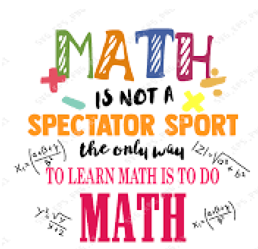
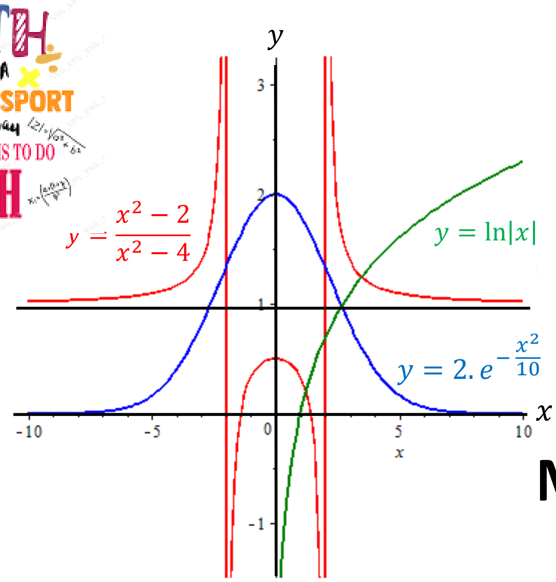




MATEMATIKA ITS

MATEMATIKA 1

Daryono Budi Utomo

MATEMATIKA ITS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistem Persamaan Linier

$$A\,x = b$$

Bab 3. Matriks dan Determinan

Daryono Budi Utomo

Bab 3. Matriks, Determinan dan Sistem Persamaan Linier

MATEMATIKA ITS

3.1 Matriks dan Operasinya

MATEMATIKA ITS

Definisi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat.
Bilangan-bilangan dalam susunan itu dinamakan anggota matriks

Ukuran Matriks

Ukuran matriks dinyatakan oleh *m* x *n*, *m* banyaknya baris, *n* banyaknya kolom

Contoh

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};\ B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix};\ C_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix};\ D_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks A mempunyai ukuran m x n, ditulis sebagai:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Definisi: Dua Matriks Sama

Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan anggota yang berpadanan juga sama.

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

maka $A \neq B$, $A = C$

MATEMATIKA ITS

Definisi: Jumlah dan Kurang Matriks

- Jika dua matriks A dan B mempunyai ukuran yang sama, maka kedua matriks tersebut dapat dijumlahkan atau dikurangkan.
- Untuk menambahkan atau mengurangkan kedua matriks tersebut anggota yang berpadanan dijumlahkan atau dikurangkan.
- Matriks yang tidak mempunyai ukuran yang sama tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$A + C$ dan $A - C$ Tidak bisa karena ukuran matriks tidak sama

MATEMATIKA ITS

Definisi: Perkalian Skalar dan Matriks

Jika A sebarang matriks dan c sebarang skalar, maka hasil kali skalar dan matriks cA adalah mengalikan semua anggota A dengan skalar c.

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \;;\; C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Hitunglah

$a.\ 2A,\qquad b.\ 3C,\qquad c.\ 2A - 3B,\qquad d.\ 2C - 3B$

MATEMATIKA ITS

Jawab

$$a.\ 2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$b.\ 3C = 3\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 6 & 15 \\ 9 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$c.\ 2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 18 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 13 \\ -12 & -1 \end{pmatrix}$$

$d.\ 2C - 3B$ tidak bisa ukuran matriks C dan B tidak sama

MATEMATIKA ITS

Definisi: Perkalian Matriks

Dua matriks A dan B dapat dikalikan, jika matriks A berukuran m x n, dan matriks B harus berukuran n x r maka matriks hasil-kalinya mempunyai ukuran m x r dengan anggota ke-ij berasal dari perkalian baris ke-i dari matriks A dengan kolom ke-j dari matriks B.

