## CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III) 9 SETTEMBRE 2022

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$	giustificando pienamente tutte le risposte.	<del></del>

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**. **Non** è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Individuare un connettivo proposizionale da sostituire al simbolo '?' in  $(p \lor (p \land q))$ ?  $(p \lor q)$  in modo che questa forma proposizionale diventi una tautologia.

Esercizio 2. Sia  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 9\}$  e siano  $\pi$  e  $\delta$  le relazioni binarie in A definite da: per ogni  $x, y \in A$ ,

$$x \pi y \iff (x = y \lor xy \text{ è pari})$$
 e  $x \delta y \iff (x = y \lor xy \text{ è dispari}).$ 

Per ciascuna di  $\pi$  e  $\delta$ :

- (i) decidere se è o non è una relazione di equivalenza:
- (ii) se lo è, descrivere il corrispondente insieme quoziente Q, elencando in modo esplicito le classi appartenenti a Q ed i loro elementi. Calcolare |Q|;
- (iii) esprimere (non calcolare!) il numero delle applicazioni iniettive da A a Q e quello delle applicazioni iniettive da Q ad A.

**Esercizio 3.** Siano  $(R, \leq)$  e  $(P, \alpha)$  due insiemi ordinati. Quando si dice che  $(R, \leq)$  e  $(P, \alpha)$  sono isomorfi?

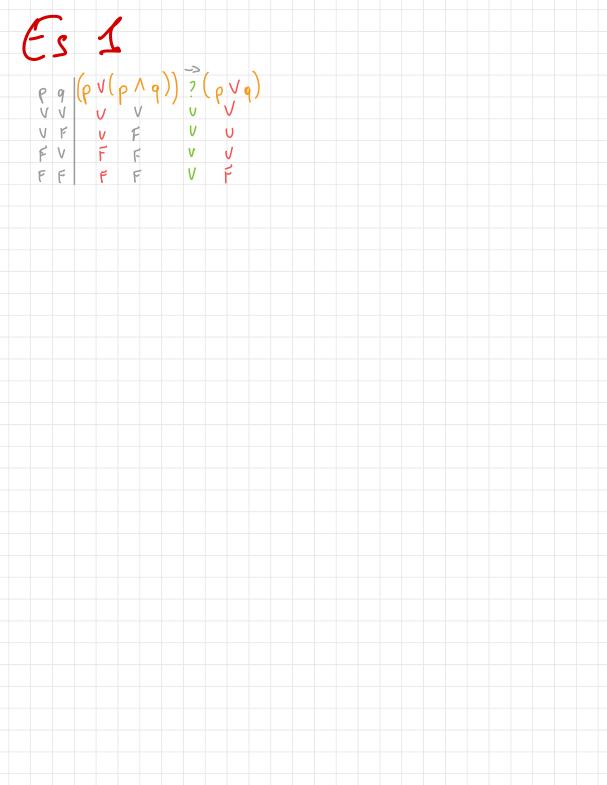
- (i) Enunciare il principio di dualità per i reticoli.
- (ii) Trovare un'applicazione biettiva  $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$  che, da  $(\mathbb{N}^*, |)$  a  $(\mathbb{N}^*, \leq)$ , sia crescente ma non un isomorfismo.
- (iii) Trovare due reticoli non isomorfi in modo che esista un'applicazione biettiva e decrescente tra i due
- (iv) Trovare, se esiste, un isomorfismo da  $(A, \subseteq)$  a (B, |), dove  $A = \{X \subseteq \{1, 2, 3\} \mid 1 \in X\}$  e B è l'insieme dei numeri naturali divisori di 14.

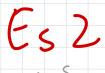
**Esercizio 4.** In  $S = \mathbb{Z}_{62}$  si considerino le operazioni \*, definita da  $(\forall a, b \in S)(a * b = \overline{10}ab)$ , e +, l'usuale operazione di addizione in  $\mathbb{Z}_{62}$ . Sia poi  $T = \{[2a]_{62} \mid a \in \mathbb{Z}\}.$ 

- (i) Stabilire se (S, +, \*) è un anello. Nel caso lo sia, rispondere anche alle domande che seguono.
- (ii) (S, +, \*) è commutativo? È unitario? (Nel caso, determinarne l'unità.) È integro? È un campo?
- (iii) T costituisce un sottoanello di (S, +, \*)? Se lo è, come anello, (T, \*, +) è unitario? (Nel caso, determinarne l'unità.) È integro? È un campo?

Esercizio 5. L'applicazione dall'anello  $\mathbb{Z}[x]$  dei polinomi su  $\mathbb{Z}$  a  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  che ad ogni  $f \in \mathbb{Z}[x]$  associa l'insieme delle radici di f in  $\mathbb{Z}$  è iniettiva? È suriettiva?

