Kumpulan Pembahasan Latihan Soal-Soal Mata Kuliah Matematika 2/Kalkulus 2

April 17, 2024

Mohamad Ilham Dwi Firmansyah
masilhamath2023@gmail.com

بسم الله الرّحمن الرّحيم

DAFTAR ISI

1. Fungsi Transenden

1. (**ETS 2023**) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dengan diferensial logaritmik dari fungsi

$$y = \frac{x^3\sqrt{6x+5}}{\sin(3x^2+1)e^x}$$

Pembahasan :
Bentuk $\ln$ kedua ruas diperoleh

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^3\sqrt{6x+5}}{\sin(3x^2+1)e^x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln y = \ln(x^3) + \ln\left(\sqrt{6x+5}\right) - \ln\big(\sin(3x^2+1)\big) - \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \ln y = 3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(6x+5) - \ln\big(\sin(3x^2+1)\big) - x$$

turunkan kedua ruas terhadap x

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(6x+5) - \ln\big(\sin(3x^2+1)\big) - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6x+5} - \frac{6x\cos(3x^2+1)}{\sin(3x^2+1)} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6x+5} - \frac{6x\cos(3x^2+1)}{\sin(3x^2+1)} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3\sqrt{6x+5}}{\sin(3x^2+1)e^x}\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{6x+5} - 3\cot\big(3x^2+1\big) - 1\right)$$

2. (**ETS 2022**) Selesaikan persamaan

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \ln(2x) = \ln(3)$$

Pembahasan :
Dengan menggunakan sifat logaritma natural

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \ln(2x) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2) + \ln(x) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\ln(1)-\ln(x)\right)+\ln(2)+\ln(x)=\ln(3)$$

Kita tahu bahwa $\ln(1)=0$, sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow -2\ln(x)+\ln(2)+\ln(x)=\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow -\ln(x)=\ln(3)-\ln(2)$$
$$\Leftrightarrow -\ln(x)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x)=-\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

Sehingga diperoleh

$$x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$$

3. (**ETS 2022**) Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari

$$y=\sinh(\cos(3x))+\ln(\cos(2x)+1)$$

Pembahasan :
Turunkan kedua ruas terhadap x

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[y] &= \frac{d}{dx}[\sinh(\cos(3x))+\ln(\cos(2x)+1)] \\
&= \frac{d}{dx}[\sinh(\cos(3x))]+\frac{d}{dx}[\ln(\cos(2x)+1)] \\
&= \cosh(\cos(3x))\frac{d}{dx}[\cos(3x)]+\frac{1}{\cos(2x)+1}\frac{d}{dx}[\cos(2x)+1] \\
&= \cosh(\cos(3x))(-3\sin(3x))-\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)+1} \\
&= -3\sin(3x)\cosh(\cos(3x))-\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)+1}
\end{aligned}$$

4. (**ETS 2022**) Hitung integral berikut:

$$\int \sinh^6 x \cosh x \, dx$$

Pembahasan :

5. (**ETS 2022**) Hitung integral berikut:

$$\int \frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{\cos^2 2\theta + 1}\, dx$$

Pembahasan :
Misalkan $u = \cos 2\theta \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = -2\sin 2\theta\, d\theta \Rightarrow -\dfrac{1}{2}du = \sin 2\theta\, d\theta$. Sehingga diperoleh integral yang baru

$$\int \frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{\cos^2 2\theta + 1}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2+1}\, du$$

misalkan $t = u^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dt}{du} = 2u\, du \Rightarrow \dfrac{1}{2}dt = u\, du$. Sehingga diperoleh

$$-\frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2+1}\, du = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\, dt = -\frac{1}{4}\ln|t| + C$$

Sehingga diperoleh

$$\int \frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{\cos^2 2\theta + 1}\, dx = -\frac{1}{4}\ln\left|\cos^2(2\theta) + 1\right| + C$$

6. **(ETS 2022)** Hitung integral berikut :

$$\int \frac{\sinh(2x)}{5 + 3\cosh(2x)}\, dx$$

Pembahasan :
Misalkan $u = 5 + 3\cosh(2x) \Rightarrow du = 6\sinh(2x)\, dx \Rightarrow \dfrac{1}{6}\, du = \sinh(2x)\, dx$, sehingga diperoleh integral yang baru

$$\int \frac{\sinh(2x)}{5 + 3\cosh(2x)}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{6}\ln|u| + C = \frac{1}{6}\ln|5 + 3\cosh(2x)| + C$$

7. (**ETS 2022**) Hitung integral berikut :

$$\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\, dx$$

Pembahasan :
Misalkan $u = 1 + e^{2x} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2e^{2x} \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2e^{2x}}\, du \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2(u-1)}\, du$. Perhatikan bahwa $u = 1 + e^{2x} \Rightarrow u - 1 = e^{2x}$ Sehingga diperoleh intergal yang baru

$$\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \int \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}} \frac{1}{2(u-1)}\, du = \int \frac{u-1}{2\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 2\sqrt{u}\right) + C = \frac{1}{3}u\sqrt{u} - \sqrt{u} + C$$

$$= \frac{1}{3}(1+\mathrm{e}^{2x})\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} - \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} + C = \frac{(\mathrm{e}^{2x}-2)\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}}{3} + C$$

8. (**ETS 2022**) Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sin^{-1}(3x-1)$.
Pembahasan :
Dengan menggunakan sifat invers trigonometri

$$y = \sin^{-1}(3x-1) \Leftrightarrow \sin y = 3x - 1$$

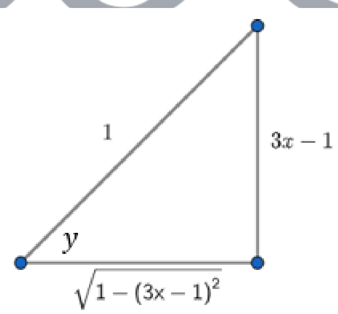
turunkan kedua ruas terhadap x diperoleh

$$\frac{d}{dx}[\sin y] = \frac{d}{dx}[3x-1]$$

$$\Leftrightarrow \cos y \frac{dy}{dx} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\cos y} = 3\sec y$$

Dengan menggunakan bantuan segitiga siku-siku dan teorema Pythagoras. Sebelumnya kita tahu bahwa $\sin y = 3x - 1$ dengan demikian diperoleh



dapat dilihat bahwa

$$\cos y = \sqrt{1-(3x-1)^2} \Rightarrow \sec y = \frac{1}{1-(3x-1)^2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\cos y} = 3\sec y = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}$$

9. (**ETS 2022**) Diberikan $f(x) = 2x^7 + 4x^5 + 3x + 5$. Dapatkan $f^{-1}(x)$.

Pembahasan :
Misalkan $y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y)$, diperoleh

$$x = 2y^7 + +4y^5 + 3y + 5$$

turunkan semua ruas terhadap x

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}\left[2y^7 + 4y^5 + 3y + 5\right]$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 1 &= \frac{d}{dx}[2y^7] + \frac{d}{dx}[4y^5] + \frac{d}{dx}[3y] + \frac{d}{dx}[5] \\
\Leftrightarrow 1 &= 14y^6\frac{dy}{dx} + 20y^4\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} \\
\Leftrightarrow 1 &= \left(14y^6 + 20y^4 + 3\right)\frac{dy}{dx} \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{14y^6 + 20y^4 + 3}
\end{aligned}$$

10. (**ETS 2023**) Hitung integral berikut :

$$\int e^{3x}\sqrt{1+e^x}\,dx$$

Pembahasan :
Misalkan $u = 1 + e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = Ee^x\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x}\,du = \frac{1}{u-1}\,du$. Dan juga karena $u = 1 + e^x \Rightarrow u - 1 = e^x$. Sehingga diperoleh integral yang baru

$$\int e^{3x}\sqrt{1+e^x}\,dx = (u-1)^3\sqrt{u}\frac{1}{u-1}\,du = \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2 - 2u + 1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}(1+e^x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+e^x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{(e^x+1)^{\frac{3}{2}}\left(30e^{2x} - 24e^x + 16\right)}{105} + C$$

11. (**ETS 2022**) Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \left(\tanh^{-1}(e^x)\right)^2$
Pembahasan :
Dengan memperhatikan sifat turunan

$$\boxed{y = (f(x))^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1}f'(x)}$$

$$\boxed{y = \tanh^{-1}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-(f(x))^2}\frac{df(x)}{dx}}$$

Sehingga didapat

$$\frac{dy}{dx} = 2\tanh^{-1}(\mathrm{e}^x)\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{e}^x = \frac{2\mathrm{e}^x\tanh^{-1}(\mathrm{e}^x)}{1-\mathrm{e}^{2x}}$$

Alternatif lain : Dengan menggunakan aturan rantai.
Misalkan $u = \mathrm{e}^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \mathrm{e}^x$, kemudian misalkan $v = \tanh^{-1}(\mathrm{e}^x) = \tanh^{-1} u \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{1}{1-u^2}$. Sehingga didapat $y = v^2 \Rightarrow \frac{dy}{dv} = 2v$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= 2v\cdot\frac{1}{1-u^2}\cdot\mathrm{e}^x = \frac{2\mathrm{e}^x\tanh^{-1}(\mathrm{e}^x)}{1-\mathrm{e}^{2x}}\end{aligned}$$

12. (**ETS 2022**) Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = x^2\cosh^2(\sqrt{x})$
Pembahasan :
Perhatikan bahwa

$$\boxed{\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = \frac{d}{dx}[u(x)]v(x) + u(x)\frac{d}{dx}[v(x)]}$$

misalkan $u(x) = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}[u(x)] = 2x$ dan

$$v(x) = \cosh^2(\sqrt{x}) \Rightarrow \frac{d}{dx}[v(x)] = \frac{2\cosh(\sqrt{x})\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x\cdot\cosh^2(\sqrt{x}) + x^2\cdot\frac{2\cosh(\sqrt{x})\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\\ &= \cosh\left(\sqrt{x}\right)\left(\sinh\left(\sqrt{x}\right)\ x\sqrt{x} + 2\cosh\left(\sqrt{x}\right)\ x\right)\\ &= x\cosh\left(\sqrt{x}\right)\left(\sinh\left(\sqrt{x}\right)\ \sqrt{x} + 2\cosh\left(\sqrt{x}\right)\right)\end{aligned}$$

13. **(ETS 2022)** Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari

$$y = \left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\ln x}$$

Pembahasan :

Dengan mengubah kedua ruas menjadi bentuk logaritma natural didapat

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\ln x}$$

$$\ln y = \ln x \cdot \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)$$

Kemudian turunan kedua ruas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\ln x \cdot \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)\right)\\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= y\frac{d}{dx}\left(\ln x \cdot \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)\right)\\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\ln x}\frac{d}{dx}\left(\ln x \cdot \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)\right)\\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\ln x}\left(\frac{d}{dx}[\ln x]\cdot \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right) + \ln x \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)\right]\right)\\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\cdot \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right) + \ln x \cdot \frac{x^3+1}{x^2+3x+1}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right]\right)\\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\ln(x)}\left(\frac{\ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)}{x} + \frac{\left((2x+3)\left(x^3+1\right) - 3x^2\cdot\left(x^2+3x+1\right)\right)\ln(x)}{\left(x^2+3x+1\right)\left(x^3+1\right)}\right)\\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)^{\ln(x)}\left(\frac{\ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\right)}{x} + \frac{\left(x^3+1\right)\left(\frac{2x+3}{x^3+1} - \frac{3x^2\cdot\left(x^2+3x+1\right)}{\left(x^3+1\right)^2}\right)\ln(x)}{x^2+3x+1}\right)
\end{aligned}$$

14. (**ETS 2022**) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari $y = \tan^{-1}(x\mathrm{e}^{-3x})$

Pembahasan :

Dengan menggunakan aturan rantai. Misalkan

$$u = x\mathrm{e}^{-3x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \mathrm{e}^{-3x} - 3x\mathrm{e}^{-3x} = -\left(3x-1\right)\mathrm{e}^{-3x}$$

sehingga $y = \tan^{-1} u \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{1+u^2}$ dengan demikian diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{\left(3x-1\right)\mathrm{e}^{-3x}}{1+u^2} = -\frac{\left(3x-1\right)\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{6x}+x^2}$$

15. (**ETS 2022**) Dapatkan penyelesaian dari persamaan

$$\ln(e^{-x} - 1) = x$$

Pembahasan :

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} &\ln(e^{-x} - 1) = x \\ &\Leftrightarrow e^{-x} - 1 = e^{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x}} - 1 = e^{x} \end{aligned}$$

Misalkann $A = e^x$ diperoleh

$$\frac{1}{A} - 1 = A \Rightarrow 1 - A = A^2 \Rightarrow A^2 + A - 1 = 0$$

dengan menggunakan rumus ABC diperoleh

$$A_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

dipilih $A = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ diperoleh $e^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

16. (**ETS 2020**) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1+2x}\right)$

Pembahasan :

Diketahui bahwa

$$\begin{aligned} &y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+2x}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+2x}\right) = \tan(y) \end{aligned}$$

Turunkan masing-masing ruas diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+2x}\right] = \frac{d}{dx}\left[\tan(y)\right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{(1+2x)^2} = \sec^2(y)\frac{dy}{dx}$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri $1 + \tan^2(a) = \sec^2(a)$ diperoleh

$$\sec^2(y) = 1 + \tan^2(y) = 1 + \left(\frac{1}{1+2x}\right)^2 = \frac{4x^2 + 4x + 2}{(2x+1)^2}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1+2x)^2\sec^2(y)} = -\frac{2(1+2x)^2}{(1+2x)^2(4x^2+4x+2)} = -\frac{2}{4x^2+4x+2}$$

Alternatif lain :

Dengan langsung menggunakan formula

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(f(x))\right] = \frac{1}{1+(f(x))^2}\frac{df(x)}{dx}}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+2x}\right)\right] &= \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+2x}\right)^2}\right)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+2x}\right]\\ &= \left(\frac{(1+2x)^2}{1+(1+2x)^2}\right)\left(-\frac{2}{(1+2x)^2}\right)\\ &= -\frac{2}{4x^2+4x+2}\end{aligned}$$

17. (**ETS 2020**) Dapatkan penyelesaian untuk x pada persamaan $\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} = 2$.

Pembahasan :

Misalkan $A = \mathrm{e}^{-x}$, dengan demikian diperoleh persamaan kuadrat

$$A^2 - A = 2$$

$$A^2 - A - 2 = 0 \;\Rightarrow (A+1)(A-2) = 0$$

didapat $A = -1$ atau $A = 2$. Kembalikan ke pemisalan awal

$$A = \mathrm{e}^{-x} = -1 \;\text{ tidak ada solusi } x$$

$$A = \mathrm{e}^{-x} = 2 \;\Rightarrow\; x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

18. (**ETS 2020**) Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ untuk $x > 1$. Dapatkan fungsi invers dari $f(x)$ dan domain funsi inversnya.

Pembahasan :

Untuk mencari bentuk invers dari $f(x)$, jadikan bentuk $y = \dfrac{x+1}{x-1}$menjadi bentuk $x = \cdots$.

Perhatikan bahwa

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & y(x-1) = (x+1) \\ \Leftrightarrow\ & yx - y = x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & yx - x = y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & x(y-1) = y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{y+1}{x+1} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

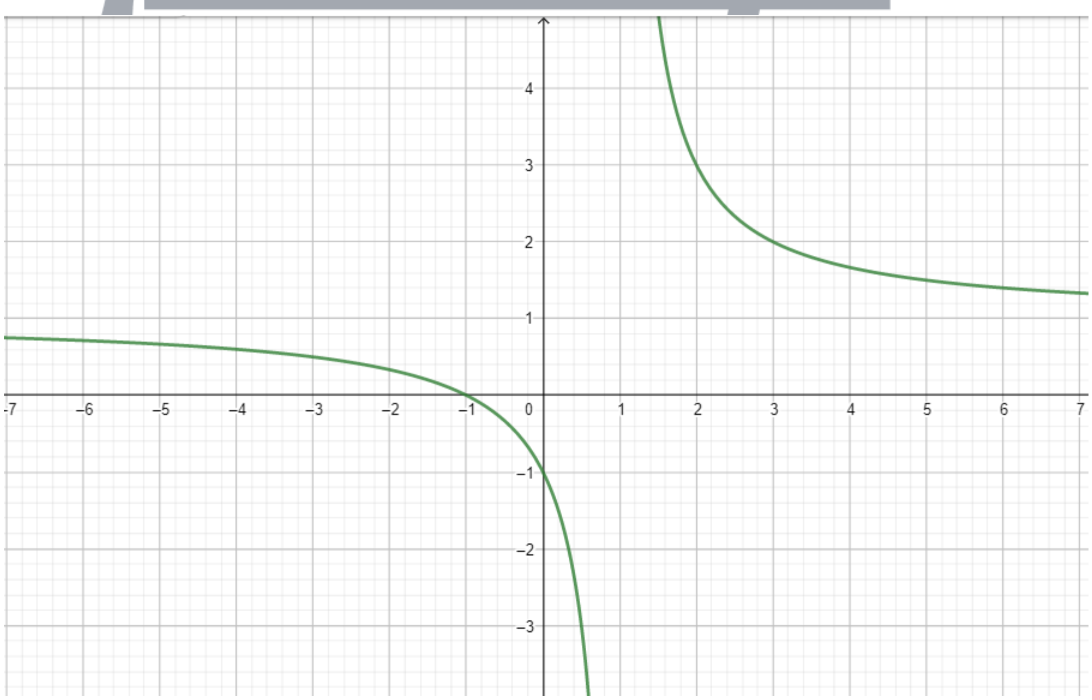
Secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\boxed{f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ x \neq -\frac{d}{c} \ \Rightarrow\ f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}}$$

Kemudian untuk menentukan domain dari invers suatu fungsi, perhatikan formula berikut

$$\boxed{D_f = R_{f^{-1}} \text{ dan } D_{f^{-1}} = R_f}$$

dimana D_f dan $D_{f^{-1}}$ menyatakan domain dari fungsi f dan f^{-1}. Sedangkan R_f dan $R_{f^{-1}}$ menyatakan range (daerah hasil) dari fungsi f dan f^{-1}. Perhatikan bahwa kurva dari $f(x)$



berdasarkan sketsa kurva diperoleh $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}$, dengan demikian didapat bahwa domain dari fungsi invers $f(x)$ adalah

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

19. Diketahui fungsi $y = \dfrac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$, dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dengan dua metode.

Pembahasan :

- **Cara 1:** (Sifat turunan fungsi pecahan)

  Misalkan $u = x + 11 \Rightarrow u' = 1$ dan $v = \sqrt{x^3-4} \Rightarrow v' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-4}}$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{u'v - uv'}{(v)^2} = \frac{(1)(\sqrt{x^3-4}) - (x+11)\left(\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-4}}\right)}{\left(\sqrt{x^3-4}\right)^2} \\
&= \frac{2(\sqrt{x^3-4})(\sqrt{x^3-4}) - (x+11)(3x^2)}{2(x^3-4)\sqrt{x^3-4}} \\
&= \frac{2(x^3-4) - 3x^2(x+11)}{2(x^3-4)\sqrt{x^3-4}} \\
&= -\left(\frac{x^3+33x^2+8}{2(x^3-4)\sqrt{x^3-4}}\right)
\end{aligned}$$

- **Cara 2:**(Differensial logaritmik) Perhatikan bahwa

$$y = \frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$$

$$\Leftrightarrow \ln y = \ln\left(\frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln y = \ln(x+11) - \ln(x^3-4)^{\frac{1}{2}} = \ln(x+11) - \frac{1}{2}\ln(x^3-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{x} = \frac{1}{x+11} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{x^3-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{x+11} - \frac{3x^2}{x^3-4}\right) = \left(\frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}\right)\left(\frac{1}{x+11} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{x^3-4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x^3+33x^2+8}{2(x^3-4)\sqrt{x^3-4}}\right)$$

20. Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ untuk

(a) $y = x^{\cos(2x)}$

(b) $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$

(c) $y = \exp(x \tan x)$

(d) $y = \ln(1 - xe^{-x})$

(e) $y = (x^2 - 3x)^{\ln x}$

Pembahasan :

(a) Dengan mengambil bentuk logaritma natural dari masing-masing ruas diperoleh

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(x^{\cos(2x)}) \\ \Leftrightarrow \ln(y) &= \cos(2x)\ln(x) \end{aligned}$$

kemudian turunkan masing-masing ruas diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln(y)) &= \frac{d}{dx}(\cos(2x)\ln(x)) \\ &= \left(\frac{d}{dx}(\cos(2x))\right)\ln(x) + \cos(2x)\left(\frac{d}{dx}(\ln(x))\right) \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -2\sin(2x)\ln(x) + \cos(2x)\cdot\frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= y\left(-2\sin(2x)\ln(x) + \cos(2x)\cdot\frac{1}{x}\right) \\ &= x^{\cos(2x)}\left(-2\sin(2x)\ln(x) + \cos(2x)\cdot\frac{1}{x}\right) \\ &= x^{\cos(2x)}\left(\frac{-2x\sin(2x)\ln(x) + \cos(2x)}{x}\right) \end{aligned}$$

Jadi

$$\frac{dy}{dx} = x^{\cos(2x)}\left(\frac{-2x\sin(2x)\ln(x) + \cos(2x)}{x}\right)$$

(b) Dengan menggunakan sifat turunan fungsi percahan

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

Misalkan bahwa

$$u(x) = e^x \;\Rightarrow\; u'(x) = e^x$$

$$v(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; v'(x) = \frac{1}{x}$$

dengan demikian diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{e^x \ln(x) - e^x\left(\frac{1}{x}\right)}{[\ln(x)]^2} = \frac{e^x x \ln(x) - e^x}{\ln^2(x)}$$

Jadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(x\ln(x) - 1)}{\ln^2(x)}$$

(c) Perhatikan bahwa

$$y = \exp(x \tan x) = e^{x\tan(x)}$$

dengan menggunakan sifat turunan fungsi eksponen

$$\boxed{y = e^{f(x)} \;\Rightarrow\; y' = f'(x)e^{f(x)}}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{d}{dx}(x\tan(x))\right)e^{x\tan(x)} \\ &= \left(\tan(x) + x\sec^2 x\right)e^{x\tan(x)}\end{aligned}$$

(d) Dengan menggunakan sifat turunan fungsi logaritma natural

$$\boxed{y = \ln(f(x)) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d(f(x))}{dx}}$$

sehingga diperoleh

$$y = \ln(1 - xe^{-x}) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - xe^{-x}}\frac{d}{dx}(1 - xe^{-x})$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 - xe^{-x}}\frac{d}{dx}(1 - xe^{-x}) \\ &= \frac{-e^{-x} + xe^{-x}}{1 - xe^{-x}} = \frac{e^{-x}(x-1)}{1 - xe^{-x}}\end{aligned}$$

(e) Dengan mengambil bentuk logaritma dari masing-masing ruas diperoleh

$$\begin{aligned}&\ln(y) = \ln((x^2 - 3x)^{\ln x}) \\ \Leftrightarrow\;\; &\ln(y) = (\ln(x))\ln(x^2 - 3x)\end{aligned}$$

Turunkan masing-masing ruas

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\ln(y)] &= \frac{d}{dx}[(\ln(x))\ln(x^2-3x)] \\
&= \frac{d}{dx}[\ln(x)]\ln(x^2-3x)+\ln(x)\frac{d}{dx}[\ln(x^2-3x)] \\
&= \frac{\ln(x^2-3x)}{x}+\frac{\ln(x)(2x-3)}{x^2-3x} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2-3x)\ln(x^2-3x)+x\ln(x)(2x-3)}{x(x^2-3x)} \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{(x^2-3x)\ln(x^2-3x)+x\ln(x)(2x-3)}{x(x^2-3x)}\right) \\
&= (x^2-3x)^{\ln x}\left(\frac{(x^2-3x)\ln(x^2-3x)+x\ln(x)(2x-3)}{x(x^2-3x)}\right)
\end{aligned}$$

Jadi

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-3x)^{\ln x}\left(\frac{(x^2-3x)\ln(x^2-3x)+x\ln(x)(2x-3)}{x(x^2-3x)}\right)$$

21. Buktikan bahwa : $\sinh(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))=x$.

Pembahasan :

Dengan merujuk definisi dari sinus hiperbolik dan menggunakan sifat logaritma $a^{{}^a\log(b)}=b$ diperoleh bahwa

$$\sinh(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))=\frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}{2}=\frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}}}{2}$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})-(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}}{2}=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2}$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})-(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}}{2}=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}}{2}$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})-\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(\sqrt{x^2+1})^2}}{2}=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})-\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}}{2}$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})+(x-\sqrt{x^2+1})}{2}=\frac{2x}{2}=x$$

(Terbukti.) Dalam hal ini juga menunjukkan bahwa

$$\sinh^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

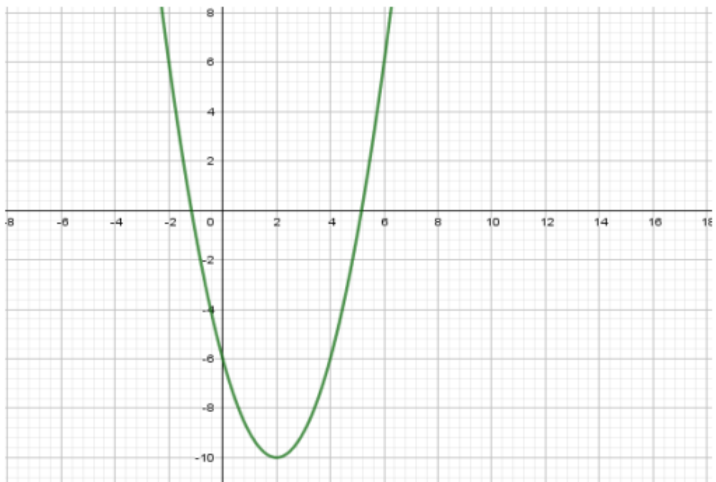
22. **(ETS 2017)**Diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 4x - 6$ dengan $x \geq 2$.