$$A_{m\times \underbrace{n \times B_{n}}\times r} = C_{m\times r}$$

Kolom matriks A = Baris matriks B

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Hitunglah:

a. AB, b. BA, c. AC, d. CA

MATEMATIKA ITS

Jawab

$$a.\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4 + 2\times 6 & 1\times -3 + 2\times 3 \\ 3\times 4 + 4\times 6 & 3\times -3 + 4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 36 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b.\ BA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 1 - 3\times 3 & 4\times 2 - 3\times 4 \\ 6\times 1 + 3\times 3 & 6\times 2 + 3\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$c.\ AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 7 + 2\times 3 & 1\times 2 + 2\times 4 & 1\times 5 + 2\times 6 \\ 3\times 7 + 4\times 3 & 3\times 2 + 4\times 4 & 3\times 5 + 4\times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 10 & 15 \\ 33 & 14 & 39 \end{pmatrix}$$

$$d.\ CA = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow tidak\ bisa\ karena$$

$$banyak\ kolom\ C \neq banyak\ baris\ A$$

MATEMATIKA ITS

Definisi: Matriks Transpose

Matriks transpose dari matriks A ditulis A^T yang anggotanya merupakan anggota A dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \;;\; C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Tentukan

$a.\ A^T\,,\qquad b.\ B^T\,,\qquad c.\ C^T,\qquad d.\,(C^T)^T$

MATEMATIKA ITS

Jawab

$$a.\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b.\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c.\ C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to C^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$d.\ C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to C^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to (C^T)^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = C$$

MATEMATIKA ITS

Definisi: Matriks Trace

Jika matriks A persegi, maka trace A dinyatakan dengan $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota pada diagonal utama matriks A.

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Tentukan

a. $tr(A)$, b. $tr(B)$, c. $tr(C)$, d. $tr(AB)$

Jawab

a. $tr(A) = 5$, b. $tr(B) = 7$, c. $tr(C)$ = tidak ada karena C bukan matriks persegi

d. $AB = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 36 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow tr(AB) = 19$

MATEMATIKA ITS

2.2 Matrik Diagonal, Segitiga dan Simetris

Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua anggotanya nol semua kecuali pada diagonal utama yang semuanya tidak harus nol.

Contoh

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Mtriks Diagonal — *Bukan Mtriks Diagonal* — *Mtriks Diagonal*

MATEMATIKA ITS

Matriks Segitiga

Ada dua macam matriks segitiga (atas dan bawah), Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua anggotanya dibawah diagonal utama semuanya nol, sedangkan matriks segitiga bawah kebalikannya.

1. Matriks segitiga atas $A = [a_{ij}]$ jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$,
2. Matriks segitiga bawah $B = [b_{ij}]$ jika dan hanya jika $b_{ij} = 0$ untuk $i < j$

Contoh

Matriks segitiga atas A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriks segitiga bawah B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi A yang $A^T = A$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema: Jika A dan B adalah matriks simetris dengan ukuran yang sama, dan k adalah skalar, maka

1. A^T juga simetris
2. $A + B$ dan $A - B$ simetris
3. kA adalah simetris

MATEMATIKA ITS

1.3 Sistem Persamaan Linier

Persamaan Linear

Sebuah persamaan yang mengandung peubah bebas yang linear.

$$2x + 3y = 0$$

Sistem Persamaan Linear

Beberapa persamaan yang mengandung peubah bebas yang linear.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \qquad (1) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \qquad (2) \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 36 \qquad (3) \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Persamaan Tak Linear

Sebuah persamaan yang mengandung peubah bebas yang tak linear.

$$2x^2 + 3y = 0$$

Sistem Persamaan Tak Linear

Beberapa persamaan yang mengandung peubah bebas yang tak linear.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2^2 - 3x_1x_3 &= 0 \qquad (1) \\ x_1^2 - 4x_2 - 3\sin x_3 &= 0 \qquad (2) \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Sistem Persamaan Linear (SPL)

1. Tak Homogen (selanjutnya disebut SPL)
2. Homogen

1. SPL Tak Homogen

- **Sistem persamaan linear tak homogen** adalah koleksi sebanyak berhingga persamaan-persamaan linier dengan konstanta semuanya tidak nol (*nilai b_m semuanya tidak nol*).
- Bentuk umum sistem persamaan linier tak homogen dengan *m* persamaan dan *n* variabel adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_\mathrm{m} \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

2. SPL Homogen

- **Sistem persamaan linear homogen** adalah koleksi sebanyak berhingga persamaan-persamaan linier dengan semua konstanta bernilai 0 (nol) → ($b_m = 0$).
- Bentuk umum sistem persamaan linier homogen dengan *m* persamaan dan *n* variabel adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

3.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL)

