L'apprentissage des mathématiques au cycle 2

Numération et Calcul

Plan

- I- Place dans les programmes
 - 1- Programmes 2008 p.1
- II- La démarche d'apprentissage
 - 1- Le sens donné à l'apprentissage en cours de réalisation p.3
 - 2- Les différentes composantes de l'apprentissage p.4
 - 3- La démarche en mathématiques p.5
 - 4- La pédagogie à l'école primaire p.5
- III- La construction du concept de nombre chez l'enfant
 - 1- La définition du concept de nombre p.6
 - 2- La théorie piagétienne de la construction du nombre p.6
 - 3- Les apports post-piagétiens p.7
- IV- La construction du nombre à l'école primaire
 - 1- Les obstacles repérés chez les élèves pour la construction du nombre p.8
 - 2- L'analyse des obstacles à la construction du nombre, à l'aide d'éclairages théoriques,
 - 2-1 : plusieurs façons de s'approprier le nombre p.9
 - 2-2 : pistes pédagogiques pour travailler le nombre p. 11
 - 3- Intérêt des situations expérimentales p.21
 - 4- L'évaluation p.21
- V- L'organisation matérielle de la classe
 - 1- Le coin mathématique p.21
 - 2- Les outils des élèves p.22
- VI- Bibliographie p.22

Annexe: Synthèse des obstacles et pistes pédagogiques p.24

I- Place dans les programmes

1- Programmes 2008

L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement.

La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable. De premiers

automatismes s'installent. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.

Nombres et calcul

Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent. Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100.

L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés.

Progression

Cours préparatoire

Nombres et calcul

- -Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.
- -Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition").
- -Comparer, ranger, encadrer ces nombres.
- -Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.
- -Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20.
- -Connaître la table de multiplication par 2.
- -Calculer mentalement des sommes et des différences.
- -Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous.
- -Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100).

Cours élémentaire première année

Nombres et calcul

- -Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.
- -Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.
- -Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.
- -Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant.
- -Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5.
- -Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits.
- -Calculer en ligne des suites d'opérations.
- -Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000).
- -Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre.

-Résoudre des problèmes simples à une opération.	-Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier).
	-Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de
	la multiplication.
	-Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème
	de partage ou de groupements.
	-Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

Compétence 3 en numération et calcul

L'élève est capable de :

- écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000 ;
- calculer: addition, soustraction, multiplication;
- diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 (dans le cas où le quotient exact est entier) ;
- restituer et utiliser les tables d'addition et de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ;
- calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions et des multiplications simples ;

II- La démarche d'apprentissage

1- Le sens donné à l'apprentissage en cours de réalisation

Il est indispensable que l'enfant sache à quoi servent les tâches qu'il doit réaliser.

Il importe donc que:

- L'apprentissage ait un but précis et identifié,
- La tâche ait un but précis et annoncé,
- Chacun sache ce qu'il a à faire et pourquoi il le fait.

Dès l'entrée à l'école maternelle, il est important d'amener l'enfant à une dynamique de progrès.

2- Les différentes composantes de l'apprentissage

Apprendre = améliorer ses compétences

- le répertoire de ses savoirs - la variété des situations maîtrisées - son intelligence du monde

Influence des Nécessité d'un obstacle qui Les acquis sont provisoires, ils évoluent connaissances avec le temps et les situations bouscule les pré-acquis antérieures - Évaluation Expliciter les Expliciter les diagnostique nouveautés prolongements - Programmation - Proposer des - Harmonisation situations posant avec le cycle commune au problème cycle suivant Garder le temps Construire des d'automatiser écrits référents Organiser des - Organiser le projets pour travail des réinvestir élèves par deux La mémorisation Disposer de ressources pour réussir. améliore les acquis internes, externes, sociales

Allal, L. (2002). Acquisition et évaluation des compétences en situation scolaire. In J. Dolz, & E. Olagnier, *L'énigme de la compétence en éducation* (p. 77-94). De Boeck.

⇒ Importance « d'éclairer » un parcours d'apprentissage:

- Donner à l'élève **le but** de l'apprentissage,
- Identifier avec lui ce qu'il sait déjà,
- Mettre en place un parcours d'apprentissage (temps d'apprentissage et d'exercice),
- Evaluer,
- Identifier avec lui les progrès.

3- La démarche en mathématiques (M. Mégard, IG)

Les connaissances et les compétences s'acquièrent progressivement, et toute lacune à un niveau donné peut s'avérer un obstacle difficilement surmontable aux niveaux suivants.

Evolution spiralaire des apprentissages

Les apprentissages se construisent dans la durée, par approfondissements et enrichissements successifs.

4- La pédagogie à l'école primaire

a) Des activités complémentaires pour faire apprendre

- Le jeu (davantage en maternelle) pour apprendre, s'exercer
- Les recherches, l'expérimentation (à la mesure de jeunes enfants), la résolution de problèmes
- L'imprégnation culturelle
- Les exercices
- ⇒ Valable à tous les niveaux, dans des proportions différentes

b) La mobilisation à bon escient des trois formes possibles de groupement

- Les activités collectives: intéressantes dans les phases de départ, de structuration, de réinvestissement dans des rituels, ...
- Les **activités réalisées en groupes**: différencier les activités individuelles pour lesquelles les élèves sont assis côte à côte (faire à côté de) et les activités de groupe qui nécessitent des **interactions** entre les élèves (faire avec),
- Les activités individuelles: souvent pour s'entraîner.

c) Les temps d'une séance de mathématiques

- **Calcul mental**: *calcul automatique* ⇒ mobilisation des connaissances
- Temps d'apprentissage : à partir d'une situation problème, temps de recherche (individuel, puis par 2 ou 4)
- Temps de structuration : construction du concept mathématique
- **Réinvestissement** : exercices (place éventuelle du fichier)

NB : Un temps par semaine plus long sera prévu pour travailler le *calcul réfléchi* ⇒ procédures en calcul mental.

