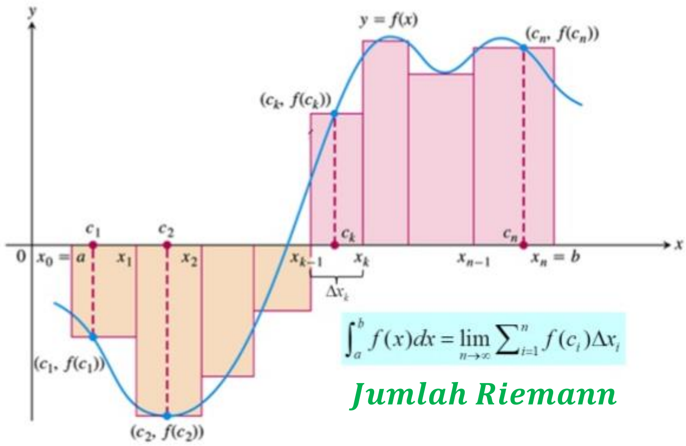


$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Jumlah Riemann

MATEMATIKA ITS

Integral Tertentu

Daryono Budi Utomo

MATEMATIKA ITS

Bab 7 Integral

- **7.1 Integral sebagai Ani Turunan**
- **7.2 Rumus dan Sifat-sifat Integral**
- **7.3 Integral Dengan Substitusi**
- **7.4 Luas Sebagai Limit**
- **7.5 Hampiran Numerik Untuk Luas**
- ☑ **7.6 Integral Tertentu**
- ☑ **7.7 Integral tertentu sebagai Luasan**
- ☑ **7.8 Integral Teretentu Dengan Substitusi**

7. 6 Integral Tertentu

MATEMATIKA ITS

Pada bab sebelumnya telah dipelajari luas sebagai limit, bahwa luas bidang datar yang dibatasi oleh $y = f(x)$, sumbu x, $x = a$ dan $x = b$. Bentuk dari jumlah pias yang menghasilkan luas bidang datar disebut **Jumlah Rieman** dan dapat dinyatakan dalam bentuk integral tertentu

Jadi

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k^*)$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Hitung

$a.\ \int_1^3 (2x+1)\, dx \qquad b.\ \int_1^2 (3x^2-1)\, dx \qquad c.\ \int_0^4 (x^2 - 2\sqrt{x})\, dx$

Jawab

$$a.\ \int_1^3 (2x+1)\, dx = (x^2+x)\Big|_1^3 = (9+1)-(3+1) = 10$$

$$b.\ \int_1^2 (3x^2-1) dx = (x^3-x)\Big|_1^2 = (8-2)-(1-1) = 6$$

$$c.\ \int_0^4 (x^2 - 2\sqrt{x})\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2.\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_0^4 = \left(\frac{64}{3} - \frac{4}{3}.8\right) - (0-0) = \frac{32}{3}$$

Mengapa Integral tertentu ditambah ***c***?. Nilai ***c*** direduksi oleh batas Integral

$$\int_a^b f'(x)\,dx = (f(x)+c)\Big|_a^b = (f(b)+c)-(f(a)+c) = f(a)-f(b)$$

Integral tertentu dengan fungsi negatif

Diberikan $f(x) < 0$ untuk $x = a$ sampai dengan $x = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (F(x))\Big|_a^b < 0$$

Contoh

Hitung :

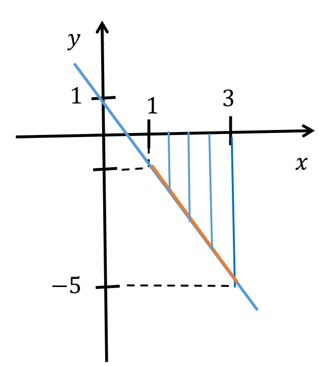
$$\int_1^3 (1-2x)\,dx$$

Jawab

$$\int_1^3 (1-2x)\,dx = (x-x^2)\Big|_1^3$$

$$= (3-9)-(1-1)$$

$$= -9$$



Dalam hal ini integral menghitung Luas daerah dibawah sumbu x, sehingga hasil integral negatif

