МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ЧАСТЬ 1

В.В.УЛЬЯНОВ

1

Лекция 1.

Definition 1.1. *Класс подмножеств X называется* ***полукольцом*** $(\mathcal{P})$, *если*

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$.
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$, *то и* $A_1 \bigcap A_2 \in \mathcal{P}$.
3. $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$ *и* $A_1 \subseteq A_2$, *то* $A_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$, *где* $B_i \bigcap B_j = \varnothing,\ i \neq j$, $B_i \in \mathcal{P},\ B_1 = A_1$.

Примеры:
1. X - произвольное множество.
$\mathcal{P}$ ={ $\varnothing$, все одноточечные подмножества X }.
2. $X = \mathbb{R}$.
$\mathcal{P} = \{[a, b),\ -\infty < a \leq b < \infty,\ a,\, b \in \mathbb{R}\}$.

Definition 1.2. *Класс подмножеств X называется* ***кольцом*** $(\mathcal{R})$, *если*

1. $\varnothing \in \mathcal{R}$.
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, *то и* $A_1 \bigcup A_2 \in \mathcal{R}$.
3. $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, *то* $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{R}$.

Примеры:
1. X - произвольное множество.
$\mathcal{R}$ ={ $\varnothing$, все конечные подмножества X }.
2. $X = \mathbb{R}$.
$\mathcal{R}$ = { все конечные объединения [a,b) }

Definition 1.3. *Класс подмножеств X называется* σ***-кольцом*** $(\mathcal{S})$, *если*

1. $\varnothing \in \mathcal{S}$.
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$, *то и* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.

3. $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$, *то* $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{S}$.

Примеры:
1. X - произвольное множество.
$\mathcal{S} =\{\ \varnothing$, все не более, чем счетные подмножества X $\}$.
2. X- произвольное множество.
$\mathcal{S} = \{$ все подмножества X $\}$.

Note 1.1. Полукольцо(кольцо, σ-кольцо) называется **полуалгеброй (алгеброй, σ-алгеброй)**, если оно содержит само множество X.

Свойства колец и σ-колец.

Пусть $\mathcal{R}$ - кольцо, тогда

1. Если $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$,
 то $A_1 \bigcap A_2 \in \mathcal{R}$ и $A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \bigcup (A_2 \setminus A_1) \in \mathcal{R}$.
2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{R}$, и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{R}$.

Доказательство. 1.

$$A_1 \bigcap A_2 = (A_1 \bigcup A_2) \setminus (A_1 \setminus A_2) \setminus (A_2 \setminus A_1)$$

2. Доказывается по индукции. □

Пусть $\mathcal{S}$ - σ-кольцо, тогда если $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{S}$,
то $\liminf A_i \in \mathcal{S}$, $\limsup A_i \in \mathcal{S}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$, где

$$\liminf A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n}^{\infty} A_m$$

$$\limsup A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n}^{\infty} A_m$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$. Имеем

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus A_i)$$

где $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ Следовательно, утверждение вытекает из определения σ-кольца. □

Definition 1.4. *Кольцо (σ-кольцо), порожденное некоторым классом $\mathcal{E}$ подмножеств X - это наименьшее кольцо (σ-кольцо), содержащее $\mathcal{E}$.*

Обозначение :$\mathcal{R}(\mathcal{E})$, $\mathcal{S}(\mathcal{E})$.

Note 1.2. Для получения $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ следует взять пересечение всех колец, содержащих $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) = \bigcap \mathcal{R}_{\mathcal{E}},$$

где пересечение берется по всем кольцам $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, содержащим класс $\mathcal{E}$.

Аналогично строится $\mathcal{S}(\mathcal{E})$.

- Доказать, что пересечение двух колец является кольцом.
- Привести пример 2-х полуколец, пересечение которых не является полукольцом.
- Доказать, что из способа построения $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ следует их единственность.

Theorem 1.1. *Пусть $\mathcal{E}$ - некоторый класс подмножеств X. Для любого $A \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ найдется счетный класс $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$, для которого $A \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ - класс элементов $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, такой что $A \in \mathcal{F}$, если найдется счетный класс $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$, для которого выполнено $A \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$.
Покажем, что $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\mathcal{E})$. Для этого достаточно доказать, что $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$
Последнее включение будет доказано, если мы покажем, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ - σ-кольцо.
1. $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ - очевидно, так для любого $E \in \mathcal{E}$ имеем $E \subset \mathcal{S}(E)$, что вытекает из определения $\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ - σ-кольцо.
Пусть A_1 и $A_2 \in \mathcal{F}$, значит найдутся счетные $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}$ и $A_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$, $A_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_2)$.Далее, $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{F}$ вытекает из того, что $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_1 \bigcup \mathcal{E}_2)$.
Пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, т.е. найдутся $\mathcal{E}_i$, такие что $A_i \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_i)$, $\mathcal{E}_i$ - счетные множества и $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i) \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

По определению получаем, что $\mathcal{F}$ - σ-кольцо. □

Theorem 1.2. *Пусть $\mathcal{E}$ - класс подмножеств X, а Y - подмножество X. Тогда*

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}) \bigcap Y = \mathcal{S}(\mathcal{E} \bigcap Y).$$

Доказательство. Напомним, что по определению $\mathcal{E} \bigcap Y = \{\, E \bigcap Y$, где $E \in \mathcal{E}\,\}$.

1. Покажем, что $\mathcal{S}(\mathcal{E}\bigcap Y)\subset\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$.
В силу того, что

$$(A_1\setminus A_2)\bigcap Y=(A_1\bigcap Y)\setminus(A_2\bigcap Y),$$

$$(\bigcup_1^\infty A_i)\bigcap Y=\bigcup_1^\infty(A_i\bigcap Y) \tag{1}$$

получаем, что $\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$ является σ-кольцом по определению.
Действительно, пусть $B_i\in\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$, т.е. $B_i=A_i\bigcap Y$, где $A_i\in\mathcal{S}(\mathcal{E}), i=1,2$. Тогда

$$B_1\setminus B_2=(\underbrace{A_1\setminus A_2}_{\in\mathcal{S}(\mathcal{E})})\bigcap Y\in\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y.$$

Аналогично показывается выполнение второго условия из определения σ-кольца для $\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$.
Итак, $\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$ - σ-кольцо, содержащее $\mathcal{E}\bigcap Y$, а так как $\mathcal{S}(\mathcal{E}\bigcap Y)$ - наименьшее σ-кольцо, содержащее $\mathcal{E}\bigcap Y$, $\Rightarrow\mathcal{S}(\mathcal{E}\bigcap Y)\subset\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$.
2. Теперь докажем, что $\mathcal{S}(\mathcal{E}\bigcap Y)\supset\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$.
Пусть $\mathcal{F}$ - класс множеств $A\subset X$ таких, что $A\bigcap Y\in\mathcal{S}(\mathcal{E}\bigcap Y)$. Тогда $\mathcal{F}$ содержит $\mathcal{E}$, а в силу (1) $\mathcal{F}$ является σ-кольцом.$\Rightarrow\mathcal{S}(\mathcal{E})\subset\mathcal{F}$.
Таким образом, $\mathcal{S}(\mathcal{E}\bigcap Y)\supset\mathcal{S}(\mathcal{E})\bigcap Y$. $\square$

Definition 1.5. *Класс подмножеств множества X называется монотонным ($\mathcal{M}$), если*

- $A_1\supseteq A_2\supseteq\ \dots, A_i\in\mathcal{M}$ *, то* $\bigcap\limits_1^\infty A_i\in\mathcal{M}$.
- $A_1\subseteq A_2\subseteq\ \dots, A_i\in\mathcal{M}$ *, то* $\bigcup\limits_1^\infty A_i\in\mathcal{M}$.

или иными словами:
Если $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{M}$ и $\{A_i\}$ - монотонная последовательность, тогда $\lim A_i\in\mathcal{M}$.

Definition 1.6. *Монотонным классом $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, порожденным классом множеств $\mathcal{E}$, называется наименьший монотонный класс, содержащий $\mathcal{E}$.*

Упражнение. Доказать существование и единственность $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Theorem 1.3. *Кольцо является σ-кольцом,тогда и только тогда, когда оно является монотонным классом.*

Доказательство. 1. $\Rightarrow$
Пусть $\mathcal{R}$ - σ-кольцо. Из определения σ-кольца вытекает необходимость.
2. $\Leftarrow$
Пусть $\mathcal{R}$ - кольцо и монотонный класс.

Пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$. Так как $\mathcal{R}$ - кольцо, то $B_n = \bigcup\limits_1^n A_i \in \mathcal{R}$. И $B_n \subset B_{n+1}$. Следовательно, $\bigcup\limits_1^\infty B_i \in \mathcal{R}$, так как $\mathcal{R}$ - монотонный класс. Остается заметить, что $\bigcup\limits_1^\infty B_i = \bigcup\limits_1^\infty A_i$.
Таким образом, $\mathcal{R}$ - σ-кольцо. □

Theorem 1.4. *Пусть $\mathcal{R}$ - кольцо, тогда*

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{R}).$$

Доказательство. 1. $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{R})$ - очевидно, в силу определения.
2. $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \supseteq \mathcal{S}(\mathcal{R})$.
В силу теоремы 3 достаточно доказать, что $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ является кольцом. Для любого $B \subset X$ обозначим $\mathcal{K}(B)$ - класс подмножеств $A \subset X$ таких, что

$$A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \bigcup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R}).$$

Из определения $\mathcal{K}(B)$ вытекает, что

$$A \in \mathcal{K}(B) \ \Leftrightarrow\ B \in \mathcal{K}(A). \tag{2}$$

Пусть A_n - монотонная последовательность из $\mathcal{K}(B)$
Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \lim A_n \setminus B \ &= \ \lim\,(A_n \setminus B)\ \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \\ B \setminus \lim A_n \ &= \ \lim\,(B \setminus A_n)\ \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \\ B \bigcup \lim A_n \ &= \ \lim\,(B \bigcup A_n)\ \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{K}(B)$ является монотонным классом.
Пусть $A,\ B \in \mathcal{R}$, тогда

$$A \in \mathcal{K}(B) \ \Rightarrow\ \mathcal{R} \subset \mathcal{K}(B) \ \Rightarrow\ \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}(B).$$

В силу симметрии (2) получаем, что для любых $A \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ и $B \in \mathcal{R}$

$$B \in \mathcal{K}(A) \ \Rightarrow\ \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}(A)$$

Следовательно, $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ - кольцо. □

Theorem 1.5. *Пусть $\mathcal{P}$ - полукольцо, тогда*
$\mathcal{R}(\mathcal{P})$ состоит из всех конечных объединений попарно непересекающихся множеств ($\mathcal{F}$) из $\mathcal{P}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что совокупность $\mathcal{F}$ является кольцом.
Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\exists A_i,\ i = 1, \ldots, n \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ A_i \in \mathcal{P},$$

$$\exists B_i,\ i = 1, \ldots, m \quad B_i \bigcap B_j = \varnothing,\ i \neq j,\ B_i \in \mathcal{P}$$

такие, что $A = \bigsqcup\limits_1^n A_i$, $B = \bigsqcup\limits_1^m B_k$, где под символом $\bigsqcup$ здесь и в дальнейшем понимается объединение попарно непересекающихся множеств.
Далее,

$$A \bigcap B = \bigsqcup_{i,k} (\underbrace{A_i \bigcap B_k}_{D_{i,k}})$$

так как $D_{i,k}$ попарно не пересекаются, при этом $D_{i,k} \in \mathcal{P}$ (по определению полукольца)

$$\Rightarrow \quad A \bigcap B \in \mathcal{F}$$

Теперь докажем $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Упражнение Доказать самостоятельно.

Далее, включение $A \bigcup B \in \mathcal{F}$ вытекает из равенства $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus A)$. $\square$

2

Лекция 2.

2.1 Мера

Definition 2.1. *Мерой называется функция множеств μ, заданная на полукольце $\mathcal{P}_\mu$ со значением в $\overline{\mathbb{R}}^+ = [\,0,\,+\infty\,]$, не тождественно равная $+\infty$ и обладающая свойством σ-аддитивности, т.е. такая, что для*

$$\forall \{ A_i \} \in \mathcal{P}_\mu\,, \quad \bigcup_1^\infty A_i \in \mathcal{P}_\mu\,, \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing\,,\, i \neq j$$

имеем

$$\mu\,(\bigcup_1^\infty A_i\,) = \sum_1^\infty \mu\,(\,A_i\,).$$

Definition 2.2. *Множество A называется множеством конечной меры, если $\mu(A) < \infty$.*

Definition 2.3. *Множество A называется множеством σ-конечной меры, если $\exists A_i \in \mathcal{P}_\mu$ такие, что $\mu(A_i) < \infty$, а $A \subset \bigcup\limits_1^\infty A_i$.*

Definition 2.4. *Мера μ называется конечной, если $X \in \mathcal{P}_\mu$ и $\mu(X) < \infty$.*

Definition 2.5. *Мера μ называется σ-конечной, если X - множество σ-конечной меры .*

Свойства мер.

Note 2.1. 1. $\mu(\varnothing) = 0$

Доказательство. Пусть A - множество конечной меры. Его существование вытекает из определения меры. Тогда

$$A = A \bigcup \varnothing \bigcup \varnothing \ \ldots$$

и по определению получаем

$$\mu(A) \ = \ \mu(A) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \ \ldots \qquad \Rightarrow \mu(\varnothing) \ = \ 0.$$

2. Любая мера является конечно-аддитивной , т.е. для

$$\forall A_1\,,\,\ldots\,,A_n \ \in \ \mathcal{P}_\mu\,,\,\bigcup_1^n A_i \ \in \mathcal{P}_\mu\,,\,A_i \bigcap A_j \ = \ \varnothing\,,\,i \ \neq \ j\,,$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\bigcup_1^n A_i) \ = \ \sum_1^n \mu(A_i)$$

Доказательство. Доказывается непосредственно из определения и пункта 1. Необходимо лишь добавить бесконечное количество пустых множеств.

3. Из конечной аддитивности не вытекает счетная.

Доказательство. Пусть X - множество всех рациональных точек полуинтервала [0,1). Рассмотрим $\mathcal{P}_\mu$ = совокупность $[a,b) \bigcap X$ $(0 \leq a \leq b \leq 1)$ и их всевозможные конечные объединения , а также множества, состоящие из конечного числа рациональных точек из [0,1].
Определим μ так:

$$\mu(\ [a,b) \bigcap X\ ) \ = \ b - a,$$

$$\mu(\ \{r\}\ ) \ = \ 0.$$

μ является конечно-аддитивной, но не является счетно-аддитивной:

$$\mu(X) = \mu(\ [0,1) \bigcap X\ ) \ \neq \ \sum_1^\infty \mu(\ r_i\ ).$$

Theorem 2.1. *Любая мера μ на полукольце $\mathcal{P}_\mu$ может быть единственным образом продолжена на кольцо, порожденное полукольцом $\mathcal{P}_\mu$.*

Доказательство. Ниже $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\mu$.
Из теоремы 1.5 вытекает, что, что для любого $A \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ имеем

$$A \ = \ \bigcup_1^n A_i\ ,\ A_i \in \mathcal{P}\ ,\ A_i \bigcap A_j \ = \ \varnothing\ ,\ i \ \neq \ j\ .$$

Положим

$$\mu(\bigcup_1^n A_i) \ \stackrel{df}{=} \ \sum_1^n \mu(A_i).$$

Покажем корректность этого определения, т.е. если

$$A = \bigcup_1^m B_i \ , \ B_i \in \mathcal{P} \ , \ B_i \bigcap B_j = \varnothing \ , \ i \neq j \ ,$$

то необходимо доказать, что

$$\sum_1^n \mu(A_i) = \sum_1^m \mu(B_i). \tag{1}$$

Имеем $B_k = B_k \bigcap A = \bigsqcup\limits_1^n (B_k\, A_i)$, откуда получаем $\mu(B_k) = \sum\limits_i \mu(B_k\, A_i)$. Следовательно,

$$\sum_1^m \mu(B_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(B_k\, A_i). \tag{2}$$

Аналогично, меняя местами в рассуждении B_k и A_i, получим

$$\sum_1^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \mu(A_i\, B_k). \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает (1).
Докажем теперь счетную аддитивность μ.
Пусть $A = \bigcup\limits_1^\infty A_i$, и $A_i, A \in \mathcal{R}(\mathcal{P}),\ A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j$.
Покажем, что $\mu(A) = \sum\limits_1^\infty \mu(A_i)$.
По теореме 1.5 $\quad A = \bigsqcup_{j=1}^n B_j$ и все $B_j \in \mathcal{P}$. Аналогично

$$A_i = \bigsqcup_{r=1}^{n_i} C_{ir} \ \ , \ C_{ir} \in \mathcal{P}$$

Положим $D_{jir} = B_j \bigcap C_{ir}$. Очевидно, что D_{jir} попарно не пересекаются и $D_{jir} \in \mathcal{P}$. Причем,

$$B_j = \bigsqcup_{i,r} D_{jir} \ , C_{ir} = \bigsqcup_j D_{jir}.$$

Тогда из определения μ на $\mathcal{P}_\mu$ получаем

$$\mu(A) = \sum_j \mu(B_j) = \sum_j \sum_{i,r} \mu(D_{jir}).$$

Но в силу того, что

$$\mu(A_i) = \sum_1^{n_i} \mu(C_{ir}) = \sum_r \sum_j \mu(D_{jir}),$$

имеем
$$\sum_i \mu(A_i) = \sum_{j\,,\,i,\,r} \mu(D_{jir}).$$
Откуда и вытекает σ-аддитивность μ.
Осталось показать единственность. Докажем это от противного.
Пусть существует некоторая μ_* - другое продолжение.
Пусть $A \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, тогда по теореме 5 $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \mathcal{P}$.
Из свойства аддитивности и в силу того, что $\mu_* = \mu$ на полукольце получаем, что
$$\mu_*(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_*(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A).$$
Таким образом, μ_* и μ совпадают. $\square$

Свойства мер.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что область определения меры есть кольцо.

Theorem 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть $A, B \in \mathcal{R}, A \subseteq B$, тогда $\mu(A) \le \mu(B)$. Если $\mu(A)$ - конечно, то $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
2. *Пусть $A_i \in \mathcal{R},\ B_i \in \mathcal{R},\ \ i = 1, 2, \dots$ и $B_i B_j = \varnothing,\ i \ne j$. Тогда*

   а) Если $A \in \mathcal{R}$ и $A \subset \bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i$, то
$$\mu(A) \le \sum_{1}^{\infty} \mu(A_i)$$
   -свойство счетной полуаддитивности. б) Если $B \supset \bigsqcup\limits_{1}^{\infty} B_i\,,\ \ B \in \mathcal{R}$, то
$$\mu(B) \ge \sum_{1}^{\infty} \mu(B_i).$$
3. *а) Если $A_i \in \mathcal{R},\ \ A_i \subseteq A_{i+1}$, и $\lim A_i \in \mathcal{R}$, то*
$$\mu(\lim A_i) = \lim \mu(A_i).$$
   - непрерывность меры по неубывающей последовательности. б) Если $B_i \in \mathcal{R},\ B_i \supseteq B_{i+1},\ \lim B_i \in \mathcal{R}$ и существует j такое, что $\mu(B_j) < \infty$, тогда
$$\mu(\lim B_i) = \lim \mu(B_i).$$
   - непрерывность меры по невозрастающей последовательности.

Note 2.2. Требование существования j такого, что $\mu(B_j) < \infty$ существенно, т.к. существует пример:
X, S. $A \subset X$ $\mu(A)$ - число элементов, $B_n = [0, \frac{1}{n}) \bigcap X$, $\lim B_n = \{0\}, \mu(B_n) = \infty, \Rightarrow, \lim \mu(B_n) = +\infty \neq \mu(\lim B_n) = 1$

4. *Пусть μ - конечная неотрицательная конечно-аддитивная функция множеств на $\mathcal{R}$, обладающая свойствами 3а) или 3б) с $\lim B_i = \varnothing$. Тогда μ - есть мера на $\mathcal{R}$.*

Note 2.3. • Свойства 1-3 верны для любой меры на полукольце. Достаточно применить теорему 2.1.
• Свойство 3б) без предположения о существовании $j : \mu(B_j) < \infty$, неверно. Привести пример !

Доказательство. 1. Монотонность меры:
$A \subseteq B$. Тогда $B = A \bigcup (B \setminus A)$. Следовательно,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

2. а) $A \subset \bigcup\limits_1^\infty A_i$. Свойство счетной полуаддитивности.
Тогда

$$A = \bigcup_1^\infty D_i = \bigcup_1^\infty C_i, \quad D_i = A \bigcap A_i$$

и $C_1 = D_1, C_2 = D_2 \setminus D_1, \dots, C_j = D_j \setminus (\bigcup\limits_1^{j-1} D_i)$. Тогда в силу σ - аддитивности μ мы имеем:

$$\mu(A) = \sum_1^\infty \mu(C_i) \leq \sum_1^\infty \mu(D_i) \leq \sum_1^\infty \mu(A_i).$$

б) Если $\bigsqcup\limits_1^\infty B_i \subset B$, то $\bigsqcup\limits_1^n B_i \subset B$ для любого n.
В силу пункта 1 получаем

$$\sum_1^n \mu(B_i) = \mu(\bigsqcup_1^n B_i) \leq \mu(B).$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем 2б).

3. а) Положим $A_0 = \varnothing . A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Имеем

$$\mu(\lim A_i) = \mu(\bigcup_1^\infty A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \setminus A_{i-1})) =$$

$$= \sum_1^\infty \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_n \sum_1^n \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_n \mu(A_n).$$

б) Если $B_i \supseteq B_{i+1} \supseteq \dots$, то

$$B_r = \bigcup_{i \geq r}^{\infty} (B_i \setminus B_{i+1}) \ \bigcup \ (\bigcap_{1}^{\infty} B_i).$$

Значит $\mu(B_r) = \sum\limits_{i=r}^{\infty} \mu(B_i \setminus B_{i+1}) + \mu(\bigcap_1^\infty B_i)$. Если $r > j$ такое, что $\mu(B_j) < \infty$, то $\sum\limits_{i=r}^{\infty} \mu(B_i \setminus B_{i+1})$ - остаток сходящегося ряда, и поэтому

$$\lim_{r \to \infty} \mu(B_r) = \mu(\lim_{r \to \infty} B_r).$$

4. Покажем, что из конечной аддитивности и непрерывности по неубыванию последовательности вытекает σ-аддитивность. Пусть $C_i \in \mathbf{R}, \bigcup\limits_1^\infty C_i \in \mathbf{R}, C_i C_j = \emptyset$. Положим $A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{i} C_j, \Rightarrow, A_i \subset A_{i+1}$ и $\bigcup\limits_1^\infty A_i = \bigcup\limits_1^\infty C_i, \Rightarrow$, в силу 3а),$\mu \bigcup\limits_1^\infty C_i = \mu \bigcup\limits_1^\infty A_i = \lim \mu(A_n) = \lim_n \sum\limits_1^n \mu(C_j) = \sum\limits_1^\infty \mu(C_j)$. Это означает счетную аддитивность μ, т.е. μ - мера.
   Пусть выполнено условие 3б). Положим $D_i = \bigcup\limits_{j=i}^{\infty} A_i$. Имеем $D_i \supset D_{i+1} \supset \dots$, и $\bigcap\limits_1^\infty D_i = \varnothing$. Так как μ - конечная, значит $\mu(D_i) < \infty$.
   В силу 3б) и представления

$$\mu(A) = \sum_{1}^{i-1} \mu(A_j) + \mu(D_i)$$

   получаем, что при $i \to \infty$

$$\mu(A) = \sum_{1}^{\infty} \mu(A_j),$$

   что и требовалось доказать. □

Упражнение.