III- La construction du concept de nombre chez l'enfant

1- La définition du concept de nombre

- Différence entre nombre et nombre de : un nombre ne représente pas une quantité, il ne la désigne pas, il ne l'exprime pas.
- Il aide à quantifier.
- Un nombre est une idée qui permet de se représenter ou d'imaginer une quantité.
- Un nombre est un élément qui appartient à un ou plusieurs ensembles suivants :
 - N: entiers naturels (0 à + infini entiers)
 - Z : entiers relatifs (-infini à + infini entiers),
 - Q : entiers rationnels (fractions de –infini à + infini : ex ½)
 - D : décimaux (Tous les nombres dont la partie fractionnelle est finie, de infini à + infini ex : 3,537)
 - R : réels (Tous les nombres de –infini à + infini : ex π)
- Un nombre peut s'écrire avec des chiffres, des mots, une lettre, un symbole (π)
- Différence entre chiffre, numéro et nombre (le langage courant est souvent source d'erreurs)

Le nombre entier naturel peut être envisagé sous son **aspect cardinal**, comme la propriété commune à toutes les collections concrètes d'objets qui contiendraient le même nombre d'objets.

L'ensemble de tous les cardinaux est ordonnée. C'est l'aspect ordinal.

2- La théorie piagétienne sur la construction du nombre (conservation)

Selon **Piaget** (1896-1980), le nombre ne devient une notion opératoire que lorsque l'enfant est capable de percevoir la conservation de l'extension d'une collection, la sériation des longueurs, et l'inclusion des classes.

Le nombre serait donc construit par l'enfant grâce à 3 capacités logiques (sériation, classification, conservation), acquises progressivement pour arriver à maîtriser le concept de nombre.

L'opération de **sériation** consiste à ordonner une série d'objets en fonction de leurs différences (taille, poids, ...). La sériation apparaît dans l'acquisition de la suite ordonnée des naturels : 5 est plus grand que 4, qui lui-même est plus grand que 3 ...

La catégorisation est une activité cognitive conduisant l'individu à traiter de la même façon des objets différents, et donc à dépasser les spécificités au profit de la généralité : c'est dégager des caractéristiques communes envers des objets, des personnes ou des situations.

Catégoriser consiste à considérer de manière équivalente des objets, des personnes ou des situations qui partagent des caractéristiques communes.

- C'est subdiviser des connaissances en catégories et savoir expliquer comment s'organisent ces catégories.
- C'est un processus de base intervenant dans la plupart des comportements humains.

La question de **la conservation** se pose devant deux collections composées du même nombre d'objets mais disposés différemment. L'enfant non conservant répondra qu'il y a plus de jetons là où c'est le plus long, alors que l'enfant conservant dira qu'il y en a le même nombre.

A 4 ans, l'enfant a une intuition perceptive (longueur = nombre). Ce n'est que vers 6-7 ans qu'il parvient à ne plus être « prisonnier » du cadre visuospatial, et devient conservant.

3- Les apports post-piagétiens

• D'autres recherches ont montré qu'il était dommageable de ne pas avoir considéré l'activité de comptage chez l'enfant.

En effet, les activités de comptage occupent une place importante dans les activités des jeunes enfants et dans leur première appréhension des nombres.

• Des auteurs ont montré que la pratique du dénombrement précède l'accès à la conservation. Ils ont comparé l'effet de l'apprentissage du comptage, du dénombrement et de la logique.

Il s'avère que les enfants entraînés à compter et dénombrer des petites collections ont de meilleures performances à des tâches numériques, alors que leurs scores sont comparables aux autres élèves pour des tâches logiques.

Apprendre à dénombrer aide l'enfant à développer les capacités opératoires qui sous tendent le concept de nombre.

⇒ Il y a complémentarité. Ainsi, la construction du nombre semble reposer à la fois sur les notions logiques développées par Piaget (sériation, classification, conservation) et sur des procédures de dénombrement et de comptage.

- Aujourd'hui, les recherches faites sur ce que sait faire le bébé avant de savoir parler montrent qu'il est sensible au fait :
- qu'une collection de 2 objets n'est pas une collection d'un seul objet mais de plus,
- que le retrait d'un objet à une collection de 2 objets ne laisse pas invariante la collection de 2 objets. Il est donc sensible à une différence.

Vers 4 ans ½, les enfants sont capables de dire le nombre d'objets d'une collection de 1 à 3 objets, sans les compter.

Si l'enseignant lui fait ensuite compter les objets, l'élève constate que le mot-nombre obtenu par perception globale est aussi celui qui termine le comptage.

• Selon **R.** Charnay, l'acquisition de la chaîne numérique verbale (1 ;2 ;3 ;...) et son usage dans les processus de quantification (combien ?) est déterminante.

Ces habiletés verbales constituent les éléments à partir desquels s'édifient les acquisitions ultérieures.

IV- La construction du nombre à l'école primaire et le calcul

1- Les obstacles repérés chez les élèves de cycle 2 pour l'acquisition du nombre et du calcul

- Oralité du nombre
- Mauvaise utilisation des mots dans le langage courant
- Méconnaissance de la suite numérique
- Pas de correspondance entre le mot-nombre et la quantité
- Pas de notion de grandeur, de valeur approchée
- Différentes écritures du nombre
- Difficulté à écrire les nombres en chiffres: numération de position
- Difficulté à manipuler le nombre: décomposer, recomposer de différentes façons
- Pas d'automatismes en calcul mental
- Difficulté à positionner les chiffres du nombre dans une opération
- Difficulté à poser et effectuer une opération
- Pas de connaissance du sens de l'opération
- Difficulté à réaliser des problèmes à étapes

2- L'analyse des obstacles à la construction du nombre, à l'aide d'éclairages théoriques

2-1: Plusieurs façons de s'approprier le nombre

Selon Gelman (1983), psychologie américaine

5 principes caractérisent le comptage et correspondent à 5 compétences des élèves

- Principe **d'ordre stable** lié à la stabilité de la suite numérique
- Principe de correspondance terme à terme : mettre en relation un mot nombre et un objet
- Principe cardinal : le dernier mot-nombre représente le nombre d'éléments de la collection
- Principe d'abstraction : la nature des objets dénombrés n'influe pas sur le cardinal
- Principe de **non pertinence de l'ordre** : l'ordre de comptage des objets n'influe pas sur le cardinal de l'ensemble.

