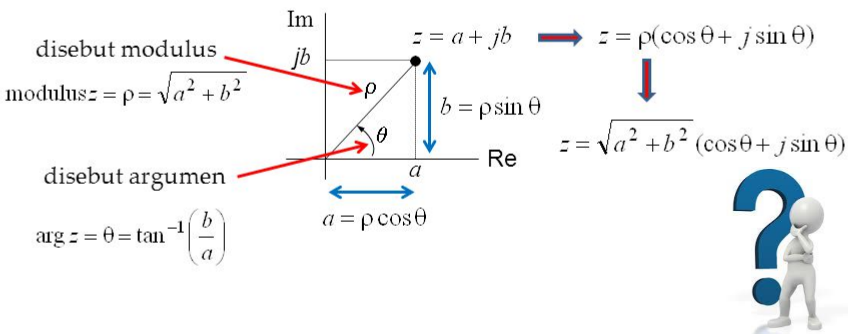
MATEMATIKA ITS

Diagram Argand



Bab 2. Sistem Bilangan Kompleks

Daryono Budi Utomo

MATEMATIKA ITS

Bab 2. Sistem Bilangan Kompleks

- ☑ 2.1 Operasi Pada Bilangan Kompleks
- ☑ 2.2 Penyajian Geometri
- ☑ 2.3 Bentuk Kutub
- ☑ 2.4 Akar Bilangan Kompleks

MATEMATIKA ITS

2.1 Operasi Pada Bilangan Kompleks

Definisi: Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang dinyatakan dengan

$z = (a, b)$ atau $z = a + ib$; dengan $a, b \in \Re$, $i = \sqrt{-1}$

dengan

$\Re$: bilangan real

i : imajiner

$a = \Re(z)$: bagian real dari z

$b = \Im(z)$: bagian imajiner dari z:

Himpunan bilangan kompleks dinotasikan

$$C = \left\{ z \mid z = (a,b) = a + ib, a, b \in \Re, i = \sqrt{-1} \right\}$$

$$i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -i$$

$$i^5 = i^4 \times i = i$$

$$i^{11} = -i$$

$$i^{101} = i^{100} \times i = i$$

$$i^{111} = i^{110} \times i = -i$$

MATEMATIKA ITS

Operasi Bilangan Kompleks

Diberikan suatu bilangan kompleks: $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$, maka berlaku:

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_2, \quad \text{jika} \quad a_1 = a_2 \quad \text{dan} \quad b_1 = b_2, \\
z_1 \pm z_2 &= (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) \\
&= (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} \cdot \frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 i b_2 + a_2 i b_1 - i^2 b_1 b_2}{a_2^2 - i^2 b_2^2} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; z_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Dalam bilangan kompleks tidak mengenal relasi lebih kecil (<) dan relasi lebih besar (>) yaitu tidak ada relasi $z_1 < z_2$ atau $z_1 > z_2$.

Contoh 1.

Jika diberikan suatu bilangan kompleks: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 3 - 2i$, maka:

1. $z_1 + z_2 = (1 - i) + (-2 + 4i) = -1 + 3i$
2. $z_1 + z_2 - z_3 = (1 - i) + (-2 + 4i) - (3 - 2i) = -4 + 5i$
3. $z_1.z_2 = (1 - i) \times (-2 + 4i) = -2 + 4i + 2i - 4i^2 = 2 + 6i\,;\ i^2 = -1$
4. $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{-2+4i}{3-2i} \times \dfrac{3+2i}{3+2i} = \dfrac{-6-4i+12i+8i^2}{9-4i^2} = \dfrac{-14+8i}{9+4}$

$$= -\frac{14}{13} + \frac{8}{13}i\ \ ; bag\ riil = -\frac{14}{13}; \quad bagian\ imajiner = \frac{8}{13}$$

MATEMATIKA ITS

Bilangan Kompleks Sekawan ($\bar{z}$)

Dalam sistem bilangan kompleks terdapat satu operasi yang unik yaitu operasi sekawan atau operasi konjugat. Jika setiap bilangan kompleks $z = x + iy$, maka bilangan kompleks sekawannya dinotasikan $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Sifat-sifat operasi sekawan:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Berlaku:

