CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
15 GENNAIO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

→ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** ←

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Scrivere una negazione della formula $\exists y\Big(\forall x\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\to(\psi(y)\to\theta(x))\big)\Big)$ in cui non appaia il connettivo di implicazione (qui φ, ψ e θ sono predicati unari).

Esercizio 2. Dare una definizione di partizione di un insieme ed enunciare il teorema fondamentale su partizioni e relazioni d'equivalenza. Fornire una partizione di $\mathbb{Z}$ di cardinalità 2^{10}.

Esercizio 3. Determinare i numeri naturali n tali che $2^n < n!$. (Suggerimento: può essere utile fare uso del principio di induzione). Per quali insiemi finiti a si ha $|\mathcal{P}(a)| < |\mathrm{Sym}(a)|$?

Esercizio 4. Si consideri l'operazione $*\colon (a,b)\in\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{10}\mapsto \bar{6}a+b\in\mathbb{Z}_{10}$.

- (i) Decidere se $*$ è associativa, se è commutativa, se $(\mathbb{Z}_{10},*)$ ha elementi neutri a sinistra o a destra e, nel caso la domanda abbia senso, quali suoi elementi sono simmetrizzabili. Che tipo di struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_{10},*)$?
- (ii) Siano $P=\{\bar{2}a\mid a\in\mathbb{Z}_{10}\}$ e $D=\mathbb{Z}_{10}\smallsetminus P$. Per ciascuno di P e D decidere se è una parte chiusa rispetto a $*$ e, nel caso, rispondere, per la corrispondente struttura indotta, alle stesse domande poste al punto precedente per $(\mathbb{Z}_{10},*)$.

Esercizio 5.

- (i) Stabilire quali tra $[2027]_{2024}$, $[1024]_{2024}$, $[-2]_{2024}$ e $[10001!]_{2024}$ sono invertibili in $\mathbb{Z}_{2024}$ e quali sono divisori dello zero.
- (ii) Calcolare, utilizzando l'algoritmo euclideo, il massimo comun divisore positivo tra 209 e 165 e trovare quindi tutte le soluzioni delle equazioni congruenziali $209x\equiv_{165}14$ e $165x\equiv_{209}44$.

Esercizio 6. Siano F l'insieme delle parti finite non vuote di $\mathbb{N}$ e f l'applicazione $x\in F\mapsto \min x+\max x\in\mathbb{N}$.

- (i) Spiegare perché f è ben definita come applicazione;
- (ii) determinare $\overleftarrow{f}(\{2\})$ e $|\overleftarrow{f}(\{2\})|$;
- (iii) f è iniettiva, suriettiva, biettiva?
- (iv) Detto σ il nucleo di equivalenza di f, determinare $[\{2\}]_\sigma$.

Sia ora τ la relazione d'ordine in F definita da:

$$\forall x,y\in F\ \big(x\ \tau\ y \iff (x=y\vee f(x)\text{ è un divisore proprio di }f(y))\big).$$

- (v) Determinare in (F,τ) eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo. (F,τ) è un reticolo?
- (vi) Posto $M=\big\{\{1\},\{2\},\{2,3,4\},\{1,3,5,7\},\{5,6,7\},\{9\},\{10,11,15,60,62\}\big\}$, disegnare un diagramma di Hasse di (M,τ), verificare se questo è un reticolo e, nel caso, se è distributivo, complementato, booleano.
- (vii) Determinare in (M,τ) una catena massimale C ed un sottoreticolo booleano massimale B.

Esercizio 7. Per ogni primo positivo p, si consideri il polinomio $f_p=(\bar{4}x^3+x^2-\bar{2}x-\bar{4})(x+\bar{1})\in\mathbb{Z}_p[x]$.

- (i) Determinare l'insieme X dei primi p tali che il resto della divisione tra f_p e $x-\bar{2}$ sia $\bar{0}$.
- (ii) Posto $p=\max X$, decomporre f_p in prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_p[x]$.
- (iii) f_p ha un divisore irriducibile monico di grado 2? In caso di risposta affermativa, dire quanti ne ha ed esibirne almeno uno.

