

# Inferência de Tipos para CPS

Vinícios Bidin Santos

Universidade do Estado de Santa Catarina

vinibidin@gmail.com

Orientador: Dr. Cristiano Damiani Vasconcellos

Coorientador: Me. Paulo Henrique Torrens

29/11/2024

- 1 Introdução
  - Objetivos
- 2 Representação Intermediária de Código
  - Estilo de Passagem de Continuação (CPS)
- 3 Teoria de Tipos
- 4 Sistema Damas-Milner
  - Algoritmo W
- 5 Proposta
- 6 Referências

## Compilação:

- Tradução de código de uma linguagem para outra
  - Geralmente do código-fonte para o de máquina
- Composta por diferentes etapas como:
  - Análise léxica
  - Análise sintática
  - Análise semântica
  - Otimizações
  - Geração de código
- Ligadas por Representações Intermediárias
  - Principalmente nas otimizações (PLOTKIN, 1975)

## Representações Intermediárias:

- Linguagens imperativas
  - Atribuição Única Estática (SSA)
- Linguagens funcionais
  - Forma Normal Administrativa (ANF)
  - Estilo de Passagem de Continuação (CPS)
- CPS
  - Continuações explícitas
    - Parâmetro extra na função
    - Funções sem retorno
  - Otimizações
    - Eliminação da pilha de chamadas
    - Eliminação de chamadas de cauda

- Formalizar um sistema de tipos para CPS
- Propor e implementar em Haskell um algoritmo de inferência de tipos para CPS
- Validar a implementação do algoritmo por meio do teste de inferência para expressões

# Representação Intermediária de Código

- Estrutura de dados usada para manter integridade semântica e possibilitar otimizações (COOPER; TORCZON, 2014)
  - Classificadas de acordo com o nível de abstração
  - Muitas vezes aplicadas em sequência

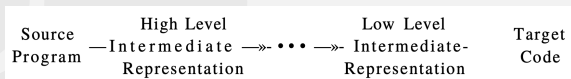


Figura: Sequência de representações intermediárias

Fonte: (AHO et al., 2008)

- Fluxo de controle
  - Ordem das instruções
  - Escopo

# Estilo de Passagem de Continuação (CPS)

- Técnica de transformação de código que torna o fluxo de controle explícito
  - Chamadas de função passam o controle para a próxima etapa explicitamente, conhecida como continuação (APPEL, 1992)
  - Ao invés das funções retornarem o resultado da computação, é invocado uma continuação, representando o próximo passo
- Toda chamada de função passa então a ser uma chamada de cauda (*tail-call*)

## Chamada de cauda:

- Última instrução executada em uma função é uma chamada a outra função, sem que restem computações adicionais a serem feitas após essa chamada (MUCHNICK, 1997)
  - Função atual pode liberar seu quadro de ativação

## Chamada não de cauda:

- Ainda restam operações, como somas ou multiplicações, após a chamada da função
  - Função atual precisa manter seu quadro de ativação até que as operações sejam concluídas



# Estilo de Passagem de Continuação (CPS)

Figura: Função fatorial em Haskell com chamada não de cauda

```
1 factorial :: Int -> Int
2 factorial 0 = 1
3 factorial n = n * factorial (n - 1)
```

Fonte: o autor

Figura: Função fatorial em Haskell com chamada de cauda

```
1 go :: Int -> Int -> Int
2 go 1 a = a
3 go n a = go (n - 1) (a * n)
4
5 factorial :: Int -> Int
6 factorial 0 = 1
7 factorial n = go n 1
```

Fonte: o autor

## Cálculo Lambda:

Church (1932) define o cálculo- $\lambda$ , que é representado pela seguinte gramática:

$$e ::= x \mid \lambda x.e \mid ee$$

- **Variável:** identificadores no sistema
- **Abstração:** função que associa um identificador  $x$  a um termo  $e$
- **Aplicação:** aplicação de um termo a outro

# Estilo de Passagem de Continuação (CPS)

Variáveis no cálculo- $\lambda$  podem ser:

