CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
4 OTTOBRE 2022

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Per ogni $a \in \mathbb{N}$, sia $\tau(a)$ la somma delle cifre di a nella sua rappresentazione in base 10 (cioè: $\tau(a) = c_t + c_{t-1} + \cdots + c_1 + c_0$, dove $t \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, t\}(10 > c_i \in \mathbb{N})$ e $a = \sum_{i=0}^{t} c_i 10^i$); ad esempio, $\tau(3411) = 3 + 4 + 1 + 1 = 9$.

Si consideri la relazione binaria σ in $\mathbb{N}$ definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \ \sigma \ b \iff (a = b \lor \tau(a) < \tau(b)).$$

Dando per noto che σ è una relazione d'ordine,

(*i*) determinare in $(\mathbb{N}, \sigma)$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo. $(\mathbb{N}, \sigma)$ è un reticolo?
(*ii*) Disegnare il diagramma di Hasse di (T, σ), dove $T = \{9999, 103, 200, 4017, 525, 1100, 10100\}$. (T, σ) è un reticolo?
(*iii*) Determinare in (T, σ) un sottoinsieme totalmente ordinato massimale.
(*iv*) Se $T_1 = T \cup \{11\}$ e $T_2 = T \cup \{1000000000\}$, quali tra (T_1, σ) e (T_2, σ) sono reticoli?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f \colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \setminus \{\varnothing\} \mapsto \min\{|a| : a \in A\} \in \mathbb{N}$.

(*i*) f è iniettiva? f è suriettiva?
(*ii*) Determinare $\overleftarrow{f}\big(\{f(\{-2\})\}\big)$.

Esercizio 3. Determinare i numeri interi n tali che

(*i*) $16 + n$ sia congruo a $143n - 14$ modulo n

e quelli tali che

(*ii*) $16 + n$ sia congruo a $143n - 14$ modulo 186.

Esercizio 4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n = \overline{3}x^4 + \overline{15}x^3 + \overline{60}x^2 + \overline{6}x + \overline{3} \in \mathbb{Z}_n[x]$.

(*i*) Qualora sia possibile, stabilire per quali valori di n il polinomio f_n ha grado 4, per quali valori di n ha grado $-\infty$, per quali valori di n ha grado 3.
(*ii*) Che grado ha f_n se $n = 1$? E se $n = 0$?
(*iii*) Scomporre in prodotto di fattori irriducibili f_5, sapendo che f_5 non possiede divisori di grado 2.

Esercizio 5. Sia $S = \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Per ogni $a, b \in S$, indichiamo con $\mathrm{Div}(a, b)$ l'insieme dei divisori positivi comuni di a e b. Prendiamo ora in considerazione la seguente operazione binaria $*$ definita in S:

$$*\colon (a, b) \in S \times S \longmapsto 2^{|\,\mathrm{Div}(a,b)|} \in S.$$

(*i*) Per quali coppie $(a, b) \in S$ si ha $a * b = 2$?
(*ii*) $*$ è commutativa? È associativa?
(*iii*) Trovare tutti gli elementi neutri a destra o a sinistra in $(S, *)$.
(*iv*) Siano $T = \{n \in S \mid n \text{ è pari}\}$ e $U = \{n \in S \mid n = 2^k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}$. T è una parte stabile (ovvero: chiusa) in $(S, *)$? E U?

Es 1

$\tau(a)$: somma delle cifre di a

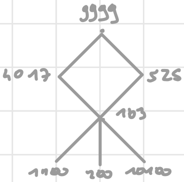
$a \,\sigma\, b \iff (a=b \vee \tau(a)<\tau(b))$ ANTISIMMETRICA e TRANSITIVA

i) minimali: $\{0\}$ min $\{0\}$

massimali: $\mathbb{N}$ max $\nexists$

è un reticolo, perché esiste sempre un inf ed un sup

ii)



$9999 = 36$
$103 = 4$
$200 = 2$
$4017 = 12$
$525 = 12$
$1100 = 2$
$10100 = 2$

no, perché tra 200 e 1100 non esiste inf

iii) $\{n \in \mathbb{N} \mid x \leq 9\}$

iv) $T_1 = T \cup \{11\}$ e $T_2 = T \cup \{100000000\}$

$(T_2 ; \sigma)$ è un reticolo perché esiste un inf per tutti

Es 2

i) Iniettiva:

$$\forall x,y \in P(\mathbb{Z}) \left(f(x) = f(y) \to x = y \right) \quad \text{falsa}$$

$$x = \{1, 2, 3\} \text{ e } y = \{1, 2\}$$

Suriettiva:

$$\forall y \in \mathbb{N} \ \exists x \in P(\mathbb{Z}) \left(y = f(x) \right)$$