Используя пример конечно-аддитивной, но не счетно-аддитивной μ, показать, что п.4 предыдущей теоремы не верен для функции μ на полукольцах.

3

Лекция 3.

3.1 Внешние меры

Definition 3.1. *Класс $\mathcal{E}$ подмножеств множества X называется* ***наследственным классом****, если из $A \subset B \in \mathcal{E}$ следует, что $A \in \mathcal{E}$.*

Definition 3.2. ***Наследственное*** *σ-кольцо - это σ-кольцо, являющееся наследственным классом.*

В дальнейшем через $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ обозначаем наследственное σ-кольцо, порожденное совокупностью подмножеств $\mathcal{A}$, т.е. наименьшее наследственное σ-кольцо, содержащее $\mathcal{A}$.

Note 3.1. Любое пересечение наследственных классов есть наследственный класс.

Proposition 3.1. $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ - наследственное σ-кольцо, порожденное $\mathcal{A}$, состоит из подмножеств не более, чем счетных объединений элементов из совокупности $\mathcal{A}$.

Доказательство. Обозначим класс подмножеств, указанный в формулировке через $\mathcal{F}$. Пусть $B \subset \bigcup_1^\infty A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$.
Имеем $\bigcup_1^\infty A_i \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, т.к. $\mathcal{H}$ - σ-кольцо , и $B \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, т.к. $\mathcal{H}$ - наследственный класс. Т.е. $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$. А так как $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, то достаточно показать, что $\mathcal{F}$ есть σ-кольцо.
Пусть $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\forall B_i \subset \bigcup_1^\infty A_{ij},\ A_{ij} \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_1^\infty B_i \subset \bigcup_{i,j}^\infty A_{ij} \ \Rightarrow \ \bigcup_1^\infty B_i \in \mathcal{F}.$$

Далее рассмотрим $B_1 \setminus B_2$.

$$B_1 \setminus B_2 \quad \subset \quad B_1 \quad \subset \quad \bigcup_1^\infty A_{1i} \quad \Rightarrow \quad B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{F},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Definition 3.3. *Внешней мерой называется функция μ^*, определенная на некотором наследственном σ-кольце $\mathcal{H}$, принимающая значения в $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$ и такая, что :*

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$.
2. *Если* $A \subset B \in \mathcal{H}$, *то* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. *Если* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$, *то*

$$\mu^*(\bigcup_1^\infty A_i) \quad \leq \quad \sum_1^\infty \mu^*(A_i).$$

Definition 3.4. *Пусть μ^* - внешняя мера на $\mathcal{H}$. Множество $E \in \mathcal{H}$ называется измеримым (относительно μ^*), если для любого $H \in \mathcal{H}$*

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E^c) \tag{1}$$

Note 3.2. $\mu^*(H) \leq \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E^c)$ выполнено всегда в силу определения внешней меры.

Theorem 3.1. *Если класс $\overline{S}$ - это совокупность измеримых (относительно μ^*) множеств, то*

1. $\overline{S}$ - σ-*кольцо.*
2. *Если* $H \in \mathcal{H}$ *и* $E_i \in \overline{S}$, $i = 1, 2, \dots$ *и* $E_i \bigcap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, *то*

$$\mu^*(H \bigcap (\bigcup_1^\infty E_i)) = \sum_1^\infty \mu^*(H \bigcap E_i).$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\overline{S}$ является кольцом.
Пусть $E, F \in \overline{S}$. Из (1) и измеримости F получаем

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \bigcap F \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E \bigcap F^c) +$$

$$+ \mu^*(H \bigcap E^c \bigcap F) + \mu^*(H \bigcap E^c \bigcap F^c) \qquad (2).$$

Возьмем в (2) $H \bigcap (F \bigcup E)$ в качестве H, тогда

$$\mu^*(H \bigcap (F \bigcup E)) = \mu^*(H \bigcap F \bigcap E) +$$

$$+ \mu^*(H \bigcap E \bigcap F^c) + \mu^*(H \bigcap E^c \bigcap F) + \mu^*(\varnothing),$$

т.к. $E^c \bigcap F^c = (E \bigcup F)^c$.
Следовательно, для любого $H \in \mathcal{H}$ в силу (2) имеем

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \bigcap (F \bigcup E)) + \mu^*(H \bigcap (F \bigcup E)^c),$$

что означает измеримость $F \bigcup E$, т.е. $(F \bigcup E) \in \overline{S}$.

Докажем теперь, что $E \setminus F \in \overline{S}$. Возьмем в (2) $H = H \bigcap (E \setminus F)^c$ вместо H. Так как $H \bigcap (E \setminus F)^c = H \bigcap (E^c \bigcup F)$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим, что $(E \setminus F) \in \overline{S}$.
Итак доказано, что $\overline{S}$ - кольцо.
Так как $\overline{S}$ - кольцо, то для $E_i \in \overline{S}$, $E_i \bigcap E_j = \varnothing$, $i \neq j$ имеем

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \bigcap (\bigcup_1^n E_i)) + \mu^*(H \bigcap (\bigcup_1^n E_i)^c) \geq$$

$$\geq \sum_1^n \mu^*(H \bigcap E_i) + \mu^*(H \bigcap (\bigcap_1^\infty E_i^c)) \qquad (2^*),$$

потому что, если E и F $\in \overline{S}$ и $E \bigcap F = \varnothing$, то

$$\mu^*(H \bigcap (E \bigcup F)) = \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap F). \qquad (3)$$

Действительно, (3) следует из (2), если взять в (2) $H \bigcap (E \bigcup F)$ в качестве H. По индукции из (3) получаем

$$\mu^*(H \bigcap (\bigsqcup_1^n E_i)) = \sum_1^n \mu^*(H \bigcap E_i).$$

Из (2^*) получим

$$\mu^*(H) \geq \sum_1^\infty \mu^*(H \bigcap E_i) + \mu^*(H \bigcap (\bigcap_1^\infty E_i^c)) \geq$$

$$\geq \mu^*(H \bigcap (\bigcup_1^\infty E_i)) + \mu^*(H \bigcap (\bigcup_1^\infty E_i)^c). \qquad (4)$$

Поскольку обратное неравенство очевидно, получаем

$$\bigsqcup_1^\infty E_i \in \overline{S}.$$

Отсюда вытекает, что $\overline{S}$ есть σ-кольцо, так как любое счетное объединение можно представить суммой попарно непересекающихся множеств.
Из (4) вытекает, что для любого $H \in \mathcal{H}$ справедливо

$$\mu^*(H) = \sum_1^\infty \mu^*(H \bigcap E_i) + \mu^*(H \bigcap (\bigcap_1^\infty E_i^c)).$$

Если теперь взять $H \bigcap (\bigcup_1^\infty E_i)$ вместо H, то получим утверждение 2 теоремы. $\square$

Лекция 4.

Definition 4.1. *Мера μ на σ-кольце $\mathcal{S}$ называется **полной**, если из $A \subset B \in \mathcal{S}$ и $\mu(B) = 0$ следует, что $A \in \mathcal{S}$ и $\mu(A) = 0$.*

Theorem 4.1. *Пусть μ^* -внешняя мера на наследственном σ-кольце $\mathcal{H}$, $\overline{S}$ - класс всех μ^*-измеримых множеств из $\mathcal{H}$. Тогда если $A \in \mathcal{H}$ и $\mu^*(A) = 0$, то $A \in \overline{S}$ и функция $\overline{\mu}$, определенная на $\overline{S}$ равенством*

$$\overline{\mu}(E) = \mu^*(E), \quad E \in \overline{S},$$

является полной мерой на $\overline{S}$, т.е. $\overline{\mu}$ есть сужение μ^* с $\mathcal{H}$ на $\overline{S}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{H}$ такое, что $\mu^*(A) = 0$. Тогда для любого $H \in \mathcal{H}$ справедливо

$$\mu^*(H) = \mu^*(H) + \mu^*(A) \geq \mu^*(H \bigcap A) + \mu^*(H \bigcap A^c).$$

Так как обратное очевидно, получаем

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \bigcap A) + \mu^*(H \bigcap A^c).$$

Поэтому $A \in \overline{S}$.
Покажем, что $\overline{\mu}$ является мерой. Достаточно доказать, что $\overline{\mu}$ счетно-аддитивна. Для этого в формуле теоремы 3.1 надо взять $H = \bigsqcup_1^\infty E_i, \; E_i \in \overline{S}$. $\square$

Внешняя мера, отвечающая мере на кольце.

Theorem 4.2. *Пусть μ - мера на кольце $\mathcal{R}$. $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ - наследственное σ-кольцо, порожденное $\mathcal{R}$. Положим для любого $A \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_1^\infty \mu(A_i) \; : \; A \subset \bigcup_1^\infty A_i \, , \; A_i \in \mathcal{R}\}$$

Тогда μ^* является внешней мерой на $\mathcal{H}(\mathcal{R})$, совпадающей на $\mathcal{R}$ с μ.

Доказательство. Сначала покажем, что если $A \in \mathcal{R}$, то $\mu^*(A)$ совпадает с $\mu(A)$.
Действительно, из свойств меры вытекает, что, если $A \subset \bigcup_1^\infty A_i$ и $A\,, A_i \in \mathcal{R}$, то

$$\mu(A) \leq \sum_1^\infty \mu(A_i) \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Но так как $A \subset A \bigcup \varnothing \bigcup \varnothing \ldots$, $A \in \mathcal{R}$, то $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ и поэтому $\mu(A) = \mu^*(A)$ для $A \in \mathcal{R}$. Теперь докажем, что μ^* -внешняя мера на $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{R})$.

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$, т.к.$\varnothing \in \mathcal{R}$ и $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.
2. Пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{H}$, $\quad B_1 \subset B_2$. Если $B_2 \subset \bigcup_1^\infty A_i$, $\quad A_i \in \mathcal{R}$, то $B_1 \subset \bigcup_1^\infty A_i$ и поэтому
$$\mu^*(B_1) \leq \mu^*(B_2).$$
3. μ^* - полуаддитивна, т.е. надо показать, что, если $A, A_i \in \mathcal{H}$, $\quad A \subset \bigcup_1^\infty A_i$, то
$$\mu^*(A) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_i). \tag{5}$$
   Действительно, из определения μ^* вытекает, что для $\forall \varepsilon > 0, \forall i \;\; \exists \, \{A_{ij}\}$, $A_{ij} \in \mathcal{R}$:
$$\mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i \;\geq\; \sum_j \mu(A_{ij})\,, \qquad A_i \subset \bigcup_1^\infty A_{ij}.$$
   Очевидно, что $A \subset \bigcup_{i,j} A_{ij}$, $A_{ij} \in \mathcal{R}$. Следовательно
$$\mu^*(A) \leq \sum_{i,j} \mu(A_{ij}) \leq \varepsilon + \sum_1^\infty \mu^*(A_i).$$
   В силу произвольности ε получаем (5). $\square$

Theorem 4.3. *Пусть μ^* - внешняя мера, соответствующая мере μ и построенная в предыдущей теореме. Если μ σ-конечна, то μ^* также σ-конечна.*

Доказательство. Если μ σ-конечна, то $X \in \mathcal{R}$ и найдется последовательность $A_i \in \mathcal{R}$ такая, что $X \subset \bigcup_1^\infty A_i$ и $\mu(A_i) < \infty$. Так как μ и μ^* совпадают на $\mathcal{R}$, получаем σ-конечность μ^*. $\square$

Theorem 4.4. $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset \overline{S}$ *- класс μ^*-измеримых множеств, где μ^* есть внешняя мера, отвечающая мере μ (из теоремы 4.2).*

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{R}$, $H \in \mathcal{H}$ и фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения μ^* вытекает, что найдутся $\{E_n\}$, $\;E_n \in \mathcal{R}$ такие, что

$$H \subset \bigcup_1^\infty E_n\ ,\ \ \mu^*(H)+\varepsilon \geq \sum_1^\infty \mu(E_n).$$

Далее,

$$\mu(E_n) = \mu(\underbrace{E_n \bigcap E}_{\in\mathcal{R}}) + \mu(\underbrace{E_n \bigcap E^c}_{E_n\setminus E\in\mathcal{R}})$$

$$\Rightarrow\ \mu^*(H)+\varepsilon \geq \sum_1^\infty \mu(E_n \bigcap E) + \sum_1^\infty \mu(E_n \bigcap E^c) \geq$$

$$\geq \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E^c),$$

так как

$$H \bigcap E \subset \bigcup_1^\infty (E_n \bigcap E) = (\bigcup_1^\infty E_n) \bigcap E.$$

В силу произвольности ε получаем, что

$$\mu^*(H) \geq \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E^c).$$

Так как обратное неравенство очевидно, то

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E^c)$$

E есть μ^*-измеримое множество по определению. Следовательно, $\mathcal{R} \subset \overline{S}$. Поскольку $\overline{S}$ есть σ-кольцо, получаем $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset \overline{S}$. $\square$

Theorem 4.5. *Для всякой меры μ на кольце $\mathcal{R}$ найдется мера $\widetilde{\mu}$ на $\mathcal{S}(\mathcal{R})$, продолжающая μ, т.е.*

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(A),\ \ A \in \mathcal{R}.$$

Если μ - σ-конечна, то $\widetilde{\mu}$ - σ-конечна и $\widetilde{\mu}$ есть единственное продолжение.

Доказательство. Существование $\widetilde{\mu}$ следует из теорем 4.1 - 4.4.
Докажем от противного, что $\widetilde{\mu}$ является единственным продолжением. Пусть существуют μ_1, μ_2 продолжающие μ на $\mathcal{S}(\mathcal{R})$, причем одно из них, скажем, μ_1 конечно . Обозначим через $\mathcal{M}$ класс элементов A из $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ такой , что

$$\mu_1(A) = \mu_2(A).$$

Очевидно, класс $\mathcal{M}$ не пуст, так как $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$. Легко видеть, что $\mathcal{M}$ - монотонный класс из непрерывности меры.
Ранее доказано (см. теорему 1.4), что $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{R})$. Поэтому $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}$, но по определению $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}(\mathcal{R})$. Следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{S}(\mathcal{R})$ и поэтому $\mu_1 = \mu_2$ на $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.
Отбросим предположение о конечности μ_1.

Пусть $E \in \mathcal{R},\ \mu(E) < \infty$. Ранее доказано (см. теорему 1.2), что

$$\mathcal{S}(\mathcal{R}) \bigcap E = \mathcal{S}(\mathcal{R} \bigcap E).$$

Поскольку $\mathcal{S}(\mathcal{R} \bigcap E)$ - σ-кольцо, на котором μ_1, μ_2 конечны, получаем $\mu_2 = \mu_1$ на $\mathcal{S}(\mathcal{R} \bigcap E)$.
Пусть F - произвольный элемент $\mathcal{S}(\mathcal{R})$. Покажем, что

$$\mu_1(F) = \mu_2(F).$$

В силу σ-конечности μ имеем

$$\exists \{E_n\},\ E_n \in \mathcal{R}\ :\ \mu(E_n) < \infty,\ F \subset \bigcup_1^\infty E_n.$$

Положим $F_1 = E_1, \dots , F_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$. Тогда

$$F_n \in \mathcal{R},\ \ F \subset \bigcup_1^\infty F_n,\ \ \mu(F_n) < \infty.$$

Так как $\mu_i, i = 1, 2,$ - меры, совпадающие на $\mathcal{R}$, получаем

$$\mu_1(F) = \sum_1^\infty \mu_1(F_n \bigcap F) = \sum_1^\infty \mu_2(F \bigcap F_n) = \mu_2(F)$$

$$\mu_1(F) = \mu_1(F \bigcap (\bigcup_1^\infty F_n)),$$

где $F_i \bigcap F_j = \varnothing, i \neq j$

$\square$

Note 4.1. Требование σ-конечности в предыдущей теореме существенно.

Пример:

Рассмотрим $X = [0, 1) \bigcap \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел.
$\mathcal{P}$ - полукольцо подмножеств X вида $[a, b) \bigcap \mathbb{Q}$.
Как было доказано (см. теорему 1.5) $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ есть совокупность конечных объединений попарно непересекающихся элементов из $\mathcal{P}$.
Легко видеть, что в данном случае $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \mathcal{S}(\mathcal{R})$ есть совокупность всех подмножеств X.
Определим μ на $\mathcal{R}$ формулой $\mu(A) =$ числу точек в A. Очевидно, μ не является σ-конечной. Рассмотрим $\mu_1(A) =$ числу точек в A; $A \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$.
Пусть $\mu_2(A) = 2\mu_1(A)$. Функции μ_1 и μ_2 совпадают с μ на $\mathcal{R}$: все три функции на всех множествах из $\mathcal{R}$, кроме пустого, равны бесконечности.
Однако μ_1 и μ_2 на $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ различны.
Таким образом, требование σ-конечности существенно.

5

Лекция 5.

Theorem 5.1. *Пусть μ мера на $\mathcal{R}$*
1) Множество $E \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ является μ^*-измеримым, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists E_0 \in \mathcal{R} : \quad \mu^*(E \triangle E_0) < \varepsilon. \tag{6}$$

2) Если E является μ^*-измеримым и $\mu^*(E) < \infty$, то для $\forall \varepsilon > \; 0 \exists E_0 \in \mathcal{R}$ такое, что справедливо (6).

Доказательство. 1) Напомним, что по определению E является μ^*-измеримым, если для любого $H \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ справедливо равенство

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E^c).$$

Как мы отмечали ранее, для доказательства этого равенства достаточно показать, что для любого $H \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ имеем

$$\mu^*(H) \geq \mu^*(H \bigcap E) + \mu^*(H \bigcap E^c). \tag{7}$$

Поскольку (7) очевидно для $H \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, для которых $\mu^*(H) = \infty$, достаточно доказать (7) для H, имеющих конечную внешнюю меру.
Пусть $\varepsilon > 0$ Возьмем $E_0 \in \mathcal{R}$ такое, что выполняется (6). Заметим, что $\forall A, B \in \mathcal{H} : \mu^*(A) < \infty$, $\mu^*(B) < \infty$ справедливо неравенство

$$\mid \mu^*(A) - \mu^*(B) \mid \leq \mu^*(A \triangle B) \tag{8}$$

Действительно, $A \subset B \bigcup (A \triangle B)$ и $B \subset A \bigcup (A \triangle B)$. В силу свойств внешней меры μ^* получаем

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B).$$

и

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B).$$

Из последних неравенств вытекает (8).
Возьмем $A = E\bigcap H$ и $B = E_0\bigcap H$. Заметим, что

$$A\triangle B = (E\triangle E_0)\bigcap H \subset E\triangle E_0.$$

Тогда из (6) и (8)следует, что

$$|\ \mu^*(E\bigcap H) - \mu^*(E_0\bigcap H)\ | \le \varepsilon.$$

Поскольку $E^c\triangle E_0^c = E\triangle E_0$, аналогично доказываем неравенство

$$|\ \mu^*(E^c\bigcap H) - \mu^*(E_0^c\bigcap H)\ | \le \varepsilon.$$

Поэтому, учитывая измеримость E_0, имеем

$$\mu^*(H) = \mu^*(H\bigcap E_0) + \mu^*(H\bigcap E_0^c) \ge \mu^*(H\bigcap E) + \mu^*(H\bigcap E^c) - 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε неравенство (7) и тем самым измеримость E доказаны.
2) По определению

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_1^\infty \mu(E_i), E \subset \bigcup_1^\infty E_i, E_i \in \mathcal{R}\}.$$

Следовательно, $\exists\{E_i\}$,$E_i \in \mathcal{R}, E \subset \bigcup\limits_1^\infty E_i$ такие, что

$$\sum_1^\infty \mu(E_i) \le \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из определения и свойств меры $\overline{\mu}$(на лекциях $\overline{\mu}$-сужение внешней меры μ^* на $\overline{\mathcal{S}}$ имеем

$$\infty > \sum_1^\infty \mu(E_i) \ge \overline{\mu}(\bigcup_1^\infty E_i) = \lim \overline{\mu}(\bigcup_1^n E_i).$$

Следовательно, существует n_0, для которого

$$\overline{\mu}(\bigcup_1^\infty E_i) \le \overline{\mu}(\underbrace{\bigcup_1^{n_0} E_i}_{E_0\in\mathcal{R}}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для доказательства (6) достаточно показать , что

$$\mu^*(E \setminus E_0) \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \mu^*(E_0 \setminus E) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

так как $E\triangle E_0 = (E \setminus E_0)\bigcup(E_0 \setminus E)$. Имеем

$$\mu^*(E \setminus E_0) \le \mu^*(\underbrace{(\bigcup_1^\infty E_i)}_{\in\overline{S}} \setminus \underbrace{E_0}_{\in\overline{S}}) = \overline{\mu}((\bigcup_1^\infty E_i) \setminus E_0) = \overline{\mu}(\bigcup_1^\infty E_i) - \overline{\mu}(E_0) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

и

$$\mu^*(E_0 \setminus E) \le \mu^*((\bigcup_1^\infty E_i) \setminus E)$$

$$= \overline{\mu}((\bigcup_1^\infty E_i) \setminus E) = \overline{\mu}(\bigcup_1^\infty E_i) - \overline{\mu}(E) \le \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \square$$

Theorem 5.2. *Для всех $E \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ имеем*

$$\mu^*(E) = \inf\{\overline{\mu}(F), E \subset F, F \in \overline{S}\} = \inf\{\tilde{\mu}(F), E \subset F, F \in \mathcal{S}(\mathcal{R})\}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из цепочки неравенств

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_1^\infty \mu(E_i), E \subset \bigcup_1^\infty E_i, E_i \in \mathcal{R}\}$$

$$\ge \inf\{\sum_1^\infty \tilde{\mu}(E_i), E \subset \bigcup_1^\infty E_i, E_i \in \mathcal{S}(\mathcal{R})\}$$

$$\ge \inf\{\tilde{\mu}(\bigcup_1^\infty E_i), E \subset \bigcup_1^\infty E_i, E_i \in \mathcal{S}(\mathcal{R})\}$$

$$\ge \inf\{\overline{\mu}(F), E \subset F, F \in \overline{S}\} \ge \mu^*(E). \qquad \square$$

Definition 5.1. *F - называется **измеримой оболочкой** для $E \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, если $F \in \mathcal{S}(\mathcal{R}), E \subset F$ и для любого $G \in \mathcal{S}(\mathcal{R}) : G \subset F \setminus E$ имеем $\tilde{\mu}(G) = 0$.*

Theorem 5.3. *Если $E \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ имеет σ-конечную внешнюю меру, то E имеет измеримую оболочку F и $\mu^*(E) = \tilde{\mu}(F)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mu^*(E) < \infty$. По предыдущей теореме

$$\forall n > 0 \exists F_n \in \mathcal{S}(\mathcal{R}) : E \subset F_n, \tilde{\mu}(F_n) \le \mu^*(E) + \frac{1}{n}$$

Положим $F = \bigcap_1^\infty F_n \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$. Имеем $E \subset F$ и при любом натуральном n

$$\mu^*(E) \le \mu^*(F) = \tilde{\mu}(F) \le \tilde{\mu}(F_n) \le \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

В силу произвольности n получаем $\mu^*(E) = \tilde{\mu}(F)$.