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$z.\bar{z} = (x + iy).(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x\,,$$

sehingga $x = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy\,,$$

sehingga $x = Re(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$

MATEMATIKA ITS

Jika diberikan bilangan kompleks: $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$, maka berlaku:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \mp \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \,.\, z_2} = \overline{z_1} \,.\, \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \overline{z_2} \neq 0$$

MATEMATIKA ITS

Identitas Bilangan Kompleks

Dalam sistem bilangan kompleks, bilangan $0 = 0 + 0i$ merupakan elemen identitas terhadap operasi jumlahan dan bilangan $1 = 1 + 0i$, merupakan elemen identitas terhadap operasi perkalian sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} z + 0 &= (x + iy) + (0 + 0i) \\ &= (x + 0) + i(y + 0) \\ &= x + iy \\ &= z. \\ z \cdot 1 &= (x + iy) \cdot (1 + 0i) \\ &= (x \cdot 1 - y \cdot 0) + i(x \cdot 0 + 1 \cdot y) \\ &= x + iy \\ &= z. \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Invers z terhadap jumlahan

Terhadap operasi jumlahan, setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ mempunyai tepat satu bilangan kompleks z_1 sehingga dipenuhi $z_1 = -x - iy$

$$z + z_1 = 0$$

yaitu

$$z_1 = -x + i(-y)$$

Disebut negatif dari *z* dan dinamakan invers dari *z* terhadap penjumlahan

$$z = 3 - 2i \; invers\ penjumlahan\ z\ adalah\ z_1 = -3 + 2i$$

$$invers\ perkalian\ dari\ z\ adalah\ z_1 = \frac{1}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i}{13}$$

MATEMATIKA ITS

Invers z terhadap perkalian

Terhadap operasi jumlahan, setiap bilangan kompleks $z = x + iy \neq 0$ mempunyai tepat satu bilangan kompleks z_1 sehingga dipenuhi

$$z \,.\, z_1 = 1$$

yaitu

$$z_1 = \frac{1}{z}$$

$$= (x + iy) \times \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$= 1$$

$$= \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Disebut pembagi dari *z* dan dinamakan invers dari *z* terhadap perkalian

Sifat operasi bilangan kompleks

MATEMATIKA ITS

Sifat operasi dalam bilangan kompleks memenuhi:

- sifat komutatif:

  $$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

  dan

  $$z_1 \,.\, z_2 = z_2 \,.\, z_1$$

- Sifat asosiatif

  $$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

  dan

  $$z_1 \,.\, (z_2 \,.\, z_3) = (z_1 \,.\, z_2) \,.\, z_3$$

- Sifat Distributif

  $$z_1 \,.\, (z_2 + z_3) = (z_1 \,.\, z_2) + (z_1 \,.\, z_3)$$

Daryono, Matematika 1: Bab 2 Sistem Bilangan Kompleks 11

Nilai Mutlak atau Modulus

MATEMATIKA ITS

Modulus bilangan kompleks $z = x + iy$ dinyatakan dengan notasi

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

merupakan bilangan real nonnegatif, sehingga berlaku:

$$|z| \geq 0 \quad , \quad |z| = 0 \leftrightarrow z = 0$$

$$|z| \quad = \quad |-z| = |\bar{z}|$$

$$z \,.\, \bar{z} \quad = \quad \left|z^2\right| = |z|^2$$

$$|z_1 \,.\, z_2| = |z_1| \,.\, |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad z_2 \neq 0$$

$$\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|$$

$$\Im(z) \leq |\Im(z)| \leq |z|$$

Daryono, Matematika 1: Bab 2 Sistem Bilangan Kompleks 12

Ketaksamaan Segitiga

Modulus jumlah dua bilangan kompleks tidak lebih dari jumlah dari modulus masing-masing suku, dan tidak kurang dari modulus selisih modulus masing-masing suku dinotasikan

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \text{ dan } |z_1 + z_2| \ge \left| \left(|z_1| - |z_2| \right) \right|$$

Contoh 2.