    (a) Dapatkan $f^{-1}(x)$.

    (b) Dapatkan domain $f^{-1}(x)$.

    Pembahasan :

    (a) Perhatikan sketsa grafik $f(x) = x^2 - 4x - 6$



Berdasarkan gambar diatas dapat dilihat bahwa $f(x)$ tidak punya invers pada domain $(-\infty, +\infty)$ karena $f(x)$ bukan fungsi yang bijektif(korespondensi satu-satu) pada domain tersebut. Karena pada soal domain $f(x)$ dibatasi menjadi $[2, +\infty)$ maka berdasarkan gambar diatas dapat dilihat fungsi $f(x)$ merupakan fungsi yang bijektif (korespondensi satu-satu) maka $f(x)$ mempunyai invers pada domain tersebut. Misalkan $y = x^2 - 4x - 6$ Dengan menukar variabel x dan y kemudian menentukan penyelesaiannya, diperoleh

$$\begin{aligned} x &= y^2 - 4y - 6 \\ \Rightarrow \quad x + 10 &= y^2 - 4y + 4 \\ \Rightarrow \quad x + 10 &= (y-2)^2 \\ \Rightarrow \quad \pm\sqrt{x+10} &= y - 2 \\ \Rightarrow \quad y &= 2 \pm \sqrt{x+10} \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat

$$\boxed{D_f = R_{f^{-1}} \text{ dan } D_{f^{-1}} = R_f}$$

sehingga haruslah

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+10}$$

(b) Dapat dengan jelas dilihat pada gambar, bahwa untuk $x \geq 2$ didapat $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 10\}$ sehingga $D_{f^{-1}} = R_f$ jadi

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -10\} = [-10, +\infty).$$

23. Hitung integral-integral tak tentu yang diberikan

(a) $\displaystyle\int \pi^{\sin x} \cos x \, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{9 + \mathrm{e}^x} \, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 3} \, dx$

Pembahasan :

(a) Dengan menggunakan teknik integral subtitusi.
Misalkan $u = \sin(x) \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = \cos(x) \;\Rightarrow\; du = \cos(x)dx$. Sehingga diperoleh

$$\int \pi^{\sin x} \cos x \, dx = \int \pi^u \, du = \int \mathrm{e}^{\ln(\pi^u)} \, du = \int \mathrm{e}^{u \ln(\pi)} \, du.$$

Perhatikan bahwa

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{ax+b} \, dx = \frac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a} + C}$$

dengan demikian diperoleh

$$\int \pi^{\sin x} \cos x \, dx = \int \mathrm{e}^{u \ln(\pi)} \, du = \frac{\mathrm{e}^{u \ln(\pi)}}{\ln(\pi)} + C$$

jadi

$$\int \pi^{\sin x} \cos x \, dx = \frac{\mathrm{e}^{\sin(x) \ln(\pi)}}{\ln(\pi)} + C$$

(b) Misalkan $u = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; du = \mathrm{e}^x \, dx$. Sehingga diperoleh

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{9 + \mathrm{e}^x} \, dx = \int \frac{1}{9 + u} \, du$$

Perhatikan bahwa formula

$$\boxed{\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C}$$

dengan demikian diperoleh

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{9+\mathrm{e}^x}\,dx = \int \frac{1}{9+u}\,du = \ln|u+9| + C$$

jadi

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{9+\mathrm{e}^x}\,dx = \ln|\mathrm{e}^x+9| + C$$

(c) Dengan menggunakan teknik integral subtitusi.
Misalkan $u = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; 2du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$. Sehingga diperoleh

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \mathrm{e}^u\,2du = 2\int \mathrm{e}^u\,du = 2\mathrm{e}^u + C$$

jadi

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$$

(d) Misalkan $u = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; du = \mathrm{e}^x\,dx \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{u}du = dx$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+3}\,dx &= \int \frac{u^2}{u+3}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{u}{u+3}\,du = \int 1 - \frac{3}{u+3}\,du \\
&= \int 1\,du - \int \frac{3}{u+3}\,du = u - 3\ln|u+3| + C \\
&= \mathrm{e}^x - 3\ln|\mathrm{e}^x+3| + C
\end{aligned}$$

24. Dengan differensial implisit, dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut.

$$y + \ln(xy) = \frac{1}{2}x^2$$

Pembahasan:
Diketahui bahwa

$$y + \ln(xy) = \frac{1}{2}x^2$$

Dengan menggunakan differensial implisit diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[y+\ln(xy)\right] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2\right] \\
\Leftrightarrow \frac{d}{dx}[y]+\frac{d}{dx}[\ln(xy)] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2\right] \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right) &= x \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(1+\frac{1}{y}\right) &= x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x} \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)
\end{aligned}$$

Jadi turunana implisit $\frac{dy}{dx}$ dari bentuk pada soal adalah

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)=\frac{y(x^2-1)}{x(1+y)}$$

25. Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

Pembahasan :
Perhatikan bahwa

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}u\right]=\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{du}{dx}}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)\right]=\frac{1}{\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2+1}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1-x^2}\right]$$

$$=\frac{(1-x^2)^2}{x^2+(1-x^2)^2}\cdot\frac{(1)(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{x^2+(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}$$

26. Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari $y=x^{\sin x}$
Pembahasan :

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
y &= x^{\sin x} \\
\Leftrightarrow \ln y &= \ln(x^{\sin x}) \\
\Leftrightarrow \ln y &= \sin x \cdot \ln(x) \\
\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[\ln(y)\right] &= \frac{d}{dx}\left[\sin x \cdot \ln(x)\right] \\
\Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \cos x \cdot \ln(x) + \frac{\sin x}{x} \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= y\left(\cos x \cdot \ln(x) + \frac{\sin x}{x}\right) \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= x^{\sin x}\left(\frac{x \cos x \ln x + \sin x}{x}\right) = x^{\sin x - 1}\left(x \cos x \ln x + \sin x\right)
\end{aligned}
$$

27. Hitunglah

$$\int \frac{\mathrm{e}^{5/x^2}}{x^3}\, dx$$

Pembahasan :

Dengan integral subtitusi, misalkan $u = \dfrac{5}{x^2} = 5x^{-2}$ diperleh

$$du = -\frac{10}{x^3}\, dx \Leftrightarrow -\frac{1}{10}\, du = \frac{1}{x^3}\, dx$$

Sehingga diperoleh

$$\int \frac{\mathrm{e}^{5/x^2}}{x^3}\, dx = -\frac{1}{10}\int \mathrm{e}^u\, du = -\frac{\mathrm{e}^u}{10} + C = -\frac{\mathrm{e}^{5/x^2}}{10} + C.$$

28. Gambarkanlah grafik dari

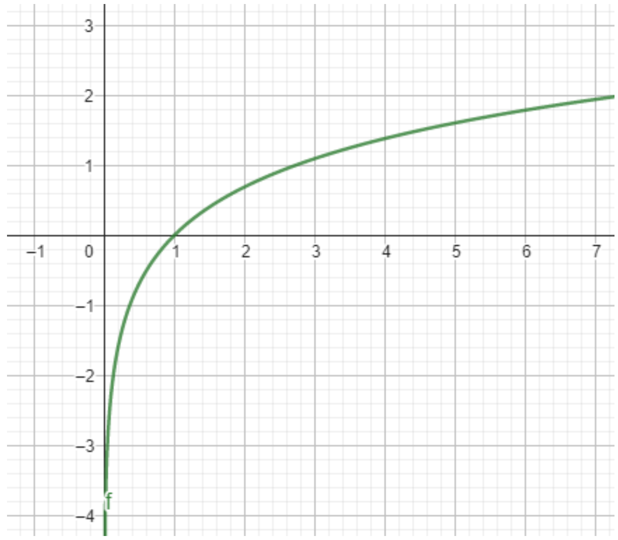
$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{4x^2 - 12x + 9}\right)$$

Pembahasan:

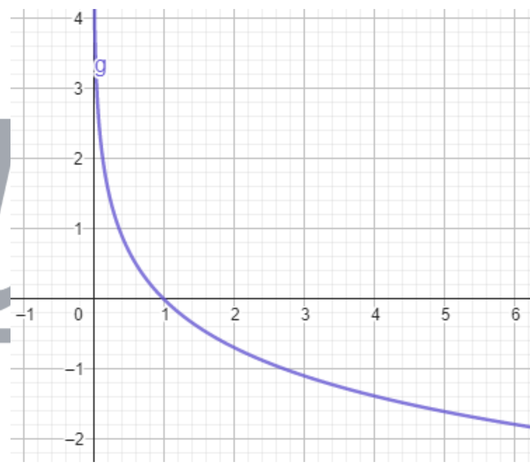
Perhatikan bahwa

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{4x^2 - 12x + 9}\right) = \ln(1) - \ln(4x^2 - 12x + 9) = -\ln(2x-3)^2 = -2\ln(2x-3)$$

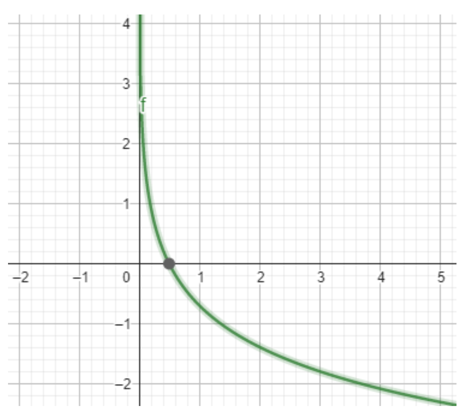
Perhatikan untuk fungsi dasar $f(x) = \ln x$



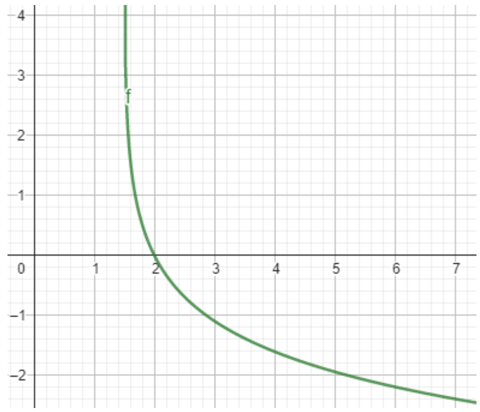
selanjutnya grafik $y = -\ln x$ merupakan pencerminan grafik $y = \ln x$ terhadap sumbu x



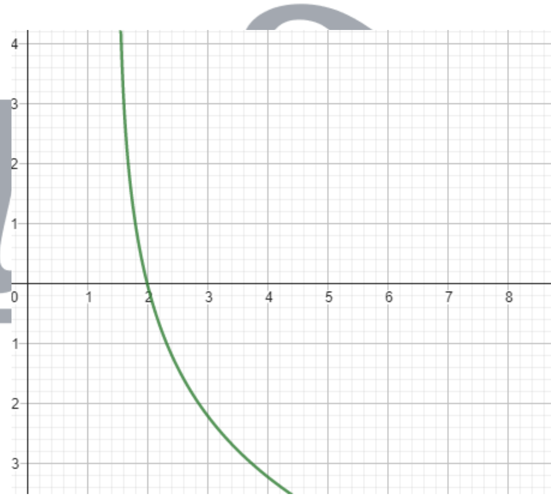
selanjutnya grafik $y = -\ln(2x)$ berpotongan dengan sumbu x di $x = \dfrac{1}{2}$ sedangkan untuk $y = -\ln x$ di $x = 1$.



selanjutnya grafik $y = -\ln(2x-3)$ merupakan pergeseran grafik $y = -\ln(2x)$ ke kanan sebesar 3 satuan



selanjutnya grafik $y = -2\ln(2x-3)$ merupakan pembesaran dengan skala 2 dari grafik $y = -\ln(2x-3)$



2. Teknik Integrasi

1. (**ETS 2022**) Selesaikan integral berikut

$$\int x \tan^2 x \, dx$$

Pembahasan :
Dengan menggunakan metode integral parsial.
Mislakan

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \tan^2 x \, dx \Rightarrow v = \int \tan^2 x \, dx$$

Kita tahu bahwa $1 + \tan^2 x = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$ diperoleh

$$v = \int \tan^2 x \, dx = \int \sec^2 x - 1 \, dx = \tan x - x$$

Sehingga dengan rumus integral parsial

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du}$$

$$\int \tan^2 x \, dx = x(\tan x - x) - \int \tan x - x \, dx = x(\tan x - x) - \int \tan x \, dx + \int x \, dx$$

$$= x(\tan x - x) - (-\ln|\cos x|) + \frac{1}{2}x^2 + C = \ln(|\cos(x)|) + x\tan(x) - \frac{x^2}{2}$$

2. (**ETS 2023**) Hitung integral berikut :

$$\int \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{4}} + 1} \, dx$$

Pembahasan :
Misalkan $u^4 = 1 - x \Rightarrow x = 1 - u^4$, dan juga $u^4 = 1 - x \Rightarrow 4u^3 \dfrac{du}{dx} = -1 \Rightarrow -4u^3 \, du = dx$.
Sehingga diperoleh integral baru yaitu

$$\int \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{4}} + 1} \, dx = \int \frac{1 - u^4}{u+1}(-4u^3) \, du = \int \frac{4u^3(u^4 - 1)}{u+1} \, du$$

$$= \int \frac{4u^3(u^2+1)(u^2-1)}{u+1} \, du = \int \frac{4u^3(u^2+1)(u-1)(u+1)}{u+1} \, du = \int 4u^3(u^2+1)(u-1) \, du$$

$$= \int 4u^6 - 4u^5 + 4u^4 - 4u^3\, du = \frac{4}{7}u^7 - \frac{2}{3}u^6 + \frac{4}{5}u^5 - u^4 + C$$
$$= \frac{4}{7}(1-x)^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{4}} - (1-x) + C$$

Jadi diperoleh

$$\int \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{4}}+1}\, dx = \frac{4}{7}(1-x)^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{4}} - (1-x) + C$$

3. (**ETS 2022**) Hitung integral berikut

$$\int_1^e x^2 \ln x\, dx$$

Pembahasan :
Dengan menggunakan integral parsial:
Misalkan $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ dan $dv = x^2\, dx \Rightarrow v = \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3$.
Sehingga didapat

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{9}x^3 + C$$

Dengan demikian diperoleh

$$\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{9}x^3 + C\Big|_1^e = \left(\frac{(\mathrm{e})^3 \ln \mathrm{e}}{3} - \frac{1}{9}(\mathrm{e})^3\right) - \left(\frac{x^3 \ln 1}{3} - \frac{1}{9}(1)^3\right) = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}$$

4. (**ETS 2022**) Hitung integral berikut

$$\int \frac{3}{x+\sqrt{x+2}}\, dx$$

Pembahasan :
Misalkan $u = \sqrt{x+2} \Rightarrow u^2 = x+2 \Rightarrow 2u\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow 2u\, du = dx$. Perhatikan bahwa karena $u^2 = x+2 \Rightarrow x = u^2 - 2$. Sehingga diperoleh integral yang baru yaitu

$$\int \frac{3}{x+\sqrt{x+2}}\, dx = \int \frac{6u}{u^2-2+u}\, du = \int \frac{6u}{u^2+u-2}\, du = \int \frac{6u}{(u-1)(u+2)}\, du$$

Dengan menggunakan metode pecahan parsial

$$\frac{6u}{(u-1)(u+2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+2} = \frac{A(u+2)+B(u-1)}{(u-1)(u+2)}$$

diperoleh persamaan $6u = A(u+2) + B(u-1)$

- misal $u = 1 \Rightarrow 6(1) = A(1+2) + B(1-1) \Rightarrow 6 = 3A \Rightarrow A = 2$
- misal $u = -2 \Rightarrow 6(-2) = A(2+(-2)) + B((-2)-1) \Rightarrow -12 = -3B \Rightarrow B = 4$

Sehingga diperoleh

$$\int \frac{6u}{(u-1)(u+2)}\,du = \int \frac{2}{u-1} + \frac{4}{u+2}\,du = 2\ln|u-1| + 4\ln|u+2| + C$$

Dengan demikian diperoleh

$$\int \frac{3}{x+\sqrt{x+2}}\,dx = 2\ln|\sqrt{x+2}-1| + 4\ln|\sqrt{x+2}+2| + C$$

5. (**ETS 2022**) Hitung integral berikut :

$$\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,dx$$

Pembahasan :
Dengan menggunakan pembagian susun

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad x+3 \\ \hline x^2-3x+2 & x^3 \\ & -x^3+3x^2-2x \\ \hline & \quad 3x^2-2x \\ & \quad -3x^2+9x-6 \\ \hline & \quad\quad 7x-6 \end{array}$$

Sehingga dapat dituliskan

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2} = (x+3) + \frac{7x-6}{x^2-3x+2}$$

Dengan metode pecahan parsial

$$\frac{7x-6}{x^2-3x+2} = \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

diperoleh

$$7x-6 = A(x-2) + B(x-1)$$

- untuk $x = 1 \Rightarrow 7(1) - 6 = A(1-2) + B(1-1) \Rightarrow 1 = A(-1) \Rightarrow A = -1$

- untuk $x = 2 \Rightarrow 7(2) - 6 = A(2-2) + B(2-1) \Rightarrow B = 8$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2} = (x+3) + \frac{7x-6}{x^2-3x+2} = x+3+\frac{8}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

sehingga didapat

$$\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,dx = \int x+3+\frac{8}{x-2} - \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 8\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$$

6. (**ETS 2022**) Hitung integral berikut :

$$\int \sin^{1/3} t \cos^3 t\, dt$$

Pembahasan :
Perhatikan bahwa

$$\int \sin^{1/3} t \cos^3 t\, dt = \int \sin^{1/3} t \cos^2 t \cos t\, dt = \int \sin^{1/3} t(1-\sin^2 t)\cos t\, dt$$

Misalkan $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t\, dt$ sehingga diperoleh

$$\int \sin^{1/3} t(1-\sin^2 t)\cos t\, dt = \int u^{1/3}(1-u^2)\,du = \int u^{1/3} - u^{7/3}\,du = \frac{3}{4}u^{4/3} - \frac{3}{10}u^{10/3} + C$$

kembali ke pemisalan diperoleh

$$\int \sin^{1/3} t \cos^3 t\, dt = \frac{3}{4}(\sin t)^{4/3} - \frac{3}{10}(\sin t)^{10/3} + C = -\frac{6\sin^{\frac{10}{3}}(x) - 15\sin^{\frac{4}{3}}(x)}{20} + C$$

$$= -\frac{3\sin^{\frac{4}{3}}(x)\left(2\sin^2(x) - 5\right)}{20} + C = \frac{3\sin^{\frac{4}{3}}(x)\left(\cos(2x) + 4\right)}{20} + C$$

7. **(ETS 2016)** Selesaikan integral berikut

$$\int \frac{2x-3}{x^2-8x+16}\,dx$$

Pembahasan :

- **Alternatif 1 :**

Perhatikan bahwa

$$\int \frac{2x-3}{x^2-8x+16}\,dx = \int \frac{2x-3}{(x-4)^2}\,dx$$

Dengan menggunakanteknik integral subtitusi. Misalkan $u = x-4 \;\Rightarrow\; du = dx$, sehingga

$$\int \frac{2x-3}{(x-4)^2}\,dx = \int \frac{2(u+4)-3}{u^2}\,du = \int \frac{2u+5}{u^2}\,du = \int \frac{2}{u}\,du + \int \frac{5}{u^2}\,du$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{2x-3}{(x-4)^2}\,dx = \int \frac{2}{u}\,du + \int \frac{5}{u^2}\,du = 2\ln|u| - \frac{5}{u} + C$$

kembalikan ke pemisalan $u = x-4$ diperoleh bahwa

$$\int \frac{2x-3}{x^2-8x+16}\,dx = 2\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + C$$

- **Alternatif 2:**

  Dengan menggunakan metode integral pecahan parsial, perhatikan bahwa

$$\frac{2x-3}{x^2-8x+16} = \frac{2x-3}{(x-4)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} = \frac{A(x-4)+B}{(x-4)^2} = \frac{Ax+B-4A}{(x-4)^2}$$

  diperoleh persamaan $2x-3 = Ax+B-4A$. Jelas bahwa jika $A=2$ maka $B-4A = -3 \;\Rightarrow\; B = 4A-3 = 4(2)-3 = 5$, sehingga diperoleh

$$\frac{2x-3}{x^2-8x+16} = \frac{2x-3}{(x-4)^2} = \frac{2}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}.$$

  Dengan demikian diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{x^2-8x+16}\,dx &= \int \frac{2x-3}{(x-4)^2} = \frac{2}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}\,dx \\ &= \int \frac{2}{x-4}\,dx + \int \frac{5}{(x-4)^2}\,dx \\ &= 2\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + C\end{aligned}$$

8. Nilai dari

$$\int \frac{1-3x}{2x^2+7x+3}\,dx = \cdots$$

   Pembahasan :

   Dengan teknik integral pecahan parsial diperoleh

$$\int \frac{1-3x}{2x^2+7x+3}\,dx = \int \frac{1-3x}{(2x+1)(x+3)}\,dx$$

perhatikan bahwa

$$\frac{1-3x}{(2x+1)(x+3)} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(2x+1)}{(2x+1)(x+3)}$$

Sehingga diperoleh $(1-3x) = A(x+3) + B(2x+1)$

- untuk $x = -3$ dipeorleh $1 - 3(-3) = B(2(-3)+1) \Rightarrow B = -2$
- untuk $x = -\frac{1}{2}$dipeorleh $1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = A(-\frac{1}{2}+3) \Rightarrow A = 1$

Dengan demikian dapat dituliskan

$$\begin{aligned}\int \frac{1-3x}{2x^2+7x+3}\,dx = \int \frac{1}{2x+1} - \frac{2}{x+3}\,dx &= \ln|2x+1| - 2\ln|x+3| + C \\ &= \ln\left|\frac{2x+1}{(x+3)^2}\right| + C\end{aligned}$$

9. Selesaikan

$$\int \frac{4(x^2+x+1)}{x^3+2x^2}\,dx = \cdots$$

Pembahasan :
Dengan teknik integral pecahan parsial diperoleh

$$\frac{4(x^2+x+1)}{x^3+2x^2} = \frac{4(x^2+x+1)}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2}{x^2(x+2)}.$$

Sehingga diperoleh $4(x^2+x+1) = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$

- untuk $x = 0$ diperoleh $4 = B(0+2) \Rightarrow B = 2$
- untuk $x = -2$ diperoleh $4((-2)^2 + (-2) + 4) = C(-2)^2 \Rightarrow C = 3$
- untuk $x = 1$ diperoleh $4(1^2+1+1) = A(1)(1+2) + B(1+2) + C(1)^2 = 3A + 2(1+2) + 3(1^2) \Rightarrow A = 1$

Dengan demikian diperoleh

$$\int \frac{4(x^2+x+1)}{x^3+2x^2}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x+2}\,dx = \ln|x| - \frac{2}{x} + 3\ln|x+2| + C$$

10. Selesaikan

$$\int (x^2-1)\cos x\,dx = \cdots$$

Pembahasan :
Dengan menggunakan metode integral parsial.

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Misalkan $u = (x^2-1) \Rightarrow du = 2x\,dx$ dan $dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$. Sehingga diperoleh

$$\int (x^2-1)\cos x\,dx = (x^2-1)\sin x - 2\int x(\sin x)\,dx$$

Kemudian dengan cara yang sama menggunakan integral parsial untuk menyelesaikan

$$\int x\sin x\,dx$$

Misalkan $a = x \Rightarrow da = dx$ dan $db = \sin x\,dx \Rightarrow b = \displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$. Sehingga didapat

$$\int x\sin x\,dx = ab - \int b\,da$$

$$= -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}\int (x^2-1)\cos x\,dx &= (x^2-1)\sin x - 2\int x(\sin x)\,dx \\ &= (x^2-1)\sin x - 2\left[-x\cos x + \sin x\right] + C \\ &= (x^2-3)\sin x + 2x\cos x + C\end{aligned}$$

11. Selesaiakan

$$\int e^x \sin(2x)\,dx = \cdots$$

Pembahasan :
Dengan teknik integral parsial.
Misalkan $u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$
dan $dv = \sin(2x)\,dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)$. Sehingga diperoleh

$$\int e^x \sin(2x)\,dx = -\frac{e^x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int e^x\cos(2x)\,dx$$

Kemudian dengan cara menggunakan integral parsial untuk menyelesaikan $\displaystyle\int e^x\cos(2x)\,dx$.

