CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
10 SETTEMBRE 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ **_giustificando pienamente tutte le risposte._** ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Decidere se la forma proposizionale $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$ è una tautologia.

Esercizio 2. Si consideri l'operazione binaria $*\colon (a,b) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \mapsto a + \bar{9}b \in \mathbb{Z}_{12}$.

(i) Che tipo di struttura (semigruppo, commutativo o meno, monoide, gruppo) è $(\mathbb{Z}_{12}, *)$?

(ii) Determinare gli insiemi D degli elementi neutri a destra e S degli elementi neutri a sinistra in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$. $D \cup S$ è una parte stabile in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$?

(iii) Sia $T = \{\overline{3n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. T è una parte stabile in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$? Se lo è, che tipo di struttura (semigruppo, commutativo o meno, monoide, gruppo) è $(T, *)$?

(iv) Risolvere, determinando tutte le soluzioni in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$, le equazioni: (a): $\bar{7} * x = \bar{1}$; (b): $\bar{5} * x = \bar{1}$.

Esercizio 3. Consideriamo la funzione:[(†)]

$$\varphi\colon a_0 + a_1x + \cdots + a_{\deg f}x^{\deg f} \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} \longmapsto \prod_{i=0}^{\deg f} a_i \in \mathbb{Z}.$$

(i) φ è suriettiva? È iniettiva?

(ii) Descrivere $\vec{\varphi}(\{1, x^5+1\})$, $\overleftarrow{\varphi}(\{3\})$ e $\overleftarrow{\varphi}(\{2,4\})$. Quanti polinomi irriducibili (in $\mathbb{Q}[x]$) di grado 1 contiene $\overleftarrow{\varphi}(\{3\})$?

(iii) Sia $\sim_\varphi$ il nucleo di equivalenza di φ. Se ha senso la domanda, determinare se ogni singolo elemento di $\mathbb{Z}[x]/\sim_\varphi$ è infinito.

(iv) Dopo aver dato la definizione di polinomio associato ad un polinomio dato in un generico anello di polinomi $A[x]$, dimostrare che ad ogni elemento di $\mathbb{Z}[x]/\sim_\varphi$ appartengono almeno due polinomi (distinti) tra loro associati.

Esercizio 4. Per ogni insieme X di numeri interi, sia ρ_X la relazione binaria in X definita da:

$$\forall a, b \in X \ (a \ \rho_X \ b \iff a | 7b).$$

Siano $A = \{0, 1, 2, 8, 14, 49, 88\}$ e $B = \{0, 1, 2, -3, 11, 132, 330, 49\}$ (nota bene: $132 = 2 \cdot 66$).

(i) Spiegare perché una tra ρ_A e ρ_B è una relazione d'ordine e l'altra non lo è.

Detto S quello tra A e B tale che ρ_S sia una relazione d'ordine, e posto $\rho = \rho_S$,

(ii) disegnare un diagramma di Hasse di (S, ρ);

(iii) determinare, se esistono, $\inf_{(S,\rho)}(\{2, 49\})$ e $\sup_{(S,\rho)}(\{2, 49\})$;

(iv) stabilire se (S, ρ) è un reticolo e, nel caso se è distributivo o complementato.

Esercizio 5. Spiegare perché, per ogni insieme non vuoto $V \subseteq \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$[(‡)], è ben definito il grafo (semplice) G_V su V in cui, per ogni $a, b \in V$, a e b sono adiacenti se e solo se a e b sono tra loro coprimi.

(i) Cosa cambia se si assume, invece $V = \mathbb{N}^*$?

(ii) Se $V = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, G_V è connesso?

(iii) Esiste $V \subseteq \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tale che V non sia connesso?

(iv) Se $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, G_V ha cammini euleriani?

(†) $\deg f$ indica il grado del polinomio f.

(‡) $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Esercizio 1

No, non lo è

Esercizio 2

i) Associativa: SI

Commutativa: NO

ii) Neutri a Dx: $\{0,4,8\}$

$a = a * \varepsilon = a + \overline{9}\varepsilon \Rightarrow \overline{9}\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon \in \{0,4,8\}$

Neutri a Sx: $\emptyset$

NON CI SONO

D U S è una parte chiusa

iii) T è una parte stabile, ed è un gruppo abeliano

iv) $7 * x = 1 \qquad \overline{7} + \overline{9}x = \overline{1} \Rightarrow \overline{9}x \equiv_{12} \overline{6} \Rightarrow 3x \equiv_4 2 \qquad x = [2]_4 = [2]_{12} \cup [6]_{12} \cup [10]_{12}$

$5 * x = 1 \qquad \overline{5} + \overline{9}x = 1 \Rightarrow \overline{9}x \equiv_{12} \overline{8}$ non ha soluzioni.

Esercizio 3

i) $f(1+x^2) = f(1+0x+x^2) = 0$

suriettiva: SI
iniettiva: NO

ii) $\vec{\varphi}(\{1, 1+x^2\}) = \{1,0\}$

$\overleftarrow{\varphi}(\{2,4\}) =$

$\overleftarrow{\varphi}(\{3\}) = \{1+3x, 1-3x, 3+x, -3-3x\}$

iii) $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq [x]_n$

$\{n + x + \dots + x^k \mid k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\} \subseteq [n]_\sim$

iv) $\mathrm{DIV}(f) = \mathrm{Div}(g)$

Esercizio 4

iii) 2, 4 , non connesso

iv) No, non lo ha