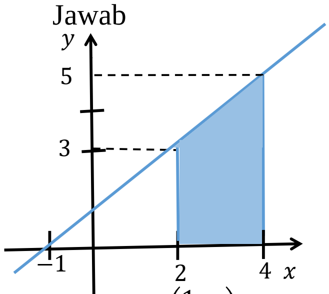
7.7 Integral tertentu sebagai Luasan

MATEMATIKA ITS

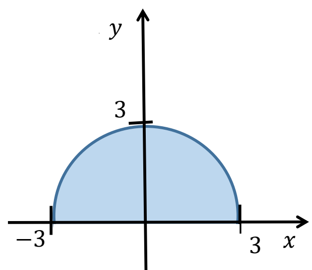
Integral tertentu dapat diartikan sebagai luas dataran
Contoh
Hitung:

$a.\ \int_{2}^{4}(x+1)dx \qquad b.\ \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx \qquad c.\ \int_{0}^{2} x+\sqrt{4-x^2}$

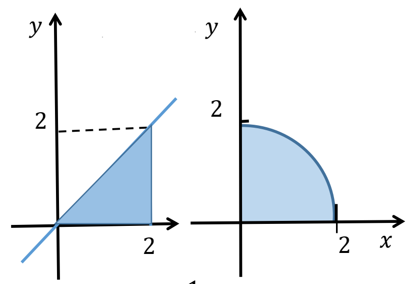
Jawab



$L=(3+5).\left(\frac{1}{2}.2\right)=8$



$L=\frac{1}{2}\pi 3^2=\frac{9\pi}{2}$



$L=(2)(1)+\frac{1}{4}\pi 2^2=2+\pi$

MATEMATIKA ITS

Sifat – sifat Integral tertentu

1. $\int_{a}^{b} cf(x)dx = c\int_{a}^{b} f(x)dx$
2. $\int_{a}^{b}(f(x)\pm g(x))dx=\int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx$
3. $\int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{b}^{a} f(x)dx$

- Batas integral: $a \le c \le b$

4. $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx$

MATEMATIKA ITS

Syarat Keterintegralkan

Suatu fungsi *f* terbatas pada selang $[a, b]$ jika terdapat bilngan positif M sedemikian hingga

$$-M \leq f(x) \leq M$$

Untuk semua $x \in [a, b]$

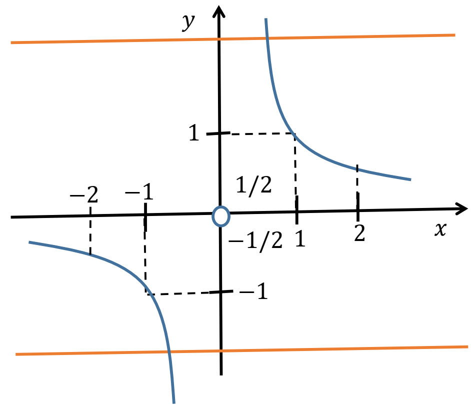
Contoh

1. Uji keterbatasan fungsi untuk [-2, 2]

$f(x) = \frac{1}{x}$ apakah dapat di integralkan ?

Jawab

Pada interval $[2, -2]$, tidak bisa ditemukan nilai M yang mana fungsi berada dalam $-M \leq f(x) \leq M$ dan grafiknya berada pada interval ini tidak ada berarti $f(x)$ tidak terbatas untuk [-2,2]. Jadi $f(x)$ tidak dapat di integralkan



MATEMATIKA ITS

Contoh

2. Uji keterbatasan fungsi untuk [-2, 2]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x \geq 0 \\ 2x \quad ; & x < 0 \end{cases}$$

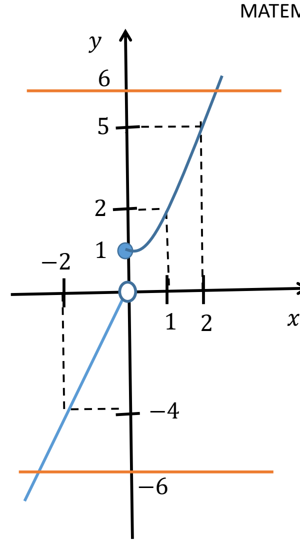
Apakah dapat diintegralkan?.

