Professur für Leistungselektronik
und Messtechnik
Prof. J. W. Kolar

Netzwerke und Schaltungen I
Basisprüfung D-ITET

Name, Vorname:
Matrikel-Nr.:

Aufgabe NUS I-2: Strommessung mit koaxialem Messwiderstand

20 Punkte

Gegeben ist der in **Fig. 2** dargestellte Messwiderstand, welcher zur niederinduktiven Strommessung eingesetzt werden kann. Gemessen wird die Spannung U_{AB} zwischen den Abgriffen A und B am Übergang von einem Innenleiter mit Durchmesser $D_{\mathrm{Innen}} = 5\,\mathrm{mm}$ auf einen zylindrischen Aussenleiter mit Innendurchmesser $D_{\mathrm{Aussen}} = 2\,\mathrm{cm}$. Mit Hilfe des Widerstands kann daraus auf den zu messenden Strom I geschlossen werden. Der Messwiderstand sei eine kreisförmige Scheibe mit der Dicke $d = 3\,\mathrm{mm}$ und der Leitfähigkeit $\kappa_{\mathrm{R}} = 12.0 \cdot 10^3\,\mathrm{S/m}$. Die Leiter werden als ideal elektrisch leitfähig angenommen.

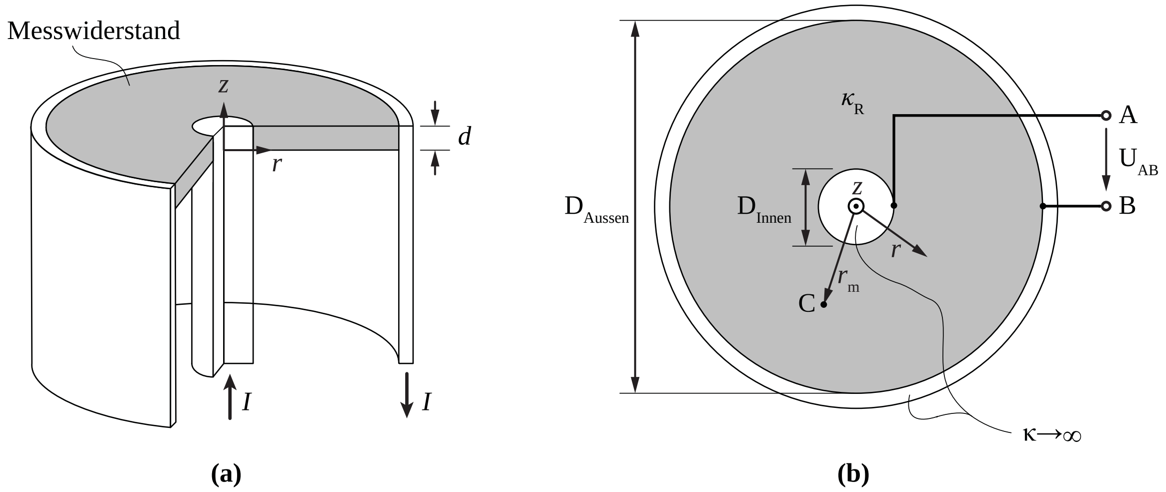


Fig. 2: Strommessung mit koaxialem Messwiderstand: Schnittzeichnung **(a)** und Draufsicht **(b)**.

a) Berechnen Sie algebraisch die im Messwiderstand vorliegende Stromdichte $J(r)$ für einen allgemeinen Strom I. Die Stromdichte kann über der Dicke d als konstant angenommen werden.

(3 Pkt.)

b) Berechnen Sie algebraisch das im Messwiderstand vorliegende elektrische Feld $E(r)$. Welche Spannung U_{AB} liegt zwischen den Punkten A und B an (algebraisch)? Wie gross ist der Widerstand R der Scheibe zwischen den Punkten A und B (algebraisch und numerisch)?

(6 Pkt.)

c) Durch Toleranzen in der Fertigung des Zylinderrohrs kann der Aussendurchmesser D_{Aussen} um bis zu $\Delta D_{\mathrm{Aussen}} = \pm 3\,\mathrm{mm}$ vom vorgesehenen Wert abweichen. Wie gross ist der Widerstand R' bei maximalem Fehler? Berechnen Sie den maximalen absoluten Fehler ΔR im Widerstandswert, welcher aufgrund der Fertigungstoleranzen auftreten kann.

