

Skript zum PVK zur Vorlesung

Netzwerk und Schaltungen 1

für D-ITET

verfasst von

René Zurbrügg

D-ITET
ETH Zürich

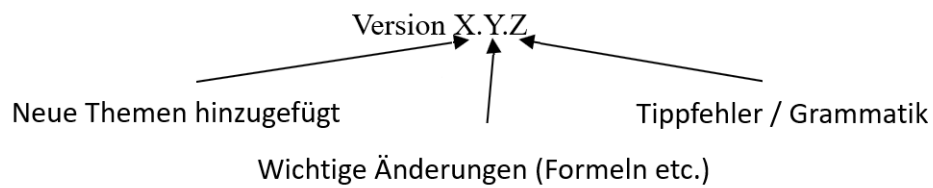
Zürich, Januar 2019

Vorwort

Dieses Skript entstand als Beiblatt zum Prüfungsvorbereitungskurs "Netzwerk und Schaltungen 1" im Januar 2019. Es ist primär als Hilfe für die Studenten gedacht, mit dem Ziel, den Fokus auf die prüfungsrelevanten Themen zu legen. Verbreitung über die Grenzen der ETH hinaus ist untersagt. Es wird weder Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Korrektheit erhoben. Fragen, Anregungen und vor allem Korrekturen sind willkommen und sollten an zrene@student.ethz.ch adressiert werden.

Die neueste Version des Skriptes befindet sich immer auf: n.ethz.ch/zrene/nus1-pvk.html

Version 1.0.0



Inhaltsverzeichnis

1	Elektrostatik	4
1.1	(Ladungs)-Dichte	5
1.2	Elektrische Flussdichte	5
1.3	Kondensator	8
1.4	Strom	12
1.5	Verhalten des J- und E-Feldes an Materialübergängen	13
1.6	Netzwerke	13
1.7	Grundlegende Netzwerkumformungen	16
1.7.1	Grundregeln bei Netzwerkumformungen	18
1.8	Vorgehen um Schaltbilder mit einer Quelle zu vereinfachen	19
1.9	Quellen	20
1.10	Leistungsanpassung	21
1.11	Superpositionsprinzip	22
1.12	Analyse umfangreicher Netzwerke	24
2	Magnetostatik	27
2.1	Das Magnetische Feld und die Lorentzkraft	27
2.1.1	Das Reluktanzmodell	31
2.2	Spule und Induktivität	34

1 Elektrostatik

Elektrisch geladene Teilchen, welche sich in der Nähe eines anderen, geladenen Teilchen befinden, verspüren eine Kraftwirkung, die Abhängig der eigenen Ladung ist.

Um diese Kraftwirkung zu beschreiben, wurde der Begriff des **Elektrischen Feldes** eingeführt.

Definition Elektrisches Feld

Das Elektrische Feld, beschreibt die Kraftwirkung auf geladene Teilchen im Raum. Es ordnet jedem Punkt im Raum einen Vektor \vec{E} zu, der in die Richtung der Kraftwirkung zeigt. Für die Kraftwirkung auf ein Teilchen mit der Ladung Q und dem Ortsvektor \vec{r} gilt:

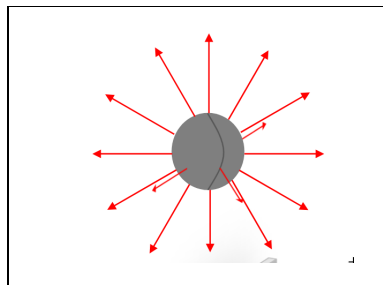
$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Einige wichtige Felder

Beispiel E-Feld einer Punktladung

Das Elektrische Feld einer Punktladung Q ist gegeben als:

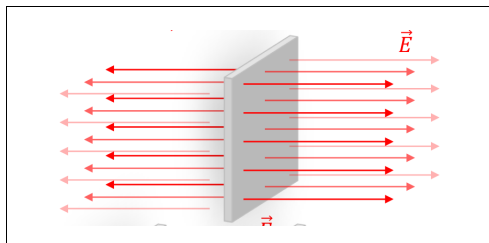
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$



Beispiel E-Feld einer Platte

Das Elektrische Feld einer Platte mit Ladung Q ist gegeben als:

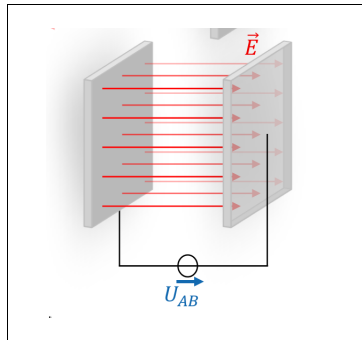
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{2 \cdot A \epsilon} \cdot \vec{e}_n & , y > y_0 \\ \frac{-Q}{2 \cdot A \epsilon} \cdot \vec{e}_n & , y \leq y_0 \end{cases}$$



Beispiel E-Feld eines Kondensators

Das Elektrische Feld in einem Kondensator mit Der Ladung Q oder Spannung U ist gegeben als:

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\epsilon} \cdot \vec{e}_d = \frac{U}{d} \vec{e}_d$$



1.1 (Ladungs)-Dichte

TODO

1.2 Elektrische Flussdichte

Quelle des Elektrischen Feldes sind geladene Teilchen. Jedoch hängt das Elektrische Feld davon ab, in was für einem Material wir uns befinden.

Das Elektrische Feld in einem Metall ist zum Beispiel kleiner, als das Elektrische Feld im Vakuum. Grund dafür ist die **elektrische Influenz**, welche das Ursprüngliche Feld abschwächt)

Um gewisse Rechnungen zu vereinfachen, definieren wir ein neues Feld.

Definition Die Elektrische Flussdichte

Die elektrische Flussdichte \vec{D} beschreibt das Feld, welches existieren würde, falls kein Material vorhanden wäre.

Da die elektrische Flussdichte \vec{D} unabhängig vom Material ist und ausschliesslich von den Ladungsträger abhängig ist, gibt es eine Formel, die die beiden Grössen in Verbindung bringt:

Gleichung Quellgleichung des elektrischen Flusses

$$\Psi := \oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{eff}$$

Falls Feld senkrecht auf Fläche und Konstant

$$D = \left| \frac{Q_{eff}}{A_{eff}} \right|$$

Variablen:

Ψ = Elektrischer Fluss $[\Psi] = A \cdot s$

D = Elektrische Flussdichte $[D] = \frac{As}{m^2}$

Q_{eff} = Von der Fläche eingeschlossene Ladung $[Q] = A \cdot s$

A_{eff} = Fläche, durch die das D-Feld durchfließt $[A] = m^2$

Beispiel Berechnung des D-Feldes einer Kugel

Eine Kugel sei mit der Ladung $20C$ gefüllt. Die Kugel habe den Radius $R = 2cm$ und alle Ladungsträger verteilen sich auf der Kugeloberfläche.

Berechne das \vec{D} -Feld der Kugel.

Lösung

Um das D-Feld der Kugel anzugeben, müssen wir zuerst ein passendes Koordinatensystem wählen.

Da wir mit einer Kugel rechnen, muss das Feld Punktsymmetrisch sein und einzig der Abstand zum Kugelmittelpunkt bestimmt wie gross das D-Feld ist.

Aufgrund dieser Überlegung, werden wir **Kugelkoordinaten** verwenden. (Hätten wir etwas, das Symmetrisch zur Z-Achse ist, so würden wir Zylinderkoord. verwenden etc.).

Um die Gleichung für den Elektrischen Fluss anwenden zu können, müssen wir eine Hüllfläche finden, **auf der das D-Feld Konstant ist**.

Da die Anordnung eine Kugel ist, verwenden wir als Hüllfläche eine Kugel mit radius r .

Nun können wir die Quellgleichung verwenden:

$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{eff} \rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = Q_{eff}$$

Der Betrag des D-Feldes entspricht also gerade der von der Hüllfläche eingeschlossenen Ladung geteilt durch die Fläche.

Für den Fall, dass wir die Hüllfläche grösser als die Kugel wählen, schliessen wir alle Ladungen ein:

$r > R$

$$\begin{aligned} Q_{eff} &= 20C \\ D &= \frac{20C}{4\pi r^2} \\ \vec{D} &= D \cdot \vec{e}_r \end{aligned}$$

Falls unsere Hüllfläche im inneren der Kugel ist, so schliessen wir keine Ladung ein:

$r < R$

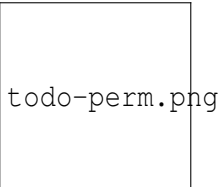
$$\begin{aligned} Q_{eff} &= 0C \\ \vec{D} &= 0 \end{aligned}$$

Somit gilt für das D-Feld einer Kugel mit Ladungen auf der Oberfläche:

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{20C}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

Da die elektrische Flussdichte nur von den Ladungsträgern abhängig ist, lässt sie sich relativ einfach berechnen und bildet meist den Grundstein für das Berechnen von E-Feldern usw.