Jika diberikan suatu bilangan kompleks: z_1 = 1- i, z_2 = -2 + 4i, z_3 = 3 - 2i hitunglah:

1. $|z_1|, |z_2|,$ dan $|z_3|$
2. $\left|2z_1 + z_2^2\right|$
3. $\left|(z_2 + z_3)^3\right|$
4. $|z_1 \,.\, z_2|$
5. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$

Jawab

z_1 = 1- i, z_2 = -2 + 4i, z_3 = 3 - 2i maka:

1. $|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

   $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20}$

   $|z_3| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

2. $\left|2z_1 + z_2^2\right| = \left|2(1-i) + (-2+4i)^2\right| = |2 - 2i + 4 - 16i - 16| = |-10 - 18i|$

   $= \sqrt{(-10)^2 + (-18)^2} = \sqrt{100 + 324} = \sqrt{424}$

3. $\left|(z_2 + z_3)^3\right| = \left|((-2+4i) + (3-2i))^3\right| = \left|(1+2i)^3\right| = \left|(1)^3 + 3(1)^2(2i) + 3(1)(2i)^2 + (2i)^3\right|$

   $= |1 + 6i - 12 - 8i| = |-11 - 2i| = \sqrt{(11)^2 + (-2)^2} = \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125}$

4. $|z_1 \,.\, z_2| = |1-i||-2+4i| = \left(\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}\right)\left(\sqrt{(-2)^2 + (4)^2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{20}\right) = \sqrt{40}$

5. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|-2+4i|}{|1-i|} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$

MATEMATIKA ITS

2.2 Penyajian Geometri

Bidang Kompleks

Setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dinyatakan sebagai titik (x, y) dalam bidang XOY yang disebut juga sebagai bidang kompleks (Bidang Argand).
Dalam bidang kompleks sumbu-x dinamakan sumbu real dan sumbu-y dinamakan sumbu imajiner.

Modulus

Modulus bilangan kompleks atau mutlak bilangan $z = x + iy$ dinyatakan dengan

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

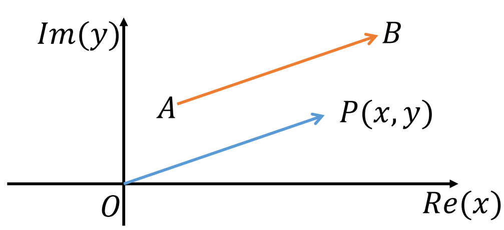
merupakan panjang vektor yang menyajikan bilangan kompleks.

MATEMATIKA ITS

Tafisiran Vektor Bilangan Kompleks

Suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dipandang sebagai suatu vektor (OP) dengan titik pangkal O dan titik ujung P(x, y) seperti pada Gambar dibawah ini.
Sering kali dinamakan $\overline{OP} = z = x + iy$ sebagai vektor posisi dari P. Dua vektor dengan panjang dan arah sama, tetapi titik pangkal berbeda seperti $(\overline{OP})$ dan $\overline{AB}$ pada Gambar dibawah ini dianggap sama, sehingga dituliskan

$$\overline{OP} = \overline{AB} = x + iy = (x, y).$$



MATEMATIKA ITS

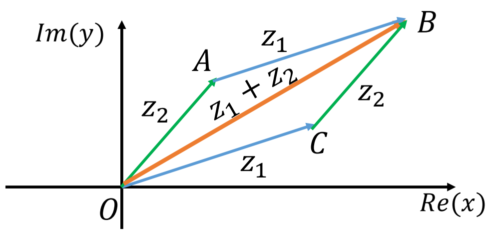
Penjumlah Bilangan Kompleks Dalam Vektor

Penjumlahan bilangan kompleks dalam bentuk vektor sama dengan penjumlahan dua vektor. Jadi untuk menjumlahkan bilangan kompleks:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ dan } z_1 = x_1 + iy_1$$

digunakan aturan jajaran genjang OABC yang sisinya OA dan OC yang berkaitan dengan bilangan kompleks z_1 dan z_2.

