CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
15 LUGLIO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Sia $A = \mathcal{P}_2(\mathbb{Z})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{Z}$ di cardinalità 2. Sia σ la relazione d'ordine definita da: $\forall a, b \in A$

$$a \;\sigma\; b \iff \big(a = b \vee \forall x \in a (\forall y \in b \; (x \text{ divide } y))\big).$$

Sia $B = \{\{0, 12\}, \{0, 16\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}\}$

- (i) Disegnare un diagramma di Hasse di (B, σ). Stabilire se (B, σ) è un reticolo e, nel caso, se è distributivo, complementato, booleano.
- (ii) Determinare un sottoinsieme C di B della cardinalità massima possibile tale che (C, σ) sia un reticolo complementato.
- (iii) Determinare in (A, σ) i minoranti di $\{\{1, 4\}\}$ e, se esistono, $\inf\{\{1, 4\}, \{1, 6\}\}$ e $\sup\{\{1, 4\}, \{1, 6\}\}$.
- (iv) Determinare, se ne esistono, gli elementi minimali, massimali, minimo, massimo in (A, σ).
- (v) Esiste $a \in A$ tale che $(B \cup \{a\}, \sigma)$ sia un reticolo?

Esercizio 2. Stabilire per quali $c \in \{1, 3, 20, 24, 55, 60\}$ l'equazione congruenziale $470x \equiv_{350} 3c$ ha soluzioni in $\mathbb{Z}$ e, per ciascun tale c, fornire l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 3. Sia S un insieme tale che $|S| = 13$ e sia h un suo elemento. Indicare (ma non calcolare): (a) il numero delle parti di S di cardinalità 8; (b) il numero delle parti di S di cardinalità 18; (c) il numero delle parti T di S tali che $|T| = 7$ e $h \in T$; (d) il numero delle relazioni binarie in S.

Esercizio 4. Per ciascuno degli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_3$ si consideri l'operazione binaria (che indichiamo sempre con lo stesso simbolo) $*$ definita da: per ogni a, b appartenenti all'insieme, $a * b = 3a + b$. Che tipo di strutture algebriche (semigruppi, monoidi, gruppi; commutativi o no?) sono $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Z}_6, *)$ e $(\mathbb{Z}_3, *)$? In ciascuna di esse determinare gli eventuali elementi neutri a sinistra o a destra.

Esercizio 5. Siano $S = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ed $f \colon S \to S$ l'applicazione che ad ogni $n \in S$ associa la somma $\sum_{n \geq p \in \mathbb{P}} p$ dei numeri interi positivi primi minori o uguali a n (ad esempio, $f(4) = 2 + 3 = 5$). Sia poi $\Re$ il nucleo di equivalenza di f.

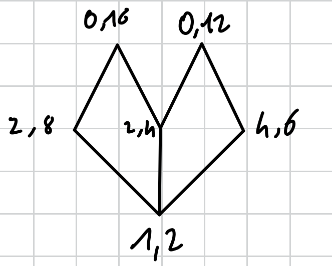
- (i) Determinare $\overleftarrow{f}(\{10\})$ e $\overleftarrow{f}(\{11\})$.
- (ii) f è iniettiva? f è suriettiva? f è biettiva?
- (iii) Elencare gli elementi di $[8]_{\Re}$.
- (iv) $|S/\Re|$ è finito o infinito?
- (v) Esiste $a \in S$ tale che $a \notin [a]_{\Re}$?
- (vi) Posto $T = \{n \in S \mid 10 \leq n \leq 20\}$, detta $\Re_T$ la relazione di equivalenza indotta da $\Re$ su T, descrivere esplicitamente le classi appartenenti a $T/\Re_T$, elencandone gli elementi. Quanto vale $|T/\Re_T|$?

Esercizio 6.

- (i) Quali tra queste affermazioni sono vere, e quali no, per tutte le possibili scelte di un anello commutativo unitario A, di $f \in A[x]$ e di due elementi distinti a e b di A:
  - (a) se a e b sono radici di f, allora $(x - a)$ e $(x - b)$ dividono f in $A[x]$;
  - (b) se a e b sono radici di f, allora $(x - a)(x - b)$ divide f in $A[x]$;
  - (c) se A è un campo e a e b sono radici di f, allora $(x - a)(x - b)$ divide f in $A[x]$.
- (ii) Esistono un anello commutativo unitario A ed un polinomio di grado 2 in $A[x]$ tali che f abbia infinite radici in A?
- (iii) Sia $f \in \mathbb{Z}_{13}[x]$. Supponiamo $f = pqr$ dove p, q ed r sono polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_{13}[x]$, p e q hanno grado 1 e r ha grado 4. Allora, in $\mathbb{Z}_{13}[x]$,
  - (a) quanti divisori monici di grado 3 ha f?
  - (b) quanti divisori monici di grado 2 ha f?
  - (c) assumendo p e q non associati tra loro, quanti divisori, monici o non monici, di grado 5 ha f?

Es 1

i)



iii) minor $(\{1,4\}) = \{\{1,-1\},\{1,4\}\}$

inf $(\{1,4\},\{1,6\}) = \{1,-1\}$

sup $(\{1,4\},\{1,6\}) = \{12,-12\}$

iv) massimal: $\{\{0,n\} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

v) non esiste

Es 2

$470x \equiv_{350} 3c$

$120x \equiv_{350} 3c$

$10 \mid 3c \iff 10 \mid c \longleftrightarrow \{20, 60\}$

$c = 20$

$12x \equiv_{35} 6$

$x \equiv_{35} 3 \cdot 12x \equiv_{35} 18$

$\binom{13}{8}$

Es 3

0

$\binom{12}{6}$

$2^{(13^2)}$

Es 4

i) nessuna struttura, neutro a sx : $\overline{0}$

ii) semigruppo, neutro a sx : $\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}$

iii) semigruppo, neutro a sx : $\mathbb{Z}_3$

Es 5

$\overleftarrow{f}(\{10\}) = \{5, 6\}$

$\overleftarrow{f}(\{11\}) = \emptyset$

$[8]_R = \{7, 8, 9, 10\}$

$T/R_T = \{\{10\}, \{11, 12\}, \{13, 14, 15, 16\}, \{17, 18\}, \{19, 20\}\}$

$|T/R_T| = 5$

Es 6

$a \neq b \in A$ radici di $f \rightarrow (x-a)(x-b) / f$

$[2]_6 x$

$(x - [0]_6)(x - [3]_6)$

$(A, +, \cdot) = (P(\mathbb{N}), \Delta, \cap)$ $\qquad x^2 - x \in A[x]$

$f = \overset{2}{p}\,\overset{1}{q}\,\overset{4}{r} \in \mathbb{Z}_{13}[x]$: non può essere un polinomio di grado 3

: perchè K è un campo : divisori monici è unico

$12 + 12$