CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
8 SETTEMBRE 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

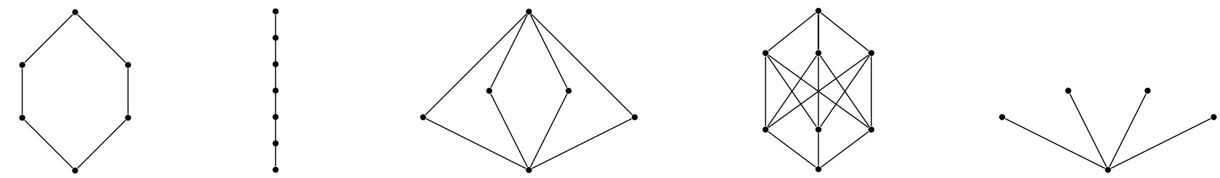
Esercizio 1. Scrivere la più corta forma proposizionale che sia logicamente equivalente a $(p \to p) \to q$.

Esercizio 2. Siano α, β, γ e δ le relazioni binarie definite in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ da: $\forall x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \ldots$

- $x \; \alpha \; y \iff x \cup \mathbb{N} = y \cup \mathbb{N}$;
- $x \; \beta \; y \iff (\exists \min x \wedge \exists \min y)$ *[i minimi sono qui riferiti all'ordinamento usuale in $\mathbb{Z}$]*;
- $x \; \gamma \; y \iff$ esiste un'applicazione biettiva da x a y;
- $x \; \delta \; y \iff (x \neq y \Rightarrow x = y)$.

Per ciascuna di queste relazioni, si stabilisca se è o non è una relazione di equivalenza e, nel caso lo sia, si determini la classe di equivalenza di $\varnothing$ rispetto ad essa.

Esercizio 3. Per ciascuno dei seguenti diagrammi, si individui, se possibile, un sottoinsieme X di $\mathbb{N}$ tale che il diagramma in questione rappresenti X ordinato dalla divisibilità in $\mathbb{N}$; stabilendo anche se questo insieme ordinato è un reticolo e se è un sottoreticolo di $(\mathbb{N}, |)$.



A B C D E

Esercizio 4. Sia S l'insieme delle applicazioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$. Si consideri in S l'operazione binaria $*$ definita da questa condizione: per ogni f, $g \in S$,

$$f * g \colon n \in \mathbb{Z} \longmapsto f(n) + g(n) + 1 \in \mathbb{Z}.$$

(i) $*$ è commutativa? È associativa?

(ii) L'insieme delle applicazioni iniettive da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è una parte chiusa in $(S, *)$? E quella delle applicazioni suriettive da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$? E quella delle applicazioni costanti da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$?

(iii) Decidere se $(S, *)$ ammette elemento neutro. Nel caso, determinarlo e rispondere alle due domande che seguono:

  (a) l'applicazione costante $c \colon n \in \mathbb{Z} \mapsto 3 \in \mathbb{Z}$ è simmetrizzabile in $(S, *)$? Nel caso, qual è il suo simmetrico?

  (b) Determinare l'insieme degli elementi simmetrizzabili di $(S, *)$.

(iv) Che tipo di struttura algebrica è $(S, *)$?

Esercizio 5. Sia f il polinomio $x^5 + 4x^4 - 4x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ e, per ogni intero positivo n, sia $f_n = x^5 + \bar{4}x^4 - \bar{4}x - \bar{2} \in \mathbb{Z}_n[x]$.

(i) f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$?

(ii) $2f$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$?

(iii) Dando per noto che $f(3)$ è un multiplo di 7, scrivere f_7 come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_7[x]$.

(iv) Elencare i numeri naturali h tali che f_7 abbia, in $\mathbb{Z}_7[x]$, (almeno) un divisore di grado h.

(v) Individuare, se possibile, un associato g di f_{47} in $\mathbb{Z}_{47}[x]$ tale che $g(\bar{0}) = \bar{5}$.

Esercizio 1.