Fliesst eine elektrische Flussdichte durch ein Material mit Ladungsträgern, so wird diese abgeschwächt, da sich im inneren des Materiales ein elektrisches Feld entgegen dem von Aussen angelegtem Feld ausbildet.



Gleichung Zusammenhang E-Feld und D-Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \vec{D}$$

Variablen:

D = Elektrische Flussdichte $[D] = \frac{As}{m^2}$

E = Elektrisches Felder $[E] = \frac{V}{m}$

ϵ_0 = Dielektrizitätskonstante $[\epsilon_0] = \frac{C}{V \cdot m}$

ϵ_r = rel. Permittivität. Unterschiedlich im Material $[\epsilon_r] = []$

Verhalten von Feldgrößen bei Materialübergängen

Trifft eine Elektrische Flussdichte durch eine geladene Fläche, so verändert sich die Normalkomponente des D-Feldes.

Die Tangentialkomponente des Feldes bleibt jedoch konstant.

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_{1t} + \vec{D}_{1n} \Rightarrow \vec{D}_2 = \vec{D}_{1t} + (1 + \sigma) \cdot \vec{D}_{1n}$$

Definition Spannung

Wir definieren die Spannung zwischen zwei Punkten als das Wegintegral über das elektrische Feld:

$$U_{AB} := \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

[U] = Volt [V]

Bemerkung zur Spannung

- Da die Beziehung $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ gilt und die Arbeit als $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ definiert ist, können wir die Spannung zwischen zwei Punkten als **Maß der benötigten Arbeit** um ein Ladungsträger von A nach B zu bringen betrachten.
- Die Spannung ist unabhängig des Weges. $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$
 \Rightarrow Start- und Endwert sind ausreichend.
- Die Spannung über einen Weg zurück zum Anfangsort entspricht 0V: $U_{AB} + U_{BA} = 0$
- Ist die Spannung auf dem gesamten Weg konstant und parallel zum Weg, vereinfacht sich das Integral zu einer Multiplikation:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = l_{AB} \cdot E$$

1.3 Kondensator

Bringen wir 2 Platten mit verschiedenen Ladungsträger nah zu einander, so bildet sich ein elektrisches Feld zwischen den Platten.

Die Stärke des elektrischen Feldes ist abhängig der Plattenladung und der Flächen der Platten.

Definition Kondensator

Ein Kondensator ist ein Bauelement, das in der Lage ist elektrische Ladung und somit Energie in Form von Feldlinien zu speichern.

Die charakteristische Kenngrösse des Kondensators ist die Kapazität C .

Die im Feld eines Kondensators gespeicherte Energie entspricht $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$

Definition Kapazität

Die elektrische Kapazität C beschreibt die Fähigkeit eines Bauelementes, Ladung Q bei einer gewissen Spannung U zu speichern.

$$C = \frac{Q}{U}$$

In Abhängigkeit der Felder, lässt sich die Kapazität folgendermassen beschreiben:

$$C = \frac{\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Falls das Feld senkrecht auf der Hüllfläche steht und der Integrationsweg parallel zum E-Feld verläuft gilt:

$$C = \frac{D \cdot A_{eff}}{\int_A^B E \cdot ds}$$

Gleichung Kapazität eines Plattenkondensators

Bei einem Plattenkondensator mit Flächen A und Abstand d , der mit einem Dielektrikum mit Konstante ϵ gefüllt ist, gilt:

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

Variablen:

A = Fläche einer Platte $[A] = m^2$

d = Abstand der Platten $[d] = m$

$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ Dielektrikum zw. den Platten $[\epsilon] = \frac{C}{V \cdot m}$

Begründung Da das E-Feld eines Plattenkondensators Konstant ist, gilt für die Kapazität:

$$C = \frac{D \cdot A_{eff}}{E \cdot d}$$

Mit dem Zusammenhang $D = \epsilon \cdot E$ und der Erkenntnis, dass das Feld nur auf der einen Seite der Platte existiert folgt:

$$C = \frac{E \cdot \epsilon \cdot A_{eff}}{E \cdot d} = \underline{\underline{\epsilon \frac{A}{d}}}$$

Definition Serienschaltung von Kapazitäten

Werden mehrere Kapazitäten seriell miteinander verbunden, so addieren sich die Kehrwerte der Kapazität

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{C_i} \quad \Bigg| \quad C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = (C_1 || C_2)$$

Begründung

Die Definition der Kapazität ist genau gegensätzlich zu der des Widerstandes ($R \propto \frac{l}{A}$, $C \propto \frac{A}{d}$)

Werden Kondensatoren in Serie geschaltet, so vergrößert sich der effektive Abstand der Platten, weshalb wir die Kehrwerte addieren müssen.

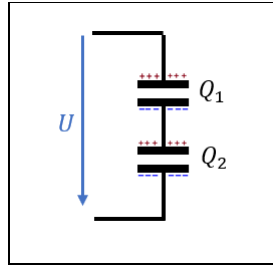
Definition Parallelschaltung von Kapazitäten

Werden mehrere Kapazitäten parallel miteinander verbunden, so addieren sich die Kapazitäten

$$C_{ges} = \sum_{i=0}^n C_i$$

Definition Ladungserhaltung in der Serienschaltung

Werden Kapazitäten in Serie geschaltet, besitzen alle dieselbe Ladung Q .



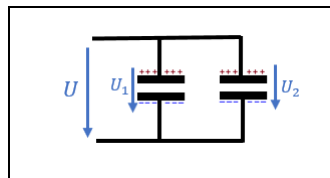
$$\underline{\underline{Q_1 = Q_2 = Q}}$$

Begründung

Damit sich auf dem ersten Kondensator die Ladung Q_1 ansammeln kann, muss diese Ladung unterhalb des Kondensators angesammelt werden. Angenommen, beide Kondensatoren waren zu Beginn ungeladen, so muss die Ladung, welche sich auf der unteren Platte des ersten Kondensators befindet, dieselbe Ladungsmenge auf der oberen Platte des unteren Kondensators hervorrufen.

Definition Maschenregel bei Parallelschaltung

Die Maschenregel für Spannung gilt auch bei Kondensatoren



$$\underline{\underline{U_1 = U_2 = U}} \text{ und } C_1 = \frac{Q_1}{U_1} \rightarrow \underline{\underline{Q_1 = C_1 \cdot U}}$$

Definition Grundlegende Gleichung am Kondensator

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator ist wie folgt gegeben

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt$$
$$i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt}(u_c)$$

Begründung

Mit dem Wissen, dass Strom definiert ist als die Ladung pro Zeit $\frac{dQ}{dt} = I$ folgt folgendes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C \cdot U) = \frac{\partial}{\partial t}(Q)$$
$$C \cdot \frac{dU}{dt} = I \rightarrow U(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I \cdot dt$$

1.4 Strom

Legen wir ein elektrisches Feld an einem Material mit beweglichen Ladungsträgern an, so beginnen sich die Ladungsträger entlang dem angelegten Feld zu bewegen.

Je mehr freie Ladungsträger pro Volumen vorhanden sind ($:= \rho$), desto mehr Ladungsträger werden sich zu bewegen beginnen.

Die Geschwindigkeit ($:= v$, Driftgeschwindigkeit), mit der sich die Ladungsträger bewegen, ist abhängig von der Stärke des Elektrischen Feldes und dem Material selbst. Wie gut sich ein Ladungsträger in einem Material bewegen kann, beschreiben wir mit der Beweglichkeit ($:= \mu$)

Definition Strom und Stromdichte

Der Strom I bezeichnet, wie viele Teilchen sich pro Zeit durch eine Fläche bewegen.

Die Stromdichte J sagt etwas darüber aus, wie viel Strom pro Fläche fließt (= **Dichte**)

$$I := \frac{dQ}{dt} = \oiint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Variablen:

$$I = \text{Strom } [I] = A = \frac{C}{s}$$

$$\vec{J} = \underbrace{n \cdot q}_{\rho} \vec{v} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Variablen:

$$\vec{J} = \text{Stromdichte } [J] = \frac{A}{m^2}$$

$$n = \text{Teilchendichte } [n] = \frac{1}{m^3}$$

$$q = \text{Ladungen der Teilchen } [q] = C = As$$

$$\vec{v} = \text{Driftgeschwindigkeit } [v] = \frac{m}{s}$$

$$\rho = \text{Raumladungsdichte } [\rho] = \frac{As}{m^3}$$

$$\kappa = \text{Elektrische Leitfähigkeit } [\kappa] = \frac{A}{V \cdot m}$$

Grundlage für den Strom sind bewegte Ladungsträger.