Perhatikan SPL

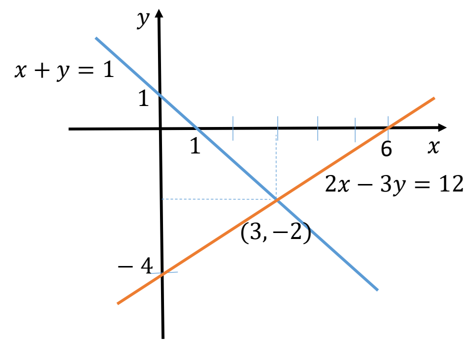
$$x + y = 1$$
$$2x - 3y = 12$$

Dengan menggunakan eliminasi didapat:

$x + y = 1$ (1) x 2 → $2x + 2y = 2$ (3)
$2x - 3y = 12$ (2) x 1 → $2x - 3y = 12$ (4)

(3) – (4) : $5y = -10$ → $y = -2$; $x - 2 = 1$ → $x = 3$

$(x, y) = (3, -2)$ → Satu penyelesaian



MATEMATIKA ITS

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL)

Perhatikan SPL

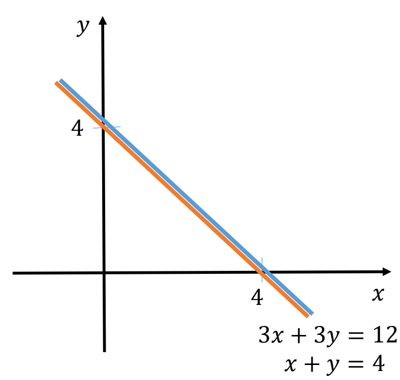
$$x + y = 4$$
$$3x + 3y = 12$$

Dengan menggunakan eliminasi didapat:

$x + y = 4$ (1) x 3 → $3x + 3y = 12$ (3)
$3x + 3y = 12$ (2) x 1 → $3x + 3y = 12$ (4)

(3) – (4) : $0 = 0$ benar

(x, y) → Banyak penyelesaian
Pada grafik dua garis berimpit



Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL)

MATEMATIKA ITS

Perhatikan SPL

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x + 3y &= 12 \end{aligned}$$

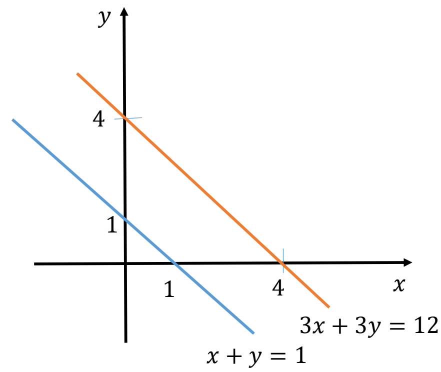
Dengan menggunakan eliminasi didapat:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \qquad (1) \text{ x } 3 \rightarrow 3x + 3y = 3 \quad (3) \\ 3x + 3y &= 12 \qquad (2) \text{ x } 1 \rightarrow 3x + 3y = 12 \quad (4) \end{aligned}$$

(3) – (4) : $0 = -9$ salah

$(x, y) \rightarrow$ Tidak ada penyelesaian

Pada grafik dua garis yang sejajar



Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan *n* Persamaan

MATEMATIKA ITS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ditulis : } A\bar{x} = b$$

MATEMATIKA ITS

Jika ditulis dalam bentuk:
Augmented matriks (matriks yang diperbesar)

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{\text{Koefisen peubah } x} \; \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}_{\text{Nilai sisi kanan}}$$

MATEMATIKA ITS

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
Metoda Eliminasi Gauss

- Untuk SPL yang mempunyai banyak persamaan lebih mudah menggunakan metode Eliminasi Gauss
- Metode Eliminasi Gauss membentuk Augmented matriks menjadi matriks segitiga (bawah atau atas)
- Untuk membuat matriks segitiga digunakan OBE (Operasi Baris Elementer)
- Lakukan substitusi dari baris n-1 sampai baris 1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3n} & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{nn} & l_n \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah OBE membuat matriks segitiga atas

MATEMATIKA ITS

- Ubah kolom a_{21} sampai a_{n1} menjadi 0 dengan OBE, baris ke-1 sebagai basis
  - Baris ke-2 – (a_{21}/a_{11}) x Baris 1 didapat baris 2 dengan nilai baru
  - Baris ke-3 – (a_{31}/a_{11}) x Baris 1 didapat baris 3 dengan nilai baru
  - ...
  - Baris ke-*n* – (a_{n1}/a_{11}) x Baris 1 didapat baris *n* dengan nilai baru

Bentuk Matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & c_n \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah OBE (lanjutan ...)