Chacun de ces principes semble très tôt acquis mais la difficulté du comptage provient de la nécessité de coordonner plusieurs procédures cognitives :

- Enumérer des objets sans en oublier et sans compter deux fois le même élément (la complexité dépend de la possibilité ou non de déplacer les objets, de la disposition spatiale de la collection ...)
- Dire la suite des nombres, sans se tromper en associant bien à chaque objet un mot-nombre et en s'arrêtant correctement
- Enoncer le dernier mot-nombre prononcé comme réponse à la question posée.

Selon M. Fayol

Il faut différencier les relations logico-mathématiques et la pratique socio-culturelle du nombre et des activités de comptage

- Les relations **logico-mathématiques** qui englobent les opérations logiques (classement, sériation) ⇒ Construction logique du nombre, en s'appuyant sur les travaux de Piaget : les opérations logiques de classement et de sériation, la correspondance terme à terme.
- La pratique **socio-culturelle** du nombre et des activités de comptage, le traitement de l'information (mémorisation, automatisation des procédures, coordination des opérations mentales)

 □ Une approche empirique du problème : comptage, dénombrement

Selon M. Fayol, R. Charnay,

La maîtrise de la suite verbale est essentielle.

Tant que la suite verbale n'est pas maniée correctement, on ne peut pas pratiquer des activités de dénombrement. C'est un problème d'acquisition du langage et non un problème conceptuel.

Il faut favoriser la mémorisation de la comptine, pour :

- Aboutir à une représentation mentale de la chaîne numérique,
- Puis proposer des situations problèmes de types additifs et soustractifs mettant en jeu des opérations simples (5+3).

Selon R. Brissiaud.

Le cheminement d'un enfant vers le nombre dépend des outils culturels que l'on met à sa disposition.

- Le comptage
- Le langage pour « parler des nombres »
- Les collections-témoins.

Selon R. Charnay,

SENS et COMPREHENSION doivent être reliés.

- On ne doit pas seulement travailler des techniques, mais travailler bien sûr la compréhension.
- L'évaluation doit se faire à travers les situations-problèmes.
- La priorité est à donner au calcul mental : mémorisation et calcul réfléchi.
- Il faut bien penser l'articulation entre les cycles : école primaire et collège, GS et CP.
- 4 aspects ... pour la maîtrise d'une notion mathématique :
- Les problèmes qu'elle permet de résoudre
 - o Toute notion doit aider à traiter des problèmes.
- Les résultats, les procédures, les techniques à mémoriser, à automatiser, à savoir élaborer
 - o Ex : fin de cycle 2 : 5+4=9 doit être mémorisé
 - o En cycle 3 : 17+9=26 La procédure doit être produite.
- Les propriétés
 - o Utilisées implicitement : 17+9=17+10-1 =17+3+6
 - o explicitées
- Le langage
 - o Analogique : rendre compte à partir du concret
 - Ex : Romains : XIII
 - o Verbal: multiplication: X
 - Langage courant : « fois »
 - Langage verbal mathématique : « multiplié »
 - o Symbolique : symboles pour représenter des chiffres et des opérations
 - Premières leçons : le signe +, le signe X
- ⇒ Ce sont ces 4 aspects qui font partie d'un concept qui va être mis en place.

2-2 : Pistes pédagogiques pour travailler le nombre

Obstacle repéré: Oralité du nombre dans le langage français

Selon R. Charnay,

Le langage peut être un obstacle pour l'acquisition des nombres.

Le français est « mal fait » : ex : soixante-dix, quatre-vingts,

Chinois: dix-un, dix-deux, dix-trois, ...

Belge: septante, octante, nonante, ...

Attention, erreur à ne pas faire : lorsque le nombre 70 commence à être difficile, 69 ne doit pas être une barrière.

Quand on entend le début d'un nombre : 60 ..., on ne sait pas ce que l'on va écrire.

 \rightarrow Il faut travailler les tranches 60 \rightarrow 79

80 **→** 99

Selon **S. Baruk**, pour les nombres de 11 à 16, il faut scinder dans le *seize*, le six du *sei* et le dix du *ze*, puis penser ces six-dix dans le bon sens, dix-six, qui sera alors l'analogie et dix-sept, ...

Activités possibles : comptines, jeux de doigts, albums à compter

Obstacle repéré : Mauvaise utilisation des mots dans le langage courant

On utilise souvent à mauvais escient les mots : chiffre, nombre, numéro.

Nombre : Cf. définition ci-joint précédemment

Chiffre : signe élémentaire permettant de construire l'écriture d'un nombre

Numéro : chiffre ou écriture d'un nombre qui indique la place d'une chose dans une série.

Obstacle repéré : méconnaissance de la comptine numérique

Quelques étapes de l'acquisition de la comptine :

o 2 à 6 ans : grande variabilité

■ 4 ans et demi (MS) : → 16 (apprentissage par cœur, l'enfant récite)

• 5 ans et demi (GS): \rightarrow 40

Mais savoir réciter, ce n'est pas connaître complètement la comptine, ni savoir l'utiliser.

- → Il faut travailler la comptine en faisant évoluer les compétences:
 - o Vers 6 ans:
 - Compter à partir de 1 jusqu'à ...
 - Compter à partir de ... jusqu'à Il est plus difficile d'amorcer à plus que 1.