Im Falle eines Kupferkabel sind dies zum Beispiel Elektronen, die sich **gegen** das Elektrische Feld bewegen. Da Elektronen jedoch eine negative Ladung besitzen und der Strom als Ladung pro Zeit die durch eine Fläche hindurchfließt definiert ist, zählen negative Ladungen, die entgegen dem Strom fließen, zum Strom hinzu.

$$J := n \cdot q \cdot \vec{v}_I = n \cdot (-e) \cdot (-\vec{v}_I)$$

In anderen Baustoffen (wie zum Beispiel Halbleitern), bewegen sich **positive Ladungsträger** (=Löcher) mit dem Elektrischen Feld.

Diese führen zu einem positiven Strom in dessen Bewegungsrichtung.

Je nach Material, ist es auch möglich, dass beide Ladungsträger zum Stromfluss beitragen, sich jedoch nicht gleich gut im Material bewegen können.

Aus diesem Grund, gibt es für Positive wie negative Ladungen verschiedene Beweglichkeiten.

Definition Elektrische Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit (κ) beschreibt, wie Gross die Stromdichte in einem Material, bei einem gegebenen E-Feld wird.

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} = \vec{J}_- + \vec{J}_+ = \underbrace{(n_- \cdot q_- \cdot \mu_- + n_+ \cdot q_+ \cdot \mu_+)}_{\kappa} \cdot \vec{E}$$

Dabei bezeichnen die Variablen μ_x die **Beweglichkeit** der einzelnen Ladungsträger und sind ein Mass dafür, wie schnell sich die Teilchen bei einem gegebenem E-Feld bewegen werden.

1.5 Verhalten des J- und E-Feldes an Materialübergängen

Trifft eine Stromdichte auf einen Materialübergang, so ändert sich der Betrag der Tangentialkomponente. Die **Normalkomponente bleibt gleich**.

Es gilt bei Materialübergängen:

Für das J-Feld:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{J_{t1}}{J_{t2}}$$
$$J_{n1} = J_{n2}$$

Für das E-Feld:

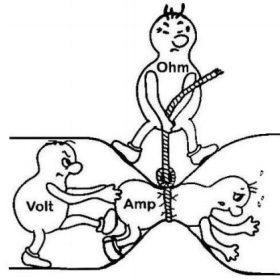
$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}}$$
$$E_{t1} = E_{t2}$$

1.6 Netzwerke

Definition Widerstand und Leitwert

Der **Widerstand** bestimmt, wieviel Strom fließen kann, wenn eine bestimmte Spannung angelegt wird.

Ist der Wert des Widerstandes unabhängig vom Strom, so bezeichnen wir ihn als ohmschen Widerstand.



$$R := \frac{U}{I} = \rho \frac{l}{A}, [R] = \Omega, \text{Ohm}$$

Als **Leitwert** bezeichnen wir die Inverse des Widerstandes. Er gibt an, wie groß die Spannung ist, wenn ein gewisser Strom fließt.

$$Y = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot l}$$

Da das elektrische Feld wirbelfrei ist, erhalten wir unabhängig vom Weg den gleichen Wert für die Spannung U_{AB}

Dies bedeutet jedoch auch, dass wir für einen geschlossenen Weg die Spannung 0V erhalten müssen, da für jede geschlossene Kurve γ gilt:

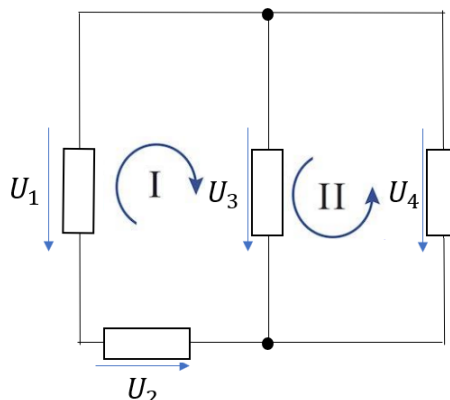
$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_{01} + U_{10} = 0$$

Mit dieser Erkenntnis können wir die Maschenregel definieren:

Definition Maschenregel

Die Summe aller Spannungen in einer Masche ergibt 0

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$



Maschenregel

$$\text{I: } (-U_1) + U_3 + (-U_2) = 0$$

$$\text{II: } U_3 + (-U_4) = 0$$

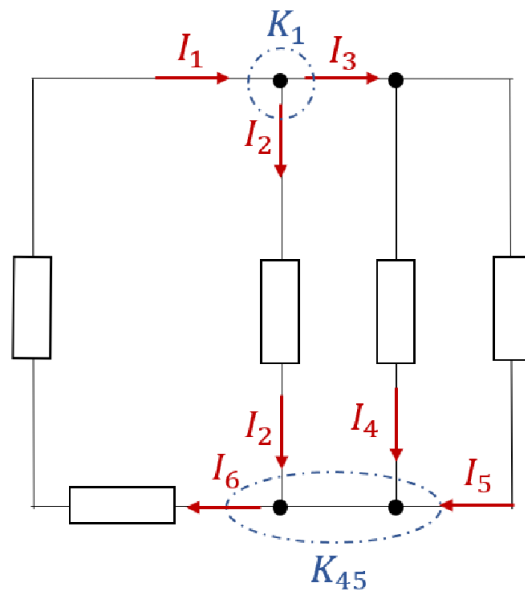
Analog können wir mithilfe der Ladungserhaltung argumentieren, dass sämtliche Ladungen, welche in ein Gebiet hineinfließen, auch wieder aus diesem hinausfließen müssen.

Definition Knotenregel

Die Summe aller Ströme die in einen Knoten hinein/hinausfließen muss 0 ergeben.

$$\sum_{i=0}^n I_n = 0$$

Wichtig Die Knotenregel kann auch auf ein Gebiet von Knoten angewandt werden.



Knotengleichungen

$$K_1: I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$K_{45}: I_2 + I_4 + I_5 - I_6 = 0$$

1.7 Grundlegende Netzwerkumformungen

Wir interessieren uns nun dafür, wie sich Widerstände verhalten, wenn wir sie seriell/parallel verknüpfen.

Definition Serienschaltung

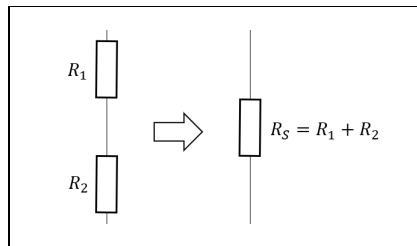
Werden mehrere Widerstände seriell miteinander verbunden, so addieren sich die Widerstandswerte

$$R_{\text{serie}} = \sum_{i=0}^n R_i$$

Begründung

Mehrere Widerstände in Serie können als ein langer Widerstand mit konstanter Fläche angesehen werden. Da die Längenabhängigkeit des Widerstandes im Zähler steht, addieren sich die Werte.

$$R_s = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A} = \rho \cdot \frac{l_1}{A} + \rho \cdot \frac{l_2}{A} = R_1 + R_2$$



Definition Parallelschaltung

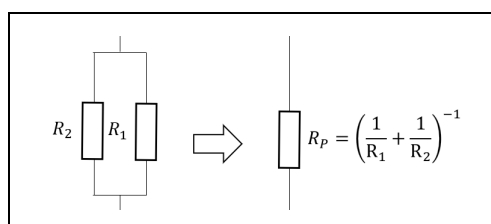
Werden mehrere Widerstände parallel miteinander verbunden, so addieren sich die Leitwerte

$$Y_{\text{parallel}} = \sum_{i=0}^n Y_i \quad \left| \quad R_{\text{parallel}} = \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

Begründung

Mehrere Widerstände parallel können als ein Widerstand mit größerer Fläche und konstanter Länge angesehen werden. Da die Flächenabhängigkeit des Widerstandes im Nenner steht, addieren sich die Leitwerte.