GEN-24 ES 1

Esercizio 1. Scrivere una negazione della formula $\exists y\Big(\forall x\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\to(\psi(y)\to\theta(x))\big)\Big)$ in cui non appaia il connettivo di implicazione (qui φ, ψ e θ sono predicati unari).

$$\exists_y\Big(\forall_x\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\to(\psi(y)\to\Theta(x))\big)\Big)$$

$$\forall_y\neg\Big(\forall_x\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\to(\psi(y)\to\Theta(x))\big)\Big)$$

$$\forall_y\Big(\exists_x\neg\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\to(\psi(y)\to\Theta(x))\big)\Big)$$

$$\forall_y\Big(\exists_x\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\wedge\neg(\psi(y)\to\Theta(x))\big)\Big)$$

$$\forall_y\Big(\exists_x\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\wedge(\psi(y)\wedge\neg\Theta(x))\big)\Big)$$

$\square$

GEN-24 ES 2

Esercizio 2. Dare una definizione di partizione di un insieme ed enunciare il teorema fondamentale su partizioni e relazioni d'equivalenza. Fornire una partizione di $\mathbb{Z}$ di cardinalità 2^{10}.

Def. Partizione:

$X \subseteq A$ si dice partizione di A se e solo se:

- $\forall a \in X \, (a \neq \emptyset)$
- $\forall a, b \in X \, (a \neq b \Rightarrow a \cap b = \emptyset)$
- $\bigcup X = A$

Teorema fondamentale su partizioni e rel. equivalenza

Per ogni insieme A esiste una funzione biettiva f definita

$$f : \rho \in EQ(A) \mapsto A/\rho \in \mathrm{PART}(A)$$

PARTIZIONE

$$\mathbb{Z}_{2^{10}}$$

GEN 24 ES 3

i) Vale per tutti gli $n \geq 4$

???

ii) PER INDUZIONE

$n = 4$ $\qquad 2^4 < 4! = 16 < 24$

GEN-24 ES 4

Esercizio 4. Si consideri l'operazione $*$: $(a,b) \in \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \mapsto \bar{6}a + b \in \mathbb{Z}_{10}$.

(*i*) Decidere se $*$ è associativa, se è commutativa, se $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ ha elementi neutri a sinistra o a destra e, nel caso la domanda abbia senso, quali suoi elementi sono simmetrizzabili. Che tipo di struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_{10}, *)$?

(*ii*) Siano $P = \{\bar{2}a \mid a \in \mathbb{Z}_{10}\}$ e $D = \mathbb{Z}_{10} \setminus P$. Per ciascuno di P e D decidere se è una parte chiusa rispetto a $*$ e, nel caso, rispondere, per la corrispondente struttura indotta, alle stesse domande poste al punto precedente per $(\mathbb{Z}_{10}, *)$.

i) ASSOCIATIVITÀ? SI

$$\forall x,y,z \in \mathbb{Z}_{10}\left(x*(y*z) = (x*y)*z\right)$$

$$\bar{6}x + \bar{6}y + z = \bar{6}(\bar{6}x + y) + z$$

$$\bar{6}x + \bar{6}y + z = \overline{36}x + \bar{6}y + z$$

$$\bar{6}x + \bar{6}y + z = \bar{6}x + \bar{6}y + z$$

COMMUTATIVITÀ? NO

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}_{10}\left(x*y = y*x\right)$$

$\bar{6}x + y = \bar{6}y + x$ è falso

ELEMENTO NEUTRO? NO

Dx $\quad x * \varepsilon = x \quad$ NESSUNO

Sx $\quad \varepsilon * x = x \quad$ 5, 0 $\qquad 6 \cdot 5 + x = \overline{30} + x = x \qquad 6 \cdot 0 + x = x$

STRUTTURA ALGEB? SEMIGRUPPO

ii.1)

$P = \{ \bar{1} a \mid a \in \mathbb{Z}_{10} \}$

PARTE CHIUSA? SI

$\forall x,y \in P \ (x * y \in P)$

$\bar{6}x + y$ è pari, perché addizione e moltiplicazione sono parte chiusa

ASSOCIATIVA? SI

Uguale a prima

COMMUTATIVA? SI

$\overline{6}x + y = \overline{6}y + x$

$x=2$ e $y=4$

$6 \cdot 2 + 8 = 6 \cdot 8 + 2$

$12 + 8 = 48 + 2$

ELEMENTO NEUTRO? 0

Sx: 0 $\quad 6 \cdot 0 + x = x$

Dx: 0 $\quad 6 \cdot x + 0 = x$

SIMMETRIZZABILI? SI

$x * l = 0 \implies \overline{6}x + l = \overline{0}$

$\overline{x} = 2 \quad \overline{2} * l = \overline{0} \quad \overline{6} \cdot \overline{2} * \overline{8} = \overline{0}$

