MATEMATIKA ITS

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Invers Matriks

Bab 3. Matriks dan Determinan (Lanjutan)

Daryono Budi Utomo

MATEMATIKA ITS

Bab 3. Matriks, Determinan dan Sistem Persamaan Linier

MATEMATIKA ITS

3.5 Matriks Identitas dan Matriks Invers

Matriks Identitas

Matriks Identitas adalah matriks persegi yang anggotanya semua nol kecuali pada diagonal utama semuanya bilangan satu, biasanya disimbol dengan I_n, dimana n adalah ukuran matriksnya.

Contoh

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Pengertian Invers Matriks

- Matriks persegi A dikatakan mempunyai invers, jikaterdapat matriks B sedemikian hingga:

  $$AB = BA = I,$$

  dimana I matriks identitas
- B dikatakan invers matriks A ditulis A^{-1}, maka $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Contoh 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Mencari Matriks Invers

Diberikan matriks A tambahkan pada sisi kanan matriks identitas, ubahlah matriks A menjadi bentuk matriks identitas dengan menggunakan *OBE*. Hasil dari matriks sisi kanan merupakan matriks invers dari matriks A.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim OBE \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{I} \qquad \underbrace{}_{I} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 2.

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Tentukan invers matriks A

Penyelesaian

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim(B_2 - 2B_1) \\ \sim(B_3 - B_1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim(B_3 + 2B_2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \sim(B_2 - 2B_1): & 2-(2*1) = 0 \\ & 5-(2*2) = 1 \\ & 3-(2*3) = -3 \\ & 0-(2*1) = -2 \\ & 1-(2*0) = 1 \\ & 0-(2*0) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \sim(B_3 - B_1): & 1-1 = 0 \\ & 0-2 = -2 \\ & 8-3 = 5 \\ & 0-1 = -1 \\ & 0-0 = 0 \\ & 1-0 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \sim(B_3 + 2B_2): & 0+2*0 = 0 \\ & -2+2*1 = 0 \\ & 5+2*(-3) = -1 \\ & -1+2*(-2) = -5 \\ & 0+2*1 = 2 \\ & 1+2*0 = 1 \end{array}$$

MATEMATIKA ITS

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim(-1)B_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim(B_1 - 3B_3) \\ \sim(B_2 + 3B_3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_1 - 3B_3): 1 - 3*0 &= 1 \\ 2 - 3*0 &= 2 \\ 3 - 3*1 &= 0 \\ 1 - 3*5 &= -14 \\ 0 - 3*(-2) &= 6 \\ 0 - 3*(-1) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_2 + 3B_3): 0 + 3*0 &= 0 \\ 1 + 3*0 &= 1 \\ -3 + 3*1 &= 0 \\ -2 + 3*5 &= 13 \\ 1 + 3*(-2) &= -5 \\ 0 + 3*(-1) &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_1 - 2B_2): 1 - 2*0 &= 1 \\ 2 - 2*1 &= 0 \\ 3 - 2*0 &= 0 \\ -14 - 2*13 &= -40 \\ 6 - 2*(-5) &= 16 \\ 3 - 2*(-3) &= 9 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim(B_1 - 2B_2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

SPL Tak Homogen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 1x_1 + \qquad +8x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \leftrightarrow Ix = A^{-1}b \rightarrow x = A^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

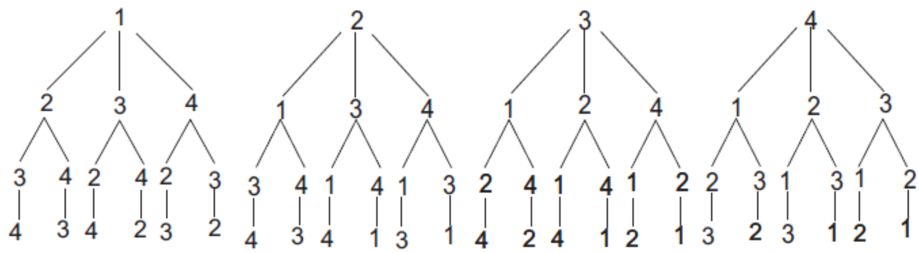
3.6 Fungsi Determinan

Permutasi

Permutasi suatu himpunan bilangan bulat {1; 2; 3; ; n} adalah suatu susunan bilangan-bilangan bulat dalam suatu urutan tanpa pengulangan

Banyaknya susunan *n* bilangan adalah *n*!

