CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 LUGLIO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Determinare, laddove possibile, verità o falsità delle seguenti formule o frasi.

(*i*) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$.
(*ii*) $|\mathbb{N}| = \{\mathbb{N}\}$.
(*iii*) $\{1, 2, 3\} = \{3!\} \to \varnothing \in \varnothing$.[(‡)]
(*iv*) $\{(1, 1), (2, 1)\}$ è il grafico di un'applicazione da $\{1, 2\}$ a $\mathbb{N}$.

Esercizio 2. Sia $S = \mathbb{N} \cap [0]_3$ e sia $\chi = \chi_{\mathbb{N},S}$ la funzione caratteristica di S in $\mathbb{N}$. Si consideri poi la seguente operazione binaria $*$ definita su $\mathbb{N}$:

$$*\colon (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto a^{\chi(a)} \cdot b^{\chi(b)} \in \mathbb{N}.$$

(*i*) $*$ è un'operazione commutativa? È associativa?
(*ii*) Trovare tutti gli elementi neutri a destra o a sinistra in $(\mathbb{N}, *)$.
(*iii*) Siano $T = \mathbb{N} \cap [0]_2$ e $U = \mathbb{N} \cap [2]_3$. Dire quali tra S, T e U sono parti stabili (ovvero: chiuse) di $(\mathbb{N}, *)$. Quali di queste parti stabili costituiscono un semigruppo?

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti relazioni binarie definite in $\mathbb{N}$ dire se essa è o non è d'ordine e, nel caso lo sia, determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali ed elementi massimali nell'insieme ordinato da essa definito, decidere se questo è un reticolo ed infine disegnare il diagramma di Hasse di $S := \{1, 20, 40, 400, 10000\}$ ordinato dall'ordinamento indotto.

(*i*) α definita da: $\forall a, b \in \mathbb{N}\,(a\ \alpha\ b \iff a = b)$;
(*ii*) β definita da: $\forall a, b \in \mathbb{N}\,\big(a\ \beta\ b \iff (a = b \vee (a|b \wedge a < 10b))\big)$;
(*iii*) γ definita da: $\forall a, b \in \mathbb{N}\,\big(a\ \gamma\ b \iff (a = b \vee (a|b \wedge a > 10b))\big)$;
(*iv*) δ definita da: $\forall a, b \in \mathbb{N}\,\big(a\ \delta\ b \iff (a = b$ oppure a non divide $b)\big)$.

Esercizio 4. Disegnare, se possibile, un grafo connesso $G = (V, L)$ tale che $|V| = 16$ e $|L| = 10$, oppure spiegare perché un tale grafo non esiste.

Esercizio 5. Determinare l'insieme A dei numeri interi n tali che $111n$ sia congruo a 11 o a 12 modulo 126. Quanti elementi ha $\{a \in A \mid 0 < a \leq 84\}$?

Esercizio 6. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sia $\overline{n}$ la classe di resto di n modulo 5.

(*i*) Sia S l'insieme dei polinomi $f \in \mathbb{Z}_5$ di grado 4 tali che $f(\overline{1}) = \overline{0}$. Quanti elementi possiede S?
(*ii*) S è una parte chiusa di $(\mathbb{Z}_5[x], +)$? Nel caso, $(S, +)$ è un gruppo abeliano (ovvero commutativo)?

Sia $\varphi\colon f \in S \mapsto f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_5$ la restrizione ad S dell'omomorfismo di sostituzione relativo a $\overline{1}$ e sia $\sim_\varphi$ il nucleo di equivalenza di φ.

(*iii*) φ è iniettiva? È suriettiva?
(*iv*) Quanti elementi possiede $S/{\sim_\varphi}$?

[(‡)]qui '$\to$' indica il connettivo di implicazione.

LUGLIO 2023

Esercizio 1

i) Falso
ii) Falso
iii) Vero
iv) Vero

Esercizio 2

$S = \mathbb{N} \cap [0]_3$: multipli di 3 = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30...

$$\chi : x \in \mathbb{N} \to \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

$$* : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto a^{\chi(a)} \cdot b^{\chi(b)} \in \mathbb{N}$$

i)

• commutatività: $(\forall x, y \in \mathbb{N})(x * y = y * x)$

$x * y = x^{\chi(x)} \cdot y^{\chi(y)}$ → per la commutatività di · vale la commutatività in $*$
$y * x = y^{\chi(y)} \cdot x^{\chi(x)}$

