1 Elektrische Netzwerke

1.1 Grundlagen

Maschengleichung
Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist gleich Null.

$$\sum_{\text{Masche}} U = 0$$

Knotengleichung
Die Summe aller Ströme in einem Knoten ist gleich Null.

$$\sum_{\text{Knoten}} I = 0$$

Ohm'sches Gesetz

$$\boxed{U = R \cdot I}$$

Serienschaltung
Der Gesamtwiderstand entspricht der Summe von seriell geschalteten Widerständen.

$$R_{tot} = \sum R$$

Parallelschaltung
Der Kehrwert des Gesamtwiderstand entspricht der Summe der Kehrwerte von parallel geschalteten Widerständen.

$$\frac{1}{R_{tot}} = \sum \frac{1}{R} \qquad G_{tot} = \sum G$$

G ist der Kehrwert des ohmschen Widerstandes und wird als elektrischer Leitwert bezeichnet. Für zwei parallele Widerstände gilt:

$$R_{tot} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

1.2 Ohm'sches Gesetz extended

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \qquad [I] = A, \qquad J = \frac{dI}{dA} \qquad [J] = \frac{A}{m^2}$$

- **Spezifische Leitfähigkeit**
  Driftgeschw. $\vec{v}_{Drift} = -\mu_e \vec{E}$ wobei $\mu_e =$ "Beweglichkeit"

$$\vec{J} = \vec{V}_{Drift} \cdot \rho = \underbrace{-\rho\mu_e}_{\kappa} \vec{E}, \qquad \kappa = \text{spez.Leitf.}, \qquad [\kappa] = \frac{A}{Vm} = \frac{1}{\Omega m}$$

- **Spezifischer Widerstand** $\rho_R = \frac{1}{\kappa}$, $[\rho_R] = \Omega m = \frac{Vm}{A}$
- **Temperaturabhängigkeit** $\rho_R(T) = \rho_{R,20^\circ C}\left(1 + \alpha(T - 20^\circ C)\right)$

- **Ohmsches Gesetzt**

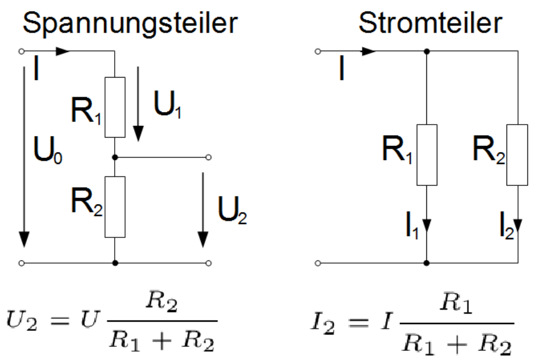
$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{l}{\kappa A} = \frac{\rho_R l}{A} = \frac{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

- **Leitwert**

$$\boxed{G = \frac{1}{R}, \qquad [G] = S \quad \text{Siemens}}$$

1.3 Spannungs-/Stromteiler

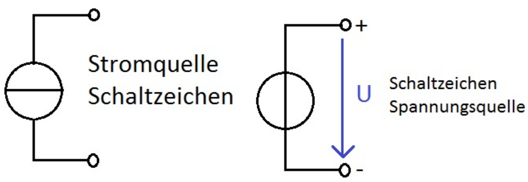


Der Stromteiler funktioniert also analog zum Spannungsteiler einfach mit den Leitwerten statt den Widerständen.
Belasteter Spannungsteiler:

$$R_2' = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_2}{U} = \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} = \frac{R_2 R_L}{R_1(R_2 + R_L) + R_2 R_L}$$

1.4 Spannungs- und Stromquellen

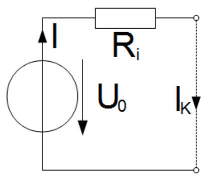
Ideale Quellen



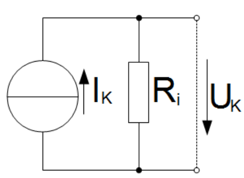
→ Keine Verlustleistung, existiert in Realität nicht!