Diperoleh

$$\int e^x \cos(2x)\,dx = \frac{e^x \sin(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^x \sin(2x)\,dx$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin(2x)\,dx &= -\frac{e^x \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int e^x \cos(2x)\,dx \\
&= -\frac{e^x \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^x \sin(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^x \sin(2x)\,dx\right] \\
&= -\frac{e^x \cos(2x)}{2} + \frac{e^x \sin(2x)}{4} - \frac{1}{4}\int e^x \sin(2x)\,dx \\
\frac{5}{4}\int e^x \sin(2x)\,dx &= -\frac{e^x \cos(2x)}{2} + \frac{e^x \sin(2x)}{4} \\
\int e^x \sin(2x)\,dx &= \frac{e^x(-2\cos(2x) + \sin(2x))}{5} + C
\end{aligned}$$

12. Dapatkan :

$$\int t^7 \sin(2t^4)\,dt$$

Pembahasan :

Integral pada soal dapat dituliskan

$$\int t^7 \sin(2t^4)\,dt = \int (t^4)(t^3)\sin(2t^4)\,dt$$

Misalkan $w = 2t^4 \Rightarrow dw = 8t^3\,dt \Rightarrow \frac{1}{8}\,dw = t^3\,dt$. Sehingga diperoleh integral yang baru

$$\int t^7 \sin(2t^4)\,dt = \frac{1}{16}\int w\sin(w)\,dw$$

Gunakan integral parsial, misalkan $u = w \Rightarrow du = dw$ dan $dv = \sin w\,dw \Rightarrow v = \int \sin w\,dw = -\cos w$. Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{16}\int w\sin(w)\,dw = \frac{1}{16}\left[-w\cos w - \int -\cos w\,dw\right] = \frac{1}{16}\left[-w\cos w + \sin w\right] + C$$

dengan demikian didapat

$$\int t^7 \sin(2t^4)\,dt = \frac{\sin(2t^4) - 2t^4\cos(2t^4)}{16} + C$$

13. Selesaikan

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \cdots$$

Pembahasan:
Misalkan $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$. Sehingga diperoleh

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt = \int \sin^2 t\cos^2 t\, dt$$

$$\int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = \int \frac{1-\cos^2 2t}{4}\, dt = \frac{1}{4}\int \sin^2 2t\, dt$$

misalkan $u = 2t \Rightarrow \frac{1}{2}du = dt$ sehingga diperoleh

$$\frac{1}{4}\int \sin^2 2t\, dt = \frac{1}{8}\int \sin^2 u\, du$$

Perhatikan bahwa

$$\boxed{\int \sin^n x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx &= \frac{1}{8}\int \sin^2 u\, du = \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\sin u\cos u + \frac{1}{2}\int\, du\right]\\ &= -\frac{1}{16}\sin u\cos u + \frac{u}{8} = -\frac{\sin(2t)\cos(2t)+2t}{2t}\\ &= \frac{\arcsin(x)}{8} - \frac{x\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{8} + C\end{aligned}$$

14. Selesaiakan

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \cdots$$

Pembahasan:
Misalkan $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$, didapat

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\, dt = \int \sin^3 t\, dt$$

Perhatikan bahwa

$$\int \sin^3 t\, dt = \int \sin^2 t\cdot\sin t\, dt = \int (1-\cos^2 t)\cdot\sin t\, dt$$

Misalkan $u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t\, dt$ sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\int (1-\cos^2 t)\cdot \sin t\, dt &= -\int (1-u^2)\, du = \int u^2 - 1\, du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + C \\
&= \frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{1}{2}\cos^2 t + C \\
&= \frac{1}{3}\cos^3\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}\cos^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C
\end{aligned}$$

atau dalam bentuk lain karena $\dfrac{x}{2} = \sin t$ maka $\cos t = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ sehingga

$$\int (1-\cos^2 t)\cdot \sin t\, dt = \frac{1}{6}(4-x^2)^{3/2} - \frac{1}{4}(4-x^2) + C$$

15. Selesaikan

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \cdots$$

Pembahasan :

Dengan subtitusi trigonometri, misalkan $x = \sin t$ diperoleh $dx = \cos t\, dt$. Sehingga

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \int \frac{1}{(1-\sin^2 t)^{3/2}}\cdot \cos t\, dt = \int \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int \sec^2 t\, dt = \tan t + C$$

Sehingga dengan bantuan segitiga siku-siku, karena $\sin t = x$ maka $\cos t = \sqrt{1-x^2}$ oleh karena itu

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

jadi diperoleh

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

16. Selesaikan

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \cdots$$

Pembahasan :

Dengan teknik integral parsial. Misalkan $u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$ dan $dv = dx \Rightarrow v = x$. Diperoleh

$$\int \cos(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + \int x \cdot \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx = x\sin(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx$$

Dengan cara yang sama menggunakan integral parsial didapat bahwa

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \cos(\ln x)\,dx &= x\sin(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx \\
&= x\sin(\ln x) + x\cos(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \\
2\int \cos(\ln x)\,dx &= x\sin(\ln x) + x\cos(\ln x) \\
\int \cos(\ln x)\,dx &= \frac{x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))}{2} + C
\end{aligned}$$

17. Selesaikan integral berikut : $\displaystyle\int t\ln t\,dt$.

    Pembahasan :
    Dengan teknik integral parsial. Misalkan $u = \ln t \Rightarrow du = \dfrac{1}{t}dt$ dan $dv = tdt \Rightarrow v = \displaystyle\int t^2\,dt = \frac{1}{2}t^2$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\int t\ln t\,dt = \frac{t^2\ln t}{2} - \frac{1}{2}\int t^2\cdot\frac{1}{t}\,dt = \frac{t^2\ln t}{2} - \frac{1}{2}\int t\,dt = \frac{t^2\ln t}{2} - \frac{t^2}{4} + C \\
= \frac{t^2(2\ln t - 1)}{4} + C
\end{aligned}$$

18. Tuliskan bentuk dekomposisi pecahan parsial dari : $\dfrac{x^5 + 2x^2 + 1}{x^3 + x}$

    Pemabahsan :
    Perhatikan karena derajat pembilang lebih besar dari derajat penyebut, dengan pembagian susun diperoleh

$$\begin{array}{r|llll}
 & & & x^2 & -1 \\ \hline
x^3 + x & x^5 & & +2x^2 & +1 \\
 & -x^5 & -x^3 & & \\ \hline
 & & -x^3 & +2x^2 & \\
 & & x^3 & & +x \\ \hline
 & & & 2x^2 & +x+1
\end{array}$$

Sehingga diperoleh
$$\frac{x^5+2x^2+1}{x^3+x} = x^2 - 1 + \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}$$

Kemudian perhatikan
$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+x} = \frac{2x^2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$$

Sehingga $2x^2+x+1 = A(x^2+1)+x(Bx+C)$

- untuk $x=0$ diperoleh $2(0)^2+0+1 = A(0^2+1)+0(B(0)+C) \Rightarrow A = 1$
- unruk $x=1$ diperoleh $2(1)^2+1+1 = A(1^2+1)+(1)(B(1)+C) \Rightarrow 4 = 2+B+C \Rightarrow B+C = 2$
- untuk $x=-1$ diperooleh $2(-1)^2+(-1)+1 = A((-1)^2+1)+(-1)(B(-1)+C) \Rightarrow B-C = 0$

Karena $B+C=2$ dan $B-C=0$ diperoleh $B=1$ dan $C=1$. Dengan demikian didapat
$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+x} = x^2 - 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

19. **(ETS 2022)** Selesaikan integral berikut :
$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x - 5}\,dx$$

Pembahasan :
Misalkan $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$, sehingga diperoleh
$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x - 5}\,dx = \int \frac{1}{u^2+4u-5}\,du = \int \frac{1}{(u-1)(u+5)}\,du$$

Dengan menggunakan metode integral pecahan parsial.
$$\frac{1}{(u-1)(u+5)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+5} = \frac{A(u+5)+B(u-1)}{(u-1)(u+5)}$$

Perhatikan bahwa $1 = A(u-1)+B(u+5)$

- untuk $u=1$ diperoleh $1 = A(6) \Rightarrow A = \dfrac{1}{6}$
- untuk $u=-5$ diperoleh $1 = B(-6) \Rightarrow B = -\dfrac{1}{6}$

dengan demikian diperoleh

$$\int \frac{1}{(u-1)(u+5)}\,du = \int \frac{1}{6(u-1)} - \frac{1}{6(u+5)}\,du = \frac{\ln|u-1| - \ln|u+5|}{6} + C$$

Sehinggan diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x - 5}\,dx &= \frac{\ln|\sin x - 1| - \ln|\sin x + 5|}{6} + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 5}\right| + C\end{aligned}$$

20. Dapatkan :

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+9x}\,dx$$

Pembahasan :

Dengan menggunakan pembagian susun

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \hline x^3+9x & \quad x^4 \qquad\quad +2 \\ & -x^4 - 9x^2 \\ \hline & \qquad -9x^2 + 2 \end{array}$$

sehingga integral pada soal dapat dituliskan

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+9x}\,dx = \int x + \frac{2-9x^2}{x^3+9x}\,dx$$

Dengan metode pecahan parsial diperoleh

$$\frac{2-9x^2}{x^3+9x} = \frac{2-9x^2}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)x}{x(x^2+9)}$$

didapat

$$2-9x^2 = A(x^2+9)+(Bx+C)x$$

- misalkan $x=0 \Rightarrow 2-9(0)^2 = A((0)^2+9)+(B(0)+C)(0) \Rightarrow A = \frac{2}{9}$
- misalkan $x=1 \Rightarrow 2-9(1)^2 = \left(\frac{2}{9}\right)((1)^2+9)+(B(1)+C)(1) \Rightarrow B+C = -\frac{83}{9}$
- misalkan $x=-1 \Rightarrow 2-9(-1)^2 = \left(\frac{2}{9}\right)((-1)^2+9)+(B(-1)+C)(-1) \Rightarrow -B+C = \frac{83}{9}$

Dari $B+C=-\dfrac{83}{9}$ dan $-B+C=\dfrac{83}{9}$, diperoleh $B=-\dfrac{83}{9}$ dan $C=0$. Sehingga integral pada soal secara lengkap dapat dituliskan

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+9x}\,dx=\int x+\frac{2}{9x}-\frac{83x}{9(x^2+9)},dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{9}\ln|x|-\frac{83}{18}\ln|x^2+9|+C$$

21. Selesaikan integral berikut :

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{4-9t^2}}\,dt$$

Pembahasan:
Misalkan $t=\dfrac{2}{3}\sin\theta \Rightarrow dt=\dfrac{2}{3}\cos\theta\,d\theta$. Diperoleh

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{4-9t^2}}\,dt=\int \frac{1}{\left(\frac{4}{9}\right)\sin^2\theta\sqrt{4-9\left(\frac{4}{9}\sin^2\theta\right)}}\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int \frac{1}{\left(\frac{4}{9}\right)\sin^2\theta\cdot 2\cos\theta}\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta=\frac{3}{4}\int \csc^2\theta\,d\theta=-\frac{3}{4}\cot\theta+C$$

Karena $\sin\theta=\dfrac{3t}{2}$ maka $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{4-9t^2}}{2}$ dengan demikian

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{4-9t^2}}{2}}{\frac{3t}{2}}=\frac{\sqrt{4-9t^2}}{3t}$$

Sehingga diperoleh

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{4-9t^2}}\,dt=-\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{4-9t^2}}{3t}\right)+C=-\frac{\sqrt{4-9t^2}}{4t}+C$$

22. Selesaikan

$$\int e^x\sin x\,dx$$

Pembahasan :
Gunakan cara integrasi parsial $\int u\,dv=uv-\int v\,du$
Misalkan : $u=e^x$ dan $dv=\sin x\,dx$
$du=e^x\,dx$ dan $v=\int \sin x\,dx=-\cos x$
Maka,

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$$

Dengan cara yang sama dengan menggunakan metode integral parsial

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

Sehingga diperoleh

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int e^x \sin x\,dx = -e\cos x + e^x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \sin x\,dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$$

23. **(ETS 2018)** Hitunglah nilai integral dibawah ini

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^3 x\,dx$$

Pembahasan :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\sin^2 x)\sin^3 x\,dx$$

Misalkan $u = \sin x => du = \cos x\,dx$ sehingga dengan menggunakan metode substitusi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-u^2)u^3\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3 - u^5\,du = \left(\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^3 x\,dx &= \left(\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\sin^6\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\sin^4 0 - \frac{1}{6}\sin^6 0\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) - (0-0) \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

24. (**ETS 2020**) Selesaikan integral tak tentu

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}\,dx$$

Pembahasan :

Dengan teknik pecahan parsial perhatikan bahwa

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x+2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x-1)(x+2)(Cx+D)}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}$$

Diperoleh persamaan

$$2x+3 = A(x+2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x-1)(x+2)(Cx+D)$$

selanjutnya dicari nilai A, B, C, dan D. Perhatikan bahwa

- Untuk $x = 1$ diperoleh

$$2(1)+3 = A(1+2)(1^2+1) \;\Rightarrow\; A = \frac{5}{6}$$

- Untuk $x = -2$ diperoleh

$$2(-2)+3 = B(-2-1)((-2)^2+1) \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{15}$$

- Untuk $x = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2(0)+3 = A(0+2)(0^2+1) + B(0-1)(0^2+1) &+ (0-1)(0+2)(C(0)+D) \\ \Leftrightarrow\; 3 &= 2A - B - 2D \\ \Leftrightarrow\; 3 &= 2\left(\frac{5}{6}\right) - \left(\frac{1}{15}\right) - 2D \\ \Leftrightarrow\; D &= -\frac{7}{10} \end{aligned}$$

- Untuk $x = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2(2)+3 = A(2+2)(2^2+1) + B(2-1)(2^2+1) &+ (2-1)(2+2)(C(2)+D) \\ \Leftrightarrow\; 7 &= 20A + 5B + 4(2C+D) \\ \Leftrightarrow\; 7 &= 20\left(\frac{5}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{15}\right) + 4\left(2C + \left(\frac{-7}{10}\right)\right) \\ \Leftrightarrow\; C &= -\frac{9}{10} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} = \frac{5}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{-9x-7}{10(x^2+1)}$$

Oleh karena itu didapat

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{5}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{-9x-7}{10(x^2+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{5}{6(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{15(x+2)}\,dx - \int \frac{9x}{10(x^2+1)}\,dx - \int \frac{7}{10(x^2+1)}\,dx$$

$$= \frac{5}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{15}\ln|x+2| - \frac{9}{20}\ln|x^2+1| - \frac{7}{10}\tan^{-1}x + C$$

$$= -\frac{-4\ln(|x+2|) + 27\ln(x^2+1) + 42\arctan(x) - 50\ln(|x-1|)}{60} + C$$

25. (**ETS 2020**) Selesaikan bentuk integral tak tentu

$$\int (x-A)\ln(Bx)\,dx$$

untuk sembarang A dan B bilangan real positif.

Pembahasan :

Dengan menggunakan teknik integral parsial. Misalkan $u = \ln(Bx) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$ dan $dv = (x-A)\,dx \Rightarrow v = \int x - A\,dx = \frac{1}{2}x^2 - Ax$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int (x-A)\ln(Bx)\,dx &= \ln(Bx)\left(\frac{1}{2}x^2 - Ax\right) - \int \left(\frac{1}{2}x^2 - Ax\right)\frac{1}{x}\,dx \\ &= \ln(Bx)\left(\frac{1}{2}x^2 - Ax\right) - \int \left(\frac{1}{2}x - A\right)dx \\ &= \ln(Bx)\left(\frac{1}{2}x^2 - Ax\right) - \frac{1}{4}x^2 + Ax + C \end{aligned}$$

Jadi

$$\int (x-A)\ln(Bx)\,dx = \ln(Bx)\left(\frac{1}{2}x^2 - Ax\right) - \frac{1}{4}x^2 + Ax + C$$

26. (**ETS 2019**) Selesaikan integral dibawah ini

$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3+x^2}\,dx$$

Pembahasan :

Dengan teknik pecahan parsial perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-2x-1}{x^3+x^2} &= \frac{2x^2-2x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \\
&= \frac{A(x^2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x^2)}{x^3(x+1)} \\
&= \frac{A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x^2)}{x^2(x+1)}
\end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh

$$2x^2 - 2x - 1 = A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x^2)$$

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai A, B, dan C dengan mensubtitusi beberapa nilai x tertentu yang **mempermudah perhitungan**.

- Untuk $x = 0$ diperoleh

$$\begin{gathered}
2(0)^2 - 2(0) - 1 = A(0)(0+1) + B(0+1) + C((0)^2) \\
\Leftrightarrow \; B = -1
\end{gathered}$$

- Untuk $x = -1$ diperoleh

$$\begin{gathered}
2(-1)^2 - 2(-1) - 1 = A(-1)(-1+1) + B(-1+1) + C((-1)^2) \\
\Leftrightarrow \; C = 3
\end{gathered}$$

- Untuk $x = 1$ diperoleh

$$\begin{gathered}
2(1)^2 - 2(1) - 1 = A(1)(1+1) + B(1+1) + C((1)^2) \\
2(1)^2 - 2(1) - 1 = A(1)(1+1) + (-1)(1+1) + (3)(1)^2 \\
\Leftrightarrow \; A = -1
\end{gathered}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3+x^2}\,dx &= \int -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1}\,dx \\
&= -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + 3\int \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= -\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x+1| + C \\
&= \ln\left|\frac{(x+1)^3}{x}\right| + \frac{1}{x} + C
\end{aligned}$$

Jadi

$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3+x^2}\,dx = \ln\left|\frac{(x+1)^3}{x}\right| + \frac{1}{x} + C$$

27. Selesaikan

$$\int \frac{x}{x^2+6x+3}\,dx = \cdots$$

Pembahasan :

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+6x+3}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)-3}{x^2+6x+3}\,dx \\
&= \int \left(\frac{2x+6}{2(x^2+6x+3)} - \frac{3}{x^2+6x+3}\right)dx \\
&= \int \frac{x+3}{x^2+6x+3}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2+6x+3}\,dx
\end{aligned}$$

Sekarang selesaikan $\int \frac{x+3}{x^2+6x+3}\,dx$

Misalkan $u = x^2+6x+3 \Rightarrow du = 2(x+3) \Rightarrow \frac{1}{2}du = dx$. Diperoleh

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+3| + C.$$

Selanjutnya selesaikan $\int \frac{1}{x^2+6x+3}\,dx$

Dengan menggunakan teknik integral parsial

$$\int \frac{1}{x^2+6x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x-(-3+\sqrt{6}))(x-(-3-\sqrt{6}))}\,dx \text{(\textbf{Gunakan Rumus ABC})}$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{6}(x-(-3+\sqrt{6}))} - \frac{1}{2\sqrt{6}(x-(-3-\sqrt{6}))}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln|x-(-3+\sqrt{6})| - \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln|x-(-3-\sqrt{6})| + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln|x-\sqrt{6}+3| - \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln|x+3+\sqrt{6}| + C$$

Sehingga diperoleh

$$\int \frac{x}{x^2+6x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+3| - \frac{3}{2\sqrt{6}}\ln|x-\sqrt{6}+3| + \frac{3}{2\sqrt{6}}\ln|x+3+\sqrt{6}| + C$$
$$= \frac{2\ln\left(|x^2+6x+3|\right) + \sqrt{6}\left(\ln\left(\left|x+\sqrt{6}+3\right|\right) - \ln\left(\left|x-\sqrt{6}+3\right|\right)\right)}{4} + C$$

28. Selesaikan

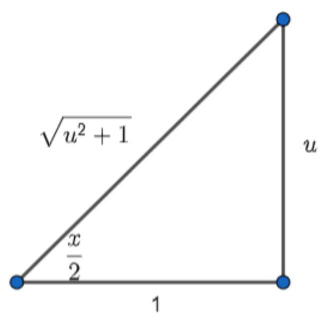
$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx = \cdots$$

Pembahasan :

Misalkan

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow\; du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow\; dx = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)du$$

Dengan menggunakan bantuan segitiga siku-siku diperoleh



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}, \quad \text{dan} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

akibatnya

$$dx = 2\cos^2 x\,du = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 du = \frac{2}{u^2+1}\,du$$
$$\sin x = 2\sin x\cos x = 2\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) = \frac{2u}{u^2+1}$$
$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Maka dengan menggunakan metode subtitusi

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{1}{\dfrac{2u}{u^2+1} + \dfrac{1-u^2}{u^2+1}} \cdot \frac{2}{u^2+1}\, du = \int \frac{2}{2u - u^2 + 1}\, du =$$

$$= -2 \int \frac{1}{u^2 - 2u - 1}\, du$$

Dengan menggunakan pecahan parsial diperoleh

$$\int \frac{1}{u^2 - 2u - 1}\, du = \int \frac{1}{(u - \sqrt{2} - 1)(u + \sqrt{2} - 1)}\, du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{4}(u - \sqrt{2} - 1)} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}(u + \sqrt{2} - 1)}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \left(\int \frac{1}{u - \sqrt{2} - 1}\, du - \int \frac{1}{u + \sqrt{2} - 1}\, du \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \left(\ln|u - \sqrt{2} - 1| - \ln|u + \sqrt{2} - 1| \right) + C$$

Sehingga dipeorleh

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx = -\frac{2}{\sqrt[3]{4}} \left(\ln|u - \sqrt{2} - 1| - \ln|u + \sqrt{2} - 1| \right) + C$$

$$= \frac{\ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} - 1\right|\right) - \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{2} - 1\right|\right)}{\sqrt{2}} + C$$

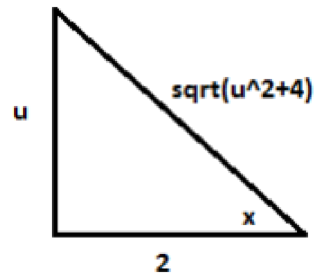
29. **(ETS 2016)**Dengan menggunakan subtitusi $u = 2\tan x$, selesaikan integral berikut :

$$\int \frac{1}{4\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx$$

Pembahasan :

Misalkan $u = 2\tan x \;\Rightarrow du = 2\sec^2 x\, dx \Rightarrow \tan x = \dfrac{u}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}\cos^2 x\, du$

Dengan menggunakan bantuan segitiga siku-siku



diperoleh

$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}, \qquad \cos x = \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}$$

dengan demikian

$$\sin^2 x = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right) = \frac{u^2}{u^2+4}$$
$$\cos^2 x = \left(\frac{2}{u^2+4}\right)\left(\frac{2}{u^2+4}\right) = \frac{4}{u^2+4}$$

Sehingga subitusikan ke integral pada soal

$$\int \frac{1}{4\sin^2 x+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{u^2}{u^2+4}\right)+\left(\frac{4}{u^2+4}\right)}\frac{1}{2}\frac{4}{u^2+4}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{4}{u^2+4}}{4\left(\frac{u^2+1}{u^2+4}\right)}\,du$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\int \frac{4}{u^2+4}\times\frac{u^2+4}{4(u^2+1)}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2} = \arctan\left(2\tan x\right) + C$$

Jadi

$$\int \frac{1}{4\sin^2 x+\cos^2 x}\,dx = \arctan\left(2\tan x\right) + C$$

30. Selesaikan integral dibawah ini

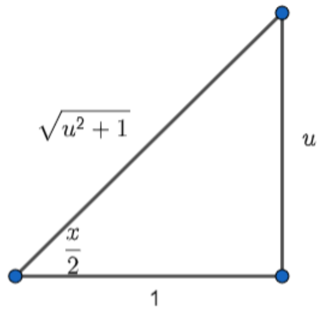
$$\int \frac{1}{\sin x+\cos x+1}\,dx$$

Pembahasan :

Misalkan

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow\ du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx \Rightarrow\ dx = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)du$$

Dengan menggunakan bantuan segitiga siku-siku diperoleh



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}, \quad \text{dan} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

akibatnya

$$dx = 2\cos^2 x\, du = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 du = \frac{2}{u^2+1}\, du$$

$$\sin x = 2\sin x \cos x = 2\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) = \frac{2u}{u^2+1}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Maka dengan menggunakan metode subtitusi

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2u}{u^2+1}\right) + \left(\frac{1-u^2}{u^2+1}\right) + 1} \frac{2}{u^2+1}\, du$$

$$= \int \frac{u^2+1}{2u+1-u^2+u^2+1} \times \frac{2}{u^2+1}\, du = \int \frac{2}{2u+2}\, du = \int \frac{1}{u+1}\, du = \ln|u+1| + C$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx = \ln|u+1| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + C$$

Jadi

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + C$$

31. Selesaikan

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 2\sin x - 8}\, dx = \cdots$$

Pembahasan :

Misalkan $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$, sehingga diperoleh

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 2\sin x - 8}\, dx = \int \frac{1}{u^2 - 2u - 8}\, du = \int \frac{1}{(u+2)(u-4)}\, du$$

Dengan menggunakan metode integral pecahan parsial.

$$\frac{1}{(u+2)(u-4)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u-4} = \frac{A(u-4)+B(u+2)}{(u+2)(u-4)}$$

Perhatikan bahwa $1 = A(u-4) + B(u+2)$

- untuk $u = -2$ diperoleh $1 = A(-6) \Rightarrow A = -\dfrac{1}{6}$
- untuk $u = 4$ diperoleh $1 = B(6) \Rightarrow B = \dfrac{1}{6}$

dengan demikian diperoleh

$$\int \frac{1}{(u+2)(u-4)}\,du = \int -\frac{1}{6(u+2)} + \frac{1}{6(u-4)}\,du = \frac{-\ln|u+2| + \ln|u-4|}{6} + C$$

Sehinggan diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 2\sin x - 8}\,dx &= \frac{-\ln|\sin x + 2| + \ln|\sin x - 4|}{6} + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sin x - 4}{\sin x + 2}\right| + C \end{aligned}$$

32. Hitunglah

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1}\,dx = \cdots$$

Pembahasan :
Misalkan $u = \mathrm{e}^x \Rightarrow du = \mathrm{e}^x\,dx$, diperoleh

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+2u+1}\,du = \int \frac{1}{(u+1)^2}\,du = -\frac{1}{u+2} + C$$

kembalikan kepemisalan awal didapat

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1}\,dx = -\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} + C$$

