CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
9 SETTEMBRE 2022

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Individuare un connettivo proposizionale da sostituire al simbolo '?' in $\big(p\vee(p\wedge q)\big)\,?\,\big(p\vee q\big)$ in modo che questa forma proposizionale diventi una tautologia.

Esercizio 2. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 9\}$ e siano π e δ le relazioni binarie in A definite da: per ogni $x, y \in A$,

$$x\ \pi\ y \iff (x = y \vee xy \text{ è pari}) \qquad \text{e} \qquad x\ \delta\ y \iff (x = y \vee xy \text{ è dispari}).$$

Per ciascuna di π e δ:

(i) decidere se è o non è una relazione di equivalenza;

(ii) se lo è, descrivere il corrispondente insieme quoziente Q, elencando in modo esplicito le classi appartenenti a Q ed i loro elementi. Calcolare $|Q|$;

(iii) esprimere (non calcolare!) il numero delle applicazioni iniettive da A a Q e quello delle applicazioni iniettive da Q ad A.

Esercizio 3. Siano $(R, \leq)$ e (P, α) due insiemi ordinati. Quando si dice che $(R, \leq)$ e (P, α) sono isomorfi?

(i) Enunciare il principio di dualità per i reticoli.

(ii) Trovare un'applicazione biettiva $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ che, da $(\mathbb{N}^*, |)$ a $(\mathbb{N}^*, \leq)$, sia crescente ma non un isomorfismo.

(iii) Trovare due reticoli non isomorfi in modo che esista un'applicazione biettiva e decrescente tra i due.

(iv) Trovare, se esiste, un isomorfismo da $(A, \subseteq)$ a $(B, |)$, dove $A = \{X \subseteq \{1, 2, 3\} \mid 1 \in X\}$ e B è l'insieme dei numeri naturali divisori di 14.

Esercizio 4. In $S = \mathbb{Z}_{62}$ si considerino le operazioni $*$, definita da $(\forall a, b \in S)(a * b = \overline{10}ab)$, e $+$, l'usuale operazione di addizione in $\mathbb{Z}_{62}$. Sia poi $T = \{[2a]_{62} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Stabilire se $(S, +, *)$ è un anello. Nel caso lo sia, rispondere anche alle domande che seguono.

(ii) $(S, +, *)$ è commutativo? È unitario? (Nel caso, determinarne l'unità.) È integro? È un campo?

(iii) T costituisce un sottoanello di $(S, +, *)$? Se lo è, come anello, $(T, *, +)$ è unitario? (Nel caso, determinarne l'unità.) È integro? È un campo?

Esercizio 5. L'applicazione dall'anello $\mathbb{Z}[x]$ dei polinomi su $\mathbb{Z}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ che ad ogni $f \in \mathbb{Z}[x]$ associa l'insieme delle radici di f in $\mathbb{Z}$ è iniettiva? È suriettiva?

(i) Spiegare (senza calcolare in modo diretto il prodotto) perché, nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}_3[x]$, il polinomio $p = x^3 - x$ coincide con $\prod_{c\in\mathbb{Z}_3}(x - c)$.

(ii) Sapendo che ogni elemento di $\mathbb{Z}_3$ è radice di $f := x^6 - x^5 - x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$, scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili monici.

Es 1

$$(p \lor (p \land q)) \overset{?}{\rightarrow} (p \lor q)$$

p	q	$\lor$	$\land$	$\overset{?}{\rightarrow}$	$\lor$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F

Es 2

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \le 9 \}$

$\pi : x \pi y \iff (x = y \lor x y \text{ pari})$ — i pari sono in rel con i pari e con i dispari, i dispari sono in rel solo con i pari

$\delta : x \delta y \iff (x = y \lor x y \text{ dispari})$ — i pari sono in rel solo con se stessi, i dispari sono in rel con i dispari

i) REL EQUIV: SI

SIMMETRICA: π: SI δ: SI

$x \pi y \Rightarrow y \pi x : (x = y \land x y \text{ pari}) \Rightarrow (y = x \land y x \text{ pari})$ Vero

$x \delta y \Rightarrow y \delta x : (x = y \land x y \text{ disp.}) \Rightarrow (y = x \land y x \text{ disp.})$ Vero

TRANSITIVA: π: NO δ: SI

$(x \pi y) \land (y \pi z) \Rightarrow x \pi z$

x pari, y dispari, z è pari per forza. x è in rel con z

x pari, y pari, z può essere sia pari che dispari. x è in rel con z

x dispari, y può essere solo pari, z può essere sia pari che dispari. Se z è dispari $y \pi z$ ma non $x \pi z$