Reale Stromquelle
Leerlaufspannung: $U_0 = R_i \cdot I_0$
Strom der Quelle konstant I_K

Reale Spannungsquelle
Spannung der Quelle konstant U_0
Kurzschlussstrom: $I_K = \frac{U_0}{R_i}$



Reale Spannungsquelle



Reale Stromquelle

Hinweis: Das sind Modelle, natürlich fliesst in Realität in einer Quelle nicht ein konstanter Kurzschlussstrom (wie bei der Stromquelle)!

Umwandlung:
Stromquellen können auch als Spannungsquellen modelliert werden und umgekehrt. Es gilt folgende Relation:
$_{[U-Quelle]}\,U_0 = R_i \cdot I_0\,_{[I-Quelle]}$
Der Innenwiderstand bleibt gleich.

Leistungsanpassung
Die abgegebene Leistung einer Quelle ist maximal, wenn gilt:

$$R_L = R_i$$

Zur Herleitung wird die Leistung am Ausgang in Abhängigkeit des Widerstandes am Ausgang berechnet, nach diesem Abgeleitet und gleich 0 gesetzt.

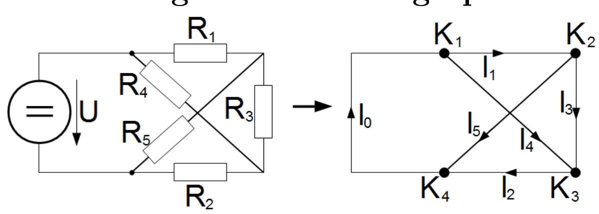
Zusammenspiel mehrerer Quellen

- Gleichmässige Energieabgabe ist nur bei identischen Quellen möglich.
- Leistungsabgabe von zusammengeschalteten Spannungsquellen ist unterschiedlich, wenn sie über versch. R_i oder U_L verfügen.
- Quellen können zu *Verbrauchern* werden.

Analyse von Netzwerken mit mehreren Quellen
Es werden jeweils alle Quellen bis auf eine "deaktiviert" und Spannungen und Ströme als Superposition von allen Quellen betrachtet. "Deaktivieren" einer Spannungsquelle heisst, dass die Spannung 0V beträgt, d.h. Kurzschluss. Für eine Stromquelle bedeutet es, dass der Strom 0A beträgt, also Unterbruch.

1.5 Analyse umfangreicherer Netzwerke (1-143)

1. **Darstellung des Netzwerkgraphen:**



2. **Zählrichtung festlegen:** Für jeden Zweig die Richtung festlegen (muss konsequent beibehalten werden!).

3. **Knotengleichungen aufstellen:** $k-1$ lin. un. Gleichu.:

$$\begin{array}{lllllllll} K_1: & I_0 & -I_1 & & & -I_4 & & = & 0 \\ K_2: & & I_1 & & -I_3 & & -I_5 & = & 0 \\ K_3: & & & -I_2 & +I_3 & +I_4 & & = & 0 \end{array}$$

4. **Aufstellen der Maschengleichungen:**
#Maschengl.=#Zweige−(#Knoten−1)

- **Prinzip des vollständigen Baumes:**
Ein vollständiger Baum ist eine Verbindung aller Knoten ohne einen geschlossenen Kreis. Danach muss jede Maschengleichung genau einen Zweig enthalten, der nicht zum vollständigen Baum gehört.

- **Prinzip der Auftrennung der Maschen:**
Dabei wird nach dem Aufstellen einer Maschengl. Jeweils einer der verwendeten Zweige aufgetrennt und nie mehr verwendet.