Contoh Permutasi n = 4



Ada 24 susunan bilangan

MATEMATIKA ITS

Pembalikan Permutasi

Jika dalam suatu permutasi terdapat jumlah pembalikan yang genap maka permutasi tersebut disebut permutasi genap, begitu juga jika terjadi jumlah pembalikan yang ganjil maka disebut dengan permutasi ganjil

Contoh 3.

Untuk n = 3

Permutasi	Jumlah Pembalikan	Klasifikasi
$(1,2,3)$	0	genap
$(1,3,2)$	1	ganjil
$(2,1,3)$	1	ganjil
$(2,3,1)$	2	genap
$(3,1,2)$	2	genap
$(3,2,1)$	3	ganjil

Penjelasan

- (1, 2, 3) urutan sudah benar
  tidak ada yang terbalik, pembalikan 0
- (1, 3, 2) → 3 mendahului 2
  jumlah pembalikan 1
- (3, 2, 1) → 3 mendahului 2,
  3 mendahului 1, 2 mendahului 1
  jumlah pembalikan 3

Determinan

MATEMATIKA ITS

Pandang matriks A matriks persegi. Fungsi determinan A atau biasanya disingkat dengan determinan A dinyatakan dengan det(A) sebagai jumlahan hasil kali dasar beserta tanda dari A.

Untuk matriks A berukuran 2 x 2

$$+ \qquad -$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Bertanda
(1,2)	$a_{11}a_{22}$	genap	$a_{11}a_{22}$
(2,1)	$a_{12}a_{21}$	ganjil	$-a_{12}a_{21}$

- Untuk permutasi (1, 2) tidak ada pembalikan (genap tanda +), maka $a_{11}a_{22}$
- Untuk permutasi (2, 1) ada pembalikan 1 (ganjil tanda -), maka $a_{12}a_{21}$

Untuk matriks A berukuran 3 x 3

MATEMATIKA ITS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1, 2, 3)	$\boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33}}$	**0 (genap)**	$\boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33}}$
(1, 3, 2)	$\boldsymbol{a_{11}a_{23}a_{32}}$	**1 (ganjil)**	$\boldsymbol{-a_{11}a_{23}a_{32}}$
(2, 1, 3)	$\boldsymbol{a_{12}a_{21}a_{33}}$	**1 (ganjil)**	$\boldsymbol{-a_{12}a_{21}a_{33}}$
(2, 3, 1)	$\boldsymbol{a_{12}a_{23}a_{31}}$	**2 (genap)**	$\boldsymbol{a_{12}a_{23}a_{31}}$
(3, 1, 2)	$\boldsymbol{a_{13}a_{21}a_{32}}$	**2 (genap)**	$\boldsymbol{a_{13}a_{21}a_{32}}$
(3, 2, 1)	$\boldsymbol{a_{13}a_{22}a_{31}}$	**3 (ganjil)**	$\boldsymbol{-a_{13}a_{22}a_{31}}$

(1, 2, 3) → 1, 2 dan 3 sudah pada posisi : $a_{11}a_{22}a_{33}$

(1, 3, 2) → 1 sudah pada posisi
2→ 3 dan 3→2
$a_{11}a_{23}a_{32}$

(2, 1, 3) → 3 sudah dalam posisi
1→ 2 dan 2 → 1
$a_{12}a_{21}a_{33}$

(3, 2, 1) → 2 sudah dalam posisi
1→ 3 dan 3 → 1
$a_{13}a_{22}a_{31}$

(3, 1, 2) → semua tdk dalam posisi
1→ 3 , 3 → 2 dan 2 → 1
$a_{13}a_{21}a_{32}$

(2, 3, 1) → semua tdk dalam posisi
1→ 2 , 2 → 3 dan 3 → 1
$a_{12}a_{23}a_{31}$

Contoh 4.