$(x \delta y) \land (y \delta z) \Rightarrow x \delta z$

x è pari, y deve essere = x e z = y. x è in rel con z

x è dispari, y deve essere dispari, z deve essere dispari. x è in rel con z

RIFLESSIVA. π: SI δ: SI

nella rel c'è $x = y \land x y$ pari/dispari, quindi per $x = y$ è riflessiva

ii) δ $Q = \{[1], [0], [2], [4], [6], [8]\}$

$|Q| = 6$

iii) $Q \to A$ iniettive $= |A|^{|Q|}$

Es 3

i-i) Due reticoli si dicono isomorfi se esiste una funzione biettiva, tale che

$$\forall x, y \left(f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y) \right) \wedge \left(f(x \vee y) = f(x \vee y) \right)$$

i) Se (S, ρ) è un reticolo e $(S, \bar{\rho})$ il suo duale, sostituisco ρ con $\overline{\rho}$ ed inverto inf e sup

Es 4

$S = \mathbb{Z}_{62}$ $\quad * : \forall a,b \left(a*b = \overline{10}ab \right)$ $\quad T = \{[2a]_{62} \mid a \in \mathbb{Z}\}$

T è l'insieme dei pari

i) $(S, +, *)$ anello:

$(S,+)$ G.A., $(S,*)$ semigruppo, $*$ è distributiva

$(S,+)$ è un G.A

ASSOCIATIVA SI

L'addizione è associativa.

NEUTRO SI

Il neutro è 0

COMMUTATIVA SI

Sì

INVERTIBILI SI

Li ha (es $[1]+[-1]=[0]$)

$(S,*)$ è un semigruppo.

ASSOCIATIVA SI

$(a*b)*z = a*(b*z)$

$(\overline{10}ab)*z = a*(\overline{10}bz)$

$\overline{10}\cdot\overline{10}abz = \overline{10}\cdot\overline{10}abz$

DISTRIBUTIVITÀ SI

$a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$

$10a(b+c) = 10ab + 10ac$

$10ab+10ac = 10ab+10ac$

ii) $(S,+,*)$ è un anello commutativo

$(S,*)$ semigruppo commutativo

COMMUTATIVO SI

Perché è commutativa la moltiplicazione

NEUTRO

$a*b = a$

$10ab = a$

$10b \equiv_{62} 1$ $\quad MCD(10,62) = 2$ $\quad$ 2 non divide 1, non c'è neutro

iii) $(T, +, *)$ è un sottoanello?

$(T, +)$ è chiuso e conserva le stesse proprietà

$(T, *)$ è chiuso e conserva le stesse proprietà

pari + pari = pari e pari · pari = pari

$(T, *)$ NEUTRO = 28

$10 \cdot 2a \cdot b \equiv_{62} 2a$ $\quad 2a = 4$

$10 \cdot 2 \cdot b \equiv_{62} 2$

$20 b \equiv_{62} 2$ $\quad \text{MCD}(20, 62) = 2$

$10 b \equiv_{31} 1$

$31 = 10 \cdot 3 + 1$ $\quad 28 \cdot 10 b \equiv_{31} 28$

$1 = 31 + 10(-3)$ $\quad b = 28$

DIVISORI DELLO 0

$\overline{10} \cdot a \cdot b = \overline{62}$

$\overline{10} \cdot \overline{31} \cdot \overline{2} = \overline{620}$

I divisori dello 0 non ci sono perchè 31 non fa parte di T

INVERTIBILI

$10 \cdot a \cdot b = 28$ $\quad$ Non ci sono

$(T, +, *)$ è un anello integro

ES 5

$$x^6 - x^5 - x^2 + x$$

$$\begin{array}{l|l}
x^6 - x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 + x + 0 & x - 1 \\
-x^6 + x^5 & \overline{x^5 - x} \\
\hline
// \quad // \quad // \quad // \quad -x^2 + x + 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +x^2 - x & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad // \quad // \quad 0 &
\end{array}$$

$(x^5 - x)(x - 1)$ rad $+1$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0 & x - 1 \\
-x^5 + x^4 & \overline{x^4 + x^3 + x^2 + x} \\
\hline
// \quad +x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0 & \\
\quad -x^4 + x^3 & \\
\hline
\quad // \quad x^3 + 0x^2 - x + 0 & \\
\qquad -x^3 + x^2 & \\
\hline
\qquad // \quad x^2 - x + 0 & \\
\qquad\quad -x^2 + x & \\
\hline
\qquad\quad // \quad // &
\end{array}$$

$(x^4 + x^3 + x^2 + x)(x - 1)(x - 1)$ rad -1

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 + x^2 + x + 0 & x + 1 \\
-x^4 - x^3 & \overline{x^3 + x} \\
\hline
// \quad // \quad +x^2 + x + 0 & \\
\qquad\quad -x^2 - x & \\
\hline
\qquad\quad // \quad // &
\end{array}$$

$$(x^3+x)(x+1)(x-1)(x-1)$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +0x^2 & +x & x \\
\cline{4-4}
-x^3 & & & x^2+1 \\
\cline{1-3}
// & & +x & \\
 & & -x & \\
\cline{2-3}
 & & // &
\end{array}
$$

$$(x^2+1)(x)(x+1)(x-1)(x-1)$$

$$(x+1)(x-1)(x)(x+1)(x-1)(x-1)$$