1.6 Energie, Leistung (1-102) & Wirkungsgrad

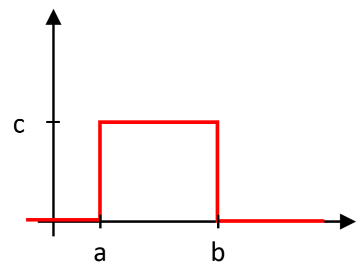
El. Leistung	$P = UI = I^2R = U^2/R, \qquad P(t) = \frac{dW_e}{dt}$
Energie	$W_e = \int_0^t P(\tau)d\tau$
Wirkungsgrad	$\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} \cdot 100\% = \frac{I^2R_L}{I^2(R_i+R_L)} \cdot 100\% = \frac{R_L/R_i}{1+R_L/R_i} \cdot 100\%$ Umgeformt (1-140): $\eta = \left(1 - \frac{I}{I_{max}}\right) \cdot 100\%$

→ *Bei der Leistungsanpassung beträgt der Wirkungsgrad 50%.*

2 Exkurs: Integrale

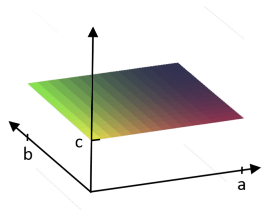
Da das Grundlagenwissen aus Analysis II fehlt, sind die mehrdimensionalen Integrale von NuS I nur beschränkt berechenbar. Hier wird ein einfacher Spezialfall erklärt, der für fast alle NuS-Formeln verwendbar ist.

- **Bereits bekannt**: Wird eine konstante Funktion integriert, kann das Integral zu einer Multiplikation vereinfacht werden und das Resultat ist die Fläche unter der Kurve.



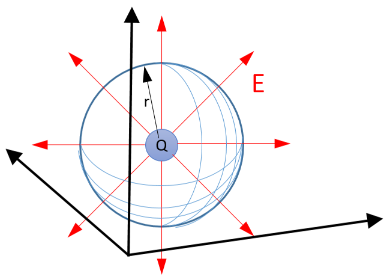
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = (b-a) \cdot c = A$$

- In einem zweidimensionalen System, indem eine Funktion $f(x, y)$ einem x und y Wert einen z Wert zuweist, wird die konstante Funktion genau gleich integriert: Die Fläche wird mit dem Funktionswert multipliziert und man erhält das Volumen.



$$\int_0^a \int_0^b f(x,y) \cdot dx \cdot dy = a \cdot b \cdot c = V$$

- Wenn wir nun ein Vektorfeld über eine Oberfläche im Dreidimensionalen Raum integrieren, funktioniert das immer noch genau gleich. Wie hier am Beispiel des Gaus'schen Gesetz gezeigt sei:



$$Q = \oint_A \vec{D}(\vec{r}) d\vec{A} = \oint_A \epsilon \vec{E}(\vec{r}) d\vec{A} = 4\pi r^2 \cdot \epsilon E(r)$$

  - $\oint_A$ bedeutet, dass über eine geschlossene Oberfläche integriert wird.
  - Das Differential $d\vec{A}$ ist ein Vektor (Normalenvektor zur Kugeloberfläche. Wird dieses mit dem vektoriellen E-Feld multipliziert ergibt sich ein Skalar. Dies erklärt das fehlen von Vektoren im Resultat.
  - Diese Vereinfachung gilt nur, wenn:
    1. Das Vektorfeld auf der Integrationsfläche überall gleich stark **(konstant)** ist
    2. Die Das Vektorfeld **senkrecht zur Integrationsfläche** steht
  - Ähnlich erklärbar ist ein Wegintegral (Intregation von Vektorfeld über eine Linie). Ist das Vektorfeld parallel zum Integrationsweg und konstant, kann der Weg mit der Feldstärke multipliziert werden:

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} \quad (=) \quad E \cdot s$$

3 Elektrisches Feld

Das Elektrische Feld erklärt diverse Phänomene in der Physik, wie z.B. die Kraftwirkung zweier Ladungen auch wenn sich dazwischen keine Materie befindet. Allgemein ist es schwer fassbar und an gewisse Eigenschaften muss man sich über die Zeit ganz einfach "gewöhnen".