MATEMATIKA ITS

Tentukan nilai determinan dari matriks sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1, 2, 3)	$(2)(1)(3)$	**0 (genap)**	$(2)(1)(3)$
(1, 3, 2)	$(2)(5)(2)$	**1 (ganjil)**	$-(2)(5)(2)$
(2, 1, 3)	$(4)(4)(3)$	**1 (ganjil)**	$-(4)(4)(3)$
(2, 3, 1)	$(4)(5)(6)$	**2 (genap)**	$(4)(5)(6)$
(3, 1, 2)	$(3)(4)(2)$	**2 (genap)**	$(3)(4)(2)$
(3, 2, 1)	$(3)(1)(6)$	**3 (ganjil)**	$-(3)(1)(6)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(1)(3) - (2)(5)(2) - (4)(4)(3) + (4)(5)(6) + (3)4)(2) - (3)(1)(6)$$

$$= 64$$

Sifat – sifat Determinan

MATEMATIKA ITS

1. Jika A mempunyai sebuah atau lebih baris (kolom) nol semua, maka det(A) = 0
2. det(A) = det(A^T)
3. Jika matriks persegi A adalah matriks segitiga atas atau bawah, maka det(A) = hasil kali elemen pada diagonalnya
4. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A yang dilakukan dengan OBE/OKE tunggal yaitu dengan mengalikan dengan k pada salah satu baris atau kolom dari A, maka det(B) = k det(A)
5. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A dengan OBE/OKE yaitu menukarkan baris atau kolom dari A, maka det(B) = - det(A)
6. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A dengan OBE/OKE yaitu penggandaan dari baris atau kolom dari A kemudian ditambah atau dikurang pada baris atau kolom yang lain, maka det(B) = det(A)
7. Jika matriks persegi A mempunyai dua baris atau dua kolom yang sebanding, maka det(A) = 0

3.7 Menghitung Determinan

MATEMATIKA ITS

Ukuran 2 x 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$- \qquad +$

Ukuran 3 x 3

Metoda Sarrus → **Khusus determinan ukuran 3 x 3**

Tambahkan kolom 1 dan 2 dan letakkan di belakang determinan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - \\ (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \end{array}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Contoh 5.

MATEMATIKA ITS

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (2\times 1) - (-3\times 5) = 17$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \to \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right| = \begin{array}{l} (2.3.5 + (-1)(-2)(-4) + 1.0.0) - \\ ((-1).0.(5) + 2.(-2).0 + 1.3.(-4)) \end{array} = 34$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & -5 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 8 & -1 & 6 & 3 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & -5 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$- \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$

Salah !

Jangan dilakukan !

Menghitung Determinan Ukuran *n* x *n*

- Buat matriks segitiga (atas/bawah) dengan OBE
- Nilai determinan ukuran *n* x *n* adalah perkalian diagonalnya

Contoh 6.

$$D=\begin{pmatrix}2&3&-1&6\\-2&-5&7&4\\6&11&2&0\\4&0&9&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim(B_2+B_1)\\\sim(B_3-3B_1)\\\sim(B_4+2B_1)\end{matrix}\begin{pmatrix}2&8&-1&6\\0&2&6&10\\0&2&5&-18\\0&6&7&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim(B_3-B_2)\\\sim(B_4-3B_2)\end{matrix}\begin{pmatrix}2&8&-1&6\\0&2&6&10\\0&0&-1&-28\\0&0&-11&-22\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2&8&-1&6\\0&2&6&10\\0&0&-1&-28\\0&0&-11&-22\end{pmatrix}\sim(B_4+11B_3)\begin{pmatrix}2&8&-1&6\\0&2&6&10\\0&0&-1&-28\\0&0&0&-330\end{pmatrix}$$

$$|D|=2\times2\times(-1)\times(-330)=1320$$

Minor dan Kofaktor

Jika matriks persegi A, maka minor anggota a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} dan didenisikan sebagai determinan dari sub-matriks dari matriks awal dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j, sedangkan kofaktor anggota a_{ij} ditulis:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

Contoh 7

MATEMATIKA ITS

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kofaktor: $C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7;\quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 18\quad;\quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6;\quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -12;\quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17;\quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\quad;\quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

Matriks Kofaktor: $C = \begin{pmatrix} -7 & 18 & 2 \\ -6 & -12 & 20 \\ 17 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