- Compter à rebours (décompter) : cela permet de reconstruire, c'est la première étape vers la soustraction.
- Utilisation de la comptine pour dénombrer

⇒Ce sont les premières compétences de l'école maternelle : « Structure en profondeur de la comptine »

- o A partir de 6-7 ans:
 - Compter et dénombrer n nombres à partir de ...
 - Compter ou dénombrer de ... à ..., en tenant compte des nombres énumérés.
 - Ex: de 7 à 11, on avance de 4

Activités possibles : Qui va le plus loin, le furet, le nombre cible jusqu'à ..., la suite muette, le maître qui se trompe, la fusée, l'escalier, ...

Obstacles repérés :

Pas de correspondance entre le mot-nombre et la quantité

Pas de correspondance entre le dernier mot-nombre et la quantité représentée

Difficulté à se représenter des quantités

Selon R. Brissiaud, R. Charnay,

Stratégies pour dénombrer : il faut répondre à la question « Combien ? »

- **Perception immédiate** d'une quantité :
 - o Ex: Voir 3 crayons, les cacher: l'être humain et certains animaux ont la capacité à les reconnaître immédiatement.
- Repérage des quantités sur les constellations, les doigts
 - o Ex: 5, figure du 5

Ou 6, figure du 6 (Organisation spatiale)

Ce sont les images mentales correspondant à de petites quantités.

o « Du bon ou du mauvais usage des doigts ? »

Puisque l'enfant va s'en servir, la question est « comment s'en servir le mieux possible, et les oublier un jour ? »

L'usage des doigts doit être un usage mental pour s'en dispenser un jour.

Attention à l'abus des représentations uniques du nombre, avec le même matériel, car cela peut empêcher certains enfants de construire le nombre.

- Utilisation de différentes représentations des nombres
- Comptage un par un : 3 principes importants
 - o Correspondance nombre-objet : prendre des objets déplaçables.

Dernier nombre dit : Parfois, il y a confusion entre le procédé et le résultat du procédé.

- o Indépendance du parcours des objets : compter à partir de la gauche, de la droite.
- Estimation de certaines quantités : possibilité d'utiliser des repères : 5 et 10
 - Ex: 11, c'est + de 5
 - 20, c'est + de 10

Dénombrement par comptage de 1 en 1 : quelques repères

	3 ans	4 ans	5 ans
7 objets	19%	47%	80%
11 objets	5%	37%	47%

Le comptage et l'importance de la verbalisation :

Expérience : Une épreuve non verbale réussie dès l'âge de 3 ans ½ (PS)

On montre une collection de trois objets à un enfant puis on la cache.

On retire deux objets, de manière visible (l'enfant ne voit ni la collection de départ ni celle restante).

On lui demande de construire une collection qui est "pareille" que celle qui reste. On sollicite donc une réponse non verbale.

Cette épreuve non verbale pour de petits problèmes d'ajouts et de retraits sur les trois premiers nombres est réussie, quelque soit le milieu socio-culturel.

La même épreuve, mais verbale cette fois, est moins bien réussie.

En effet, si on interroge : "combien y a t il d'objets maintenant", les performances chutent.

Une pratique trop exclusive du comptage semble à l'origine de ces échecs.

Avoir des interactions langagières variées quand on "parle" les nombres :

Exemple pour le nombre 3; dire :

Un, deux, trois....

Deux et un...

Un, un, et un...

Les risque du comptage systématique est que l'enfant se l'approprie de façon rituelle.

♥Parler les nombres de manière quotidienne joue aussi un rôle crucial.

Utiliser les nombres dans les différentes disciplines.

Utiliser les nombres de manière quotidienne.

Ex. « Il y a 8 places pour cet atelier. Il y a déjà 3 enfants, combien d'enfants peuvent encore venir ? Utilisation, par exemple de cartons avec 8 cases, et 3 silhouettes d'enfants accrochées. »

\$Utiliser les collections-témoins: représentations analogiques exactes du nombre qui aident l'élève à construire le nombre.

Il faut commencer par communiquer concernant les petites quantités, en s'aidant de collections témoins de doigts.

L'élève utilise directement les mots-nombres en tant que signes linguistiques qui renvoient à des quantités.

Activités possibles : jeux de dénombrement où l'on prend le nombre d'objets correspondant au nombre indiqué sur le dé, jeux de déplacements sur un plateau.

Obstacle repéré : difficulté à associer nombre dit et nombre écrit

Activités possibles :

Repérer le nombre dit sur la bande numérique

Loto des nombres (de 1 à 20, de 50 à 100, ...)

Obstacle repéré : difficulté à écrire les nombres en chiffres : numération de position

Travailler la numération décimale: place du zéro, tous les passages à la dizaine supérieure, à la centaine supérieure

-Matériel Montessori – cartes Montessori

Matériel qui permet de positionner en partant de la droite, les nombres à 1, 2, 3, ... chiffres

600	30 0
5 0	3 0
7	3
65 7	33 3

-Compteurs

Obstacle repéré : difficulté à manipuler le nombre : décomposer, recomposer de différentes façons

-Travailler toutes les décompositions d'un nombre

Matériel: boîtes à oeufs, Cartes à points,

-Ecrire le nombre sous toutes ses formes

248=200+40+8

248=(2X100)+(4X10)+8

248=(24X10)+8

Activités possibles: cascade des additions, dominos (Ermel CE1), le bon chemin

Obstacle repéré : pas d'automatisme en calcul mental

a) Différents moyens de calcul sont travaillés à l'école primaire.

Le calcul mental: automatisé ou réfléchi, il occupe une place principale.

- Parler de calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écriture.
- Les techniques écrites doivent s'appuyer sur une pratique bien installée du calcul mental.
- Il opère sur les nombres, permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations, les propriétés (commutativité, associativité, distributivité)

Le calcul posé:

• Une maîtrise des techniques permet d'apprécier l'efficacité des instruments utilisés (calculatrices).