MATEMATIKA ITS

- Ubah kolom p_{32} sampai p_{n2} menjadi 0 dengan OBE, baris ke-2 sebagai basis
  - Baris ke-3 – (p_{32}/k_{22}) x Baris 2 didapat baris 3 dengan nilai baru
  - Baris ke-4 – (p_{42}/k_{22}) x Baris 2 didapat baris 4 dengan nilai baru
  - ...
  - Baris ke-*n* – (p_{n2}/k_{22}) x Baris 2 didapat baris *n* dengan nilai baru

Bentuk Matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3n} & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & q_{n3} & \cdots & q_{nn} & d_n \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Langkah-langkah OBE (lanjutan ...)

- Gunakan cara yang sama untuk mengubah kolom q_{43} sampai q_{n3} menjadi 0
- Dan seterusnya sampai pada kolom ke-(n-2)

Bentuk Matriks menjadi

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3n} & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{nn} & d_n \end{array}\right)$$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Selesaikan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 45 \end{aligned}$$

Jawab

Matriks augmented dan OBE

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 10 & 45 \end{pmatrix} B_3 \; tukar \; B_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim(B_2 - 3B_1) \\ \sim(B_3 - 3B_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 2 & -31 & -118 \end{pmatrix}$$

$\sim(B_2 - 3B_1)$: $3 - 3 * (1) = 0$; $-2 - 3 * (1) = -5$; $2 - 3 * (10) = -28$; $8 - 3 * (45) = -127$

$\sim(B_3 - 3B_1)$: $3 - 3 * (1) = 0$; $5 - 3 * (1) = 2$; $-1 - 3 * (10) = -31$; $17 - 3 * (45) = -118$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{pmatrix}1&1&10&45\\0&-5&-28&-127\\0&2&-31&-118\end{pmatrix} \sim \left(B_3+\frac{2}{5}B_2\right) \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&10&45\\0&-5&-28&-127\\0&0&-\frac{211}{5}&-\frac{844}{5}\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}x_1&x_2&x_3&b\end{matrix}\end{array}$$

$$\sim\left(B_3+\frac{2}{5}B_2\right): 0+\frac{2}{5}(\ \ 0)=\ \ 0\ ;$$

$$2+\frac{2}{5}(\ -5)=\ \ 0\ ;$$

$$-31+\frac{2}{5}(-28)=-\frac{211}{5}\ ;$$

$$-118+\frac{2}{5}(-127)=-\frac{844}{5}$$

$$-\frac{211}{5}x_3=-\frac{844}{5}\rightarrow x_3=-\frac{844}{5}:\left(-\frac{211}{5}\right)=-\frac{844}{5}\times\left(-\frac{5}{211}\right)=-\frac{5}{211}=4$$

$$-5x_2-28x_3=-127\leftrightarrow -5x_2-28(4)=-127\leftrightarrow -5x_2=-127+132\rightarrow x_2=\frac{15}{5}=3$$

$$x_1+x_2+10x_3=45\rightarrow x_1+3+10(4)=45\rightarrow x_1=45-3-40=2$$

$$(x_1,x_2,x_3)=(2,3,4)$$

Contoh

Selesaikan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss

MATEMATIKA ITS

$$\begin{aligned} x_1-x_2-x_3-x_4&=5\\ x_1+2x_2+3x_3+x_4&=-2\\ 3x_1+x_2\qquad\ \ +2x_4&=1\\ 2x_1\qquad+2x_3+3x_4&=5\end{aligned}$$

Jawab

Matriks augmented dan OBE

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}&\mathbf{5}\\ \mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}\\ \mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\ \mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\end{pmatrix} \begin{matrix}\sim(B_2-B_1)\\ \sim(B_3-3B_1)\\ \sim(B_4-2B_1)\end{matrix} \begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}&\mathbf{5}\\ \mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{4}&\mathbf{2}&\mathbf{-7}\\ \mathbf{0}&\mathbf{4}&\mathbf{3}&\mathbf{5}&\mathbf{-14}\\ \mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{4}&\mathbf{5}&\mathbf{-7}\end{pmatrix}$$

$$\sim(B_2-B_1):\ \begin{aligned}1-(1)&=0\ ;\\ 2-(-1)&=3\ ;\\ 3-(-1)&=4\ ;\\ 1-(-1)&=2\ ;\\ -2-(5)&=-7\ ;\end{aligned}$$

$$\sim(B_3-3B_1):\ \begin{aligned}3-3*(1)&=0\ ;\\ 1-3*(-1)&=4\ ;\\ 0-3*(-1)&=3\ ;\\ 2-3*(-1)&=5\ ;\\ 1-3*(5)&=-14\ ;\end{aligned}$$