Jawab

Pada interval $[2, -2]$, dapat ditemukan nilai M misal $M = 6$ yang mana fungsi berada dalam $-6 \leq f(x) \leq 6$ terlihat grafiknya berada pada interval ini, berarti $f(x)$ tidak terbatas untuk [-2,2].

Jadi $f(x)$ dapat di integralkan

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} 2x\, dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 1)\, dx$$



Contoh

3. Uji keterbatasan fungsi untuk [-1, 4]

$$f(x) = |2x - 6|$$

Apakah dapat diintegralkan?.

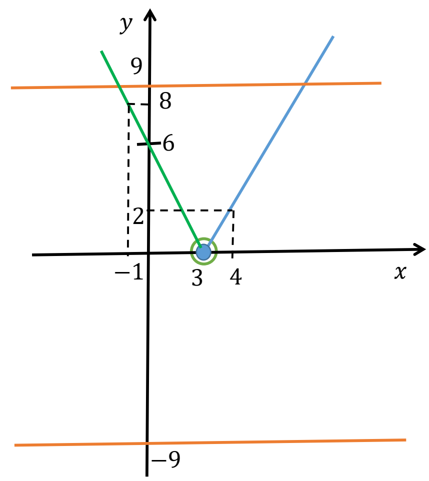
Jawab

$$f(x) = |3x - 1| = \begin{cases} 2x - 6\,; x \geq 3 \\ -(2x - 6);\ \ x < 3 \end{cases}$$

Pada interval $[-1, 4]$, dapat ditemukan nilai M misal $M = 9$ yang mana fungsi berada dalam $-9 \leq f(x) \leq 9$ terlihat grafiknya berada pada interval ini, berarti $f(x)$ tidak terbatas untuk [-1, 4].

Jadi $f(x)$ dapat di integralkan

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{3} (-2x + 6)\, dx + \int_{3}^{4} (2x - 6)\, dx$$



Contoh

4. Uji keterbatasan fungsi untuk [-3, 2]

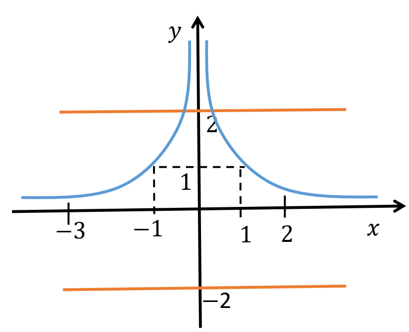
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Apakah dapat diintegralkan?.

Jawab

Pada interval $[-3, 2]$, tidak dapat ditemukan nilai M terlihat grafik dari $f(x)$ untuk $x \to 0^-$dan $x \to 0^-$ nilai $f(x)$ adalah $+\infty$, berarti $f(x)$ tidak terbatas untuk [-3, 2].

Jadi $f(x)$ tidak dapat di integralkan



Teorema Fundamental Kalkulus Pertama

MATEMATIKA ITS

Jika f kontinu pada $[a, b]$dan F adalah anti turunan f pada $[a, b]$ maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Contoh

Dengan menggunakan teorema fundamental kalkulus pertama hitung:

$$\int_{-1}^{3} 3x^2\,dx$$

Jawab

$$\int_{-1}^{2} 3x^2\,dx = \underbrace{x^3}_{\boxed{F(x)}}\Big|_{-1}^{3} = \underbrace{2^3 - (-1)^3}_{\boxed{F(b)-F(a)}} = 8 + 1 = 9$$

Teorema Nilai Rata-Rata Untuk Integral

MATEMATIKA ITSalam

Jika f kontinu pada $[a, b]$ maka terdapat sekurang-kurangnya satu bilangan x^* dalam$[a, b]$ sedemikian hingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$

