CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 GIUGNO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. (*i*) È vero che vale la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto alla differenza simmetrica? Se sì, dimostrarlo; se no, fornire un controesempio.

(*ii*) È vero che vale la proprietà distributiva dell'unione rispetto alla differenza simmetrica? Se sì, dimostrarlo; se no, fornire un controesempio.

(*iii*) Sia S un insieme e sia definita la seguente operazione binaria interna su $\mathcal{P}(S)$

$$\overline{\Delta} : (a, b) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \mapsto (a \cap b) \cup \big((S \smallsetminus a) \cap (S \smallsetminus b)\big) \in \mathcal{P}(S).$$

Dare la definizione di anello booleano e stabilire se la terna $(\mathcal{P}(S), \overline{\Delta}, \cup)$ è o meno un anello booleano.

(*iv*) $(\mathcal{P}(S), \cap, \Delta)$ è un anello booleano? Se sì, a partire da questo, costruire un'algebra di Boole dopo averne dato la definizione.

Esercizio 2. Sia $T = \mathbb{N} \smallsetminus \{0, 1\}$ e si consideri l'applicazione $f: T \to \mathbb{N}$ che ad ogni $a \in T$ associa il massimo degli esponenti nella decomposizione di a come prodotto di primi distinti, cioè il numero $f(a)$ così definito: scritto a come $\prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$, dove $t \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ sono interi primi positivi a due a due distinti e $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, poniamo $f(a) = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t\}$.

(*i*) Determinare $\overleftarrow{f}(\{0\})$, $\overleftarrow{f}(\{3\})$, $\overrightarrow{f}(\{3\})$;

(*ii*) f è iniettiva? f è suriettiva? f è biettiva?

Si consideri la relazione d'ordine σ definita in T da:

$$\forall a, b \in T \ \big(a \,\sigma\, b \iff (a = b \vee f(a) < f(b))\big).$$

(*iii*) Determinare eventuali minimo, massimo, elementi minimali e massimali in (T, σ);

(*iv*) determinare, se esistono, minoranti ed estremo inferiore in (T, σ) di ciascuno degli insiemi $R = \{8\}$, $S = \{54\}$ e $U = \{8, 54\}$;

(*v*) posto $L = \{12, 16, 18, 70, 243, 10000\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (L, σ) e decidere se (L, σ) e $(L \smallsetminus \{12\}, \sigma)$ sono o non sono reticoli.

Esercizio 3. In $\mathbb{Z}_{10}$, si consideri l'operazione binaria $*$ definita da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{10}$ $(a * b = \bar{5}ab + a + b)$. Dando per noto che $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ è un semigruppo commutativo,

(*i*) $(\mathbb{Z}_{10}, *)$ ha elemento neutro?

(*ii*) Determinare, se ne esistono, tutti gli elementi b di $\mathbb{Z}_{10}$ tali che $\bar{3} * b = \bar{5}$.

(*iii*) Determinare gli elementi idempotenti in $(\mathbb{Z}_{10}, *)$.

Esercizio 4. Dopo aver calcolato i quadrati degli elementi di $\mathbb{Z}_{11}$,

(*i*) determinare gli insiemi $A = \{a \in \mathbb{Z}_{11} \mid x^2 - a \text{ è irriducibile in } \mathbb{Z}_{11}[x]\}$ e
$B = \{b \in \mathbb{Z}_{11} \mid x^2 - b \text{ è riducibile in } \mathbb{Z}_{11}[x]\}$;

(*ii*) determinare le coppie di elementi $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ tali che, in $\mathbb{Z}_{11}[x]$, il polinomio $g_{a,b} = (x^2 - a)(x^2 - b)$ ...
- (a) ... sia irriducibile;
- (b) ... sia riducibile;
- (c) ... sia il prodotto di un polinomio di primo grado per uno di terzo grado;
- (d) ... sia il prodotto di quattro polinomi di primo grado;

(*iii*) decomporre il polinomio $x^4 - \bar{7}x^2 - \bar{1}$ nel prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

Esercizio 5. Sia E l'insieme delle relazioni di equivalenza in $\mathbb{N}$. Vero o falso (e, come sempre, perché?):

(*i*) $\forall \alpha \in E \big(\forall n \in \mathbb{N}\, (\exists c \in (\mathbb{N}/\alpha)(n \in c))\big)$.