La forma proposizionale logicamente equivalente a $(p \to p) \to q$ è $p \to q$, in quanto $p \to p$ è proprio p

Esercizio 2

i) $x \alpha y \leftrightarrow x \cup \mathbb{N} = y \cup \mathbb{N}$

riflessività $x \cup \mathbb{N} = x \cup \mathbb{N}$ ✓
simmetria $x \cup \mathbb{N} = y \cup \mathbb{N} \to y \cup \mathbb{N} = x \cup \mathbb{N}$ ✓
transitiva $x \cup \mathbb{N} = y \cup \mathbb{N} \wedge y \cup \mathbb{N} = z \cup \mathbb{N} \to x \cup \mathbb{N} = z \cup \mathbb{N}$ ✓

È di equivalenza

$[\phi]_\alpha = \{x \in P(\mathbb{Z}) \mid \underbrace{\phi \alpha x}_{x \cup \mathbb{N} = \phi \cup \mathbb{N}}\} = \{x \in P(\mathbb{Z}) \mid (\forall z \in x)(z \geq 0)\}$ → A parole. È l'insieme composta da tutte le $P(\mathbb{Z})$ contenenti solo numeri naturali

ii) $x \beta y \leftrightarrow (\exists \min x \wedge \exists \min y)$ (?)

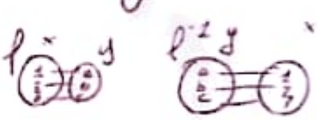
riflessiva $\exists \min x \wedge \exists \min x$ ✓
simmetria $\exists \min x \wedge \exists \min y \to \exists \min y \wedge \exists \min x$ ✓
transitività $\exists \min x \wedge \exists \min y \wedge \exists \min y \wedge \exists \min z \to \exists \min x \wedge \exists \min z$ ✓

È di equivalenza

$[\phi]_\beta = \{x \in P(\mathbb{Z}) \mid \underbrace{\phi \beta x}_{\exists \min \phi \wedge \exists \min x}\} = \phi$ → A parole: nessun altro elemento ~~espresso~~ ~~xxxx~~ appartiene a questo insieme, in quanto tutti hanno min, (ma) ϕ non ce l'ha

iii) $x \gamma y \leftrightarrow$ esiste un'applicazione biiettiva da x a y

riflessiva $f: x \to x$ IDENTITÀ ✓
simmetria $f: x \to y \to f^{-1}: y \to x$ ✓ es. $x = 1,2,3$ $y = a,b,c$



transitiva $f: x \to y \wedge g: y \to z \to h: x \to z$ ✓

È di equivalenza

$[\phi]_\gamma = \{x \in P(\mathbb{Z}) \mid \underbrace{\phi \gamma x}_{f: \phi \to x}\} = \{\phi\}$ → A parole: L'unico modo affinché abbiamo una funzione biiettiva è che $x = \phi$ ⇒ L'unico elemento dell'insieme è ϕ

iv) $x \delta y \leftrightarrow x \neq y \to x = y$

riflessiva $\underbrace{\overset{F}{x \neq x} \to x = y}_{V}$ ✓

simmetria $\overbrace{\underbrace{(\overset{V}{\underset{F}{x \neq y}} \to \overset{F}{\underset{V}{x = y}})}_{V} \to (y \neq x \to y \neq x)}^{V}$

~~xxxx~~ mi pare valga la simmetria, in quanto se $(x \neq y \to x = y)$ è vera allora $(y \neq x \to y = x)$ ~~xxxxxxx~~ è necessariamente anch'essa vera ✓

~~transitiva~~

transitività $\underbrace{(x \neq y \to \overset{a}{x = y}) \wedge (y \neq \overset{b}{z} \to y = z)}_{V} \to \underbrace{(x \neq z \to x = z)}_{\text{se } a \wedge b \text{ è vera allora anche questa è vera}} V$

è sempre vera
a è sempre vera
b è sempre vera

$[\emptyset]_S = \{x \in P(\mathbb{Z}) \mid \emptyset S x\} = \{x \in P(\mathbb{Z}) \mid x = \emptyset\} = \{\emptyset\}$ (?)

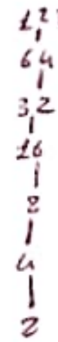
$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\emptyset \neq x}_{F} \to \underbrace{\emptyset = x}_{V}}_{V}}_{V} \quad F$