Проверим, что F есть измеримая оболочка.
Возьмем произвольное $G \subset F \setminus E, G \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$. Предположим, что $\tilde{\mu}(G) > 0$.
Поскольку $E \subset F \setminus G$, имеем

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(\underbrace{F \setminus G}_{\in \mathcal{S}(\mathcal{R})}) = \tilde{\mu}(F \setminus G) = \tilde{\mu}(F) - \tilde{\mu}(G) < \tilde{\mu}(F) = \mu^*(E).$$

Получили противоречие и поэтому $\tilde{\mu}(G) = 0$, т.е. F есть измеримая оболочка.
Пусть E теперь σ-конечно относительно μ^*. Тогда найдутся $E_n \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ такие, что

$$E = \bigcup_1^\infty (E_n \bigcap E) : \mu^*(E_n \bigcap E) < \infty.$$

По первой части доказательства $\exists F_n$ - измеримая оболочка для $E_n \bigcap E$. Тогда утверждается, что $F_0 = \bigcup\limits_1^\infty F_n$ является измеримой оболочкой для E.

$\square$

Упражнение. Доказать самостоятельно
Упражнение. Пусть F_1 и F_2 измеримые оболочки для E показать, что $\tilde{\mu}(F_1 \triangle F_2) = 0$.

Theorem 5.4. *Пусть мера μ является σ конечной на $\mathcal{R}$. Тогда $\overline{\mu}$ и $\tilde{\mu}$ также являются σ- конечными на $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ и $\overline{\mathcal{S}}$ соответственно.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3.

Theorem 5.5. *Пусть μ-мера на σ-кольце $\mathcal{S}$. Класс множеств вида $E \bigcup N$, где $E \subset \mathcal{S}$ и N - нулевое множество, т.е. $\exists F \in \mathcal{S} : N \subset F$ и $\mu(F) = 0$, образует σ-кольцо, которое обозначается $\overline{\mathcal{S}}$. Функция $\overline{\mu}$, определенная на $\overline{\mathcal{S}}$ формулой $\overline{\mu}(E \bigcup N) = \mu(E)$, является мерой на $\overline{\mathcal{S}}$. При этом $\overline{\mu}$ определяет единственное продолжение μ с $\mathcal{S}$ на $\overline{\mathcal{S}}$.*

Note 5.1. Определенная в теореме мера $\overline{\mu}$ называется **пополнением меры** μ.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{E_i \bigcup N_i\}, E_i \in \mathcal{S}, N_i$ - нулевые множества. Имеем

$$\bigcup_1^\infty (E_i \bigcup N_i) = \underbrace{(\bigcup_1^\infty E_i)}_{\in \mathcal{S}} \bigcup \underbrace{(\bigcup_1^\infty N_i)}_{\subset \bigcup F_i} \text{ и } F_i \in \mathcal{S} \text{ и } \mu(F_i) = 0$$

$$\Rightarrow \bigcup_{1}^{\infty} F_i \in \mathcal{S} \text{ и } \mu(\bigcup_{1}^{\infty} F_i) \le \sum_{1}^{\infty} \mu(F_i) = 0.$$

Следовательно, $\bigcup\limits_{1}^{\infty}(E_i \bigcup N_i) \in \overline{\mathcal{S}}$.

Пусть $E_1 \bigcup N_1, E_2 \bigcup N_2 \in \overline{\mathcal{S}}$. Имеем

$$(E_1 \bigcup N_1)\backslash(E_2 \bigcup N_2) = (E_1 \bigcup N_1) \bigcap (E_2 \bigcup N_2)^c = (E_1 \bigcup N_1) \bigcap E_2^c \bigcap N_2^c =$$

$$= (E_1 \bigcap E_2^c \bigcap N_2^c) \bigcup \underbrace{(N_1 \bigcap E_2^c \bigcap N_2^c)}_{\subset N_1 \subset F_1 \text{нулевое множество}}.$$

Далее,

$$E_1 \bigcap E_2^c \bigcap N_2^c = \underbrace{(E_1 \bigcap E_2^c \bigcap N_2^c \bigcap F_2^c)}_{E_1 \bigcap E_2^c \bigcap F_2^c \in \mathcal{S}} \bigcup \underbrace{(E_1 \bigcap E_2^c \bigcap N_2^c \bigcap F_2)}_{\subset F_2 \text{ - нулевое множество}}.$$

Таким образом, $(E_1 \bigcup N_1) \setminus (E_2 \bigcup N_2) \in \overline{\mathcal{S}}$ и $\overline{\mathcal{S}}$ является σ-кольцом.
Докажем теперь корректность определения $\overline{\mu}$, т.е. покажем, что если

$$E_1 \bigcup N_1 = E_2 \bigcup N_2, \tag{9}$$

то $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. Из (9) вытекает, что $E_1 \triangle E_2 \subset N_1 \bigcup N_2$ и поэтому $\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$. Поскольку

$$E_1 \subset E_2 \bigcup (E_1 \triangle E_2), E_2 \subset E_1 \bigcup (E_1 \triangle E_2),$$

имеем

$$|\mu(E_1) - \mu(E_2)| \le \mu(E_1 \triangle E_2).$$

Следовательно, $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Упражнение. Закончить доказательство теоремы, т.е доказать счетную аддитивность $\overline{\mu}$.

6

Лекция 6.

Theorem 6.1. *Пусть μ есть σ-конечная мера на $\mathcal{R}$, μ^* есть внешняя мера, индуцированная μ на $\mathcal{H}(\mathcal{R})$, $\overline{\mu}$ есть мера на $\overline{\mathcal{S}}$, индуцированная μ^*, и $\tilde{\mu}$, как и выше, сужение $\overline{\mu}$ на $\mathcal{S}(\mathcal{R})$. Тогда пополнение $\tilde{\mu}$ совпадает с $\overline{\mu}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\mathcal{S}(\mathcal{R})}$ определено пополнением $\tilde{\mu}$. В силу теоремы 5.5 достаточно доказать, что $\overline{\mathcal{S}(\mathcal{R})} = \overline{S}$.
Очевидно , $\overline{\mathcal{S}(\mathcal{R})} \subset \overline{S}$ и пополнение $\tilde{\mu}$ совпадает с $\overline{\mu}$.
Докажем соотношение $\overline{S} \subset \overline{\mathcal{S}(\mathcal{R})}$. Пусть $E \in \overline{S}$. Ранее доказано, что $\overline{\mu}$ σ-конечна, поэтому имеем

$$E = \bigcup_{1}^{\infty} E_i, \quad E_i \in \overline{S}, \quad \overline{\mu}(E_i) < \infty.$$

Следовательно, для завершения доказательства, достаточно показать, что если $E \in \overline{S} : \overline{\mu}(E) < \infty$, то $E \in \overline{\mathcal{S}(\mathcal{R})}$. Пусть F есть измеримая оболочка для E и G - измеримая оболочка для $F \setminus E$. Поскольку $\overline{\mu}(E) = \mu^*(E) \underbrace{=}_{\text{по теореме 5.3}} \tilde{\mu}(F) = \overline{\mu}(F)$, имеем

$$\overline{\mu}(F \setminus E) = \overline{\mu}(F) - \overline{\mu}(E) = 0.$$

С другой стороны

$$\overline{\mu}(F \setminus E) = \mu^*(F \setminus E) \underbrace{=}_{\text{по теореме 5.3}} \tilde{\mu}(G) = 0.$$

Таким образом,

$$E = \underbrace{(F \setminus G)}_{\in \mathcal{S}(\mathcal{R})} \bigcup (E \bigcap G) \in \overline{\mathcal{S}(\mathcal{R})},$$

так как $(E \bigcap G) \subset G$ есть нулевое множество. $\square$

6.1 Мера Лебега.

Пусть $X = \mathbb{R}$ и $\mathcal{P}$ - полукольцо, образованное множествами вида $[a, b)$, $-\infty < a \leq b + \infty$. На $\mathcal{P}$ определим функцию λ :

$$\lambda([a, b)) = b - a, \quad a \leq b \tag{1}$$

Theorem 6.2. *λ, определенная (1), является мерой.*

Доказательство. Из определения ясно, что функция λ неотрицательна и не тождественно равна бесконечности. Следовательно, остается доказать σ-аддитивность λ. Доказательство этого факта опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Если $[a_0, b_0] \subset \bigcup\limits_1^n (a_i, b_i)$, то $b_0 - a_0 \leq \sum\limits_{i=1}^n (b_i - a_i)$.*

Доказательство. Проводится по индукции. □

Лемма 2. *Пусть $E_0, E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{P}$, $E_0 \subset \bigcup\limits_1^\infty E_i$. Тогда*

$$\lambda(E_0) \leq \sum_1^\infty \lambda(E_i).$$

Доказательство. Пусть $E_i = [a_i, b_i)$ для всех $i \geq 0$. Если $a_0 = b_0$, то утверждение очевидно. Пусть теперь $a_0 < b_0$. Возьмем $\delta :\ \delta < b_0 - a_0$. Из условия леммы вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$[a_0, b_0 - \delta] \ \subset \ \bigcup_1^\infty (a_i - \varepsilon/2^i, b_i).$$

Поскольку из счетного покрытия отрезка интервалами всегда можно выделить конечное подпокрытие, найдется n, при котором

$$[a_0, b_0 - \delta] \ \subset \ \bigcup_1^n (a_i - \varepsilon/2^i, b_i).$$

Отсюда и леммы 1 вытекает, что

$$b_0 - a_0 - \delta \leq \sum_1^n (b_i - a_i + \varepsilon/2^i) \leq$$

$$\leq \sum_1^\infty (b_i - a_i + \varepsilon/2^i) = \sum_1^\infty \lambda(E_i) + \varepsilon.$$

В силу произвольности δ и ε получаем утверждение леммы. □

Лемма 3.
Пусть $E_1, \dots, E_n,\ E_0 \in \mathcal{P}$ и $E_1, \dots, E_n$ попарно не пересекаются, при этом для любого i справедливо включение $E_i \subset E_0$. Тогда

$$\sum_1^n \lambda(E_i) \le \lambda(E_0).$$

Доказательство. Пусть $E_0 = [a_0, b_0),\ E_i = [a_i, b_i)$ и $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Тогда

$$a_0 \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \dots \le a_n \le b_n \le b_0.$$

и поэтому

$$\sum_1^n \lambda(E_i) = \sum_1^n (b_i - a_i) \le$$

$$\le \sum_1^n (b_i - a_i) + \sum_1^{n-1} (a_{i+1} - b_i) \le b_0 - a_0 = \lambda(E_0). \qquad \square$$

Продолжим доказательство теоремы 1.
Пусть $E_0 = \bigcup\limits_1^\infty E_i,\ E_i$ - попарно не пересекаются и $E_0, E_i \in \mathcal{P}$.
По лемме 2 получаем

$$\lambda(E_0) \le \sum_1^\infty \lambda(E_i).$$

Из леммы 3 следует, что

$$\forall n, \quad \sum_1^n \lambda(E_i) \le \lambda(E_0).$$

Устремляя n к бесконечности, получаем

$$\lambda(E_0) = \sum_1^\infty \lambda(E_i),$$

что и означает σ-аддитивность λ. $\square$

Итак, λ есть σ-конечная мера, заданная на полукольце полуинтервалов.

Corollary 6.1. *λ единственным образом продолжается на σ-кольцо $\mathcal{S}(\mathcal{P})$, порожденное $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Вытекает из теоремы о продолжении меры с полукольца на σ-кольцо, им порожденное. $\square$

Note 6.1. $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ является σ-алгеброй.

Лемма 4.

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \mathcal{S}(\mathcal{U})$$

где $\mathcal{U}$ - класс всех открытых подмножеств $\mathbb{R}$.

Note 6.2. $\mathcal{S}(\mathcal{U}) = \mathcal{B}$ - борелевская σ-алгебра.

Доказательство. 1. Имеем

$$[a,b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a).$$

Следовательно, $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}(\mathcal{U})$ и поэтому $\mathcal{S}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{U})$.
2. Поскольку

$$(a,b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a + 1/i, b),$$

получаем

$$(a,b) \in \mathcal{S}(\mathcal{P}).$$

Так как любое открытое подмножество $\mathbb{R}$ представимо в виде счетного объединения интервалов, имеем $\mathcal{S}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{P})$. □

Definition 6.1. *Пополнение определенной выше меры λ называется мерой Лебега. Множества, на которых определено пополнение λ, называются измеримыми по Лебегу. Они образуют σ-алгебру, которую мы обозначим $\mathcal{L}$. Пополнение λ мы будем обозначать так же λ.*

Proposition 6.1. *(без доказательства)*
Существуют множества, не измеримые по Лебегу.

Введем оператор сдвига:

$$S_a B = \{x + a,\ \forall x \in B\}.$$

В частности,

$$S_a(c,d) = (c + a, d + a).$$

Если $\mathcal{A}$ - некоторый класс множеств, то

$$S_a \mathcal{A} = \{S_a A,\ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Лемма 5. *Для любого $a \in \mathbb{R}$ имеем $S_a \mathcal{B} = \mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Докажем, что $S_a \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$.
Пусть $\mathcal{F}$ - класс множеств на прямой $\mathbb{R}$ такой, что $A \in \mathcal{F}$, если $S_a A \in \mathcal{B}$.
Для (c,d) имеем

$$S_a((c,d)) = (c + a, d + a) \ \in \mathcal{B}. \tag{2}$$

Далее, для любых $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ имеем

$$S_a(\bigcup_1^\infty A_i) = \bigcup_1^\infty (S_a A_i),$$

$$S_a(A_1 \setminus A_2) = S_a A_1 \setminus S_a A_2. \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что $\mathcal{F}$ – σ-алгебра. Из (2) вытекает, что все открытые множества принадлежат $\mathcal{F}$. Поэтому $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ и

$$S_a \mathcal{B} \subset \mathcal{B}. \tag{4}$$

Применяя к (4) оператор S_{-a}, имеем $S_{-a}(S_a\mathcal{B}) \subset S_{-a}\mathcal{B}$. Поэтому

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{S}_{-a}\mathcal{B}. \tag{5}$$

Но в (5) a есть произвольное число. Объединяя (4) и (5), получаем утверждение леммы. □

Theorem 6.3. *1. Для любых $a \in \mathbb{R}$ и $E \in \mathcal{L}$*

$$\lambda(S_a E) = \lambda(E).$$

2. Если мера μ на $\mathcal{L}$ не тождественно равна 0 и такова, что

$$\mu(\{x\}) = 0 \;\; \text{и} \;\; \mu(S_a E) = \mu(E), \quad \forall\, x, a \in \mathbb{R},\; E \in \mathcal{L}.$$

Тогда $\mu = c\lambda$, где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Доказательство. 1. Фиксируем произвольное $a \in \mathbb{R}$ и положим для $E \in \mathcal{B}$

$$\lambda_1(E) = \lambda(S_a E).$$

Тогда из лемм 4 и 5 следует, что λ_1 есть мера, при этом для $b \le c$

$$\lambda_1([b, c)) = \lambda(S_a([b, c))) = \lambda([b + a, c + a)) = c - b = \lambda([b, c)).$$

Следовательно, λ_1 и λ совпадают на $\mathcal{P}$. Из теорем о продолжении меры получаем, что λ_1 и λ совпадают на $\mathcal{B} = \mathcal{S}(\mathcal{P})$.
Для доказательства того, что λ_1 и λ совпадают на $\mathcal{L}$ достаточно показать, что

$$S_a \mathcal{L} = \mathcal{L}.$$

Пусть $E \in \mathcal{L}$, т.е. $E = E_1 \bigcup N_1$, где $E_1 \in \mathcal{B}$ и N_1 - нулевое множество, т.е. существует $F_1 \in \mathcal{B}$ такое, что $N_1 \subset F_1$ и $\lambda(F_1) = 0$.
Имеем

$$S_a E = S_a E_1 \bigcup S_a N_1.$$

При этом по лемме 5 $S_a E_1 \in \mathcal{B}$. Далее, $S_a N_1 \subset S_a F_1$ и $\lambda(S_a F_1) = \lambda(F_1) = 0$. Следовательно, $S_a\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 5, получаем $S_a\mathcal{L} = \mathcal{L}$.

Для $E \in \mathcal{L}$ имеем

$$\lambda_1(E) = \lambda(\mathcal{S}_a E) = \lambda(\mathcal{S}_a E_1 \bigcup \mathcal{S}_a N_1) =$$

$$=^{(*)} \lambda(\mathcal{S}_a E_1) = \lambda(E_1) =^{(*)} \lambda(E_1 \bigcup N_1) = \lambda(E).$$

Равенства (*) имеют место в силу определения пополнения меры.
2. Пусть $h = \mu([0,1))$. Имеем

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad [0,1) = \bigcup_{i=0}^{k-1} [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$$

$$\Rightarrow \quad h = \sum_{i=0}^{k-1} \mu([\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})) = \{\text{т.к. } \mu(\mathcal{S}_a E) = \mu(E)\} = k\mu([0, \frac{1}{k}))$$

$$\Rightarrow \quad \mu([0, \frac{1}{k})) = \frac{h}{k}.$$

Следовательно, если $l \in \mathbb{N}$, то

$$\mu([0, \frac{l}{k})) = \frac{l}{k}\, h.$$

Если $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha > 0$, то

$$\mu([0, \alpha)) = \alpha h$$

Наконец, если $\beta > 0$ иррационально, возьмем $\alpha_k \in \mathbb{Q}: \ \ \alpha_k \downarrow \beta$ и $\beta = \lim \alpha_k$. Поскольку

$$[0, \beta] = \bigcap_{k=1}^{\infty} [0, \alpha_k) \quad \Rightarrow \mu([0, \beta]) = \beta h.$$

Итак, $\mu([0, \beta)) = \beta h$. Следовательно, для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \alpha < \beta$ имеем

$$\mu([\alpha, \beta)) = (\beta - \alpha) h = h\lambda([\alpha, \beta)).$$

Из теорем о продолжении мер получаем $\mu = \lambda h$ на $\mathcal{L}$. $\square$

7

Лекция 7.

7.1 ИЗМЕРИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ

Definition 7.1. *Измеримым пространством называется пара* $(X, \mathcal{S})$, *где* X *– произвольное множество и* $\mathcal{S}$ *–* σ*-алгебра подмножеств* X.

Definition 7.2. *Измеримые множества в измеримом пространстве – это множества, принадлежащие* $\mathcal{S}$.

Definition 7.3. *Борелевская* σ*-алгебра – это* σ*-алгебра, порожденная всеми открытыми подмножествами , если таковые определены.*

Обычно борелевские σ-алгебры будем обозначать через $\mathcal{B}$.

Definition 7.4. *Пространством с мерой называется тройка* $(X, \mathcal{S}, \mu)$, *где* $(X, \mathcal{S})$ *– измеримое пространство,* μ *– мера на* $\mathcal{S}$.

Всюду ниже, если не оговорено противное, будем рассматривать меры на σ-алгебрах.

Definition 7.5. *Пусть* $(X_1, \mathcal{S}_1)$, $(X_2, \mathcal{S}_2)$ *– измеримые пространства. Отображение* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *называется измеримым, если* $f^{-1}(\mathcal{S}_2) \subset \mathcal{S}_1$, *т.е.* $\forall E \in \mathcal{S}_2, f^{-1}(E) \in \mathcal{S}_1$.

Упражнение. Доказать, что суперпозиция измеримых отображений есть измеримое отображение, т.е. если $(X_i, \mathcal{S}_i)$, $i = 1, 2, 3$, являются измеримыми пространствами $f : X_1 \longrightarrow X_2$; и $g : X_2 \longrightarrow X_3$ – измеримые отображения, то отображение $g(f) = g \circ f : X_1 \longrightarrow X_3$ также измеримо.

Note 7.1. 1. Пусть $\mathcal{S}$ – вырожденная σ-алгебра, т.е. $\mathcal{S} = (\varnothing, X)$. Тогда f – измеримо $\Leftrightarrow f \equiv const$.
2. Если $\mathcal{S}$ – множество всех подмножеств X, то любое отображение, определенное на X, является измеримым.

Definition 7.6. *Действительная функция f на X со значениями в $\overline{R}$ называется измеримой, если $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$ для любого $E \in \mathcal{B}$. В случае, когда $X = \overline{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}$, измеримая функция называется измеримой по Борелю.*

Если $(X,\ \mathcal{S}) = (\overline{R},\ \mathcal{L})$, то измеримая функция измерима по Лебегу.

Свойства измеримых функций

Лемма 1. *Пусть E – некоторое множество, $(F, \mathcal{S})$ – измеримое пространство и $\varphi : E \to F$. Тогда*

a) *$\varphi^{-1}(\mathcal{S})$ является σ-алгеброй подмножеств E;*

b) *Если $\mathcal{P}$ порождает $\mathcal{S}$, то $\varphi^{-1}(\mathcal{P})$ порождает $\varphi^{-1}(\mathcal{S})$.*

Note 7.2. Очевидно,отображение φ измеримо относительно измеримого пространства $(E, \varphi^{-1}(\mathcal{S}))$.