33. Hitunglah

$$\int t\tan^{-1} t\,dt = \cdots$$

Pembahasan :
Dengan menggunakan integral parsial. Misalkan $u = \tan^{-1} x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+t^2}dt$ dan

$dv = t dt \Rightarrow v = \int t\, dt = \frac{1}{2}t^2$. Diperoleh

$$\int t\tan^{-1} t\, dt = \frac{t^2\tan^{-1} t}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \frac{t^2\tan^{-1} t}{2} - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \frac{t^2\tan^{-1} t}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \tan^{-1} t\right) + C = \frac{(t^2+1)\tan^{-1} t}{2} - \frac{t}{2} + C$$

34. Hitunglah

$$\int t^2 \ln t\, dt = \cdots$$

Pembahasan :

Dengan teknik integral parsial. Misalkan $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt$ dan $dv = t^2 dt \Rightarrow v = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3$. Sehingga didapat

$$\int t^2 \ln t\, dt = \frac{t^3\ln t}{3} - \frac{1}{3}\int t^3 \cdot \frac{1}{t}\, dt = \frac{t^3\ln t}{3} - \frac{1}{3}\int t^2\, dt = \frac{t^3\ln t}{3} - \frac{t^3}{9} + C$$

$$= \frac{t^3(3\ln t - 1)}{9} + C$$

35. Hitunglah

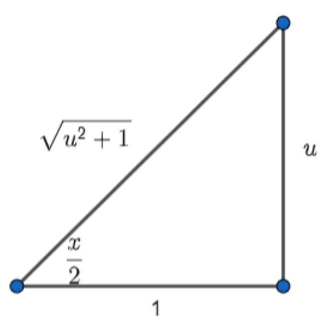
$$\int \frac{1}{2 - \sin x}\, dx = \cdots$$

Pembahasan :

Misalkan

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow\ du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\, dx \Rightarrow\ dx = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) du$$

Dengan menggunakan bantuan segitiga siku-siku diperoleh



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}, \quad \text{dan} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

akibatnya

$$dx = 2\cos^2 x\, du = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 du = \frac{2}{u^2+1}\, du$$

$$\sin x = 2\sin x \cos x = 2\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) = \frac{2u}{u^2+1}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Maka dengan menggunakan metode subtitusi

$$\int \frac{1}{2-\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2-\dfrac{2u}{u^2+1}} \cdot \frac{2}{u^2+1}\, du = \int \frac{1}{u^2-u+1}\, du$$

Dengan menggunakan metode pelengkap kuadrat sempurna didapat

$$\int \frac{1}{u^2-u+1}\, du = \int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, du = \int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\, du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

36. Hitunglah

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \cdots$$

Pembahasan:
Misalkan $u = e^x \Rightarrow du = e^x\, dx$. Sehingga diperoleh

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{1}{u^2+1}\, du$$

Perhatikan bahwa

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2+a^2}\, du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C}$$

Sehingga diperoleh

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C.$$

37. Hitunglah
$$\int \frac{6x^2+22x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \cdots$$

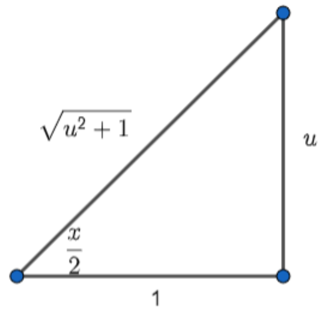
Pembahasan :
Dengan menggunakan teknik integral pecahan parsial
$$\int \frac{6x^2+22x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}\,dx$$
$$= \int \frac{A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$$
Sehingga diperoleh $6x^2+22x+18 = A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)$

- untuk $x=-1$ diperoleh $6(-1)^2+22(-1)+18 = A(-1+2)(-1+3) \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A=1$
- untuk $x=-2$ diperoleh $6(-2)^2+22(-2)+18 = B(-2+1)(-2+3) \Rightarrow -2 = -B \Rightarrow B=2$
- untuk $x=-3$ diperoleh $6(-3)^2+22(-3)+18 = C(-3+1)(-3+2) \Rightarrow 6 = 2C \Rightarrow C=3$

Sehingga didapat
$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2+22x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx &= \int \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\,dx \\ &= \ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x+3|+C \\ &= \ln|(x+1)(x+2)^2(x+3^2)|+C\end{aligned}$$

38. Hitunglah
$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \cdots$$

Pembahasan :
Misalkan
$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow\ du=\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx \Rightarrow\ dx = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)du$$
Dengan menggunakan bantuan segitiga siku-siku diperoleh



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}, \quad \text{dan} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

akibatnya

$$dx = 2\cos^2 x\, du = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 du = \frac{2}{u^2+1}\, du$$

$$\sin x = 2\sin x \cos x = 2\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) = \frac{2u}{u^2+1}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Maka dengan menggunakan metode subtitusi

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\, dx = \int \frac{1}{1+\dfrac{1-u^2}{u^2+1}} \cdot \frac{2}{u^2+1}\, du = \int du = u + C = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

39. Hitunglah

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\, dx = \cdots$$

Pembahasan :

Misalkan $u = \mathrm{e}^x \Rightarrow du = \mathrm{e}^x\, dx$, sehingga

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

Misalkan $u = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cos\theta\, d\theta = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}(\mathrm{e}^x) + C$$

40. Hitunglah

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx = \cdots$$

Pembahasan :
Misalkan $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$. Sehingga didapat

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\tan^2\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

Misalkan $a = \sin\theta$ maka $da = \cos\theta\, d\theta$, diperoleh

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{a^2}\,da = -\frac{1}{a} + C = -\frac{1}{\sin\theta} + C = -\frac{1}{\sin(\arctan x)} + C$$

Alternatif bentuk lain :
Karena $\tan\theta = a$ maka $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Sehingga diperoleh

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx = -\frac{1}{\sin\theta} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

41. **(ETS 2021)**Dengan subtitusi trigonometri selesaikan $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-\ln^2 x}}{x}\,dx = \cdots$

Pembahasan :
Misalkan $u = \ln x$, diperoleh $du = \dfrac{1}{x}dx$. Sehingga integral yang baru menjadi

$$\int \frac{\sqrt{1-\ln^2 x}}{x}\,dx = \int \sqrt{1-u^2}\,du$$

Misalkan $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t\, dt$ sehingga didapat

$$\int \sqrt{1-u^2}\,du = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C$$

Kembalikan ke pemisalan awal

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-\ln^2 x}}{x}\,dx &= \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C \\ &= \frac{1}{4}\sin(2\sin^{-1}(\ln x)) + \frac{1}{2}\sin^{-1}(\ln x) + C\end{aligned}$$

Alternatif bentuk lain :

Karena $\sin t = u$ maka $\cos t = \sqrt{1-u^2}$ sehingga didapat

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2u\sqrt{1-u^2} = 2\ln x\sqrt{1-\ln^2 x}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-\ln^2 x}}{x}\,dx &= \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C \\ &= \frac{\ln x\sqrt{1-\ln^2 x} + \sin^{-1}(\ln x)}{2} + C\end{aligned}$$

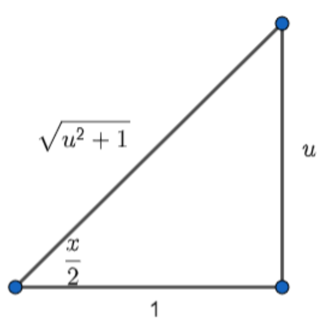
42. hitunglah

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx = \cdots$$

Pembahasan :
Misalkan

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow\ du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx \Rightarrow\ dx = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)du$$

Dengan menggunakan bantuan segitiga siku-siku diperoleh



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}},\quad \text{dan}\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

akibatnya

$$dx = 2\cos^2 x\,du = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 du = \frac{2}{u^2+1}\,du$$

$$\sin x = 2\sin x\cos x = 2\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) = \frac{2u}{u^2+1}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Maka dengan menggunakan metode subtitusi

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx = -\int \frac{\cos x - 2 + 2}{\cos x - 2}\,dx = -\int\,dx + \int \frac{2}{2-\cos x}\,dx$$

$$= -x + \int \frac{2}{2 - \dfrac{1-u^2}{u^2+1}} \cdot \frac{2}{u^2+1}\,du = -x + 4\int \frac{1}{3u^2+1}\,dx$$

$$= -x + \frac{4\arctan(\sqrt{3}u)}{\sqrt{3}} + C == -x + \frac{4\arctan\left(\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}} + C$$

43. Milai

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x-14}\,dx = \cdots$$

Pemabahasan :

Perhatikan bahwa dengan teknik integral pecahan parsial

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-5x-14}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+2)(x-7)} &= \int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7}\,dx \\ &= \int \frac{A(x-7)+B(x+2)}{(x+2)(x-7)}\,dx\end{aligned}$$

sehingga didapat $x+1 = A(x-7) + B(x+2)$

- untuk $x = 7$ didapat $7 + 1 = B(7+2) \Rightarrow B = \dfrac{8}{9}$
- untuk $x = -2$ didapat $-2 + 1 = A(-2-7) \Rightarrow A = \dfrac{1}{9}$

dengan demikian diperoleh

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x-14}\,dx = \int \frac{1}{9(x+2)} + \frac{8}{9(x-7)}\,dx = \frac{\ln|x+2| + 8\ln|x-7|}{9} + C$$

44. Selesaikan

$$\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 22x + 18}{x^2+5x+6}\,dx$$

Pembahasan :

Perhatikan karena derajat pembilang lebih besar dari derajat penyebut, dengan pembagian susun diperoleh

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad +1 \\
\hline
x^2+5x+6 & 2x^3+11x^2+22x+18 \\
 & -2x^3-10x^2-12x \\
\hline
 & \qquad x^2+10x+18 \\
 & \qquad -x^2 \quad -5x \quad -6 \\
\hline
 & \qquad\qquad 5x+12
\end{array}
$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{2x^3+11x^2+22x+18}{x^2+5x+6} = 2x+1+\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = 2x+1+\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}$$

Demikian didapat

$$\int \frac{2x^3+11x^2+22x+18}{x^2+5x+6}\,dx = \int 2x+1+\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}\,dx$$

Dengan menggunakan teknik integral pecahan parsial diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+11x^2+22x+18}{x^2+5x+6}\,dx &= \int 2x+1+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\,dx \\ &= x^2+x+2\ln|x+2|+3\ln|x+3|+C\end{aligned}$$

45. Tentukan nilai dari

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\csc x+\sec x}\,dx = \cdots$$

Pembahasan :
Perhatikan bahwa

$$\frac{\sec x}{\csc x+\sec x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}} = \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$$

Sehingga

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\csc x+\sec x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

Misalkan

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

kemudian misalkan $u = \frac{\pi}{2} - x$ maka $du = -dx$. Ubah batas : jika $x = 0$ diperoleh $u = \frac{\pi}{2}$

dan $x = \dfrac{\pi}{2}$ diperoleh $u = 0$ maka diperoleh integral yang baru

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx &= -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} = I \end{aligned}$$

Oleh karena itu, perhatikan bahwa

$$2I = I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Sehingga

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\csc x + \sec x}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

46. Tentukan Nilai dari

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\, dx$$

Pembahasan :

Misalkan $u = \arctan x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x^2+1}$

$dv = \dfrac{1}{x+1} dx \Rightarrow v = \ln(x+1)$

Maka dengan menggunakan metode integral parsial diperoleh

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\, dx = \arctan x \ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\, dx$$

Maka kita tinggal mencari nilai dari

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\, dx$$

Misalkan $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\ d\theta$ untuk $x = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

untuk $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$

maka dengan menggunakan integral subtitusi

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan\theta+1)}{\tan^2\theta+1}\sec^2\theta\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan\theta+1)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\ d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan\theta+1)\ d\theta$$

inget sifat integral tentu

$$\int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a f(a-x)\ dx$$

Misalkan

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\tan\theta+1\right)\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+1\right)\ d\theta$$

kita tahu bahwa

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

sehingga diperoleh

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+1\right)\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}+1\right)\ d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{1-\tan\theta+1+\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)-\ln(\tan\theta+1)\ d\theta$$

$$I = \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\ln 2}{2}$$

Maka

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\ dx = \frac{\ln 2}{2}$$

Kembali ke persamaan awal

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\ dx = \arctan x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\ dx = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 2}{2} = -\frac{\ln 2}{4}$$

3. Integrasi Numerik dan Integral Tak Wajar

1. **(ETS 2023)** Hitung

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Pembahasan :

Dengan metode pecahan parsial

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

didapat

$$1 = A(x+2) + B(x+1)$$

- untuk $x = -2 \Rightarrow 1 = A((-2)+2) + B((-2)+1) \Rightarrow 1 = B(-1) \Rightarrow B = -1$
- untuk $x = -1 \Rightarrow 1 = A((-1)+2) + B((-1)+1) \Rightarrow 1 = A(1) \Rightarrow A = 1$

Sehingga diperoleh

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln|x+1| - \ln|x+2| \Big|_0^t \right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (\ln|0+1| - \ln|0+2|) - (\ln|t+1| - \ln|t+2|)$$

$$= \ln(2) + \lim_{t\to+\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| = \ln(2) + \ln(1) = \ln(2)$$

jadi integral tak wajar tersebut **konvergen**.

2. (**ETS 2023**) Hitung limit berikut

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\tan\left(\frac{x\pi}{4}\right)$$

Pembahasan :

Dapat dilihat bahwa

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\tan\left(\frac{x\pi}{4}\right) = 0\cdot\infty \quad \text{(bentuk tak tentu)}$$

Sehingga gunakan cara lain untuk mencari limitnya. Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\tan\left(\frac{x\pi}{4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cot\left(\dfrac{x\pi}{4}\right)}=\frac{0}{0}$$

Gunakan dalil L'Hopital, didapat

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cot\left(\dfrac{x\pi}{4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-\dfrac{\pi}{4}\csc^2\left(\dfrac{x\pi}{4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4}{\pi}\cdot\sin^2\left(\frac{x\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}$$

3. **(ETS 2023)**Hitung integral berikut

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{4x^2+9}\,dx$$

Pembahasan :
Misalkan $x=\dfrac{3}{2}\tan\theta\Rightarrow dx=\dfrac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$. Sehingga didapat

$$\int\frac{1}{4x^2+9}dx=\int\frac{1}{4\left(\dfrac{3}{2}\tan\theta\right)^2+9}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta=\int\frac{1}{9\tan^2\theta+9}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\tan^2\theta+1}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\sec^2\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{6}\int d\theta=\frac{\theta}{6}+C=\frac{\arctan\left(\dfrac{2}{3}x\right)}{6}+C$$

Dengan demikian dapat dituliskan

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{4x^2+9}\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{4x^2+9}\,dx$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\Big|_0^t\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2t}{3}\right)\right)-\left(\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2(0)}{3}\right)\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2t}{3}\right)\right)-0=-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)-0=\frac{\pi}{12}$$

jadi integral tak wajar tersebut **konvergen**.

4. **(ETS 2023)** Hitung

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+\cos(\pi x)}\right)$$

Pembahasan :

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+\cos(\pi x)}\right)=\infty-\infty$$

bentuk tersebut merupakan bentuk tak tentu, sehingga diperlukan cara lain untuk menghitung limit pada soal

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+\cos(\pi x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(1+\cos(\pi x))-(x-1)}{(x-1)(1+\cos(\pi x))}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2+\cos(\pi x)-x}{(x-1)(1+\cos(\pi x))}\right)=\frac{0}{0}$$

Gunakan dalil L'Hopital

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2+\cos(\pi x)-x}{(x-1)(1+\cos(\pi x))}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-\pi\sin(\pi x)-1}{(1)(1+\cos(\pi x))+(x-1)(-\pi\sin(\pi x))}\right)=-\frac{1}{0+0}=-\infty$$

5. (**ETS 2020**) Tentukan nilai dari

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx$$

Pembahasan :
Terlebih dahulu mencari penyelesaian integral tak tentu dari bentuk

$$\int \ln(x)\,dx$$

dengan menggunakan metode integral parsial.

$$\boxed{\int u\,dv = uv-\int v\,du}$$

Misalkan $u=\ln(x) \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{x}\,dx$ dan $dv=dx \;\Rightarrow\; v=x$, diperoleh bahwa

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x)-\int dx = x\ln(x)-x+C$$

Karena untuk $x=0$ bentuk $\ln(x)$ tidak terdefinisi, dengan demikian diperoleh

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln(x)\,dx=\lim_{t\to 0^+}\left(x\ln(x)-x\Big|_t^1\right)=\lim_{t\to 0^+}(1\ln(1)-1)-(t\ln(t)-t)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}(0-1)-(t\ln(t)-0)=-1$$

Jadi

$$\int_0^1 \ln(x)\, dx = -1$$

konvergen.

6. **(ETS 2018)** Periksa kekonvergenan dari integral dibawah ini

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\, dx$$

Pembahasan :
Pecah integralnya menjadi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^3\, dx &= \int_{-\infty}^{0} x^3\, dx + \int_{0}^{\infty} x^3\, dx \\ &= \lim_{p\to-\infty}\int_{p}^{0} x^3\, dx + \lim_{p\to\infty}\int_{0}^{p} x^3\, dx\end{aligned}$$

Tinjau

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} x^3\, dx &= \lim_{p\to-\infty}\int_{p}^{0} x^3\, dx \\ &= \lim_{p\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_p^0 \\ &= \lim_{p\to-\infty} -\frac{1}{4}p^4 = -\infty\end{aligned}$$

Karena didapat untuk $\int_{-\infty}^{0} x^3\, dx$ sudah divergen maka dapat disimpulkan $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\, dx$ Divergen

7. Tentukan apakah integral berikut konvergen atau divergen

$$\int_0^3 \frac{1}{x-2}\, dx$$

Pembahasan :
Karena pada batas integral terdapat titik diskontinu yaitu di $x = 2$, maka

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{x-2}\, dx &= \int_0^2 \frac{1}{x-2}\, dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}\, dx \\ &= \lim_{p\to2^-}\int_0^p \frac{1}{x-2}\, dx + \lim_{p\to2^+}\int_p^3 \frac{1}{x-2}\, dx\end{aligned}$$

Tinjau

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx &= \lim_{p\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{x-2}\,dx\\ &= \lim_{p\to 2^-} \ln|x-2|\Big|_0^t\\ &= \lim_{p\to 2^-} \ln|t-2| - \ln 2\\ &= -\infty(\text{ diverge})\end{aligned}$$

Karena $\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx$ sudah divergen, maka $\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx$ pasti divergen.

8. (**ETS 2020**) Selesaikan integral berikut ini:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x+2)^2}\,dx$$

Pembahasan :

Terlebih dahulu menyelesaikan integral tak tentu

$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,dx$$

Misalkan $u = x+2 \;\Rightarrow\; du = dx$, sehingga diperoleh

$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{u-2}{u^2}\,du = \int u^{-1} - 2u^{-2}\,du = \ln|u| + \frac{2}{u} + C$$

jadi

$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,dx = \ln|x+2| + \frac{2}{x+1} + C$$

Sehingga dengan menggunakan batas integrasinya diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x+2)^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{x}{(x+2)^2}\,dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(\ln|x+2| + \frac{2}{x+1}\right)\Big|_t^0\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(\left[\ln|0+2| + \frac{2}{0+1}\right] - \left[\ln|t+2| + \frac{2}{t+1}\right]\right)\\ &= \ln 2 + 2 - \lim_{t\to-\infty}\left[\ln|t+2| + \frac{2}{t+1}\right] = +\infty\end{aligned}$$

sehingga integral tersebut divergen.

9. (**ETS 2019**) Hitunglah dan periksalah kekonvergenan dari integral dibawah ini

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

Pembahasan :
Terlebih dahulu menyelesaikan integral tak tentu

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

misalkan $u = -x^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = -2x \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{2}du = x\,dx$. Sehingga diperoleh

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\, du = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^u + C$$

jadi

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C$$

Sehingga dengan menggunakan batas integrasinya diperoleh

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-t}^{t} = 0$$

sehingga integral tersebut konvergen.

10. Tentukan nilai dari

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \cdots$$

Pembahasan :
Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0\cdot(-\infty) \text{ (bentuk tak tentu)}$$

sehingga diperlukan cara lain untuk mencari nilai limit tersebut. Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

dengan menggunakan dalil L'Hopital diperoleh

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

Jadi

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

11. (**ETS 2022**) Selesaikan limit

$$\lim_{x\to +\infty} (\mathrm{e}^x + x)^{5/x}$$

Pembahasan:

Pehatikan bahwa dengan subtitusi

$$\lim_{x\to +\infty} (\mathrm{e}^x + x)^{5/x} = (+\infty)^0$$

merupakan bentuk tak-tentu. Oleh karena itu dilakukan cara lain. Misalkan

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to +\infty} (\mathrm{e}^x + x)^{5/x} \\ \ln y &= \ln\left(\lim_{x\to +\infty} (\mathrm{e}^x + x)^{5/x}\right) \\ \ln y &= \lim_{x\to +\infty} \ln(\mathrm{e}^x + x)^{5/x} \\ \ln y &= \lim_{x\to +\infty} \frac{5\ln(\mathrm{e}^x + x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

Terdapat bentuk tak tentu, gunakan dalil L'Hopital untuk menyelesaikan limit tersebut.

$$\begin{aligned} \ln y &= \lim_{x\to +\infty} \frac{5\ln(\mathrm{e}^x + x)}{x} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{5(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x + x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x + x} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

masih dalam bentuk tak tentu, gunakan dalil L'Hopital untuk menyelesaikan limit tersebut.

$$\begin{aligned} \ln y &= \lim_{x\to +\infty} \frac{5(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x + x} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{5(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{5(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x} = 5 \end{aligned}$$

Karena untuk $\ln(y) \to 5$ untuk $x \to +\infty$, hal tersebut ekivalen dengan $y \to \mathrm{e}^5$ untuk $x \to +\infty$. Sehingga diperoleh nilai limit

$$\lim_{x\to +\infty} (\mathrm{e}^x + x)^{5/x} = \mathrm{e}^5$$

12. Hitunglah nilai limit berikut

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \cdots$$

Pembahasan:

Misalkan $y = \lim_{x\to 0^+} x^x$, karena fungsi logaritma natural kontinu pada $(0, +\infty)$ dengan demikian didapat

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to 0^+} x^x \\ \Leftrightarrow \quad \ln(y) &= \ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) \\ \Leftrightarrow \quad \ln(y) &= \lim_{x\to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0\cdot\infty \end{aligned}$$

Bentuk tersebut adalah bentuk tak tentu. Agar limit dapat diselesaikan ubah dalam betuk bentuk limit yang dapat diselesaikan dengan metode **Dalil L'Hopital**

$$\ln(y) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{\infty}{\infty}$$

sehingga limit tersebut dapat diselesaikan dengan metode **Dalil L'Hopital**

$$\ln(y) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Karena untuk $\ln(y) \to 0$ untuk $x \to 0^+$, hal tersebut ekivalen dengan $y \to 1$ untuk $x \to 0^+$. Sehingga diperoleh nilai limit

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

13. Tentukan nilai dari

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{1/x}$$

Pembahasan:

Misalkan $y = \lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{1/x}$, karena fungsi logaritma natural kontinu pada $(0, +\infty)$ dengan demikian didapat

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln\left(\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{1/x}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \ln(y) &= \lim_{x\to\infty} \left(\ln(\ln(x))^{1/x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \end{aligned}$$

Bentuk tersebut adalah bentuk tak tentu. Sehingga bentuk limit tersebut dapat diselesaikan dengan metode **Dalil L'Hopital**

$$\ln(y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{\ln(x)} \cdot \dfrac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} = 0.$$

Karena untuk $\ln(y) \to 0$ untuk $x \to +\infty$, hal tersebut ekivalen dengan $y \to 1$ untuk $x \to +\infty$. Sehingga diperoleh nilai limit

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{1/x} = 1$$

14. Dapatkan nilai dari

$$\lim \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

Pembahasan :

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = 1^{\infty}$$

bentuk diatas merupakan bentuk tak tentu. Gunakan metode lain untuk mencari nilai limit tersebut. Misalkan

$$y = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

Karena fugsi $\ln$ kontinu pada $(0, +\infty)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \ln y &= \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \ln y &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}\right) = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Karena masih bentuk tak tentu maka gunakan dalil L'Hopital

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{\sin x}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)}{\sin x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}\right) = \frac{0}{0}$$

masih dalam bentuk tak tentu, gunakan kembali dalil L'Hopital

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin^2 x + x\sin 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\sin x}{\sin^2 + x\sin 2x}\right) = \frac{0}{0}$$

masih dalam bentuk tak tentu, gunakan kembali dalil L'Hopital

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x - x\cos x}{\sin 2x + \sin 2x + 2x\cos 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x - x\cos x}{2\sin 2x + 2x\cos 2x}\right) = \frac{0}{0}$$

masih dalam bentuk tak tentu, gunakan kembali dalil L'Hopital

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x - \cos x + x\sin x}{4\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x}\right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Karena untuk $\ln(y) \to -\frac{1}{3}$ untuk $x \to 0$, hal tersebut ekivalen dengan $y \to \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$ untuk $x \to 0$. Sehingga diperoleh nilai limit

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

15. Carilah nilai dari

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{3}{\ln x}} = 0^0$$

bentuk diatas merupakan bentuk tak tentu, maka gunakan metode lain untuk mencari limitnya.

$$
\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}} \\
\Leftrightarrow \ \ln y &= \ln\left(\lim_{t\to 0^+} (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}\right) \\
\Leftrightarrow \ \ln y &= \lim_{x\to 0^+} \left(\ln (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}\right) \\
\Leftrightarrow \ \ln y &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3\ln(\sin x)}{\ln x}\right) \\
\Leftrightarrow \ \ln(y) &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\frac{3\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}\right) \\
\Leftrightarrow \ \ln(y) &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to 0^+}(3\cos x) = 3
\end{aligned}
$$

Gunakan metode L'Hopital untuk mencari limitnya

Karena untuk $\ln(y) \to 3$ untuk $x \to 0^+$, hal tersebut ekivalen dengan $y \to \mathrm{e}^3$ untuk $x \to 0^+$. Sehingga diperoleh nilai limit

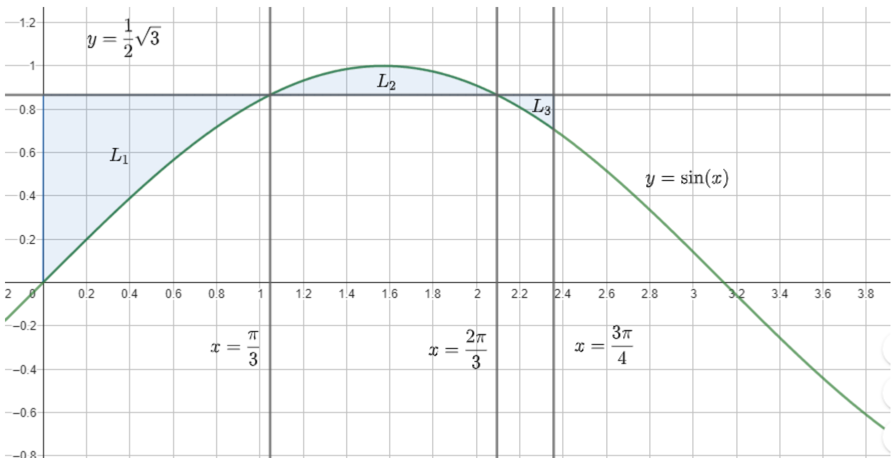
$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}} = \mathrm{e}^3$$

4. Aplikasi Integral Tertentu

1. (**ETS 2023**) Dapatkan luas daerah yang dibatasi ole kurva $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x = 0$, dan $x = \frac{3}{4}\pi$. Sketsa grafiknya.

