

$$\begin{aligned}
 m_k &= \frac{QR}{PR} \\
 &= \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h - x} \\
 &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
 \end{aligned}$$

$$m_l = ?$$



Bab 5. Diferensiasi

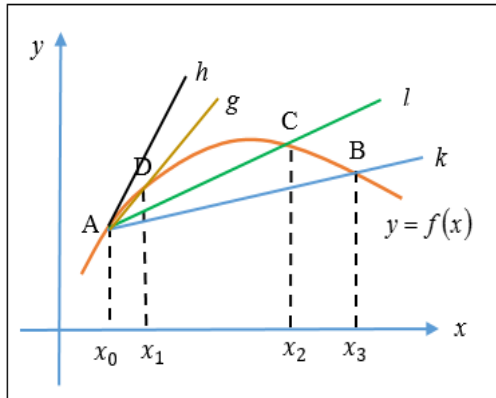
Daryono Budi Utomo

Bab 5 Difrensiasi

- ✓ 5.1 Persamaan Garis Singgung dan Kecepatan Sesaat
- ✓ 5.2 Rumus Turunan Fungsi
- ✓ 5.3 Turunan Fungsi Trigonometri
- ✓ 5.4 Turunan tingkat tinggi
- ✓ 5.5 Aturan Rantai
- ✓ 5.6 Turunan Fungsi Implisit

5.1 Persamaan Garis Singgung dan Kecepatan Sesaat

Diberikan $y = f(x)$ dan garis k, l, g dan h yang diperlihatkan pada Gambar dibawah ini



- Gradien garis k :

$$m_{AB} = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$$

- Gradien garis l :

$$m_{AC} = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

- Gradien garis g :

$$m_{AD} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Bagaimana untuk gradien garis h , sebut m_h yang merupakan arah garis singgung dari $y = f(x)$ di titik A yang mana nilai x_1 mendekati x_0 dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$m_{AD} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (1)$$

Jika $y = f(x)$ merupakan fungsi kecepatan dan dinyatakan dalam $y = f(t)$ dengan t menyatakan waktu, maka kecepatan sesaat adalah:

$$v_{\text{seaat}} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (2)$$

Perhatikan Persamaan (1), arah garis singgung kurva $y = f(t)$ pada titik A dapat dinyatakan

$$m_{AD} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

Jika $\Delta x = x_1 - x_0$; $x_1 = x_0 + \Delta x$, untuk $x_1 \rightarrow x_0$ dan berakibat $\Delta x \rightarrow 0$, maka:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

Untuk sebarang nilai x Persamaan (3) menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4)$$

Persamaan (4) merupakan turunan/diferensiasi dari $f(x)$

Contoh 1.

Tentukan turunan $f(x) = x^2$

Jawab

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

Contoh 2.

Tentukan turunan $f(x) = \sqrt{x}$

Jawab

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \end{aligned}$$

- Jika fungsi f dapat diturunkan (diferensiabel) maka f kontinu, tetapi tidak berlaku sebaliknya artinya jika f kontinu belum tentu diferensiabel.
- Suatu fungsi dapat diturunkan jika turunan kiri = turunan kanan ($f'_- = f'_+$)

Contoh 3.

Selidiki apakah $f(x) = |x|$ fungsi kontinu dan diferensiabel di $x = 2$

Jawab

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Syarat kontinu

1. $f(2) = 2$ (ada)
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 2$ (ada)
3. $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$f(x)$ kontinu di $x = 0$

f dapat diturunkan di $x = 0$ jika

Turunan kiri di $x = 0$ sama dengan turunan kanan di $x = 0$

Turunan kiri di $x = 0$

$$f'_- = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-(0 + \Delta x) - (-0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Turunan kanan di $x = 0$

$$f'_+ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(0 + \Delta x) - (0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Karena $f'_- \neq f'_+$ maka f tidak dapat diturunkan di $x = 0$

Contoh 4.