Доказательство. Часть a) вытекает из равенств

$$\varphi^{-1}(\bigcup_1^\infty B_i) = \bigcup_1^\infty \varphi^{-1}(B_i),\ \ \varphi^{-1}(A \setminus B) = \varphi^{-1}(A) \setminus \varphi^{-1}(B). \qquad (1)$$

Ясно, что $\varphi^{-1}(F) = E \in \varphi^{-1}(\mathcal{S})$.
b) Пусть $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра, порожденная $\varphi^{-1}(\mathcal{P})$. Имеем $\varphi^{-1}(\mathcal{P}) \subset \varphi^{-1}(\mathcal{S})$ и поэтому $\mathcal{F} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{S})$.
Обозначим через $\mathcal{S}_1 = \{A \in \mathcal{S} : \varphi^{-1}(A) \subset \mathcal{F}\}$. В силу (1) и того, что $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра, получаем, что $\mathcal{S}_1$ также σ-алгебра. Кроме того, $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}_1$ и поэтому $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1 \Rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}$. $\square$

Theorem 7.1. *Пусть $(X_1, \mathcal{S}_1)$ и $(X_2, \mathcal{S}_2)$ – измеримые пространства и $\mathcal{P}$ – класс подмножеств X_2, порождающий $\mathcal{S}_2$. Пусть $\varphi : X_1 \to X_2$. Для измеримости φ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi^{-1}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}_1$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.
Достаточность. Обозначим через $\mathcal{S}(\varphi^{-1}(\mathcal{P}))$ σ-алгебра, порожденную $\varphi^{-1}(\mathcal{P})$. Если $\varphi^{-1}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}_1$, то по лемме 1 получаем

$$\varphi^{-1}(\mathcal{S}_2) = \mathcal{S}(\varphi^{-1}(\mathcal{P})) \subset \mathcal{S}_1.$$

Corollary 7.1. *Если f – действительная функция на измеримом пространстве $(X, \mathcal{S})$ со значениями в $\overline{R}$, то для измеримости f необходимо и достаточно, чтобы $\forall a \in \overline{R} : f^{-1}((-\infty, a)) \subset \mathcal{S}$.*

Доказательство. Вытекает из предыдущей теоремы и того факта, что борелевская σ-алгебра на $\overline{R}$ порождается классом всех полупрямых $(-\infty, a)$.

Corollary 7.2. *Если $(X_1, \mathcal{B}_1)$ и $(X_2, \mathcal{B}_2)$ – измеримые пространства, где X_1, X_2 – конечномерные евклидовы пространства, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1$ – борелевские $\sigma-$алгебры, то любое непрерывное отображение $\varphi : X_1 \to X_2$ является измеримым.*

Доказательство. Вытекает из того, что если φ-непрерывно, то прообраз любого открытого множества открыт.

Theorem 7.2. *Пусть $(X, \mathcal{S})$ – измеримое пространство, f и g – измеримые функции , тогда отображение $h : X \to (f(x), g(x))$ измеримо , если $\overline{R} \times \overline{R}$ наделить борелевской σ-алгеброй.*

Доказательство. Пусть $(a, b) \times (c, d))$ – открытый прямоугольник в $\overline{R} \times \overline{R}$. Тогда

$$h^{-1}((a, b) \times (c, d)) = \underbrace{f^{-1}((a, b))}_{\in \mathcal{S}} \bigcap \underbrace{g^{-1}((c, d))}_{\in \mathcal{S}} \in \mathcal{S}.$$

Доказательство завершено, т.к. борелевская σ-алгебра в $\overline{R} \times \overline{R}$ порождается классом прямоугольников $(a, b) \times (c, d)$, где a, b, c, d – рациональные числа, потому что любое открытое множество в $\overline{R} \times \overline{R}$ представимо в виде не более, чем счетного объединения указанных прямоугольников.

Theorem 7.3. *Пусть $f_1, f_2, ..., f_n$ – измеримые действительные функции на $(X, \mathcal{S})$ со значениями в $\overline{R}$. Тогда*

$$\sum_1^n f_i, \quad \prod_1^n f_i, \quad \max_{1 \leq i \leq n} (f_i), \quad \min_{1 \leq i \leq n} (f_i)$$

есть измеримые функции , в частности измеримой является $c\, f_1$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Общий случай рассматривается по индукции. Определим отображения $h, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ следующим образом

$$h : x \to (f(x), g(x)), \ x \in X;$$

$$\alpha : (x, y) \to x \times y; \ \ \beta : (x, y) \to x + y \ ;$$

$$\gamma : (x, y) \to \max(x, y); \ \ \delta : (x, y) \to \min(x, y) \text{ для } \ \ x, y \in \overline{R}.$$

По теореме 7.2 отображение h измеримо и по следствию 2 к теореме 7.1 отображения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ измеримы как непрерывные. Наконец, $f(x) + g(x)$ есть суперпозиция измеримых отображений $h\ \beta$. Аналогичные рассуждения применимы для остальных функций, указанных в теореме. $\square$

Theorem 7.4. *Пусть $f_1, f_2, ...$ – последовательность измеримых функций со значениями в $\overline{R}$. Тогда*

$$\sup_n f_n, \ \inf_n f_n, \ \liminf f_n, \ \limsup f_n$$

есть измеримые функции.
Множество X_1, на котором последовательность $f_1, f_2, ...$ сходится поточечно, т.е. $X_1 = \{x \in X : \exists \lim f_n(x)\}$ является измеримым и $\lim f_n$ на X_1 является измеримой функцией относительно $\mathcal{S} \bigcap X_1$.

Доказательство. Для любого $t \in \overline{R}$ имеем

$$\{x : \inf_n f_n < t\} = \bigcup_1^\infty \underbrace{\{x : f_n(x) < t\}}_{\in \mathcal{S}} \in \mathcal{S}$$

и поэтому $\inf f_n$ есть измеримая функция. Поскольку

$$\sup f_n = -\inf(-f_n);$$

$$\limsup f_n = \inf_n(\sup_{m \geq n} f_m);$$

$$\liminf f_n = \sup_n(\inf_{m \geq n} f_m),$$

доказана измеримость других функций.
Далее, $X_1 = \{x : \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\} \in \mathcal{S}$ и, очевидно, $\lim f_n = \liminf f_n = \limsup f_n$ есть измеримая действительная функция на измеримом пространстве $(X_1, \mathcal{S} \bigcap X_1)$. $\square$

8

Лекция 8.

Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой.
Некоторое свойство, зависящее от $x \in X$, назовем выполняющимся почти всюду, если оно выполняется для все x за исключением $x \in A$ и $\mu(A) = 0$. В частности, $f_n \to f$ п.в., если $\mu(B) = 0$, где $B = \{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$.

Theorem 8.1. *Пусть $E \in \mathcal{S}$ – измеримое множество конечной меры. $f_1, f_2, \ldots$ – последовательность действительных измеримых функций, почти всюду конечных на E, которая сходится почти всюду. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ измеримое $F \subset E : \mu(F) < \varepsilon$ и на $E \setminus F$ последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится.*

Доказательство. Пусть N_n для любого натурального n есть множество, на котором f_n бесконечно. Пусть N – множество в E, на котором нет сходимости последовательности $\{f_n\}$. Тогда на множестве $E_1 = E \setminus (N \bigcup \bigcup\limits_1^\infty N_i)$ все f_n конечны и $f_n \to f$ в каждой точке. Переходя от исходного пространства $(X, \mathcal{S}, \mu)$ к пространству $(E_1, E_1 \bigcap \mathcal{S}, \overline{\mu})$,где $\overline{\mu}(F) = \mu(F)$ для $F \in E_1 \bigcap \mathcal{S}$, можем считать, что $E_1 = X$.
Положим для натуральных m и n

$$E_n^m = \bigcap_{i \geq n} \{x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}.$$

Очевидно,

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots$$

и т.к. f_n сходится к f всюду, имеем $\bigcup\limits_n E_n^m = X$ при всех m. Тогда для каждого m существует $n(m)$, для которого

$$\mu(X \setminus E_{n(m)}^m) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Положим
$$F=\bigcup_{m=1}^{\infty}(E^m_{n(m)})^c.$$
Имеем
$$\mu(F)\underbrace{\leq}_{\text{полуаддитивость меры}}\sum_1^{\infty}\mu((E^m_{n(m)})^c)<\varepsilon.$$
С другой стороны $F^c=\bigcap_{m=1}^{\infty}E^m_{n(m)}$, так что $|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$ для всех $x\in F^c$ при $i\geq n(m)$ и поэтому f_n сходится равномерно к f на F^c. $\square$

Note 8.1. Покажем, что требование конечности $\mu(E)$ существенно. Пусть $X=\{1,2,...\}$, $\mathcal{S}=\{$ класс всех подмножеств X$\}$. Определим $\mu(E)$ как число точек в E. Положим $f_n(x)=1$, если $x\in\{1,2,...n\}$, и $f_n(x)=0$ в противном случае. Тогда $f_n(x)\to 1$ всюду. С другой стороны при $\varepsilon:0<\varepsilon<1$, условие $\mu(E)<\varepsilon$ означает, что $E=\varnothing$. Но $f_n(x)$ не сходится к 1 равномерно на X.

Упражнение. Пусть в предыдущем примере мера определена как $\mu(\{i\})=2^{-i}$. Возьмем $E=X$. Как выбрать множество F, указанное в теореме 8.1 ?

Definition 8.1. *Последовательность почти всюду конечных измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к f по мере , если $\forall\varepsilon>0:\mu(x:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon)\to 0$ при $n\to\infty$.*

Definition 8.2. *Последовательность почти всюду конечных измеримых функций $\{f_n\}$ называется фундаментальной по мере , если $\forall\varepsilon>0:\mu(x:|f_n(x)-f_m(x)|>\varepsilon)\to 0$ при $n,m\to\infty$.*

Theorem 8.2. (Теорема Егорова) *Пусть $\{f_n\}$ – последовательность почти всюду конечных измеримых функций, фундаментальная по мере. Тогда найдется подпос- ледовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся почти равномерно (т.е. $\forall\varepsilon>0\exists E_\varepsilon:\mu(E_\varepsilon)<\varepsilon$ и на E^c_ε имеет место равномерная сходимость последователь- ности $\{f_{n_k}\}$).*

Доказательство. Для любого натурального k найдется $n(k)$ такое, что при $n,m\geq n(k)$ имеем
$$\mu(x:|f_n(x)-f_m(x)|>\frac{1}{2^k})\leq\frac{1}{2^k}.$$
Положим $n_1=n(1),\ n_2=\max(n_1+1,n(2)),\ldots$. Получаем подпоследовательность $f_{n_1},\ f_{n_2},\ldots$. Покажем, что это и есть требуемая подпоследовательность. Пусть
$$E_k=\{x:|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}|>\frac{1}{2^k}\}\ \text{ и }\ F_k=\bigcup_{i\geq k}E_i.$$

Имеем
$$\mu(E_i) \le \frac{1}{2^i} \Rightarrow \mu(F_k) \le \frac{1}{2^{k-1}} \qquad (2)$$
При всех $x \notin F_k$ и $k \le i \le j$
$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \le \sum_{l=1}^{j-1} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| < \frac{1}{2^{i-1}}.$$
Таким образом, подпоследовательность f_{n_i} является фундаментальной в смысле равномерной сходимости на F_k^c и поэтому f_{n_i} равномерно сходится на F_k^c. В силу (2) подпоследовательность f_{n_i} сходится почти равномерно на X.

Дадим серию простых утверждений о соотношениях между различными видами сходимости.

Proposition 8.1. *Последовательность почти всюду конечных измеримых функций $\{f_n\}$, сходящаяся почти равномерно, сходится по мере.*

Доказательство. Это непосредственно следует из определений.

Proposition 8.2. *Последовательность фундаментальная по мере, является сходящейся по мере.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ фундаментальна по мере и $\{f_{n_k}\}$ – подпоследовательность, сходящаяся почти равномерно к некоторой функции $f(x)$. Тогда утверждение вытекает из соотношения
$$\{x : |f_n(x)-f(x)| > \varepsilon\} \subset \{x : |f_n(x)-f_{n_k}(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{x : |f_{n_k}(x)-f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Proposition 8.3. *Последовательность, сходящаяся по мере, является фундаментальной по мере.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – предел $f_n(x)$ в смысле сходимости по мере. Утверждение вытекает из соотношения
$$\{x : |f_n(x)-f_m(x)| > \varepsilon\} \subset \{x : |f_n(x)-f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{x : |f(x)-f_m(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Proposition 8.4. *Из сходимости почти равномерно следует сходимость почти всюду.*

Доказательство. Пусть F_n измеримое множество такое, что $\mu(F_n) < \frac{1}{n}$ и на F_n^c последовательность $\{f_n\}$ сходится к некоторой функции f равномерно. Положим $F = \bigcap\limits_1^\infty F_n$. Тогда $\forall n :\ \mu(F) \le \mu(F_n) < 1/n$ и поэтому $\mu(F) = 0$ Для $\forall x \in F^c = \bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n^c$ имеем $f_n(x) \to f(x)$, т.е. $f_n \to f$ почти всюду.

9

Лекция 9.

Интегрирование по мере.

Пусть $(X, \mathcal{S})$ – измеримое пространство.

Definition 9.1. *Измеримая действительная функция на* $(X, \mathcal{S})$ *называется простой, если множество ее значений конечно.*

Proposition 9.1. *Функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *является простой тогда и только тогда, когда имеет место представление*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot I_{X_i}(x), \tag{1}$$

где $a_1, ..., a_k$ *– различные действительные числа,*

$$X_1 \bigcup ... \bigcup X_k = X, \quad X_i \bigcap X_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

и $I_{X_i}(x)$ *есть индикатор множества* X_i, *т.е.* $I_{X_i}(x) = 1$, *если* $x \in X_i$, *и* $I_{X_i}(x) = 0$ *в противном случае.*

Доказательство. Пусть $a_1, ..., a_k$ есть различные значения простой функции f. Достаточно взять $X_i = f^{-1}(a_i)$.

Обозначим через $\mathcal{E}$ совокупность простых функций на $(X, \mathcal{S})$.

Proposition 9.2. *Множество* $\mathcal{E}$ *является линейным пространством, замкнутым относительно произведения и операций* max *и* min, *т.е. если* $f, g \in \mathcal{E}$, *то* $f \cdot g \in \mathcal{E}$, $\max(f, g) \in \mathcal{E}$ *и* $\min(f, g) \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Для линейности пространства $\mathcal{E}$ достаточно доказать, что если $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{E}$, то $\lambda f \in \mathcal{E}$, что очевидно из (1), и если $f, g \in \mathcal{E}$, то $f + g \in \mathcal{E}$.
В силу (1) имеем

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k_1} a_i \cdot I_{A_i}(x) = \sum_{i,j} a_i \cdot I_{A_i B_j}(x),$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k_2} b_j \cdot I_{B_j}(x) = \sum_{i,j} b_j \cdot I_{A_i B_j}(x).$$

И поэтому

$$f(x) + g(x) = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \cdot I_{A_i B_j}(x) = \sum_{l} c_l \cdot I_{Z_l}(x),$$

где Z_l получаются как объединения пар $A_i B_j$, соответствующих одинаковым значениям сумм $a_i + b_j$. Тот факт, что если $f, g \in \mathcal{E}$, то $f \cdot g \in \mathcal{E}$, доказывается аналогично.

Упражнение. Закончить доказательство утверждения.

Theorem 9.1. *Пусть f - произвольная измеримая функция со значениями $\overline{\mathbb{R}}^+$. Существует неубывающая последовательность простых функций f_n со значениями в $\mathbb{R}^+$, поточечно сходящаяся к f.*

Доказательство. Положим

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \cdot I_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}}(x) + n \cdot I_{\{f \geq n\}}(x).$$

Из определения f_n вытекает, что f_n есть простая функция, т.к. число ее значений конечно и все множества

$$\{x : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} \text{ и } \{x : f(x) \geq n\}$$

измеримы в силу измеримости f. Покажем, что $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ при всех $x \in X$. Действительно, пусть x таково, что

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$$

при некотором $k \in \{0, ..., n \cdot 2^n - 1\}$. Тогда $f_n(x) = k \cdot 2^{-n}$ и

$$f_{n+1}(x) = \frac{2\,k}{2^{n+1}}, \text{ если } x : \frac{2\,k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2\,k+1}{2^{n+1}},$$

либо

$$f_{n+1}(x) = \frac{2\,k+1}{2^{n+1}} \text{ если } x : \frac{2\,k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}}$$

и, следовательно, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
Если x таково, что $f(x) \geq n$, то $f_n(x) = n$ и

$$f_{n+1}(x) = n + \frac{r}{2^{n+1}}, \ \ 0 \le r < 2^{n+1} - 1,$$

если $f(x) < n+1$ или

$$f_{n+1}(x) = n+1,$$

если $f(x) \ge n+1$.
Теперь покажем, что $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in X$. Действительно, если $x : f(x) = +\infty$, то $f_n(x) = n$ при всех n. С другой стороны, если x таково, что $f(x)$ конечно, то $\exists m : f(x) < m$ и по построению

$$f(x) - 2^{-n} \le f_n(x) \le f(x) \quad \text{при всех} \ \ n \ge m. \qquad \square$$

Следствие. Если f – произвольная измеримая функция со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, то существует последовательность $\{f_n\} \in \mathcal{E} : f_n(x) \to f(x)$ поточечно.

Доказательство. вытекает из представления $f = f^+ - f^-$, где $f^+ = \max(f, 0), \ f^- = \max(-f, 0)$.
При этом f^+ и f^- есть измеримые функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$. По теореме 9.1 существуют последовательности $\{f_n^+\}, \ \{f_n^-\} \in \mathcal{E}$, поточечно сходящиеся к f^+ и f^- соответственно. Таким образом, искомая последовательность состоит из функций $f_n = f_n^+ - f_n^-$. $\square$

Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой. Обозначим $\mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}})$ совокупность всех измеримых действительных функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ – совокупность измеримых функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Theorem 9.2. *Существует единственный функционал Φ на $\mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$ такой, что выполнены следующие свойства*
1. При всех $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ и $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+$

$$\Phi(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \Phi(f), \ \ \Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g),$$

$$\textit{если} \ \ f \le g \ \textit{,то} \ \ \Phi(f) \le \Phi(g)$$

2. Для любой неубывающей последовательности $\{f_n\} \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ имеем

$$\sup_n \Phi(f_n) = \Phi(\sup f_n).$$

3. При всех $E \in \mathcal{S}$ имеем $\Phi(I_{\{E\}}) = \mu(E)$.

Доказательство. Докажем сначала единственность. В силу свойств 1 и 3 функционал Φ однозначно определен на простых функциях, т.е. если

$$f = \sum a_i \cdot I_{\{A_i\}}, \quad \text{то} \ \ \Phi(f) = \sum a_i \cdot \mu(A_i).$$

Для произвольной функции $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ единственность вытекает из теоремы 9.1 и свойства 2.

Доказательство существования разобьем на несколько частей:
a) Определим Φ на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ следующим образом: если

$$f(x) = \sum_1^n a_i \cdot I_{A_i}(x), \text{ где } A_i \bigcap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j,$$

то положим

$$\Phi(f) = \sum_1^n a_i \cdot \mu(A_i).$$

Ясно, что $\Phi(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \Phi(f)$. Свойство 3 также очевидно выполнено.
Далее, пусть

$$f = \sum_i a_i \cdot I_{A_i} \quad \text{и} \quad g = \sum_j b_j \cdot I_{B_j}.$$

Тогда

$$f + g = \sum_k c_k \cdot I_{c_k} = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \cdot I_{A_i B_j}$$

и по определению функционала

$$\Phi(f+g) = \sum_k c_k \cdot \mu(C_k) = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \cdot \mu(A_i B_j)$$

$$= \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i B_j) + \sum_j b_j \sum_i \mu(A_i B_j)$$

$$= \sum_i a_i \cdot \mu(A_i) + \sum_j b_j \cdot \mu(B_j) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

Для доказательства монотонности Φ запишем

$$f = \sum_i a_i \cdot I_{A_i} = \sum_{i,j} a_i \cdot I_{A_i B_j}, \quad g = \sum_j b_j \cdot I_{B_j} = \sum_{i,j} b_j \cdot I_{A_i B_j}.$$

Если $f \leq g$, то $a_i \leq b_j$ на $A_i \cap B_j$ и поэтому из определения Φ вытекает $\Phi(f) \leq \Phi(g)$.
b) **Лемма.** Пусть $h, \{h_p\} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$ и последовательность $\{h_p\}$ – неубывающая. Если $\sup h_p \geq h$, то $\sup \Phi(h_p) \geq \Phi(h)$.

Доказательство. Запишем

$$h = \sum_i a_i \cdot I_{A_i} = \sum_{i,j} a_i \cdot I_{A_i B_j^p}, \quad h_p = \sum_j b_j^p \cdot I_{B_j^p} = \sum_{i,j} b_j^p \cdot I_{A_i B_j^p}.$$

Тогда

$$\Phi(h) = \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i B_j^p) = \sum_i a_i \cdot \mu(A_i),$$

$$\Phi(h_p) = \sum_i \sum_j b_j^p \cdot \mu(A_i B_j^p).$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что при любом фиксированном i

$$\lim_p \sum_j b_j^p \cdot \mu(A_i B_j^p) \geq a_i \cdot \mu(A_i). \qquad (2)$$

Если $a_i = 0$, то (2) очевидно. Если $a_i > 0$, то возьмем произвольное $a_i' : 0 < a_i' < a_i$. Поскольку $\sup_p h_p(x) \geq a_i > a_i'$ при $x \in A_i$, имеем $\{\{h_p > a_i'\} \bigcap A_i\} \uparrow A_i$ и поэтому в силу свойства непрерывности мер получаем

$$\lim \mu(\{h_p > a_i'\} \bigcap A_i) = \mu(A_i).$$

Далее,

$$\sum_j b_j^p \, \mu(A_i B_j^p) = (\sum_{j: b_j^p > a_i'} b_j^p \, \mu(A_i B_j^p) + \sum_{j: b_j^p \leq a_i'} b_j^p \, \mu(A_i B_j^p))$$

$$\geq \sum_{b_j^p : b_j^p > a_i'} b_j^p \, \mu(A_i B_j^p) > a_i' \sum_{j: b_j^p > a_i'} \mu(A_i B_j^p) = a_i' \, \mu(\{h_p > a_i'\} \cap A_i).$$

Переходя к пределу в левой и правой части при $p \to \infty$, получаем (2) в силу произвольности выбора $a_i' < a_i$.

c) Определим Φ на $\mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}^+})$ следующим образом: для произвольной функции $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \mathbb{R}^+)$ положим

$$\Phi(f) = \lim \Phi(f_n),$$

где $\{f_n\} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$ и $f_n \uparrow f$ поточечно. Существование последовательности такого типа вытекает из теоремы 9.1.
Докажем корректность определения. Пусть $g_n \uparrow f, \ g_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$ Для любого натурального m имеем $f_m \leq f = \lim g_n$. Тогда по лемме, доказанной в части b) получаем

$$\Phi(f_m) \leq \lim \Phi(g_n) \Rightarrow \lim \Phi(f_m) \leq \lim \Phi(g_n).$$

Меняя местами g_n и f_m, приходим к обратному неравенству и поэтому $\lim \Phi(f_m) = \lim \Phi(g_n)$.
d) Свойство 3 для Φ очевидно выполнено. Покажем справедливость свойства 1.
Упражнение. Доказать $\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi(f)$.
Пусть $f, \ g \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$. Докажем, что

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g). \qquad (3)$$

Пусть $f_n \uparrow f, \ g_n \uparrow g$ и $f_n, \ g_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$. Ранее мы показали, что (3) верно для простых функций. Для доказательства (3) для f, g достаточно перейти к переделу при $n \to \infty$.