L'appropriation de ces techniques opératoires conduit à utiliser de nombreuses propriétés relatives au système d'écriture des nombres (numération décimale de position) et aux opérations en jeu.

b) Le calcul mental permet de:

- Construire et renforcer les 1^{ères} connaissances relatives à la structuration arithmétique des nombres entiers naturels (relations additives ou multiplicatives entre les nombres)
- Utiliser les propriétés des opérations
- Elaborer des procédures (calcul réfléchi)
- Aider à la résolution de problèmes

c) 2 aspects à travailler en calcul mental

- Calcul automatisé: production de résultats immédiatement disponibles: récupération en mémoire, reconstruction instantanée
- Calcul réfléchi: diversification des stratégies de calcul complexe: élaboration d'une procédure adaptée au calcul proposé. Les stratégies et le raisonnement sont sollicitées

d) Points d'appui pour la mémorisation

• L'entraînement

ET

- La représentation mentale des nombres
- La compréhension des opérations en jeu
- L'élaboration progressive des résultats

L'entraînement, la mémorisation

Activités:

• Suite verbale des nombres, avec différents jeux

- Passages à la dizaine, à la centaine: opérateurs +1, +10, -1, -10
- Mémorisation des résultats des tables d'addition et de multiplication

Forme: procédé Lamartinière

La représentation mentale des nombres La compréhension des opérations en jeu L'élaboration progressive des résultats

Activités: Apprentissage de la table d'addition

Les résultats additifs sont d'abord reconstruits

- Utilisation de la suite numérique par surcomptage
- Appui sur les doubles connus (Ex. 5+4, c'est 1 de plus que 4+4)
- Utilisation de la commutativité de l'addition (2+9, c'est comme 9+2)
- Utilisation du passage par la dizaine (pour calculer 8+5, on complète à 10, puis on ajoute 3) ⇒Connaissance des compléments à 10.

Cf. construction de la table d'addition, selon Christophe Bolsius, auteur de « Fort en calcul mental », Sceren CRDP Lorraine

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Jaune : les suivants (Connaissance)

Bleu : règle de numération (Connaissance)

Rose: Les doubles (Connaissance)

Orange: Les compléments à 10 (Connaissance)

Vert : les presque double (Stratégie)

Violet : Les sommes inférieures à 10 (Connaissance)

Gris: Le passage par le paquet de 10 (Stratégie)

Activités: Apprentissage de la table de multiplication

• Langage verbal: X

Langage courant: fois

Langage mathématique: multiplié

Points d'appui pour apprendre la table de multiplication:

- Les résultats rapidement connus des tables de 2 et 5
- Comptage de n en n pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé
- Connaissance des carrés
- Commutativité de la multiplication
- Multiplier par 4, c'est doubler deux fois, multiplier par 6 c'est tripler puis doubler
- Multiplier par 10

Activité: apprentissage de la table de multiplication

Ex. 4X9=36

- Combien de fois 9 dans 36?
- Combien de fois 4 dans 36?
- 36 (partagé) divisé par 9 ?
- 36 (partagé) divisé par 4?
- 36=...X... Décomposer 36 sous forme de produits de deux nombres inférieurs à 10.

Cela permet de construire la moitié de la table de multiplication.

- Commencer par les tables de 2 et 5
- Dire les tables dans l'ordre croissant, décroissant, dans le désordre, en trouvant le résultat précédent, suivant.

e) Calcul réfléchi

Il s'agit d'élaborer une procédure adaptée au calcul particulier qui est proposé.

Ex de procédures:

36+9

P1:36+10-1

<u>36+12</u>

P1:36+10+2

P2:36+4+8

Calcul automatisé au cycle 2: addition et soustraction

- Ajouter ou retrancher 1, en particulier pour les nombres inférieurs à 20
- Ajouter ou retrancher 2 et 5, en particulier pour les nombres inférieurs à 20.
- Ajouter ou retrancher 10, 100
- Connaître les compléments à 10 ou à 20, puis à la dizaine supérieure

Activités possibles: Cartes recto-verso, dominos « compléments à 10, à 20 », cartes de 2 couleurs, tableau des nombres, bon débarras

• Décomposer un nombre inférieur à 10 à l'aide du nombre 5

Décomposer un nombre compris entre 10 et 20 à l'aide du nombre 10

• Additionner deux nombres dont la somme est inférieure à 10 et décomposer un nombre inférieur à 10 sous forme additive.

Activités possibles: Tableau des nombres

- Maîtriser le répertoire additif (tables d'addition): somme de deux nombres inférieurs à 10, compléments, différences et décompositions associées.
- Calculer des sommes, des différences ou des compléments du type: 20+7, 27-7, 20 pour aller à 27, puis 200+37, 237-37, 200 pour aller à 237
- Ajouter ou retrancher entre elles des dizaines ou des centaines, calculer les compléments correspondant.
- Développer des stratégies perceptives

Activité possible: Combien ?

⇒Calcul réfléchi au cycle 2: addition et soustraction

- Ajouter et retrancher un nombre à 1 chiffre à un nombre inférieur à 100, puis inférieur à 1000
- Ajouter ou retrancher un nombre entier de dizaines ou de centaines

- Ajouter ou retrancher deux nombres
- Calculer des écarts ou des compléments (Nb de 2 ou 3 chiffres)
- Rapprocher des nombres entre eux: 26+7+4+13
- Adapter les stratégies:

52-3=52-2-1

52-49=49 pour aller à 52

⇒Calcul automatisé au cycle 2: multiplication et division

Connaitre les doubles des nombres < 10, et les moitiés correspondantes

- Connaître les doubles des nombres clés: 10,20,20,40,50, 100,200,300,400,15, 25
- Connaitre les tables de multiplication: 2, 5, puis 3 et 4

Multiplier par 10 et par 100 (découverte préalable par la manipulation, par l'addition, par l'écriture chiffrée et l'opération)

