CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
10 FEBBRAIO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Scrivere la tavola di verità della forma proposizionale $(p \vee q) \to r$ e, se φ, ψ, ϑ sono formule, negare $\big(\forall x(\varphi(x))\big) \to \big(\exists x(\psi(x) \vee \vartheta(x))\big)$.

Esercizio 2. Si consideri la struttura algebrica $(S, *)$, dove $S = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ e l'operazione binaria $*$ è definita ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in S$,

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + [4]_{12},\ [4]_{15}bd).$$

(*i*) Verificare che $(S, *)$ è un monoide, determinarne l'elemento neutro e stabilire se è commutativo.
(*ii*) Determinare gli elementi simmetrizzabili in $(S, *)$ e, se esiste, il simmetrico di $([8]_{12}, [9]_{15})$.
(*iii*) Dare la definizione di elemento cancellabile. L'elemento $([0]_{12}, [0]_{15})$ è cancellabile in $(S, *)$?
(*iv*) La parte $H = \{([8]_{12}, [9]_{15}), ([8]_{12}, [4]_{15})\}$ è chiusa in $(S, *)$? In caso di risposta affermativa, che tipo di struttura è $(H, *)$?

Esercizio 3. Tenendo presente che vale $12 \cdot 29 = 348$, descrivere, per ogni $c \in \{n \in \mathbb{N} \mid 8 \le n \le 12\}$, l'insieme $A_c = \{n \in \mathbb{Z} \mid 150n \equiv_{348} c\}$.

Esercizio 4. Siano $T = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri interi primi positivi e, per ogni $a \in T$, $\pi(a) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } a\}$. Considerare l'applicazione $f\colon a \in T \longmapsto \min\big(\pi(a)\big) \cdot \max\big(\pi(a)\big) \in T$.

(*i*) Determinare $\overleftarrow{f}(\{2\})$ e $\overleftarrow{f}(\{6\})$.
(*ii*) f è iniettiva? È suriettiva?
(*iii*) Detto $\mathcal{R}$ il nucleo di equivalenza di f, determinare la classe di equivalenza $[256]_{\mathcal{R}}$.

Esercizio 5. Sia ρ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{Z}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

$$a\ \rho\ b \iff \big(a \le b \wedge \mathrm{rest}(a, 10) \le \mathrm{rest}(b, 10)\big).^{1}$$

(*i*) Determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{Z}, \rho)$;
(*ii*) sempre in $(\mathbb{Z}, \rho)$, determinare l'insieme dei maggioranti di $\{15, 21\}$ e stabilire se esiste $\sup\{15, 21\}$.
(*iii*) $(\mathbb{Z}, \rho)$ è un reticolo?
(*iv*) Posto $L = \{-20, -7, 13, 21, 35, 82, 1789\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (L, ρ) e stabilire se (L, ρ) è un reticolo e, nel caso, se è distributivo e se è complementato.
(*v*) Esiste $x \in L$ tale che $(L \setminus \{x\}, \rho)$ sia un reticolo complementato?

Esercizio 6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano $f_n = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^2 - x + \bar{7}$ e $g_n = x^2 - \bar{6}x - \bar{7}$ polinomi in $\mathbb{Z}_n[x]$.

(*i*) Dopo aver determinato le radici di $x^2 - 6x - 7$ in $\mathbb{Z}$, determinare, se possibile, un primo n tale che f_n sia un multiplo di g_n in $\mathbb{Z}_n[x]$.

Fissato, se esiste, un tale n, in $\mathbb{Z}_n[x]$:

(*ii*) determinare tutti i polinomi associati ad f_n;
(*iii*) decomporre il polinomio monico associato ad f_n nel prodotto di polinomi monici irriducibili.

[1] per ogni intero a, $\mathrm{rest}(a, 10)$ significa $a \bmod 10$, ovvero $a \,\%\, 10$.

Es 1

i)

$(p$	$\vee$	$q)$	$\to$	r
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	V	F	V	V
V	V	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V
F	F	F	V	F

ii) $(\forall_x(\varphi(x))) \to (\exists_x(\psi(x) \vee \vartheta(x)))$

$(\forall_x(\varphi(x))) \wedge (\forall_x(\overline{\psi(x)} \wedge \vartheta(x)))$

Es 2

$(S, *)$ $\quad S = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$

$*: \forall (a,b), (c,d) \in S \left((a,b) * (c,d) = (a + c + \bar{4}_{12},\ \bar{4}_{15}\, bd) \right)$