Пусть теперь $f \le g$. Тогда $f_n \le g = \lim g_n$ и поэтому в силу пункта b) имеем
$$\Phi(f_n) \le \lim \Phi(g_n) = \Phi(g) \Rightarrow \Phi(f) \le \Phi(g).$$

e) Покажем, что Φ обладает свойством 2. Пусть $f_n, f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ и $f_n \uparrow f$. По пункту d)
$$\lim \Phi(f_n) \le \Phi(f).$$

Обратное неравенство также верно. Действительно, возьмем неубывающие последовательности $\{h_p\}, \{h_p^n\} \in \mathcal{E}$ такие, что $f = \lim_p h_p$ и $f_n = \lim_p h_p^n$ поточечно. Положим $g_p = \sup_{n \le p} h_p^n$. Очевидно, $g_p \in \mathcal{E}$ и
$$h_p^n \le g_p \le f_p \quad \text{при} \quad n \le p. \tag{4}$$

Следовательно, $f_n = \sup_p h_p^n \le \sup_p g_p$ и поэтому $h_n \le \sup_p g_p$ при любом n. По лемме из пункта b) имеем $\Phi(h_n) \le \sup_p \Phi(g_p)$. Отсюда получаем
$$\Phi(f) = \lim_n \Phi(h_n) \le \sup_p \Phi(g_p) \underbrace{\le}_{(4)} \sup_p \Phi(f_p). \qquad \square$$

Лекция 10.

Definition 10.1. *Функционал Φ на $\mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$, определенный в теореме 9.2, называется внешним интегралом и обозначается*

$$\Phi(f) = \int^* f(x)\mu(dx) = \int^* f(x)d(\mu(x)) = \int^* f d\mu.$$

Пусть $A \in \mathcal{S}$. Будем использовать также обозначение

$$\int_A^* f d\mu = \int^* f \cdot I_A d\mu.$$

Theorem 10.1 (Лемма Фату). *Для любой последовательности функций $f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$*

$$\liminf \int^* f_n d\mu \geq \int^* \liminf f_n d\mu.$$

Доказательство. Очевидно, $f_n \geq \inf\limits_{j \geq p} f_j$ при $n \geq p$. В силу монотонности Φ имеем

$$\int^* f_n d\mu \geq \int^* \inf_{j \geq p} f_j d\mu \quad \text{при} \quad n \geq p.$$

Следовательно,

$$\inf_{n \geq p} \int^* f_n d\mu \geq \int^* \inf_{j \geq p} f_j d\mu.$$

Поскольку $h_p = \inf\limits_{j \geq p} f_j$ есть неубывающая последовательность, утверждение теоремы вытекает из теоремы 9.2, п.2. $\square$

Свойства внешних интегралов

Theorem 10.2. *$\int^* f d\mu = 0 \iff \mu(x : f(x) \neq 0) = 0.$*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mu(f \neq 0) \neq 0$. Поскольку

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_n \{f > \frac{1}{n}\} \text{ и } \{f > \frac{1}{n}\} \subset \{f > \frac{1}{n+1}\},$$

из непрерывности меры относительно монотонной последовательности получаем, что

$$\lim \mu(x : f(x) > \frac{1}{n}) = \mu(f \neq 0) > 0.$$

Следовательно, существует m, при котором $\mu(f > 1/m) > 0$ и поэтому

$$\int^* f d\mu \geq \int^* f \cdot I_{\{f>1/m\}} d\mu > \frac{1}{m}\mu(f > \frac{1}{m}) > 0.$$

Пришли к противоречию.
Достаточность. Пусть $\mu(x : f(x) \neq 0) = 0)$. Имеем

$$\int^* f d\mu = \int^* f \cdot I_{\{f\neq 0\}} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int^* f_n \cdot I_{\{f_n \neq 0\}} d\mu,$$

где $f_n(x) = f(x)$, если $f(x) \leq n$, и $f_n(x) = n$, если $f(x) > n$. Далее,

$$\lim_n \int^* f_n \cdot I_{\{f\neq 0\}} d\mu \leq \lim_n n \cdot \underbrace{\mu(f \neq 0)}_{=0} = 0. \qquad \square$$

Следствие. Если $\mu(A) = 0$, то для любой функции $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ имеем

$$\int_A^* f d\mu = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_A^* f d\mu = \int^* f \cdot I_A d\mu = 0$$

в силу теоремы 10.2. $\square$

Definition 10.2. *Измеримая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется интегрируемой относительно меры μ, если*

$$\int^* f^+ d\mu < \infty, \quad \int^* f^- d\mu < \infty.$$

В этом случае интегралом от функции f по мере μ называется

$$\int f d\mu = \int^* f^+ d\mu - \int^* f^- d\mu.$$

Будем использовать также обозначения

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f(x) \mu(dx) = \mu(f).$$

Theorem 10.3. *1. Множество интегрируемых действительных функций есть линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ и отображение $f \to \int f d\mu$ есть линейная форма на этом пространстве.*
2. Пусть функция f является измеримой, а g – интегрируемой, при этом $|f| < g$. Тогда f интегрируема.
3. f интегрируема $\Leftrightarrow |f|$ интегрируема.
4. Если f интегрируема, то

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu.$$

Доказательство. 1. Достаточно доказать, что

$$\mu(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \mu(f) \text{ и } \mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2), \tag{5}$$

Первое равенство очевидно.
Для доказательства второго сначала покажем, что выполнено следующее свойство. Пусть $f = g - h$, где $g,\ h \geq 0$ и $g,\ h$ интегрируемы. Покажем, что f интегрируема и

$$\mu(f) = \mu(g) - \mu(h). \tag{6}$$

, где $g, h \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ Из определения f вытекает, что

$$f^+ = g - \min(g,h) \leq g \text{ и } f^- = h - \min(g,h) \leq h.$$

Следовательно, f^+ и f^- интегрируемы.
Далее,

$$f^+ + \min(g,h) = g \text{ и } f^- + \min(g,h) = h.$$

Из свойств внешнего интеграла получаем

$$\int^* f^+ d\mu + \int^* \min(g,h) d\mu = \int^* g d\mu.$$

$$\int^* f^- d\mu + \int^* \min(g,h) d\mu = \int^* h d\mu.$$

Таким образом,

$$\int f d\mu \underbrace{=}_{\text{по опр.}} \int^* f^+ d\mu - \int^* f^- d\mu = \int g d\mu - \int h d\mu,$$

т.е. (6) доказано.
Пусть теперь $f = f_1 + f_2$ и $f_1,\ f_2$ интегрируемы. Тогда

$$f = \underbrace{f_1^+ + f_2^+}_{g \geq 0} - (\underbrace{f_1^- + f_2^-}_{h \geq 0}).$$

Выше показано, что в этом случае f интегрируема и

$$\mu(f) = \mu(f_1^+ + f_2^+) - \mu(f_1^- + f_2^-)$$

$$= \text{ в силу свойств внешнего интеграла}$$

$$= \mu(f_1^+) + \mu(f_2^+) - \mu(f_1^-) - \mu(f_2^-) = \mu(f_1) + \mu(f_2),$$

т.е. второе равенство в (5) доказано.
2. Поскольку $|f| = f^+ + f^- \leq g$, имеем $f^+ \leq g$ и $f^- \leq g$. В силу монотонности внешнего интеграла получаем

$$\int^* f^+ d\mu \leq \mu(g) < \infty, \quad \int^* f^- d\mu \leq \mu(g) < \infty.$$

Следовательно, f интегрируема.
3. Из интегрируемости f вытекает интегрируемость f^+ и f^-. Следовательно, $|f| = f^+ + f^-$ интегрируема в силу п.1. Обратное следует из п.2 при $g = |f|$.
4. Имеем

$$|\mu(f)| = |\mu(f^+) - \mu(f^-)| \leq \mu(f^+) + \mu(f^-) = \mu(|f|). \qquad \square$$

11

Лекция 11.

Примеры. 1. Пусть $\mu = \delta_y$, где $\delta_y(E) = 1$, если $y \in E$, и $\delta_y(E) = 0$ в противном случае. Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$. Легко проверить, что функционал $\varPhi(f) = f(y)$ обладает свойствами 1-3 из теоремы 9.2 и в силу единственности является внешним интегралом по мере δ_y. В силу теоремы 10.3 функция f интегрируема тогда и только тогда, когда $|f(y)| < \infty$. В этом случае

$$\int f d\delta_y = f(y).$$

2. Пусть $y_1, y_2, ...$ – последовательность элементов X и $\alpha_1, \alpha_2, ...$ – последовательность чисел из $\overline{\mathbb{R}}^+$. Рассмотрим на $\mathcal{S}$ функцию, заданную формулой

$$\mu(E) = \sum_{k: y_k \in E} \alpha_k = \sum_k \alpha_k \, \delta_{y_k}(E).$$

Легко видеть, что μ есть мера. При этом, если $\alpha_1 + \alpha_2 + ... = 1$ и $X = \mathbb{R}$, то μ есть вероятностная мера на прямой, сосредоточенная в точках $y_1, y_2, ...$, и соответствующие вероятности равны $f_1, f_2, ...$. Рассмотрим на $\mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ отображение

$$\varPhi : f \to \sum_k \alpha_k \, f(y_k). \tag{7}$$

Легко проверить, что $\varPhi$ обладает свойствами 1-3 в теореме 9.2 и поэтому является внешним интегралом. В силу теоремы 10.3 функция f является интегрируемой тогда и только тогда, когда

$$\sum \alpha_k \, |f(y_k)| < \infty,$$

т.е. ряд, стоящий в правой части (7) сходится абсолютно.

Напомним, что если X есть дискретная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ такая, что

$$P(X = f_k) = \alpha_k > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... = 1,$$

то

$$\mathbb{E}X = \int\limits_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \sum_k \alpha_k \, f_k$$

при условии, что ряд сходится абсолютно.

Theorem 11.1. *Пусть f и g есть измеримые функции на $(X, \mathcal{S})$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ и $f = g$ μ-почти всюду. Тогда*
1. Если $f \geq 0$ и $g \geq 0$, то $\int^* f d\mu = \int^* g d\mu$.
2. Если f интегрируема, то и g интегрируема и $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Доказательство. 1. Пусть $M = \{x : f(x) = g(x)\} \Rightarrow \mu(M^c) = 0$.
По следствию теоремы 10.2. имеем

$$\int^* f d\mu = \int^* f \, I_{\{M\}} d\mu = \int^* g \, I_{\{M\}} d\mu = \int^* g d\mu.$$

2. Если f и g совпадают μ-п.в., то $f^+ = g^+$, $f^- = g^-$ μ-п.в. В силу п.1 имеем

$$\int^* g^+ d\mu = \int^* f^+ d\mu < \infty, \quad \int^* g^- d\mu = \int^* f^- d\mu < \infty.$$

Следовательно, функция g интегрируема и

$$\int f d\mu = \int g d\mu. \qquad \square$$

Theorem 11.2. *Если f со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ интегрируема, то f конечна почти всюду.*

Доказательство. Достаточно доказать конечность почти всюду функций f^+ и f^-. Поэтому далее можем считать, что $f \geq 0$. Положим $E = \{x : f(x) = \infty\}$. Тогда при любом n получаем

$$\infty > \int f \, d\mu \geq \int f \, I_E d\mu \geq n \int I_E d\mu = n \, \mu(E).$$

Следовательно, $\mu(E) = 0$. $\square$

Theorem 11.3. *Пусть g интегрируема, f_n - измерима и $|f_n| < g$, μ-п.в. при всех n. Тогда*
1. Справедливы неравенства (обобщенная лемма Фату)

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int \limsup f_n d\mu; \tag{8}$$

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int \liminf f_n d\mu. \tag{9}$$

2. {Теорема Лебега о предельном переходе по знаком интеграла} Если существует $f = \lim f_n$ в смысле сходимости μ-почти всюду, то

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu. \tag{10}$$

Доказательство. 1. В силу теоремы 11.2 можем считать, что все рассматриваемые функции конечны. Пусть $E_n = \{x : |f_n(x)| > g(x)\}$ Из условия теоремы вытекает, что $\mu(\bigcup\limits_n E_n) = 0$. Положим $f_n^1 = g(x)$, если $x \in \bigcup\limits_n E_n$, и $f_n^1 = f_n(x)$ в противном случае. Поскольку $f_n^1 = f_n$, μ-почти всюду при любом n, по теореме 11.1 имеем

$$\int f_n^1 d\mu = \int f_n d\mu.$$

Следовательно, достаточно доказать теорему для функций f_n^1. По построению имеем $f_n^1 \leq g$ всюду и поэтому $g - f_n^1 \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}}^+)$. По лемме Фату (теорема 10.1) получаем

$$\liminf \int^* (g - f_n^1) d\mu \geq \int^* \liminf (g - f_n^1) d\mu.$$

Отсюда

$$\int g d\mu - \limsup \int f_n^1 d\mu \geq \int g d\mu - \int \limsup f_n^1 d\mu.$$

Поскольку $\limsup\limits_n f_n^1 = \limsup\limits_n f_n$ μ-почти всюду, то в силу теоремы 11.1 получаем (8). Аналогично доказывается (9) путем применения леммы Фату к функциям $(g + f_n^1)$.
2. Если существует $\lim f_n$, то $\underline{\lim} f_n = \overline{\lim} f_n$ μ-п.в., и поэтому правые части равны неравенств (8) и (9) равны. Поскольку

$$\limsup \int f_n d\mu \geq \liminf \int f_n d\mu,$$

получаем (10). $\square$

Пусть λ есть мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Proposition 11.1. *Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она интегрируема и относительно меры λ и*

$$\int_a^b f dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Note 11.1. Обратное неверно. Достаточно взять функцию Дирихле $f(x)$ на $[0,1]$, равную 1 в рациональных и равную 0 в иррациональных точках. Как известно, интеграл Римана от $f(x)$ не существует, а

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)dx = 0.$$

Доказательство. Пусть f интегрируема по Риману на $[a,b]$. Положим

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a) \ \text{ для } \ k = 0, ..., 2^n,$$

$$\overline{S}_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{n_k}, \ \ \underline{S}_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{n_k},$$

где

$$M_{n_k} = \sup_{x_{k-1}\le x<x_k} f(x), \ \text{ и } \ m_{n_k} = \inf_{x_{k-1}\le x<x_k} f(x).$$

Поскольку интеграл Римана от f существует, то

$$\lim \overline{S}_n = \lim \underline{S}_n = \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (11)$$

Положим при всех $k = 1, 2, ..., 2^n$

$$\overline{f}_n(x) = M_{n_k}, \ \ \underline{f}_n(x) = m_{n_k} \ \text{ для } \ x_{k-1} \le x < x_k.$$

Наконец, $\overline{f}_n(b) = \underline{f}_n(b) = f(b)$. По построению функции $\overline{f}_n$ и $\underline{f}_n$ являются измеримыми. Далее, $\overline{f}_n$, $\underline{f}_n \in \mathcal{E}$, при этом для любого $x \in [a,b]$ имеем $\overline{f}_n(x) \downarrow \overline{f}(x) \ge f(x)$, $\underline{f}_n(x) \uparrow \underline{f}(x) \le f(x)$, а также

$$\overline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n(x)\lambda(dx) \ \text{ и } \ \underline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\lambda(dx).$$

Из определения интеграла Лебега и (11) получаем

$$\int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\lambda = \lim \overline{S}_n = \lim \underline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \underline{f} d\lambda.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f}) d\lambda = 0$$

и поэтому $\overline{f} - \underline{f} = 0$ λ-почти всюду. Таким образом, $\overline{f} = \underline{f} = f$ λ-почти всюду. $\square$

Лекция 12.

Пространства $\mathcal{L}_p$ и L_p.

Definition 12.1. *Для $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}})$ и $p \in [1, +\infty]$ положим*

$$\mathcal{N}_p(f) = \left(\int^* |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{если } p < +\infty$$

и

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \inf \left\{ \lambda : \lambda \in \overline{\mathbb{R}}^+, \ \mu(|f| \geq \lambda) = 0 \right\}.$$

Note 12.1. Если $\lambda_0 = \mathcal{N}_\infty(f)$, то для любого $\lambda > \lambda_0$ имеем $|f| \leq \lambda$ μ-п.в. (можно сказать так : $|f| \leq \lambda_0$)

Theorem 12.1. *Функционал $\mathcal{N}_p$ обладает следующими свойствами:*

1.
$$\mathcal{N}_p(0) = 0 \ \text{ и } \ \mathcal{N}_p(\lambda f) = |\lambda| \mathcal{N}_p(f) \ \text{ для } \ \lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$
$$\text{Если } \ |f| \leq |g| \ \text{ то } \ \mathcal{N}_p(f) \leq \mathcal{N}_p(g).$$

2. *При p, q таких, что $1 \leq p, q \leq +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$, имеем*
$$\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g)$$
– неравенство Гельдера.

3. *При всех p: $1 \leq p \leq +\infty$ имеем*
$$\mathcal{N}_p(f+g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g)$$
– неравенство Минковского.

Note 12.2. Пусть μ – вероятностная мера, Y и Z – случайные величины на вероятностном пространстве $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Тогда неравенство Гельдера будет иметь вид
$$\mathbb{E}|YZ| \leq (\mathbb{E}|Y|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|Z|^q)^{\frac{1}{q}}$$

В частности, при Z = 1 имеем

$$\mathbb{E}|Y| \;\le\; (\,\mathbb{E}|Y|^p\,)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall p \ge 1.$$

Доказательство. 1. Очевидно вытекает из свойств внешнего интеграла.
2. Сначала докажем следующую лемму.
Лемма. *Пусть* $1 < p,\ q < \infty$ *таковы, что* $1/p+1/q = 1$. *Тогда для любых* $a, b \ge 0$ *справедливо неравенство*

$$ab \;\le\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство. Если $a\,b = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a\,b > 0$. Поскольку функция $\ln x$ вогнута, имеем

$$\ln ab \;=\; \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \;\le\; \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

Таким образом,

$$ab \;\le\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \square$$

Вернемся к доказательству теоремы.
Если

$$\int^* |f|^p d\mu \;\cdot\; \int^* |g|^q d\mu \;\ne\; 0,$$

то применим лемму, взяв

$$a = \frac{|f|}{\mathcal{N}_p(f)}\ ,\ b = \frac{|g|}{\mathcal{N}_q(g)}.$$

Тогда

$$\frac{|fg|}{\mathcal{N}_p(f)\cdot\mathcal{N}_q(g)} \;\le\; \frac{1}{p}\cdot\frac{|f|^p}{\mathcal{N}_p^p(f)} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|g|^q}{\mathcal{N}_q^q(g)}.$$

Взяв интеграл от обеих частей, получим утверждение 2 теоремы при $1 < p,\ q < +\infty$.
Пусть теперь

$$\int^* |f|^p d\mu \;\cdot\; \int^* |g|^q d\mu \;=\; 0.$$

Тогда один из сомножителей равен 0, скажем, $\int^* |f|^p d\mu = 0$. Отсюда по теореме 10.2 вытекает, что $|f| = 0$ μ-п.в. Следовательно, $\mathcal{N}_1(fg) = 0$, а значит утверждение 2 справедливо и в этом случае.
Рассмотрим, наконец, случай $p = 1,\ q = +\infty$.
Возьмем произвольное $\lambda > \mathcal{N}_\infty(g)$. Тогда в силу замечания после определения функционала $\mathcal{N}_p$ имеем

$$|fg| \;\le\; \lambda|f|.$$

Интегрируя обе части, получим

$$\mathcal{N}_1(fg) \ \leq \lambda \mathcal{N}_1(f).$$

В силу произвольности λ приходим к неравентсву

$$\mathcal{N}_1(fg) \ \leq \ \mathcal{N}_1(f) \cdot \mathcal{N}_\infty(g).$$

Аналогично рассматривается случай $p = +\infty, \ q = 1$.
2. Доказательство неравенства Минковского начнем с рассмотрения крайних случаев.
Пусть $p = 1$, тогда по неравенству треугольника

$$|f + g| \ \leq \ |f| + |g|.$$

Интегрируя, получаем

$$\mathcal{N}_1(f + g) \ \leq \ \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g).$$

Пусть $p = \infty$. Возьмем произвольные α и λ:

$$\alpha > \mathcal{N}_{+\infty}(g), \quad \lambda > \mathcal{N}_{+\infty}(f).$$

Поскольку

$$\{x : |f(x) + g(x)| \ \geq \lambda + \alpha\} \subset \underbrace{\{x : |f(x)| \ \geq \lambda\}}_{A} \bigcup \underbrace{\{x : |g(x)| \ \geq \alpha\}}_{B}$$

и $\mu(A) = \mu(B) = 0$ в силу выбора α и λ, имеем

$$\mu(x : |f(x) + g(x)| \ \geq \ \lambda + \alpha) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}_{+\infty}(f + g) < \lambda + \alpha.$$

В силу произвольности выбора α и λ получаем

$$\mathcal{N}_{+\infty}(f + g) \ \leq \ \mathcal{N}_{+\infty}(f) + \mathcal{N}_{+\infty}(g).$$

Обратимся к оставшемуся случаю $1 < p < +\infty$. Имеем

$$\int^* |f + g|^p d\mu \ \leq \ \int^* |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int^* |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq^*$$

$$\leq^* \left(\int^* |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int^* |f + g|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\int^* |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{\mathcal{N}_p(g)} \cdot \underbrace{\left(\int^* |f + g|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}_{\mathcal{N}_q(|f+g|^{p-1})}$$

Неравенство (*) непосредственно вытекает из неравенства Гельдера. Так как $p(q-1)=q$, $q(p-1)=p$ неравенства перепишутся в виде

$$\mathcal{N}_p^p(f+g) \;\le\; \mathcal{N}_p(f)\cdot\mathcal{N}_p^{\frac{p}{q}}(f+g)+\mathcal{N}_p(g)\cdot\mathcal{N}_p^{\frac{p}{q}}(f+g).$$

Если $\mathcal{N}_p(f+g)\neq 0$, то поскольку $p-p/q=1$, получим

$$\mathcal{N}_p(f+g) \;\le\; \mathcal{N}_p(f)+\mathcal{N}_p(g).$$

Доказательство случая $\mathcal{N}_p(f+g)=0$ очевидно. $\square$

Definition 12.2. *Функция $f\in\mathcal{M}(\mathcal{S},\overline{\mathbb{R}})$ называется интегрируемой в степени p, если*

$$\mathcal{N}_p(f)<\infty$$

Множество функций, интегрируемых в степени p, обозначим $\mathcal{L}^p$.