Contoh

$f(x) = x^2\ kontunu\ pada$ [1, 4] dengan menggunakan teorema nilai rata-rata untuk integral terdapat bilangan x^* pada [1, 4]sehingga

$$\int_1^4 x^2\,dx = (x^*)^2(4-1) = 3(x^*)^2$$

Sedangkan

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^4 = 21$$

Jadi : $3(x^*)^2 = 21 \leftrightarrow (x^*)^2 = 7 \rightarrow x^* = \pm\sqrt{7} \approx \pm 2{,}65$, berarti dijamin ada titik diantara [1, 4] yaitu: $x^* = \approx +2{,}65$

MATEMATIKA ITSalam

Nilai Rata-Rata

Jika f terintegral pada $[a, b]$ maka nilai rata-rata dari f pada $[a, b]$ didefinisikan dengan:

$$f_{rata^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh

Dapatkan f_{rata^2} pada selang [1, 4] dari $f(x) = x^2$

Jawab

$a = 1, \quad b = 4$

$$f_{rata^2} = \frac{1}{4-1}\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}(21) = 7$$

MATEMATIKA ITS

7.8 Integral Tertentu Dengan Substitusi

Jika pada integral tertentu tidak bisa dikerjakan dengan rumus dasar, maka digunakan substitusi untuk menyelesaikan integral tertentu, dalam substutusi pemisalan diambil bentuk yang sulit sehinga setelah substitusi bentuk integral menjadi mudah. Teknik penyelesaian ada dua cara.

Metode 1

Integral dihitung tanpa menggunakan batas integral, setelah didapat hasil integral batas baru dimasukan

Metode 2

Saat melakukan pemisalan, batas integral langsung diganti dengan cara substitusikan batas sehingga didapat batas integral yang baru

Contoh
Hitung:

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}}\,dx$$

Jawab

Metode 1.

Integral dihitung dahulu, selanjutnya nilai batas integral dimasukan

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}}\,dx = \int \frac{2(x+2)dx\,(1/2)}{\sqrt{x^2+4x+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{1}{2}\left(2u^{1/2}\right) + c = \sqrt{x^2+4x+9} + c$$

Misal: $u = x^2 + 4x + 9$
$du = (2x+4)\,dx = 2(x+2)\,dx$

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}}\,dx = \sqrt{x^2+4x+9}\,\Big|_1^3 = \sqrt{3^2+4.3+9} - \sqrt{0^2+4.0+9} = \left(\sqrt{30}-3\right)$$

Metode 2.

Setelah pemisalan batas integral diganti dengan batas baru

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}}\,dx = \int_0^3 \frac{2(x+2)\,(1/2)}{\sqrt{x^2+4x+9}}\,dx = \int_9^{30} \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{1}{2}\left(2u^{1/2}\right) = \sqrt{30} - 3$$

Misal: $u = x^2 + 4x + 9$
$du = (2x+4)\,dx = 2(x+2)\,dx$

Batas:
$x = 0 \rightarrow u = 9$
$x = 3 \rightarrow u = 30$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Hitung: $\int_2^3 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx$

Jawab

Metode 1.

$$\int x^3\sqrt{x^2-4}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-4}\;xdx = \int x^2\,\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{\sqrt{u}}\,\underbrace{(2x\,dx)}_{du}\,\frac{1}{2}$$

Misal: $u = x^2 - 4 \rightarrow x^2 = u + 4$

$du = 2x\,dx$

$$\int x^3\sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int (u+4)\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int \left(u^{3/2} + 4u^{1/2}\right)du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + 4\frac{2}{3}u^{3/2}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2-4}\right)^{5/2} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{x^2-4}\right)^{3/2}$$

$$\int_0^3 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2-4}\right)^{5/2} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{x^2-4}\right)^{3/2}\Bigg|_2^3 = \frac{1}{5}\left(25\sqrt{5}\right) - \frac{4}{3}\left(5\sqrt{5}\right) - 0 = -\frac{5}{3}\sqrt{5}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Hitung: $\int_2^3 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx$

Jawab

Metode 1.

$$\int_2^3 x^3\sqrt{x^2-4}dx = \int_2^3 x^2\sqrt{x^2-4}\,x\,dx = \int_2^3 x^2\,\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{\sqrt{u}}\,\underbrace{(2xdx)}_{du}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_0^5 (u+4)\sqrt{u}\,du$$

