***

Αρχικά καλείστε να υλοποιήσετε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή  $N$  bits, δηλαδή  $2^N$  επιπέδων. Ο κβαντιστής πρέπει να υλοποιηθεί ως συνάρτηση της MATLAB:

```
[xq,centers] = my_quantizer(x,N,min_value,max_value);
```

$x$ : το σήμα εισόδου υπό μορφή διανύσματος

$N$ : ο αριθμός των bits που θα χρησιμοποιηθούν

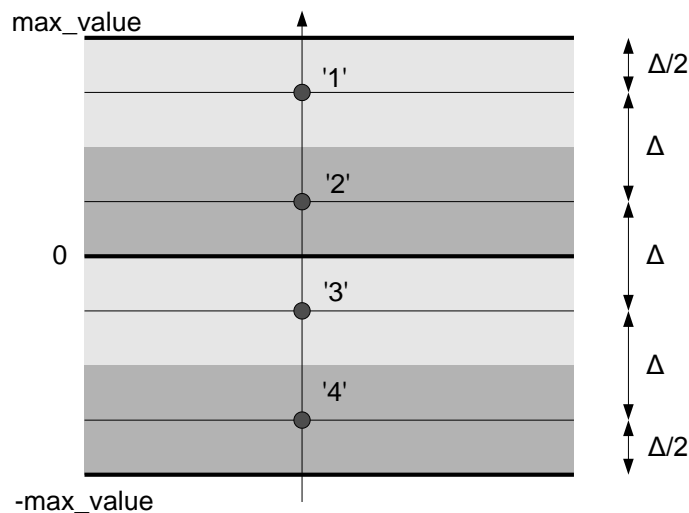
$\text{max\_value}$ : η μέγιστη αποδεκτή τιμή του σήματος εισόδου

$\text{min\_value}$ : η ελάχιστη αποδεκτή τιμή του σήματος εισόδου

$xq$ : το διάνυσμα του σήματος εξόδου κωδικοποιημένο ως εξής: τα επίπεδα κβάντισης αναπαρίστανται με τους ακεραίους  $1,2,\dots,2^N$ , όπου το

μεγαλύτερο θετικό επίπεδο κβάντισης αντιστοιχεί στον ακέραιο 1. Οι ακέραιοι αυτοί μπορούν να αναπαρασταθούν δυαδικά με  $N$  bits.  
centers: τα κέντρα των περιοχών κβάντισης.

Ειδικότερα, ο κβαντιστής θα πρέπει να περιορίζει τη δυναμική περιοχή του σήματος εισόδου στις τιμές  $[\min\_value : \max\_value]$ , θέτοντας τα δείγματα που βρίσκονται εκτός δυναμικής περιοχής στην αντίστοιχη ακραία αποδεκτή τιμή. Στη συνέχεια, ο κβαντιστής υπολογίζει το βήμα κβαντισμού  $\Delta$ , τα κέντρα της κάθε περιοχής, υπολογίζει σε ποια περιοχή ανήκει κάθε δείγμα του σήματος εισόδου, και βγάζει ως έξοδο το διάνυσμα  $x_q$  των ακεραίων. Το διάνυσμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δείκτης στο διάνυσμα centers, και να πάρουμε το κβαντισμένο σήμα ως  $\text{centers}(x_q)$ . Ένα παράδειγμα των περιοχών κβάντισης για  $N=2$  bits φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1: Παράδειγμα ομοιόμορφου κβαντιστή για  $N=2$ bits

## Μη Ομοιόμορφος Κβαντιστής

Για τη μη ομοιόμορφη κβάντιση του διανύσματος εισόδου θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος Lloyd-Max ο οποίος επιτρέπει την σχεδίαση βέλτιστου κβαντιστή για οποιοδήποτε αριθμό επιπέδων. Καλείστε να υλοποιήσετε την παρακάτω συνάρτηση σε MATLAB

```
[xq, centers, D] = Lloyd_Max(x,N, min_value ,max_value);
```

Οι εισοδοι είναι ίδιες με την περίπτωση του ομοιόμορφου κβαντιστή.  
 $x_q$ : το κωδικοποιημένο διάνυσμα εξόδου μετά από  $K_{max}$  επαναλήψεις του αλγορίθμου

centers: τα κέντρα των περιοχών κβάντισης μετά από  $K_{max}$  επαναλήψεις του αλγορίθμου

**D:** Διάνυσμα που περιέχει τις τιμές  $[D_1:D_{k_{\max}}]$  όπου  $D_i$  αντιστοιχεί στην μέση παραμόρφωση στην επανάληψη  $i$  του αλγορίθμου.