Note 12.3. Функционал $\mathcal{N}_p(f)$ на $\mathcal{L}^p$ является полунормой, т.к. из $\mathcal{N}_p(f)=0$ не следует, что $f=0$ μ-п.в.

Definition 12.3. *Функции из $\mathcal{L}^2$ называются интегрируемыми в среднем квадратичном.*

Note 12.4. Если $f,g\in\mathcal{L}^2$, то определим билинейную форму на $\mathcal{L}^2\times\mathcal{L}^2$ формулой

$$(f,g)=\int f g\,d\mu$$

Справа написан знак интеграла, а не внешнего интеграла, т.к. $f\,g$ есть интегрируемая функция. Действительно, по неравенству Гельдера имеем

$$\mathcal{N}_1(f\,g)\le\mathcal{N}_2(f)\cdot\mathcal{N}_2(g)<\infty.$$

Заметим, что билинейная форма является непрерывной по каждому аргументу в следующим смысле:

$$(g,f_n)\to(g,f)\quad\text{при}\;\;\mathcal{N}_2(f_n-f)\to 0.$$

Действительно, используя неравенство Гельдера, получим

$$|(g,f_n)-(g,f)|=|(g,f_n-f)|\le\mathcal{N}_2(g)\cdot\mathcal{N}_2(f_n-f)\to 0.$$

13

Лекция 13.

Theorem 13.1. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* $f_n \in \mathcal{L}^p$, *причем* $f_n \to f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{R}})$ *по мере. Предположим, что существует* $g \in \mathcal{L}^p : |f_n| \le g$ μ*-п.в. для всех* n*. Тогда*

$$f \in \mathcal{L}^p \quad и \quad \mathcal{N}_p(f_n - f) \to 0 \quad при \;\; n \to \infty.$$

Note 13.1. Сходимости вида $\mathcal{N}_p(f_n - f) \to 0$ в теории вероятности отвечает сходимость в среднем порядка p.

Доказательство. По теореме 10.3 из последовательности почти всюду конечных функций, сходящейся по мере, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти равномерно. Пусть $\{f_{n_k}\}$ – такая подпоследовательность, сходящаяся почти равномерно к некоторой функции $\varphi(x)$.
Покажем, что $\varphi = f$ μ-п.в. Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mu(|f - \varphi| \ge \varepsilon) \le \mu(|f - f_{n_k}| \ge \varepsilon/2) + \mu(|f_{n_k} - \varphi| \ge \varepsilon/2) \to 0,$$

т.к. $f_{n_k} \to f$ по мере и $f_{n_k} \to \varphi$ почти равномерно. Следовательно,

$$\mu(|f - \varphi| \ge \varepsilon) = 0.$$

Поскольку

$$\{|f - \varphi| > 0\} = \bigcup_n \{|f - \varphi| \ge \frac{1}{n}\},$$

получаем $f = \varphi$ μ-п.в.
Покажем, что

$$\mathcal{N}_p(f_{n_k} - f) \to 0 \quad \text{при} \;\; k \to \infty. \tag{1}$$

Положим

$$M_k = \{x : \; |f_{n_k}| > g\}, \quad N = \{x : \; f_{n_k} \nrightarrow f\}.$$

Тогда $\mu(M_k) = \mu(N) = 0$. Пусть

$$R = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Для любого $x \in R^c$ имеем

$$f_{n_k}(x) \to f(x), \quad |f_{n_k}| \leq g \in \mathcal{L}^p.$$

Следовательно, $f \in \mathcal{L}^p$. В силу линейности пространства $\mathcal{L}^p$ имеем

$$\underbrace{|f_{n_k} - f|^p}_{g_k} \in \mathcal{L}^1$$

Т.к. $g_k \to 0 \quad \mu$-п.в. и $g_k \leq 2^{p-1}(|f_{n_k}|^p + |f|^p) \leq 2^p g^p$, (предпоследнее неравентсво справедливо в силу того, что

$$\forall a, b \geq 0, \quad (a+b)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)),$$

по теореме Лебега о предельном переходе получаем

$$\int \lim_k g_k d\mu = \lim_k \int g_k d\mu = \lim_k \mathcal{N}_p^p(f_{n_k} - f) = 0$$

Следовательно, при $k \to \infty$ $\lim_k \mathcal{N}_p(f_{n_k} - f) = 0$. Предположим, что $\mathcal{N}_p(f_n - f) \nrightarrow 0$, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0, \ \exists \{f_{n_k}\} : \mathcal{N}_p(f_{n_k} - f) \geq \varepsilon > 0.$$

Взяв подпоследовательность f_{n_k} в качестве всей последовательности и повторив первую часть доказательства, получаем противоречие с тем, что в $\{f_{n_k}\}$ найдется подпоследовательность, для которой выполнено (1). $\square$

Theorem 13.2. *Пространство $\mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq +\infty$, является полным относительно полунормы $\mathcal{N}_p$.*

Доказательство. Другими словами, надо доказать, что для любой $\{f_n\} \in \mathcal{L}^p$ такой, что $\mathcal{N}_p(f_n - f_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, существует $f \in \mathcal{L}^p$, для которой

$$\mathcal{N}_p(f_n - f) \to 0.$$

1. Рассмотрим сначала случай $p : 1 \leq p < \infty$.
Для любого натурального k определим n_k из условия, что при всех $r \geq n_k$ имеем

$$\mathcal{N}_p(f_r - f_{n_k}) \leq 1/2^k.$$

Положим $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$. По лемме Фату (см. теорему 10.1) имеем

$$\mathcal{N}_p(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|) = \mathcal{N}_p(\lim_n \sum_{k=1}^{n} |g_k|) \leq \lim_n \mathcal{N}_p(\sum_{k=1}^{n} |g_k|) \leq$$

$$\leq \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mathcal{N}_p(g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_p(g_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1.$$

Следовательно, $h = \sum\limits_1^\infty |g_k| \in \mathcal{L}^p$ и поэтому функция h^p интегрируема. Следовательно, h является μ-п.в. конечной, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty |g_k|$ сходится μ-п.в. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty g_k$ также сходится μ-п.в. Но

$$\sum_{r=1}^{k-1} g_r = f_{n_k} - f_{n_1},$$

так что f_{n_k} сходится μ-п.в., причем

$$|f_{n_k}| \le |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^\infty |g_k| \ \in \mathcal{L}^p.$$

В силу предыдущей теоремы существует $f = \lim f_{n_r}$ поточечно и $f \in \mathcal{L}^p$,

$$\mathcal{N}_p(f_{n_r} - f) \to 0.$$

Покажем, что $\mathcal{N}_p(f - f_n) \to 0$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_1(\varepsilon) \,:\, \forall n_r > N_1(\varepsilon) \,:\quad \mathcal{N}_p(f_{n_r} - f) < \varepsilon/2.$$

С другой стороны, найдется $N_2(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N_2(\varepsilon)$ и любых натуральных r имеем

$$\mathcal{N}_p(f_{n+r} - f_n) \le \varepsilon/2.$$

Таким образом, для любых $n, n_r > \max(N_1, N_2)$ получаем, используя неравенство Минковского,

$$\mathcal{N}_p(f - f_n) \le \mathcal{N}_p(f - f_{n_r}) + \mathcal{N}_p(f_{n_r} - f_n) \le \varepsilon.$$

Итак, рассмотрение первого случая закончено.
2. Пусть теперь $p = +\infty$. Для любой пары натуральных чисел n, n' положим

$$\varepsilon_{n,n'} = \mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n'}).$$

Имеем

$$\mu(|f_n - f_{n'}| > \varepsilon_{n,n'}) = \mu(\bigcup_k (|f_n - f_{n'}| \ge \varepsilon_{n,n'} + 1/k)) = 0.$$

Обозначим

$$N = \bigcup_{n,n'} \left(|f_n - f_{n'}| > \varepsilon_{n,n'}\right).$$

Поскольку для всех $x \in N^c$ и произвольных n, n' имеем

$$|f_n(x) - f_{n'}(x)| \le \varepsilon_{n,n'},$$

последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной на N^c в смысле равномерной сходимости. Пусть f - функция из $\mathcal{L}^{+\infty}$, совпадающая на N^c с пределом f_n в смысле равномерной сходимости. Тогда имеем

$$\lim_n \sup_{x\in N^c} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Т.к. $\mu(N) = 0$, получаем

$$\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leq \sup_{x\in N^c} |f - f_n|$$

и поэтому $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Пространства L^p.

Рассмотрим на $\mathcal{L}^p$ класс функций

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^p \ : \mathcal{N}_p(f) = 0\},$$

т.е $\mathcal{N}$ состоит из всех измеримых функций, равных 0 μ-п.в.

Definition 13.1. *Функции $f, g \in \mathcal{L}^p$ называются* **эквивалентными***, если $f - g \in \mathcal{N}$. Эквивалентность f, g будем обозначать $f \sim g$.*

Тогда все пространство $\mathcal{L}^p$ разбивается на классы эквивалентности. Будем обозначать через $\widetilde{f}$ все функции из $\mathcal{L}^p$ эквивалентные f. При этом, очевидно, выполнены следующие

Свойства.

1. Если $f \sim f'$ и $g \sim g'$, то
$$f + g \ \sim \ f' + g'.$$
2. Если $f \sim f'$, то
$$\lambda f \ \sim \ \lambda f', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
3. Если $f \sim f'$, то
$$\mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_p(f').$$

Поэтому корректны определения

$$\widetilde{f} + \widetilde{g} \ = \ \widetilde{f+g} \ \text{ и } \ \lambda\widetilde{f} \ = \ \widetilde{\lambda f}.$$

Definition 13.2. *Пространство L^p – это совокупность классов эквивалентности функций из $\mathcal{L}^p$.*

Note 13.2. На L^p функционал N_p является нормой.

13.1 Действительные меры

Definition 13.3. *Действительной мерой μ на измеримом пространстве $(X,\mathcal{S})$ называется отображение $\mathcal{S}$ в $(-\infty,+\infty]$ такое, что*
a) $\mu(\varnothing)=0$;
b) $\mu(\bigcup\limits_1^\infty A_i)=\sum\limits_1^\infty \mu(A_i)$ *для любой последовательности* $\{A_i\}\in\mathcal{S}$ *такой, что* $A_i\cap A_j=\varnothing$ *при* $i\neq j$.

Note 13.3. **1.** В определении можно было в качестве множества значений μ указать $[-\infty,+\infty)$, но не $[-\infty,+\infty]$, т.к. в последнем случае возникает неопределенность вида $+\infty-\infty$.
2. Действительная мера μ является мерой, если $\mu(A)\geq 0$ для любого $A\in\mathcal{S}$.
3. Если μ_1 и μ_2 – меры , т.е. неотрицательные , счетно-аддитивные функции на $\mathcal{S}$, не тождественно равные бесконечности, то $\mu_1-\mu_2$ есть действительная мера.

Definition 13.4. *Действительная мера μ называется ограниченной, если*

$$\sup_{A\in\mathcal{S}}|\mu(A)|<\infty.$$

Theorem 13.3 (Жордана-Хана). *. Существует по крайней мере одно множество $G\in\mathcal{S}$ такое, что*

$$\mu(A)\geq 0 \quad \text{для } \forall A\subseteq G,\ A\in\mathcal{S},$$

$$\mu(B)\leq 0 \quad \text{для } \forall B\subseteq G^c,\ B\in\mathcal{S}.$$

Если обозначить

$$\mu^+(A)=\sup_{B\subseteq A}\mu(B) \ \text{ и } \ \mu^-(A)=-\inf_{B\subseteq A}\mu(B),$$

то для любого $A\in\mathcal{S}$ имеем

$$\mu^+(A)=\mu(A\cap G) \ \text{ и } \ \mu^-(A)=-\mu(A\cap G^c)$$

и μ^+, μ^- есть две меры, из которых μ^- ограничена, при этом

$$\mu(A)=\mu^+(A)-\mu^-(A) \quad \text{для всех } A\in\mathcal{S}.$$

Доказательство. Назовем множество $A\in\mathcal{S}$ отрицательным, если $\mu^+(A)=0$. Объединение любого конечного или счетного числа отрицательных множеств есть множество отрицательное. Действительно, пусть $A_1,A_2,...$ – отрицательные множества. Рассмотрим произвольное $A\in\mathcal{S}:\ A\subset\bigcup\limits_1^\infty A_m$. Тогда

$$A = \bigcup_{1}^{\infty} (A \bigcap (A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k)).$$

Следовательно,

$$\mu(A) = \sum_m \underbrace{\mu(A \bigcap (A_m \setminus \bigcup_{1}^{m-1} A_k))}_{\subset A_m} \leq \sum_m \mu^+(A_m) = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{F}^-$ класс всех отрицательных множеств.
Пусть

$$\beta = \inf_{A \in \mathcal{F}^-} \mu(A).$$

Возьмем последовательность $\{A_n\}, A_n \in \mathcal{F}^-$, для которой $\mu(A_n) \downarrow \beta$, что возможно из определения. Положим $A = \bigcup\limits_{1}^{\infty} A_n$. Тогда $A \in \mathcal{F}^-$ и

$$\beta \leq \mu(A) \leq \mu(A_n) + \mu(A \backslash A_n) \leq \mu(A_n) + \mu^+(A \backslash A_n) = \mu(A_n) + 0 \leq \mu(A_n) \to \beta.$$

Следовательно, $\mu(A) = \beta > -\infty$, т.е. β конечно.
Покажем, что в качестве множества G из формулировки теоремы можно взять A^c. Для этого достаточно доказать , что $\mu^-(A^c) = 0$.
Предположим противное , т.е. существует $E_0 \subset A^c$, такое что $\mu(E_0) < 0$
Имеем $\mu^+(E_0) > 0$, т.к. в противном случае $E_0 \in \mathcal{F}^-$, а тогда и $A \cup E_0 \in \mathcal{F}^-$. Имеем $A \bigcup E_0$-отрицательное множество

$$\beta \leq \mu(A \bigcup E_0) = \mu(A) + \mu(E_0) < \mu(A) = \beta,$$

т.е. пришли к противоречию.
Пусть k_1 – наименьшее натуральное число такое, что существует измеримое $E_1 \subset E_0$, для которого

$$\mu(E_1) \geq 1/k_1.$$

Заметим, что $\mu(E_1) < \infty$, т.к. $|\mu(E_0)| < \infty$. Имеем

$$\mu(E_0 \setminus E_1) = \mu(E_0) - \mu(E_1) \leq \mu(E_0) - 1/k_1 < 0.$$

Повторяя предыдущие рассуждения относительно множества $E_0 \setminus E_1$, получаем наименьшее натуральное k_2 такое, что существует измеримое $E_2 \subset E_0 \setminus E_1$, для которого $\mu(E_2) \geq 1/k_2$.
Продолжая эти рассуждения получаем последовательность $k_i \to \infty$, т.к. в противном случае мера

$$\mu(E_1 \bigcup E_2 \bigcup ...) = +\infty$$

и поэтому

$$\mu(E_0 \setminus (E_1 \bigcup E_2 \ldots)) = \mu(E_0) - \mu(E_1 \bigcup E_2 \bigcup \ldots) = -\infty,$$

что невозможно по определению действительной меры. Таким образом,

$$\mu^+(E_0 \setminus (E_1 \bigcup E_2 \ldots)) = 0,$$

т.е.

$$F_0 = E_0 \setminus (\bigcup_1^\infty E_i)$$

есть отрицательное множество, принадлежащее A^c. С другой стороны,

$$\mu(F_0) = \mu(E_0 \setminus (\bigcup_1^\infty E_i)) = \mu(E_0) - \sum_1^\infty \mu(E_i) \leq \mu(E_0) < 0.$$

Так что $A \cup F_0$ есть отрицательное множество и

$$\beta \leq \mu(A \cup F_0) = \mu(A) + \mu(F_0) < \mu(A) = \beta,$$

т.е. пришли к противоречию. $\square$

Лекция 14.

Ниже будем использовать обозначение $|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$.

Пусть μ и ν – действительные меры на измеримом пространстве $(X, \mathcal{S})$.

Definition 14.1. *Мера μ называется абсолютно непрерывной относительно ν, если для всех измеримых $E : |\nu|(E) = 0$, имеем $\mu(E) = 0$. В этом случае используем обозначение $\mu \ll \nu$.*

Definition 14.2. *μ называется сингулярной относительно ν, если $\exists X_1 \in \mathcal{S} : |\mu|(X_1) = |\nu|(X_1^c) = 0$. Сингулярность будем обозначать $\mu \perp \nu$.*

Упражнение. Привести пример пары μ, ν такой, что μ не абсолютно непрерывно и не сингулярно относительно ν.

Theorem 14.1. *Пусть μ и ν – действительная меры. Три условия:*
1. $\mu \ll \nu$;
2. $\mu^+ \ll \nu$ *и* $\mu^- \ll \nu$;
3. $|\mu| \ll |\nu|$

эквивалентны.

Упражнение . Доказать самостоятельно, используя предыдущую теорему. $\square$

Theorem 14.2. *Пусть μ и ν – действительные меры, μ конечна и $\mu \ll \nu$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |\nu|(E) < \delta \Rightarrow |\mu|(E) < \varepsilon. \tag{1}$$

Note 14.1. Предположим, что (1) верно, тогда $\mu \ll \nu$. Следовательно, если μ есть конечная мера, то (1) и условие $\mu \ll \nu$ эквивалентны.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$, для которого можно взять $\delta_i : \sum_i \delta_i < \infty$ и измеримые $E_i :\ |\nu|(E_i) < \delta_i$, но $|\mu|(E_i) \geq \varepsilon_0$.

Положим

$$E = \limsup E_i = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\ge m} E_n.$$

Для любого натурального m имеем

$$|\nu|(E) \le |\nu|(\bigcup_{n\ge m} E_n) \le \sum_{n=m}^{\infty} |\nu|(E_n) \to 0 \text{ при } \quad m\to\infty.$$

Следовательно, $|\nu|(E) = 0$. С другой стороны в силу конечности μ имеем

$$|\mu|(E) = \lim |\mu|(\bigcup_{n\ge m} E_n) \ge \lim |\mu|(E_m) \ge \varepsilon_0,$$

т.е. μ не является абсолютно непрерывной относительно ν $\square$.

Упражнение. Почему требуется конечность меры μ ?

Theorem 14.3 (Радона-Никодима). *Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ – измеримое пространство с σ-конечной положительной мерой μ. Пусть ν – действительная σ-конечная мера на $\mathcal{S}$, абсолютно непрерывная относительно μ. Тогда существует конечная действительная измеримая функция f, такая что f^- интегрируема относительно μ и*

$$\mu(E) = \int_E f d\mu \quad \text{для } \forall E\in\mathcal{S}.$$

Функция f единственна с точностью до множества μ-меры 0. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда мера ν конечна.