• associatività: $(\forall x, y, z \in \mathbb{N})(x * (y * z) = (x * y) * z)$

$x * (y * z) = x * (y^{\chi(y)} \cdot z^{\chi(z)}) = x^{\chi(x)} \cdot y^{\chi(y)} \cdot z^{\chi(z)}$
$(x * y) * z = (x^{\chi(x)} \cdot y^{\chi(y)}) * z = x^{\chi(x)} \cdot y^{\chi(y)} \cdot z^{\chi(z)}$

è ~~commutativa~~ associativa

$\chi'(x)$

x

x

$\chi(x)=1$
$\chi(u)=0$

ii) Neutro
$(\forall x, u \in \mathbb{N})(x * u = x)$

$x^{\chi(x)} \cdot u^{\chi(u)} = x \quad \leftrightarrow \quad \chi(x)=1 \to x^1=x \;\wedge\; \chi(u)=0 \to u^0=1$

$x \cdot 1 = x$

$u=1$ neutro
esempio $x=3$

$3^{\chi(3)} \cdot 1^{\chi(1)} = 3^1 \cdot 1^0 = 3$ ✓

iii) $T = \mathbb{N} \cap [0]_2$ = multipli di 2 = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20....
$U = \mathbb{N} \cap [2]_3$ = 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32...
$S = \mathbb{N} \cap [0]_3$ = multipli di 3 = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30...

Prova con S
S è una parte stabile, in quanto se prendo 2 elementi che appartengono ad S (x e y) allora vuol dire che $\chi(x)$ e $\chi(y)=1$ dunque ottengo $x \cdot y$, ma se moltiplico 2 numeri ~~multi~~ ~~multi~~ di S ottengo ancora un numero appartenente ad S
S PARTE CHIUSA

Prova con T
T non è una parte chiusa, in quanto ~~se prendi~~ dobbiamo fare queste differenze.
Noi sappiamo che $\chi_{\mathbb{N},S}$ $x \in \mathbb{N} \to \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$
- Se prendiamo 2 numeri che stanno in T ma stanno anche in S otteniamo che è ancora a T es. $6^{\chi(6)} \cdot 6^{\chi(6)} = 36$ ✓
- Se prendiamo un numero ~~che~~ 2 numeri che appartengono a T ma uno appartiene ad S e l'altro no ok $2^{\chi(2)} \cdot 6^{\chi(6)} = 1 \cdot 6$ ✓

(14A) Se prendiamo 2 numeri che stanno in T, ma non in S, ~~otteniamo~~ il risultato non appartiene a T

$2^{\chi(2)} \cdot 4^{\chi(4)} = 1 \cdot 1 = 1 \notin T$

T non è parte chiusa

Provo con ~~U~~ U

Nemmeno U è parte chiusa in quanto U non possiede elementi che stanno anche in S => $\chi(x)$ sono sempre 0 otteniamo quindi sempre $1 \cdot 1 = 1 \notin U$

U non è parte chiusa

Vediamo se S è un semigruppo

$(\forall x, y, z \in S) \mid (x * (y * z) = (x * y) * z)$ si ✓

es. 3, 6, 9

$3^{\chi(3)} \cdot 6^{\chi(6)} \cdot 9^{\chi(9)} = 3^{\chi(3)} \cdot 6^{\chi(6)} \cdot 9^{\chi(9)}$ ✓

Esercizio 3 Luglio (DA RIFARE)

i) $\forall a,b \in \mathbb{N} \quad (a \alpha b \leftrightarrow a = b)$

è d'ordine:

asimmetria: $(\forall a,b \in \mathbb{N})(a \alpha b \wedge b \alpha a \rightarrow a = b)$ ✓

$a = b \wedge b = a \rightarrow a = b$

transitività: $(\forall a,b,c \in \mathbb{N})(a \alpha b \wedge b \alpha c \rightarrow a \alpha c)$ ✓

$a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$

è una relazione d'ordine

min = No   max = No   infiniti minimali e massimali

riflessività: $(\forall a \in \mathbb{N})(a \alpha a)$ $a = a$ ✓

Ogni elemento è in relazione solo con sé stesso => NON è un reticolo

$\cdot 1 \quad \cdot 20 \quad \cdot 40 \quad \cdot 400 \quad \cdot 10000$

ii) $\forall a,b \in \mathbb{N} \quad (a \beta b \leftrightarrow a = b \vee (a | b \wedge a < 10b))$

è d'ordine

asimmetria: $(\forall a,b \in \mathbb{N})(a \beta b \wedge b \beta a \rightarrow a = b)$ ✓

$\underbrace{(a=b) \vee (a|b \wedge a < 10b) \wedge (b=a) \vee (b|a \wedge b < 10a)}$

$\rightarrow a = b$

transitività: $(\forall a,b,c \in \mathbb{N})(a \beta b \wedge b \beta c \rightarrow a \beta c)$ ✓