   Pembahasan :

   Perhatikan sketsa kurva pada soal



   Berdasarkan gambar untuk mencari luasan yang dibatasi ole kurva $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x = 0$, dan $x = \frac{3}{4}\pi$ perlu dibagi menjadi tiga luasan yaitu L_1, L_2, dan L_3. Selanjutnya mencari titik potong kurva $y = \sin x$ dan $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

   diperoleh $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$. Sehingga masing-masing luas L_1, L_2, dan L_3 adalah

$$L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \sin x \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{3} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3} - 3}{6}$$

$$L_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3} \, dx = -\cos x - \frac{x}{2}\sqrt{3}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{6 - \sqrt{3}\,\pi}{6}$$

$$L_3 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \sin x \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{3} + \cos x \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi - 12\sqrt{2} + 12}{24}$$

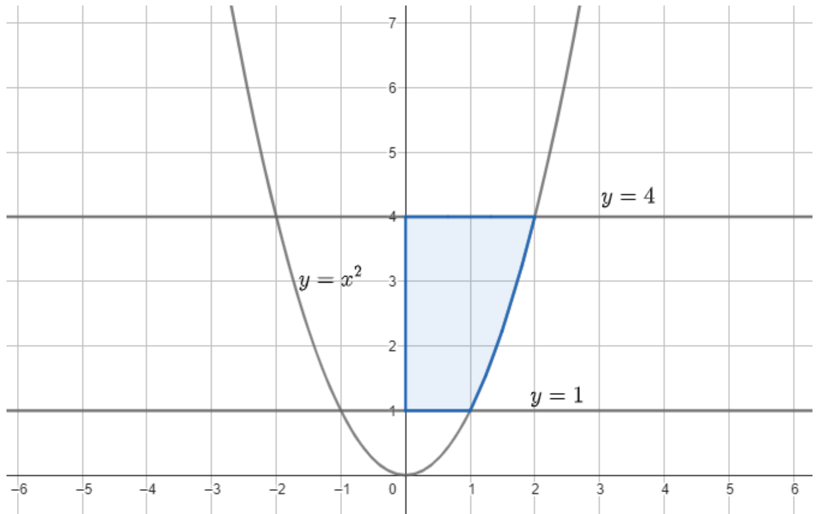
   Sehingga luas total daerah yang dibatasi oleh dua kurva tersebut adalah

$$L = \frac{\pi\sqrt{3} - 3}{6} + \frac{6 - \sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}\,\pi - 12\sqrt{2} + 12}{24} = \frac{\sqrt{3}\pi - 12\sqrt{2} + 24}{24} \text{ satuan luas.}$$

2. **(ETS 2023)** Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu-y, garis $y = 1$ dan $y = 4$ pada kuadran I dan sketsa gambarnya.

   Pembahasan :

   Perhatikan sketsa yang dimaksud pada soal



   Berdasarkan gambar diatas, lebih cocok menggunakan integral terhadap variabel y.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

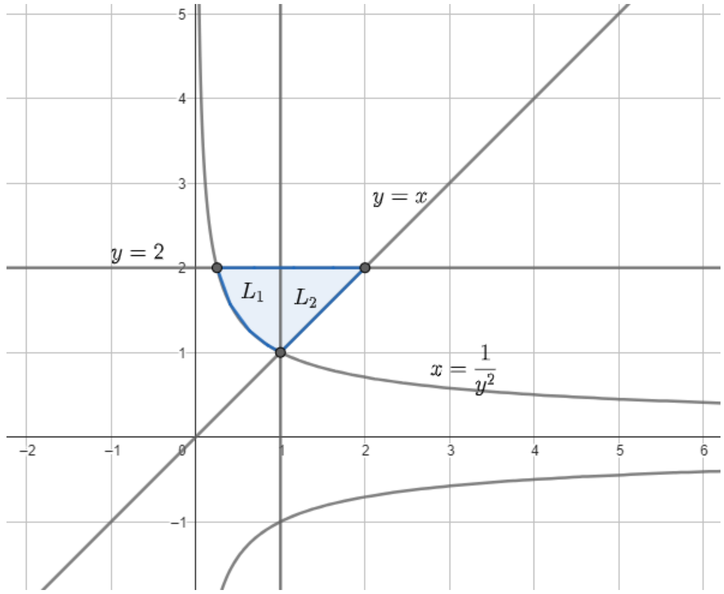
   karena luasan terletak pada kuadran I artinya $x = \sqrt{y}$. Sehingga diperoleh luasan tersebut

$$L = \int_1^4 \sqrt{y}\, dy = \int_1^4 y^{\frac{1}{2}}\, dy = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[8-1] = \frac{14}{3}$$

3. **(ETS 2023)** Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$, $x = \dfrac{1}{y^2}$ dan garis $y = 2$. Sketsa grafiknya.

   Pembahsan:

   Perhatikan sketsa yang dimaksud pada soal



Berdasarkan gambar untuk mencari luasan yang dibatasi ole kurva $x = \frac{1}{y}$, $x = 0$, $y = 1$ dan garis $y = \mathrm{e}$. perlu dibagi menjadi tiga luasan yaitu L_1 dan L_2. Selanjutnya mencari titik potong kurva.

- titik potong kurva $y = 2$ dengan $x = \dfrac{1}{y^2}$

$$x = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

- titik potong kurva $y = 2$ dengan $x = y$ adalah $x = 2$.
- titik potong kurva $x = \dfrac{1}{y^2}$ dengan $x = y$

$$y = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Sehingga diperoleh

$$L_1 = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 2 - \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) d = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2x - 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}$$

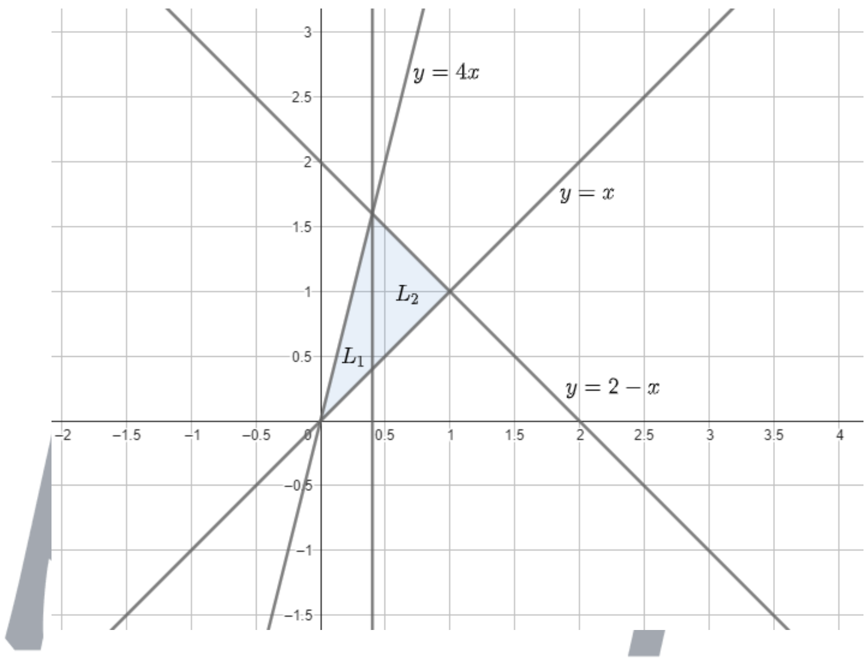
$$= \left(2(1) - 2(1)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(2\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$L_2 = \int_{1}^{2} 2 - x\, dx = 2x - \frac{1}{2}x^2\Big|_{1}^{2} = \left(2(2) - \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(2(1) - \frac{1}{2}(1)^2\right) = \frac{1}{2}$$

Sehingga luas total daerah yang dibatasi oleh dua kurva tersebut adalah

$$L = L_1 + L_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

4. **(ETS 2023)** Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$, $y = 4x$,dan garis $y = 2 - x$. Sketsa grafiknya.
Pembahsan:
Perhatikan sketsa yang dimaksud pada soal



Berdasarkan gambar untuk mencari luasan yang dibatasi ole kurva $x = \frac{1}{y}$, $x = 0$, $y = 1$ dan garis $y = \mathrm{e}$. perlu dibagi menjadi tiga luasan yaitu L_1 dan L_2. Selanjutnya mencari titik potong kurva.

- Titik potong $y = x$ dan $y = 4x$ dan $y = x$ diperoleh $x = 0$ dan $y = 0$.
- Titik potong $y = 4x$ dan $y = 2 - x$ diperoleh

$$4x = 2 - x \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

- Titik potong $y = x$ dan $y = 2 - x$ diperoleh

$$x = 2 - x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Sehingga diperoleh

$$L_1 = \int_0^{\frac{2}{5}} 4x - x\,dx = \int_0^{\frac{2}{5}} 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2\Big|_0^{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 - (0)^2\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{25} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

$$L_2 = \int_{\frac{2}{5}}^{1} (2-x)-(x)\,dx = \int_{\frac{2}{5}}^{1} 2-2x\,dx = 2x-x^2\Big|_{\frac{2}{5}}^{1} = \left((1)-(1)^2\right)-\left(\left(\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}\right)^2\right) = \frac{9}{25}$$

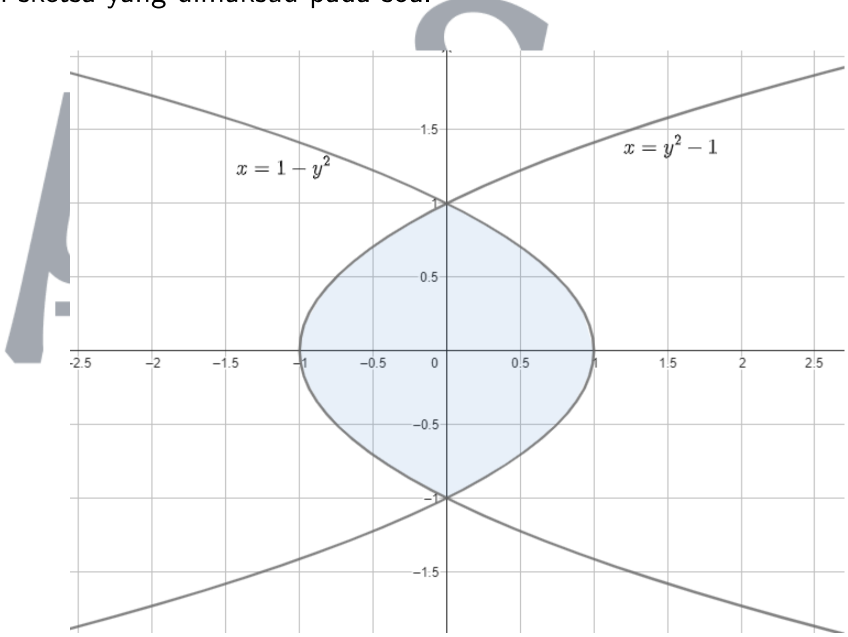
Sehingga luas total daerah yang dibatasi oleh dua kurva tersebut adalah

$$L = L_1 + L_2 = \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

5. **(ETS 2023)** Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2-1$,dan garis $x = 1-y^2$. Sketsa grafiknya.

   Pembahsan:

   Perhatikan sketsa yang dimaksud pada soal



Berdasarkan gambar diatas, lebih cocok menggunakan integral terhadap variabel y. Terlebih dahulu dicari titik potong kedua kurva

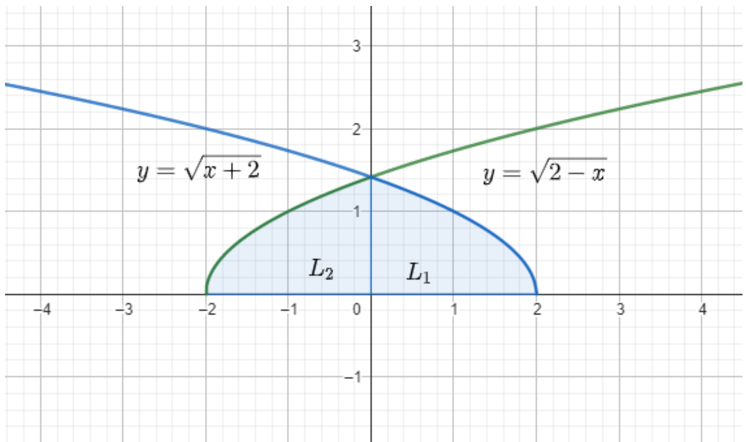
$$1 - y^2 = y^2 - 1 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Sehingga diperoleh

$$\int_{-1}^{1} (1-y^2) - (y^2-1)\,dy = \int_{-1}^{1} 2 - 2y^2\,dy = 2y - \frac{2}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(2(1) - \frac{2}{3}(1)^3\right) - \left(2(-1) - \frac{2}{3}(-1)^3\right) = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

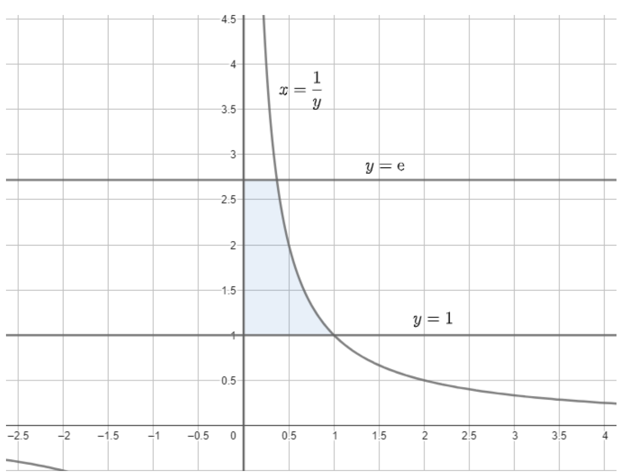
6. (**ETS 2022**) Dapatkan luas daerah yang dibatas oleh kurva $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{2-x}$, dan $y = 0$ dan sketsa daerahnya.
Pembahasan :
Perhatikan sketsa kurva



Perhatikan bahwa daerah yang dihasilkan simetri terhadap sumbu-y. Sehingga $L_1 = L_2$, oleh karena itu diperoleh

$$L = 2L_1 = 2\int_0^2 \sqrt{2-x}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}(2-x)^{3/2}\Big|_0^2\right] = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

7. **(ETS 2023)** Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = \frac{1}{y}$, $x = 0$, $y = 1$ dan garis $y = \mathrm{e}$. Sketsa grafiknya.
Perhatikan sketsa yang dimaksud pada soal



Pembahsan:

Berdasarkan gambar diatas, lebih cocok menggunakan integral terhadap variabel y.

$$L = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{y}\, dy = \ln|y|\Big|_1^{\mathrm{e}} = \ln|\mathrm{e}| - \ln|1| = \ln|\mathrm{e}| = 1.$$

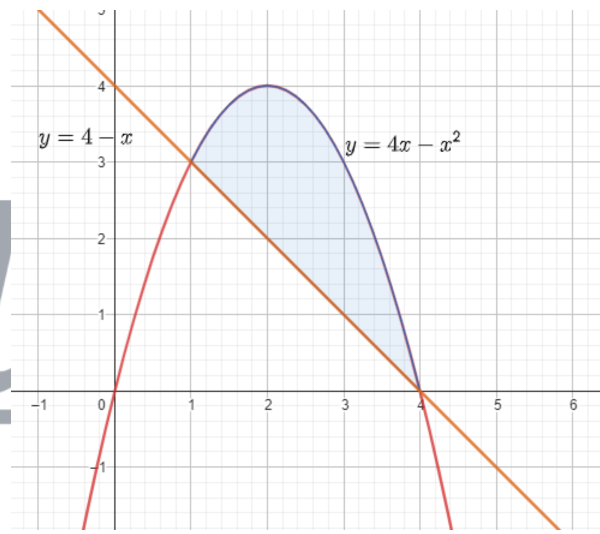
8. (**ETS 2022**) Diberikan daerah yang dibatasi oleh $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$

   (a) Sketsa daerah tersebut

   (b) Dapatkan luas daerah tersebut.

Pembahasan :

(a) Sketsa gambar



(b) Mencari titik potong $y = 4x - x^2$ dan $y = 4 - x$

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= 4 - x \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-1)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

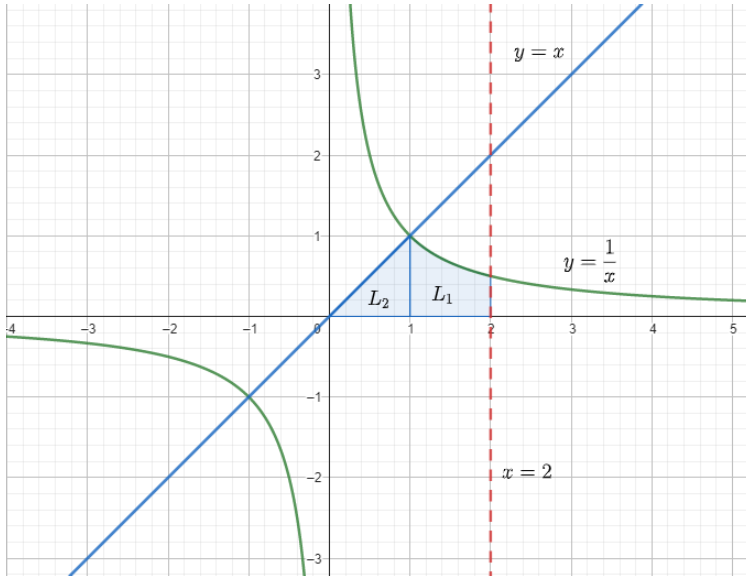
didapat $x = 1$ dan $x = 2$. Sehingga diperoleh

$$L = \int_1^4 (4x - x^2) - (4 - x)\, dx = \int_1^4 -x^2 + 5x - 4\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x\Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

9. (**ETS 2022**)Sketsa gambar yang dibatas oleh $y = x,\ y = \dfrac{1}{x},\ x = 2$, dan $y = 0$

Pembahasan :

Perhatikan sketsa daerah yang dihasilkan



Perhatikan bahwa untuk mencari luas daerah tersebut perlu dibagi menjadi dua daerah seperti pada gambar. Untuk L_1 daerah dibahwa kurva $y = \frac{1}{x}$ dan untuk L_2 kurva dibawah kurva $y = x$. Terlebih dahulu mencari titik potong kurva $y = \frac{1}{x}$ dengan $y = x$ diperoleh $\frac{1}{x} = x \Rightarrow \; x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ Sehingga diperoleh

$$L_1 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|\Big|_1^2 = +\ln(2)$$

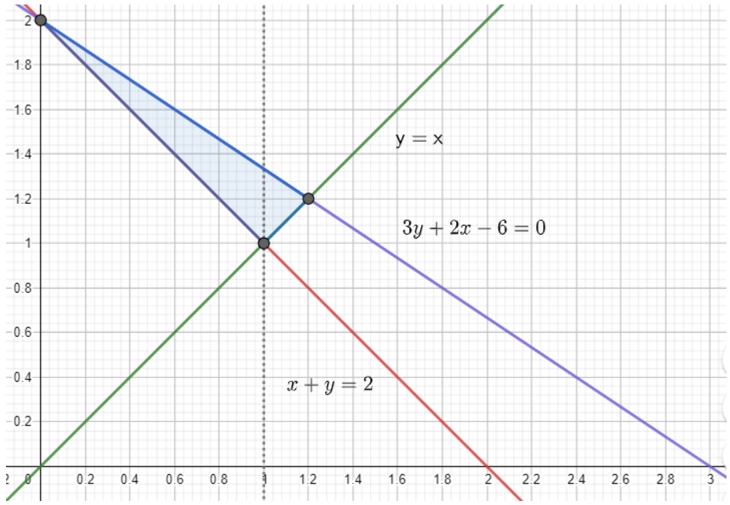
dan

$$L_2 = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Dengan demikian, luas daerah yang dimaksud adalah

$$L_1 + L_2 = \ln(2) + \frac{1}{2}$$

10. (**ETS 2020**)Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$; $x + y = 2$ dan $3y + 2x - 6 = 0$. Lengkapi jawaban dengan sketsa luas bidang tersebut.
Pembahasan :
Perhatikan sketsa dibawah ini



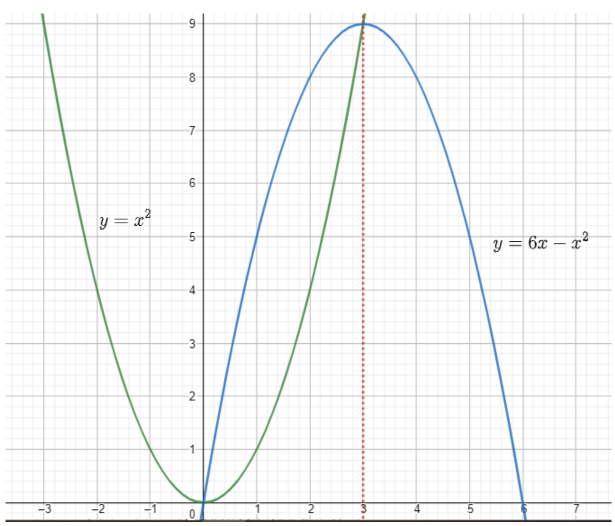
Perhatikan bahwa titik potong kurva $y = x$ dan $x + y = 2$ adalah $(1, 1)$ dan titk potong kurva $y = x$ dan $3y + 2x - 6 = 0$ adalah $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$. Sehingga diperoleh luas daerah dengan menggunakan integral

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \left(\frac{6-2x}{3}\right) - (2-x)\,dx + \int_1^{\frac{6}{5}} \left(\frac{6-2x}{3}\right) - x\,dx \\ &= \left.\frac{x^2}{6}\right|_0^1 + \left.2x - \frac{5x^2}{6}\right|_1^{\frac{6}{5}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

11. **(ETS 2020)** Hitunglah volume benda putar jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 6x - x^2$ diputar mengelilingi garis $x = 3$.

Pembahasan :

Sketsa kurva



Titik potong $y = x^2$ dan $y = 6x - x^2$

$$\begin{aligned} & x^2 = 6x - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 6x = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x(x-3) = 0 \end{aligned}$$

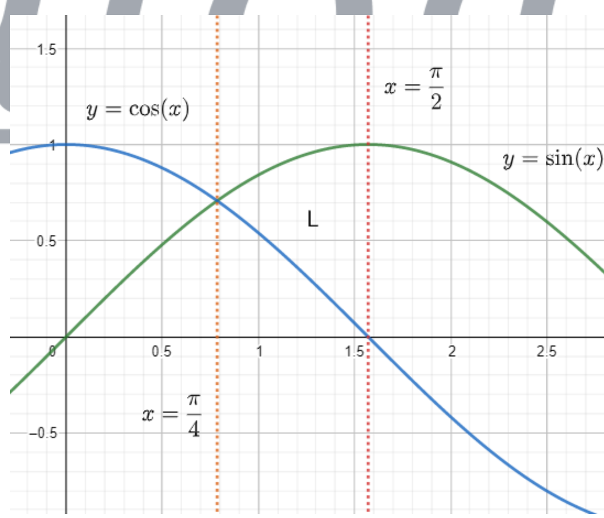
jadi titik potong kurva di $x = 0$ dan $x = 3$. Sehingga dengan metode cinci silinder untuk mencari volume benda diputar terhadap poros $x = 3$ diperoleh

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 (3-x)\left[\left(6x - x^2\right) - \left(x^2\right)\right]\, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 \left(18x - 12x^2 + 2x^3\right)\, dx \\ &= 2\pi \left[9x^2 - 4x^3 + \frac{x^4}{2}\right]_0^3 = 27\pi \end{aligned}$$

12. (**ETS 2019**) Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sin(x),\ y = \cos(x),\ y = \frac{\pi}{2}$ dan sumbu y.