Diagonal jajaran genjang AB ini berkaitan dengan $z_1 + z_2$

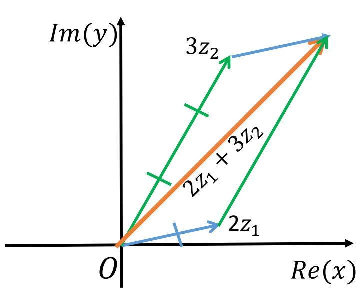


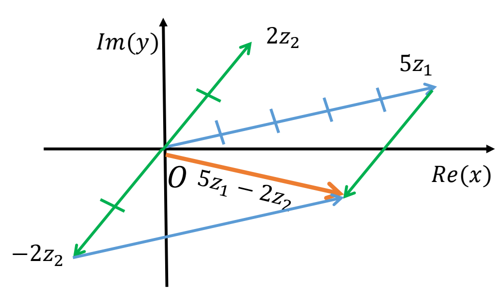
MATEMATIKA ITS

Contoh 3.

Jika diberikan suatu bilangan kompleks z_1 dan z_2 sebarang dalam bentuk vektor gambarkan grafik dari operasi:

(a) $2z_1 + 3z_2$ dan (b) $5z_1 - 2z_2$.





MATEMATIKA ITS

Contoh 4.

Jika suatu vektor posisi dengan ujung-ujungnya adalah titik $A = (x_1, y_1)$ dan $B = (x_2, y_2)$ berturut-turut dinyatakan dalam bilangan kompleks z_1 dan z_2.

(a) Nyatakan vektor *AB* sebagai bilangan kompleks dan
(b) Tentukan panjang *AB*.

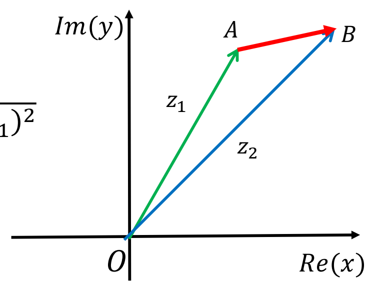
Jawab

(a). $z_1 = x_1 + iy_1\,; z_2 = x_2 + iy_2$

$\rightarrow AB = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$

(b) Panjang *AB*

$\rightarrow |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



MATEMATIKA ITS

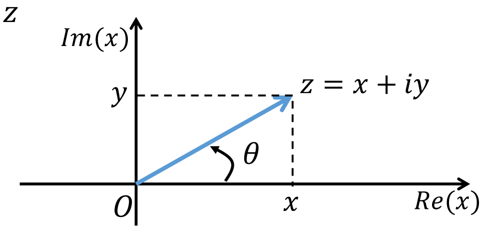
2.3 Bentuk Kutub

Bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat disajikan dalam koordinat kutub (r, θ). Misalkan $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ maka $z = x + iy$ dapat dinyatakan dalam bentuk kutub:

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r\;cis\;\theta$$

Dengan

$$r = modulus\ (nilai\ mutlak) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = argumen\ dari\ z = \arg z$$
$$= arc\tan\frac{y}{x}\,, x \neq 0$$



MATEMATIKA ITS

Nilai argumen dari z (arg z) tidak tunggal tetapi merupakan periode 2π (sesuai dengan kuadran dimana titik z berada). Sedangakan nilai utama (principle value) dari arg z ditulis $Arg\ z$ dengan $-\pi < Arg\ z < \pi$ adalah tunggal

Jelas, arg $z = Arg\ z + 2\pi\ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Perhatikan:

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \qquad \bar{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$
$$= r\ cis\theta \qquad = r\ cis(-\theta)$$
$$\arg z = \theta \qquad \arg\bar{z} = (-\theta)$$

MATEMATIKA ITS

Misalkan: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
Dengan $r_1 = |z_1|, r_1 = |z_1|, \arg z_1 = \theta_1, \arg z_2 = \theta_2$

1. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\ cis\left(\theta_1 + \theta_2\right)$$
$$= |z_1 z_2|\ cis\left(\theta_1 + \theta_2\right) \rightarrow \arg\left(z_1.z_2\right) = \arg\left(z_1\right) + \arg\left(z_2\right)$$

2. Pembagian $(z_2 \neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| cis(\theta_1 - \theta_2) \rightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Tidak berlaku untuk:

$$Arg\left(z_1 z_2\right) = Arg(z_1) + Arg(z_2) \text{ dan } Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

Contoh 5

Diketahui $z = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{-1+i}$. Tentukan bentuk kutub z dan $\bar{z}$

Penyelesaian :

- $z_1 = 1 + i \to r_1 = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

  $\to \tan\theta_1 = \tan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

- $z_2 = 1 + i\sqrt{3} \to r_1 = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