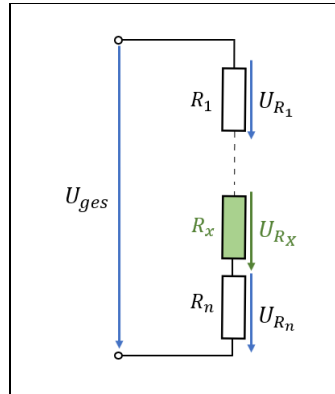
$$Y_p = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1 + A_2}{l} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1}{l} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_2}{l} = Y_1 + Y_2$$



Definition Spannungsteiler

Die Spannungsteilerregel gibt an, wie sich eine Spannung über verschiedene Widerstände aufteilt, wenn diese in **Serie** geschaltet sind.

$$U_{R_x} = U_{ges} \cdot \frac{R_x}{\sum R_i}$$



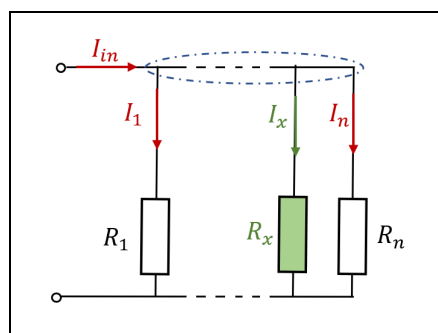
Begründung

Gemäss $U = R \cdot I$ und der Serienschaltung ist der Strom durch alle Widerstände gegeben als $I = \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$.
Nun müssen wir nur noch den Strom mit dem gesuchten Widerstand multiplizieren um die Spannung zu erhalten: $U_{R_x} = R_x \cdot I = R_x \cdot \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$

Definition Stromteiler

Die Stromteilerregel gibt uns an, wie sich die Ströme in einem Knoten aufteilen, wenn die Widerstände **parallel** geschaltet sind.

$$I_x = I_{in} \cdot \frac{(R_1 || \dots || R_n)}{R_x}$$



Spezialfall 2 Widerstände

Falls der Stromteiler nur mit zwei Widerständen angewendet wird, vereinfacht sich die Formel:

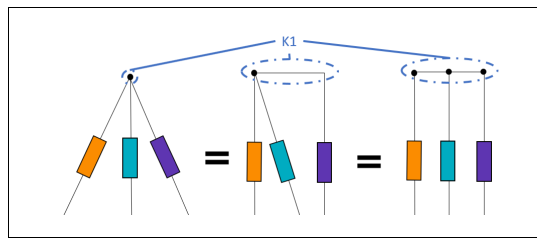
$$I_x = I_{in} \cdot \frac{R_y}{R_x + R_y}$$

Der Widerstand, dessen Strom uns **nicht** interessiert, steht hierbei im Zähler!

1.7.1 Grundregeln bei Netzwerkumformungen

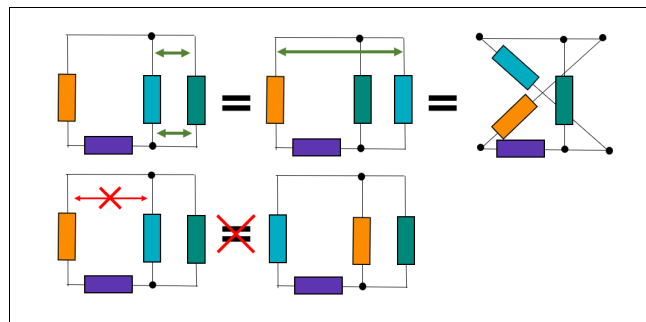
Regel 1 Expandieren von Knoten

Knoten können aufgeteilt und mit Verbindungslinien verbunden werden



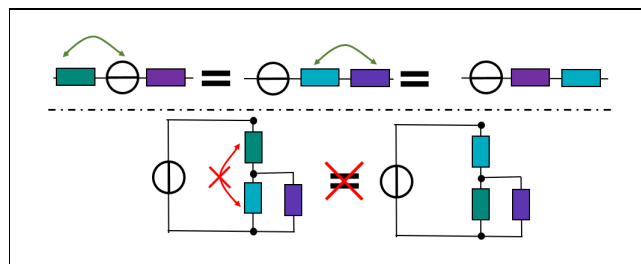
Regel 2 Verschieben von Elementen

Elemente können entlang von **Verbindungslinien ohne Widerständen** verschoben werden



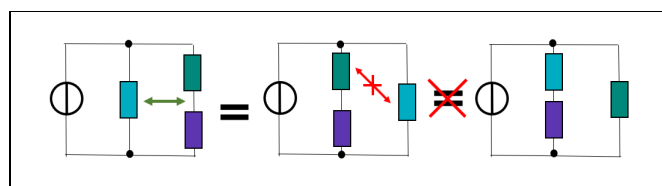
Regel 3 Vertauschen von Elementen in Serie

Elemente, die **in Serie** geschaltet sind, können vertauscht werden



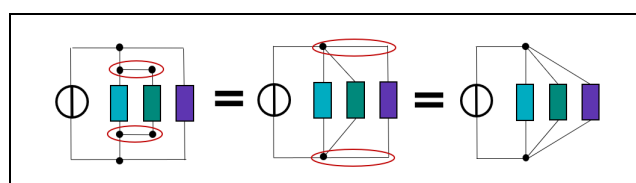
Regel 4 Vertauschen von parallel geschalteten Elementen

Elemente die **parallel** geschaltet sind, können vertauscht werden



Regel 5 Knoten kontrahieren

(Analog zu 1) Knoten können zusammengezogen werden, sofern sie nicht durch einen Widerstand verbunden sind.

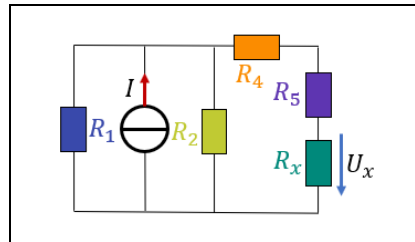


1.8 Vorgehen um Schaltbilder mit einer Quelle zu vereinfachen

1. Bringe Quelle auf die linke Seite
2. Forme mit Regel 1 - 5 das Netzwerk soweit um, bis nur noch Spannungs-/Stromteiler oder einfache Maschen vorhanden sind.
3. Expandiere nun das Netzwerk Schritt für Schritt, bis die Spannung über dem gesuchten Widerstand berechnet werden kann.

Beispiel #1

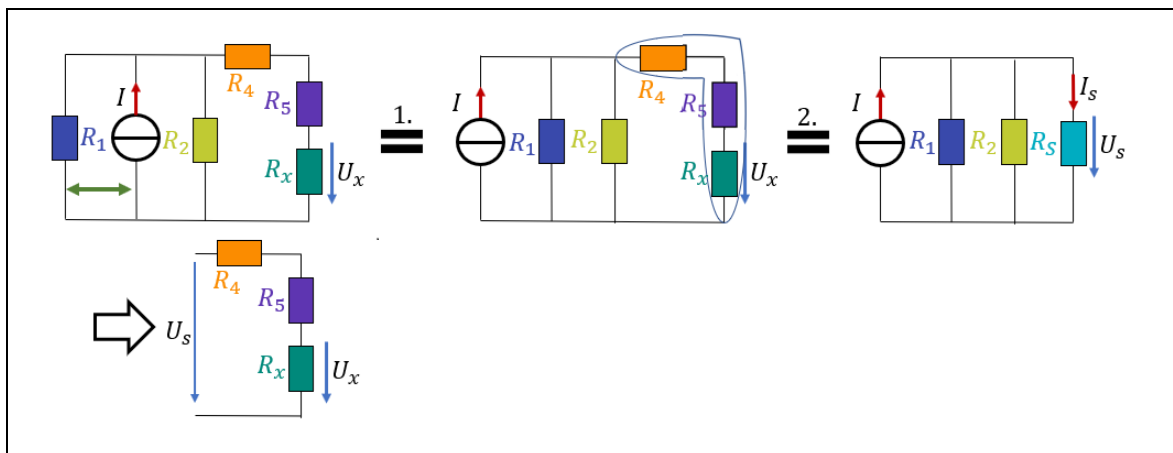
- 1) Berechnen sie U_x in Abhängigkeit des Quellstromes I



Lösung

1. Gemäss Regel 2 können wir R_1 und die Stromquelle vertauschen.
2. Die Widerstände R_4, R_5 und R_x können zu $R_S = R_3 + R_4 + R_5$ zusammengefasst werden.
3. Mithilfe der Stromteilerregel erhalten wir $I_s = I \cdot \frac{(R_1 || R_2 || R_S)}{R_S}$ und somit $U_s = I \cdot (R_1 || R_2 || R_S)$
4. Die Spannung U_s liegt also über dem Widerstand R_S an. Wenn wir diesen wieder in die ursprünglichen 3 Widerstände aufteilen, erhalten wir mithilfe der Spannungsteilerregel

$$U_x = U_s \cdot \frac{R_x}{R_4 + R_5 + R_x}$$



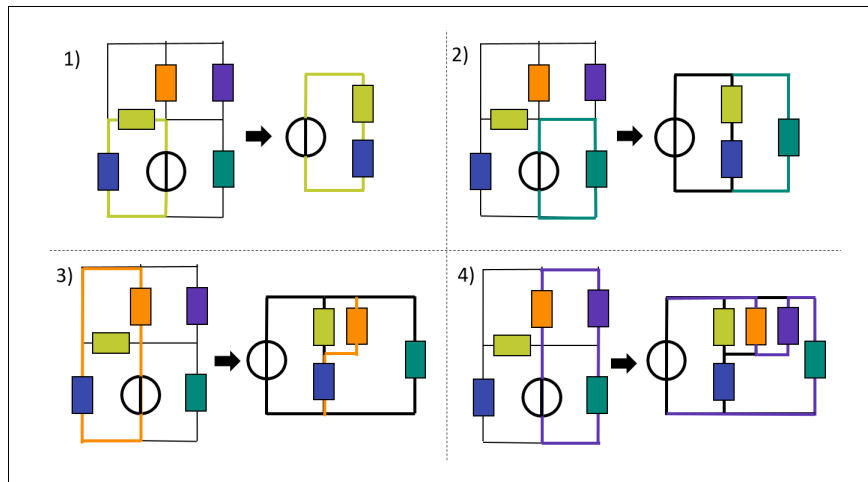
In manchen Fällen kann es schwierig sein, die Quelle auf die linke Seite zu bringen oder das Schaltbild nützlich umzuformen.

