Inferência de Tipos para CPS

Vinícios Bidin Santos

Universidade do Estado de Santa Catarina vinibidin@gmail.com

Orientador: Dr. Cristiano Damiani Vasconcellos Coorientador: Me. Paulo Henrique Torrens

29/11/2024



Sumário

- Introdução
 - Objetivos
- Representação Intermediária de Código
 - Estilo de Passagem de Continuação (CPS)
- 3 Teoria de Tipos
- Sistema Damas-Milner
 - Algoritmo W
- 5 Proposta
- 6 Referências

Introdução

Compilação:

- Tradução de código de uma linguagem para outra
 - Geralmente do código-fonte para o de máquina
- Composta por diferentes etapas como:
 - Análise léxica
 - Análise sintática
 - Análise semântica
 - Otimizações
 - Geração de código
- Ligadas por Representações Intermediárias
 - Principalmente nas otimizações (PLOTKIN, 1975)

Introdução

Representações Intermediárias:

- Linguagens imperativas
 - Atribuição Única Estática (SSA)
- Linguagens funcionais
 - Forma Normal Administrativa (ANF)
 - Estilo de Passagem de Continuação (CPS)
- CPS
 - Continuações explícitas
 - Parâmetro extra na função
 - Funções sem retorno
 - Otimizações
 - Eliminação da pilha de chamadas
 - Eliminação de chamadas de cauda

Objetivos

- Formalizar um sistema de tipos para CPS
- Propor e implementar em Haskell um algoritmo de inferência de tipos para CPS
- Validar a implementação do algoritmo por meio do teste de inferência para expressões

Representação Intermediária de Código

- Estrutura de dados usada para manter integridade semântica e possibilitar otimizações (COOPER; TORCZON, 2014)
 - Classificadas de acordo com o nível de abstração
 - Muitas vezes aplicadas em sequência

Figura: Sequência de representações intermediárias

Fonte: (AHO et al., 2008)

- Fluxo de controle
 - Ordem das instruções
 - Escopo

- Técnica de transformação de código que torna o fluxo de controle explícito
 - Chamadas de função passam o controle para a próxima etapa explicitamente, conhecida como continuação (APPEL, 1992)
 - Ao invés das funções retornarem o resultado da computação, é invocado uma continuação, representando o próximo passo
- Toda chamada de função passa então a ser uma chamada de cauda (tail-call)

Chamada de cauda:

- Última instrução executada em uma função é uma chamada a outra função, sem que restem computações adicionais a serem feitas após essa chamada (MUCHNICK, 1997)
 - Função atual pode liberar seu quadro de ativação

Chamada não de cauda:

- Ainda restam operações, como somas ou multiplicações, após a chamada da função
 - Função atual precisa manter seu quadro de ativação até que as operações sejam concluídas

Figura: Função fatorial em Haskell com chamada não de cauda

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n - 1)
```

Fonte: o autor

Figura: Função fatorial em Haskell com chamada de cauda

```
go :: Int -> Int
go 1 a = a
go n a = go (n - 1) (a * n)

factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = go n 1
```

Fonte: o autor

Cálculo Lambda:

Church (1932) define o cálculo- λ , que é representado pela seguinte gramática:

$$e := x \mid \lambda x.e \mid ee$$

- Variável: identificadores no sistema
- Abstração: função que associa um identificador x a um termo e
- Aplicação: aplicação de um termo a outro

Variáveis no cálculo- λ podem ser:

- Livres: quando não estão associadas a uma abstração de função
 - $-\lambda x.y$
- Ligadas: quando estão associadas a uma abstração de função
 (λx.x)γ

Para analisar expressões:

• α -redução: Renomeação de variáveis ligadas.

$$\lambda x.e[x] \rightarrow \lambda y.e[y]$$

β-redução: Aplicação de função.

$$(\lambda x.e_1)e_2 \rightarrow e_1[e_2/x]$$

• η-redução: Expansão de função.

$$\lambda x.(ex) \rightarrow e$$
 se x não ocorre livre em e

Transformação CPS:

No cálculo- λ tradicional, o fluxo de execução é implícito

- Funções são aplicadas e os resultados são retornados
- $\lambda x.x + 1$

Já no CPS, o fluxo de execução é explícito

- Uma série de chamadas de funções passam o resultado para um argumento extra, a continuação, indicando o próximo passo da computação
- $\lambda x.\lambda k.k(x+1)$

Cálculo de Continuações (CPS-calculus):

(THIELECKE, 1997) define como sendo um sistema formal que trata o CPS como um modelo computacional por si só Seus termos são:

$$M ::= x \langle \vec{x} \rangle \mid M\{x \langle \vec{x} \rangle = M\}$$

- Salto (jump): uma chamada para a continuação x com os parâmetros \vec{x}
- **Vínculo** (*binding*): uma chamada onde o corpo M está vinculado à continuação x com os parâmetros \vec{x}

Tradução CPS:

Converte um código escrito em estilo direto para CPS (FLANAGAN et al., 1993)

 Modificar as funções para elas não retornarem um valor, mas sim, passarem o resultado para uma continuação

Figura: Função soma em Haskell em Estilo Direto