STRUTTURA ALGEB? GRUPPO ABELIANO

ii.2)

$D : \mathbb{Z}_{10} \setminus P$

PARTE CHIUSA? SI

$\forall x, y \in P \, (x * y \in P)$

$\bar{6}x + y$ è pari, perché addizione e moltiplicazione sono parte chiusa

ASSOCIATIVA? SI

Uguale a prima

COMMUTATIVA? SI (PER IL POTERE DELL'AMORE DI CRISTO)

$x = 5 \, , \, y = 3$

$6x + y = 6y + x \qquad \underset{6\cdot 5}{30} + 3 = \underset{6\cdot 3}{18} + 5$

ELEMENTO NEUTRO? 5

$\bar{6}\varepsilon + x = x \qquad \bar{5} \qquad \bar{6}\cdot\bar{5} = \overline{30} = 0$

$6x + 5 = x$ potenza magica dei numeri

SIMMETRIZZABILI? SI

$6x + \ell = 5$

$1, -1 \, (9)$ $\quad$ $9, (-9) \, (1)$

$6\cdot 1 + 9 = 5 \quad 6\cdot 9 + 1 = 5$

$5, -5 \, (5)$

$6\cdot 5 + 5 = 5$

$3, -3 \, (7) \quad 7, -7 \, (3)$

$6\cdot 3 + 7 = 5 \quad 6\cdot 7 + 3 = 5$

STRUTTURA ALGEB? GRUPPO ABELIANO

GEN-24 es 5

Esercizio 5.

(*i*) Stabilire quali tra $[2027]_{2024}$, $[1024]_{2024}$, $[-2]_{2024}$ e $[10001!]_{2024}$ sono invertibili in $\mathbb{Z}_{2024}$ e quali sono divisori dello zero.

(*ii*) Calcolare, utilizzando l'algoritmo euclideo, il massimo comun divisore positivo tra 209 e 165 e trovare quindi tutte le soluzioni delle equazioni congruenziali $209x \equiv_{165} 14$ e $165x \equiv_{209} 44$.

$209 = 165 \cdot 1 + 44$ $\qquad$ $44 = 209 + 165 \cdot (-1)$

$165 = 44 \cdot 3 + 33$ $\qquad$ $33 = 165 + 44 \cdot (-3)$

$44 = 33 \cdot 1 + 11$ $\qquad$ $11 = 44 + 33 \cdot (-1)$

$33 = 11 \cdot 3 + 0$

$209x \equiv_{165} 14$ non ammette soluzioni

$165x \equiv_{209} 44$ non c'è sono soluzioni

GEN-24 ES 6

$F = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \varnothing \qquad f : x \in F \mapsto \min x + \max x \in \mathbb{N}$

i) È una applicazione perché ogni elemento del dominio ha una immagine nel codominio

ii) $\overleftarrow{f}(\{2\}) = \{\{1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$

$|\overleftarrow{f}(\{2\})| = 3$

iii) INIETTIVA: NO

$\forall x, y \in F \ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

FALSO $\quad f(\{1\}) = 2$

$f(\{0,2\}) = 2$

SURIETTIVA: SI

$\forall y \in \mathbb{N} \ \exists x \in F \ (y = f(x))$

Tutti gli elementi di F con cardinalità 2 e con 0 come elemento ed $\{0\}$ coprono tutto $\mathbb{N}$

BIETTIVA: NO

iv) $[\{2\}]_\sigma : \{\{0,2\}, \{1\}, \{0,1,2\}\}$

$T: \forall x,y \in F \,(x \, T \, y \iff x=y \vee f(x)$ è un div. proprio di $f(y))$

v) Reticolo:

- Riflessiva: SI, vale per $x=y$
- Transitività:

vi) $M = \{ \underset{2}{\overset{A}{\{1\}}}, \underset{4}{\overset{B}{\{2\}}}, \underset{6}{\overset{C}{\{2,3,4\}}}, \underset{8}{\overset{D}{\{1,3,5,7\}}}, \underset{12}{\overset{E}{\{5,6,7\}}}, \underset{18}{\overset{F}{\{9\}}}, \underset{72}{\overset{G}{\{10,11,15,60,62\}}} \}$