(3 Pkt.)

d) Wie gross ist der relative Fehler, welcher in der Strommessung durch die Fertigungstoleranzen maximal auftreten kann?

(3 Pkt.)

e) Bei welchem Radius r_{m} gilt $U_{\mathrm{AC}} = U_{\mathrm{CB}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{2}$? Geben Sie das Resultat algebraisch und numerisch an.

(5 Pkt.)

Netzwerke und Schaltungen 1

a) Es gilt:

$$\iint_A \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = I.$$

Falls das J-Feld und die Fläche **senkrecht** sind und das J-Feld überall auf dieser Fläche **gleich Gross** ist, vereinfacht sich dies zu:

$$A_{eff}(\vec{r}) \cdot J(\vec{r}) = I \Rightarrow J(\vec{r}) = \frac{I}{A_{eff}(\vec{r})}$$

Wobei A_{eff} die effektiv vom Strom durchflossene Fläche bezeichnet. Somit gilt für die Stromdichte im Messwiderstand:

$$J(r) = \frac{I}{d \cdot 2\pi r}$$

und somit in Vektorform (Zylinderkoordinaten):

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{d \cdot 2\pi r} \cdot \vec{e}_r$$

b) Der Zusammenhang zwischen E-Feld un J-Feld ist gegeben als:

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{J}$$

Somt gilt für das E-Feld:

$$\vec{E}(r) = \frac{I}{d \cdot 2\pi r \cdot \kappa} \cdot \vec{e}_r$$

Für die Spannung U_{AB} gilt:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \int_{\frac{D_{Innen}}{2}}^{\frac{D_{Aussen}}{2}} E(r) \cdot dr = \int_{\frac{D_{Innen}}{2}}^{\frac{D_{Aussen}}{2}} \frac{I}{d \cdot 2\pi r \cdot \kappa} \cdot dr = \underline{\underline{\frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{D_{aussen}}{D_{innen}})}}$$

Für den Widerstand R gilt:

$$R_{AB} := \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{D_{aussen}}{D_{innen}})$$

Mit den Werten: $D_{aussen} = 2cm$, $D_{innen} = 5mm$, $d = 3mm$ und $\kappa = 12 \cdot 10^3 \frac{S}{m}$ gilt:

$$R_{AB} = \frac{1}{12 \cdot 10^3 \frac{S}{m} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}}) = 8.387 m\Omega$$

c) Wir betrachten beide Fälle (-3mm und +3mm):

+3mm: $\rightarrow R' = \frac{1}{12 \cdot 10^3 \frac{S}{m} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}}) = 9.005 m\Omega \rightarrow \Delta R = |R - R'| = 0.618 m\Omega$

-3mm: $\rightarrow R' = \frac{1}{12 \cdot 10^3 \frac{S}{m} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{2 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}}) = 7.669 m\Omega \rightarrow \Delta R = |R - R'| = 1.336 m\Omega$

Daraus Folgt: Maximaler Fehler bei $-3mm$. R' ist dann $7.669 m\Omega$ und für den Fehler gilt: $\Delta R = 1.336 m\Omega$

d) Beim Messen gilt:

$$\frac{U_{AB}}{R_{AB}} = I \rightarrow \Delta I = |\frac{U_{AB}}{R_{AB}} - \frac{U_{AB}}{R'_{AB}}|$$
$$F = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta I}{U_{AB}/R_{AB}} = |1 - \frac{R_{AB}}{R'_{AB}}| = |1 - \frac{8.387 m\Omega}{7.669}| = 9.28\%$$

e) es gilt: $U_{AC} = \int_{r_a}^{r_c} E \cdot dr$ und $U_{CB} = \int_{r_c}^{r_b} E \cdot dr$.
Das Integral $\int_{r_a}^{r_b} E \cdot dr$ haben wir bereits ausgerechnet. Es ergibt: $\frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{r_b}{r_a})$
Somit lautet die Gleichung:

$$\frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{r_c}{\frac{D_{innen}}{2}}) = \frac{I}{\kappa \cdot d \cdot 2\pi} \cdot ln(\frac{\frac{D_{aussen}}{2}}{r_c})$$
$$\Rightarrow \frac{2r_c}{D_{innen}} = \frac{D_{aussen}}{2r_c} \rightarrow r_c = \frac{\sqrt{D_{aussen} \cdot D_{innen}}}{2} = 5mm$$