$$\sim(B_4-2B_1):\ \begin{aligned}2-2*(1)&=0\ ;\\ 0-2*(-1)&=2\ ;\\ 2-2*(-1)&=4\ ;\\ 2-3*(-1)&=5\ ;\\ 3-2*(5)&=-7\ ;\end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim (B_3 - \frac{4}{3}B_2) \\ \sim (B_4 - \frac{2}{3}B_2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \sim (B_4 + \frac{4}{7}B_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$\sim(B_3 - \frac{4}{3}B_2)$:

$$\begin{aligned} 0 - \tfrac{4}{3} * 0 &= 0\ ; \\ 4 - \tfrac{4}{3} * 3 &= 0\ ; \\ 3 - \tfrac{4}{3} * 4 &= -\tfrac{7}{3}; \\ 5 - \tfrac{4}{3} * 2 &= \tfrac{7}{3}; \\ -14 - \tfrac{4}{3} * (-7) &= -\tfrac{14}{3} \end{aligned}$$

$\sim(B_4 - \frac{2}{3}B_2)$:

$$\begin{aligned} 0 - \tfrac{2}{3} * 0 &= 0\ ; \\ 2 - \tfrac{2}{3} * 3 &= 0\ ; \\ 4 - \tfrac{2}{3} * 4 &= \tfrac{4}{3}; \\ 5 - \tfrac{2}{3} * 2 &= \tfrac{11}{3}; \\ -7 - \tfrac{2}{3} * (-7) &= -\tfrac{7}{3} \end{aligned}$$

$\sim(B_4 + \frac{7}{4}B_3)$:

$$\begin{aligned} 0 + \tfrac{4}{7} * 0 &= 0\ ; \\ 0 + \tfrac{4}{7} * 0 &= 0\ ; \\ \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{7} * \left(-\tfrac{7}{3}\right) &= 0\ ; \\ \tfrac{11}{3} + \tfrac{4}{7} * \tfrac{7}{3} &= 5\ ; \\ -\tfrac{7}{3} + \tfrac{4}{7} * \left(-\tfrac{14}{3}\right) &= -5\ ; \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{matrix} \end{array}$$

$5x_4 = -5 \rightarrow x_4 = -1$

$-\frac{7}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = -\frac{14}{3} \leftrightarrow -\frac{7}{3}x_3 + \frac{7}{3}(-1) = -\frac{14}{3} \leftrightarrow -\frac{7}{3}x_3 = -\frac{14}{3} + \frac{7}{3} \rightarrow x_3 = 1$

$3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -7 \leftrightarrow 3x_2 + 4 * 1 + 2 * (-1) = -7 \rightarrow 3x_2 = -9 \rightarrow x_2 = -3$

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5 \leftrightarrow x_1 - (-3) - 1 - (-1) = 5 \rightarrow x_1 = 2$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -3, 1, -1)$

MATEMATIKA ITS

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
Metoda Eliminasi Gauss - Jordan

- Metoda Eliminasi Gauss – Jordan merupakan lanjutan dari metoda eliminasi Gauss
- Bentuk matriks segitiga atas/bawah dilakukan OBE sehingga membentuk matriks diagonal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{pmatrix}}_{\text{Augmented Matriks}} \sim \begin{matrix} OBE \\ Gauss \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & c_1 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} & c_2 \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & c_4 \end{pmatrix}}_{\text{Matriks Segitiga Atas}} \sim \begin{matrix} OBE \\ Jordan \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_4 \end{pmatrix}}_{\text{Matriks Diagonal}}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 10.

Selesaiakan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss - Jordan

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - \quad x_3 &= 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + \ 2x_3 &= 8 \\ x_1 + \quad x_2 + 10x_3 &= 45 \end{aligned}$$

Jawab

Matriks segitiga atas dan OBE Jordan dari Contoh 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 0 & -\frac{211}{5} & -\frac{844}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \left(B_2 / -5 \right) \\ \sim \left(B_3 / -\frac{211}{5} \right) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim (B_1 - B_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$Baris\ 2\ dibagi\ (-5)\ agar\ diagonal\ \ a_{22} = 1$