⇒Calcul réfléchi au cycle 2: multiplication et division

- Calculer les doubles de nombres<50
- Calculer les moitiés de nombres <100, Nb pairs
- Calculer le produit de 2 nombres inférieurs à 10, en s'appuyant sur des résultats connus, en utilisant l'addition itérée

Utiliser un produit connu pour calculer un produit voisin

Obstacle: Difficulté à poser et effectuer une opération

Calcul posé:

- Permet de mieux apprécier l'efficacité des instruments
- Conduit à utiliser et combiner les propriétés relatives au système d'écriture des nombres et aux opérations en jeu
- Importance d'entrainer les élèves à utiliser des moyens de contrôle des résultats obtenus: ordre de grandeur, contrôle du chiffre des unités, vérification par l'addition pour la soustraction, a=bq+r pour la division (Cycle3).
- Poser d'abord des opérations dont on connait le résultat en ligne

Addition:

- Repose sur le principe de la numération décimale
- Travailler

- o Les tables d'addition
- o Les retenues (compréhension du principe de groupement par 10,) Matériel: cubes
- o L'alignement des chiffres de même valeur
- Utiliser le calcul posé en colonnes pour les Nb > 2 chiffres, sinon additionner en ligne

Principe: Ne pas séparer l'étude des cas avec et sans retenue

*Adaptation pour les différents niveaux des élèves

Soustraction posée:

- Soustraction d'abord travaillée dans le cadre de la résolution de problèmes et du calcul mental.
- Difficulté de l'opération posée: l'erreur est de soustraire pour chaque chiffre le plus petit du plus grand.
- 3 techniques (Cf. doc d'accompagnement p. 52)
 - o Basée sur les échanges dizaine/unités (+ facile) Matériel: cubes
 - o Basée sur la recherche de compléments
 - o Basée sur l'ajout d'un même nombre aux 2 termes de la soustraction

Principe: Ne pas séparer l'étude des cas avec et sans retenue

*Adaptation au niveau des élèves

Multiplication posée:

- Erreurs: mauvaise connaissance des tables de multiplication (lien calcul mental)
- Connaître:
 - o Les tables de multiplication
 - o La numération décimale pour la gestion des retenue
 - o (La « règle » des 0 pour la multiplication des dizaines, centaines, ...) Cycle 3
 - O Distributivité de la multiplication sur l'addition
- Au cycle 2, multiplication par un nombre à un chiffre

Repose sur la commutativité et la distributivité

3- Intérêt des situations expérimentales

- Importance du questionnement :
 - o Ex 1 : 5+4 « Combien y-a-t-il de jetons ? » Le dénombrement se fera par addition.

o Ex. 2: 4 jetons sont mis dans une boite qui en avait 5. On ferme la boite. « Combien y-a-t-il de jetons ? »

La question ne part plus d'un simple constat, mais amène une démarche à élaborer. (compter avec les doigts, dessiner pour représenter la réalité,...)

- Appropriation facilitée de la situation par la question.
- Représentation mentale de la tâche plus aisée.
- Possibilité d'une vérification expérimentale de la réponse. (La réponse est dans la boîte.)

⇒ Les compétences techniques n'ont d'intérêt que si elles sont au service de la résolution de problèmes, ... mais certaines d'entre elles doivent être automatisées pour être utilisables.

4- L'évaluation

Elle se fera à 2 niveaux :

- Dans des tâches simples, de restitution de connaissances,
- Dans des tâches complexes, à partir de situations problèmes.

On peut proposer des tâches qui impliquent des opérations intellectuelles de différents niveaux :

EX : Niveau 1 : je dis la comptine numérique (retrouver la connaissance)

Niveau 2 : Je dénombre une collection (réutiliser la connaissance dans un contexte différent)

Niveau 3 : J'utilise le dénombrement dans une situation problème (faire des transferts)

V- L'organisation de la classe

1- Le coin mathématique

Objectifs : Acquérir les compétences liées aux formes et grandeurs ou aux quantités et aux nombres

Matériel: Boîtes nombres (3 représentations: chiffres, quantités, écriture, objets, ...), bandes numériques, dictionnaire des nombres, tables d'addition vierges, complétées, tables de multiplication vierges, complétées, cartes à points, cartes Montessori, ... formes, bandes de papier, ...

Utilisation: différents temps

Découverte (manipulation libre, exploration)

Résolution d'un problème: situation guidée par l'enseignant

Réinvestissement du concept travaillé: manipulations libres, jeux, exercices ...

2- Des outils de la classe et des élèves

Outils des élèves pour travailler les nombres

- Bande numérique (horizontale, verticale)
- Le nombre : chiffre, quantité (constellation, doigts de la main, autres), écriture
- Les boîtes nombres
- Des boîtes à œufs de 10 cases
- Cartes Montessori
- Le calendrier
- Le tableau des présences par ordre d'arrivée
- Le dictionnaire des nombres
- Les albums à compter (travail sur la suite des nombres, la mémorisation des désignations, la compréhension de l'idée de complément, les comparaisons, les partages)
- Cartons avec cases (5, 6, 10, 12) et silhouette ou pastilles

Outils des élèves pour calculer

- Les albums à calculer
- Les cartes à points (J.L. Bregeon)
- Le répertoire additif
- Le nombre cible: des étiquettes de nombres cibles, et des étiquettes avec les nombres écrits en chiffres de 1 à 9
- Tables d'addition vierges, complétées
- Tables de multiplication vierges, complétées

VI- Bibliographie

- « Documents d'accompagnement des programmes 2002 »
- « Apprentissages numériques GS », Ermel, Hatier
- « Apprentissages numériques CP », Ermel, Hatier
- « Apprentissages numériques CE1 », Ermel, Hatier
- « Album à compter », R. Brissiaud, Retz
- « Le 2^{ème} album à calculer », R. Brissiaud, Retz