Name, Vorname:
Matrikel-Nr.:

Aufgabe NUS I-2: Leistungsanpassung

20 Punkte

Gegeben ist eine Gleichstromschaltung gemäss **Fig. 2 (a)**, die aus der Stromquelle $I = 3\,\mathrm{A}$, der Spannungsquelle $U = 12\,\mathrm{V}$ und vier Widerständen besteht. Der jeweilige Widerstandswert ist ein ganzzahliges Vielfaches des Grundwertes $R = 12\,\Omega$.

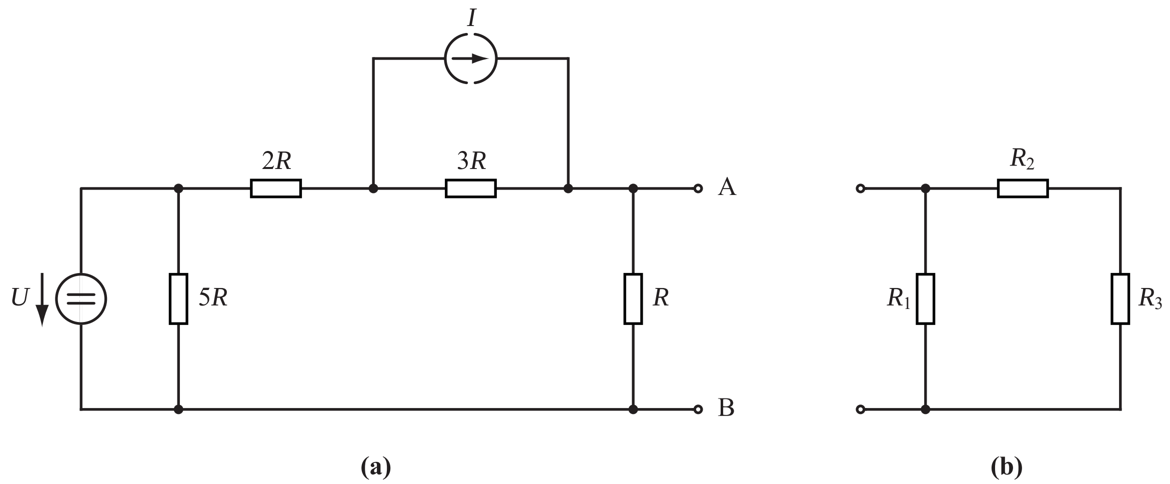


Fig. 2: Gleichstromschaltung **(a)** und Belastungsnetzwerk **(b)**.

a) Zeichnen Sie für die Gleichstromschaltung in **Fig. 2 (a)** zunächst das elektrische Ersatzschaltbild einer Ersatzspannungsquelle mit Innenwiderstand bezüglich der Klemmen A und B. Berechnen Sie dann algebraisch den Innenwiderstand R_E und die Leerlaufspannung U_E dieser Ersatzspannungsquelle als Funktion von R, I und U.

(8 Pkt.)

b) Geben Sie Zahlenwerte für R_E, U_E und den Kurzschlussstrom I_E der Ersatzspannungsquelle aus Teilaufgabe **a)** an.

(4 Pkt.)

Für alle weiteren Teilaufgaben gelte nun $R_\mathrm{E} = 5\,\Omega$ *und* $U_\mathrm{E} = 15\,\mathrm{V}$.

An den Klemmen A *und* B *der Gleichstromschaltung wird ein Belastungsnetzwerk gemäss* **Fig. 2 (b)** *angeschlossen. Es besteht aus den beiden Widerständen* $R_1 = 20\,\Omega$ *und* $R_2 = 11.5\,\Omega$ *sowie dem unbekannten Widerstand* R_3.

c) Für welchen Wert des Widerstands R_3 wird die in R_2 (!) umgesetzte Leistung maximal?

(4 Pkt.)

