CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 LUGLIO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Determinare, laddove possibile, verità o falsità delle seguenti formule o frasi.

(*i*) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$.
(*ii*) $|\mathbb{N}| = \{\mathbb{N}\}$.
(*iii*) $\{1,2,3\} = \{3!\} \to \varnothing \in \varnothing$.(‡)
(*iv*) $\{(1,1),(2,1)\}$ è il grafico di un'applicazione da $\{1,2\}$ a $\mathbb{N}$.

Esercizio 2. Sia $S = \mathbb{N} \cap [0]_3$ e sia $\chi = \chi_{\mathbb{N},S}$ la funzione caratteristica di S in $\mathbb{N}$. Si consideri poi la seguente operazione binaria $*$ definita su $\mathbb{N}$:

$$*\colon (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto a^{\chi(a)} \cdot b^{\chi(b)} \in \mathbb{N}.$$

(*i*) $*$ è un'operazione commutativa? È associativa?
(*ii*) Trovare tutti gli elementi neutri a destra o a sinistra in $(\mathbb{N}, *)$.
(*iii*) Siano $T = \mathbb{N} \cap [0]_2$ e $U = \mathbb{N} \cap [2]_3$. Dire quali tra S, T e U sono parti stabili (ovvero: chiuse) di $(\mathbb{N}, *)$. Quali di queste parti stabili costituiscono un semigruppo?

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti relazioni binarie definite in $\mathbb{N}$ dire se essa è o non è d'ordine e, nel caso lo sia, determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali ed elementi massimali nell'insieme ordinato da essa definito, decidere se questo è un reticolo ed infine disegnare il diagramma di Hasse di $S := \{1, 20, 40, 400, 10000\}$ ordinato dall'ordinamento indotto.

(*i*) α definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,(a \mathrel{\alpha} b \iff a = b)$;
(*ii*) β definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,\big(a \mathrel{\beta} b \iff (a = b \lor (a|b \land a < 10b))\big)$;
(*iii*) γ definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,\big(a \mathrel{\gamma} b \iff (a = b \lor (a|b \land a > 10b))\big)$;
(*iv*) δ definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,\big(a \mathrel{\delta} b \iff (a = b \text{ oppure } a \text{ non divide } b)\big)$.

Esercizio 4. Disegnare, se possibile, un grafo connesso $G = (V, L)$ tale che $|V| = 16$ e $|L| = 10$, oppure spiegare perché un tale grafo non esiste.

Esercizio 5. Determinare l'insieme A dei numeri interi n tali che $111n$ sia congruo a 11 o a 12 modulo 126. Quanti elementi ha $\{a \in A \mid 0 < a \leq 84\}$?

Esercizio 6. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sia $\overline{n}$ la classe di resto di n modulo 5.

(*i*) Sia S l'insieme dei polinomi $f \in \mathbb{Z}_5$ di grado 4 tali che $f(\overline{1}) = \overline{0}$. Quanti elementi possiede S?
(*ii*) S è una parte chiusa di $(\mathbb{Z}_5[x], +)$? Nel caso, $(S, +)$ è un gruppo abeliano (ovvero commutativo)?

Sia $\varphi\colon f \in S \mapsto f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_5$ la restrizione ad S dell'omomorfismo di sostituzione relativo a $\overline{1}$ e sia $\sim_\varphi$ il nucleo di equivalenza di φ.

(*iii*) φ è iniettiva? È suriettiva?
(*iv*) Quanti elementi possiede $S/{\sim_\varphi}$?

(‡) qui '$\to$' indica il connettivo di implicazione.

