CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
22 APRILE 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. (i) Enunciare il teorema fondamentale sulle relazioni di equivalenza e le partizioni.
Posto $T = \{13, 24, 202, 1104, 110211\}$,

(ii) determinare il numero delle partizioni di T aventi ordine (cardinalità) 2.

(iii) Se α è la relazione di equivalenza definita in T da: per ogni $a, b \in T$,

$$a \; \alpha \; b \longleftrightarrow \text{la somma delle cifre di } a^{(\ddagger)} \text{ è uguale alla somma delle cifre di } b,$$

descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di α e l'insieme quoziente T/α.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f\colon (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longmapsto a^b \in \mathbb{N}$.

(i) Determinare $\overrightarrow{f}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$, $\overrightarrow{f}(\varnothing)$, $\overleftarrow{f}(\varnothing)$ $\overleftarrow{f}(\{1\})$, $\overleftarrow{f}(\{5\})$.

(ii) Verificare se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

(iii) Dare le definizione di reticolo (come insieme ordinato).

Si consideri la relazione d'ordine τ definita in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ da: $\forall a, c \in \mathbb{N}\ \forall b, d \in \mathbb{N}^*$

$$(a,b) \; \tau \; (c,d) \longleftrightarrow \big((a,b) = (c,d) \vee f((a,b)) \text{ è un divisore proprio di } f((c,d))\big).$$

(iv) Determinare in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \tau)$ eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali e verificare se $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \tau)$ è o meno un reticolo.

Sia $M = \{(4,1), (2,2), (2,3), (6,2), (4,2), (12,2)\}$.

(v) Disegnare un diagramma di Hasse di (M, τ).

(vi) Stabilire se (M, τ) è un reticolo. Se lo è decidere se è distributivo, complementato, booleano. Se non lo è determinare una coppia $(a,b) \in M$ tale che $(M \smallsetminus \{(a,b)\}, \tau)$ sia un reticolo e decidere se questo è distributivo, complementato, booleano.

Esercizio 3. Sia $*$ l'operazione binaria definita in $\mathbb{Z}_6$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_6$, $a * b = \bar{3}a + \bar{4}b$.

(i) Dopo aver dato la definizione di semigruppo, verificare che $(\mathbb{Z}_6, *)$ è un semigruppo.

(ii) $(\mathbb{Z}_6, *)$ è un monoide? È commutativo?

(iii) Verificare che, in $(\mathbb{Z}_6, *)$, $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ è una parte stabile (cioè chiusa).

Esercizio 4. Sia ρ la relazione binaria in $\mathbb{Z}$ definita da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \; \rho \; b \leftrightarrow a + b$ è dispari.

(i) Verificare che $(\mathbb{Z}, \rho)$ definisce un grafo.

(ii) Determinare un sottoinsieme S di $\mathbb{Z}$ tale che $|S| = 5$ e (S, ρ) definisca un albero.

Esercizio 5. Vero o falso (e perché)?

(i) In $\mathbb{Z}_{13}[x]$, un polinomio f ammette $\bar{3}$ e $\bar{5}$ come radici se e solo se f è multiplo di $x^2 - \bar{8}x + \bar{2}$.

(ii) Il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_{13}[x]$.

(iii) Il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$.

(iv) Per ogni primo p, il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(v) Per ogni primo p, il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ è riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(vi) Il polinomi $g = \bar{3}x^2 - \overline{11}x + \bar{6}$ e $\ell = \bar{7}x^2 + \bar{9}x - \overline{12}$ sono associati in $\mathbb{Z}_{13}[x]$ (utilizzare un'opportuna equazione congruenziale per verificarlo).

Esercizio 6. Se φ, θ e δ sono variabili proposizionali, stabilire se una, entrambe o nessuna delle seguenti è una tautologia:

(i) $\big(\varphi \wedge \neg(\neg\theta \vee \neg\delta)\big) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \theta \wedge \delta)$;

(ii) $\big(\varphi \wedge \neg(\neg\theta \vee \neg\delta)\big) \longleftrightarrow (\varphi \wedge (\theta \vee \delta))$.