Παρακάτω δίνεται μια σύντομη περιγραφή του αλγορίθμου:

1. Αρχικά επιλέγετε ένα τυχαίο σύνολο επιπέδων κβαντισμού:

$$\{\tilde{x}_1^{(0)}, \tilde{x}_2^{(0)}, \dots, \tilde{x}_M^{(0)}\}$$

Στα πλαίσια της άσκησης επιλέξτε τα επίπεδα αυτά να αντιστοιχούν στα κέντρα του ομοιόμορφου κβαντιστή.

**Σε κάθε επανάληψη  $i$  του Αλγόριθμου Lloyd-Max:**

1. Υπολογίζετε τα όρια των ζωνών κβαντισμού, που πρέπει να είναι στο μέσον των επιπέδων κβαντισμού, δηλαδή:

$$T_k = (\tilde{x}_k^{(i)} + \tilde{x}_{k+1}^{(i)}) / 2, \quad 1 \leq k \leq M - 1$$

2. Υπολογίστε το κβαντισμένο σήμα με βάση τις περιοχές αυτές και μετρήστε την μέση παραμόρφωση  $D_i$  με βάση το δοθέν σήμα

3. Τα νέα επίπεδα κβαντισμού είναι τα κεντροειδή των ζωνών:

$$\tilde{x}_k^{(i+1)} = E[x | T_{k-1} < x < T_k]$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα 3 τελευταία βήματα μέχρις ότου:

$$|D_i - D_{i-1}| < \varepsilon$$

Η τιμή του  $\varepsilon$  καθορίζει και τον αριθμό των  $K_{\max}$  επαναλήψεων.

## ***Κωδικοποίηση Huffman***

Ο αλγόριθμος Huffman αποτελεί έναν κωδικοποιητή διακριτών πηγών, που αντιστοιχεί τα σύμβολα εισόδου σε κωδικές λέξεις μεταβλητού αριθμού bits. Μαζί με την εκφώνηση της άσκησης, σας δίνεται το αρχείο `huffman.m` που υλοποιεί τον αλγόριθμο Huffman:

`[code,len] = huffman(p);`

`p`: διάνυσμα πιθανοτήτων εμφάνισης κάθε συμβόλου

`code`: ο κώδικας καθενός συμβόλου (μεταβλητή τύπου `string`)

len: το μήκος της κωδικοποίησης κάθε συμβόλου σε bits.

## Πηγές

Στην άσκηση αυτή, θα κωδικοποιήσουμε δύο πηγές, A και B. Η έξοδος της πρώτης πηγής A είναι μια τυχαία διαδικασία, που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_X(x)$  της εκθετικής κατανομής δίνεται παρακάτω:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για να παράγετε M δείγματα μιας τέτοιας τυχαίας διαδικασίας στη MATLAB, μπορείτε να ακολουθήσετε την ακόλουθη διαδικασία:

1. Παράγετε M δείγματα από μια κυκλικά συμμετρική μιγαδική Gaussian κατανομή μέσης τιμής 0 και διασποράς 1 ( $t \sim CN(0,1)$ ) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `randn(.)` ως

```
>> t = (randn(M,1)+j*randn(M,1))/sqrt(2);
```

2. Τα M δείγματα που προκύπτουν από το τετράγωνο του μέτρου των παραπάνω δειγμάτων ακολουθούν εκθετική κατανομή

```
>> x = abs(t) .^ 2;
```

Για τις ανάγκες της άσκησης,  $M=10000$ .

Η δεύτερη πηγή B είναι τα εικονοστοιχεία (pixels) μιας grayscale εικόνας. Μια τέτοια εικόνα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα πίνακας με εικονοστοιχεία όπου κάθε εικονοστοιχείο αντιστοιχεί σε ένα byte πληροφορίας. Κάθε εικονοστοιχείο επομένως λαμβάνει μια τιμή στο δυναμικό εύρος  $[0:255]$  η οποία αντιστοιχεί σε ένα από τα 256 επίπεδα φωτεινότητας (το 0 αντιστοιχεί στο μαύρο και το 255 στο λευκό).

Στο αρχείο `lenna.mat` περιέχεται ένα σήμα εικόνας. Για να φορτώσουμε το συγκεκριμένο σήμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση:

```
>> load lenna.mat
```

οπότε το σήμα εικόνας φορτώνεται στο πίνακα  $x\_le$ . Οι τιμές του πίνακα αυτού αντιστοιχούν στο δυναμικό εύρος  $[0:255]$ . Για να απεικονίσουμε την εικόνα που αντιστοιχεί στο πίνακα  $x\_le$  εκτελούμε:

```
>> imshow(uint8(x_le));
```

Η δεύτερη πηγή,  $B$ , είναι το διάνυσμα που προκύπτει από τον πίνακα  $x\_le$  αν αντιστοιχήσουμε τις τιμές που ανήκουν στο  $[0:255]$  στο δυναμικό εύρος  $[-1:1]$  εκτελώντας

```
>> x=x_le(:);  
>> x=(x-128)/128;
```