è vero, ogni elemento di $\mathbb{N}$ è coperto dal singoletto di quell'elemento

ii) $\overleftarrow{f}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2 \land x = -2\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1, -1, 0\}$

Es 3

i) $16 + n \equiv_n 143n - 14$

$143n - n \equiv_n 16 + 14$

$142n \equiv_n 30$ vero con $n=2$

ii) $142n \equiv_{186} 30$ MCD$=(2)$

$71n \equiv_{93} 15$

$93 = 71 \cdot 1 + 22$

$71 = 22 \cdot 3 + 5$

$22 = 5 \cdot 4 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$1 = 5 + 2(-2) = 5 + (22 + 5\cdot(-4))(-2) =$

$= 22(-2) + 5(9) = 22(-2)(71 + 22(-3))(9) =$

$= 22(-2) + 71(9) + 22(-27) = 71(9) + 22(-29) =$

$= 71(9) + (93 + 71(-1))(-29) =$

$= 93(-29) + 71(38)$

$38 \cdot 71 n \equiv_{93} 15 \cdot 38$ $n \equiv_{93} \overline{570} \equiv_{93} \overline{12}$

Es 5

Div (a,b): l'insieme dei divisori comuni di a,b

$*: (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to 2^{|\text{Div}(a,b)|} \in \mathbb{N}^*$

i) Per tutte le coppie in cui a,b sono coprimi

ii) Commutativa: SI
- Poichè è un insieme dei divisori comuni non importa l'ordine di a,b

Associativa:
- $\forall x,y,z \in \mathbb{N}^*: (x*y)*z = (y*z)*x$

$x = 15 = 3 \cdot 5$
$y = 210 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2$
$z = \quad = 3 \cdot 5 \cdot 2^3$

$(x*y) = 2^{(|\{3,5\}|)} = 2^2 = 4$

$(y*z) = 2^{(|\{3,5,2\}|)} = 2^3 = 8$

$4 * z = 2^{(|\{4,2\}|)} = 2^2$

$8 * x = 2^{(|\{4,2,8\}|)} = 2^3$

iii) Non esistono neutri perchè la funzione restituisce solo potenze di 2

iv) $T = \{n \in S \mid n \text{ pari}\}$ SI, perchè la funzione restituisce solo potenze di 2

$U = \{n \in S \mid n \text{ è una potenza di } 2\}$ SI.

Es 4

i) Grado 4

con grado 1 e 3 $3x^4 = 0$

Il polinomio sarà di grado 4 con $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 3\}$

Grado $-\infty$

$\bar{3}x^4 + \overline{15}x^3 + \overline{60}x^2 + \bar{6}x + \bar{3}$

per $n = 3$

Grado 3

nessuno

ii) $n = 1$

è di grado 4

$n = 0$

non esiste $\mathbb{Z}_0$

iii) $\bar{3}x^4 + \bar{6}x + \bar{3}$ $\quad x = -1 \quad 3 - 6 + 3 = 0$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +6x & +3 & x+1 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & -3x^3 & & & & 3x^3 - 3x^2 + 3x + 3 \\
\cline{1-5}
// & -3x^3 & +0x^2 & +6x & +3 & \\
 & +3x^3 & +3x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & // & 3x^2 & +6x & +3 & \\
 & & -3x^2 & -3x & & \\
\cline{3-5}
 & & // & 3x & +3 & \\
 & & & -3x & -3 & \\
 & & & // & // &
\end{array}
$$

$(3x^3 - 3x^2 + 3x + 3)(x + 1)$ $\quad x = -1 \quad -3 + 3 - 3 + 3 = 0$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -3x^2 & +3x & +3 & x+1 \\
\cline{5-5}
-3x^3 & -3x^2 & & & 3x^2-6x+9 \\
\cline{1-4}
// & -6x^2 & +3x & +3 & \\
 & +6x^2 & +6x & & \\
\cline{2-4}
 & // & +9x & +3 & \\
 & & -9x & -9 & \\
 & & // & -5 & \\
\end{array}
$$

$$(3x^2 - 6x + 9)(x+1)(x+1)$$