Zusatzaufgabe - Kondensator Lösung

Wednesday, 2 January 2019 10:40

1) a) D konstant da $\perp$ auf Material

$\hookrightarrow \oint\!\!\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$

$\perp$ und konst

$\hookrightarrow D \cdot A_{eff} = Q$

$\hookrightarrow \underline{\underline{D}} = \frac{Q}{A_{eff}} = \underline{\underline{\frac{Q}{l_0 \cdot t}}}$

$\underline{\underline{\vec{D} = D \cdot (-\vec{e}_y)}}$

Für E:

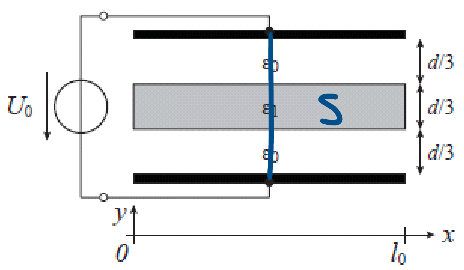
$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0}$ in Luft

$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_1}$ im Dielektrika

mit

$\underline{\underline{\vec{E} = E \cdot (-\vec{e}_y)}}$, $\underline{\underline{\vec{E}_2 = E_2 \cdot (-\vec{e}_y)}}$

b) Es gilt: $U = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$



(a)

Da Weg parallel und stückweise konstant

$U = E_1 \cdot \frac{d}{3} + E_2 \cdot \frac{d}{3} + E_1 \cdot \frac{d}{...}$

$$U = E_1 \cdot d/3 + E_2 \cdot d/3 + E_1 \cdot \frac{d}{3}$$

$$= \frac{d}{3}(2E_1 + E_2)$$

$$= \frac{d}{3}\left(2 \cdot \frac{Q}{l_0 \cdot t \cdot \varepsilon_0} + \frac{Q}{l_0 \cdot t \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}\right)$$

$$= \frac{Q \cdot d}{3 \cdot l_0 \cdot t \cdot \varepsilon_0}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$\Rightarrow Q = U \cdot \frac{3 \cdot l_0 \cdot t \cdot \varepsilon_0}{d} \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}\right)$$

$$D = \frac{Q}{A_{eff}} = U \cdot \frac{3 \cdot \varepsilon_0}{d}\left(\frac{\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}\right)$$

$$E_1 = U \cdot \frac{3}{d} \cdot \frac{\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}$$

$$E_2 = U \cdot \frac{3}{d} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_r + 1}$$

c) $$C_{ges} = \frac{Q}{U} = \frac{3 \cdot l_0 \cdot t \cdot \varepsilon_0}{d}\left(\frac{\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}\right)$$

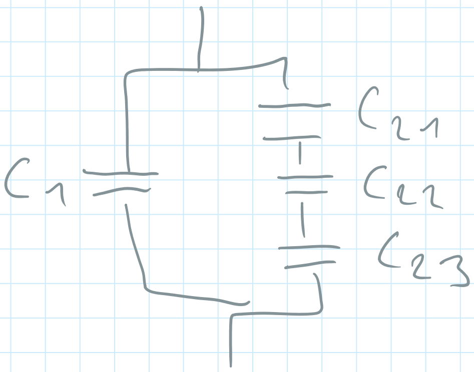
$$= (C_1 \| C_2 \| C_1) \text{ mit}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot t \cdot l_0}{d/3}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot t \cdot l_0}{d/3}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot t \cdot l_0}{d/3}$$

d) ESB:



Es gilt:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \overbrace{\frac{l_0}{3} \cdot t}^{A_{eff}}}{d}$$

und

$$C_{21} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \frac{2}{3} l_0 \cdot t}{d/3} = \frac{\varepsilon_0 \cdot 2 \cdot l_0 \cdot t}{d}$$

$$C_{22} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot 2 \cdot l_0 \cdot t}{d}$$

$$C_{23} = C_{21}$$

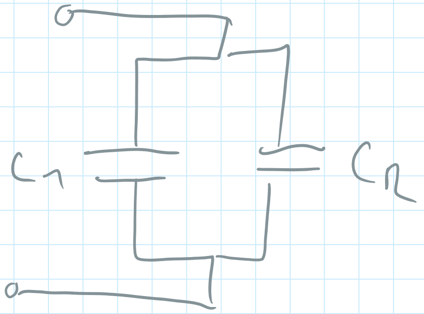
somit für den rechten Teil:

$$C_R = (C_{21} \| C_{22} \| C_{23}) = \frac{2}{3} \cdot C_{ges}$$

$$= \frac{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot l_0 \cdot t \, (\varepsilon_r)}{d \, (2\varepsilon_r + 1)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\cdot\varepsilon_0\cdot l_0\cdot t\,(\varepsilon_r)}{d\cdot(2\varepsilon_r+1)}}}$$

e) von ESB:



es gilt $U_{C1}=U_{CR}=U_m$ und

$$Q_1+Q_R=Q_{ges}=U_0\cdot C_{ges}$$

$$Q_1=C_1\cdot U_m$$

$$Q_R=C_R\cdot U_m$$

$$\hookrightarrow Q_1+Q_R=U_m(C_1+C_R)=U_0\cdot C_{ges}$$

$$\Rightarrow U_0=U_m\cdot\underbrace{\frac{C_1+C_R}{C_{ges}}}_{①}$$

mit $C_R=\frac{2}{3}C_{ges}$ folgt:

$$① = \frac{C_1}{C_{ges}}+\frac{2}{3}$$

$$= \frac{\cancel{\varepsilon_0}\cdot\cancel{\frac{l_0}{3}}\cdot\cancel{t}}{\cancel{d}\cdot 2\cdot\cancel{\varepsilon_0}\cdot\cancel{l_0}\cdot\cancel{t}\cdot\varepsilon_r}\cdot\cancel{d}(2\varepsilon_r+1)+\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2\cdot\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}+\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2 \cdot \varepsilon_r + 1}{2 \varepsilon_r} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{10 \varepsilon_r + 3}{6 \varepsilon_r}$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{6 \varepsilon_r}{10 \varepsilon_r + 3} \cdot U_0 \approx 8{,}29 kV$$

Ladungen:

$Q_1 = U_m \cdot C_1$ $\quad$ $Q_2 = U_m \cdot C_R$

Wobei

Q_1 Ladung $(0 < x < {}^{10}/_3)$ und

Q_2 = Ladung $({}^{10}/_3 < x < l_0)$