  $\to \tan\theta_2 = \tan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

- $z_1 = -1 + i \to r_1 = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

  $\to \tan\theta_1 = \tan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$ $(Kuadran\ 2)$

Menggunakan sifat argumen diperoleh :

$$z = \frac{(\sqrt{2}\ cis\frac{\pi}{4})(2\ cis\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}\ cis\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 2\ cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2\ cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\bar{z} = 2\ cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Teorema deMoivre

Jika n bilangan kompleks yang berbeda dinyatakan sebagai:

$$z_i = r_i(\cos(\theta_i) + i\sin(\theta_i)), i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

maka perkalian bilangan-bilangan kompleks tersebut adalah

$$z_1 . z_2 . \ldots . z_n = r_1 . r_2 . \ldots . r_n(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n))$$

Dengan demikian, jika n bilangan kompleks yang sama $z_1 = z_2 = \ldots z_n = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ maka perkalian bilangan - bilangan kompleks dinyatakan sebagai:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Contoh 6.

Dapatkan bentuk kutub dari

(1) $z = -1 + i\sqrt{3}$
(2) $z = 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}$
(3) $z = -5$

Jawab:

(1) $z = -1 + i\sqrt{3} \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

z terletak di kuadran 2: $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$; $z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

(2) $z = 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2} \rightarrow r = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8+8} = 4$

z terletak di kuadran 4: $\tan\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -1 \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$; $z = 4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

(3) $z = -5 \rightarrow r = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} = 5$

z terletak di sumbu negatif $Re(z)$: $\tan\theta = \frac{0}{-5} \rightarrow \theta = \pi$; $z = 5(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Contoh 7.

Dapatkan nilai dari

(1) $z = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{10}$
(2) $z = \left(2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}\,\right)^4$
(3) $z = (1 + i\,)^{10}$
(4) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{-6}$

Jawab:

(1) $z = 2^{10}\left(\cos\left(10\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(10\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= 1024(\cos 120^0 + i\sin 120^0) = 1024\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -512 + i512\sqrt{3}$

(2) $z = 4^4\left(\cos\left(8\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

$= 256(\cos(360^0) + i\sin(360^0)) = 256(1 - i.0) = 256$

MATEMATIKA ITS

(3) $z = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\left(10\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 32(\cos(90^0) + i\sin(90^0)) = 32(0 + i.1) = 32i$

(4) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{-6}$; $r = 2$; $\tan\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ $(kuadran\ 4) \rightarrow \theta = -30^0$

$z = 2^{-6}\cos(6(-30^0) + i\sin(6(-30^0)) = 2^{-6}\cos(-180^0) + i\sin(-180^0))$

$= 2^{-6}(-1 + i.0) = -2^{-6} = -\dfrac{1}{64}$

MATEMATIKA ITS

2.4 Akar Bilangan Kompleks

Suatu bilangan w dinamakan akar ke-n dari bilangan kompleks z jika $w_n = z$, dan dapat dituliskan sebagai $w^n = z$

Menurut teorema De Moivre, dapat ditunjukkan bahwa jika n suatu bilangan bulat positif, maka :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$$

Sehingga diperoleh n nilai berlainan untuk $z^{1/n}$, yaitu n akar berlainan dari z, asalkan $z \neq 0$.

MATEMATIKA ITS

Akar pangkat n dari bilangan kompleks satuan yaitu persamaan $z^n = 1$, dengan n bilangan bulat positif dinamakan akar pangkat n dari bilangan kompleks satuan dan dinyatakan oleh

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Jika dimisalkan $\omega = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}}$
maka bentuk akar dari $z^n = 1$ tersebut adalah $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$
Secara ilmu ukur, ini menyatakan n titik pada segi banyak beraturan bersisi n yang terletak dalam suatu lingkaran berpusat di (0,0) dan berjari-jari satu, atau lingkaran memiliki persamaan $|z| = 1$ dan seringkali dinamakan lingkaran satuan.

MATEMATIKA ITS

Contoh 8.

