证明思路

习题 2.8

$K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, the ring of integers (corresponding to K) $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega], \omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ and $\mathcal{O}_K$ is a PID.

涉及到的数学概念及其定义：

- 代数整数：代数数 α 称为代数整数如果 $\exists f \in \mathbb{Z}[x]$ 是首一整系数多项式，使得 $f(\alpha) = 0$.
- 二次域 K 的整数环 $\mathcal{O}_K$: K 中所有代数整数的集合，它事实上是一个环.

证明思路

PartI Thm（二次域中代数整数的分类）

$K=\mathbb{Q}[\sqrt{d}], \quad d\equiv 1(mod 4)$, then $\mathcal{O}_K=\{a+b\omega|\omega=\frac{1+\sqrt{d}}{2}\}$

- 二次域的商表示 $\mathbb{Q}[X]\big/ x^2+3$ 和它的基 $\{[1],[X]\}$
- 二次代数整数的极小多项式
  $\alpha+\beta x\in\mathcal{O}_K \longleftrightarrow minpoly \quad \mathbb{Q} \quad \alpha+\beta x,$
- 极小多项式为整系数：Gauss Lemma & Coprime & Dvd
- 得到关于系数因子的讨论

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2 d:\mathbb{Z}[X] \quad algebraMap \quad \mathbb{Z}\mathbb{Q} \quad Q[X]$$

证明思路

PartII $\mathcal{O}_K$ is a PID

- Norm 及其化简公式
- 证明所需有关 Norm 的性质
- $ED \Rightarrow PID$

Reference in Mathlib

1. 代数数域 Mathlib.NumberTheory.NumberField.Basic
   NumberField.mem$_r$*ingOfIntegers*
   AdjoinRoot.instNumberFieldAdjoinRootRatCommRingFieldField
   添加根得到的二次数域
2. 添加根 Adjoining roots of polynomials
3. 多项式 Mathlib.Data.Polynomial.Basic
4. 素数和因子 Mathlib.Data.Nat.Prime
5. 有理数 Std.Data.Rat.Basic