MATEMATIKA ITS

Menghitung Determinan Dengan Minor dan Kofaktor

Determinan dari matriks persegi A dapat dihitung dengan mengalikan anggota-anggota baris atau kolom dengan kofaktornya dan menjumlahkannya.
Untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$, perluasan kofaktor dengan baris ke-i, adalah:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Dan perluasan kofaktor dengan baris ke-i, adalah

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Contoh 8.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Perluasan kofaktor dengan baris ke-1,

$$|A| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 30 - 8 + 12 = 34$$

3.8 Mencari Matriks Invers dengan Adjoint

Matriks Adjoint

Jika matriks persegi A dengan ukuran n dan C_{ij} adalah kofaktor dari matriks A, maka transpose dari matriks kofaktor dinamakan adjoint(A) ditulis $Adj(A)$.

Matriks kofaktor A

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks $Adj(A) = C^T$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{n2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh 9.

MATEMATIKA ITS

$$A=\begin{pmatrix}2&4&3\\4&1&5\\6&2&3\end{pmatrix}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}=-7\,;\quad C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&5\\6&3\end{vmatrix}=18\quad;\quad C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&1\\6&2\end{vmatrix}=2$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4&3\\2&3\end{vmatrix}=-6\,;\quad C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&3\\6&3\end{vmatrix}=-12\,;\quad C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&4\\6&2\end{vmatrix}=20$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4&3\\1&5\end{vmatrix}=17\,;\quad C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=2\quad;\quad C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&4\\4&1\end{vmatrix}=-14$$

Matriks Kofaktor A: $C=\begin{pmatrix}-7&18&2\\-6&-12&20\\17&2&-14\end{pmatrix}$

Matriks Adj(A): $Adj(A)=\begin{pmatrix}-7&-6&17\\18&-12&2\\2&20&-14\end{pmatrix}$

Menentukan Invers Matriks

MATEMATIKA ITS

Jika matriks persegi A mempunyai invers, maka

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,adj(A)$$

Contoh 10

Diberikan matriks A sebagai berikut

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{pmatrix}$$

Tentukan invers matriks A

Penyelesaian

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&1&2\\2&5&3&2&5\\1&0&8&1&0\end{array}\right|=(1.5.8+2.3.1+3.2.0)-(2.2.8+1.3.0+3.5.1)=46-47=-1$$

$$-\quad-\quad-\qquad+\quad+\quad+$$

MATEMATIKA ITS

Kofaktor matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40\,; \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13 \quad ; \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16\,; \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5 \quad ; \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9 \quad ; \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad ; \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Penyelesaian SPL Dengan Matriks Invers

Diberikan SPL berbentuk:

$$Ax = b$$

Kalikan dari sisi kiri dengan A^{-1} didapat:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Contoh 11

Diberikan SPL berbentuk:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 3 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

Dari Contoh 10 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-40).1 + 16.2 + 9.3 \\ 13.1 + (-5).2 + (-3).3 \\ 5.1 + (-2).2 + (-1).3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow (x_1, x_2, x_2) = (19, -6, -2)$$

Penyelesaian SPL Dengan Aturan Cramer

Jika $Ax = b$ merupakan SPL dengan n variabel dan det(A) ≠ 0, maka SPL tersebut mempunyai penyelesaian:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \; ; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \; ; \; \ldots x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_j ; j = 1 , . . . ,n adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota matriks A pada kolom ke-j dengan b, aturan tersebut dinamakan dengan Aturan Cramer

Contoh 12.

Diberikan SPL berbentuk:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 3 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&1&2\\2&5&3&2&5\\1&0&8&1&0\end{array}\right|=(1.5.8+2.3.1+3.2.0)-(2.2.8+1.3.0+3.5.1)=46-47=-1$$

$$\det(A_1)=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&1&2\\2&5&3&2&5\\3&0&8&3&0\end{array}\right|=(1.5.8+2.3.3+3.2.0)-(2.2.8+1.3.0+3.5.3)=58-47=-19$$

Kolom 1 matriks *A* diganti dengan kolom matriks *b*

$$\det(A_2)=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&1&3&1&1\\2&2&3&2&2\\1&3&8&1&3\end{array}\right|=(1.2.8+1.3.1+3.2.3)-(1.2.8+1.3.3+3.2.1)=37-31=6$$