Um ein erstes Ersatzschaltbild zu erhalten, kann das "Flussverfahren" angewandt werden.

Definition Flussverfahren

Beim Flussverfahren überlegt man sich sämtliche Arten, wie der Strom von einem Ende der Quelle zum anderen fließen kann, und zeichnet somit ein Ersatzschaltbild.

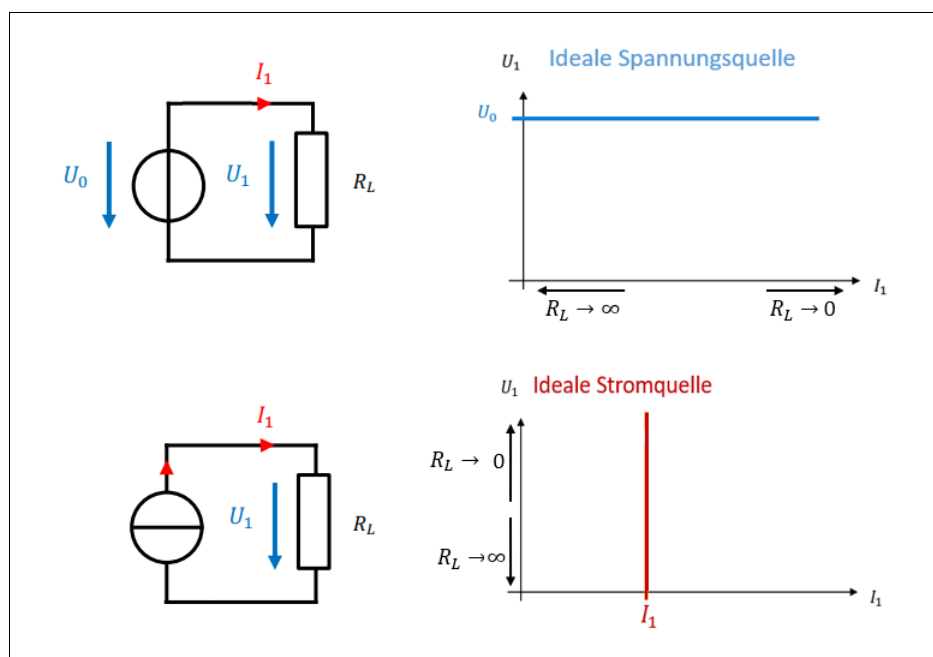
Beispiel



1.9 Quellen

Definition Ideale Quelle

Eine ideale Strom-/Spannungsquelle liefert immer denselben Strom/dieselbe Spannung, unabhängig von der Last, welche angehängt wird.



Mit idealen Strom-/Spannungsquellen können wir theoretisch unendlich viel Spannung/Strom über einem Lastwiderstand erzeugen.

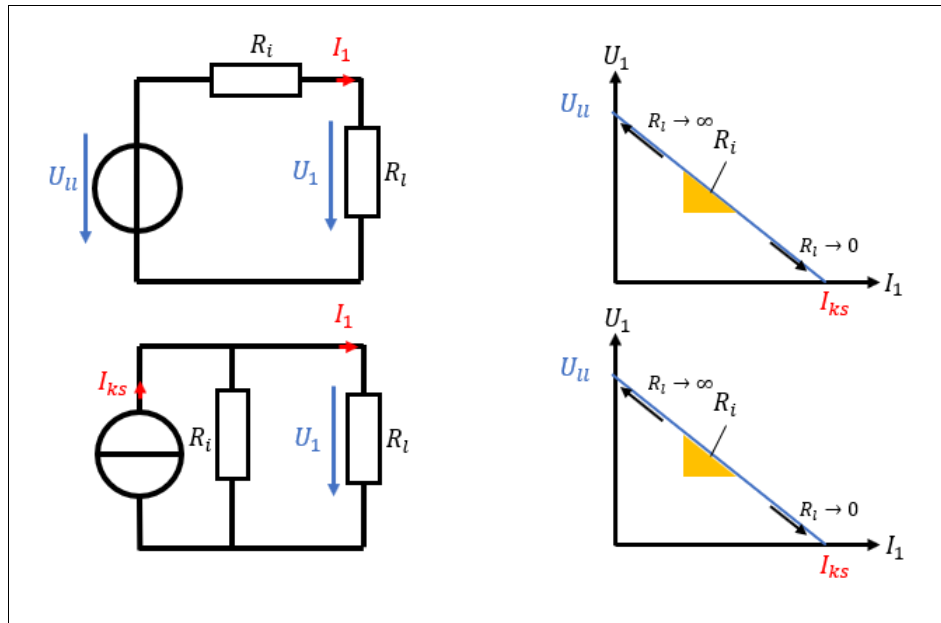
(Beispiel ideale Spannungsquelle im Kurzschluss/ideale Stromquelle im Leerlauf)

Bei einer realen Quelle kann jedoch nur eine endliche Spannung/Strom auftreten, weshalb wir Verluste innerhalb der Quelle mit einem Innenwiderstand R_i modellieren.

Definition Reale Quelle

Eine reale Quelle bezeichnet eine ideale Quelle mit Vorwiderstand.

Bei einer **Stromquelle** ist der Widerstand **parallel**, bei einer **Spannungsquelle** ist der Widerstand in **Serie**.



1.10 Leistungsanpassung

Definition Leistung

Als Leistung bezeichnen wir das Produkt von Strom und Spannung.

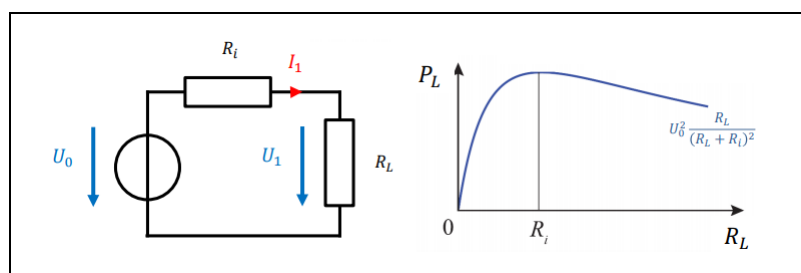
Sie bezeichnet die in einer Zeitspanne umgesetzte Energie an einem Bauteil.

$$P := U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

Definition Maximale Leistung

Um bei einer realen Quelle maximale Leistung an einen Lastwiderstand abzugeben, muss der Lastwiderstand gleich gross sein wie der Innenwiderstand der Quelle.

$$R_i = R_L \Rightarrow P = P_{max}$$



Begründung

Die Leistung an einem Lastwiderstand in Serie ist gegeben als:

$$P_L = U_L \cdot I_L = \frac{U_L^2}{R_L} = \frac{(U_0 \frac{R_L}{R_L + R_i})^2}{R_L} = U_0^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2}$$
$$\frac{d}{dR_L}(P_L) = -U_0^2 \cdot \frac{R_L - R_i}{(R_L + R_i)^3} = 0 \Rightarrow R_L = R_i \Rightarrow P_L = P_{max}$$

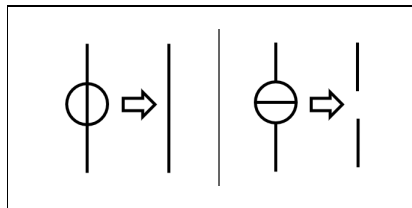
1.11 Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip besagt, dass wir bei einem Netzwerk mit mehreren Quellen einzelne Teillösungen in Abhängigkeit von nur einer Quelle berechnen und aufsummieren können.

Dies gilt jedoch nicht für die Leistung, da diese nicht linear ist!

Um das Superpositionsprinzip anzuwenden, müssen wir alle ausser eine Quelle auf "0" setzen.

Spannungsquellen werden also mit **Kurzschlüssen** ersetzt und Stromquellen mit **Leerläufen**.



