CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
16 GENNAIO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Dimostrare la tautologia della negazione dell'implicazione e utilizzarla per negare la formula $\exists x(\forall y(f(x,y) \to g(x,y)))$.

Esercizio 2. Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$. Detti T l'insieme delle applicazioni da A ad A ed S l'insieme delle applicazioni da B ad A, sia poi $r\colon T \to S$ l'applicazione che ad ogni $f \in T$ associa la restrizione di f a B, cioè l'applicazione $x \in B \mapsto f(x) \in A$.

- (i) Esprimere (non calcolare) $|T|$ ed $|S|$.
- (ii) Vero o falso? Per ogni $f \in T$:
  - (a) f è iniettiva $\Rightarrow r(f)$ è iniettiva;
  - (b) f è suriettiva $\Rightarrow r(f)$ è suriettiva.
- (iii) r è iniettiva? r è suriettiva?

Sia ora $\mathcal{R}$ il nucleo di equivalenza di r, e sia h l'applicazione costante $x \in A \mapsto 3 \in A$.

- (iv) Descrivere $[h]_{\mathcal{R}}$, calcolare $|[h]_{\mathcal{R}}|$ e $|T/\mathcal{R}|$.

Esercizio 3. Si consideri la relazione d'ordine ρ in $\mathbb{Z}$ definita da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \;\rho\; b \iff \big(a = b \vee \operatorname{rest}(a,9) \text{ è un divisore proprio di } \operatorname{rest}(b,9)\big).$$[1]

- (i) Determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{Z}, \rho)$;
- (ii) sempre in $(\mathbb{Z}, \rho)$, determinare l'insieme dei minoranti di $\{127, 721\}$ e stabilire quindi se esiste $\inf\{127, 721\}$;
- (iii) $(\mathbb{Z}, \rho)$ è un reticolo?
- (iv) Determinare una catena (cioè un sottoinsieme totalmente ordinato) massimale (rispetto all'inclusione) in $(\mathbb{Z}, \rho)$.
- (v) Posto $L = \{-90, -15, -3, 7, 15, 94, 100\}$, disegnare un diagramma di Hasse di (L, ρ). Questo insieme ordinato è un reticolo? Nel caso lo sia, è complementato? È distributivo?

Esercizio 4. Sia $*$ l'operazione binaria in $\mathbb{Z}_{16}$ definita da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{16}(a * b = \overline{3}ab)$.

- (i) Che tipo di struttura risulta essere $(\mathbb{Z}_{16}, *)$? Determinarne l'eventuale elemento neutro e, se le domande hanno senso, gli elementi simmetrizzabili ed il simmetrico di $\overline{1}$.
- (ii) Sia $H = \{\overline{7}, \overline{11}\} \subseteq \mathbb{Z}_{16}$. Decidere se H è una parte chiusa in $(\mathbb{Z}_{16}, *)$ e, se lo è, descrivere la struttura $(H, *)$.
- (iii) Dando per noto che $(\mathbb{Z}_{16}, +, *)$ è un anello (dove $+$ è l'ordinaria addizione in $\mathbb{Z}_{16}$), determinare i suoi divisori dello zero.

Esercizio 5. Dare la definizione di circuito euleriano e determinare tutti e soli i numeri interi positivi n tali che il grafo completo K_n su n vertici possieda circuiti euleriani.

Esercizio 6. Sia $f = 5x^4 + 10x^2 + 4x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n = \overline{5}x^4 + \overline{10}x^2 + \overline{4}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_n[x]$.

- (i) Stabilire se f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e se f_1 è irriducibile in $\mathbb{Z}_1[x]$.
- (ii) Trovare il polinomio monico associato a f_5 in $\mathbb{Z}_5[x]$ e, se possibile, il polinomio monico associato a f_{32} in $\mathbb{Z}_{32}[x]$.
- (iii) Per quali numeri naturali $n < 10$ il polinomio f_n è cancellabile in $\mathbb{Z}_n[x]$?

[1] per ogni intero a, $\operatorname{rest}(a,9)$ significa $a \bmod 9$, ovvero $a \,\%\, 9$.

Es 1

$\neg(p \Rightarrow q) \iff p \wedge (\neg Q)$

$\neg$	p	$\Rightarrow$	q	p	$\wedge$	$\neg Q$
F	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V

$\exists_x \left(\forall_y \left(f(x,y) \to g(x,y) \right)\right)$

$\forall x \left(\exists y \left(f(x,y) \wedge \neg g(x,y) \right)\right)$

Es 2

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n < 10 \}$ $\quad |A| = 10$

$B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n < 9 \}$ $\quad |B| = 9$

$T = \{ \text{Applicazioni } A \to A \}$ $\quad |T| = 10^{10}$

$S = \{ \text{Applicazioni } B \to A \}$ $\quad |S| = 10^{9}$

$r : T \to S$ dove $\forall f \in T$ associa la restrizione f a B, cioè $x \in B \mapsto f(x) \in A$

i) $|T| = 10^{10}$ $\quad |S| = 10^{9}$

ii) a: Sì, perchè se f è iniettiva tutti gli elementi del dominio hanno immagine distinta nel codominio, ridotto il dominio i restanti elementi hanno comunque immagine

b: No, perchè $|A| < |B|$, quindi degli elementi del codominio non possono avere immagine

iii) r non è iniettiva perchè $|T| > |S|$ al posto di $|T| \leq |S|$
r è suriettiva perchè $|T| > |S|$

