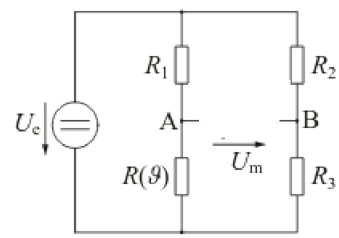
Lösung Katalog S.15

- a) Da es sich beim Spannungsmessgerät um ein Messgerät mit unendlich hohem Widerstand handelt, dürfen wir davon ausgehen, dass zwischen den Klemmen A und B kein Strom fliessen kann. Somit können wir die Verbindung zwischen A und B als Leerlauf modelieren.



Da die beiden Widerstandsäste parallel gescchaltet sind, muss über beiden Ästen die gleiche Spannung abfallen:

$$U_e = U_{R_1} + U_{R_\vartheta} = U_{R_2} + U_{R_3}$$

Somit können wir die Spannung über R_ϑ mithilfe des Spannungsteilers berechnen:

$$U_{R_\vartheta} = U_e \cdot \frac{R_\vartheta}{R_1 + R_\vartheta}$$

Die Leistung über einem Widerstand ist definiert als:

$$P_R = U_R \cdot I_R = \frac{U_R^2}{R}$$

Somit gilt für die Leistung über dem Widerstand R_ϑ ;

$$P_{R_\vartheta} = \frac{U_{R_\vartheta}^2}{R_\vartheta} = (U_e \cdot \frac{R_\vartheta}{R_1 + R_\vartheta})^2 \cdot \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{U_e^2 \cdot R_\vartheta}{(R_1 + R_\vartheta)^2}$$

Um den Maximalwert dieser Leistung in Abhängigkeit des Widerstandes R_ϑ herauszufinden, leiten wir die Leistung nach R_ϑ ab und setzen sie zu 0:

$$\frac{d}{dR_\vartheta}(P_{R_\vartheta}) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow R_\vartheta = R_1 = 1k\Omega$$

Die benötigte Temperatur berechnet sich zu:

$$R(\vartheta) = 1k\Omega(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)) \stackrel{!}{=} 1k\Omega$$
$$\Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 = 20^\circ$$

Für die Spannung U_e erhalten wir:

$$50mW \stackrel{!}{=} P_{R_\vartheta} = U_e^2 \cdot \frac{1k\Omega}{4k\Omega}$$
$$\rightarrow 200mW = U_e^2$$
$$\rightarrow U_e = 14.14V$$

- b) Für die Spannung U_m können wir folgende Masche aufstellen:

$$U_m = U_{R_\vartheta} - U_{R_3}$$

Wobei wir U_{R_ϑ} und U_{R_3} mit dem Spannungsteiler berechnen können:

$$U_{R_\vartheta} = U_e \frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1}$$
$$U_{R_3} = U_e \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

Somit gilt für U_m:

$$U_m = U_e\left(\frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right)$$

Mit der Bedingung, $U_m(\vartheta = \vartheta_0 = 0°) = 0V$ erhalten wir:

$$0V = U_e\left(\frac{R(\vartheta_0)}{R(\vartheta_0) + R_1} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) = U_e\left(\frac{0.9k\Omega}{1.9k\Omega} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right)$$
$$\rightarrow \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{0.9k\Omega}{1.9k\Omega}$$
$$\rightarrow R_3 = \frac{0.9}{1.9} \cdot (R_2 + R_3)$$

Für die Leistung gilt:

$$P_{(R_2, R_3)} = \frac{U_e^2}{R_2 + R_3} \stackrel{!}{=} 10mW$$
$$\rightarrow (R_2 + R_3) = \frac{U_e^2}{10mW} = 14400\Omega$$

Somit gilt:

$$R_3 = \frac{0.9k\Omega}{1.9k\Omega} \cdot (14400\Omega) = 6821.05\Omega$$
$$R_2 = 14400\Omega - R_3 = 7578.95\Omega$$

- c) Wir bezeichnen mit U_{ideal} die Spannung bei idealer Messung und mit U_{err} die Spannung mit ungenauen Widerständen.

$$U_{ideal} = 12V\left(\frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1} - \frac{R_3}{R_3 + R_2}\right)$$
$$U_{err} = 12V\left(\frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1'} - \frac{R_3'}{R_3' + R_2'}\right)$$

Die Differenz ist:

$$F(R_\vartheta)) = U_{ideal} - U_{err} = U_e\left(\frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1} - \frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1'} - \frac{R_3}{R_3 + R_2} + \frac{R_3'}{R_3' + R_2'}\right)$$

Der Fehler wird maximal, wenn die Differenz stark negativ wird. Dies ist der Fall, falls $\frac{R_3'}{R_3' + R_2'} < \frac{R_3}{R_3 + R_2}$ und $\frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1'} > \frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1}$ gilt. Somt gilt für die Widerstände:

$$R_3' < R_3 \rightarrow R_3' = 0.9 \cdot R_3$$
$$R_2' > R_2 \rightarrow R_2' = 1.1 \cdot R_2$$
$$R_1' < R_1 \rightarrow R_1' = 0.9 \cdot R_1$$

Um die Temperatur herauszufinden, leiten wir die Differenz nach R_ϑ ab:

$$\frac{d}{dR_\vartheta}(F(R_\vartheta)) \stackrel{TR}{=} U_e \cdot \left(\frac{R_1}{(R_1 + R_\vartheta)^2} - \frac{R_1'}{(R_1' + R_\vartheta)^2}\right) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\stackrel{TR}{\rightarrow} R_\vartheta = \sqrt{R_1 \cdot R_1'} = 0.949 \cdot R_1 = 949\Omega$$
$$\rightarrow (1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)) = 0.949$$
$$\rightarrow \vartheta = 9.8°$$

Der Betrag des Fehler berechnet sich zu:

$$U_{err} = 12V\left(\frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1'} - \frac{R_3'}{R_3' + R_2'}\right) = 1.07V$$
$$U_{ideal} \stackrel{!}{=} 1.07V \rightarrow R_\vartheta =$$