- **Livres:** quando não estão associadas a uma abstração de função
  - $\lambda x.y$
- **Ligadas:** quando estão associadas a uma abstração de função
  - $(\lambda x.x)y$

Para analisar expressões:

- $\alpha$ -**redução:** Renomeação de variáveis ligadas.

$$\lambda x.e[x] \rightarrow \lambda y.e[y]$$

- $\beta$ -**redução:** Aplicação de função.

$$(\lambda x.e_1)e_2 \rightarrow e_1[e_2/x]$$

- $\eta$ -**redução:** Expansão de função.

$$\lambda x.(e\ x) \rightarrow e \quad \text{se } x \text{ não ocorre livre em } e$$

## Transformação CPS:

No cálculo- $\lambda$  tradicional, o fluxo de execução é implícito

- Funções são aplicadas e os resultados são retornados
- $\lambda x.x + 1$

Já no CPS, o fluxo de execução é explícito

- Uma série de chamadas de funções passam o resultado para um argumento extra, a continuação, indicando o próximo passo da computação
- $\lambda x.\lambda k.k(x + 1)$

## Cálculo de Continuações (*CPS-calculus*):

(THIELECKE, 1997) define como sendo um sistema formal que trata o CPS como um modelo computacional por si só

Seus termos são:

$$M ::= x\langle\vec{x}\rangle \mid M\{x\langle\vec{x}\rangle = M\}$$

- **Salto (*jump*)**: uma chamada para a continuação  $x$  com os parâmetros  $\vec{x}$
- **Vínculo (*binding*)**: uma chamada onde o corpo  $M$  está vinculado à continuação  $x$  com os parâmetros  $\vec{x}$

## **Tradução CPS:**

Converte um código escrito em estilo direto para CPS (FLANAGAN et al., 1993)

- Modificar as funções para elas não retornarem um valor, mas sim, passarem o resultado para uma continuação

# Estilo de Passagem de Continuação (CPS)

Figura: Função soma em Haskell em Estilo Direto

```
1 add :: Int -> Int -> Int
2 add x y = x + y
```

Fonte: o autor

Figura: Função soma em Haskell em CPS

```
1 addCps :: Int -> Int -> (Int -> r) -> r
2 addCps x y k = k (x + y)
```

Fonte: o autor

# Estilo de Passagem de Continuação (CPS)

Figura: Função fatorial em Haskell em Estilo Direto

```
1 fat :: Int -> Int
2 fat 0 = 1
3 fat n = n * fat (n - 1)
```

Fonte: o autor

Figura: Função fatorial em Haskell em CPS

```
1 fatCps :: Int -> (Int -> r) -> r
2 fatCps 0 k = k 1
3 fatCps n k =
4   fatCps
5     (n - 1)
6     (\x -> seq x k (n * x))
```

Fonte: o autor



Russel em 1908 apresentou uma contradição na Teoria de Conjuntos

**Paradoxo de Russell:**

Seja  $R = \{x \mid x \notin x\}$ , então  $R \in R \iff R \notin R$

Outra maneira de descrever este paradoxo é com o paradoxo do barbeiro:

Imagine uma cidade com apenas um barbeiro, onde ele somente barbeia aqueles que não se barbeiam

## Aplicações:

- Formalização de sistemas de tipos para linguagens de programação
- Construção de assistentes de provas
  - ▶ Coq utiliza Cálculo de Construções (COQUAND; HUET, 1988)
- Linguagens como Idris e Agda, também permitem a verificação de provas formais

Em linguagens de programação (PIERCE, 2002):

- Tipos simples
  - ▶ Tipo fixo a um termo
  - ▶  $Int \rightarrow Int$
- Tipos polimórficos
  - ▶ Generalidade
  - ▶  $a \rightarrow a$
- Tipos dependentes
  - ▶ Tipos dependem de valores
  - ▶  $Vector(n) \rightarrow Vector(m) \rightarrow Vector(n + m)$

Pierce (2002) define duas variedades de polimorfismo:

- Paramétrico
  - ▶ Única definição de função genérica
  - ▶ Função identidade
- Com sobrecarga
  - ▶ Múltiplas implementações de uma função
  - ▶ Sobrecarga de operadores

## Cálculo Lambda Simplesmente Tipado:

- Variante do Cálculo- $\lambda$  que incorpora tipos (CHURCH, 1940)
- Cada função recebe e retorna valores de tipos específicos

Sua sintaxe básica inclui:

- Variáveis:  $x, y, z, \dots$
- Tipos:  $T ::= \mathbf{Int} \mid \mathbf{Bool} \mid T \rightarrow T$
- Termos:  $\lambda x : T. \tau \mid \tau_1 \tau_2 \mid x$

Regra de tipagem para abstrações lambda:

$$\frac{\Gamma, x : T_1 \vdash \tau : T_2}{\Gamma \vdash (\lambda x : T_1. \tau) : T_1 \rightarrow T_2}$$

## Correspondência Curry-Howard:

- Correspondência entre proposições intuicionistas lógicas e tipos
- Correspondência entre provas e programas
- O tipo  $A \rightarrow B$  neste cálculo pode ser visto como a implicação lógica: se  $A$ , então  $B$
- Método sistemático para raciocinar sobre sistemas de inferência de tipos
  - ▶ Linguagem ML por Damas e Milner (1982), com o algoritmo  $W$
  - ▶ Linguagem Haskell com a extensão do sistema Damas-Milner

# Sistema Damas-Milner

Sistema de tipos robusto para linguagens funcionais (MILNER, 1978; DAMAS; MILNER, 1982)

- Inferência automática de tipos polimórficos
- Cálculo- $\lambda$  com polomorfismo paramétrico introduzido via `let`

Sua sintaxe define as expressões e os tipos usados no processo de inferência:

|                   |   |
|-------------------|---|
| Variáveis         | $x$   |
| Expressões        | $e ::= x \mid e \ e' \mid \lambda x. e \mid \text{let } x = e \text{ in } e'$ |
| Variáveis de tipo | $\alpha$  |
| Tipos primitivos  | $\iota$   |
| Tipos             | $\tau ::= \alpha \mid \iota \mid \tau \rightarrow \tau \alpha$                |
| Schemes           | $\sigma ::= \forall \alpha. \sigma \mid \tau$                                 |

- Generalização
  - ▶ Tipo mais geral
- Instanciação
  - ▶ Tipo concreto
- `let id =  $\lambda x.x$  in (id 1, id 'a')`
  - ▶  $\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha$
- Substituição de tipos
  - ▶ Mapeamento finito de variáveis de tipos para tipos, denotado por  $S$
  - ▶  $[\alpha_1 \mapsto \tau_1, \alpha_2 \mapsto \tau_2, \dots, \alpha_n \mapsto \tau_n]$
  - ▶  $S$  associa cada variável de tipo  $\alpha_i$  a um tipo  $\tau_i$  específico
  - ▶  $S_\tau$  substitui todas as ocorrências livres de  $\alpha_i$  em  $\tau$  por  $\tau_i$



Figura: Regras de Inferência do sistema Damas-Milner

$$\text{TAUT: } \frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma}$$

$$\text{ABS: } \frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash (\lambda x. e) : \tau \rightarrow \tau'}$$

$$\text{APP: } \frac{\Gamma \vdash e : \tau' \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash e' : \tau'}{\Gamma \vdash (e \ e') : \tau}$$

Figura: Regras de Inferência do sistema Damas-Milner (continuação)

$$\text{LET: } \frac{\Gamma \vdash e : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash e' : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } x = e \text{ in } e') : \tau}$$

$$\text{INST: } \frac{\Gamma \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash e : \sigma'} \quad (\sigma > \sigma')$$

$$\text{GEN: } \frac{\Gamma \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash e : \forall \alpha \sigma} \quad (\alpha \text{ não livre em } \Gamma)$$

Fonte: o autor. Adaptado de (DAMAS; MILNER, 1982)