Kraft auf Ladung
Eine Ladung in einem elektrischen Feld erfährt die **Coulomb Kraft:**

$$\vec{F}_c = q \cdot \vec{E}$$

Elektrisches Feld und Potential

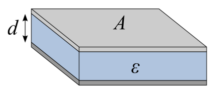
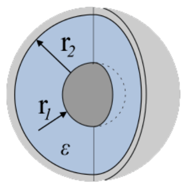
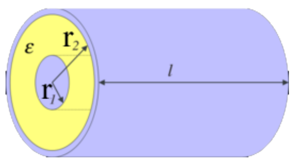
$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}$$

Elektrische Flussdichte
Vollständigkeitshalber (ist dann in Semester 3 & 4 vermehrt ein Thema)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

4 Kapazität (1-61)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{\oiint_A \sigma dA}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad [F] = [\frac{As}{V}]$$

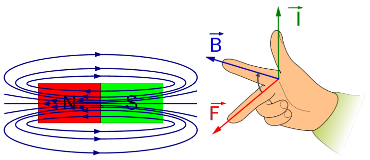
Parallelschaltung	$C_{tot} = \sum_k C_k$	
Serieschaltung	$\frac{1}{C_{tot}} = \sum_k \frac{1}{C_k}$	
Plattenkondensator	$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$	
Kugelkondensator (1-62, 1-72)	$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	
Zylinderkondensator	$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r l \frac{1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$	
Energie in Kapazität	$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$	

5 Induktivität (1-211)

$$\boxed{L = \frac{\psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{R_m}}$$

Serieschaltung	$L_{tot} = \sum_k L_k$
Parallelschaltung	$\frac{1}{L_{tot}} = \sum_k \frac{1}{L_k}$
Spule	$L = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \mu_r A}{l}$ (Luft: $\mu_r = 1$)
Spule mit Luftspalt	$L = \frac{N^2}{R_{m,Eisen} + R_{m,Luft}} \approx \frac{N^2}{R_{m,Luft}} = \frac{N^2 \mu_0 A}{l_{Luft}}$

6 Magnetismus

Magnetfeld 	Feldlinien von N nach S (innen S → N). Magnetfelder sind immer geschlossen.
Mag. Flussdichte eines Leiters	$B(\rho) = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{\rho}$, $[T] = [\frac{Vs}{m^2}]$
Mag. Feldstärke eines Leiters	$H(\rho) = \frac{1}{\mu} B$, $[\frac{A}{m}]$
Lorenzkraft (1-180)	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B}$
F auf Ladung (1-183)	$\vec{F}_L = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
Oersted'sches Gesetz (1-187)	$NI = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \Theta = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_k H_k l_k$ Prinzip gilt insbesondere für $N = 1$, sprich Einzelne Leiter

Für weitere Formeln, siehe Tabelle zum Reluktanzmodell.

6.1 Induktion und Selbstinduktion(1-249)

Induktionsgesetz	$u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$
Selbstinduktion	$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$ (vgl. $i_C = C\frac{du_c}{dt}$)
Energie	$W_m = W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} dV$

6.2 Reluktanzmodell

Analogie: Elektrisch, Magnetisch (1-209)
Eine Spule wird gemäss untenstehender Tabelle wie ein Netzwerk mit Quelle(n) und Widerständen dargestellt und mit den üblichen Netzwerk-Analyse-Strategien berechnet.

Grösse	**Elektrisch**	**Magnetisch**
Leitfähigkeit	κ	μ
Widerstand	$R = \frac{1}{\kappa \cdot A}$	$R_m = \frac{1}{\mu \cdot A}$
Spannung	$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$V_{m12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{s} = R_{m12} \cdot \Phi_{12}$
Strom/Fluss	$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A}$
Ohm. Gesetzt	$U = R \cdot I$	$V_m = R_m \cdot \Phi$
Maschengl.	$U_0 = \sum_{Masche} RI$	$\Theta = \sum_{Masche} R_m \Phi$
Knotengl.	$\sum_{Knoten} I = 0$	$\sum_{Knoten} \Phi = 0$
Intensität / Wirkung (Kraft)	$\vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
Quantität / Ursache (Ladung)	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{H}$