Kolom 2 matriks *A* diganti dengan kolom matriks *b*

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&1&1&2\\2&5&2&2&5\\1&0&3&1&0\end{array}\right|=(1.5.3+2.2.1+1.2.0)-(2.2.3+1.2.0+1.5.1)=19-17=2$$

Kolom 3 matriks *A* diganti dengan kolom matriks *b*

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{-19}{-1}=19$$

$$x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{6}{-1}=-6$$

$$x_3=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$(x_1,x_2,x_2)=(19,-6,-2)$$

3.9 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

MATEMATIKA ITS

Definisi: Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A matriks persegi $n \times n$, $\bar{x}$ vektor tak nol di R^n dinamakan vektor eigen dari A, jika

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

untuk skalar λ yang dinamakan nilai eigen dari A dan $\bar{x}$ dikatakan vektor eigen yang berhubungan dengan nilai λ.

Teorema:

Jika A matriks persegi $n \times n$, maka λ adalah nilai eigen dari A, jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

yang dinamakan dengan persamaan karakteristik dari A.

Contoh 13.

MATEMATIKA ITS

Tentukan nilai eigen dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian: persamaan karakteristik dari A.

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan ekspansi kofaktor pada kolom ke-2

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda) - 2] = 0$$
$$(1-\lambda)[\lambda^2 - \lambda - 2] = 0$$
$$(1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu :

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_3 = 1$$

Contoh 14.

MATEMATIKA ITS

Tentukan nilai eigen dari

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian: persamaan karakteristik dari A

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-2)[(\lambda-2)^2-1]+(-\lambda+1)-\big(1+(\lambda-2)\big)=0$$
$$(\lambda-2)[\lambda^2-4\lambda+3]-(\lambda-1)-(\lambda-1)=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)-2(\lambda-1)=0$$
$$(\lambda-1)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2]=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu : $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$

Contoh 15

MATEMATIKA ITS

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari A

$$\det(\lambda.I-A)=0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} (\lambda-2) & -1 \\ -1 & (\lambda-2) \end{vmatrix}=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-2)-1=0$$
$$(\lambda^2-4\lambda+4)-1=0$$
$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

diperoleh $\lambda=1$; $\lambda=3$

Vektor Eigen

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x} \leftrightarrow (\lambda - A)\bar{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = t \end{cases} \to \textit{Vektor}\ \text{Eigen} : \bar{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Untuk $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = t \end{cases} \to \textit{Vektor}\ \text{Eigen} : \bar{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Contoh 16

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian: persamaan karakteristik dari *A:* $\det(\lambda.I - A) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \leftrightarrow \det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & -1 \\ 0 & -1 & (\lambda-1) \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor: Pilih Baris I

$$(\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2) + 0 + 0 = 0 \leftrightarrow (\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2) = 0$$

diperoleh $\lambda_1 = 1 \;;\; \lambda_2 = 0 \;;\; \lambda_3 = 2$

Vektor Eigen

MATEMATIKA ITS

$$A\bar{x}=\lambda\bar{x}\leftrightarrow(\lambda-A)\bar{x}=0\leftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & \lambda-a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & \lambda-a_{33}\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda=1$ $\begin{pmatrix}1-1 & 0 & 0\\ 0 & 1-1 & -1\\ 0 & -1 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\leftrightarrow\begin{cases}x_1=t\\ x_3=0\rightarrow \textit{Vektor}\ \text{Eigen}:\bar{v_1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t\\ x_2=0\end{cases}$
- Untuk $\lambda=0$ $\begin{pmatrix}0-1 & 0 & 0\\ 0 & 0-1 & -1\\ 0 & -1 & 0-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-x_3\rightarrow \textit{Vektor}\ \text{Eigen}:\bar{v_2}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t\\ x_2=x_3\end{cases}$
- Untuk $\lambda=2$ $\begin{pmatrix}2-1 & 0 & 0\\ 0 & 2-1 & -1\\ 0 & -1 & 2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=x_3\rightarrow \textit{Vektor}\ \text{Eigen}:\bar{v_3}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}t\\ x_2=x_3\end{cases}$

MATEMATIKA ITS

Akhir Bab 3.

NEXT ***Fungsi***