- « Grand N spécial maternelle approche du nombre, T1 », IREM
- « Faire des mathématiques à l'école maternelle », Alain Pierrard, CRDP de Grenoble
- « Multi numération PS, MS, GS », cahiers de la fourmi, Editions La Cigale
- « Découvrir le monde avec les mathématiques, GS », D. Valentin, Magnard
- « Vers les maths MS et GS », Access
- « Livre du maître et fichier Cap maths », R. Charnay, Hatier
- « Livre du maître et fichier J'apprends les maths », R. Brissiaud, Retz

Annexe

Synthèse : Les obstacles à la construction du nombre chez l'enfant au cycle 2 , et les pistes pédagogiques pouvant être envisagées

Obstacles identifiés	Stratégies	Activités
Oralité du nombre dans le	-R. Charnay: 70: on écrit « soixante-dix »	Comptines
langage français	Travailler les nombres qui posent problème, de 60 à 79, de 80 à 99 (pour le cycle 2)	Jeux de doigts
langage if ançais	- S. Baruk: Pour les nombres de 11 à 16, il faut scinder dans le <i>seize</i> , le <i>six</i> du <i>sei</i> et le	Albums à compter
	dix du ze, puis penser ces six-dix dans le bon sens, dix-six, qui sera alors l'analogue de	Albums a complet
	dix-sept	
	-Utiliser le nombre de manière quotidienne (ex : rituels, comptage des absents,	
	calendrier, date,)	
	-Apprendre des comptines, des jeux de doigts,	
	-Lire et utiliser des albums à compter,	
	-Commencer par ce qui est régulier pour aller vers ce qui est irrégulier.	
Mauvaise utilisation des	Différencier Nombre/Chiffre/Numéro, et utiliser les mots à bon escient.	
mots dans le langage		
courant		
Méconnaissance de la	-Apprendre des comptines,	Qui va le plus loin (Ermel)
comptine numérique	-L'utiliser quotidiennement, en faisant évoluer les compétences :	Le furet (Ermel)
	Compter à partir de 1 jusqu'à	Le nombre cible jusqu'à (Ermel)
	Compter à partir de jusqu'à	La suite muette (Ermel)
	Compter à rebours	Le maître qui se trompe (Ermel)
	-Utiliser la comptine pour dénombrer	La fusée (Ermel)
	La connaissance de la comptine est essentielle pour pratiquer des activités de	L'escalier (Ermel)
	dénombrement.	

Pas de correspondance	-Utiliser différentes stratégies pour dénombrer : perception immédiate, repérage des	Jeux de dénombrement dans
entre le mot-nombre et la	quantités sur les constellations, les doigts, utilisation de différentes représentations des	lesquels on prend un nombre d'objets
quantité	nombres (10: 5+5, ou 6+4, ou 7+3 points), comptage un par un,	correspondant au nombre indiqué sur
Pas de correspondance	-Dans le comptage un par un, plutôt que de pointer les objets pour les compter, les	le dé.
entre le dernier mot-	déplacer, (Cf. un mot-nombre correspond à un objet qui va dans la boîte),	Jeux de déplacements sur un plateau
nombre et la quantité	-Compter à partir de la gauche, de la droite,	1
représentée	-Avoir des interactions langagières variées quand on « parle » les nombres, Ex : pour le	
T	nombre 3, dire:	
	Un, deux, trois,	
	Deux et un,	
	Un, un et un,	
	-« Parler les nombres » de manière quotidienne, dans la vie de la classe.	
Difficulté à se représenter	-Utiliser les collections-témoins, manipuler des dés, des doigts,	Memory avec différentes
les quantités	-Utiliser des représentations variées des nombres,	représentations du nombre
_	-Les objets que l'on déplace quand on compte forment une collection : à tout moment,	Loto des nombres avec différentes
	on peut s'arrêter de les compter et dire combien on en a en tout.	représentations
	-Faire des correspondances terme à terme avec des nombres plus grands,	Dominos
	-Estimer certaines quantités : possibilité d'utiliser des repères : 5 et 10.	
	Ex. 11, c'est plus de 5, 20, c'est plus de 10	
	-Se grouper physiquement, en EPS, par 2, 3, 5, 10, et faire d'autres groupes du même nombre,	
	-Travailler par manipulation les notions de plus que, moins que, autant que, (Ex. lors de	
	la préparation du goûter) en comptant, en faisant des correspondances terme à terme,	
	-Compter et garder en mémoire le résultat, ou le dire, l'écrire,	
	-Traiter des problèmes « arithmétiques » : augmentation, diminution, partages.	
Difficulté à associer	-Utiliser la bande numérique,	Loto des nombres avec les nombres
« nombre dit » et	-Utiliser les trois représentations du nombre : collection, lettres, chiffres.	écrits en chiffres (De 1 à 20, de 20 à
« nombre écrit »		50,)
Difficulté à écrire les	-Travailler la numération décimale : place du zéro, tous les passages à la dizaine	Cartes Montessori

nombres en chiffres :	supérieure	Compteurs
numération de position		La spirale des nombres (Ermel)
		Maisons à construire (Ermel)
		Le caissier ou jeu du banquier
		(Ermel)
		Les fourmillions (Ermel)
Difficulté à manipuler le	-Travailler toutes les décompositions d'un nombre	Boîtes à œufs
nombre : décomposer,		Cartes à points
recomposer de différentes		Les cartes recto-verso (Ermel)
façons		Cascade des additions (Ermel)
		Dominos (Ermel)
		<i>Labyrinthe</i> (Ermel)
		Puzzles à colorier (Ermel)
		Jeu de mariages (Ermel)
Pas d'automatisme en	-Pratiquer le calcul mental (automatisé et réfléchi), comme point d'appui indispensable	Grilles ou cartes à points (Ermel)
calcul mental	aux techniques écrites et aux résolutions de problèmes.	Cartes recto-verso (Doc
	-Travailler les ordres de grandeur, le sens des opérations, les propriétés.	Accompagnement)
		Dominos « compléments à 10, à
	Activités: Apprentissage de la table d'addition	20 » (Doc Accompagnement)
	Les résultats additifs sont d'abord reconstruits	Cartes de 2 couleurs « aller à la
	-Utilisation de la suite numérique par surcomptage	dizaine supérieure » (Doc
	-Appui sur les doubles connus (Ex. 5+4, c'est 1 de plus que 4+4)	Accompagnement)
	-Utilisation de la commutativité de l'addition (2+9, c'est comme 9+2)	Tableau des nombres (Doc
	-Utilisation du passage par la dizaine (pour calculer 8+5, on complète à 10, puis on	Accompagnement)
	ajoute 3) ⇒Connaissance des compléments à 10.	Bon débarras (Doc
		Accompagnement)
	Activités: Apprentissage de la table de multiplication	Combien ? (Doc Accompagnement)
	Points d'appui pour apprendre la table de multiplication:	
	-Les résultats rapidement connus des tables de 2 et 5	Tournoi de calcul (Ermel)
	-Comptage de n en n pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé	Loto (Ermel)