7 Einheiten

	Einheit	**Bedeutung**
$\vec{B}$	Vs/m^2	Magnetische Flussdichte
B_r	Vs/m^2	Remanenz
C	$As/V = F$	Kapazität
$\vec{D}$	As/m^2	Elektr. Flussdichte
$\vec{E}$	V/m	Elektrische Feldstärke
G	$1/\Omega = A/V$	Elektr. Leitwert
$\vec{H}$	A/m	Magn. Feldstärke
H_c	A/m	Koerzitivfeldstärke
I	A	Gleichstrom
I_K	A	Kurzschlussstrom
i	A	Zeitabhängiger Strom
$\vec{J}$	A/m^2	(räuml.) Stromdichte
$\vec{J}$	Vs/m^2	Magn. Polarisation

	Einheit	**Bedeutung**
$\vec{J}$	Vsm	Magn. Dipolmoment
k		Koppelfaktor
L	Vs/A	Induktivität
$\vec{M}$	A/m	Magnetisierung
$\vec{m}$	Am^2	Magnetisches Moment
N		Windungszahl
P	$VA = W$	Leistung
p_V	W/m^3	Verlustleistungsdichte
$\vec{P}$	As/m^2	Dielektr. Polarisation
$\vec{p}$	Asm	Elektr. Dipolmoment
Q	$As = C$	Ladung, Punktladung
R	$V/A = \Omega$	Ohmscher Widerstand
R_m	A/Vs	Magn. Widerstand

	Einheit	Bedeutung		Einheit	Bedeutung
U	V	Gleichspannung	ε_r		Dielektrizitätszahl
u	V	Zeitlich veränderliche Spannung	φ		Phasenwinkel
ü		Übersetzungsverhältnis	φ_e	V	Elektrostatisches Potential
V_m	A	Magnetische Spannung	η		Wirkungsgrad
W	$VAs = J$	Energie	κ	A/Vm	Spezifische Leitfähigkeit
w	WAs/m^3	Energiedichte	λ	As/m	Linienladungsdichte
Φ	Vs	Magnetischer Fluss	μ	Vs/Am	Permeabilität
Λ_m	Vs/A	Magnetischer Leitwert	μ_e	m^2/Vs	Ladungsträger Beweglichkeit
Θ	A	Durchflutung	ρ	As/m^3	Raumladungsdichte
Ψ	As	Elektr. Fluss	ρ_R	Vm/A	Spezifischer Widerstand
α	$1/K$	Temperaturkoeffizient	σ	As/m^2	Flächenladung
χ		Dielekt. & magn. Suszeptibilität	σ		Streugrad
ε	As/Vm	Dielektrizitätskonstante	ω	$1/s \cdot 2\pi$	Kreisfrequenz

8 Taschenrechner

- Inwiefern ein vorprogrammierter Taschenrechner Sinn macht, hängt von deinen eigenen Präferenzen ab. Es ist aber sicherlich nicht zwingend. Ich habe mich darauf beschränkt, eine funktion $PP(x, y)$ und $PPP(x, y, z)$ für die Parallelschaltung von zwei bzw. drei Widerständen zu Programmieren.
- Die meisten Taschenrechner bieten die Möglichkeit mit Einheiten zu rechnen. Überlege dir vor der Prüfung, ob du das willst oder nicht.
- Das Abrufen von Konstanten (z.B. ϵ_0) kann mühsam sein. Ich habe die oft verwendeten Konstanten als Variablen abgelegt (z.B. $EE := \epsilon_0$). Schreibe die Variablennamen auf deine Zusammenfassung. Achtung: Passe auf, dass du die Konstanten während der Prüfung nicht überschreibst!

9 Dieses Skript

Dieses Skript wurde von Manuel Meier für den PVK NuS1 im Sommer 2016 geschrieben und für den Kurs im Winter 2016 überarbeitet. Es entstand unter Berücksichtigung von Zusammenfassungen und Präsentationen von Michael Haider, Friedrich Thöny und Dominik Werner.
Files verfügbar unter:
http://people.ee.ethz.ch/˜meierman/

Dieses Skript ist weder Vollständig noch besteht eine Garantie für Fehlerfreiheit. Fehler bitte melden an meierman@student.ethz.ch

Zahlen in den Titeln der Form 1-123 stehen für Seitenzahlen in Büchern (Band-Seitenzahl)