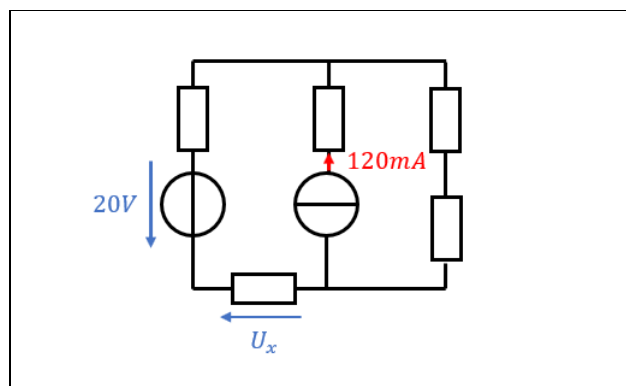
Wieso

Eine Spannungsquelle zu "0" zu setzen bedeutet, dass über diesem Bauteil keine Spannung abfallen darf. Über einem Kurzschluss wird nie eine Spannung abfallen, da dieser als Widerstand mit Wert 0 modelliert werden kann.

Eine Stromquelle zu "0" zu setzen bedeutet, dass durch dieses Bauteil kein Strom fließen darf. Dies entspricht gerade einem Leerlauf, da dieser als Widerstand mit Wert $\rightarrow \infty$ modelliert werden kann.

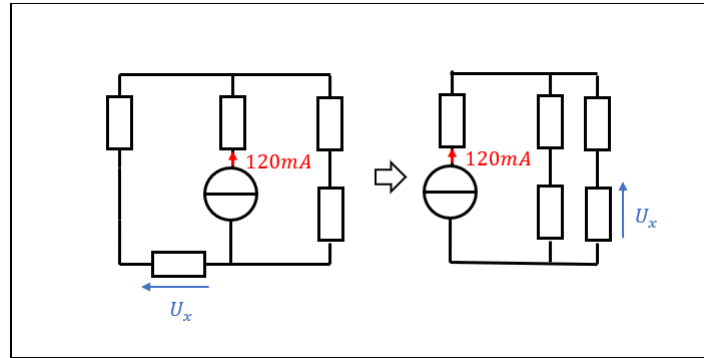
Beispiel #2

Aufgabe Berechnen sie die Spannung U_x und die Leistung P_x im folgenden Netzwerk, wenn alle Widerstände $R = 100\Omega$ betragen.



Lösung

Zuerst setzen wir die Spannungsquelle zu 0 und erhalten das folgende ESB



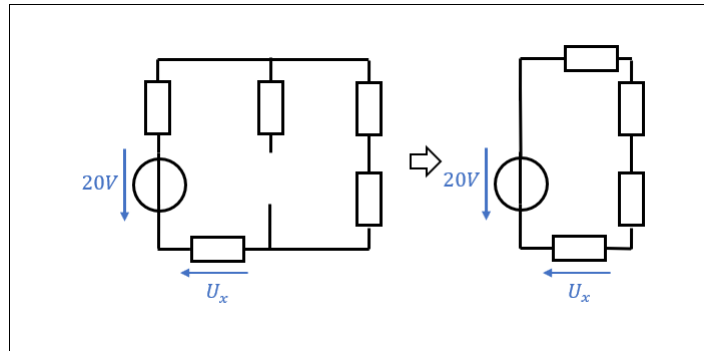
Nun berechnen wir den Strom I_{x1} durch den Widerstand mithilfe eines Stromteilers:

$$I_{x1} = 60mA$$

Die Spannung U_x ist entgegen der Stromrichtung eingezeichnet:

$$U_{x1} = -R_x \cdot I_x = -100 \cdot 60mA = -6V$$

Nun setzen wir die Stromquelle zu 0:



Die Spannung U_{x2} berechnet sich als Spannungsteiler:

$$U_{x2} = 20V \cdot \frac{100\Omega}{400\Omega} = 5V, I_{x2} = \frac{5V}{100\Omega} = 50mA$$

Schlussendlich berechnet sich die Spannung als Summe der Teilspannungen:

$$U_x = U_{x1} + U_{x2} = 5V - 6V = -1V$$

Und die Leistung:

$$P_x = \frac{U_x^2}{R_x} = 10mW$$

Welche **nicht** der Summe der Teilleistungen entspricht:

$$P_{sum} = P_1 + P_2 = U_{x1} \cdot I_{x1} + U_{x2} \cdot I_{x2} = 360mW + 250mW = 610mW$$

1.12 Analyse umfangreicher Netzwerke

Möchten wir in Netzwerken sehr viele Grössen berechnen, oder ist das Netzwerk sehr komplex, so können andere (meist Computer basierende) Verfahren verwendet.

Sämtliche Verfahren bauen darauf auf, dass für ein beliebiges Netzwerk das Aufstellen sämtlicher Knoten und Maschengleichungen genügt, um alle gesuchten Grössen zu berechnen.

Unabhängige Gleichungen

Seien z die Anzahl Zweige eines Netzwerkes (Verbindungen 2-er Knoten) und k die Anzahl Knoten, so müssen z linear unabhängige Gleichungen gefunden werden, um alle Grössen im Netzwerk zu berechnen.

Die Gleichungen können folgendermassen gefunden werden:

($k-1$) Gleichungen können aus Knotengleichungen gefunden werden.
($z - (k-1)$) übrige Gleichungen werden mithilfe von Maschengleichungen gefunden.

Vorgehen - Analyse von Umfangreichen Netzwerken

- Entferne alle Widerstände und Quellen und zeichne das Schaltbild neu.
- Nummeriere alle Knoten. Die Anzahl der Knoten wird mit k bezeichnet.
- Alle Verbindungslinien, welche zwei Knoten verbinden, werden als Zweige bezeichnet.
#Zweige = z
- Definiere Ströme für jeden Zweig und stelle ($k-1$) Knotengleichungen auf. Schreibe diese am Besten bereits in Matrix schreibweise:

Bsp: $I_1 + I_2 = I_3, I_3 - I_4 = 2A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2A \end{bmatrix}$$

- Finde $z - (k-1)$ Unabhängige Maschengleichungen. (Mittels Vollständiger Baum / Auftrennen der Maschen)
- Ersetze die Spannungen der Maschengleichung mit Strom mal Widerstand und ergänze das Gleichungssystem.

Bsp: $U_1 + U_2 = 5V, U_2 - U_3 = U_4$

→ $R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 5V, R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R_2} & -\mathbf{R_3} & -\mathbf{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2A \\ \mathbf{5V} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

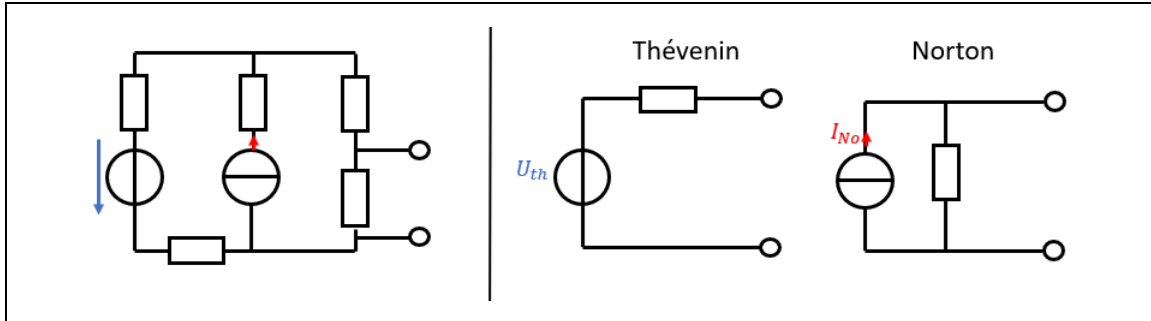
Definition Thévenin / Norton Äquivalent

Jedes Netzwerk mit **linearen** Bauelementen und 2 Klemmen lässt sich als reale Quelle darstellen.

Thévenin Äquivalent Darstellung als reale **Spannungsquelle** mit Leerlaufspannung, die an den Klemmen auftritt

Norton Äquivalent Darstellung als reale **Stromquelle** mit Kurzschlussstrom, der an den Klemmen auftritt

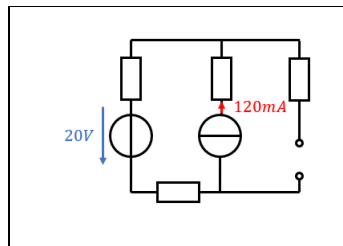
Der Innenwiderstand entspricht dem von außen gemessenen Widerstand, wenn alle Quellen zu 0 gesetzt werden.