2 4 8 $\quad (a|b \wedge a < 10b) \wedge (b|c \wedge b < 10c) \rightarrow (a|c \wedge a < 10c)$

è una relazione d'ordine

min: 1 max: $\nexists$ infiniti massimali

$m \to \forall x \; m \beta x$ $M \to \forall x \; x \beta M$

$m \mid x \wedge m < 10x$ $x \mid M \wedge x < 10M$

riflessività $(\forall a, a\beta a)$ $a = a \vee a \mid a \wedge a < 10a$ ✓

NON

è un reticolo no max

10,000
|
400
|
40
|
20
|
1

iii) $\forall a,b \in \mathbb{N} \; (a\gamma b \leftrightarrow a = b \vee (a \mid b \wedge a > 10b))$

è d'ordine

asimmetria: $(\forall a,b \in \mathbb{N})(a\gamma b \wedge b \gamma a \to a = b)$ ✓

$(a \mid b \wedge a > 10b) \wedge (b \mid a \wedge b > 10a) \to a = b$

transitività: $(\forall a,b,c \in \mathbb{N})(a\gamma b \wedge b\gamma c \to a \gamma c)$

2 4 8 $\underbrace{\underbrace{(a \mid b \wedge a > 10b)}_{F} \wedge \underbrace{(b \mid c \wedge b > 10c)}_{F}}_{F} \to (a \mid c \wedge a > 10c$

$b = a \cdot k$

Non è d'ordine

iv) $\forall a,b \in \mathbb{N} \; (a \delta b \leftrightarrow (a = b \vee a \not\gamma b))$

è d'ordine

asimmetria $(\forall a,b \in \mathbb{N})(a\delta b \wedge b \delta a \to a = b)$

5, 6 $5 \not\gamma 6$ $6 \not\gamma 5$ $\underbrace{\underbrace{a \not\gamma b \wedge b \not\gamma a}_{V} \to \underbrace{a = b}_{F}}_{V}$

Non è d'ordine

Esercizio 4 $|V| = 16$ $|E| = 10$

grafo connesso = albero $|E| = |V| - 1$

NON si può disegnare $|E| = 16 - 1 = 15$

Esercizio 5 (DA RIFARE)

$A = \{ m \in \mathbb{Z} \mid 111m \equiv_{126} 11 \land 111m \equiv_{126} 12 \}$

$111m \equiv_{126} 11$

$126 = 111 \cdot 1 + 15$

$111 = 15 \cdot 7 + 6$

$15 = 6 \cdot 2 + 3$

$6 = 3 \cdot 2 + 0$

$MCD(111, 126) = 3$

$3 \nmid 11$

NO SOLUZIONI

$111m \equiv_{126} 12 \to 37m \equiv_{42} 4$

$42 = 37 \cdot 1 + 5$

$37 = 5 \cdot 7 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

1 = MCD $\quad 1 \mid 4$ ✓

$1 = 5 + 2(-2)$

$2 = 37 + 5(-7)$

$5 = 42 + 37(-1)$

$\to 1 = 5 + (37 + 5(-7))(-2)$

$1 = 5 + 37(-2) + 5(14) \to$

$1 = 5(15) + 37(-2)$

$1 = (42 + 37(-1))(15) + 37(-2)$

$1 = 42(15) + 37(-15) + 37(-2)$

$1 = 42(15) + 37(-17)$

$-17 + 42 = 25$

$37 \cdot 25 m \equiv_{42} 4 \cdot 25$

$m \equiv_{42} 100 = 16$

$A = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv_{42} 16 \}$

$m \equiv_{42} 16$

$m = 42k + 16$ SOLUZIONI $= \{ \ldots -26, 16, 58, 100 \ldots \}$

[?] perché $42 \mid m - 16 \to m - 16 = 42k$

$m = 42k + 16$

$|\{ a \in A \mid 0 < a \leq 84 \}| = |\{16, 58\}| = 2$

① Esercizio 6 DA RIFARE

$n \in \mathbb{Z}$ $\qquad [n]_5$

i) $S = \{ f \in \mathbb{Z}_5 \mid \delta(f) = 4 \wedge f(1) = \bar{0} \}$ $\qquad |S|$?

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$

$x^4 \pm x^3 \pm x^2 \pm x \pm 4$

$f = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$f(1) = a_4 \cdot 1^4 + a_3 \cdot 1^3 + a_2 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$

$f(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$

Ogni coeff ha 5 scelte. Sono 5 coefficienti

$\Rightarrow |S| = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

ii) S è parte chiusa di $(\mathbb{Z}_5[x], +)$? BOH

- è suriettiva
- no iniettiva
- $|S/\sim_f| = |\mathbb{Z}_5|$