R: nucleo equiv. di r e $h : x \in A \mapsto 3 \in A$

iv) $[h]_R$

Es 3

$a \rho b \iff (a = b \vee \text{rest}(a,9)$ è divisore proprio di $\text{rest}(b,9))$.

i) massimali : $[0]_9$ max $\nexists$

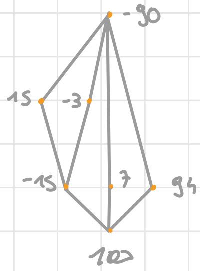
minimali : $[1]_9$ min $\nexists$

ii) 127 e 721 sono entrambi minimali e non sono in rel tra loro, quindi non esiste un inf

iii) No, perchè non esiste un inf per ogni coppia di elementi

iv) $\{1, 2, 4, 8, 0\}$

v)



$-90 = 0$ $15 = 6$

$-15 = 3$ $94 = 4$

$-3 = 6$ $100 = 1$

$7 = 7$

Es 4

$*: \forall a, b \in \mathbb{Z}_{16} (a * b = 3ab)$

i) COMMUTATIVA: SI

$\forall a, b \in \mathbb{Z}_{16} (a * b = b * a) \Rightarrow \bar{3}ab = \bar{3}ba$

ASSOCIATIVA: SI

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_{16} (a * (b * c) = (a * b) * c)$

$3a(3bc) = 3c(3ab)$

$$9abc = 9abc$$

ELEMENTO NEUTRO: $\overline{11}$

$a*b = a \Rightarrow \overline{3}ab = a \Rightarrow \overline{3}b = 1$

$\overline{3}b \equiv_{16} \overline{1}$

$\overline{11}\cdot\overline{3}b \equiv_{16} \overline{11}$

$\overline{33}b \equiv_{16} \overline{11}$

$b \equiv_{16} \overline{11}$

$MCD(3, 16) = 1$

$16 = 3\cdot 5 + 1$

$1 = 16 + 3(-5) + 1$

INVERTIBILI: NO

$\forall a \in \mathbb{Z}_{16} (\exists b \in \mathbb{Z}_{16} (\overline{3}ab = \overline{3}ba = \overline{11}))$

$a = \overline{2}$

$\overline{6}b \equiv_{16} \overline{11}$ $\quad MCD(6, 16) = 2$

$2 \nmid 11$

poichè il modulo è un numero primo, l'equazione $3ab = 11$ non può avere risultati per gli a pari

SIMMETRIZZABILI

Tutti gli $x \in \mathbb{Z}_{16}$ dispari

$\overline{3}ab \equiv_{16} \overline{11}$ $\quad a = 1$

$\overline{3}b \equiv_{16} \overline{11}$

$\overline{33}b \equiv_{16} \overline{121}$

$b \equiv_{16} \overline{9}$ $\quad$ Simmetrico di $\overline{1}$ è $\overline{9}$

È un MONOIDE COMMUTATIVO

ii) $H = \{\overline{7}, \overline{11}\} \subseteq \mathbb{Z}_{16}$

H è chiusa: No

$\overline{3}\cdot\overline{7}\cdot\overline{11} = \overline{7}$

$\overline{3}\cdot\overline{11}\cdot\overline{11} = \overline{11}$

$\overline{3}\cdot\overline{7}\cdot\overline{7} = \overline{3}$

iii) $(\mathbb{Z}_{16}, +, *)$ anello

$a \cdot b = b \cdot a = 0_+ \qquad a, b \neq 0_+$

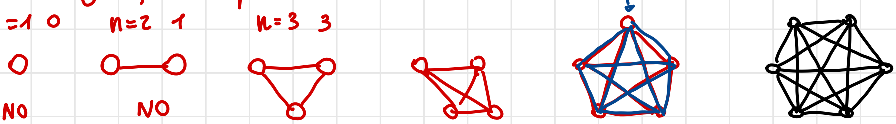
Tutti i numeri pari sono div dello zero

Es 5

Un circuito euleriano è un cammino da un vertice a se stesso che passa per tutti gli archi del grafo

K_n grafo completo $n=4$ 6 $n=5$ 10

$n=1$ 0 $n=2$ 1 $n=3$ 3



NO NO Si NO Si

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{n(n-1)}{2}$$

Es 6

i) entrambi

ii) $\mathbb{Z}_5 \quad \cancel{5x^4} + \cancel{10x^2} \underline{+ 4x + 2}$

polinomio monico associato questo x invertibile

inverso $\leftarrow$ $4(4x+2) \rightarrow x + 3$

$5x \equiv_{32} 1 \qquad x \equiv_{32} 13$

$13(5x^4 + 10x^2 + 4x + 2)$

$(x^4 + 2x^2 + 20x + 26)$