Tentukan semua nilai akar dari:

(1) $z^3 - 1 = 0$
(2) $z^3 = -8i$
(3) $z^6 = 1$

Jawab:

(1) $z^3 - 1 = 0 \to z = (1 + i.0)^{\frac{1}{3}}$; $r = 1$; $\theta = 0^0$

$$z = (1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right) ; k = 0, 1, 2$$

- $k = 0 \to z_1 = (1)^{\frac{1}{3}}(\cos(0^0) + i\sin(0^0)) = 1$
- $k = 1 \to z_2 = (1)^{\frac{1}{3}}(\cos(120^0) + i\sin(120^0)) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $k = 2 \to z_3 = (1)^{\frac{1}{3}}(\cos(240^0) + i\sin(240^0)) = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

MATEMATIKA ITS

(2) $z^3 = -8i \to z = (0 - i8)^{\frac{1}{3}}$; $r = 8$; $\theta = -90^0$

$z = (8)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{-90^0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-90^0+2k\pi}{3}\right)\right)$; $k = 0, 1, 2$

- $k = 0 \to z_1 = (8)^{\frac{1}{3}}(\cos(-30^0) + i\sin(-30^0)) = 2\left(\sqrt{3} - i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - i$
- $k = 1 \to z_2 = (8)^{\frac{1}{3}}(\cos(90^0) + i\sin(90^0)) = 2(0 + i) = 2i$
- $k = 2 \to z_3 = (8)^{\frac{1}{3}}(\cos(210^0) + i\sin(210^0)) = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

MATEMATIKA ITS

(3) $z^6 = 1 \to z = (1 + i.0)^{\frac{1}{6}}$; $r = \sqrt{1+0} = 1$; $\tan\theta = \dfrac{0}{1} \to \theta = 0^0$

$z = (1)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{0^0+2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{0^0+2k\pi}{6}\right)\right)$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- $k = 0 \to z_1 = (1)^{\frac{1}{6}}(\cos(0^0) + i\sin(0^0)) = 1(1 + i.0) = 1$
- $k = 1 \to z_2 = (1)^{\frac{1}{6}}(\cos(60^0) + i\sin(60^0)) = 1\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $k = 2 \to z_3 = (1)^{\frac{1}{3}}(\cos(120^0) + i\sin(120^0)) = 1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $k = 3 \to z_4 = (1)^{\frac{1}{6}}(\cos(180^0) + i\sin(180^0)) = 1(-1 + i.0) = -1$
- $k = 4 \to z_5 = (1)^{\frac{1}{6}}(\cos(240^0) + i\sin(240^0)) = 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $k = 5 \to z_6 = (1)^{\frac{1}{6}}(\cos(300^0) + i\sin(300^0)) = 1\left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Contoh 9.

Buktikan bahwa semua akar pangkat 5 dari $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1-i)^2}$ merupakan titik sudut segi 5 beraturan dengan salah satu titik sudutnya adalah $\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$

Jawab

$$z = \left(\frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1-i)^2}\right)^{\frac{1}{5}} \rightarrow \frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1-i)^2} = \frac{2+i2\sqrt{3}}{1-2i+i^2} = \frac{2+i2\sqrt{3}}{-2i} = -\frac{1}{i} - \sqrt{3} = -\sqrt{3}+i$$

$$r = \sqrt{3+1} = 2 \ ; \ \tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} \text{ (kuadran 2)} \rightarrow \theta = 150^0$$

$$z = (2)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\left(\frac{150^0+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{150^0+2k\pi}{5}\right)\right) \ ; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

- $k = 0 \rightarrow z_1 = (2)^{\frac{1}{5}}(\cos(30^0) + i\sin(30^0)) = \sqrt[5]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i.\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$
- $k = 1 \rightarrow z_1 = (2)^{\frac{1}{5}}(\cos(102^0) + i\sin(102^0))$
- $k = 2 \rightarrow z_1 = (2)^{\frac{1}{5}}(\cos(174^0) + i\sin(174^0))$
- $k = 3 \rightarrow z_1 = (2)^{\frac{1}{5}}(\cos(246^0) + i\sin(246^0))$
- $k = 4 \rightarrow z_1 = (2)^{\frac{1}{5}}(\cos(318^0) + i\sin(318^0))$

MATEMATIKA ITS

Akhir Bab 3.

Matriks dan Determinan