23-07 es 1

i) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ falso, perché l'unico elemento di $\{\{\emptyset\}\}$ è $\{\emptyset\}$

ii) $|\mathbb{N}| = \{\mathbb{N}\}$ falso

iii) $\{1,2,3\} = \{3!\} \rightarrow \emptyset \in \emptyset$ vero perché implicante falso

iv) vero

23 - 07 es. 2

$S = \mathbb{N} \cap [0]_3$ i multipli di 3 $\qquad \chi : x \in \mathbb{N} \to \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$

$$*: (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to a^{\chi(a)} \cdot b^{\chi(b)} \in \mathbb{N}$$

i) Commutativa? Si, per la commutatività di $\cdot$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \, (x * y = y * x)$$

Associativa? Si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \, (x * (y * z) = (x * y) * z)$$

$$x^{\chi(x)} \cdot \left(y^{\chi(y)} \cdot z^{\chi(z)}\right) = \left(x^{\chi(x)} \cdot y^{\chi(y)}\right) \cdot z^{\chi(z)}$$

ii) Neutro? No

$\forall x \in \mathbb{N} \, (x * \varepsilon = x)$ $\quad \varepsilon$ è il neutro

$\varepsilon \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin [0]_3\}$ ci sono più neutri, e per l'unicità del neutro non ci sono elementi neutri

iii) $T = \mathbb{N} \cap [0]_2$ e $U = \mathbb{N} \cap [2]_3$

S PARTE CHIUSA? SI
$x * y$ restituisce sempre un elemento di S se $x, y \in S$

Semigruppo? SI
Perchè $*$ è associativa

T PARTE CHIUSA? NO
Perchè se prendiamo $x, y \notin S$ e $x, y \in T$ $\; x * y = 1 \notin S$

U Parte CHIUSA? NO $\qquad$ es $2 * 5 = 1$

23-07 es 3

i) $\alpha : \forall a,b \in \mathbb{N} \, (a \,\alpha\, b \iff a = b)$

ANTISIMMETRICA? SI

$$\forall x,y \in \mathbb{N} \, (x \,\alpha\, y \wedge y \,\alpha\, x \Rightarrow x = y)$$

$$x = y \wedge y = x \Rightarrow x = y$$

TRANSITIVITA'? SI

$$\forall x,y,z \in \mathbb{N} \, (x \,\alpha\, y \wedge y \,\alpha\, z \Rightarrow x \,\alpha\, z)$$

$$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$$

REL D'ORDINE? SI

NON HA MIN e NON HA MASSIMO

NON E' UN RETICOLO perchè non ci sono sup e/o inf

IL D. HASSE perchè ogni el è in rel solo con se stesso

ii) $a = b \vee (a \mid b \wedge a < 10b)$

a=b possiamo non tenere conto perchè se a=b a|b, poichè un numero è divisore di se stesso.

ASIMMETRIA? SI

$$\forall x,y \in \mathbb{N} \, (x \,\beta\, y \wedge y \,\beta\, x \Rightarrow x = y)$$

È vera se due numeri dividono l'un l'altro sono uguali

Transitiva? SI

$$\forall x,y,z \in \mathbb{N} \left(x \beta y \land y \beta z \Rightarrow x \beta z \right)$$

è vera

REL D'ORDINE? SI

min = 1 massimo: $\nexists$ infiniti massimali

riflessiva? SI

$$a = a \lor (a | a \land a < 10)$$

non ha max, non è un reticolo

iii) $a = b \lor (a | b \land a > 10b)$ qui diciamo che un numero è in rel o con se stesso o con 0

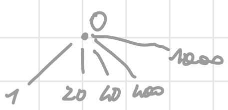
Asimm? SI

TRANSITIVA? SI

INFINITI MINIMI MIN = $\nexists$

MAX = 0

RIFLESSIVA



iv) $a = b \land \neg(a | b)$

ASIM NO

NON È D'ORDINE

23-07 es 4

Perchè un grafo per essere connesso deve avere $|L| \geq |V| - 1$

23-07 Es.5

$MCD(111, 126) = 3$

i) $111\,n \equiv_{126} 11$ $\quad \neg(3 \mid 11)$, non ha soluzioni

ii) $111\,n \equiv_{126} 12$ $\quad 3 \mid 12$, ammette soluzioni

$37\,n \equiv_{42} 4$