Beispiel #3 - Thévenin Äquivalente Schaltung

Aufgabe

Geben sie eine Thévenin Äquivalente Schaltung (Innenwiderstand R_i , U_{Th}) für folgende Klemmen an. Alle Widerstände haben Wert 100Ω



Lösung

Zuerst berechnen wir die Leerlaufspannung für die Stromquelle:

$$U_{LL1} = 120mA \cdot 200\Omega = 24V$$

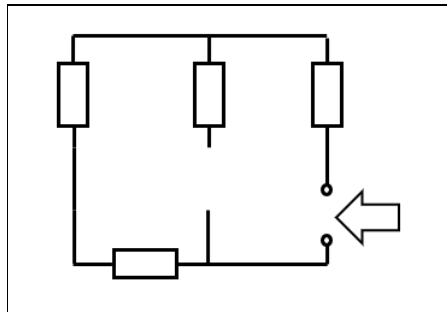
Danach die Leerlaufspannung für die Spannungsquelle:

$$U_{LL2} = 20V$$

Die Gesamtspannung und somit die Spannung der Ersatzspannungsquelle beträgt:

$$\underline{\underline{U_{Th} = U_{LL1} + U_{LL2} = 44V}}$$

Nun müssen wir noch den Innenwiderstand berechnen. Dazu setzen wir alle Quellen zu 0 und berechnen den von aussen gemessenen Widerstand:



$$\underline{\underline{R_i = 100\Omega + 100\Omega + 100\Omega = 300\Omega}}$$

2 Magnetostatik

2.1 Das Magnetische Feld und die Lorentzkraft

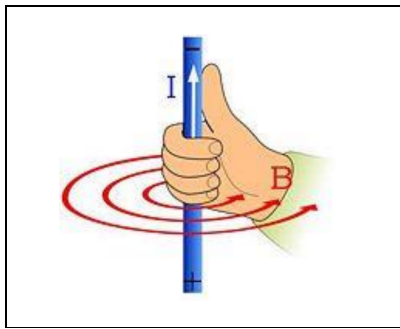
Analog zum elektrischen Feld definieren wir ein magnetisches Feld, dessen Feldlinien Kräfte auf eine bewegte Ladung auswirken.

Auslöser für das magnetische Feld sind **bewegte Ladungen** welche gemäss der rechten Hand Regel ein Magnetfeld hervorrufen, das diese einschliesst.

Im Falle von Stabmagneten oder Ähnlichem ist es der Spin der Elektronen, welcher das stationäre Magnetfeld auslöst*

Definition Rechte Hand Regel

Das Magnetfeld B um einen stromdurchflossenen Leiter baut sich stets gegen den Uhrzeigersinn auf und ist **immer** geschlossen.

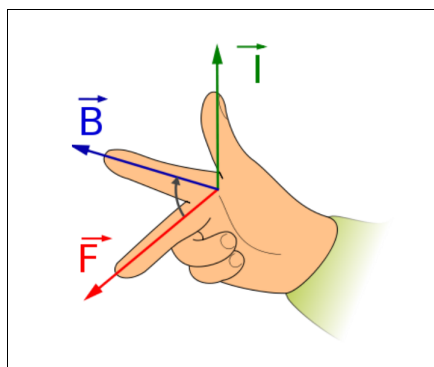


Definition Lorentzkraft

Bewegte Ladungen in einem Magnetfeld verspüren eine Kraft, welche proportional zur Stärke des B-Feldes und der Geschwindigkeit ist.

Die Kraft steht senkrecht zu den Feld- und Geschwindigkeits-Vektoren.

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$



Definition H-Feld

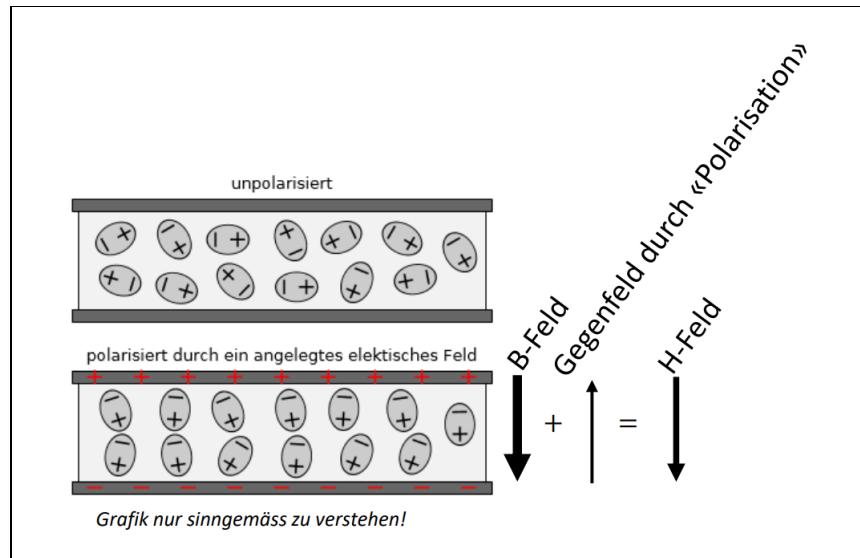
Legen wir ein magnetisches Feld an eine Materie an, so richten sich die eingeschlossenen Teile entgegen dem angelegten Feld aus und "schwächen" dieses.

Das "abgeschwächte" Feld bezeichnen wir als H-Feld und entspricht dem Feld, welches real auf Ladungen wirkt.

Der "Abschwächungsfaktor" $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ wird als Permeabilität bezeichnet.

Das H-Feld verändert sich bei Materialübergängen, das **B-Feld** bleibt **konstant**.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$



Definition Durchflutungssatz

Der Durchflutungssatz besagt, dass das Kurvenintegral des H-Feldes über eine beliebige **geschlossene** Kurve gerade dem Wert des durch diese Fläche fließendes Stromes entspricht.

Diesen Wert definieren wir als magnetische Spannung Θ

$$\Theta = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Beispiel #4

Aufgabe

Berechnen Sie die magnetische Spannung Θ und das H-Feld \vec{H} um einen unendlich langen, mit Strom I durchflossenen Leiter. Der Radius des Leiters sei ρ .

Lösung

Wir wählen als Kurve einen Kreis mit Radius R um unseren Leiter.

Da wir von einem perfekten Leiter ausgehen, treffen wir die Annahme, dass das Magnetfeld achsensymmetrisch und somit konstant entlang des Kreises ist.

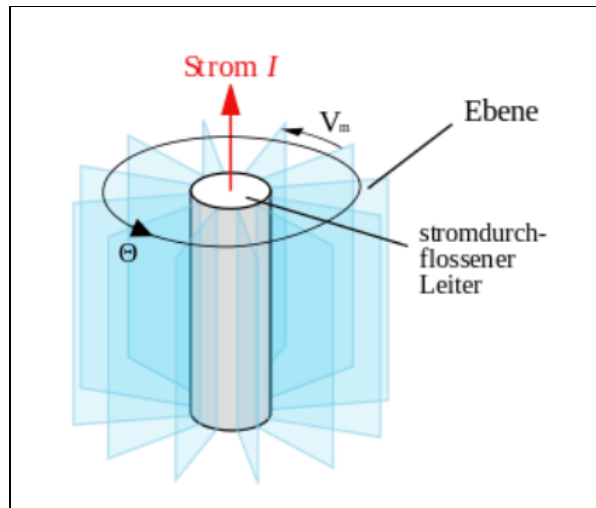
Wir erhalten: für $R > \rho$:

$$\underline{\underline{\Theta = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = I}}$$
$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = I \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R) = \frac{I}{2\pi R} \cdot \vec{e}_\phi}}$$

Für $R < \rho$:

$$\underline{\underline{\Theta(R) = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi \rho^2} \cdot r \cdot d\phi \cdot dr = \frac{2 \cdot I}{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} R^2 = \frac{R^2 \cdot I}{\rho^2}}}$$
$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = \frac{I \cdot R^2}{\rho^2} \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R) = \frac{I}{2\pi \rho^2} \cdot R \cdot \vec{e}_\phi}}$$

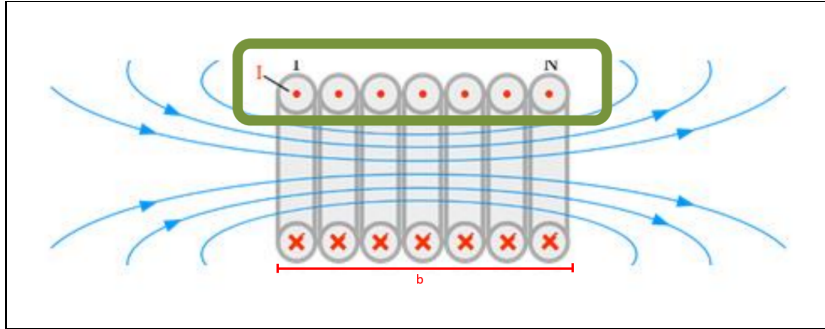
Skizze



Magnetische Spannung innerhalb einer Spule

Analog zu den Berechnungen beim Leiter kann man die magnetische Spannung innerhalb einer Spule berechnen. Unter der Annahme, dass das magnetische Feld ausserhalb der Spule vernachlässigbar ist und die Spule N Windungen hat, erhalten wir für den Fluss durch das Innere einer Spule:

$$\Theta_{Spule} = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = N \cdot I \simeq \int_0^l \vec{H} \cdot d\vec{s}$$



Im folgenden gehen wir davon aus, dass die magnetische Spannung ungefähr $\Theta = \int_0^l \vec{H} d\vec{s}$ entspricht.