Algoritmo de inferência introduzido por Damas e Milner (1982):

- Para linguagens funcionais
- Algoritmo eficiente
  - ▶ Na maioria dos casos
- Unificação
  - ▶ Solucionar equações de tipos
  - ▶ Dados dois tipos  $\tau_1$  e  $\tau_2$
  - ▶ A unificação procura uma substituição  $S$  tal que  $S\tau_1 = S\tau_2$
  - ▶ Atribui os tipos mais gerais possíveis

Sistema de tipos monomórfico para CPS com um único construtor (chamado de negação poliádica) para representar continuações (TORRENS; ORCHARD; VASCONCELLOS, 2024):

$$\text{Types } \tau ::= \neg \vec{\tau} \mid X$$


$$\text{Environments } \Gamma ::= \cdot \mid \Gamma, x : \tau$$


$$\frac{\Gamma(k) = \neg \vec{\tau} \quad \Gamma(\vec{x}) = \vec{\tau}}{\Gamma \vdash k \langle \vec{x} \rangle} \quad (J)$$


$$\frac{\Gamma, k : \neg \vec{\tau} \vdash b \quad \Gamma, \vec{x} : \vec{\tau} \vdash c}{\Gamma \vdash b \{ k \langle \vec{x} \rangle = c \}} \quad (B)$$


- Propor uma extensão ao sistema de tipos
  - ▶ Suporte a tipos polimórficos
  - ▶ Algoritmo de inferência de tipos


- CPS é uma escolha interessante para IR
  - Otimizações
- Sistema de tipos
  - Correção de transformações e otimizações
  - Ausência de certos comportamentos indesejados


 AHO, A. V. et al. *Compiladores: Princípios, técnicas e ferramentas*. 2th. ed. São Paulo, SP, Brasil: Pearson Education, 2008.


 APPEL, A. W. *Compiling with continuations*. USA: Cambridge University Press, 1992. ISBN 0521416957.


 CHURCH, A. A set of postulates for the foundation of logic. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 346–366, 1932.


 CHURCH, A. A formulation of the simple theory of types. *J. Symb. Log.*, Cambridge University Press (CUP), v. 5, n. 2, p. 56–68, jun. 1940.


 COOPER, K. D.; TORCZON, L. *Contruindo Compiladores*. 2th. ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Elsevier, 2014.

 COQUAND, T.; HUET, G. The calculus of constructions. *Information and Computation*, v. 76, n. 2, p. 95–120, 1988. ISSN 0890-5401. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0890540188900053>>.


 DAMAS, L.; MILNER, R. *Principal type-schemes for functional programs*. Tese (Doutorado) — University of Edinburgh, Scotland, 1982.


 FLANAGAN, C. et al. The essence of compiling with continuations. *SIGPLAN Not.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 28, n. 6, p. 237–247, jun 1993. ISSN 0362-1340. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/173262.155113>>.


 MILNER, R. A theory of type polymorphism in programming. In: *Journal of Computer and System Sciences*. [S.l.]: Elsevier, 1978. v. 17, n. 3, p. 348–375.

 MUCHNICK, S. S. *Advanced Compiler Design and Implementation*. Oxford, England: Morgan Kaufmann, 1997.

 PIERCE, B. C. *Types and Programming Languages*. 1st. ed. [S.l.]: The MIT Press, 2002. ISBN 0262162091.

 PLOTKIN, G. Call-by-name, call-by-value and the  $\lambda$ -calculus. *Theoretical Computer Science*, v. 1, n. 2, p. 125–159, 1975. ISSN 0304-3975. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397575900171>>.

 THIELECKE, H. *Categorical Structure of Continuation Passing Style*. [S.l.]: University of Edinburgh. College of Science and Engineering. School of Informatics., 1997.

 TORRENS, P.; ORCHARD, D.; VASCONCELLOS, C. On the operational theory of the cps-calculus: Towards a theoretical foundation for irs. *Proc. ACM Program. Lang.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 8, n. ICFP, aug 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/3674630>>.