F

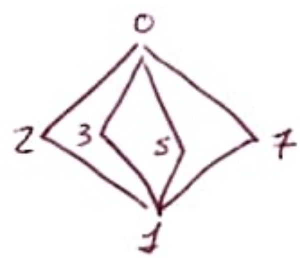
{se $x \neq \emptyset$ è
{falso

Esercizio 3

è un reticolo
Non è un sottoreticolo di $(\mathbb{N}, |)$

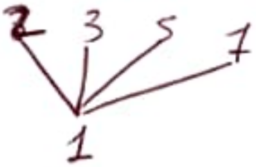


è un reticolo
È un sottoreticolo di $(\mathbb{N}, |)$



è un reticolo
No sottoreticolo

$\nexists$ X



non è un reticolo

Esercizio 4

$f * g : n \in \mathbb{Z} \to f(n) + g(n) + 1 \in \mathbb{Z}$

commutatività: $(\forall f, g \in S)(f * g = g * f)$

è commutativa ✓

$(n \in \mathbb{Z} \to f(n) + g(n) + 1 = n \in \mathbb{Z} \to g(n) + f(n) + 1)$

associativa. $(\forall f, g, h \in S)(f * (g * h) = (f * g) * h)$

$f * (g * h) = f * (n \in \mathbb{Z} \to g(n) + h(n) + 1) = n \in \mathbb{Z} \to f(n) + g(n) + h(n) + 2$

$(f * g) * h = (n \in \mathbb{Z} \to f(n) + g(n) + 1) * h = n \in \mathbb{Z} \to f(n) + g(n) + 1 + h(n) + 1$

è associativa V

Esercizio 5

$f_m = x^5 + 4x^4 - 4x - 2 \in \mathbb{Z}_m[x]$

i) È irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e per vederlo applico Eisenstein per $p = 2$

$2 \mid a_1 \dots a_{m-1}$

$2 \nmid a_n$ $\Rightarrow$ f_m è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$

$2^2 \nmid a_1$

ii) $2f \to$ (?) Non so, ~~[illegible]~~ Poiché $2x^5 + 8x^4 - 8x - 2$ lo posso scrivere come $2(x^5 + 4x^4 - 4x - 2)$ direi che è anch'esso irriducibile ma boh

iii) Poiché $f(3)$ è multiplo di 7 $\to$ $x - 3 \mid f$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 4x^4 - 4x - 2 & x - 3 \\ \hline -x^5 + 3x^4 & x^4 - 4 \\ \hline // \quad // \quad -4x - 2 & \\ \quad\quad 4x - 5 & \\ \hline \quad\quad\quad -7 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

✓

$f_7 = (x-3)(x^4 - 4)$

$\downarrow$

$(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

$$\boxed{f_7 = (x-3)(x^2-2)(x^2+2)}$$

iv) Non ho idea di come farlo sicuramente per $h = 1$ vale poi boh

v) Poiché siamo in $\mathbb{Z}_{47}$ che è un campo poiché 47 è primo $\Rightarrow$ tutti gli elementi sono invertibili $\Rightarrow$ prendo qualsiasi g

es $g = x + 5 \to g(0) = 5$ ✓

Parti chiuse

$n \in \mathbb{Z} \to f(n) + g(n) + 1 \in \mathbb{Z}$

se f e g sono iniettive ~~f~~ le funzioni iniettive sono parte chiusa? NO

se prendiamo 2 funzioni iniettive
il risultato NON è una funzione iniettiva MA costante, in quanto

$f * g : n \in \mathbb{Z} \to \underbrace{f(n) + g(n) + 1}_{k} \in \mathbb{Z}$

con f e g iniettive

preso $n \in \mathbb{Z}$ allora tale valore è un valore costante

=> le funzioni iniettive non sono una parte chiusa
le funzioni suriettive non sono parte chiuse (per lo stesso motivo)
le funzioni costanti sono parti chiuse

Neutro

$(\forall f, u \in \mathbb{Z})(f * u = f) \leftrightarrow f(n) + u(n) + 1 = f(n)$

$u(n) = -1$

=> il neutro è quella funzione costante che ad ogni n associa -1, cioè $u : n \in \mathbb{Z} \to -1 \in \mathbb{Z}$ è la funzione neutra

c è simmetrico

$c : n \in \mathbb{Z} \to 3 \in \mathbb{Z}$

$(\exists d \in \mathbb{Z})(n \in \mathbb{Z} \to \underbrace{c(n)}_{3} + d(n) + 1 = -1)$

$d(n) = -1 - 4 \quad d(n) = -5$

PROVA $3 - 5 + 1 = -1$ ✓

c è simmetrizzabile e la funzione simmetrica è $d : n \in \mathbb{Z} \to -5 \in \mathbb{Z}$

Secondo me tutti gli elementi sono simmetrizzabili
=> è un gruppo abeliano