(*ii*) $\forall \alpha \in E \big(\forall c \in (\mathbb{N}/\alpha)\, (\exists n \in \mathbb{N}(n \in c))\big)$.

(*iii*) $\forall \alpha \in E \big(\forall n \in \mathbb{N}\, (\exists! c \in (\mathbb{N}/\alpha)(n \in c))\big)$.

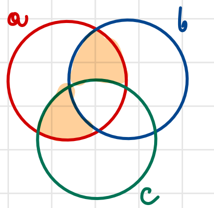
(*iv*) $\forall \alpha \in E \big(\forall c \in (\mathbb{N}/\alpha)\, (\exists! n \in \mathbb{N}(n \in c))\big)$.

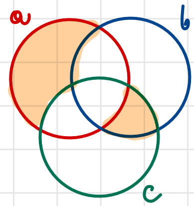
(*v*) $\forall \alpha, \beta \in E \big(\exists c \in (\mathbb{N}/\alpha)\, ((\exists d \in (\mathbb{N}/\beta)\, (c \cap d \neq \varnothing))\big)$.

Esercizio 1

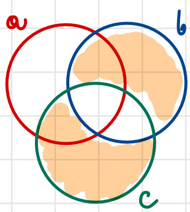
i) Distrib. $\cap$ rispetto alla Δ NO

$a \cap (b \Delta c)$ $\neq$ $(a \Delta b) \cap (a \Delta c)$

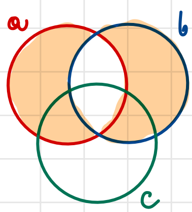




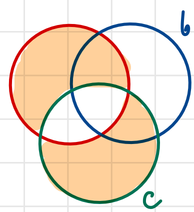
$b \Delta c$



$a \Delta b$

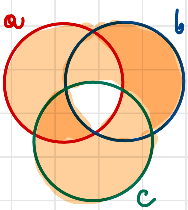


$a \Delta c$

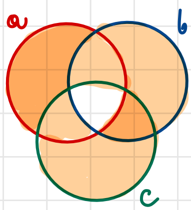


ii) Dist $\cup$ rispetto a Δ SI

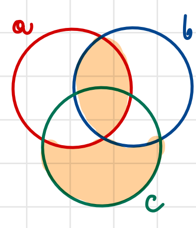
$a \cup (b \Delta c)$



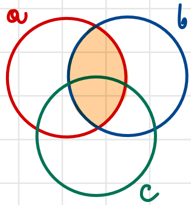
$(a \Delta b) \cup (a \Delta c)$



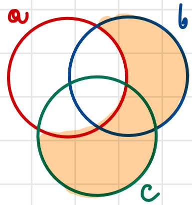
iii) $\bar{\Delta} : (a,b) \in P(S) \times P(S) \mapsto (a \cap b) \cup ((S \setminus a) \cap (S \setminus b)) \in P(S)$



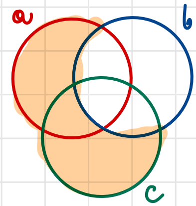
$a \cap b$



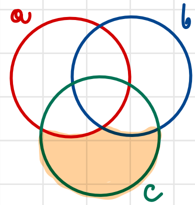
$(S \setminus a)$



$(S \setminus b)$



$(S \setminus a) \cap (S \setminus b)$



ANELLO BOOL $(A, +, \cdot)$

$(P(S), \bar{\Delta}, \cap)$ TUTTI GLI ELEMENTI COMUNI + $S \setminus a, b$

Un anello unitario, è booleano se e solo se $x^2 = x$ e $x = -x$

$(P(S), \bar{\Delta})$ è G.A?