$(\ddagger)$ le cifre sono intese in base 10. In modo esplicito: la 'somma delle cifre' di a è $\sum_{i=0}^{h} c_i$, dove $a = \sum_{i=0}^{h} c_i 10^i$ per un opportuno $h \in \mathbb{N}$ e numeri naturali c_0, c_1, ..., c_h minori di 10.

APR - 24

Esercizio 1. (*i*) Enunciare il teorema fondamentale sulle relazioni di equivalenza e le partizioni. Posto $T = \{13, 24, 202, 1104, 110211\}$,

(*ii*) determinare il numero delle partizioni di T aventi ordine (cardinalità) 2.

(*iii*) Se α è la relazione di equivalenza definita in T da: per ogni $a, b \in T$,

$$a \;\alpha\; b \longleftrightarrow \text{la somma delle cifre di } a^{(\ddagger)} \text{ è uguale alla somma delle cifre di } b,$$

descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di α e l'insieme quoziente T/α.

i) Per ogni insieme A, esiste una funzione biettiva tale che

$$f : \sim \in EQ(A) \mapsto A/_{\sim} \in PART(A)$$

Quindi ogni rel di equivalenza può definirsi partizione e viceversa.

ii) $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!\,(5-2)!}$

iii) $\alpha : \forall a, b \in T$ ($a \alpha b \iff$ le somme delle cifre di a e b sono uguali)

$13 \to 4$

$24 \to 6$

$202 \to 4$

$1104 \to 6$

$110211 \to 6$

$T/_{\alpha} = \{\{13, 202\}, \{24, 1104, 110211\}\}$

x e y classi di equiv:

$x = \{13, 202\}$ e $y = \{24, 1104, 110211\}$

Apr 24 (Es 2)

$f : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mapsto a^b \in \mathbb{N}$

i) $\vec{f}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*) = \mathbb{N}$ perchè preso un qualunque $a \in \mathbb{N}$ e $b = 1$, a^1 copre tutto $\mathbb{N}$

$\vec{f}(\emptyset) = \emptyset$ $\qquad$ $\overleftarrow{f}(\emptyset) = \emptyset$

$\overleftarrow{f}(\{1\}) = \{(1,1)\}$

$\overleftarrow{f}(\{5\}) = \{(5,1)\}$

ii) iniettiva: NO

$\forall (x,y),(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \left(f(x,y) = f(a,b) \Rightarrow (x,y) = (a,b) \right)$ falso

$\vec{f}(2,2) = \vec{f}(4,1) = \{4\}$

suriettiva: SI

$\forall z \in \mathbb{N} \; \exists (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \left(z = f(x,y) \right)$ è vero

perchè preso un qualunque $a \in \mathbb{N}$ e $b = 1$, a^1 copre tutto $\mathbb{N}$

biettiva: NO

iii) Sia (a,ρ) un insieme ordinato, quindi $A \neq \emptyset$ e ρ rel d'ordine, (A,ρ) è un reticolo se e solo se:

$$\forall a,b \in A \left(\exists \inf\{a,b\} \land \exists \sup\{a,b\} \right)$$

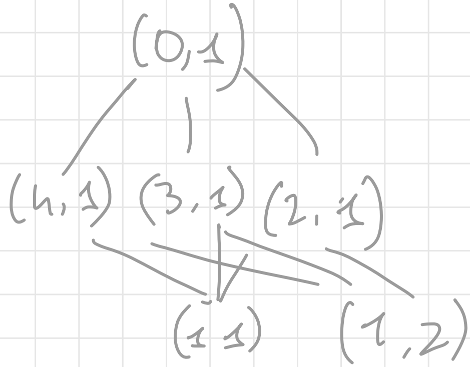
$\forall a,c \in \mathbb{N} \; \forall b,d \in \mathbb{N}^*$

$$(a,b) \mathrel{\tau} (c,d) \Longleftrightarrow (a,b) = (c,d) \lor f((a,b)) \text{ è un div proprio di } f((c,d))$$