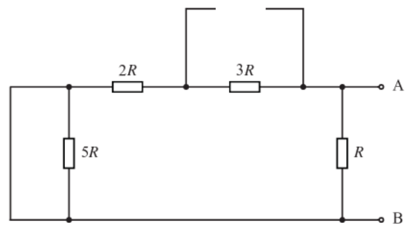
d) Wie gross ist mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe **c)** der Spannungsabfall über dem Widerstand R_2 und welche Leistung wird von R_2 aufgenommen?

(4 Pkt.)

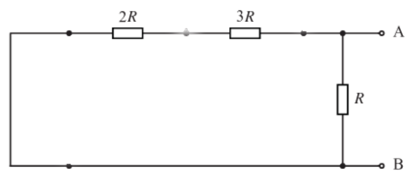
Lösung Katalog S.9

a) Um das Ersatzschaltbild zu berechnen, müssen 2 Grössen berechnet werden:
1) Innenwiderstand
2) Leerlaufspannung oder Kurzschlussstrom

1) Für die Berechnung des Innenwiderstandes werden alle Quellen zu null Gesetzt.
D.h. Spannungsquellen $\rightarrow$ Kurzschluss, Stromquellen $\rightarrow$ Leerlauf
Ersatzschaltbild



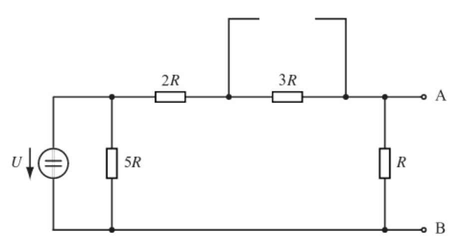
Da der 5R Widerstand kurzgeschlossen ist, wird niemals Strom durch ihn hindurchfliessen. Somit können wir ihn durch einen Leerlauf ersetzen.



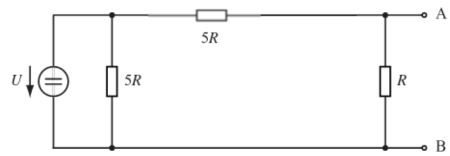
2R und 3R liegen Seriell, somit können sie zu einem Widerstand der Grösse 5R zusammengefasst werden. Dieser Widerstand ist wiederum parallel zu R, womit wir für den gesamten Widerstand und somit R_E folgendes erhalten.

$$R_E = (2R + 3R||R) = \frac{5R^2}{6R} = \frac{5}{6}R$$

2) Nun müssen wir noch die Leerlaufspannung der Ersatzschaltung berechnen. Dazu wenden wir das Superpositionsprinzip an:
Zuerst berechnen wir die Spannung U_{AB} zwischen den Klemmen A und B in Abhängigkeit der Spannungsquelle:



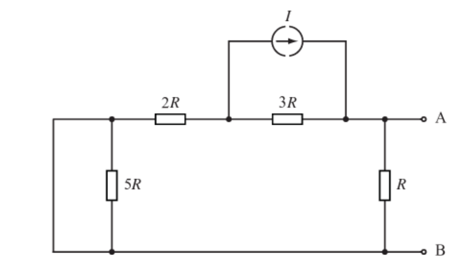
Die Widerstände 2R und 3R sind seriell.



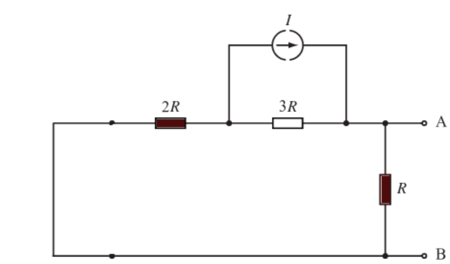
Da die Widerstandände ($5R + R$ und $5R$) parallel sind, muss über beiden Ästen die Gleiche Spannung U abfallen.
Somit können wir die Spannungsteilerregel anwenden:

$$U_{AB}^{(1)} = U \cdot \frac{R}{R+5R} = U \cdot \frac{1}{6}$$

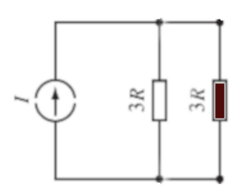
Nun müssen wir noch die Spannung $U_{AB}^{(2)}$ in Abhängigkeit der Stromquelle berechnen:
Dazu setzen wir die Spannungsquelle zu 0:



Der Widerstand R_5 wird wieder kurzgeschlossen.