Οπότε έχουμε ένα σήμα  $x$  το οποίο περιορίζεται στη δυναμική περιοχή  $[-1:1]$ , όπου χρησιμοποιούνται 8 bits για την αναπαράσταση κάθε δείγματος. Για να απεικονίσουμε ένα τέτοιο σήμα  $x$  σε μια εικόνα πρέπει αρχικά να αντιστοιχίσουμε τη δυναμική περιοχή του από  $[-1:1]$  στη  $[0:255]$  εκτελώντας

```
>> x=128*x+128;
```

και στη συνέχεια να μετατρέψουμε το διάνυσμα σε εικόνα διαστάσεων  $M \times N$  (στη περίπτωση μας  $M=N=256$ ) εκτελώντας

```
>> y=reshape(x,M,N);
```

Τελικά απεικονίζουμε τον πίνακα που προκύπτει χρησιμοποιώντας την εντολή `imshow`

```
>> imshow(uint8(y));
```

## Ερωτήσεις – Ζητούμενα

1. Χρησιμοποιώντας τον ομοιόμορφο κβαντιστή που υλοποιήσατε, κωδικοποιήστε την πηγή  $A$  για  $\min\_value=0$  και  $\max\_value=4$ , και  $N=2$ ,  $N=4$  και 6 bits.
  - a. Υπολογίστε το SQNR (dB) στην έξοδο του κβαντιστή. Υπολογίστε τη θεωρητική τιμή του SQNR. Συγκρίνετε και

- σχολιάστε τα αποτελέσματα της θεωρητικής και της πειραματικής τιμής του SQNR που υπολογίσατε.
- b. Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί η είσοδος του κβαντιστή εκτός της δυναμικής περιοχής του (πιθανότητα υπερφόρτωσης); Υπολογίστε θεωρητικά και πειραματικά την πιθανότητα αυτή.
  - c. Υλοποιήστε μια συνάρτηση που να υπολογίζει (θεωρητικά) την πιθανότητα εμφάνισης κάθε στάθμης του κβαντιστή. Για να επαληθεύσετε τους υπολογισμούς σας μετρήστε κάθε πιθανότητα εμφάνισης και συγκρίνετε την με τη θεωρητική τιμή που υπολογίσατε. Ποια είναι η αποδοτικότητα της κωδικοποίησης PCM;
  - d. Χρησιμοποιήστε τη ρουτίνα Huffman για να κωδικοποιήσετε την πηγή A2 που προέκυψε από το κβαντισμό της πηγής A (για  $N=2$ ,  $N=4$  και 6 bits). Ποια είναι η αποδοτικότητα του κώδικα Huffman;
2. Κωδικοποιήστε την πηγή B χρησιμοποιώντας τον α) τον ομοιόμορφο και β) τον μη ομοιόμορφο κβαντιστή που υλοποιήσατε για  $\min\_value=-1$  και  $\max\_value=1$  και  $N=2,4,6$  bits.
- a. Παραθέστε γραφική παράσταση που θα παρουσιάζει το SQNR σε συνάρτηση με το  $N$  για τους δύο κβαντιστές. Σχολιάστε τα αποτελέσματα
  - b. Παραθέστε την προκύπτουσα εικόνα για κάθε περίπτωση. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

### Παρατηρήσεις

- Η αναφορά παραδίδεται ηλεκτρονικά μέσω e-class. Στο τέλος της αναφοράς, παραθέστε τον κώδικα που υλοποιήσατε. Το αρχείο της αναφοράς θα πρέπει να είναι σε μορφή pdf και να έχει ως όνομα τον αριθμό μητρώο σας. Για παράδειγμα αν η άσκηση έχει γίνει από τον φοιτητή με AM 2710 θα πρέπει το αρχείο να έχει όνομα 2710.pdf. Το αρχείο θα το ανεβάσετε στην ενότητα “εργασίες” του μαθήματος στο e-class.
- Παραδίδονται ατομικές αναφορές. Αν έχετε συνεργαστεί με κάποιον(-α), οπότε έχετε ενδεχόμενα κάποια κοινά μέρη, τότε θα πρέπει να το αναφέρετε στην αρχή της αναφοράς. Επίσης, θα πρέπει στο όνομα του

αρχείου να αναφέρετε τους αριθμούς μητρώου των ατόμων με τα οποία συνεργαστήκατε μέσα σε παρένθεση διαχωριζόμενους με το χαρακτήρα «\_». Για παράδειγμα αν ο ΑΜ 2710 συνεργάστηκε με τον 2711 θα πρέπει ο 2710 να έχει όνομα 2710\_(2711).pdf στην αναφορά του ενώ ο 2711 2711\_(2710).pdf

- Η παράδοση της άσκησης μπορεί να γίνει μέχρι τη Δευτέρα **17/01/2011**.
- Απορίες **σχετικές με** την άσκηση θα λύνονται μόνο στα φροντιστήρια ή μέσω του forum του μαθήματος.