$Baris\ 3\ dibagi\ \left(-\frac{211}{5}\right)\ agar\ diagonal\ a_{33} = 1$

$$\sim(B_1 - B_2):\ 1 - 0 = 1\ ;\ 10 - \frac{28}{5} = \frac{22}{5}\ ;$$

$$1 - 1 = 0\ ;\ 45 - \frac{127}{5} = \frac{98}{5}$$

Dibuat sama dengan 0*, basis* B_3 *Dibuat sama dengan* 0*, basis* B_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \left(B_1 - \frac{22}{5}B_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \left(B_2 - \frac{28}{5}B_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\sim\left(B_1 - \frac{22}{5}B_3\right): 1 - \frac{22}{5} * 0 = 1;$

$0 - \frac{22}{5} * 0 = 0;$

$\frac{22}{5} - \frac{22}{5} * 1 = 0;$

$\frac{98}{5} - \frac{22}{5} * 4 = 2;$

$\sim\left(B_2 - \frac{5}{28}B_3\right): 0 - \frac{28}{5} * 0 = 0;$

$1 - \frac{28}{5} * 0 = 1;$

$\frac{28}{5} - \frac{28}{5} * 1 = 0;$

$\frac{127}{5} - \frac{28}{5} * 4 = \frac{127}{5} - \frac{112}{5} = 3;$

$\boldsymbol{x_1 = 2}$

$\boldsymbol{x_2 = 3}$

$\boldsymbol{x_3 = 4}$

$\boldsymbol{(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 4)}$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Selesaiakan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss - Jordan

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Jawab

Matriks segitiga atas Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Buat menjadi matriks Gauss-Jordan

Untuk latihan !!!

MATEMATIKA ITS

Sistem Persamaan Linear Homogen

Sistem persamaan linear homogen adalah sistem persamaan linear yang semua suku konstannya nol.

Bentuk umum SPL homogen adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Semua Koefisien $b_m = 0$

MATEMATIKA ITS

Karena semua suku konstan nol, maka jika dilakukan Operasi Baris Elementer (OBE) tetap saja suku konstannya nol, oleh karena itu matriks lengkap SPL homogen ini sering disingkat tanpa memasukkan kolom suku konstan yaitu:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

MATEMATIKA ITS

SPL homogen selalu konsisten

- Minimal mempunyai **penyelesaian nol** $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\}$ yang disebut **penyelesaian trivial**.
- Jika terdapat penyelesaian yang lain, disebut **penyelesaian tak-trivial**.

Jadi, SPL homogen mempunyai dua kemungkinan penyelesaian, yaitu:

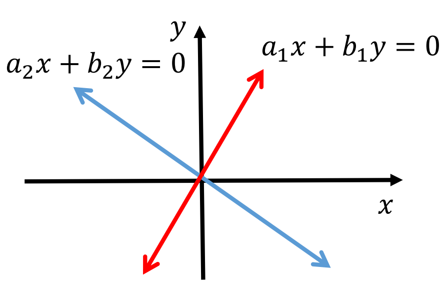
1. **Penyelesaian trivial.**
2. **Penyelesaian banyak (tak-trivial).**

MATEMATIKA ITS

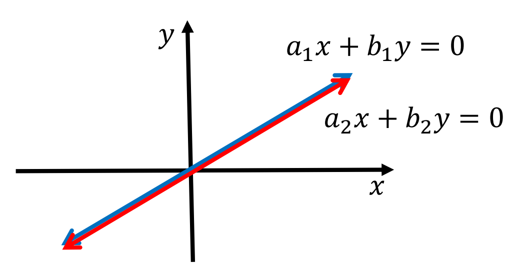
Dalam kasus SPL homogen khusus dari dua persamaan dengan dua peubah, misal

$$a_1x + b_1y = 0 \;\; (a_1, b_1 \text{ tidak keduanya nol})$$
$$a_2x + b_2y = 0 \;\; (a_2, b_2 \text{ tidak keduanya nol}),$$

grafik persamaannya berupa garis-garis yang **melalui titik asal**, dan penyelesaian trivialnya berpadanan dengan **perpotongan di titik asal**.



Penyelesaian trivial



Penyelesaiannya banyak (tak-trivial)

MATEMATIKA ITS

Contoh 1.