- (i) Spiegare (senza calcolare in modo diretto il prodotto) perché, nell'anello di polinomi  $\mathbb{Z}_3[x]$ , il polinomio  $p = x^3 x$  coincide con  $\prod_{c \in \mathbb{Z}_3} (x c)$ .
- (ii) Sapendo che ogni elemento di  $\mathbb{Z}_3$  è radice di  $f := x^6 x^5 x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$ , scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili monici.





A= { n = |N | n = 2}

i poi somo in rul con i poi e con i otspoi T: x Ty => (x=y Vxy pari)

i pai sono in sel solo con se stessi f : x & y <=> (x = y V × g dispoi)

i d'apai sono in rel con i d'apai

i) REL EQUIV: SI

SIMMETAICA: TI: SI &: SI

XT y => y TT x: (x = y Axy poi) => (y = x A y x poi) Voo

x6 y=>4 8 x: (x=y 1 x y dy) => (y=x 1 y x disp) Vao

TRANSITIVA: 11:00 8:51 (x 17 y) / (4 17 z) => x 17 z

× poi, y dispoi, zi poi per hora. × è in rel con z x por , q por , 2 può enea sia per che orper. x è in rul con?

× of sport, y puè ever solopoi, 2 può esser sie poi che d'sport. Se Z è d'sport y 172 mor non × 172

(x & y) 1 (y & z) => x 82

× è poi, y dere usere =x e z=g. × è il rel con 2 × è dispoi, y dere enere d'spoi, z dece essere d'spoi. × è in rel con 2

RIFLESSIVA. TI:SI S:SI mlla rel c'è x = y 1 xy poi/d'spoi, quino per x=y è ellerisea

ii) 8 Q = {[1], [0] [2,], [4], [6], [4]}

Q -> A inettion = [A] üi)

Es 3

i-i) Due set; I sodicon isomorfi se esiste ma furina liettive, tole che

\frac{1}{2} \text{V} \text{V}

Se (S, p) à un reticole e (S, p) il sur duale, sostituisco p con p

eol inverto infle sup

Ec 4 S= Z62

\*: Va, 6 (a \* 6 = 10 a b) T = 3[20] 0 = Z} Tè l'insime de pai

i) (S, +, \*) anello:

(S,+) G.A., (S,\*) sengruppo, & i olistibulica

(S, +) i w. G. A

COMMUTATIVA SI ASSOCIATIVA SI L'adolisane à essociative.

NEUTRO SI INVENTIBILI SI Li ha (as [1] + [-1] = [0]) Il neutro à O

(S, \*) è un semigroppo. Associativa SI (axb) x 2 = a 2 (b x 2)

(10ab) = = Qx (10b2) 10.10 ab = 10.10 ab 2

DISTERBUTIVITÀ SI

ax (b+c) = (a=b)+(a=c) 100(6+c) = 1000 + 100c 10 ab + 10 ac = 10 ab + 10 ac

ii) (5,+,\*) è en enelle comutative (5, 2) sem gruppo comutetico

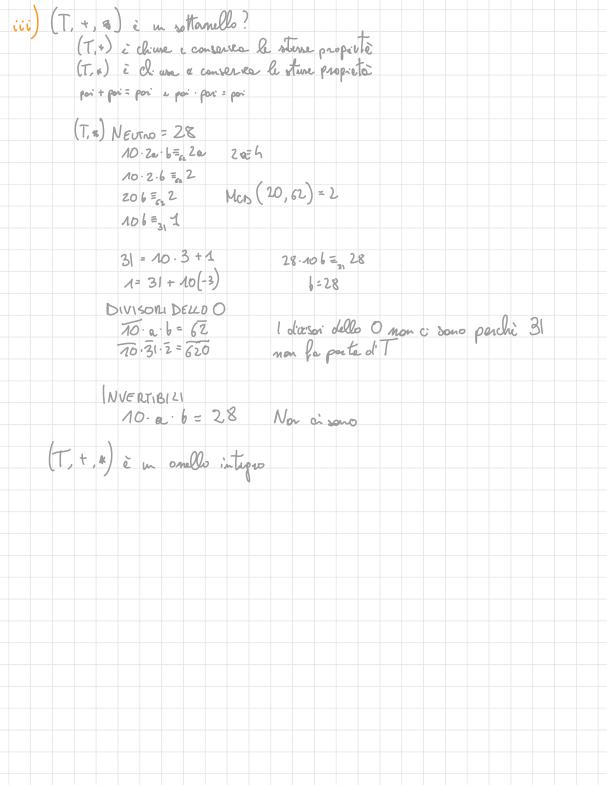
COMMUTATIVO SI

Perchi à commutations le moltiplicaione NEUTAD

a & b = a 10ab = a

106=1

MCD (40,62) = 2 2 mar olivele 1, mon c'è mentro



$$(x^{3}+x)(x+1)(x-1)(x-1)(x-1)$$

$$x^{3}+0x^{2}+x$$

$$x^{3}+1$$

$$x^{4}+1$$

$$x^{4}$$