Pembahasan :

Sketsa kurva



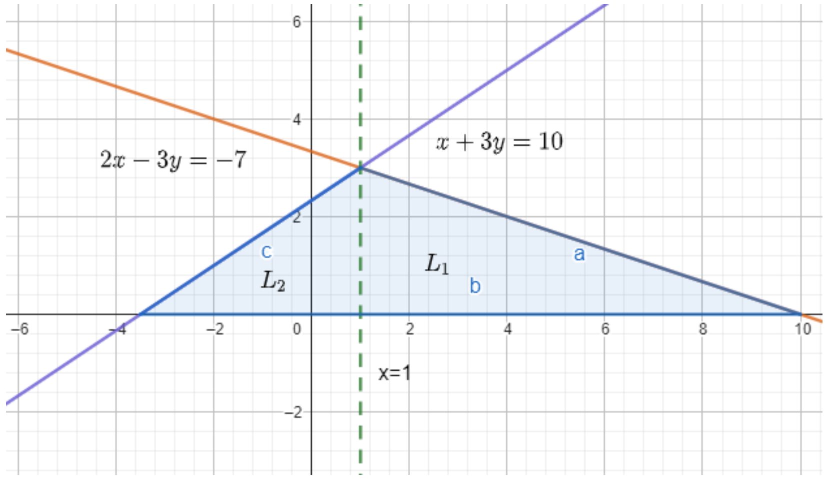
titik potong kurva $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ di kuadran I yaitu $x = \dfrac{\pi}{4}$. Sehingga luas daerah yang diperoleh

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \cos x\, dx = -\cos x - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ satuan luas}$$

13. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $x + 3y = 10$, $2x - 3y = -7$, dan $y = 0$.

Pembahasan:

Sketsa daerah kurva-kurva pada soal.



Perhatikan bahwa untuk menghitung luas daerah kurva harus dibagi menjadi dua daerah yaitu daerah L_1 dan L_2 seperti pada gambar. Perhatikan juga bahwa garis $x+3y = 10$ dan $2x-5y = -7$ mempunyai titik potong di $(1,3)$. Untuk kurva $x+3y = 10 \Rightarrow y = \dfrac{10-x}{3}$ sehingga diperoleh untuk L_1

$$L_1 = \int_1^{10} \frac{10-x}{3}\,dx = \frac{10}{3}x - \frac{1}{6}x^2\Big|_1^{10} = \left(\frac{10}{3}(10) - \frac{1}{6}(10)^2\right) - \left(\frac{10}{3}(1) - \frac{1}{6}(1)^2\right) = \frac{27}{2}.$$

Sedangkan untuk $2x - 3y = -7 \Rightarrow y = \dfrac{2x+7}{3}$ sehingga diperoleh

$$L_2 = \int_{-4}^{1} \frac{2x+7}{3}\,dx = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x\Big|_{-4}^{1} = \left(\frac{1}{3}(1)^2 + \frac{7}{3}(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-4)^2 + \frac{7}{3}(-4)\right) = 70$$

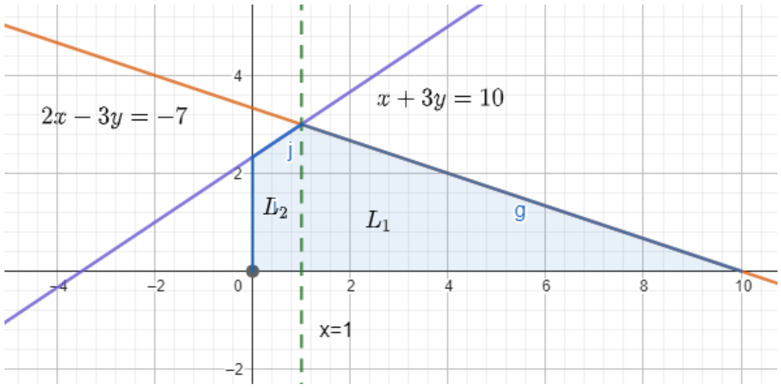
Dengan demikian luas daerah yang dimaksud adalah

$$L_1 + L_2 = \frac{27}{2} + 70 = \frac{167}{2} \text{ satuan luas}$$

14. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $x+3y = 10$, $2x-3y = -7$, dan $y = 0$ di kuadran 1.

Pembahasan:

Sketsa daerah kurva-kurva pada soal.



Perhatikan bahwa untuk menghitung luas daerah kurva harus dibagi menjadi dua daerah yaitu daerah L_1 dan L_2 seperti pada gambar. Perhatikan juga bahwa garis $x+3y=10$ dan $2x-5y=-7$ mempunyai titik potong di $(1,3)$. Untuk kurva $x+3y=10 \Rightarrow y = \dfrac{10-x}{3}$ sehingga diperoleh untuk L_1

$$L_1 = \int_1^{10} \frac{10-x}{3}\,dx = \frac{10}{3}x - \frac{1}{6}x^2\Big|_1^{10} = \left(\frac{10}{3}(10) - \frac{1}{6}(10)^2\right) - \left(\frac{10}{3}(1) - \frac{1}{6}(1)^2\right) = \frac{27}{2}.$$

Sedangkan untuk $2x-3y=-7 \Rightarrow y = \dfrac{2x+7}{3}$ sehingga diperoleh

$$L_2 = \int_0^1 \frac{2x+7}{3}\,dx = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3}(1)^2 + \frac{7}{3}(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^2 + \frac{7}{3}(0)\right) = \frac{8}{3}$$

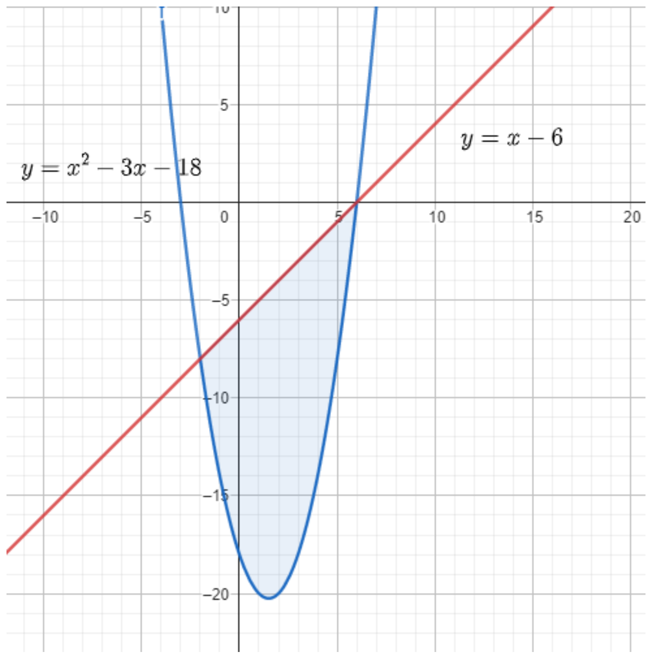
Dengan demikian luas daerah yang dimaksud adalah

$$L_1 + L_2 = \frac{27}{2} + \frac{8}{3} = \frac{97}{6} \text{ satuan luas}$$

15. Tentukan luas daerah kurva yang dibatasi $y = x^2 - 3x - 18$ dan $y = x - 6$.

Pembahasan:

Perhatikan sketsa daerah yang dibatasi kurva



Titik potong kurva $y = x^2 - 3x - 18$ dan $y = x - 6$

$$x^2 - 3x - 18 = x - 6$$
$$\Leftrightarrow \; x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-6) = 0$$

diperoleh $x = -2$ dan $x = 6$. Sehingga luasan daerah yang dimaksud diperoleh

$$L = \int_{-2}^{6} (x-6) - (x^2 - 3x - 18)\, dx = \int_{-2}^{6} -x^2 + 4x + 12\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 12x\Big|_{-2}^{6} = \frac{256}{3}.$$

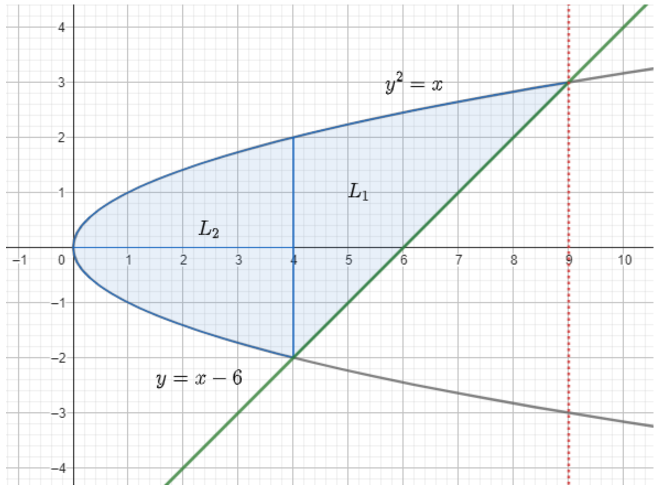
16. Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh $y^2 = x$ dan $y = x - 6$.

    (a) Integral terhadap x

    (b) Intgeral terhadap y

    Pembahasan:

    (a) Perhatikan gambar sketsa daerah yang dibatasi kurva pada soal dengan oritentasi sumbu-x



Perhatikan bahwa untuk menghitung luas daerah kurva harus dibagi menjadi dua daerah yaitu daerah L_1 dan L_2 seperti pada gambar. Perhatikan untuk L_1, pertama mencari titik potong kurva $y^2 = x$ dan $y = x - 6$ didapat

$$\begin{aligned}(x-6)^2 &= x\\ x^2 - 12x + 36 &= x\\ x^2 - 13x + 36 &= 0\\ (x-4)(x-9) &= 0\end{aligned}$$

diperoleh $x = 4$ dan $x = 9$. Sehingga didapat

$$L_1 = \int_4^9 \sqrt{x} - (x-6)\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 6\Big|_4^9 = \frac{61}{6}$$

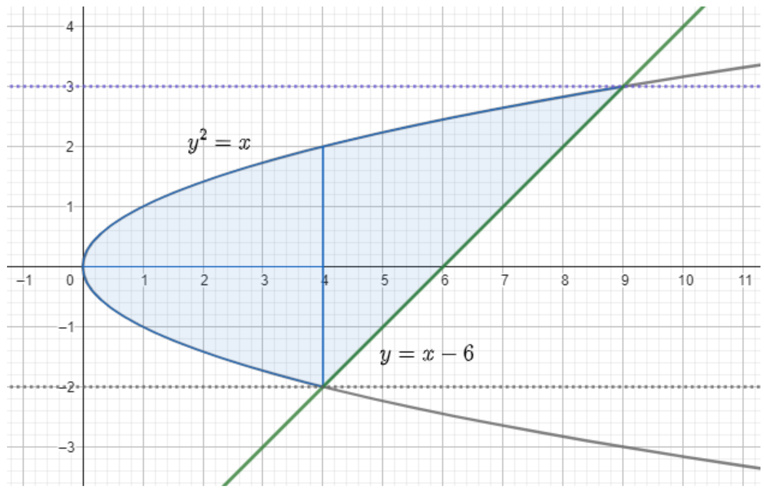
Untuk L_2 dapat dilihat bahwa daerah simetris terhadap sumbu-x, oleh karena itu diperoleh

$$L_2 = 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4\right] = \frac{32}{3}$$

Sehingga luas daerah yang dibatasi kurva $y^2 = x$ dan $y = x - 6$ didapat

$$L_1 + L_2 = \frac{61}{6} + \frac{32}{3} = \frac{125}{6} \text{ satuan luas}$$

(b) Perhatikan gambar sketsa daerah yang dibatasi kurva pada soal dengan orientasi sumbu-y



pertama mencari titik potong kurva $y^2 = x$ dan $y = x - 6$ terhadap variabel y didapat

$$\begin{aligned} y^2 &= y + 6 \\ y^2 - y - 6 &= 0 \\ (y+2)(y-3) &= 0 \end{aligned}$$

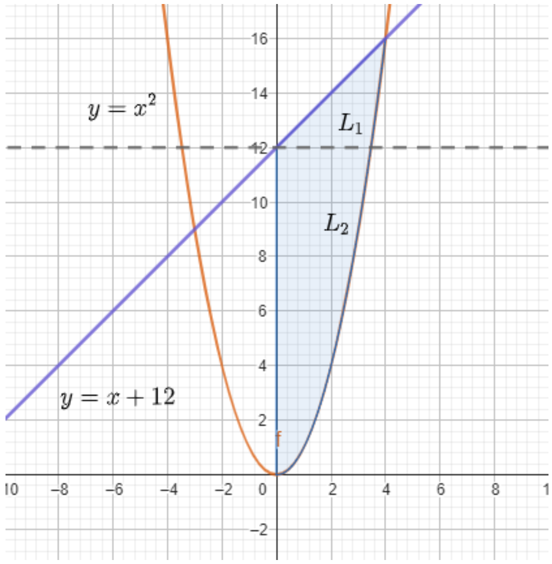
diperoleh $y = -2$ dan $y = 3$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{-2}^{3} y + 6 - y^2 \, dy = \frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-2}^{3} \\ &= \left(\frac{1}{2}(-2)^2 + 6(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 6(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

17. Tentukan luas daerah yang dibatas kurva $y = x^2$ dan $y = x + 12$ pada kuadran I, dengan pengintegralan terhadap variabel y.

    Pembahasan:

    Perhatikan sketsa yang dihasilkan



Perhatikan bahwa untuk menghitung luas daerah kurva harus dibagi menjadi dua daerah yaitu daerah L_1 dan L_2 seperti pada gambar. Terlebih dahulu mencari titik potong kurva terhadap variabel y.

$$\begin{aligned} y &= (y-12)^2 \\ y &= y^2 - 24y + 144 \\ y^2 - 25y + 144 &= 0 \\ (y-16)(y-9) &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh $y = 16$ dan $y = 9$. Dapat dilihat juga bahwa $y = x + 12$ di $y = 12$. Sehingga untuk L_1

$$L_1 = \int_{12}^{16} \sqrt{y} - (y-12)\, dy = \frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2 + 12\Big|_{12}^{16} = \frac{104 - 48\sqrt{3}}{3}$$

Sedangkan untuk L_2

$$L_2 = \int_0^{12} \sqrt{y}\, dy = \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^{12} = 16\sqrt{3}$$

Dengan demikian luas yang diperoleh adalah

$$L_1 + L_2 = \frac{104 - 48\sqrt{3}}{3} + 16\sqrt{3} = \frac{104}{3}$$

18. **(ETS 2018)** Tentukan volume benda yang di batasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 4$, selang $-2 \leq x \leq 2$ dan diputar mengelilingi sumbu X.
Pembahasan :

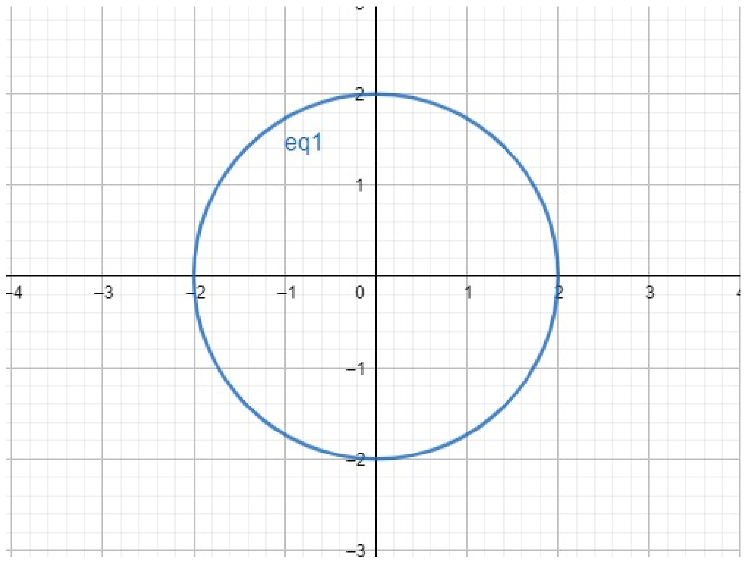


Figure 1: Grafik

Dengan menggunakan metode cakram berorientasi sumbu-y

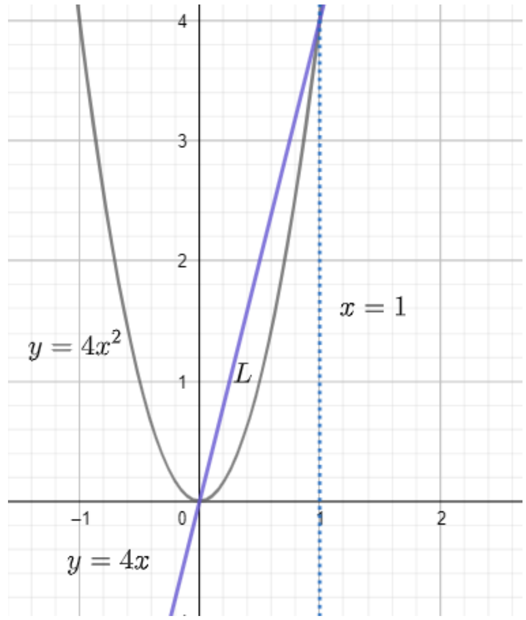
$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b y^2\, dx \\
&= \pi \int_{-2}^{2} 4 - x^2\, dx \\
&= \pi [4x - \frac{1}{3}x^3]_{-2}^{2} \\
&= \pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) \\
&= \pi \left[8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right] \\
&= \frac{32}{3}\pi \text{satuan volume}
\end{aligned}
$$

Jadi volume benda yang di batasi lingkaran pada selang $-2 \leq x \leq 2$ adalah $\frac{32}{3}\pi$ satuan volume.

19. (**ETS 2019**) Dapatkan volume benda padat yang dihasilkan bila daerah yang dibatasi oleh $y = 4x$ dan parabola $y = 4x^2$ diputar terhadap sumbu y.

Pemabahasan :

Perhatikan sketsa kurva



Titik potong $y = 4x^2$ dan $y = 4x$

$$\begin{aligned} & 4x^2 = 4x \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x(x-1) = 0 \end{aligned}$$

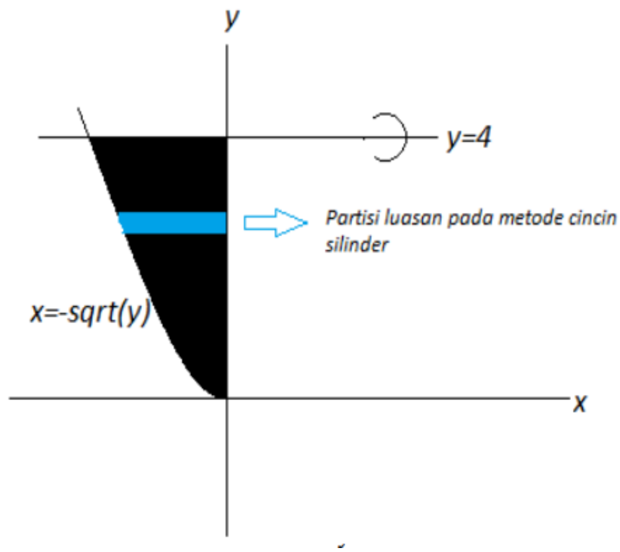
jadi titik potong kurva di $x = 0$ dan $x = 1$. Sehingga dengan metode cinci silinder untuk mencari volume benda diputar terhadap poros sumbu-y diperoleh

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x\left[(4x) - (4x^2)\right]\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(4x^2 - 4x^3\right)\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{4}{3}x^3 - x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

20. **(ETS 2018)** Dapatkan volume benda padat yang dihasilkan bila daerah yang dibatasi oleh $x = -\sqrt{y}$ dan $y = 4$ diputar terhadap garis $y = 4$

Pembahasan :

Sketsa grafik

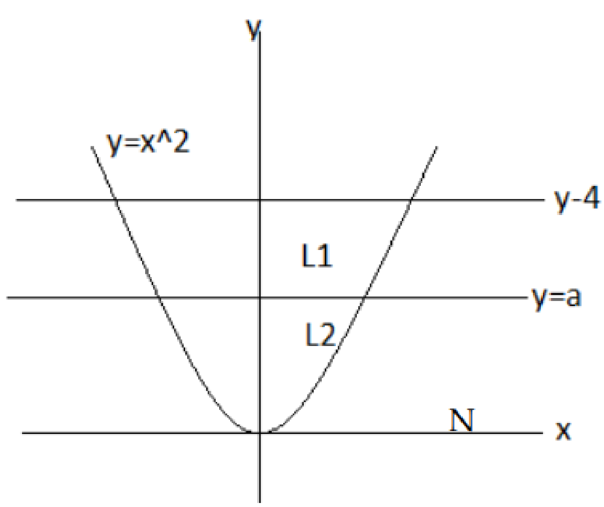


Berdasarkan gambar diatas, gunakan metode cincin cincin silinder berorientasi sumbu y diperoleh volumenya

$$V = \int_0^4 2\pi(4-y)(0-(-\sqrt{y}))\,dy = 2\pi\int_0^4 4\sqrt{y} - y\sqrt{y}\,dy = \frac{256}{15}\pi \text{satuan volume}$$

21. Diberikan daerah S yang dibatasi antara kurva $y = x^2$ dan $y = 4$. Jika daerah tersebut dilintasi suatu garis $y = a$. Tentukan nilai a sedemikian hingga garis $y = a$ membagi daerah S menjadi dua daerah yang memiliki luas yang sama !

Pembahasan : Perhatikan sketsa kurva



Perhatikan gambar disamping garis $y = a$ membagi daerah S menjadi luasan yang sama jika dan hanya jika

$$L_1 = L_2$$

Perhatikan bahwa

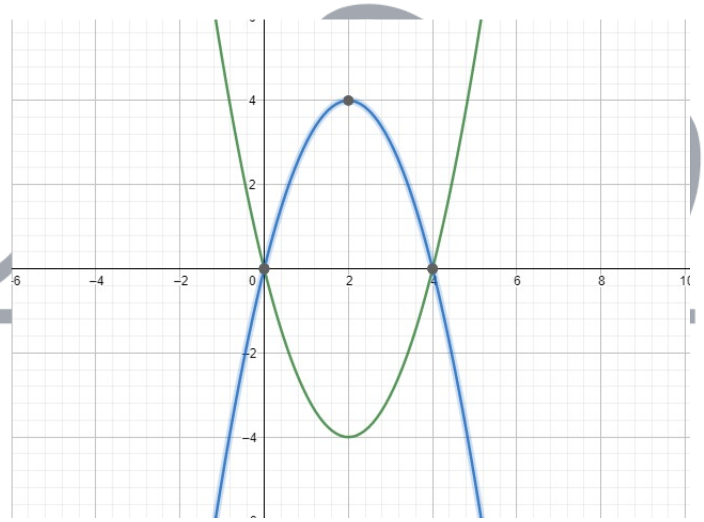
$$L_1 = \int_a^4 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_a^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$$
$$L_2 = \int_0^a \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{16}{3} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow a = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

22. Jika $f(x) = (x-2)^2 - 4$ dan $g(x) = -f(x)$, maka luas daerah yang di batasi kurva f dan g adalah...

Pembahasan :



$$f(x) = g(x)$$
$$(x-2)^2 - 4 = -(x-2)^2 + 4$$
$$x^2 - 4x = -x^2 + 4x$$

Sehingga di dapat $x = 0$, dan $x = 4$

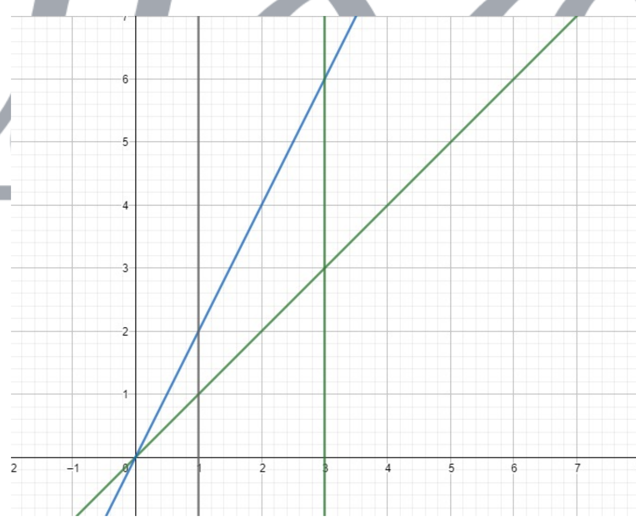
$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^4 g(x) - f(x)\,dx \\
&= \int_0^4 4x - x^2 - x^2 + 4x\,dx \\
&= \int_0^4 8x - 2x^2\,dx \\
&= \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 \\
&= \left(64 - \frac{2}{3}.64\right) - (0-0) \\
&= \frac{64}{3} \text{ satuan luas}
\end{aligned}
$$

Jadi luas daerah yang di batasi kurva f dan g adalah $\frac{64}{3}$ satuan luas

23. **(ETS 2018)** Tentukan volume benda putar yang terbentuk, jika suatu daerah yang di batasi oleh kurva $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$, $x = 3$ di putar mengelilingi sumbu X.