Die Widerstäde $2R$ und R können Seriell zusammengefasst werden, wodurch jedoch die Klemmen verschwinden :



Nun können wir mithilfe der Stromteilerregel den Strom durch den roten Widerstand berechnen:

$$I_{Rot} = I \frac{3R}{3R+3R} = \frac{I}{2}$$

Dieser Strom fliesst durch die beiden Widerstände R und $2R$ somit gilt für die Spannung über dem roten R Widerstand und somit für die Spannung $U_{AB}^{(2)}$:

$$U_{AB}^{(2)} = U_R = I_{Rot} \cdot R = \frac{I \cdot R}{2}$$

Lösung Katalog S.9 continued on next page. . .

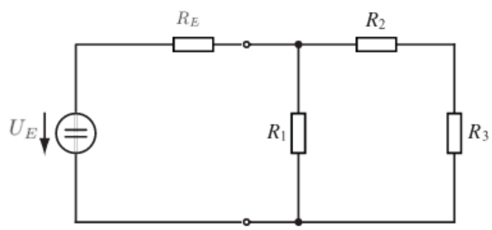
Somit gilt für die Leerlaufspannung gemäss Superposition:

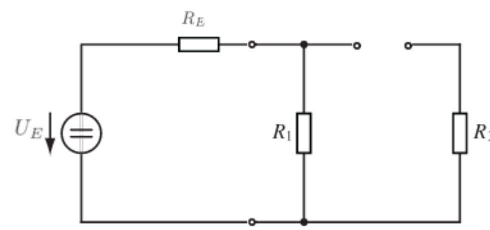
$$U_E = U_{AB}^{(1)} + U_{AB}^{(2)} = \frac{U}{6} + \frac{I \cdot R}{2}$$

b) Es gilt: $R_E = \frac{5}{6} \cdot 12\Omega = 10\Omega$ und $U_E = 2V + 3A \cdot 6\Omega = 20V$
Für I_E gilt:

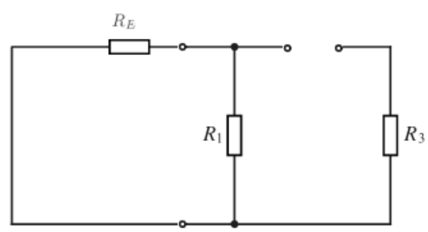
$$I_E = \frac{U_E}{R_E} = \frac{20V}{10\Omega} = 2A$$

c) Um die Leistung über dem Widerstand R_2 zu maximiere, schliessen wir zuerst das Lastnetzwerk an unsere Ersatzquelle an und ersetzen danach den Widerstand R_2 mit offenen Klemmen und Formen erneut das Netzwerk zu einer realen Quelle um. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Leistung über R_2 genau dann maximal ist, wenn $R_2 = R_i$ gilt, wobei R_i den Innenwiderstand gegenüber den Klemmen bezeichnet. Die Aufgabe reduziert sich als darauf, den Innenwiderstand gegenüber den Klemmen zu berechnen.





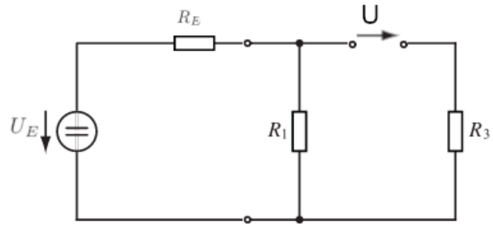
Um den Innenwiderstand zu berechnen setzen wir die Quellen zu 0 und formen das Netzwerk um, bis nur noch ein Widerstand vorhanden ist.