-Connaissance des carrés

-Commutativité de la multiplication

-Multiplier par 4, c'est doubler deux fois, multiplier par 6 c'est tripler puis doubler Multiplier par 10

Calcul automatisé au cycle 2: addition et soustraction

-Ajouter ou retrancher 1, en particulier pour les nombres inférieurs à 20

-Ajouter ou retrancher 2 et 5, en particulier pour les nombres inférieurs à 20.

-Ajouter ou retrancher 10, 100

-Connaître les compléments à 10 ou à 20, puis à la dizaine supérieure

-Décomposer un nombre inférieur à 10 à l'aide du nombre 5

-Décomposer un nombre compris entre 10 et 20 à l'aide du nombre 10

-Additionner deux nombres dont la somme est inférieure à 10 et décomposer un nombre inférieur à 10 sous forme additive.

-Maîtriser le répertoire additif (tables d'addition): somme de deux nombres inférieurs à 10, compléments, différences et décompositions associées.

-Calculer des sommes, des différences ou des compléments du type: 20+7, 27-7, 20 pour aller à 27, puis 200+37, 237-37, 200 pour aller à 237

-Ajouter ou retrancher entre elles des dizaines ou des centaines, calculer les compléments correspondant.

-Développer des stratégies perceptives

Activité: Combien?

Calcul réfléchi au cycle 2: addition et soustraction

-Ajouter et retrancher un nombre à 1 chiffre à un nombre inférieur à 100, puis inférieur à 1000

-Ajouter ou retrancher un nombre entier de dizaines ou de centaines

-Ajouter ou retrancher deux nombres

-Calculer des écarts ou des compléments (Nb de 2 ou 3 chiffres)

-Rapprocher des nombres entre eux: 26+7+4+13

Le compte est bon (Ermel)

Jeux de bataille- multiplication (Ermel)

Loto, Domino-multiplication (Ermel)

	-Adapter les stratégies:	
	52-3=52-2-1	
	52-49=49 pour aller à 52	
	Calcul automatisé au cycle 2: multiplication et division	
	-Connaître les doubles des nombres < 10, et les moitiés correspondantes	
	-Connaître les doubles des nombres clés: 10,20,20,40,50, 100,200,300,400,15, 25	
	-Connaitre les tables de multiplication: 2, 5, puis 3 et 4	
	-Multiplier par 10 et par 100 (découverte préalable par la manipulation, par l'addition,	
	par l'écriture chiffrée et l'opération)	
	Calcul réfléchi au cycle 2: multiplication et division	
	-Calculer les doubles de nombres<50	
	-Calculer les moitiés de nombres <100, Nb pairs	
	-Calculer le produit de 2 nombres inférieurs à 10, en s'appuyant sur des résultats	
	connus, en utilisant l'addition itérée	
	-Utiliser un produit connu pour calculer un produit voisin	
Difficulté à poser et	-Conduit à utiliser et combiner les propriétés relatives au système d'écriture des	-Poser les opérations dans un cahier
effectuer une opération	nombres et aux opérations en jeu	
	-Importance d'entrainer les élèves à utiliser des moyens de contrôle des résultats	
	obtenus: ordre de grandeur, contrôle du chiffre des unités, vérification par l'addition	
	pour la soustraction, a=bq+r pour la division (Cycle3).	
	-Poser d'abord des opérations dont on connait le résultat en ligne	
	Addition:	
	-Repose sur le principe de la numération décimale	
	-Travailler	
	o Les tables d'addition	
	o Les retenues (compréhension du principe de groupement par 10,) Matériel:	
	cubes	

- o L'alignement des chiffres de même valeur
- -Calcul posé en colonnes pour les Nb > 2 chiffres, sinon en ligne

Principe: Ne pas séparer l'étude des cas avec et sans retenue

*Adaptation au niveau des élèves

Soustraction posée:

- -Soustraction d'abord travaillée dans le cadre de la résolution de problèmes et du calcul mental.
- -Difficulté de l'opération posée: l'erreur est de soustraire pour chaque chiffre le plus petit du plus grand.
- -3 techniques (Cf. doc d'accompagnement p. 52)
 - o Basée sur les échanges dizaine/unités (+ facile) Matériel: cubes
 - o Basée sur la recherche de compléments
 - o Basée sur l'ajout d'un même nombre aux 2 termes de la soustraction

Principe: Ne pas séparer l'étude des cas avec et sans retenue

*Adaptation au niveau des élèves

Multiplication posée:

- -Erreurs: mauvaise connaissance des tables de multiplication (lien calcul mental)
- -Connaître:
 - o Les tables de multiplication
 - o La numération décimale pour la gestion des retenues
 - o (La « règle » des 0 pour la multiplication des dizaines, centaines, ...) Cycle 3
 - O Distributivité de la multiplication sur l'addition
- -Au cycle 2, multiplication par un nombre à un chiffre

Repose sur la commutativité et la distributivité