Selidiki apakah $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$ fungsi kontinu dan diferensiabel di $x = 2$

Jawab

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$$

Syarat kontinu

1. $f(2) = 3$ (ada)
2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3$ } sama
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ (ada)
3. $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

$f(x)$ kontinu di $x = 2$

f dapat diturunkan di $x = 2$ jika

Turunan kiri di $x = 2$ sama dengan turunan kanan di $x = 2$

Turunan kiri di $x = 2$

$$f'_- = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{((2 + \Delta x) + 1) - (2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

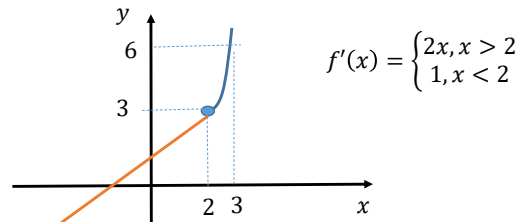
Turunan kanan di $x = 2$

$$\begin{aligned} f'_+ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 1) - (2^2 - 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4 \end{aligned}$$

Karena $f'_- \neq f'_+$ maka f tidak dapat diturunkan di $x = 2$

Contoh 4.

Selidiki apakah $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$ fungsi kontinu dan diferensiabel di $x = 2$



Turunan $f(x)$ di $x = 3$

$$f'_+ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 1 - (3^2 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - (9 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x(6 + \Delta x)}{\Delta x} = 6$$

$$f'_- = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 1 - (3^2 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - (9 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x(6 + \Delta x)}{\Delta x} = 6$$

$f'_-(3) = f'_+(3) \rightarrow f(x)$ diferensiabel di $x = 3$

5.2 Rumus Turunan fungsi

Rumus turunan dari fungsi

Diberikan fungsi $y = f(x)$ kontinu disemua nilai x .

$$y = ax^n, a = \text{konstanta}; \frac{dy}{dx} = nax^{n-1}; n = \text{bilangan riil}$$

$$y = f(x) \pm g(x); \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

$$y = f(x) \times g(x); \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}; g(x) \neq 0; \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Contoh 5.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$

a. $y = 3x^4 - 2x^{-3} + \sqrt{x}$

b. $y = (2x^3 - 3x)(x + 1)$

c. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

d. $y = \frac{2x}{(x^2-3)}$

Jawab

a. $y = 3x^4 - 2x^{-3} + \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 12x^3 + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b. $y = (2x^3 - 3x)(x + 1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (6x^2 - 3)(x + 1) + (2x^3 - 3x)(1) \\ &= 6x^3 + 6x^2 - 3x - 3 + 2x^3 - 3x = 8x^3 + 6x^2 - 6x - 3\end{aligned}$$

c. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1} ; x \neq 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(x^2 - 1) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

d. $y = \frac{2x}{(x^2-3)} ; x \neq \sqrt{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2)(x^2 - 3) - (2x)(2x)}{(x^2 - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6 - 4x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 6}{(x^2 - 1)^2}$$

5.3 Turunan Fungsi Trigonometri



Diberikan $y = \sin x$ akan dicari turunan dari y , berdasarkan definisi turunan:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(\Delta x) - 1) + \cos(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \sin x (0) + \cos x (1) \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

Untuk fungsi $y = \cos x$ dengan cara yang sama didapat

$$y = \cos x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

Fungsi trigonometri yang lain dengan menggunakan rumus turunan fungsi $\sin x$ dan $\cos x$.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \cos x - 1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

Rumus turunan fungsi trigonometri

- $y = \sin x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$
- $y = \cos x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x$
- $y = \tan x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
- $y = \cot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$
- $y = \sec x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan x \sec x$
- $y = \csc x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cot x \csc x$

Contoh 6.

- $y = \sin x \cos x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
- $y = \sin x \tan x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \tan x + \sin x \sec^2 x = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \frac{1}{\cos^2 x}$
 $= \sin x + \tan x \sec x$
- $y = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x} \frac{1}{\cos x} = \csc x \sec x$
 $\frac{dy}{dx} = -\cot x \csc x \tan x \sec x = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = -\sec x \csc x$

5.4 Turunan tingkat tinggi

Diberikan $y = f(x)$

- Turunan dari $y = f(x)$ terhadap x dinyatakan dengan $y = f'(x)$ disebut turunan pertama
- Jika $y = f'(x)$ diturunkan lagi terhadap x didapat: $y = f''(x)$, turunan kedua
- Jika $y = f''(x)$ diturunkan lagi terhadap x didapat: $y = f'''(x)$, turunan ketiga dan seterusnya

Contoh 7.