Tentukan SPL Homogen

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jawab

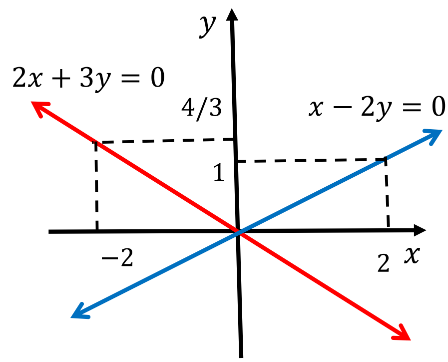
Dengan menggunakan eliminasi

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 0 \;\; (1) \times 1 &\rightarrow 2x + 3y = 0 \quad (3) \\ x - 2y = 0 \;\; (2) \times 2 &\rightarrow 2x - 4y = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$(3) - (4): 7y = 0 \rightarrow y = 0;\;\; x - 2.0 = 0 \rightarrow x = 0$

$$(x, y) = (0, 0) \rightarrow \textit{Penyeleaian trivial}$$

Gambar Grafik



Penyelesaian trivial

MATEMATIKA ITS

Contoh 2.

Tentukan SPL Homogen

$$\begin{aligned} 3x - 6y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jawab

Dengan menggunakan eliminasi

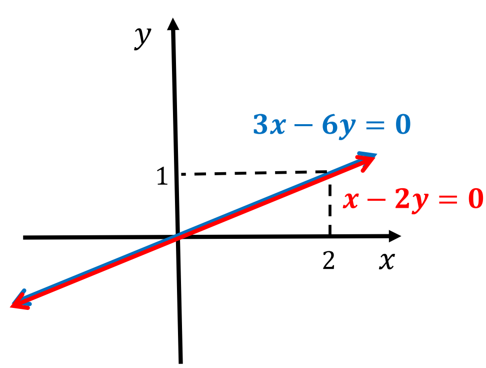
$$\begin{aligned} 3x - 6y = 0 \;\; (1) \times 1 &\rightarrow 3x - 6y = 0 \quad (3) \\ x - 2y = 0 \;\; (2) \times 3 &\rightarrow 3x - 6y = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$(3) - (4): 0 = 0$ benar

$\rightarrow \{(0, 0), (-2, -1), (2, 1), \ldots\}$

Penyelesaian tak-trivial

Gambar Grafik



Penyelesaian tak-trivial

MATEMATIKA ITS

Kasus khusus
Suatu sistem homogen dijamin mempunyai penyelesaian tak-trivial, yaitu jika sistem tersebut mencakup jumlah peubah lebih banyak daripada jumlah persamaannya.

Teorema 1.
Sistem persamaan linear homogen selalu mempunyai penyelesaian tak trivial, jika banyaknya peubah lebih banyak dibandingkan banyaknya persamaan.

MATEMATIKA ITS

Perhatikan sistem persamaan berikut:

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Merupakan sistem persamaan linear dengan dua persamaan dan tiga peubah sehingga mempunyai banyak penyelesaian (tak-trivial) → lihat Contoh 3.

Karena dalam sistem persamaan linear homogen, ruas kanan dari setiap persamaan bernilai nol, maka ketika dikenakan operasi baris elementer (OBE) tidak akan mengalami perubahan, sehingga untuk mencari penyelesaiannya tidak perlu menggunakan matriks lengkap, cukup menggunakan matriks koefisiennya saja.

Contoh 3.

Tentukan penyelesaian SPL homogen berikut.

$$3x_1 + x_2 + \quad x_3 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \left(\frac{1}{3}B_1\right) \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim (B_2 - 5B_1) \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -8/3 & 1/3 \end{bmatrix} \sim \left(-\frac{3}{8}B_1\right) \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/8 \end{bmatrix}$$

$$x_2 - \frac{1}{8}x_3 = 0 \to \boldsymbol{x_2 = \frac{1}{8}x_3}$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \leftrightarrow x_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}x_3\right) + \frac{1}{3}x_3 = 0 \to x_1 + \frac{1}{24}x_3 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \to \boldsymbol{x_1 = -\frac{9}{24}x_3}$$

Nilai x_1 dan x_2 tergantung dari x_3, misal $x_3 = 2 \to x_1 = -\frac{18}{24}$; $x_2 = \frac{2}{8}$

Jadi, SPL homogen mempunyai penyelesaian tak-trivial

Contoh 4.

Tentukan penyelesaian SPL homogen berikut.

