CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
11 OTTOBRE 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Scrivere una negazione della formula $\exists x\big((p \vee q) \to (\forall y(r \to s))\big)$ che non cominci col simbolo di negazione né con una parentesi ed in cui non appaia il simbolo di implicazione ($\to$ o $\Rightarrow$).

Esercizio 2. Nell'insieme T delle applicazioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ si consideri l'operazione binaria $*$ definita ponendo, per ogni $f, g \in T$,

$$(f * g)\colon n \in \mathbb{Z} \longmapsto f(8) + g(n) \in \mathbb{Z}.$$

- (i) $*$ è commutativa? È associativa?
- (ii) $(T, *)$ ha elementi neutri a sinistra, a destra, neutri? Che tipo di struttura (semigruppo, commutativo o meno, monoide, gruppo, nessuna delle precedenti) è $(T, *)$?
- (iii) Determinare in $(T, *)$ gli (eventuali) elementi cancellabili a sinistra, a destra, cancellabili e, se la domanda ha senso, gli elementi simmetrizzabili a sinistra, a destra, simmetrizzabili.
- (iv) Dire quali tra le seguenti parti di T sono chiuse rispetto a $*$:
  $S = \{f \in T \mid f \text{ è suriettiva}\}$, $I = \{f \in T \mid f \text{ è iniettiva}\}$, $B = \{f \in T \mid f \text{ è biettiva}\}$,
  $C = \{f \in T \mid f \text{ è costante}\}$, $U = \{f \in T \mid \operatorname{im} f \subseteq \mathbb{N}\}$.

Esercizio 3. Sia $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 100\}$. Indicare (senza eseguire calcoli) il numero delle permutazioni f di X tali che $f(42) = 18$ e $f(18) = 42$.

Esercizio 4. Sia P l'insieme delle parti di $S := \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ con esattamente due elementi. Sia

$$g = \big\{(\{a, b\}, \{c, d\}) \in P \times P \mid \{c, d\} = \{ab, 2ab\}\big\}.$$

- (i) Dare la definizione di funzione e dimostrare che g è il grafico di una funzione $f\colon P \to P$.
- (ii) f è una funzione iniettiva? Suriettiva? Biettiva? Determinare l'immagine I di f.
- (iii) Sia, ancora, $I = \vec{f}(P)$. Dare la definizione di grafo (in termini di vertici e lati) e determinare se $G = (S, I)$ è un grafo o meno.
- (iv) Dare la definizione di grafo connesso e di foresta e, in caso G sia un grafo:
  - (a) determinare se G è una foresta o meno…
  - (b) …e se è un albero.
  - (c) Trovare la componente connessa di G di cui 4 è un vertice.

Esercizio 5. Sia $f = \overline{16}x^5 + \overline{16}x^4 + \overline{32}x^3 - \overline{23}x^2 + \overline{32}$, un polinomio in $\mathbb{Z}_{71}[x]$.

- (i) Assumendo come noto che f è riducibile in $\mathbb{Z}_{71}[x]$ ma non ha radici in $\mathbb{Z}_{71}$, decidere quanti sono i divisori irriducibili monici di f e quali sono i loro gradi.
- (ii) Determinare, se possibile, un polinomio monico che, in $\mathbb{Z}_{71}[x]$, sia associato a f.

Esercizio 6. Sia $A = \{0, 1, 3, 4, 5, 300, 100!, h\}$, dove $h = 3 \cdot 10^{100!}$, ordinato dalla relazione $\mid$ di divisibilità indotta da quella in $\mathbb{N}$.

- (i) Disegnare un diagramma di Hasse di $(A, \mid)$.
- (ii) $(A, \mid)$ è un reticolo? Nel caso, è complementato? È distributivo? È booleano?

Per ciascun insieme ordinato $(S, \leq)$, chiamiamo $\sigma_{(S,\leq)}$ la relazione binaria in S definita ponendo, per ogni $x, y \in S$, $x \,\sigma_{(S,\leq)}\, y$ se e solo se $x = y$ oppure x e y non sono tra loro confrontabili rispetto a $\leq$.