    Pembahasan :

    Berdasarkan soal diperoleh sketsa sebagai berikut



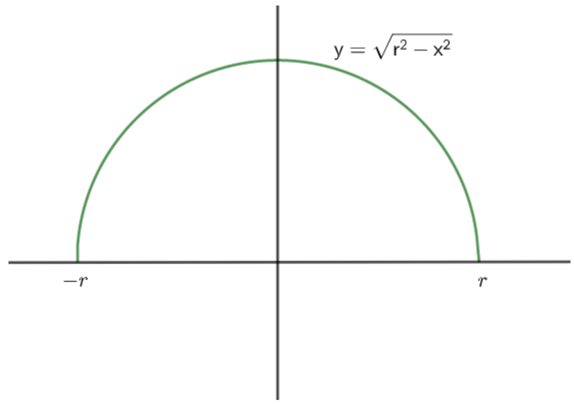
$$
\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi \int_1^3 (f^2(x) - g^2(x))\,dx \\
&= \pi \int_1^3 (2x)^2 - (x)^2\,dx \\
&= \pi \int_1^3 3x^2\,dx \\
&= \pi(27-1) \\
&= 26\pi \text{ satuan volume}
\end{aligned}
$$

Jadi volume benda putar yang terbentuk adalah 26π satuan volume

24. Dengan menggunakan metode cakram tentukan volume sebuah bola dengan jari-jari r

    Pembahasan :

    Misalkan diberikan persamaan suatu lingkaran bagian atas $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dengan sketsa seperti dibawah ini



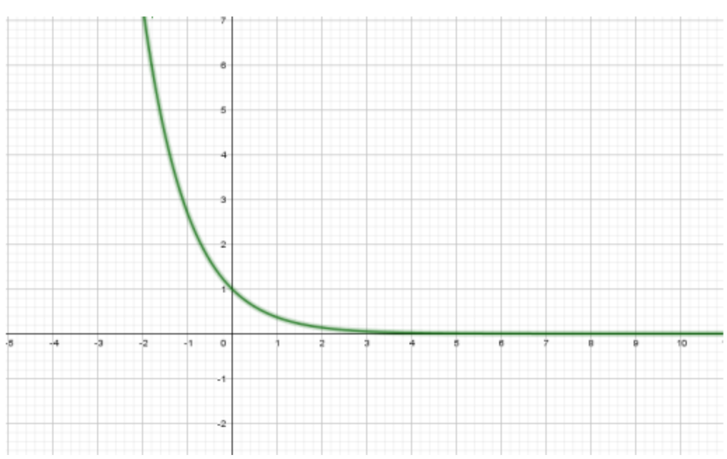
dengan menggunakan metode cakram, diperoleh volume benda putar

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \pi \left[xr^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$
$$= \pi \left[\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right)\right] = \pi \left[2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right] = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{satuan volume}$$

25. Perhatikan derah yang dibatasi sumbu-x dan kurva $y = \mathrm{e}^{-x}$ untuk $x \geq 0$, diputar terhadap sumbu-x. Tentukan volume benda padat yang dihasilkan.

    Pembahasan :

    Perhatikan sketsa $y = \mathrm{e}^{-x}$



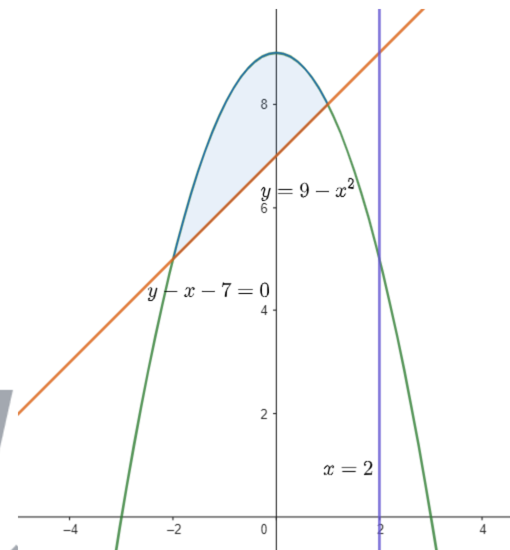
Sehingga berdasarkan gambar diatas, maka luasan dari $y = \mathrm{e}^{-x}$ untuk $x \geq 0$ dan sumbu x

dengan metode cakram diperoleh

$$V = \pi \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \, dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-2x} \, dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \Big|_0^t \right] = \frac{\pi}{2}$$

26. **(EAS 2021)** Dapatkan volume benda putar daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 9 - x^2$ dan $y - x - 7 = 0$ jika diputar terhadap garis $x = 2$.

Pembahasan : Perhatikan sketsa gambar kurva pada soal



Terlebih dahulu mencari titik potong kurva $y = x + 7$ dengan $y = 9 - x^2$

$$\begin{aligned} x + 7 &= 9 - x^2 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x - 1)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

didapat $x = -2$ dan $x = 1$. Jarak sumbu putar $x = 2$ dengan sembarang partisi luas sebesar $(2 - x)$ Dengan menggunakan metode cincin silinder untuk menghitung volume benda putar diperoleh

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{1} 2\pi(2 - x)(9 - x^2 - (x + 7)) \, dx \\ &= \pi \int_{-2}^{1} 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{x^4}{x^2} - \frac{2x^3}{3} - 4x^2 + 8x \right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{45}{2}\pi \text{ satuan volume} \end{aligned}$$

27. **(EAS 2020)** Dapatkan panjang busur kurva $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^{-2}$ dari $x = 2$ dan $x = 4$.
Pembahasan :
Panjang busur kurva $f(x)$ yang kontinu pada interval tertutup $a \leq x \leq b$ dapat dihitung dengan formula berikut

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}\, dx}$$

Pada soal diberikan $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^{-2}$ pada interval $2 \leq x \leq 4$. Perhatikan bahwa

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^{-3}.$$

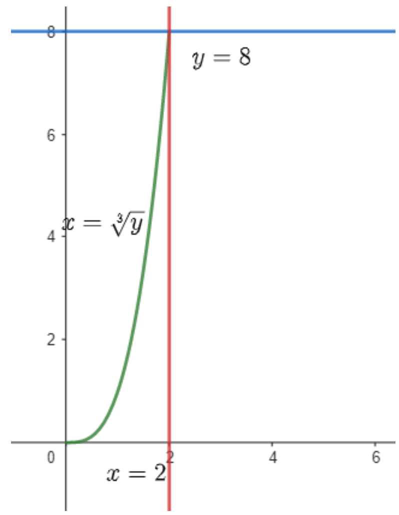
Sehingga panjan kurva $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^{-2}$ pada interval $2 \leq x \leq 4$ adalah

$$\begin{aligned}
S &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^{-3}\right)^2}\, dx \\
&= \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{4x^6} - \frac{1}{2}}\, dx \\
&= \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{4x^6}}\, dx \\
&= \int_2^4 \sqrt{\frac{x^{12} + 2x^6 + 1}{4x^6}}\, dx \\
&= \int_2^4 \sqrt{\frac{(x^6+1)^2}{(2x^3)^2}}\, dx \\
&= \int_2^4 \frac{(x^6+1)}{(2x^3)}\, dx = \int_2^4 \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^{-3}\, dx = \frac{1923}{64} \text{ satuan panjang}
\end{aligned}$$

28. **(EAS 2020)** Dapatkan luas permukaan yang diperoleh dari perputaran kurve $x = \sqrt[3]{y}$, $1 \leq y \leq 8$ diputar terhadap sumbu x.
Pembahasan :
Luas permukaan yang diakibatjab oleh busur kurva $f(x)$ yang kontinu pada interval tertutup $a \leq x \leq b$ dapat dihitung dengan formula berikut

$$\boxed{K = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}\, dx}$$

Perhatikan gambar sketsa kurva pada soal



Karena kurva diputar terhadap sumbu-x maka batas integrasi terhadap variabel x. Untuk nilai $1 \leq y \leq 8$ ekivalen dengan nilai $1 \leq x \leq 2$ terhadap fungsi $x = \sqrt[3]{y}$. Sehingga luas permukaan yang diakibatkan busur $x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = x^3$ (kurva warna hijau) untuk $0 \leq x \leq 2$ diputar terhadap sumbu$-x$ adalah

$$K = \int_1^2 2\pi(x^3)\sqrt{1 + \left(\frac{d[x^3]}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^2 2\pi(x^3)\sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 2\pi(x^3)\sqrt{1 + 9x^4}\,dx$$

Dengan mengggunakan metode integral subtitusi, misalkan $u = 1 + 9x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 36x^3 \Rightarrow \frac{1}{36}du = x^3\,dx$. Ubah batas integrasi, untuk $x = 1 \Rightarrow u = 10$ sedangkan untuk $x = 2 \Rightarrow u = 145$. Sehingga diperoleh integral yang baru yaitu

$$K = \int_{10}^{145} 2\pi\left(\frac{1}{36}\right)\sqrt{u}\,du = \frac{\left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right)\pi}{27} = 2\left(\frac{145^{\frac{3}{2}}}{54} - \frac{5\sqrt{10}}{27}\right)\pi \text{ satuan luas}$$

29. **(EAS 2022)** Dapatkan panjang busur Kurva $24xy = x^4 + 48$ dari $x = 2$ sampai $x = 4$
Pembahasan :
Perhatikan bahwa

$$y = \frac{x^4 + 48}{24x} = \frac{x^3}{24} + \frac{2}{x}$$

Sehingga panjang kurva yang diperoleh

$$S = \int_2^4 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{2}{x^2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{x^4}{64} + \frac{4}{x^4} - \frac{1}{2}}\, dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^4}{64} + \frac{4}{x^4}}\, dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{x^8 + 32x^4 + 256}{64x^4}}\, dx$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{8x^2}\sqrt{x^8 + 32x^4 + 256}\, dx = \int_2^4 \frac{1}{8x^2}\sqrt{(x^4 + 16)^2}\, dx = \int_2^4 \frac{1}{8x^2}\left(x^4 + 16\right)\, dx$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x^2}\, dx = \left(\frac{1}{24}x^3 - \frac{2}{x}\right)\Big|_2^4 = \frac{68}{24} = \frac{17}{6} \text{ satuan panjang}$$

30. **(EAS 2022)** Diberikan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{16 - x^2}$ dan sumbu x

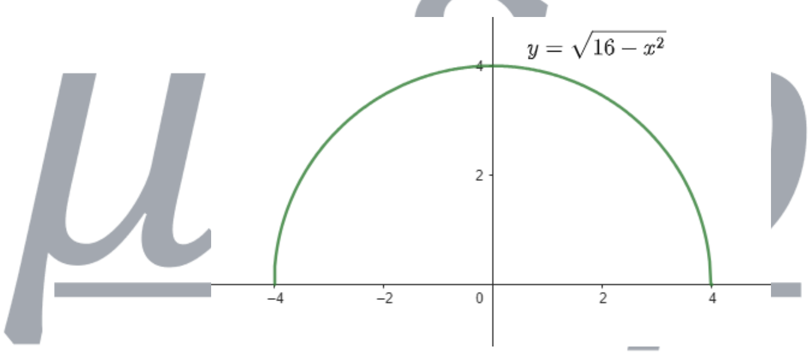
    (a) Sketsa daerah tersebut

    (b) Dapatkan titik berat daerah tersebut

    (c) Dapatkan volume benda putar daerah tersebut jika diputar terhadap garis $y = x - 5$

Pembahasan :

(a) Sketsa grafik merupakan setengan lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ jari-jari 4



(b) Perhatikan bahwa pada sketsa grafik, derah tersebut simetris terhadap sumbu$-y$ sehingga didapat $\bar{x} = 0$. Sehingga cukup mencari $\bar{y}$. Perhatikan bahwa

$$M = \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{1}{2}(2\pi)4 = 8\pi$$

$$M_y = \int_{-4}^4 \frac{1}{2}\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2\, dx = \int_{-4}^4 \frac{1}{2}\left(16 - x^2\right)\, dx$$

$$= \int_{-4}^4 8 - \frac{1}{2}x^2\, dx = 8x - \frac{1}{6}x^3\Big|_{-4}^4 = \frac{128}{3}$$

Sehingga diperoleh $\bar{y} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\frac{128}{3}}{8\pi} = \dfrac{16}{3\pi}$ jadi titik berat daerah tersebut adalah $\left(0, \dfrac{16}{3\pi}\right)$.

(c) Dengan menggunakan dalil Guldin I. Volume putar yang dimaksud diperoleh dengan

$$V = 2\pi \cdot d \cdot L$$

dengan d adalah jarak titik pusat ke garis putar $x - y - 5 = 0$ dan L adalah luasan daerah. Perhatikan bahwa

$$d = \left| \frac{1(0) - 1\left(\frac{16}{3\pi}\right) - 5}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{16 + 15\pi}{3\sqrt{2}\pi}$$

Dengan demikian dengan dalil Guldin I, volume benda putar yang diperoleh

$$V = 2\pi\left(\frac{16 + 15\pi}{3\sqrt{2}\pi}\right)8\pi = \frac{16\pi(16 + 15\pi)}{3\sqrt{2}} \text{ satuan volume}$$

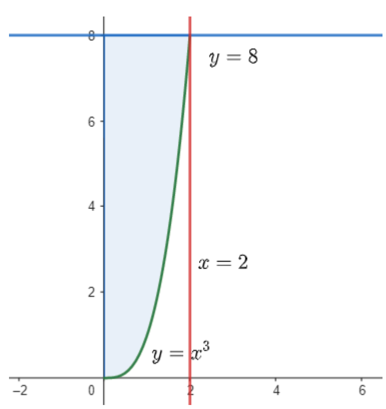
31. **(EAS 2020)** Dapatkan titik berat benda homogen yang dibatasi kurva $y = x^3$, $x = 0$ dan $y = 8$.

Pembahasan :

Titik berat daerah yang dibatas oleh fungsi $f(x)$(fungsi atas) dan $g(x)$(fungsi bawah) pada interval $a \le x \le b$ adalah $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]\, dx}{\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\, dx} \text{ dan } \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\, dx}{\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\, dx}$$

dimana M_y merupakan momen statis terhadap sumbu y dan M_x merupakan momen statis terhadap sumbu x. Perhatikan sketa daerah pada soal



Sehingga diperoleh

$$M = \int_0^2 8 - x^3 \, dx = 8x - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^2 = 12$$

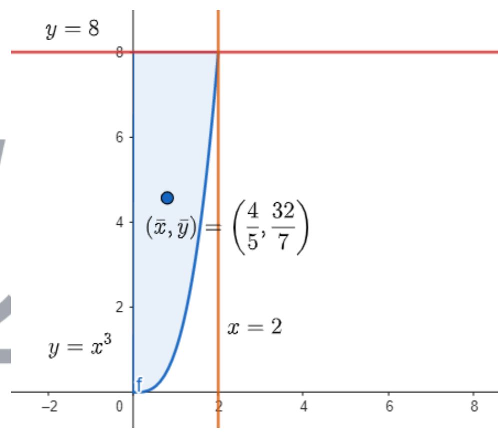
$$M_y = \int_0^2 x(8 - x^3) \, dx = \int_0^2 8x - x^4 \, dx = 4x^2 - \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^2 = \frac{48}{5}$$

$$M_y = \int_0^2 \frac{1}{2}(8^2 - x^6) \, dx = \int_0^2 \frac{1}{2}64 - x^6 \, dx = \frac{1}{2}\left(64x - \frac{1}{7}x^7\right) \Big|_0^2 = \frac{384}{7}$$

Sehingga diperoleh

$$\bar{x} = \frac{\frac{48}{5}}{2} = \frac{4}{5} \text{ dan } \bar{y} = \frac{\frac{384}{7}}{12} = \frac{32}{7}$$

Dengan demikian titk berat daerah didapat $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4}{5}, \frac{32}{7}\right)$. Dapat dilihat pada ilustrasi gambar dibawah ini

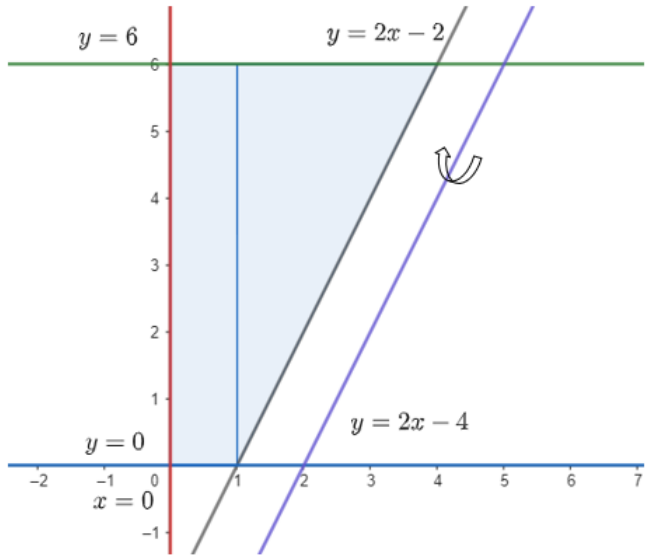


32. **(EAS 2020)** Dengan dalil Guldin dapatkan volume benda putar yang diperoleh dengan perputaran daerah yang dibatasi $y = 2x - 2$, $y = 6$, $y = 0$, dan $x = 0$ diputar terhadap $y = 2x - 4$.

    Pembahasan :

    (Lihat pembahasan tentang dalil Guldin 1 pada bagian akhir bab)

    Perhatikan sketsa gambar pada soal



- Mencari luas daerah

$$L = \int_0^1 6\,dx + \int_1^4 6-(2x-2)\,dx = 6x\Big|_0^1 + 8x - x^2\Big|_1^4 = 6+(32-16)-(8-1) = 15$$

- Mencari titik berat luasan

$$M = \int_0^1 6\,dx + \int_1^4 6-(2x-2)\,dx = 6x\Big|_0^1 + 8x - x^2\Big|_1^4 = 6+(32-16)-(8-1) = 15$$

$$M_y = \int_0^1 6x\,dx + \int_1^4 x(6-(2x-2))\,dx = \int_0^1 6x\,dx + \int_1^4 (8x-2x^2)\,dx = 3+18 = 21$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 6^2\,dx + \frac{1}{2}\int_1^4 (6^2-(2x-2)^2)\,dx = 12+36 = 48$$

Sehingga diperoleh titik berat

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} \text{ dan } \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{48}{15} = \frac{16}{5}$$

Dengan demikian titk berat daerah didapat $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

- Mencari jarak titik pusat ke garis sumbu putar.

Jarak titik $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$ ke $2x - y - 4 = 0$

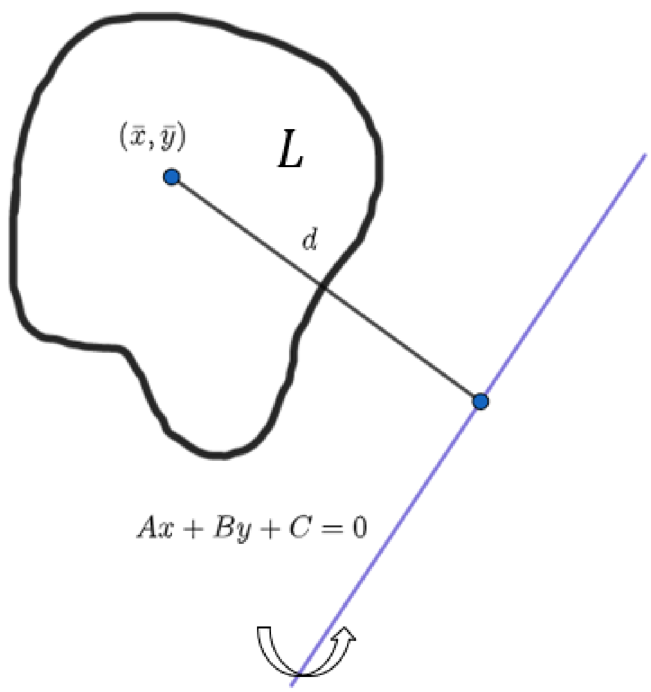
$$d = \left| \frac{2\left(\frac{7}{5}\right) - 1\left(\frac{16}{5}\right) - 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{22\sqrt{5}}{25}$$

Sehingga dengan dalil Guldin 1 diperoleh volume benda putar yang dihasilkan adalah

$$V = 2\pi \cdot d \cdot L = 2\pi \left(\frac{22\sqrt{5}}{25}\right) 15 = \frac{132\sqrt{5}}{5} \text{ satuan volume}$$

DALIL GULDIN 1:

Misalkan diberikan luasan daerah seperti pada gambar dibawah ini



Jika diketahui luas daerah tersebut memiliki luas L, memiliki titik berat luasan di $(\bar{x}, \bar{y})$, dan jarak titik berat tersebut ke suatu garis $Ax + By + C = 0$ adalah d dengan

$$d = \left| \frac{A\bar{x} + B\bar{y} + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

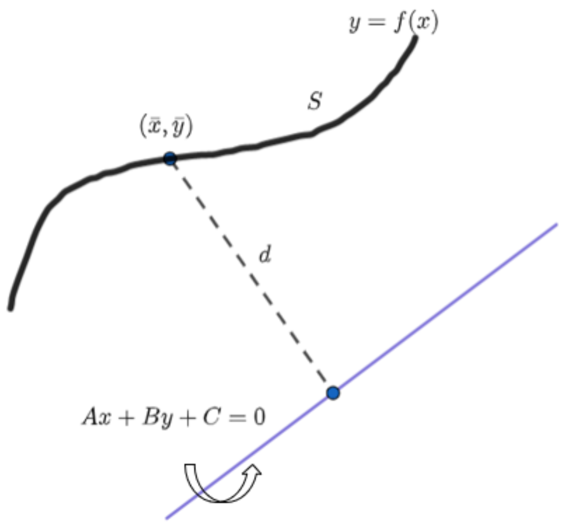
maka menurut dalil **Guldin 1**, volume benda putar yang dihasilkan dari perputaran daerah L

terhadap garis $Ax + By + C = 0$ dapat dihitung dengan

$$V = 2\pi \cdot d \cdot L$$

DALIL GULDIN 2:

Misalkan diberikan suatu panjang busur $f(x)$ pada suatu interval tertentu seperti pada gambar dibawah ini



Jika diketahui panjang busur tersebu adalah S, kemudian memiliki titik berat panjang bususr di $(\bar{x}, \bar{y})$, dan jarak titik berat tersebut ke suatu garis $Ax + By + C = 0$ adalah d dengan

$$d = \left| \frac{A\bar{x} + B\bar{y} + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

maka menurut dalil **Guldin 2**, luas kulit benda putar yang dihasilkan dari perputaran panjang busur S terhadap garis $Ax + By + C = 0$ dapat dihitung dengan

$$V = 2\pi \cdot d \cdot S$$

5. Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

1. **(EAS 2020)** Diberikan pergerakan suatu titik dengan lintasan menurut kurva

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = \sqrt{9 - t^2} \end{cases}$$

mulai $t = -3$ sampai $t = 0$

(a) Tentukan garis singgung pada $t = -1$.

(b) Tentukan panjang kurva tersebut dan sketsa dengan arah lintasannya.

Pembahasan :

(a) Dengan mengubah dari persamaan parametrik menjadi persamaan kartesius diperoleh

$$y = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$$

dengan ketika $t = -3$ samapai $t = 0$ sama halnya dengan $x = 0$ sampai $x = 3$. Dengan demikian kurva seperempat lingkaran diatas sumbu x dengan pusat $(3, 0)$ berjari-jari 3. Ketika $t = -1$ diperoleh $x = 2$ dan $y = 2\sqrt{2}$. Perhatikan turunan pertama dari $y = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$ adalah

$$y' = -\frac{x - 3}{\sqrt{9 - (x - 3)^2}}$$

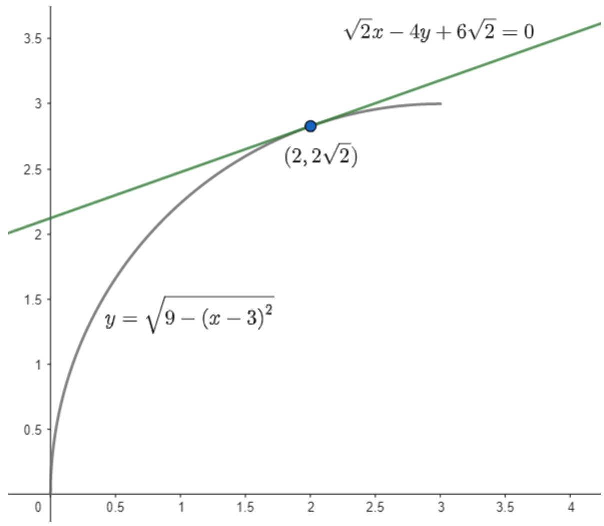
Sehingga gradien garis singgung kurva $y = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$ di titik $(2, 2\sqrt{2})$ adalah

$$m = y'(2) = -\frac{2 - 3}{\sqrt{9 - (2 - 3)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

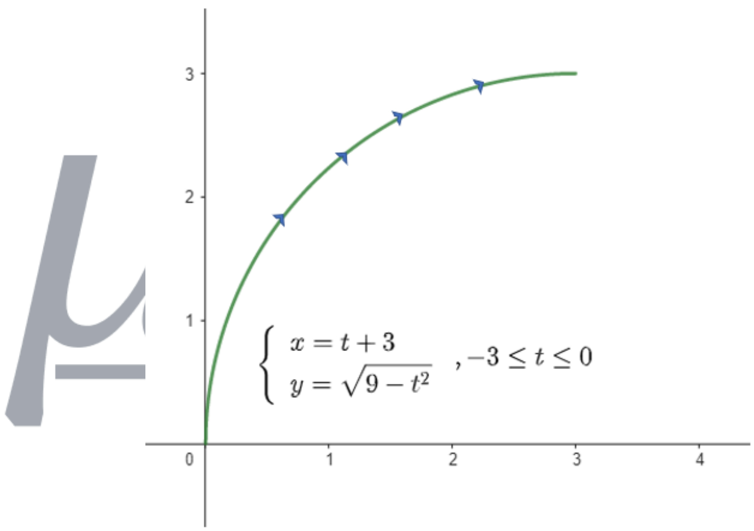
Jadi persamaan garis singgung di titik $(2, 2\sqrt{2})$ dengan gradien $m = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ yaitu

$$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(x - 2) \Leftrightarrow \sqrt{2}x - 4y + 6\sqrt{2} = 0$$

Berikut diberikan sketsa kurva beserta garis singgung di titik $(2, 2\sqrt{2})$



(b) Perhatikan sketsa kurva dibawah ini beserta arah kurva



Dengan panjang kurva

$$S = \int_{-3}^{0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_{-3}^{0} \sqrt{\left(\frac{d[3+t]}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d[\sqrt{9-t^2}]}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{-3}^{0} \sqrt{1 + \left(-\frac{t}{\sqrt{9-t^2}}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_{-3}^{0} \sqrt{1 + \frac{t^2}{9-t^2}}\, dt = \int_{-3}^{0} \frac{3}{\sqrt{9-t^2}}\, dt$$

Dengan subtitusi trigonometri, misalkan $t = 3\sin\theta \Rightarrow dt = 3\cos\theta$. Ubah batas :

$t = -3 \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{2}$ dan $t = 0 \Rightarrow \theta = 0$. Sehingga diperoleh

$$\int_{-3}^{0} \frac{3}{\sqrt{9-t^2}}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{3}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} 3\cos\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 3\,d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Sehingga panjang kurva adalah $\dfrac{3\pi}{2}$ satuan panjang. Sebagai tambahan, berdasarkan sketsa gambar yang menunjukkan seperempat lingkaran maka cara lain mencari panjang kurva dapat memanfaatkan rumus keliling lingkaran.

$$S = \frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 3 = \frac{3\pi}{2} \text{ satuan panjang}$$

2. **(EAS 2020)** Diketahui persamaan parametrik : $x = \sin t,\ y = \sin 2t,\ (0 \le t \le 2\pi)$

   (a) Nyatakan persamaan parametrik diatas ke persamaan dalam koordinat kartesian, beserta domainnya.