```
add :: Int -> Int -> Int add x y = x + y
```

Fonte: o autor

Figura: Função soma em Haskell em CPS

```
addCps :: Int -> Int -> (Int -> r) -> r
addCps x y k = k (x + y)
```

Fonte: o autor

Figura: Função fatorial em Haskell em Estilo Direto

```
fat :: Int -> Int
fat 0 = 1
fat n = n * fat (n - 1)
```

Fonte: o autor

Figura: Função fatorial em Haskell em CPS

```
fatCps :: Int -> (Int -> r) -> r
fatCps 0 k = k 1
fatCps n k =
fatCps
(n - 1)
(\x -> seq x k (n * x))
```

Fonte: o autor

Russel em 1908 apresentou uma contradição na Teoria de Conjuntos

Paradoxo de Russell:

Seja
$$R = \{x \mid x \notin x\}$$
, então $R \in R \iff R \notin R$

Outra maneira de descrever este paradoxo é com o paradoxo do barbeiro:

Imagine uma cidade com apenas um barbeiro, onde ele somente barbeia aqueles que não se barbeiam

Aplicações:

- Formalização de sistemas de tipos para linguagens de programação
- Construção de assistentes de provas
 - ► Coq utiliza Cálculo de Construções (COQUAND; HUET, 1988)
- Linguagens como Idris e Agda, também permitem a verificação de provas formais

Em linguagens de programação (PIERCE, 2002):

- Tipos simples
 - ► Tipo fixo a um termo
 - ightharpoonup Int ightharpoonup Int
- Tipos polimórficos
 - ▶ Generalidade
 - ightharpoonup a
 ightharpoonup a
- Tipos dependentes
 - ► Tipos dependem de valores
 - ▶ $Vector(n) \rightarrow Vector(m) \rightarrow Vector(n+m)$

Pierce (2002) define duas variedades de polimorfismo:

- Paramétrico
 - ▶ Única definição de função genérica
 - ▶ Função identidade
- Com sobrecarga
 - ► Múltiplas implementações de uma função
 - ► Sobrecarga de operadores

Cálculo Lambda Simplesmente Tipado:

- Variante do Cálculo- λ que incorpora tipos (CHURCH, 1940)
- Cada função recebe e retorna valores de tipos específicos

Sua sintaxe básica inclui:

- Variáveis: x, y, z, \dots
- Tipos: $T ::= Int \mid Bool \mid T \rightarrow T$
- Termos: $\lambda x : T.\tau \mid \tau_1 \tau_2 \mid x$

Regra de tipagem para abstrações lambda:

$$\frac{\Gamma, x: T_1 \vdash \tau: T_2}{\Gamma \vdash (\lambda x: T_1.\tau): T_1 \to T_2}$$

Correspondência Curry-Howard:

- Correspondência entre proposições intuicionistas lógicas e tipos
- Correspondência entre provas e programas
- O tipo $A \to B$ neste cálculo pode ser visto como a implicação lógica: se A, então B
- Método sistemático para raciocinar sobre sistemas de inferência de tipos
 - ► Linguagem ML por Damas e Milner (1982), com o algoritmo W
 - ▶ Linguagem Haskell com a extensão do sistema Damas-Milner

Sistema de tipos robusto para linguagens funcionais (MILNER, 1978; DAMAS; MILNER, 1982)

- Inferência automática de tipos polimórficos
- ullet Cálculo- λ com polomorfismo paramétrico introduzido via let

Sua sintaxe define as expressões e os tipos usados no processo de inferência:

```
Variáveis x Expressões e::=x\mid e\ e'\mid \lambda x.e\mid \mathtt{let}\ x=e\ \mathtt{in}\ e' Variáveis de tipo \alpha Tipos primitivos \iota Tipos \tau::=\alpha\mid \iota\mid \tau\to \tau\alpha Schemes \sigma::=\forall \alpha.\sigma\mid \tau
```

- Generalização
 - ▶ Tipo mais geral
- Instanciação
 - ► Tipo concreto
- let id = $\lambda x.x$ in (id 1, id 'a')
 - $\blacktriangleright \ \forall \alpha.\alpha \rightarrow \alpha$
- Substituição de tipos
 - ▶ Mapeamento finito de variáveis de tipos para tipos, denotado por S
 - $\blacktriangleright [\alpha_1 \mapsto \tau_1, \alpha_2 \mapsto \tau_2, \dots, \alpha_n \mapsto \tau_n]$
 - ▶ S associa cada variável de tipo α_i a um tipo τ_i específico
 - \blacktriangleright $S\tau$ substitui todas as ocorrências livres de α_i em τ por τ_i

Figura: Regras de Inferência do sistema Damas-Milner

TAUT:
$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma}$$

ABS:
$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash (\lambda x.e) : \tau \to \tau'}$$

APP:
$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e' : \tau'}{\Gamma \vdash (e \ e') : \tau}$$

Figura: Regras de Inferência do sistema Damas-Milner (continuação)

LET:
$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash e' : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } x = e \text{ in } e') : \tau}$$

INST:
$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash e : \sigma'} \quad (\sigma > \sigma')$$

GEN:
$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash e : \forall \alpha \sigma} \quad (\alpha \text{ não livre em } \Gamma)$$

Fonte: o autor. Adaptado de (DAMAS; MILNER, 1982)

Algoritmo W

Algoritmo de inferência introduzido por Damas e Milner (1982):

- Para linguagens funcionais
- Algoritmo eficiente
 - ► Na maioria dos casos
- Unificação
 - ► Solucionar equações de tipos
 - ▶ Dados dois tipos τ_1 e τ_2
 - lacktriangle A unificação procura uma substituição S tal que $S au_1=S au_2$
 - ► Atribui os tipos mais gerais possíveis

Proposta

Sistema de tipos monomórfico para CPS com um único construtor (chamado de negação poliádica) para representar continuações (TORRENS; ORCHARD; VASCONCELLOS, 2024):

Types
$$\tau ::= \neg \vec{\tau} \mid X$$

Environments $\Gamma ::= \cdot \mid \Gamma, x : \tau$

$$\frac{\Gamma(k) = \neg \vec{\tau} \qquad \Gamma(\vec{x}) = \vec{\tau}}{\Gamma \vdash k \langle \vec{x} \rangle} \qquad (J)$$

$$\frac{\Gamma, k : \neg \vec{\tau} \vdash b \qquad \Gamma, \vec{x} : \vec{\tau} \vdash c}{\Gamma \vdash b \{ k \langle \vec{x} \rangle = c \}} \qquad (B)$$

- Propor uma extensão ao sistema de tipos
 - ► Suporte a tipos polimórficos
 - ► Algoritmo de inferência de tipos

Conclusões Parciais

- CPS é uma escolha interessante para IR
 - Otimizações
- Sistema de tipos
 - Correção de transformações e otimizações
 - Ausência de certos comportamentos indesejados

Referências

AHO, A. V. et al. *Compiladores: Princípios, técnicas e ferramentas*. 2th. ed. São Paulo, SP, Brasil: Pearson Education, 2008.

APPEL, A. W. Compiling with continuations. USA: Cambridge University Press, 1992. ISBN 0521416957.

CHURCH, A. A set of postulates for the foundation of logic. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 346–366, 1932.

GHURCH, A. A formulation of the simple theory of types. *J. Symb. Log.*, Cambridge University Press (CUP), v. 5, n. 2, p. 56–68, jun. 1940.

COOPER, K. D.; TORCZON, L. *Contruindo Compiladores*. 2th. ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Elsevier, 2014.

Referências

COQUAND, T.; HUET, G. The calculus of constructions. *Information and Computation*, v. 76, n. 2, p. 95–120, 1988. ISSN 0890-5401. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0890540188900053.

DAMAS, L.; MILNER, R. Principal type-schemes for functional programs. Tese (Doutorado) — University of Edinburgh, Scotland, 1982.

FLANAGAN, C. et al. The essence of compiling with continuations. *SIGPLAN Not.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 28, n. 6, p. 237–247, jun 1993. ISSN 0362-1340. Disponível em: https://doi.org/10.1145/173262.155113.

MILNER, R. A theory of type polymorphism in programming. In: *Journal of Computer and System Sciences*. [S.l.]: Elsevier, 1978. v. 17, n. 3, p. 348–375.

Referências

MUCHNICK, S. S. Advanced Compiler Design and Implementation. Oxford, England: Morgan Kaufmann, 1997.

PIERCE, B. C. *Types and Programming Languages*. 1st. ed. [S.l.]: The MIT Press, 2002. ISBN 0262162091.

PLOTKIN, G. Call-by-name, call-by-value and the λ -calculus. Theoretical Computer Science, v. 1, n. 2, p. 125–159, 1975. ISSN 0304-3975. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397575900171>.

THIELECKE, H. Categorical Structure of Continuation Passing Style. [S.I.]: University of Edinburgh. College of Science and Engineering. School of Informatics., 1997.

TORRENS, P.; ORCHARD, D.; VASCONCELLOS, C. On the operational theory of the cps-calculus: Towards a theoretical foundation for irs. *Proc. ACM Program. Lang.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 8, n. ICFP, aug 2024. Disponível em: https://doi.org/10.1145/3674630.