Im ESB sind die Widerstände R_E und R_1 parallel. Beide zusammen sind wiederum seriell zu R_3. Somit gilt für den Innenwiderstand:
$R_i = (R_E || R_1) + R_3$
Um maximale Leistung an R_2 abzugeben, muss folgendes gelten:

$$R_2 = R_i = (R_E || R_1) + R_3 \Rightarrow R_3 = R_2 - (R_E || R_1)$$
$$R_3 = 11.5\Omega - (5\Omega || 20\Omega) = 7.5\Omega$$

d) Um den Spannungsabfall über R_2 zu berechnen, berechnen wir die Leerlaufspannung an den Klemmen:



Da durch den Widerstand R_3 kein Strom fliesst, gilt für die Spannung U:

$$U = U_{R_1} - U_{R_3} = U_{R_1} - 0A \cdot R_3 = U_{R_1}$$

Die Spannung über R_1 können wir mithilfe des Spannungsteilers berechnen:

$$U_{R_1} = U_E \cdot \frac{R_1}{R_E + R_1} = 15V \cdot \frac{20\Omega}{25\Omega} = 12V$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass bei maximaler Leistungabgabe, die Spannung über dem Lastwiderstand gerade die hälfte der Leerlaufspannung beträgt. Somit gilt für die Spannung über R_2:

$$U_2 = \frac{U}{2} = 6V$$
$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{36V^2}{11.5\Omega} = 3.13W$$

Professur für Leistungselektronik
und Messtechnik
Prof. J. W. Kolar

Netzwerke und Schaltungen I
Basisprüfung D-ITET

Name, Vorname:
Matrikel-Nr.:

Aufgabe NUS I-3: Temperaturmessung

20 Punkte

Mit der in **Fig. 3** dargestellten Brückenschaltung soll ein Temperaturmessgerät aufgebaut werden. Zur Anzeige wird ein Spannungsmessinstrument verwendet, das die Brückenspannung U_{m} abgreift. Für das Spannungsmessinstrument kann ein unendlicher Innenwiderstand angenommen werden. Die Temperaturmessung soll in einem Bereich von $-20\,°\mathrm{C}$ bis $50\,°\mathrm{C}$ einsetzbar sein. Als Temperatursensor wird ein temperaturabhängiger Widerstand $R(\vartheta)$ eingesetzt, dessen Widerstands Temperatur Kennlinie durch

$$R(\vartheta) = R_0(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0))$$

mit den Parametern

$R_0 = 1\,\mathrm{k\Omega}$	Widerstand bei ϑ_0
$\vartheta_0 = 20\,°\mathrm{C}$	Referenztemperatur
$\alpha = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$	Temperaturkoeffizient

beschreiben wird. Ausserdem gilt $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$.

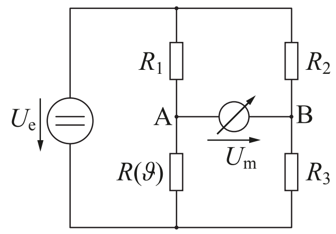


Fig. 3: Brückenschaltung zur Temperaturmessung.

a) Geben Sie zunächst die Spannung $U_{R\vartheta}$ und die Leistung $P_{R\vartheta}$ am Widerstand $R(\vartheta)$ algebraisch als Funktion von U_{e} an. Bei welcher Temperatur tritt an $R(\vartheta)$ die höchste Verlustleistung auf und welchen Wert weist $R(\vartheta)$ bei dieser Temperatur auf? Bestimmen Sie die Spannung U_{e} so, dass die im Messbereich maximal auftretende Verlustleistung am Messwiderstand $R(\vartheta)$ den Wert $P_{\max} = 50\,\mathrm{mW}$ erreicht.

(7 Pkt.)

Für alle weiteren Teilaufgaben gelte nun $U_e = 12\,\mathrm{V}$.

b) Das Spannungsmessinstrument soll bei einer Temperatur von $\vartheta_0 = 0\,°\mathrm{C}$ einen Wert von $U_0 = 0\,\mathrm{V}$ anzeigen. Gleichzeitig soll die Verlustleistung der beiden Widerstände R_2 und R_3 zusammen einen Wert von $P_{(R_2,R_3)} = 10\,\mathrm{mW}$ nicht überschreiten ($P_{R_2} + P_{R_3} = 10\,\mathrm{mW}$). Berechnen Sie R_2 und R_3.

(6 Pkt.)