Divido l'operazione in due, γ $a+c+\bar{4}_{12}$ e δ $\bar{4}_{15}\, bd$

i) COMMUTATIVA: SI

$+$ e $\cdot$ sono commutative

ASSOCIATIVA: SI

γ ASSOCIATIVA: SI

$(x \gamma y) \gamma z = (y \gamma z) \gamma x$

$(x + y + \bar{4}) + z + \bar{4} = y + z + \bar{4} + x + \bar{4}$

$x + y + z + \bar{8} = x + y + z + \bar{8}$

δ ASSOCIATIVA: SI

$(x \delta y) \delta z = (y \delta z) \delta x$

$(\bar{4} x y) \bar{4} z = (\bar{4} y z) 4 x$

$\overline{16}\, xyz = \overline{16}\, xyz$

NEUTRO: $(\bar{8}, \bar{4})$

γ NEUTRO: $\bar{8}$

$x + y + \bar{4} = x$

$y = -\bar{4} = \bar{8}$

δ NEUTRO: $\bar{4}$

$4xy = x$

$4 \cdot 4y \equiv_{15} 1 \cdot 4 \Rightarrow y = 4$

$15 = 4 \cdot 3 + 3$

$4 = 3 \cdot 1 + 1$

$1 = 4 + 3(-1)$

$= 4 + (15 + 4(-3))(-1)$

$= 4 + 15(-1) + 4(3)$

$= 4(4) + 15(-1)$

ii) $(a,b) * (c,d) = (\bar{8}, \bar{4})$

$r: a + c + \bar{4} = \bar{8} \Rightarrow c = \bar{4} - a$ Tutto $\mathbb{Z}_{12}$

$s: \bar{4}\, bd = \bar{4} \Rightarrow bd = 1$ $\{1, 2, 4, 8\}$

$(\bar{8}, \bar{9})$ non è simmetrizzabile

iii) $x * y = x * z \Rightarrow y = z$

$s: 40y = 40z \Rightarrow y = z$ Falso perchè $\forall y, z \in \mathbb{Z}_{15} (40y = 40z)$

$y = 5$ e $z = 7$ Falso

iv) $8 + 8 + 4 = \overline{20} = \bar{8}$ chiusa

$\bar{4} \cdot \bar{9} \cdot \bar{9} = \overline{324} = \bar{9}$

$\bar{4} \cdot \bar{4} \cdot \bar{4} = \overline{64} = \bar{4}$

$\bar{4} \cdot \bar{9} \cdot \bar{4} = \bar{9}$

chiusa

$(H, *)$ è un monoide commutativo.

Es 3

i) $12 \cdot 29 = 348$, $c \in \{ n \in \mathbb{N} \mid 8 \leq n \leq 12 \}$

$348 = 150 \cdot 2 + 48$
$150 = 48 \cdot 3 + 6 \rightarrow$ MCD
$48 = 6 \cdot 8 + 0$

$150 n \equiv_{348} 8$ non ha soluzioni
$150 n \equiv_{348} 9$ no

$150 n \equiv_{348} 12$ ha soluzioni

$25 n \equiv_{58} 2$ $\qquad 7 \cdot 25 n \equiv_{58} 2 \cdot 7$

$58 = 25 \cdot 2 + 8$ $\qquad n = 14$
$25 = 8 \cdot 3 + 1 \rightarrow$ MCD

$1 = 25 + 8(-3) =$
$= 25 + (58 + 25(-2))(-3) =$
$= 25 + 58(-3) + 25(6) =$
$= 25(7) + 58(-3)$

Es 4

$T = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ $\quad$ $\mathbb{P} = \{\text{primi}\}$

$\forall a \in T \left(\pi(a) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } a\} \right)$

$f : a \in T \mapsto \min(\pi(a)) \cdot (\max(\pi(a)) \in T$

i) $\overleftarrow{f}(\{2\}) = \emptyset$

$\overleftarrow{f}(\{6\}) = \{n \in T \mid 2^a \cdot 3^b\}$ con $a, b \in \mathbb{N}^*$

ii) no iniettiva perché $\overleftarrow{f}(\{6\})$ è immagine di più elementi

no suriettiva perché $\overleftarrow{f}(\{2\}) = \emptyset$

iii) $[256] = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^a\}$ con $a \in \mathbb{N}^*$

Es 5

$a \rho b \iff (a \le b \wedge \text{rest}(a,10) \le \text{rest}(b,10))$

i) min e max no

minimali $\{[0]_{10}\}$

massimali $\{[9]_{10}\}$

ii) $\{15, 21\}$

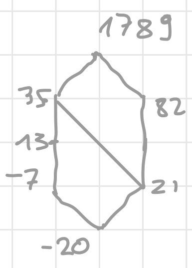
$x \in \mathbb{N} \ (x > 21 \wedge \text{rest}(x,10) \ge 5)$ sup $\{25\}$

$\mathbb{Z}_p$ è un reticolo

iii) è riflessiva $x \rho x$

tra due numeri c'è sempre inf e sup

iv)



NO COMPLEMENTATO

NO DISTRIBUTIVO

v) Non è possibile