- (iii) $\rho := \sigma_{(A,\mid)}$ è di equivalenza? Nel caso lo sia, descrivere le classi in A/ρ, elencando esplicitamente gli elementi di ciascuna di esse e specificando $|A/\rho|$.
- (iv) Se possibile, fornire un esempio di insieme ordinato $(B, \leq)$ tale che $\sigma_{(B,\leq)}$ sia di equivalenza ed un esempio di insieme ordinato $(C, \preceq)$ tale che $\sigma_{(C,\preceq)}$ non sia di equivalenza.

1)

$$\exists x((p \vee q) \to (\forall y (r \to s)))$$

$$\forall x((p \vee q) \wedge (\exists y (r \wedge (\neg s))))$$

2) $(f * g) : n \in \mathbb{Z} \mapsto f(8) + g(n) \in \mathbb{Z}$

i)

COMMUTATIVA: NO

$f * g = g * f$

$\forall x \in \mathbb{Z}(f(x) = 5)$
$\forall x \in \mathbb{Z}(g(x) = x)$

$f(8) + g(n) = 5 + n.$
$g(8) + f(n) = 8 + n.$

ASSOCIATIVA: SI

$(f * g) * h = (f * g)(8) + h(n) = f(8) + g(8) + h(n)$
$f * (g * h) = f(8) + (g * h)(n) = f(8) + g(8) + h(n)$

ii) NEUTRI:

$f(8) + g(n) = g(n)$
$f(8) + g(n) = f(n)$

$f =$ tutte le funz. che mandano 8 in 0
impossibile

È un semigruppo commutativo

iii) CANCELLABILI

A SX: SI

$f * g(n) = f * h(n) \Rightarrow g(n) = h(n)$

$\cancel{f(8)} + g(n) = \cancel{f(8)} + h(n) \Rightarrow g(n) = h(n)$

A DX: NO

$g * f(n) = h * f(n) \Rightarrow g(n) = h(n)$

$g(8) + \cancel{f(n)} = h(8) + \cancel{f(n)} \Rightarrow g(8) = h(8)$

INVERTIBILI: NO

iv) S è chiusa

I è chiusa

B è chiusa

3) $98!$

4) $P = P_2(\mathbb{N}^*)$ $\quad f = \forall c,d \in P(f(\{c,d\}) = (ab, 2ab)$

i) $\forall \ell, m, n \in \mathbb{N}^* (\{\ell, m\}, n) \in g \leftrightarrow \{\ell, m\} \in P_2(\mathbb{N}) \wedge \ell^m = n$

ii) INIETTIVA: SI

$\forall a,b \in P(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$

$f(\{a,b\}) = f(\{b,c\}) \Rightarrow \{ab, 2ab\} = \{cb, 2cb\} \Rightarrow \quad a = c \Rightarrow \{a,b\} = \{b,c\}$

SURRIETTIVA: NO

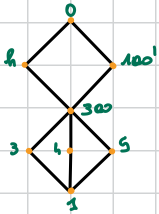
$\forall y \in P, \exists x \in P(y = f(x))$

Non esistono gli insiemi con due numeri dispari Es: $\{1,3\}$

BIETTIVA: NO

IMMAGINE:

$I = P \setminus \{\forall x \in P \mid x = \{a,b\}$ con a,b dispari$\}$

6) i) 

ii) RETICOLO: SI

perchè ogni $P_2(A)$ ammette sia inf che sup

COMPLEMENTATO: NO

$\forall x \in A \; \exists y \in A \, (\inf(x,y) = \min(A) \wedge \sup(x,y) = \max(A))$

Falso, perchè 4 non ha nessun complemento

DISTRIBUTIVO: SI

$a, b, c \in A \qquad a = 5, b = 1, c = h$

RISPETTO $\wedge$

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$5 \wedge (1 \vee h) = (5 \wedge 1) \vee (5 \wedge h)$

$5 \wedge h = 1 \vee 5$

$5 = 5$

RISPETTO $\vee$

$5 \vee (1 \wedge h) = (5 \vee 1) \wedge (5 \vee h)$

$5 \vee 1 \qquad 5 \wedge h$

$5 = 5$

BOOLEANO: NO

Non è distributivo.

iii) Si