IV) minimali $\{(1, n)\}$ $n \in \mathbb{N}^*$

massimali $\{(0, n)\}$ $n \in \mathbb{N}^*$

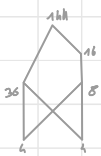
non esistono min e max



Non è un reticolo, non esiste un Inf

$M = \{\overset{4}{(4,1)}, \overset{4}{(2,2)}, \overset{8}{(2,3)}, \overset{36}{(6,2)}, \overset{16}{(4,2)}, \overset{144}{(12,2)}\}$

V)



VI) Non è un reticolo perché non c'è inf

VII) Tolgo la coppia (4,1) ed è un reticolo.

- Non è distributivo perché pentagonale
- È complementato
- Non è booleano perché non distributivo

APR-24 (Es 3)

$*: a,b \in \mathbb{Z}_6 = \bar{3}a+\bar{4}b$

i) Un semigruppo è una tupla $(S,*)$, dove S è un insieme e $*$ è un operazione associativa

ASSOCIATIVA: SI

$a*(b*c)=(a*b)*c \rightarrow a*(\bar{3}b+\bar{4}c)=(\bar{3}a+\bar{4}b)*c$

$\bar{3}a+\bar{4}(\bar{3}b+\bar{4}c)=\bar{3}(\bar{3}a+\bar{4}b)+\bar{4}c$

$\bar{3}a+\overline{12}b+\overline{16}c=\bar{9}a+\overline{12}b+\bar{4}c$

$\bar{3}a+\bar{4}c=\bar{3}a+\bar{4}c$

ii) COMMUTATIVA: NO

$\bar{3}a+\bar{4}b=\bar{3}b+\bar{4}a$

$b-a=0 \qquad b=2,\ a=1$

$2-1=0$

EL. NEUTRO A SX

$\bar{3}a+\bar{4}b=b$

$\bar{3}a+-\bar{3}b$ $\qquad$ 3 non è cancellabile perchè è divisore dello zero

$\bar{3}a=\bar{3}b$

EL. NEUTRO A DX

$\bar{3}a+\bar{4}b=a$

$4b=-2a$

$4b=4a$

NO MONOIDE

iii) $\{\bar{0}, \bar{3}\}$

$(\bar{0}\ \bar{0}) \to \bar{4}\cdot\bar{0} + \bar{3}\cdot\bar{0} = \bar{0}$ ✓

$(\bar{0}\ \bar{3}) \to \bar{4}\cdot\bar{0} + \bar{3}\cdot\bar{3} = \bar{9} = \bar{3}$ ✓

$(\bar{3}\ \bar{0}) \to \bar{4}\cdot\bar{3} + \bar{3}\cdot\bar{0} = \bar{0}$ ✓

$(\bar{3}\ \bar{3}) \to \bar{4}\cdot\bar{3} + \bar{3}\cdot\bar{3} = \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}$

È parte stabile.

APR-24 (es 4)

ρ: $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \rho b \iff a+b$ è dispari

i) ρ antiriflessiva: SI

$\forall a \in A$ $\neg(a \rho a)$ è sempre vero perché la somma di due numeri uguali è sempre pari

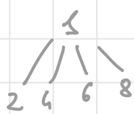
ρ simmetrica: SI

$\forall a,b \in A$ $(a \rho b \Rightarrow b \rho a)$ è vero per la commutatività dell'addizione

ii) $|S| = 5$ (S, ρ) albero

connesso e senza circuiti

$S = \{1, 2, 4, 6, 8\}$



APR-24 (ES. 6)

i) $(\varphi \land \neg(\neg\theta \lor \neg\delta)) \leftrightarrow (\varphi \land \theta \land \delta)$

$(\varphi \land \theta \land \delta) \leftrightarrow (\varphi \land \theta \land \delta)$ SI, TAUTOLOGIE

ii) FALSO

$\square$

FINE