- $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x$
- $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$
- $f''(x) = 12x^2 - 12x$
- $f'''(x) = 24x - 12$
- $f^{(iv)}(x) = 24$
- $f^{(v)}(x) = 0$

5.5 Aturan Rantai

Diberikan fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, jika $g(x)$ dapat diturunkan terhadap x dan $f(x)$ dapat diturunkan terhadap $g(x)$ dan bentuk fungsi komposisi dinyatakan dengan:

$$y = f(u) ; u = g(x)$$

maka turunan fungsi komposisi adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Contoh 8

Tentukan turunan dari fungsi yang diberikan

a. $y = (2x^3 - 1)^{10}$

b. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{10}$

c. $y = \sin 3x$

d. $y = \tan^2 5x$

e. $y = \cos \left(\sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \right)$

a. $y = (2x^3 - 1)^{10}$

Misal: $u = 2x^3 - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$

$$y = u^{10} \rightarrow \frac{dy}{du} = 10u^9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 10u^9 6x^2 = 10(2x^3 - 1)^9 6x^2 = 60x^2(2x^3 - 1)^9$$

b. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{10}$

Misal: $u = \frac{x^2-1}{x^2+1} ; \frac{du}{dx} = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$$y = u^{10} ; \frac{dy}{du} = 10u^9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 10u^9 \left(\frac{4x}{(x^2+1)^2} \right)$$

$$= 10 \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^9 \left(\frac{4x}{(x^2+1)^2} \right) = 40x \frac{(x^2-1)^9}{(x^2+1)^{11}}$$

c. $y = \sin 3x$

Misal:

$$u = 3x; \frac{du}{dx} = 3$$

$$y = \sin u; \frac{dy}{du} = \cos u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 3 \cos u = 3 \cos(3x)$$

d. $y = \tan^2 5x$

Misal:

$$u = 5x; \frac{du}{dx} = 5$$

$$v = \tan u; \frac{dv}{du} = \sec^2 u$$

$$y = v^2; \frac{dy}{dv} = 2v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{dv}{du} \frac{dy}{dv} = 5 \sec^2 u (2v) = 10 \sec^2 5x \tan 5x$$

e. $y = \cos \left(\sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \right) = \cos (\sec u)$

Misal:

$$u = \frac{1+2x}{1-2x}; \frac{du}{dx} = \frac{2(1-2x) - (-2)(1+2x)}{(1-2x)^2} = \frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$v = \sec u; \frac{dv}{du} = \sec u \tan u$$

$$y = \cos v; \frac{dy}{dv} = -\sin v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{dv}{du} \frac{dy}{dv} = \frac{4}{(1-2x)^2} \sec u \tan u (-\sin v)$$

$$= \frac{4}{(1-2x)^2} \sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \tan \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) (-\sin(\sec u))$$

$$= \frac{-4}{(1-2x)^2} \sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \tan \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \left(\sin \left(\sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \right) \right)$$

Cara cepat

Mencari turunan fungsi dengan aturan rantai penyelesaian dengan pemisalan dimulai dari fungsi yang terdalam, sebaliknya aturan cepat fungsi yang diturunkan dimulai dari fungsi yang terluar. Sebagai ilustrasi diberikan

$$y = \tan(\sin(3x^2))$$

- Fungsi terluar adalah $\tan(\sin(3x^2))$ turunan:
 $\sec^2(\sin(3x^2)) \times (\text{turunan dalam})$
- Masuk ke fungsi dalam $\sin(3x^2)$
 $\text{turunan } \sec^2(\sin(3x^2)) \times (\cos(3x^2)) \times (\text{turunan dalam})$
- Masuk ke fungsi dalam $(3x^2)$
 $\text{turunan } \sec^2(\sin(3x^2)) \times (\cos(3x^2)) \times (6x)$

Proses cara cepat

Diagram illustrating the chain rule process for the function $y = \tan(\sin(3x^2))$:

$$y = \tan(\sin(3x^2))$$

The diagram shows the following steps:

- Step 1: $\frac{dy}{dx} = \sec^2(\sin(3x^2))(\quad)$ (turunan tan $\rightarrow \sec^2$)
- Step 2: $\frac{dy}{dx} = \sec^2(\sin(3x^2))(\cos(3x^2))(\quad)$ (turunan sin $\rightarrow \cos$)
- Step 3: $\frac{dy}{dx} = \sec^2(\sin(3x^2))(\cos(3x^2))(6x)$ (turunan $3x^2 \rightarrow 6x$)