ASSOCIATIVA? SI

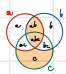
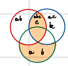
$S = \{a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$

$A = \{a, ab, ac, abc\}$

$B = \{b, ab, bc, abc\}$

$C = \{c, ac, bc, abc\}$

$(a \bar{\Delta} b) \bar{\Delta} c = a \bar{\Delta} (b \bar{\Delta} c)$

$a \bar{\Delta} b = \{ab, abc, c\}$  $(a \bar{\Delta} b) \bar{\Delta} c = \{a, b, c, abc\}$ 

$(b \bar{\Delta} c) = \{ac, abc, b\}$ $a \bar{\Delta} (b \bar{\Delta} c) = \{a, b, c, abc\}$

COMMUTATIVA? SI

ELEMENTO NEUTRO? SI

$\forall x \in S$

$x^2 = x \Rightarrow x \cap x = x$

$\forall a, b \in S \left(\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}\right)$

$x + x = 0$

$x \bar{\Delta} x = S \Rightarrow x = S \Delta x = (S \setminus x) \cup (\cancel{x \setminus S}^{\emptyset}) = S \setminus x$

iv) $(P(S), \cap, \Delta)$

Anello Bool: NO

$x^2 = x \Rightarrow x \Delta x = \emptyset$

Esercizio 2

$T = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ $\qquad f: T \to \mathbb{N}$

i) $\overleftarrow{f}(\{0\}) = \emptyset$, 0 non è immagine di nessun elemento di T

$\overleftarrow{f}(\{3\}) = \{8, 18, \dots\}$

$\overrightarrow{f}(\{3\}) = \{1\}$

ii) INIETTIVA: FALSO

$\forall x, y \in T (f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y)$ $\qquad f(18) = 3 \qquad f(9) = 3$

SURRIETTIVA: FALSO

$\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in T (f(x) = y)$ $\qquad$ 0 non è immagine di nessun elemento di T

BIETTIVA: FALSO

$\forall a, b \in T (a \sigma b \Leftrightarrow (a = b \vee f(a) < f(b)))$

iii) Minimali: tutti i numeri primi ed i prodotti tra primi distinti

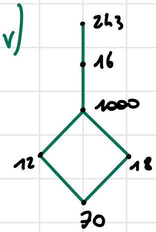
Massimali: non ci sono

Min: non c'è

Max: non c'è

iv) $R = \{8\}$ $\qquad S = \{54\}$ $\qquad$ tutto 8/54

$U = \{8, 54\}$ $\qquad$ minoranti: $\{8, 54\}$ $\qquad$ est. inf: non c'è

v) 

(L, σ) è un reticolo

$(L \setminus \{12\}, \sigma)$ è un reticolo

$L = \{12, 16, 18, 70, 243, 1000\}$

$\quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad 3$

ESERCIZIO 3

$a * b = 5ab + a + b \qquad \mathbb{Z}_{10}$

i) NEUTRO: 0

$a * b = a \Rightarrow 5ab + a + b = a$

ii) $5 \cdot 3 \cdot b + 3 + b = 5$

$15b + b = 5 - 3$

$6b \equiv_{10} 2$

$3b \equiv_5 1 \qquad MCD(6, 10) = 2$

$3b \equiv_5 1$

$5 = 3 \cdot 1 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$1 = 3 + 2(-1) =$

$= 3 + (5 + 3(-1))(-1) =$

$= 3 + 5(-1) + 3 =$

$= 3(2) + 5(-1)$

$2 \cdot 3b \equiv_5 1 \cdot 2$

$b \equiv_5 2$

iii) $a * a \equiv a \quad = \quad 5a^2 + a + a \equiv a$

$5a^2 + a \equiv 0 \quad = \quad a(5a + 1) \equiv 0$

1) $a \equiv 0$

2) $5a + 1 \equiv 0 \quad = \quad 5a \equiv_{10} -1 \quad = \quad 5a \equiv_{10} 9$

$MCD(5, 10) = 5 \qquad 5 \nmid 9$, non ha soluzioni