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim (B_1 + B_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim (B_2 + 2B_1) \\ \sim (B_3 - 2B_1) \\ \sim (B_4 - 3B_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$\sim(B_2 + 2B_1)$: $-2 + 2*(1) = 0$; $-2 + 2*(1) = 0$; $1 + 2*(3) = 7$; $1 + 2*(3) = 7$

$(\sim B_3 - 2B_1)$: $2 - 2*(1) = 0$; $2 - 2*(1) = 0$; $-3 - 2*(3) = -9$; $-3 - 2*(3) = -9$

$(\sim B_3 - 3B_1)$: $3 - 3*(1) = 0$; $3 - 3*(1) = 0$; $4 - 3*(3) = -5$; $4 - 3*(3) = -5$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{7}B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim(B_3 + 9B_2) \\ \sim(B_4 + 5B_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim(B_1 - 3B_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim(B_3 + 9B_2): \begin{aligned} 0 + 9 * (0) &= 0 \\ 0 + 9 * (0) &= 0 \\ -9 + 9 * (1) &= 0 \\ -9 + 9 * (1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sim(B_4 + 5B_2): \begin{aligned} 0 + 5 * (0) &= 0 \\ 0 + 5 * (0) &= 0 \\ -5 + 5 * (1) &= 0 \\ -5 + 5 * (1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sim B_1 - 3B_2: \begin{aligned} 1 - 3 * (0) &= 1 \\ 1 - 3 * (0) &= 1 \\ 3 - 3 * (1) &= 0 \\ 3 - 3 * (1) &= 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x_1 + x_2 = 0}$ **atau** $\boldsymbol{x_1 = -x_2}$

$\boldsymbol{x_3 + x_4 = 0}$ **atau** $\boldsymbol{x_3 = -x_4}$

Karena x_2 dan x_4 bernilai sebarang bilangan riil maka keduanya dapat diganti dengan parameter, misalnya, $x_2 = t$ dan $x_4 = s$, sehingga penyelesaian SPL homogen tersebut ialah: $\{t, s \epsilon R | x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = -s, x_4 = s\}$.

MATEMATIKA ITS

Teorema 2
Sistem persamaan linear homogen mempunyai penyelesaian trivial, jika dan hanya jika matriks koefisien A berukuran $n \times n$ ekuivalen dengan matriks identitas.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga sistem persamaan linear homogen yang di hasilkan berbentuk:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

dan penyelesaian dari sistem ini adalah trivial.

MATEMATIKA ITS

Contoh 5.

Tentukan penyelesaian SPL homogen berikut.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 8x_3 = 0$$

- Operasi Baris Elementer (OBE) untuk mendapatkan matriks segi tiga atas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim(B_2 - 2B_1) \\ \sim(B_3 - 3B_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim(B_3 - B_1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Lanjutkan OBE untuk mendapatkan matriks diagonal:

$$\sim\left(-\frac{1}{5}B_2\right) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim(B_1 - 3B_3) \\ \sim(B_2 - \frac{2}{5}B_3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim(B_1 - 2B_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks koefisien tersebut ekuivalen dengan matriks identitas, maka sistem persamaan linear memiliki solusi trivial yaitu $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = 0}$.

MATEMATIKA ITS

Contoh 6.

Tentukan penyelesaian SPL homogen berikut.

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Jawab

Bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan OB

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} B_1 \leftrightarrow B_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim(B_2 + B_1) \\ \sim(B_3 - 2B_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\sim(B_2 + B_1)$: $-1 + 1 = 0$; $-1 + 1 = 0$; $2 - 2 = 0$; $-3 + 0 = -3$; $1 - 1 = 0$

$\sim(B_3 - 2B_1)$: $2 - 2 * 1 = 0$; $2 - 2 * 1 = 0$; $-1 - 2 * (-2) = 3$; $0 - 2 * 0 = 0$; $1 - 2 * (-1) = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right) B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) B_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} B_2 \leftrightarrow B_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim(B_1 + 2B_2) \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array}$$

Sehingga diperoleh SPL

(1): $x_1 + x_2 + x_5 = 0$

(2): $x_3 + x_5 = 0$

(3): $x_4 = 0$

(4): $x_3 + x_4 + x_5 = 0$

→

(3): $x_4 = 0$

(2): $x_3 = -x_5$

(1): $x_1 + x_2 + x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 - x_5$

Penyelesaian SPL Homogen:

$x_4 = 0$; $Jika\ x_5 = t \rightarrow x_3 = -t$; $Jika\ x_2 = s \rightarrow x_1 = -s - t$; $s, t \in R$, $Penyelesaian\ tak\ trivial$

Misal: $s = t = 1 \rightarrow x_4 = 0$; $x_5 = 1$; $x_3 = -1$; $x_2 = 1$; $x_1 = -2 \rightarrow$ salah satu penyelesaian

MATEMATIKA ITS

Lanjut ke topik Invers Matriks, Nilai Eigen,Vektor Eigen