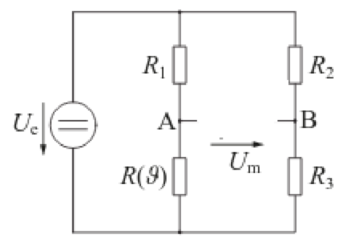
Verwenden Sie für die folgende Teilaufgabe $R_2 = 22\,737\,\Omega$ und $R_3 = 20\,463\,\Omega$.

c) Die Widerstände R_1, R_2 und R_3 weisen bauartbedingt jeweils eine Toleranz von $\pm1\%$ auf. Wie gross ist der maximal auftretende Temperaturmessfehler aufgrund dieser Widerstandstoleranz und bei welcher Temperatur tritt dieser auf? Beachten Sie, dass alle Widerstände gleichzeitig Abweichungen aufweisen können.

(7 Pkt.)

Lösung Katalog S.15

- a) Da es sich beim Spannungsmessgerät um ein Messgerät mit unendlich hohem Widerstand handelt, dürfen wir davon ausgehen, dass zwischen den Klemmen A und B kein Strom fliessen kann. Somit können wir die Verbindung zwischen A und B als Leerlauf modelieren.



Da die beiden Widerstandsäste parallel gescchaltet sind, muss über beiden Ästen die gleiche Spannung abfallen:

$$U_e = U_{R_1} + U_{R_\vartheta} = U_{R_2} + U_{R_3}$$

Somit können wir die Spannung über R_ϑ mithilfe des Spannungsteilers berechnen:

$$U_{R_\vartheta} = U_e \cdot \frac{R_\vartheta}{R_1 + R_\vartheta}$$

Die Leistung über einem Widerstand ist definiert als:

$$P_R = U_R \cdot I_R = \frac{U_R^2}{R}$$

Somit gilt für die Leistung über dem Widerstand R_ϑ ;

$$P_{R_\vartheta} = \frac{U_{R_\vartheta}^2}{R_\vartheta} = (U_e \cdot \frac{R_\vartheta}{R_1 + R_\vartheta})^2 \cdot \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{U_e^2 \cdot R_\vartheta}{(R_1 + R_\vartheta)^2}$$

Um den Maximalwert dieser Leistung in Abhängigkeit des Widerstandes R_ϑ herauszufinden, leiten wir die Leistung nach R_ϑ ab und setzen sie zu 0:

$$\frac{d}{dR_\vartheta}(P_{R_\vartheta}) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow R_\vartheta = R_1 = 1k\Omega$$

Die benötigte Temperatur berechnet sich zu:

$$R(\vartheta) = 1k\Omega(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)) \stackrel{!}{=} 1k\Omega$$
$$\Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 = 20^\circ$$

Für die Spannung U_e erhalten wir:

$$50mW \stackrel{!}{=} P_{R_\vartheta} = U_e^2 \cdot \frac{1k\Omega}{4k\Omega}$$
$$\rightarrow 200mW = U_e^2$$
$$\rightarrow U_e = 14.14V$$

- b) Für die Spannung U_m können wir folgende Masche aufstellen:

$$U_m = U_{R_\vartheta} - U_{R_3}$$

Wobei wir U_{R_ϑ} und U_{R_3} mit dem Spannungsteiler berechnen können:

$$U_{R_\vartheta} = U_e \frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1}$$
$$U_{R_3} = U_e \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

Somit gilt für U_m:

$$U_m = U_e \left(\frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_1} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

Mit der Bedingung, $U_m(\vartheta = \vartheta_0 = 0°) = 0V$ erhalten wir:

$$0V = U_e \left(\frac{R(\vartheta_0)}{R(\vartheta_0) + R_1} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) = U_e \left(\frac{0.9k\Omega}{1.9k\Omega} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$
$$\rightarrow \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{0.9k\Omega}{1.9k\Omega}$$
$$\rightarrow R_3 = \frac{0.9}{1.9} \cdot (R_2 + R_3)$$

Für die Leistung gilt:

$$P_{(R_2,R_3)} = \frac{U_e^2}{R_2 + R_3} \stackrel{!}{=} 10mW$$
$$\rightarrow (R_2 + R_3) = \frac{U_e^2}{10mW} = 14400\Omega$$

Somit gilt:

$$R_3 = \frac{0.9k\Omega}{1.9k\Omega} \cdot (14400\Omega) = 6821.05\Omega$$
$$R_2 = 14400\Omega - R_3 = 7578.95\Omega$$