Definition magnetischer Fluss

Als magnetischen Fluss Φ bezeichnen wir die "Menge B-Feld", welche durch eine gegebene Fläche fließt.

$$\Phi := \iint_A \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot da$$

Definition magnetischer Widerstand

Als magnetischer Widerstand R_m bezeichnen wir das Verhältnis zwischen magnetischer Spannung und magnetischem Fluss

Er sagt etwas darüber aus, wie gross der magnetische Fluss bei einer gegebenen magnetischen Spannung ist.

$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} \underbrace{\quad}_{\text{magn. Leiter}} \frac{l}{\mu \cdot A}$$

Begründung

Wir gehen davon aus, dass die magnetische Spannung über einem Leiter mit Länge l anliegt, dessen Querschnittsfläche A ist.

$$\frac{\Theta}{\Phi} = \frac{\int_0^l \vec{H} \cdot d\vec{s}}{\iint_a \vec{B} d\vec{A}} = \frac{l \cdot H}{\mu \cdot A \cdot H} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

2.1.1 Das Reluktanzmodell

magnetische Grössen im Vergleich zu elektrischen

	Elektrisch	Einheit	Magnetisch	Einheit
Leitfähigkeit	κ	$[\frac{1}{\Omega \cdot m}]$	$\mu (= \mu_0 \cdot \mu_r)$	$[\frac{H}{m}]$
Widerstand	$R = \frac{l}{\kappa A}$	$[\Omega]$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$	$[\frac{1}{H}]$
Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$[S]$	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$	$[H]$
Spannung	$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$[V]$	$\Theta_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$	$[A]$
Strom / Fluss	$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$[A]$	$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A}$	$[Wb]$
Ohmsches Gesetz	$U = R \cdot I$		$\Theta = R_m \cdot \Phi$	
Maschenregel	$U_0 = \sum_{Masche} U_m$		$\Theta (= NI) = \sum_{Masche} \Theta_m$	
Knotenregel	$\sum_{Knoten} I_k = 0$		$\sum_{Knoten} \Phi_k = 0$	

Definition Reluktanzmodell

Das Reluktanzmodell besagt, dass man ein magnetisches Ersatzschaltbild mit denselben Rechenregeln wie bei einem elektrischen Netzwerk berechnen kann.

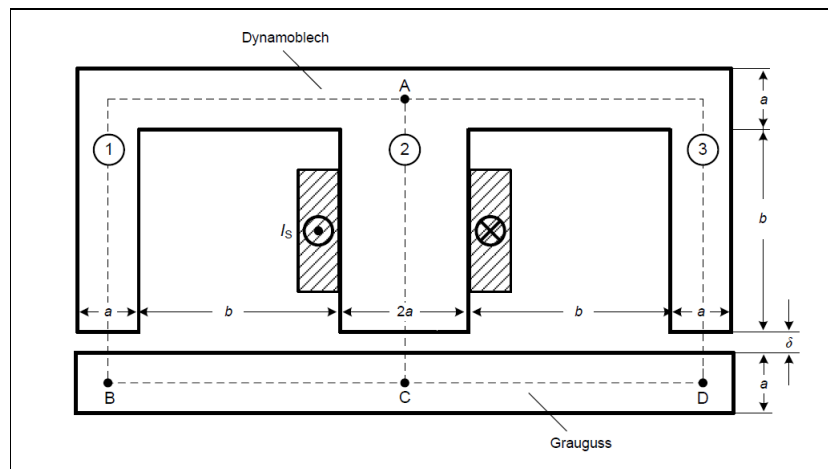
Vorgehen

- Spulen werden mit Spannungsquellen ersetzt $V_m = N \cdot I$
- Magnetkerne/Luftspalte etc. werden mithilfe der Länge und Querschnittsfläche als Widerstände modelliert. $R_m = \mu \frac{l}{A}$
- Für magnetische Widerstände gelten die gleichen Regeln wie bei elektrischen (Seriellschaltung / Parallelschaltung).

Beispiel #5

Aufgabe Hubmagnet

Der mittlere Schenkel 2 eines E-Kernes aus Dynamoblech trägt eine Wicklung mit N Windungen. Über die drei Luftspalten mit gleicher Länge δ wird ein Anker aus Grauguss mit der Kraft F_A angezogen. E-Kern und Anker besitzen die gleiche Dicke d .



Gegeben sind folgende Parameter:

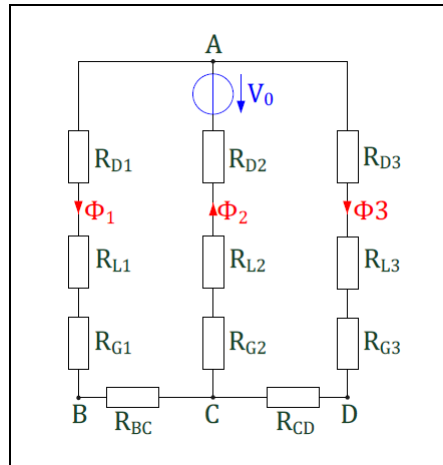
Windungszahl der Wicklung:	$N = 1000$
Magnetische Feldkonstante:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$
Relative Permeabilität Dynamoblech:	$\mu_{rD} = 2000$
Relative Permeabilität Gusseisen:	$\mu_r = 250$
Luftspaltlänge:	$\delta = 0.1 \text{ mm}$
Anzugskraft Anker:	$F_A = 150 \text{ N}$
Breite E-Kern und Anker:	$a = 20 \text{ mm}$
Abstand der Schenkel:	$b = 80 \text{ mm}$
Dicke E-Kern und Anker:	$d = 50 \text{ mm}$

Berechnen sie die magnetische Spannung auf dem Weg ACD.

Lösung

Zuerst zeichnen wir ein Reluktanzmodell des Magneten.

Wobei R_L die Luftspalte, R_{Di} die Beine des Magneten und R_{Gi} sowie R_{BC} und R_{CD} das Gusseisenstück modellieren.



Für die Spannungsquelle erhalten wir:

$$V_0 = N \cdot I_s = 1000 \cdot 211.3 \text{ mA} = 211.3 \text{ A}$$

Für die Widerstände:

$$\begin{aligned} R_{D1} &= R_{D3} = \frac{2b+2a}{\mu_0 \mu_r D a d} = 79.6 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{D2} &= \frac{b+\frac{a}{2}}{2\mu_0 \mu_r D a d} = 17.9 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{L1} &= R_{L3} = \frac{\delta}{\mu_0 a d} = 79.6 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{L2} &= \frac{\delta}{2\mu_0 a d} = 39.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{G1} &= R_{G3} = \frac{\frac{a}{2}}{\mu_0 \mu_r G a d} = 31.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{G2} &= \frac{\frac{a}{2}}{2\mu_0 \mu_r G a d} = 15.9 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{BC} &= R_{CD} = \frac{b+\frac{3}{2}a}{2\mu_0 \mu_r G a d} = 350.1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \end{aligned}$$

Weiter können wir die einzelnen Widerstände seriell zusammenfassen:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{D1} + R_{L1} + R_{G1} = 191 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_2 &= R_{D2} + R_{L2} + R_{G2} = 73.7 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_3 &= R_{D3} + R_{L3} + R_{G3} = 191 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_E &= R_{BC} = R_{CD} = 350.1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \end{aligned}$$

Die Spannung U_{AC} lässt sich als Spannungsteiler berechnen:

$$U_{AC} = U_0 \cdot \frac{((R_1 + R_E) || (R_3 + R_E))}{((R_1 + R_E) || (R_3 + R_E)) + R_2} = 166 \text{ A}$$

Und somit die Spannung U_{AD} :

$$\underline{\underline{U_{AD}}} = 166 \text{ A} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_E} = \underline{\underline{58.6 \text{ A}}}$$

2.2 Spule und Induktivität

Definition Induktivität

Die Induktivität L beschreibt, wieviel magnetischer Fluss Φ sich bei einem Strom I im Inneren eines Bauteiles aufbaut.

$$L := \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N^2}{R_m}$$

Die in einer Induktivität gespeicherte Energie berechnet sich zu

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Definition Serien und Parallelschaltung

Induktivitäten verhalten sich analog zu Widerständen:



Serienschaltung

$$L_{\text{serie}} = \sum_{i=0}^n L_i$$

Parallelschaltung

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{L_i} \quad \left| \quad L_{p2} = (L_1 || L_2) \right.$$

Übersicht

Energie	Strom und Spannung	DC-Verhalten	High-AC Verhalten*	Admitanz*
$L = \frac{N\Phi}{I}$ $W = \frac{1}{2} LI^2$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_c(t) dt$ $u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(i_c)$	Leerlauf 	Kurzschluss 	$j\omega L$