Netzwerke und Schaltungen 1

a) Es gilt:

$$\iint_A \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = I.$$

Falls das J-Feld und die Fläche **senkrecht** sind und das J-Feld überall auf dieser Fläche **gleich Gross** ist, vereinfacht sich dies zu:

$$A_{eff}(\vec{r}) \cdot J(\vec{r}) = I \Rightarrow J(\vec{r}) = \frac{I}{A_{eff}(\vec{r})}$$

Wobei A_{eff} die effektiv vom Strom durchflossene Fläche bezeichnet. Somit gilt für die Stromdichte im Messwiderstand:

$$J(r) = \frac{I}{d \cdot 2\pi r}$$

und somit in Vektorform (Zylinderkoordinaten):

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{d \cdot 2\pi r} \cdot \vec{e}_r$$

b) Der Zusammenhang zwischen E-Feld un J-Feld ist gegeben als:

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{J}$$

Somt gilt für das E-Feld:

$$\vec{E}(r) = \frac{I}{d \cdot 2\pi r \cdot \kappa} \cdot \vec{e}_r$$

Für die Spannung U_{AB} gilt:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \int_{\frac{D_{Innen}}{2}}^{\frac{D_{Aussen}}{2}} E(r) \cdot dr = \int_{\frac{D_{Innen}}{2}}^{\frac{D_{Aussen}}{2}} \frac{I}{d \cdot 2\pi r \cdot \kappa} \cdot dr = \underline{\underline{\frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{D_{aussen}}{D_{innen}})}}$$

Für den Widerstand R gilt:

$$R_{AB} := \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{D_{aussen}}{D_{innen}})$$

Mit den Werten: $D_{aussen} = 2cm$, $D_{innen} = 5mm$, $d = 3mm$ und $\kappa = 12 \cdot 10^3 \frac{S}{m}$ gilt:

$$R_{AB} = \frac{1}{12 \cdot 10^3 \frac{S}{m} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}}) = 8.387 m\Omega$$

c) Wir betrachten beide Fälle (-3mm und +3mm):

$$\text{+3mm: } \rightarrow R' = \frac{1}{12 \cdot 10^3 \frac{S}{m} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}}) = 9.005 m\Omega \rightarrow \Delta R = |R - R'| = 0.618 m\Omega$$
$$\text{-3mm: } \rightarrow R' = \frac{1}{12 \cdot 10^3 \frac{S}{m} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{2 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}}) = 7.669 m\Omega \rightarrow \Delta R = |R - R'| = 1.336 m\Omega$$

Daraus Folgt: Maximaler Fehler bei $-3mm$. R' ist dann $7.669 m\Omega$ und für den Fehler gilt: $\Delta R = 1.336 m\Omega$

d) Beim Messen gilt:

$$\frac{U_{AB}}{R_{AB}} = I \rightarrow \Delta I = |\frac{U_{AB}}{R_{AB}} - \frac{U_{AB}}{R'_{AB}}|$$
$$F = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta I}{U_{AB}/R_{AB}} = |1 - \frac{R_{AB}}{R'_{AB}}| = |1 - \frac{8.387 m\Omega}{7.669}| = 9.28\%$$

e) es gilt: $U_{AC} = \int_{r_a}^{r_c} E \cdot dr$ und $U_{CB} = \int_{r_c}^{r_b} E \cdot dr$.
Das Integral $\int_{r_a}^{r_b} E \cdot dr$ haben wir bereits ausgerechnet. Es ergibt: $\frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{r_b}{r_a})$
Somit lautet die Gleichung:

$$\frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{r_c}{\frac{D_{innen}}{2}}) = \frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{\frac{D_{aussen}}{2}}{r_c})$$
$$\Rightarrow \frac{2r_c}{D_{innen}} = \frac{D_{aussen}}{2r_c} \rightarrow r_c = \frac{\sqrt{D_{aussen} \cdot D_{innen}}}{2} = 5mm$$