Latihan soal

Tentukan turunan dari fungsi yang diberikan dengan cara cepat

a. $y = (2x^3 - 1)^{10}$

b. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{10}$

c. $y = \sin 3x$

d. $y = \tan^2 5x$

e. $y = \cos \left(\sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \right)$

$$\frac{dy}{dx} y = -\sin \left(\sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \right) \sec \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \tan \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \left[\frac{2(1-2x) - (-2)(1+2x)}{(1-2x)^2} \right]$$

5.6 Turunan Fungsi Implisit

- Fungsi eksplisit adalah fungsi yang peubah x dan y dipisah dan dinyatakan dengan

$$y = f(x)$$

Contoh 9

a. $y = 3x^2 + x - 4$

b. $y = \frac{x-4}{2x}$

- Fungsi implisit adalah fungsi yang peubah x dan y tidak dipisah dan dinyatakan dengan

$$F(x, y) = 0$$

Contoh 10

a. $3xy - 2x + 4 = 0$ (*fs implisit*) $\rightarrow y = \frac{2x-4}{3x}$ (*fs eksplisit*)

b. $\sin(xy) = 2$ (*fs implisit*) $\rightarrow y = ?$ (*tidak bisa dibuat fs eksplisit*)

Bentuk fungsi eksplisit selalu bisa diubah ke fungsi implisit, tidak berlaku sebaliknya, artinya tidak semua fungsi implisit dapat diubah ke fungsi eksplisit.

Konsep dari turunan implisit

- $y = 1$ diturunkan terhadap x : $\frac{dy}{dx} = 0$; $y = 3x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x$
- $y^3 = 5$ diturunkan terhadap x : $3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$
- $3x^2y^3 = 8$ diturunkan terhadap x : seolah olah bentuk perkalian fungsi

$$\begin{aligned}
 6xy^3 + 3x^2 \left(3y^2 \frac{dy}{dx} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 6xy^3 + 9x^2y^2 \frac{dy}{dx} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 9x^2y^2 \frac{dy}{dx} &= -6xy^3 \\
 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{-6xy^3}{9x^2y^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{-2y}{3x} = \frac{-2 \left(\sqrt[3]{\frac{8}{3x^2}} \right)}{3x}
 \end{aligned}$$

Contoh 11

Tentukan $\frac{dy}{dx}$

a. $x^2 + y^2 = 9 \rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 ; 2y \frac{dy}{dx} = -2x ; \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

b. $x^3 + y^3 = 3xy$,

Diubah kebentuk $y = f(x)$ tidak bisa, hasil turunan ada peubah y

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} &= 3y + 3x \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow y^2 \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} = y - x^2 \\
 (y^2 - x) \frac{dy}{dx} &= y - x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}
 \end{aligned}$$

c. $x^3y^2 - 5x^2y + x = 1$

Diubah kebentuk $y = f(x)$ tidak bisa, hasil turunan ada peubah y

$$x^3y^2 - 5x^2y + x = 1 \rightarrow 3x^2y^2 + x^3 \left(2y \frac{dy}{dx} \right) - 5 \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx} \right) + 1 = 0$$

$$x^3 2y \frac{dy}{dx} - 5x^2 \frac{dy}{dx} = 10xy - 1 - 3x^2y^2 \rightarrow (2x^3y - 5x^2y^2) \frac{dy}{dx} = 10xy - 3x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10xy - 3x^2 - 1}{(2x^3y - 5x^2y^2)}$$

d. $\cos(x^2y^2) = y \rightarrow -\sin(x^2y^2) \left(2xy^2 + 2x^2y \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx}$

$$-\sin(x^2y^2)(2xy^2) - (\sin(x^2y^2)) \left(2x^2y \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx}$$

$$-(\sin(x^2y^2)) \left(2x^2y \frac{dy}{dx} \right) - \frac{dy}{dx} = (2xy^2) \sin(x^2y^2)$$

$$-[(2x^2y(\sin(x^2y^2)) + 1)] \left(\frac{dy}{dx} \right) = (2xy^2) \sin(x^2y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2xy^2 \sin(x^2y^2)}{2x^2y(\sin(x^2y^2)) + 1}$$

Bab 5



NEXT APLIKASI TURUNAN