Misal: $u = x^2 - 4 \rightarrow x^2 = u + 4$

$du = 2x\,dx$

Batas: $x = 2 \rightarrow u = 0$

$x = 3 \rightarrow u = 5$

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \left(u^{3/2} + 4u^{1/2}\right)du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + 4\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Bigg|_0^5$$

$$= \frac{1}{5}\left(25\sqrt{5}\right) - \frac{4}{3}\left(5\sqrt{5}\right) - 0 = -\frac{5}{3}\sqrt{5}$$

Contoh

1. Dapatkan $\int_0^3 f(3x)dx$ jika $\int_0^9 f(x)dx = 5$
2. Dapatkan $\int_{-2}^0 xf(x^2)dx$ jika $\int_0^4 f(x)dx = 1$

Jawab

1. Dapatkan $\int_0^3 f(3x)dx$ jika $\int_0^9 f(x)dx = 5$

   Misal: $u = 3x \to du = 3dx,$ Batas $x = 0 \to u = 0;\ \ x = 3\ \to u = 9$

   $\int_0^3 f(3x)dx = \int_0^3 f(3x)3dx\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\int_0^9 f(u)du = \frac{1}{3}(5) = \frac{5}{3}$

2. Dapatkan $\int_{-2}^0 xf(x^2)dx$ jika $\int_0^4 f(x)dx = 1$

   Misal: $u = x^2 \to du = 2xdx,$ Batas $x = -2 \to u = 4;\ \ x = 0\ \to u = 0$

   $\int_{-2}^0 xf(x^2)dx = \int_0^3 f(x^2)2xdx\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_4^0 f(u)du = -\frac{1}{2}\int_0^4 f(u)du = -\frac{1}{3}(1) = -\frac{1}{3}$

Catatan:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

Integral Tertentu dengan Batas atas suatu Peubah

Integral dengan Batas atas Peubah

$$\int_a^t f(x)dx = F(x)\Big|_a^t = F(t) - F(a)$$

Contoh

$$\int_1^t 3x^2dx = x^3\Big|_1^t = t^3 - 1$$

MATEMATIKA ITS

Teorema Fundamental Kalkulus Kedua

Integral merupakan anti turunan, sedangkan luas bidang datar $L(x)$ luas daerah dibawah fungsi $y = f(x)$ yang kontinu dan tak negatif pada interval [a, x] dengan demikian:

Jika

$$L'(x) = f(x)$$

maka

$$L(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Jadi

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Misalkan $f(x) = x^3$ fungsi kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\right] = x^3$$

Uji kebenaran:

$$\int_1^x t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 \bigg|_1^x = \frac{1}{4}(x^4 - 1)$$

Hasil diturunkan didapat:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}(x^4 - 1)\right] = x^3$$

Contoh

Misalkan $f(x) = x^3$ fungsi kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x t^3\right] = x^3 \ \ (batas\ bawah\ 0)$$

Uji kebenaran:

$$\int_0^x t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 \Big|_0^x = \frac{1}{4}x^4 - 0$$

$$= F(b) - F(a)\ ; F(a) = 0$$

Hasil diturunkan didapat:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}(x^4 - 1)\right] = x^3 \ \ (sama)$$

Contoh

Tentukan $f(x)$ dari:

$$1.\ \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{t}}\right] \qquad 2.\ \frac{d}{du}\left[\int_0^u \frac{t}{\cos t}dt\right] \qquad 3.\ \frac{d}{dt}\left[\int_0^t \sin(\sqrt{x})\right]$$

Jawab

$$1.\ \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{t}}\right] = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$2.\ \frac{d}{du}\left[\int_0^u \frac{t}{\cos t}dt\right] = \frac{u}{\cos u}$$

$$3.\ \frac{d}{dt}\left[\int_0^t \sin(\sqrt{x})\right] = \sin(\sqrt{t})$$

MATEMATIKA ITS

Matematika 1 Selesai 

Sampai jumpa di Matematika 2