Note 14.2. Ранее запись $\int f d\mu$ использовалась, если и только если оба интеграла $\int^* f^+ d\mu, \int^* f^- d\mu$ конечны. В теореме 6.4 и всюду ниже мы будем писать $\int f d\mu$, если хотя бы один из соответствующих внешних интегралов конечен.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай, когда меры μ и ν неотрицательны и конечны. Пусть $\mathcal{L}$ есть класс неотрицательных измеримых функций таких, что

$$\int_E f d\mu \le \nu(E) \quad \text{для } \forall E\in\mathcal{S}.$$

Класс $\mathcal{L}$ не пуст, например $0\in\mathcal{L}$. Кроме этого, если $f_1, f_2 \in \mathcal{L}$, то $\max(f_1, f_2)\in\mathcal{L}$. Действительно, положим $F = \{x\in X : f_1(x) \ge f_2(x)\}$. Тогда

$$\int_E \max(f_1, f_2) d\mu = \int_{E\bigcap F} \max(f_1, f_2) d\mu + \int_{E\bigcap F^c} \max(f_1, f_2) d\mu =$$

$$= \int\limits_{E\bigcap F} f_1 d\mu + \int\limits_{E\bigcap F^c} f_2 d\mu \le \nu(E\bigcap F) + \nu(E\bigcap F^c) = \nu(E).$$

По индукции можно получить, что $\max(f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathcal{L}$ Далее, если $f_n \in \mathcal{L}$ и $f_n \uparrow f$ μ-почти всюду, то $f \in \mathcal{L}$. Действительно, для любого измеримого E имеем

$$f_n \cdot I_E \uparrow f \cdot I_E.$$

Поэтому

$$\nu(E) \ge \int\limits_E f_n d\mu = \int f_n \cdot I_E d\mu \uparrow \int f \cdot I_E d\mu = \int\limits_E f d\mu.$$

Положим

$$\alpha = \sup_{f\in\mathcal{L}} \int f d\mu.$$

Очевидно, $\alpha \le \nu(X) < \infty$. Возьмем последовательность функций $\{f_n\}$ таких, что

$$\int f_n d\mu \to \alpha.$$

Обозначим $g_n = \max(f_1, .., f_n)$. Согласно доказанному выше $g_n \in \mathcal{L}$ и $g_n \uparrow g \in \mathcal{L}$. Имеем

$$\alpha \ge \int g d\mu = \lim \int g_n d\mu \ge \lim \int f_n d\mu = \alpha.$$

Следовательно,

$$\int g d\mu = \alpha.$$

Поскольку $\alpha < \infty$, функция g как интегрируемая является почти всюду конечной. Поэтому найдется всюду конечная функция g_0, для которой

$$\int g_0 d\mu = \int g d\mu.$$

Положим

$$\mu'(E) = \nu(E) - \int\limits_E g_0 d\mu \quad \text{для } \forall E \in \mathcal{S}.$$

Докажем,что μ' тождественно равна нулю. Пусть D_n есть множество положительности меры $\mu' - n^{-1}\mu$, т.е. такое множество, что для всех $A \in \mathcal{S}$ имеем

$$(\mu' - n^{-1}\mu)(AD_n) \ge 0 \text{ и } (\mu' - n^{-1}\mu)(AD_n^c) \le 0.$$

Для произвольного $E \in \mathcal{S}$ имеем

$$\int\limits_E (g_0 + n^{-1} I_{D_n}) d\mu = \int\limits_E g_0 d\mu + n^{-1}\mu(ED_n)$$

$$\leq \int\limits_E g_0 d\mu + \mu'(ED_n) = \int\limits_{ED_n^c} g_0 d\mu + \nu(ED_n)$$

$$\leq \nu(ED_n^c) + \nu(ED_n) = \nu(E).$$

Следовательно, $g_0 + n^{-1} I_{D_n} \in \mathcal{L}$ и поэтому

$$\int (g_0 + n^{-1} I_{D_n}) d\mu \leq \alpha.$$

Поскольку

$$\int g_0 d\mu = \alpha,$$

получаем

$$\int n^{-1} I_{D_n} d\mu = 0.$$

Следовательно, $\mu(D_n) = 0$. Тогда для $D = \bigcup D_n$ имеем

$$\mu(D) = 0. \tag{2}$$

Запишем для произвольного $E \in \mathcal{S}$

$$\mu'(E) = \mu'(ED) + \mu'(ED^c).$$

Из (2) и условия $\nu \ll \mu$ получаем

$$\mu'(ED) = \nu(ED) - \int\limits_{ED} g_0 d\mu = 0.$$

Далее, поскольку $D^c = \bigcap D_n^c$ и

$$(\mu' - n^{-1}\mu)(ED_n^c) \leq 0,$$

для любого натурального n имеем

$$\mu'(ED_n^c) \leq n^{-1}\mu(ED_n^c) \leq n^{-1}\mu(X).$$

Следовательно,

$$\mu'(ED^c) \leq \mu'(ED_n^c) \leq \mu(X)/n$$

и поэтому $\mu'(ED^c) = 0$.
Таким образом, $\mu'(E) = 0$ для любого $E \in \mathcal{S}$.
Докажем единственность g_0. Предположим существование другой функции h такой, что

$$\nu(E) = \int\limits_E h d\mu.$$

Поскольку $\nu(X) < \infty$, функция h интегрируема. Кроме этого, h неотрицательна μ-п.в. Действительно, в противном случае $\exists \varepsilon > 0 : \mu(h \leq -\varepsilon) > 0$. Тогда, полагая $F = \{x : \, h(x) \leq -\varepsilon\}$, получаем

$$0 \leq \nu(F) = \int\limits_F h d\mu \leq -\varepsilon\mu(F) < 0,$$

т.е. приходим к противоречию.
Далее, поскольку

$$\int\limits_E (g_0 - h) d\mu = 0 \ \text{ для } \ \forall E \in \mathcal{S}$$

имеем $g_0 = h$ μ-почти всюду.
2. Пусть теперь μ и ν конечны, $\mu \geq 0$, а ν – действительная мера. Поскольку $\nu = \nu^+ - \nu^-$, достаточно повторить доказательство для ν^+ и ν^- по отдельности.
3. μ, ν – σ-конечны. Отсюда вытекает , что $\exists X_1, X_2, ... : \bigcup X_n = X, X_n \subset X_n + 1, |\nu|(X_n) < \infty, \mu(X_n) < \infty$.Применяя доказанные в части 1,2 для множеств X_n.Получаем последовательность функций f_n заданных на X_n.Положим $f = f_n$ на $X_n \setminus X_{n-1}$, f_n и f_{n-1} имеют общую область определения X_n, в силу единственности $f_n = f_{n-1}, \mu$-почти всюду на $X_{n-1}, \nu(E) = \nu(E \bigcap\limits_n (X_n \backslash X_{n-1})) = \sum\limits_1^\infty \nu(E \bigcap (X_n \backslash X_{n-1})) = \sum\limits_1^\infty \int\limits_{E \bigcap (X_n \backslash X_{n-1})} f_n d\mu = \int\limits_E f d\mu$. Единственность f вытекает из единственности f_n.
Положим $A_n = \{f_n \leq 0\} \bigcap (X_n \setminus X_{n-1})$

$$-\infty < \nu(\bigcup A_n) = \sum_1^\infty \nu(A_n) = \int\limits_{f \leq 0} f d\mu = -\int\limits_X f^- d\mu \qquad (1) \Rightarrow$$

f^- интегрируема. Аналогично $\nu(f \geq 0) = \int f^+ d\mu \Rightarrow f^+$ интегрируема $\Leftrightarrow \nu(f \leq 0) < +\infty$, т.е. вместе (1), когда ν-конечная мера.$\square$

Theorem 14.4 (Теорема Лебега). *Пусть μ и ν-σ-конечные действительные меры на $(X, \mathcal{S})$. Существуют и единственные σ-конечные действительные меры ν_0 и ν_1 такие что, $\nu = \nu_0 + \nu_1, \nu_0 \perp \mu$ и $\nu_1 \ll \mu$.*

Доказательство. Рассмотрим только случай конечных и неотрицательных μ и ν.
Упражнение .Общий случай доказать самостоятельно.
Воспользуемся обозначениями предыдущей теоремы $\acute{\mu}$ и D.
$\acute{\mu}(E) = \nu(E) - \int\limits_E g_0 d\mu \geq 0$
$D : \mu(D) = 0, \acute{\mu}(D^c) = 0.$

Для $\forall E \in \mathcal{S}, \acute{\mu}(E) = \acute{\mu}(ED) + \acute{\mu}(ED^c) = \acute{\mu}(ED) = \nu(ED) - \underbrace{\int\limits_{ED}}_{0} g_0 d\mu, \mu(E) =$ $\int\limits_E g_0 d\mu + \mu(ED)$. Положим для $\forall E \in \mathcal{S}, \nu_0(E) = \nu(ED) \geq 0, \nu_1(E) = \int\limits_E g_0 d\mu \geq 0 \Rightarrow \nu_1 \ll \mu$

ν_0 и ν_1 -неотрицательная, $\sigma-$аддитивность вытекает из свойств интеграла, а для ν_0 из определения.

$\exists D : \mu(D) = 0, \nu_0(D^c) = 0$ Пусть $F : \mu(F) = 0 \nu_1(F) = \int\limits_F g_0 d\mu$.Доказываем единственность $\nu = \acute{\nu}_0 + \acute{\nu}_1, \acute{\nu}_0 \perp \mu, \acute{\nu}_1 \ll \mu$.

Пусть $\acute{D} : \mu(\acute{D}) = 0, \acute{\nu}_0((\acute{D})^c) = 0. \nu = \nu_0 + \nu_1 = \acute{\nu}_0 + \acute{\nu}_1 \Rightarrow \lambda = \nu_0 - \acute{\nu}_0 = \acute{\nu}_1 - \nu_1$. Покажем ,что $\forall E \in \mathcal{S} \lambda(E) = 0$.

Мера $\acute{\nu}_1 - \nu_1$-очевидно, является абсолютно непрерывной относительно μ. Мера $\nu_0 - \acute{\nu}_0$-сингулярна относительно μ. Достаточно рассмотреть $D_1 = D \bigcup \acute{D}$ $0 \leq \mu(D \bigcup \acute{D} \leq \mu(D) + \mu(\acute{D}) = 0$

$$|\nu_0 - \acute{\nu}_0|(D \bigcup \acute{D})^c = |\nu_0 - \acute{\nu}_0|(D^c \bigcap (\acute{D})^c) \leq \nu_0(D^c) + \acute{\nu}_0((\acute{D})^c) =$$

$$\{|\gamma_1 - \gamma_2|(AB) \leq \gamma_1(AB) + \gamma_2(AB) \leq \gamma_1(A) + \gamma_2(B)\}.$$

$$\text{Для} \forall E \in \mathcal{S}, \lambda(E) = \lambda(ED_1) + \lambda(ED_1^c) =$$

$$(\acute{\nu}_1 - \nu_1)(ED_1) + (\nu_0 - \acute{\nu}_0)(ED_1^c) = 0,$$

$\nu \ll \mu, \nu(E) = \int\limits_E f d\mu$.

$f = \frac{d\nu}{d\mu}-$производная Радона-Никодима меры ν по мере μ

Theorem 14.5. *Пусть $\lambda, \mu - \sigma$-конечные и неотрицательные меры, $\mu \ll \lambda$ и $\nu - \sigma$-конечная действительная мера и $\nu \ll \mu$. Тогда $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ почти всюду.*

Доказательство. Переходя от ν к ν^+ и ν^- достаточно доказать теорему для $\nu \geq 0$. Обозначим $f = \frac{d\nu}{d\mu}, g = \frac{d\mu}{d\lambda}$. Не ограничивая общности системы $f, g \geq 0$ всюду. Утверждение теоремы иным образом можно записать как

$$\forall E \in \mathcal{S}, \mu(E) = \int\limits_E f d d\lambda \tag{2}$$

Поскольку $\nu(E) = \int\limits_E f d\mu$, следовательно (2) перепишется в виде

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E f g d\lambda \tag{3}$$

Для $f \geq 0 \exists \{f_n\}-$последовательность простых функций:$f_n \uparrow f$-поточечно. Поскольку $\lim \int\limits_E f_n d\mu = \int\limits_E f d\mu$, то для доказательства (3) достаточно показать

$$\int\limits_E f_n d\mu = \int\limits_E f_n g d\lambda \tag{4}$$

, где f_n-простые функции. Для доказательства (4) достаточно рассмотреть $f_n = I_F, F \in \mathcal{S}$. Имеем $\int_E I_F d\mu = \mu(E \bigcap F) = \int\limits_{E \bigcap F} g d\lambda = \int I_F g d\lambda \square$

Theorem 14.6. *Пусть λ и μ – σ-конечные, неотрицательные меры и $\mu \ll \lambda$.Если f-измеримая функция , для которой $\int f d\mu$ имеет смысл(f^+ либо f^--конечны), то*

$$\int f d\mu = \int \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda \tag{5}$$

Доказательство. Пусть для $\forall E \in \mathcal{S}, \nu(E) = \int\limits_E f d\mu$. Тогда ν мера , σ-конечная и $\nu \ll \mu$. Тогда (5) вытекает из предыдущей теоремы $\frac{d\nu}{d\mu}$-существует и $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$
$\int\limits_E f\frac{d\mu}{d\lambda} = \int\limits_E f d\mu$ и достаточно взять $E = X \square$

Пусть $(X, \mathcal{S})$ и $(Y, \mathcal{T})$ измеримые пространства. Отображение $T : X \to Y$ измеримое , т.е. $T^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{S}$. Для $\forall$ меры μ на $(X, \mathcal{S})$ отображение T порождает некоторую меру, обозначим μT^{-1} на $(Y, \mathcal{T})$. Действительно, для $\forall E \in \mathcal{T}, \mu T^{-1}(E) = \mu(T^{-1}(E))$

Note 14.3. $(\Omega, \mathcal{A}, P), (\mathbb{R}, \mathcal{B}), \xi : \Omega \to \mathbb{R}, P_\xi(B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B) = P(\xi^{-1}(B))(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_\xi)$
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для $\forall r \in \mathbb{R}, \gamma(r) = r, \gamma \overset{d}{=} \xi$-одинаково распределены.

Справедливо равенство

$$T^{-1}(\bigcup_j E_j) = \bigcup_j T^{-1}(E_j)$$

Если $E_i \bigcap E_j = \emptyset, i \neq j$, то $T^{-1}(E_i) \bigcap T^{-1}(E_j) = \emptyset$
Пусть $E_1, E_2, ... \in \mathcal{T}, E_i \bigcap E_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow \mu T^{-1}(\bigcup E_i) = \mu(T^{-1}(E_i)) = \mu(\bigcup (T^{-1}(E_i))) = \sum \mu(T^{-1}(E_i)) = \sum \mu T^{-1}(E_i)$
$\mu T^{-1}(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mu T^{-1}$-мера.

$$(X, \mathcal{S}, \mu), (Y, \Gamma)$$

$$T : X \to Y, \mu T^{-1}(E) = \mu(T^{-1}(E)), \forall E \in \Gamma$$

Theorem 14.7. *Пусть T -измеримое отображение из $(X, \mathcal{S}, \mu)$ в (Y, Γ) и $f-$измеримая действительная функция на (Y, Γ) со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ Тогда*

$$\int\limits_Y f(y)d\mu T^{-1}(y) = \int\limits_X f \times T(x)d\mu(X) \qquad (1)$$

в том смысле , что $\exists$ одного из интегралов влечет $\exists$ другого и в этом случае они равны.

Доказательство.

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}), (\mathbb{R}, \mathcal{B}), \xi : \Omega \to \mathbb{R}.$$

$E\xi = \int\limits_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) = \int\limits_\mathbb{R} x \times P_\xi(dx) = \int\limits_\mathbb{R} xdF_\xi(x) = \{P_\xi(B) = P(\xi \in B), \forall B \in \mathcal{B}\} = \int\limits_\mathbb{R} x \times \underbrace{g_\xi(x)}_{\text{плотность}} dx$

$$Ef(\xi) = \int\limits_\Omega f(\xi(\omega))P(d\omega) = \int\limits_\mathbb{R} f(x) \times P_\xi(dx)$$

Легко видеть, что $f^+ \times T - f^- \times T = (f^+ - f^-) \times T = f \times T$ Тогда достаточно доказать теорему для неотрицательной f. $0 \le f_n \uparrow f, f_n-$ простые функции , поточечно.$\Rightarrow f_n \times T \uparrow f \times T$ Следовательно из свойств интеграла вытекает, что достаточно доказать (1) для простых функций f_n. Далее, т.к. $(\sum\limits_k \alpha_k I_{A_k}) \times T = \sum\limits_k \alpha_k I_{A_k} \times T$ Следовательно , достаточно доказать для $I_A . A \in \Gamma, \int\limits_Y I_A(y)d\mu T^{-1}(y) = \mu T^{-1}(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \int\limits_X I_{T^{-1}(A)}d\mu = \int\limits_X I_A \times Td\mu \Rightarrow$ (1)в случае $I_A\Box$

14.1 Произведения пространств с мерой. Теорема Фуббини

Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu), (Y, \Gamma, \nu)$ пространства с мерой. $X \times Y$-совокупность пар (x, y)

Произведения пространств полезно для определения независимых случайных величин.

Definition 14.3. *Измеримым прямоугольником в $X \times Y$ называется $\{(x, y) : x \in A, y \in B, A \in \mathcal{S}, B \in \Gamma\}$ и обозначается $A \times B$*

Theorem 14.8. *Совокупность измеримых прямоугольников в произведении $X \times Y$ образует полу-алгебру*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{P}$-совокупность измеримых прямоугольников. Очевидно $X \times Y \in \mathcal{P}$. Пусть $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{P}, (A_1, B_1) \cap (A_2, B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ Если $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2$, то $(A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_2) = (A_2 \cap A_1^c) \times B_2 \cup A_1 \times (B_2 \setminus B_1^c)\Box$

Definition 14.4. *Пусть $(X, \mathcal{S})$ и (Y, Γ)-измеримые пространства $\sigma-$алгебра произведений этих пространств определятся как σ-алгебра подмножеств $X \times Y$, порожденных совокупностью измеримых прямоугольников и обозначается $\mathcal{S} \times \Gamma$*

Пусть $E \subset X \times Y$

Definition 14.5. *X-сечением множества E, обозначение E_x, называется совокупность точек $y \in Y : (x, y) \in E$ и $x-$ фиксировано. $E_x = \{y : (x, y) \in E\}, E_x = B \cdot I_A(x)$*

Definition 14.6. *Пусть $f(x, y)$-действительная функция на $X \times Y$, x-сечением функции f называется функция на $Y : f_x(y) = f(x, y)$*

Theorem 14.9. *Пусть $(X, \mathcal{S})$ и (Y, Γ)-измеримые пространства, и пусть $E \in \mathcal{S} \times \Gamma$. Тогда $E_x \in \Gamma, E_y \in \mathcal{S}$.Если $f(x, y)$-измеримая действительная функция на $X \times Y$, то еч $x-$сечение f_x есть измеримая действительная функция на Y, аналогично f_y измеримая действительная функция на X*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$-совокупность подмножеств $X \times Y$, для которых утверждение теоремы верно(для множеств). $E = A \times B \in \mathcal{F}$, если $A \in \mathcal{S}, B \in \Gamma$ те $\mathcal{F}$ содержит все измеримые пр-ки $\mathcal{P}$. Далее , поскольку **Упражнение** $(\cup E_i)_x = \cup(E_i)_x, (E_1 \setminus E_2)_x = (E_1)_x \setminus (E_2)_x$ то $\mathcal{F}$ является $\sigma-$алгеброй, $\mathcal{P} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{S} \times \Gamma \in \mathcal{F}$

Пусть $f-$измеримая функция на $X \times Y$ и $B \in \mathcal{B}$-борелевское.$f_x^{-1}(B) = \{y : f_x(y) \in B\} = \{y : f(x, y) \in B\} = (f^{-1}(B))_x \in \Gamma$(в силу доказательства 1-й части)

Theorem 14.10. *Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ и $(Y, \Gamma, \nu)-$ измеримые пространства с $\sigma-$конечными мерами μ и ν, $E \in \mathcal{S} \times \Gamma$. Функции $f(x) = \nu(E_x)$ и $g(y) = \mu(E_y)$ являются измеримыми и*

$$\int\limits_Y g d\nu = \int\limits_X f d\mu \tag{3}$$

Доказательство. Т.к μ и $\nu - \sigma$-конечны, то $\exists$ последовательность $\{X_n\}$: $X_n \subset X_{n+1}$ и $\{Y_n\} : Y_n \subset Y_{n+1}, \cup X_n = X, \cup Y_n = Y$ и $\mu(X_n) < \infty, \nu(Y_n) < \infty$. Положим $E_n = E \cap (X_n \times Y_n)$, имеем $E_n \subset E_{n+1}$ и $E = \cup E_n$ и поскольку $E_x = \cup(E_n)_x, E_y = \cup(E_n)_y$ и $\nu(E_x) \lim\limits_n \underbrace{\nu((E_n)_x) = f(x)}_{f_n(x)}, f_n(x) \leq f_{n+1}(x), g(y) = \mu(E_y) = \lim\limits_n \underbrace{\mu((E_n)_y)}_{g_n(y)}, g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$. Получаем, что для доказательства (2) достаточно доказать для f_n и g_n, те для множеств E_n, которые являются подмножествами конечных измеримых прямоугольников. $\Rightarrow$ доказательства теоремы сведено к случаю конечных мер μ и ν

Пусть $E = X^{‘} \times Y^{‘}, X^{‘} \in \mathcal{S}, Y^{‘} \in \Gamma$
Имеем $f(x) = \nu(Y^{‘}) \cdot I_{X^{‘}}(x), g(y) = \mu(X^{‘}) \cdot I_{Y^{‘}}(y)$
$\int\limits_X f(x)d\mu = \nu(Y^{‘}) \cdot \mu(X^{‘}) = \int\limits_Y g(y)d\nu$. Следовательно утверждение (2) верно для измеримых прямоугольников.Пусть $\mathcal{M}$-совокупность измеримых подмножеств $X \times Y$, для которых верно (2). $\mathcal{M}$-содержит конечными объединениями попарно непересекающихся измеримых прямоугольников, тк если $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathcal{P}, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$, то $f(x) = \nu(E_x) = \sum\limits_1^n \nu((E_i)_x), g(y) = \sum\limits_1^n \mu((E_i)_y)$ и для отдельных слагаемых (2) уже доказано. Вспомним, что совокупность всевозможных конечных объединений попарно непересекающихся измеримых прямоугольников образует алгебру, порожденную $\mathcal{P}$. Кроме того, $\mathcal{M}$ является монотонным классом, действительно, если $E = \bigcap\limits_1^{\infty} E^n$ и $E^n \supset E^{n+1}$ утверждение (2) верно, то $f(x) = \nu(E_x) = \lim\limits_n \nu(E_x^n), g(y) = \mu(E_y) = \lim\limits_n \mu(E_y^n)$. $\int f(x)d\mu = \lim \int \nu(E_x^n)d\mu, \int g(y)d\nu = \lim \int \mu(E_y^n)d\nu$, тк для E^n - верно $\Rightarrow \int f(x)d\mu = \int g(y)d\nu \Rightarrow \mathcal{M} \supset \mathcal{S} \times \Gamma \square$

Theorem 14.11. *Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ и (Y, Γ, ν)-измеримые пространства с σ-конечными мерами μ и ν. Функция λ на $(X \times Y, \mathcal{S} \times \Gamma)$, определяемая равенствами $\lambda(E) = \int \nu(E_x)d\mu = \int \mu(E_y)d\nu$ есть σ-конечная мера , такая что для $A \in \mathcal{S}, B \in \Gamma$,*

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

и последним равенством λ определяется однозначно.

