限界を知る数学

1　はじめに

教科書や問題集を使って勉強をしていると、ついつい忘れてしまう事がある。それは、ほとんど数学の問題は「解けない問題」であること。教科書に掲載されているのは数多の問題のうち、諸君の解くことができるごく僅かな部分なのだ。この記事では誰でも思いつきそうな単純な問いが不可解であるケースを紹介し、諸君には数学の「無力さ」を実感していただきたく思う。

2　和と積がともに 2 となる 2 数

まずはこの問題を考えよう。

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$$

適当にそれらしい値を代入してみても、解が見つからないだろう。ここで 2 次方程式の解と係数の関係を適用してみる。2 数の和と積が与えられているので、それらを解に持つ次の 2 次方程式 $x^2 - 2x + 2 = 0$ が得られる。しかしこれを解くと解が (実数に) 存在しないことがわかる。複素数の概念を導入しない限り、この問題に解を得ることはできないのである。しかしこの例はまだいい方である。なぜなら複素数の概念を知らなくともこの方程式が不可解であることには気づくことができるから、ある意味で「解が得られない」という答えを知ることができる。本当に怖いのは「解が得られない問題」に対して「解が得られない」という事実に気づくことのできない場合である。

3　積分の沼

もし諸君が一通り数学 III まで履修していたら、どんな初等関数でも微分できるはずだ。しかし、積分の場合はそうはいかない。例えば $\int x^x dx$ は初等的に表すことのできない不定積分である。また $\sin x \log x$ なども原始関数が初等的に表せない例である。このような原始関数は無限級数や定義に積分を含む特殊関数などによって表される。例えば

$$\int x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k} x^{n+1} \log^k x}{k!(n+1)^{n+1-k}} + C$$

などと分かる。しかしそんなことを知らない高校生はとりあえず部分積分してみたり、変数変換してみたりと路頭に迷うことになる。そしてこの積分が簡単に解けないことも知らずにただひたすら計算をしてしまうのである。一応積分が初等的に解けるかどうかを調べる定理は存在するが、それを理解するには微分体の理論を学ぶ必要がある。結局の所、高校生が積分を完全に理解することはできないし、漸化式や確率の分野でも同様のことが言える。従って高校の教科書を読んだだけで数学を完全に理解したと考えるのは完全なる愚の骨頂である。