Note 14.4. λ будем обозначать $\mu \times \nu$-это последний шаг в построения произведения $(X \times Y, \mathcal{S} \times \Gamma, \mu \times \nu)$

Доказательство. $E = \bigcup\limits_1^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{S} \times \Gamma, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$.
$\lambda(E) = \int\limits_X \nu(E_x) = \int \sum\limits_1^{\infty} \nu((E_i))_x d\mu = \{$по свойствам интегралов$\}$=$\{E_x = \bigcup\limits_1^{\infty}(E_i)_x, (E_i)_x \cap (E_j)_x = \emptyset\} = \sum\limits_1^{\infty} \int \nu((E_i)_x)d\mu = \sum\limits_1^{\infty} \lambda(E_i) \Rightarrow \lambda$-мера.
σ-конечность λ, очевидно, вытекает из σ-конечности μ и ν $\square$

Theorem 14.12. *Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu), (Y, \Gamma, \nu)-$ измеримые пространства с $\sigma-$конечными мерами. Пусть $f-$неотрицательная измеримая функция на $X \times Y$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$. Тогда обе функции $\phi(x) = \int^* f_x(y)d\nu, \psi(y) = \int^* f_y(x)d\mu-$ измеримы и $\int^* f d\mu \times \nu = \int^* \phi(x)d\mu = \int^* \psi(y)d\nu$*

Доказательство. Из предыдущей теоремы $\Rightarrow$ справедливость данной теоремы , когда $f(x, y) = I_E(x, y)$. Далее, тк для $\forall f_1, ..., f_n$ на $X \times Y$ и $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$

$(\sum\limits_1^n \lambda_i \cdot f_i) = \sum\limits_1^n \lambda_i \cdot (f_i)_x$, аналогично и для y-сечения. $\Rightarrow$ утверждение теоремы верно для функций вида $\sum\limits_1^n \alpha_i \cdot I_{A_i}$, где $\alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}^+$, а $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, те $\forall$ простой функции на $X \times Y$. Т.к. $\forall$ измеримая функция f на $X \times Y$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$ может быть приближена неубывающей последовательностью простых функций, то все доказано в силу свойств внешней интеграла(переход к пределу) □

Theorem 14.13. *(Фуббини). Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ и (Y, Γ, ν) измеримые пространства с σ-конечными мерами и f-интегрируемая функция относительно $\mu \times \nu$. Тогда почти при всех x (относительно μ) функция f_x интегрируема относительно ν, почти при всех y (относительно ν) функция f_y интегрируема относительно μ, кроме того определенная почти всюду функции $\phi(x) = \int f_x(y)d\nu$ и $\psi(y) = \int f_y d\mu$ являются интегрируемыми (относительно ν и μ соответственно) и*

$$\int f d\mu \times \nu = \int \phi(x) d\mu = \int \psi(y) d\nu \tag{1}$$

Note 14.5. $\int\limits_{X \times Y} f(x,y) \underbrace{d\mu d\nu}_{d\mu \times \nu} = \int\limits_X (\int\limits_Y f(x,y) d\nu) d\mu = \int\limits_Y (\int\limits_X f(x,y) d\mu) d\nu$

Упражнение: Придумать пример, когда кратные интегралы не равны.

Доказательство. $f = f^+ - f^-$ и из свойств линейности интеграла достаточно доказать теорему для неотрицательных функций.
Равенство (1) в этом случае доказано в предыдущей теореме. Из интегрируемости f относительно $\mu \times \nu$ и предыдущей теоремы вытекает, что, если конечен первый интеграл$\int \phi(x) d\mu = \int \psi(y) d\nu$, то и второй тоже конечен. Отсюда вытекает , что $\phi(x)$ $\mu-$ почти всюду конечна, $\Rightarrow$ f_x-интегрируема μ- почти всюду. Аналогично и для f_y □

14.2 k-мерное произведение измеримых пространств с мерой

Пусть $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i), i = 1, ..., k-$измеримые пространства с $\sigma-$ конечными мерой.

$\prod\limits_{i=1}^k X_i$ означает совокупность наборов из $(x_1, ..., x_k)$, где $x_i \in X_i$

Definition 14.7. *Измеримым прямоугольником в* $\prod\limits_{i=1}^k X_i$ *называется* $\prod\limits_1^k A_i$, *где* $A_i \in \mathcal{S}_i$

Definition 14.8. *Произведением $\sigma-$алгебр $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$ называется σ-алгебра порожденная всеми измеримыми прямоугольниками, обозначается $\prod\limits_1^k \mathcal{S}_i$*

Definition 14.9. *На измеримом пространстве $(\prod\limits_1^k X_i, \prod\limits_1^k \mathcal{S}_i)$ определяется мера λ такая , что :*

$$\lambda(\prod_1^k A_i) = \prod_1^k \mu_i(A_i).$$

Такая мера единственна и обозначается $\prod\limits_1^k \mu_i$.

$$(\prod_{i=1}^k \mu_i)(\prod_{i=1}^k A_i) = \prod_{i=1}^k \mu_i(A_i)$$

$f(x_1, .., x_k)$ измерима на $(\prod\limits_{i=1}^k X_i, \prod\limits_{i=1}^k \mathcal{S}_i)$

$x_1, ..., x_p-$ сечение функции f-это функция от переменных $x_{p+1}, ..., x_k$ и $f_{x_1,...,x_p}(x_{p+1}, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k)$,когда $x_1, ..., x_p$-фиксированы.

f-интегрируема относительно $\prod\limits_{i=1}^k \mu_i$, то

$$\int f d \prod_{i=1}^k \mu_i = \int ... \int (\int f d\mu_1) d\mu_2 ... d\mu_k$$

Упражнение: Корректно ли даны определения? Проверить равенства: $\prod\limits_{i=1}^p X_i \times \prod\limits_{i=p+1}^k X_i = \prod\limits_{i=1}^k X_i$, $\prod\limits_{i=1}^p \mathcal{S}_i \times \prod\limits_{i=p+1}^k \mathcal{S}_i = \prod\limits_{i=1}^k \mathcal{S}_i$, $\prod\limits_{i=1}^p \mu_i \times \prod\limits_{i=p+1}^k \mu_i = \prod\limits_{i=1}^k \mu_i$.

Бесконечные произведения пространств с мерой

Пусть $I-$ множество индексов (могут быть и интервалы).

Пусть $\forall i \in I$ есть $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)-$ измеримые пространства с мерой, причем $\mu_i(X_i) = 1$.

$\prod\limits_{i \in I} X_i-$совокупность функций x, заданных на I и значения функций

$$x(i) \in X_i$$

Definition 14.10. *Прямоугольником в $\prod\limits_{i \in I} X_i$ называется $\forall$ множество вида $\prod\limits_{i \in I} A_i$, где $A_i \subset X_i$ и $A_i = X_i, \forall i \in I$ за исключением , быть может , конечного числа индексов i.*

$$X_i = [0,1], I = \{1, 2, ...\}, \prod_{i \in I} [0, 1/2]- \text{ не прямоугольник.}$$

Definition 14.11. *Измеримым прямоугольником называется прямоугольник , для которого все $A_i \in \mathcal{S}_i$*

Утверждение: Совокупность измеримых прямоугольников образует полу-алгебру.

Definition 14.12. *Множество в* $\prod\limits_{i\in I} X_i$ *называется измеримым, если оно принадлежит* $\sigma-$ *алгебре, порожденной совокупностью измеримых прямоугольников, обозначается* $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{S}_i$

Пусть $\mathcal{J} \in I$

Definition 14.13. $\mathcal{J}$*-цилиндром в произведении* $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ *называется множество вида* $\{x \in X : \prod\limits_{i\in I} x(i) \in A \subset \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} X_i\}$*. Множество* A *в этом случае называется основанием цилиндра.* $I = \{1, 2, 3\}, \mathcal{J} = \{2, 3\}$.
$\mathcal{J}-$ *цилиндр называется цилиндром с конечномерным основанием , если* $\mathcal{J}$ *конечно.*

Theorem 14.14. *Цилиндр с конечномерным основанием*

$$\{x \in X : \prod_{i\in \mathcal{J}} x(i) \in A \subset \prod_{i\in \mathcal{J}} X_i\} \tag{2}$$

измерим, если $A \in \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} \mathcal{S}_i$

Note 14.6. Самостоятельно показать , что справедливо обратное утверждение. (Пусть цилиндр измерим $\Rightarrow A \in \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} \mathcal{S}_i$)

Доказательство. Фиксируем конечное подмножество $\mathcal{J} \subset I$. Рассмотрим класс $\mathcal{A}$- класс подмножеств $\prod\limits_{i\in \mathcal{J}} X_i$: если $A \in \mathcal{A}$, то цилиндр (2) измерим. Покажем , что $\mathcal{A} \supset \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} \mathcal{S}_i$. Заметим, что $\forall$ измеримый прямоугольник в $\prod\limits_{i\in \mathcal{J}} X_i$ лежит в $\mathcal{A}$. Далее, $\{x \in X : \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} x(i) \in A\}^c = \{x \in X : \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} x(i) \in A^c\}, \bigcup\limits_k \{x \in X : \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} x(i) \in A_k\} = \{x \in X : \prod\limits_{i\in \mathcal{J}} x(i) \in \bigcup\limits_k A_k\} \Rightarrow \mathcal{A} - \sigma-$ алгебра.
Следовательно, $\prod\limits_{i\in \mathcal{J}} \mathcal{S}_i \subset \mathcal{A}$, как наименьшая $\sigma-$алгебра, содержащая измеримые прямоугольники в $\prod\limits_{i\in \mathcal{J}} X_i$

Corollary 14.1. $\sigma-$*алгебру* $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{S}_i$ *можно было определить, как* $\sigma-$*алгебру порожденную всеми измеримыми цилиндрами с конечномерными основаниями.*

$$(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i), i \in I$$
$$(\prod_{i\in I}, \prod_{i\in I} \mathcal{S}_i, \prod_{i\in I} \mu_i), \mu_i(X_i) = 1$$

Пусть $\mathcal{A}$-совокупность цилиндров с измеримыми конечномерными основаниями. $\mathcal{S} = \mathcal{S}(A)$

Proposition 14.1. $\mathcal{A}$*-является алгеброй.*

Доказательство. Для $X \in \mathcal{A}$ очевидно. $X = \{x : X(1) \in X_1\}$,
$\{x \in X : \prod\limits_{i \in J} x(i) \in A\}^c = \{x \in X : \prod\limits_{i \in J} X(i) \in A^c\}$, где J-конечно.
$\{x \in X : \prod\limits_{i \in J} x(i) \in A\} \bigcup \{x \in X : \prod\limits_{i \in J_1} x_i \in B\} =$
$= \{x \in X : \prod\limits_{i \in J \cup J_1} x(i) \in \widetilde{A} \cup \widetilde{B}\}$
$\widetilde{A} = \{\prod\limits_{i \in J \cup J_1} x(i) : \prod\limits_{i \in J} x(i) \in A\}, \widetilde{B} = \{\prod\limits_{i \in J \cup J_1} x(i) : \prod\limits_{i \in J_1} x(i) \in B\}$
Определим некую функцию на $\mathcal{A}$. Пусть $A \in \mathcal{A}, A = \{x \in X : \prod\limits_{i \in J} x(i) \in C \in \prod\limits_{i \in J} \mathcal{S}\}$
$\mu(A) = \prod\limits_{i \in I} \mu_i(A) = \prod\limits_{i \in I} \mu_i(C)-$ является ли данное определение корректным определением меры?
Пусть $A = \{x \in X : \prod\limits_{i \in J_1} \in C_1\}$

$$\prod_{i \in J_1} \mu_i(C_1) = \prod_{i \in J} \mu_i(C) \tag{1}$$

Имеем $A = \{x \in X_i : \prod\limits_{i \in J \cup J_1} x(i) \in C \times \prod\limits_{i \in J_1 \setminus J} x(i)\}$.
Но $\prod\limits_{i \in J \cup J_1} \mu_i(C \times \prod\limits_{i \in J_1 \setminus J} x_i) = \prod\limits_{i \in J} \mu_i(C)$
Аналогично $\prod\limits_{i \in J \cup J_1} \mu_i(C_1 \times \prod\limits_{i \in J \setminus J_1} x(i)) = \prod\limits_{i \in J_1} \mu_i(C_1) \Rightarrow (1)\square$

Упражнение Определенная выше функция μ -является конечно-аддитивной на $\mathcal{A}$

Theorem 14.15. *$\mu-$ является $\sigma-$аддитивной функцией на $\mathcal{A}$, те мерой на A?*

Доказательство. Достаточно доказать , что $\forall$ последовательности $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} : A_i \supset A_{i+1}, \cap A_i = \emptyset$ имеем $\mu(A_i) \to 0$ или достаточно доказать , что $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}, A_i \supset A_{i+1}, \mu(A_i) \geq \varepsilon > 0$ имеем $\cap A_i \neq 0$.
Пусть A_k- цилиндр с основанием F_k в $\prod\limits_{i \in J_k} X_i$.
Положим $J = J_1 \cup J_2 \cup ....$ Не ограничивая общности , имеем что $J = \{j_1, j_2, ...\}, ..., J_K = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$.Имеем $\varepsilon \leq \mu(A_k) = (\prod\limits_{i \in J} \mu_i)(F_k) = \int\limits_{X_{j_1}} (\prod\limits_{i \in J'_k} \mu_i)((F_k)_{X_{j_1}}) d\mu(X_{j_1}) = \{J'_k = J_k \setminus j_1\} = \int\limits_{B_k} + \int\limits_{B_k^c} \leq$
$\leq \{$ выбираем B_k и B_k^c таким образом $\} \leq \mu_{j_1}(B_k) + \frac{\varepsilon}{2}$, где $B_k = \{x_1 \in X_{j_1}, (\prod\limits_{i \in J_k} \mu_i)((F_k)_{x_{j_1} = x_1} > \frac{\varepsilon}{2})\}$

$$\text{Следовательно} \forall k : \mu_{j_1}(B_k) \geq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

и при этом $B_k \supset B_{k+1}$, т.к. μ_{j_1} есть мера , то из (2) $\Rightarrow$, что $\cap B_k \neq \emptyset$.
Следовательно $\exists \overline{x}_1 \in \cap B_k, \overline{x}_1 \in X_j$ и это означает , что

$\mu^{j_1} = \prod\limits_{i\in J\setminus\{j_1\}}, \mu^{j_1}((A_k)_{x_{j_1}=\overline{x}_1}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$

Аналогично получаем $\overline{x}_2$ из x_{j_2} и так далее .

Получаем что последовательность точек $\overline{x}_m \in x_{j_m} \in x_{j_{m+1}}$, покажем , что $\{x : x(j_k) = \overline{x}_k, k = 1, 2, ...\} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Действительно по построению $\mu^{j_1,...,j_k}(A_k)_{x_{j_1}=\overline{x}_1,...,x_{j_k}=\overline{x}_k} = \frac{\varepsilon}{2^k}$, A_k-цилиндр с основанием $F_k \subset \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_{ji}$

Следовательно $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_k) \in F_k \Rightarrow \{x : x(j_1) = \overline{x}_1, ..., x(j_k) = \overline{x}_k\} \subset A_k$ и тем более $V = \{x : x(j_1) = \overline{x}_1, ..., x(j_k) = \overline{x}_k, ...\} \subset A_k, V \subset A_k$ и $V \neq \emptyset, \square$

$$\mu = \prod_{i\in I} \mu_i \text{ на } (X, \mathcal{S}) \text{ конечная мера.}$$

Пример. $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$, где $X_i = \{0; 1\}, \mathcal{S}-$ множество всех подмножеств $X_i, \mu_i(0) = \mu_i(1) = \frac{1}{2}, I = \{1; 2; 3; ...\}$

$$(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i, \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i) = (\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{S}}, \widetilde{\mu})$$

$\widetilde{X} = [0, 1), \widetilde{\mathcal{S}}$-борелевские $\sigma-$алгебры подмножеств X,$\widetilde{\mu}-$ мера Лебега на $[0, 1)$.

E'-совокупность последовательностей из 0 и 1 , в которых, начиная с некоторого номера, стоят 1.Ясно, что E'-счетное множество. С другой стороны $\forall$ точка X имеет нулевую μ-меру. Действительно

$$\mu(x : x_1 = \overline{x}_1, ...) = \lim_{n\to\infty} \mu(x : x_1 = \overline{x}_1, ..., x_n = \overline{x}_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$$

В дальнейшем будем рассматривать пространство с мерой $(X', \mathcal{S}', \mu')$, где $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap X', \mu'(E \cap X') = \mu(E), E \in \mathcal{S}$. Рассмотрим отображение $f : X \to [0, 1)$ положив $\forall x \in X', f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$-это отображение взаимооднозначно. Действительно , пусть $x \neq y$, т.е. $x_i = y_i$ для $i < n$ и $x_n = 1, y_n = 0$ имеем $\sum\limits_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}, \sum\limits_{i=n}^{\infty} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow f-$ является взаимооднозначным. Это отображение есть отображение на $[0, 1)$, т.к. достаточно записать двоичное представление $\forall$ точки из $[0, 1)$.

Отображение $f-$ является измеримым. Рассмотрим произвольный интервал вида $[a, b), 0 \leq a < b < 1, a = \frac{k}{2^n}, b = \frac{l}{2^n}, k < l$

$$[a, b) = \bigcup_{s=k}^{l-1} [\tfrac{s}{2^n}, \tfrac{s+1}{2^n})$$

$f^{-1}([\frac{s}{2^n}, \frac{s+1}{2^n})) = \{x : x_1 = \overline{x}_1, ..., x_n = \overline{x}_n\} \in \mathcal{S}'$. Итак доказана измеримость f с другой стороны $f(\{x : x_1 = \overline{x}_1, ..., x_n = \overline{x}_n\})$ -измерим в $([0, 1), \mathcal{B})$ при $\forall \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$, т.е. отображение f^{-1} является измеримым.

$$\mu' f^{-1}([a,b)) = \mu'(f^{-1}([a,b))) = \mu'(f^{-1}(\bigcup_{k}^{l-1}[\tfrac{s}{2^n}, \tfrac{s+1}{2^n}) = \sum_{k}^{l-1}\mu'(x : x_1 =$$

$$\overline{x}_1, ..., x_n = \overline{x}_n) = \sum_{k}^{l-1}\tfrac{1}{2^n} = \tfrac{l-k}{2^n} = b - a$$

$\mu' f^{-1}-$ очевидно является инвариантной относительно сдвигов.$\Rightarrow \mu' f^{-1}-$ есть мера Лебега на $[0,1)$.

$(X_i, \mathcal{S}_i), i \in I.(\prod\limits_{i\in I} X_i, \prod\limits_{i\in I}\mathcal{S}_i) = (X, \mathcal{S})$.

$\mathcal{A}-$ совокупность цилиндров с конечномерными основаниями.

$\pi_J(x) = (x_{i_1}, ..., x_{i_n}), J = (i_1, ..., i_n), x \in X$, те $x_i = x(i) \in X$

$$\forall A \in \mathcal{A}, \exists J : B \in \prod_{i\in J} X_i, B \in \prod_{i\in J}\mathcal{S}_i, A = \pi_J^{-1}(B) \qquad (1)$$

$$\text{Если } \mu - \text{мера на } \mathcal{S}, \forall A \in \mathcal{A}, \text{ пользуясь}(1), \mu_J(B) = \mu(A) \qquad (2)$$

Если J- фиксировано, то μ_J- мера на $(\prod\limits_{i\in J} X_i, \prod\limits_{i\in J}\mathcal{S}_i), \{\mu_J\}-$ семейство мер , когда $J-$ меняется является , если оно определено (2), согласованной , те пусть $J_1 = (i_1, .., i_n), J_2 = (j_1, ..., j_m), J_1 \subset J_2$.

Определим $\pi_{J_2 J_1}((x_{j_1}, ..., x_{j_m})) = (x_{i_1}, ..., x_{i_n})$

$(\prod\limits_{i\in I} X_i, \prod\limits_{i\in I}\mathcal{S}_) = (X, \mathcal{S})$

$\mathcal{A}$- совокупность цилиндров с измеримыми конечномерными основаниями.

$$\mu_{J_1}(B) = \mu_{J_2}(\pi^{-1}_{J_1 J_2}(B)), \forall \text{ конечного } J_1, J_2 : J_1 \subset J_2, B \in \prod_{i\in J}\mathcal{S}_i \qquad (3)$$

Предположим , что $\mathcal{A}$ задано семейство согласованных мер $\Rightarrow \exists$ мера на $\mathcal{S} : \mu_J(B)-$ определяется формулой (2)?? Ответ: Нет в общем случае, да если $X_i = \mathbb{R}$ или $X_i = Y$ полное сепарабельное метрическое пространство.

Theorem 14.16 (Колмогорова). *В случае $X_i = \mathbb{R}, \forall$ системе согласованных мер $\{\mu_J\}$ отвечает мера со свойствами (2).*

Доказательство. Система со свойством (3) задает на $\mathcal{A}$ конечно аддитивную функцию μ.(Проверить самостоятельно). Доказано, что функция $\mu-$ является $\sigma-$ аддитивной . Также как в предыдущей теореме достаточно показать, что если $A_1 \supset A_2 ..., A_i \in \mathcal{A}$ и $\mu(A_i) \geq L$, то $\cap A_i \neq \emptyset$.
Не ограничивая общности , считаем , что для некоторой последовательности $i_1, i_2, ...$
$A_n = \pi_{i_1,...,i_n}(B_n), B_n \in \prod\limits_{k=1}^{n} k$
По определению функции $\mu : L \leq \mu(A_k) = \mu_{i_1,...,i_n}(B_n)$

Возьмем замкнутое ограниченное множество $U_n \subset B_n$:
$\mu_{i_1,...,i_n}(B_n \setminus U_n) < \frac{\varepsilon}{2}$
Пусть $V_n = \pi_{i_1,...,i_n}(U_n) \in \mathcal{S}$. Тогда $\mu(A_n \setminus V) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, положим
$W_n = V_1 \cap ... \cap V_n$.
Имеем $\mu(A_n \setminus W_n) \leq \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A_i \setminus V_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\mu(A_i \setminus V_i) < \varepsilon$, т.к. $W_n \subset V_n \subset A_n$
имеем $\mu(W_n) \geq \mu(A_n) - \varepsilon \geq L - \varepsilon > 0$ при $\varepsilon < L \Rightarrow W_n$- не пусто.
Возьмем в W_n- точку $W^{(n)}$, у которой по координатам $i_1, ..., i_n$ имеем $x_{i_1}^{(n)}, ..., x_{i_n}^{(n)}$.
По построению имеем $W_{n+p} \subset W_n \subset V_n \Rightarrow$ получаем последовательность $W^{(n+p)}$ с элементами по координатам $i_1, ..., i_n : x_{i_1}^{(n+p)}, ..., x_{i_n}^{(n+p)}$
$(x_{i_1}^{(n+p)}, ..., x_{i_n}^{(n+p)}) = \pi_{i_1,...,i_n}(W^{(n+p)}) \in U_n \Rightarrow$ поскольку U_n-замкнуто и ограничено, диагональным процессом из последовательности $W^{(n)}$ получаем подпоследовательность $W^{(n_i)}$, такую что :

$$x_{i+k}^{(n_i)} \to \overline{x}_k, n_i \to \infty, k = \{1, 2, ...\}$$

Возьмем $w \in X = \prod\limits_{i \in I} X_i, w_{i_k} = \overline{X}_k, k = 1, 2, ..., w_i = 0$ для остальных $i \in I$
В следующем замкнутом U_n имеем $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in U_n, \forall n \Rightarrow w \in A_n$ для $\forall n$, т.к. $V_n \subset A$ и $V_n = \pi^{-1}_{i_1,...,i_n}(U_n) \Rightarrow w \in \cap A\Box$