   (b) Dapatkan kedua persamaan garis singgung di titik $(0, 0)$

   (c) Sketsa grafik kurva beserta garis singgungnya

Pembahasan :

(a) Diketahui bahwa $\sin t = x$ artinya $\cos t = \pm\sqrt{1-x^2}$ untuk $0 \le t \le 2\pi$. Sehingga didapat

$$y = \sin 2t = 2\sin t\cos t = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

Dengan domain fungsinya adalah

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\ :\ 1 - x^2 \ge 0\} = \{x \in \mathbb{R}\ : -1 \le x \le 1\}$$

(b) Untuk $y = x\sqrt{1-x^2}$ diperoleh turunan pertama

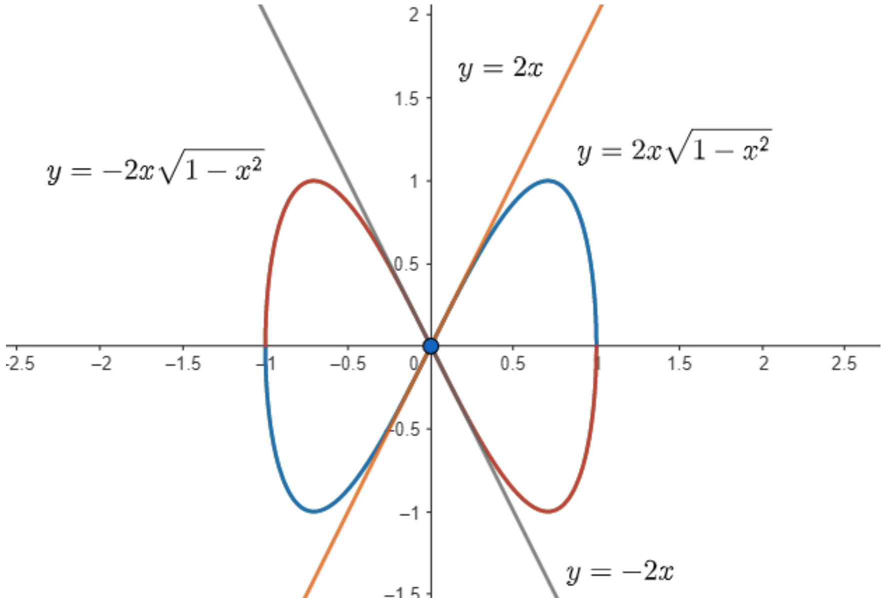
$$y' = 2\sqrt{1-x^2} - 2x\cdot\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{4x^2-2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sehingga gradien garis singgung kurva $y = x\sqrt{1-x^2}$ di titik $(0, 0)$ adalah

$$m = y'(0) = -\frac{4(0)^2-2}{\sqrt{1-(0)^2}} = 2$$

Jadi persamaan garis singgung di titik $(0, 0)$ dengan gradien $m = 2$ yaitu $y = 2x$. Sedangkan untuk $y = -x\sqrt{1-x^2}$ dengan cara yang sama diperoleh gradiennya di titik $(0,0)$ adalah $m = -2$ sehingga persamaan garis singgung di titik $(0,0)$ dengan gradien $m = -2$ adalah $y = -2x$.

(c) Sketsa grafik kurva beserta garis singgungnya



3. **(EAS 2022)** Diberikan partikel bergerak sepanjang kurva

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \sqrt{8 + 2t - t^2} \end{cases}$$

dengan $-2 \le t \le 1$

(a) Nyatakan dalam persamaan kutub $r = f(\theta)$ dengan lintasan θ

(b) Tentukan panjang lintasan kurva tersebut.

(c) Sketsa persamaan kurva tersebut dan arah lintasanya.

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa $x = 1 - t \Rightarrow t = 1 - x$ sehingga

$$y = \sqrt{8 + 2(1-x) - (1-x)^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

Ubah ke dalam koordinat kutub, misalkan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, diperoleh bahwa

$$r\sin\theta = \sqrt{9 - r^2\cos^2\theta} \Rightarrow r^2\sin^2\theta + r^2\sin^2\theta = 9 \Rightarrow r = 3$$

Untuk perubahan batas parameter, untuk nilai $t = -2 \Rightarrow x = r\cos\theta = 3\cos\theta = 1-(-2) \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ sedangkan untuk $t = 1$ $x = r\cos\theta = 3\cos\theta = 1-(1) \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$ Jadi persamaan kutub (r,θ) dari persamaan parametrik pada soal adalah $r = 3$ untuk $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Panjang kurva persamaan kutub $r = f(\theta)$ dengan $a \leq \theta \leq b$ dapat dihitung dengan

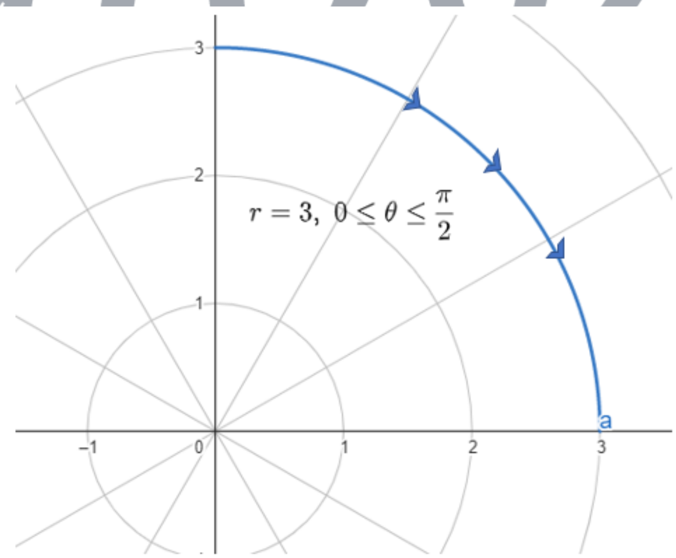
$$S = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Sehingga pada soal panjang busur $r = 3$ untuk $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ adalah

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2 + \left(\frac{d[3]}{x}\right)^2}\,d\theta = S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2+0^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,d\theta = 3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi \text{ satuan panjang}$$

(c) Persamaan $r = 3$ untuk $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ merupakan seperempat lingkaran dengan pusat $(0,0)$ berjari-jari tiga terletak pada kuadran satu. Sehingga sketsa kurva dan arah lintasannya diberikan sebagai berikut



4. **(EAS 2022)** Misalkan posisi suatu partikel pada saat t diberikan dalam dua fungsi parametrik $x = \ln t - 1$ dan $y = \dfrac{t}{t-1}$

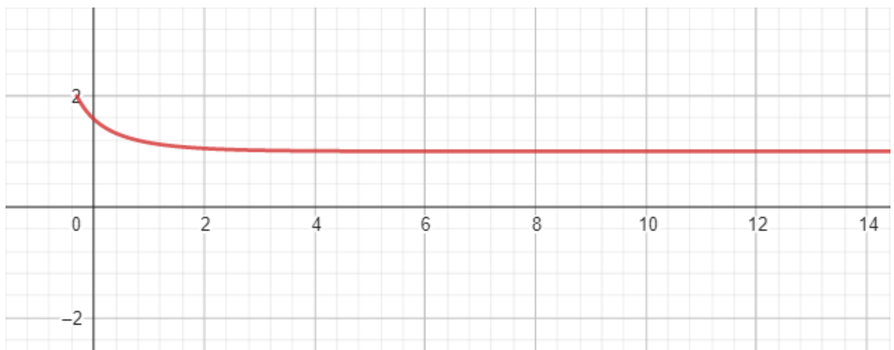
(a) Nyatakan posisi partikel tersebut ke dalam bentuk koordinat kartesius

(b) Gambarkan grafik lintasan partikel untuk $t \geq 2$.

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa $x = \ln t - 1 \Rightarrow \ln t = x + 1 \Rightarrow t = \mathrm{e}^{x+1}$ Sehingga didapat $y = \frac{t}{t-1} = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x+1} - 1}$ dengan demikian fungsi gerak partikel dalam persamaan kartesius adalah $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x+1} - 1}$

(b) Ketika $t = 2$ maka $x = \ln(2) - 1$ sehingga grafik fungsi $f(x)$ ketika $x \geq \ln(2) - 1$ adalah



5. **(EAS 2022)** Suatu partikel bergerak dengan lintasan mengikuti persamaan $y = \mathrm{e}^{-3t} - 1$ dan $x = \mathrm{e}^{-2t}$

(a) Dapatkan $\frac{dy}{dx}$

(b) Dapatkan persamaan garis singgung kurva lintasan tersebut di $t = \ln 5$.

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{-3t} - 1\right]}{\frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{-2t}\right]} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}$$

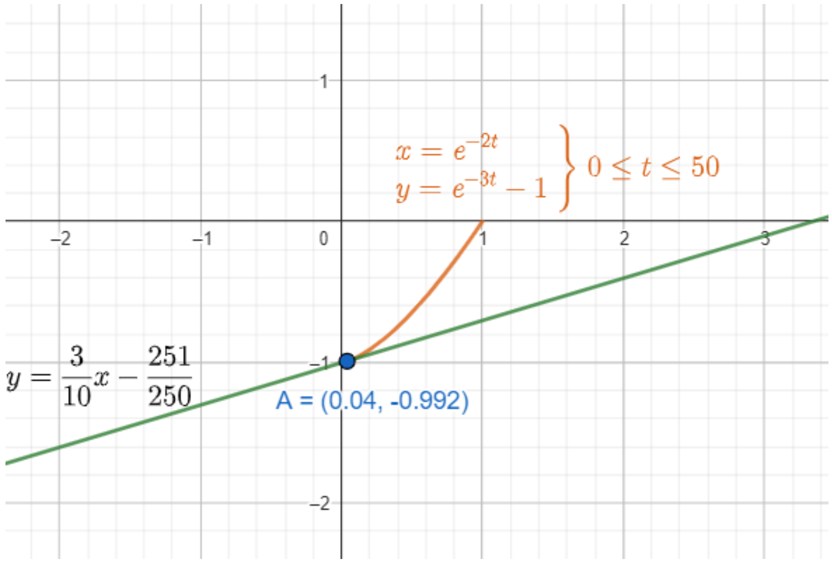
(b) Gradie garis singgung kurva parametrik di $t = \ln 5$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\ln 5} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\ln 5} = \frac{3}{10}$$

Ketikan $t = \ln 5$ maka $y = \mathrm{e}^{-3\cdot\ln 5} - 1 = -\frac{124}{125}$ dan $x = \mathrm{e}^{-2\cdot\ln 5} = \frac{1}{25}$ Sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$y + \frac{124}{125} = \frac{3}{10}\left(x - \frac{1}{25}\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{10}x - \frac{251}{250}$$

Berikut diberikan ilustari gambar kurva dengan garis singgungnya



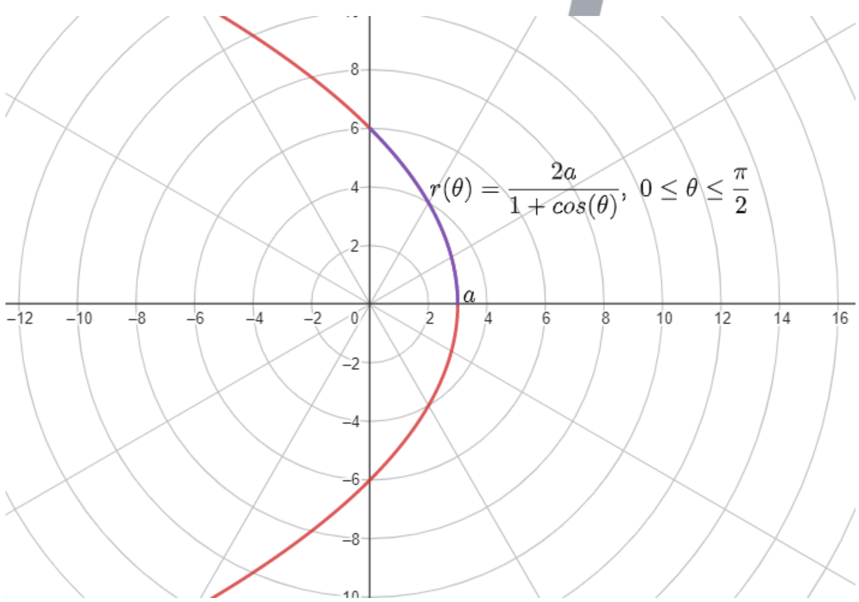
6. **(EAS 2022)** Buatlah sketsa dan dapatkan panjang kurva yang dibentuk oleh kurva

$$r = \frac{2a}{1+\cos\theta} \text{ dan } r = 2a(1+\cos\theta)$$

di $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Pembahasan :

- Kurva $r(\theta) = \dfrac{2a}{1+\cos\theta}$



Panjang kurva diperoleh

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{2a}{1+\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta}\left[\frac{2a}{1+\cos\theta}\right]\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{2a}{1+\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{2a\sin(\theta)}{(\cos(\theta)+1)^2}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{1+\cos\theta}\sqrt{1+\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos(\theta))^2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{1+\cos\theta}\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{1+\cos\theta}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta$$

Perhatikan bahwa $1+\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sehingga didapat

$$= 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2^{3/2}\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta = a\int_0^{\pi/2} \sec^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta$$

Misalkan $u = \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2du = d\theta$, ubah batas untuk $\theta = 0$ maka $u = 0$, untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka $u = \frac{\pi}{4}$. Sehingga integral menjadi

$$a\int_0^{\pi/2} \sec^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta = 4a\int_0^{\pi/4} \sec^3(u)\, d\theta$$

Dengan menggunakan rumus induksi integral secan

$$\boxed{\int \sec^n x\, dx = \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx + \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1}}$$

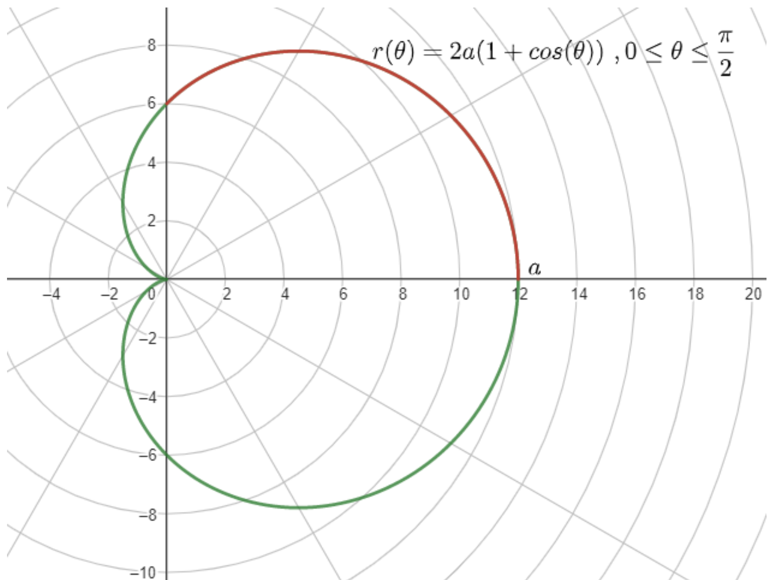
diperoleh

$$4a\int \sec^3(u)\, d\theta = 4a\left[\frac{1}{2}\int \sec x\, dx + \frac{\sec x \tan x}{2}\right]$$

$$= 4a \cdot \left(\frac{\ln(\sin(x) + 1)}{4} - \frac{\ln(1 - \sin(x))}{4} - \frac{\sin(x)}{2\sin^2(x) - 2} \right) \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= 4a \left(\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)}{4} - \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ satuan panjang}$$

- Kurva $r(\theta) = 2a(1 + \cos\theta)$



Panjang kurva diperoleh

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(2a(1 + \cos\theta))^2 + \left(\frac{d}{d\theta}\left[2a(1 + \cos\theta)\right]\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(2a(1 + \cos\theta))^2 + (-2a\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2a\sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta$$

$$2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 8a\sin\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\pi/2} = 4\sqrt{2}a \text{ satuan luas}$$

7. **(EAS 2022)**

(a) Buatlah sketsa kurva dari persamaan parametrik

$$x = 1 + \cos t,\ \ y = 3 - \sin t,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

(b) Dapatkan panjang busur dari kurva tersebut

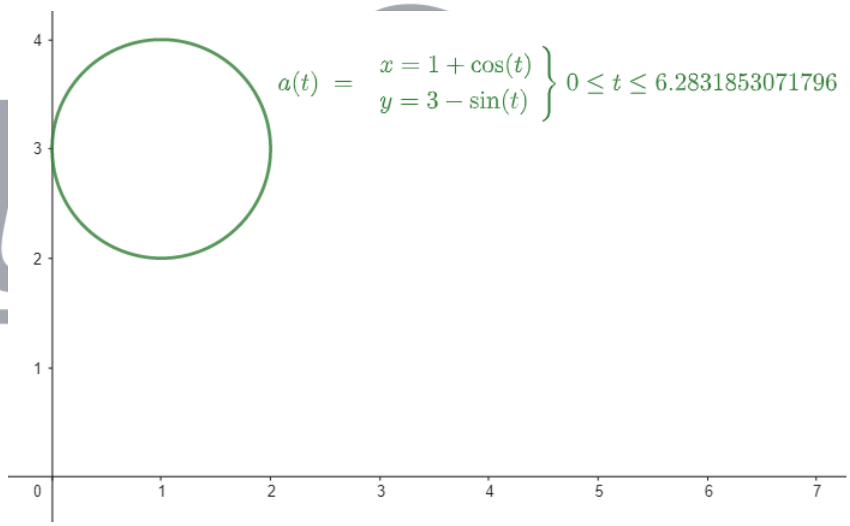
(c) Dapatkan semua nilai parameter t yang menyebabkan kurva tersebut mempunyai garis singgung vertikal.

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa $x = 1 + \cos t \Rightarrow \cos t = x - 1$ dan $y = 3 - \sin t \Rightarrow \sin t = 3 - y$, didapat

$$\cos^2 t + \sin^2 t = (x-1)^2 + (3-y)^2 = 1$$

Sehingga persamaan parametrik pada soal mempunyai persamaan kartesius $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ yang merupakan lingkaran berpusat $(1, 3)$ dan berjari-jari 1.



(b) Panjang busur berdasarkan keliling lingkaran adalah $S = 2\pi r = 2\pi$. Panjang busur dicari menggunakan intergal didapat

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(c) Garis singgung vertikal terjadi ketika $\dfrac{dx}{dt} = 0$ sehingga

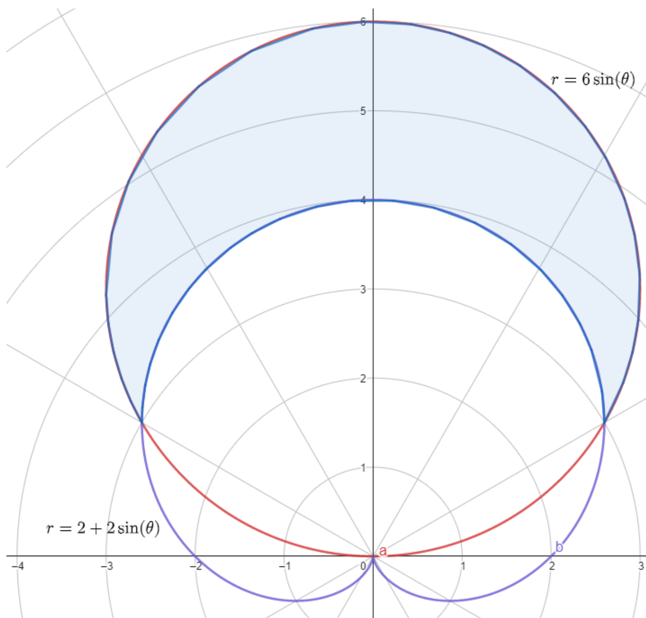
$$\frac{d}{dt}(1 + \cos t) = -\sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0$$

diperoleh nilai $t = 0, \pi, 2\pi$

8. **(EAS 2022)** Sketsa grafik di dalam kurva kutub $r = 6\sin\theta$ dan di luar kurva kutub $r = 2 + 2\sin\theta$, selanjutnya hitung luas daerah tersebut.

Pembahasan :

Perhatikan gambar sketsa pada soal



Terlebih dahulu mencari titik potong kedua kurva kutub $r = 6\sin\theta$ dan $r = 2 + 2\sin\theta$

$$6\sin\theta = 2 + 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Dapat dilihat bahwa daerah arsiran simetri terhadap sumbu-y sehingga untuk mencari luasan daerah dapat dilakukan dengan cara mencari luasan disebelah kanan sumbu-y kemudian dikalikan dua, seperti berikut

$$L = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[(6\sin\theta)^2 - (2+2\sin\theta)^2\right]\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 36\sin^2\theta - (4 + 8\sin\theta + 4\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 32\sin^2\theta - 8\sin\theta - 4\,d\theta = 4\left[\int_{\pi/6}^{\pi/2} 8\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1\,d\theta\right]$$

$$= 4\left[\int_{\pi/6}^{\pi/2} 8\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) - 2\sin\theta - 1\,d\theta\right] = 4\left[\int_{\pi/6}^{\pi/2} 4(1-\cos 2\theta) - 2\sin\theta - 1\,d\theta\right]$$

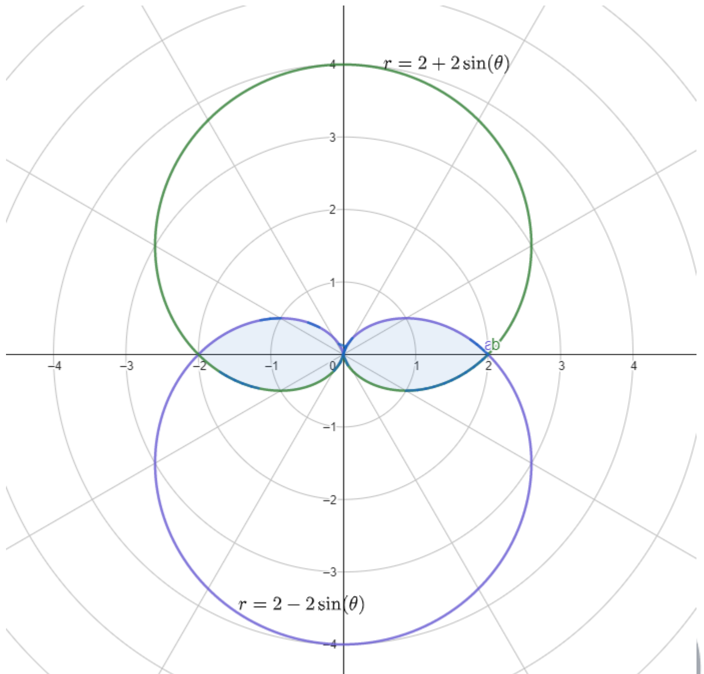
$$= 4\left[\int_{\pi/6}^{\pi/2} -4\cos 2\theta - 2\sin\theta + 3\,d\theta\right] = -8\sin(2\theta) + 8\cos(\theta) + 12\theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 4\pi \text{ satuan luas}$$

9. **(EAS 2022)** Sketsa grafik irisan kurva kutub $r = 2 - 2\sin\theta$ dankurva kutub $r = 2 + 2\sin\theta$,

selanjutnya hitung luas daerah tersebut.

Pembahasan :

Perhatikan gambar sketsa pada soal



Terlebih dahulu mencari titik potong kedua kurva kutub $r = 2 - 2\sin\theta$ dan $r = 2 + 2\sin\theta$

$$2 - 2\sin\theta = 2 + 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

Dapat dilihat bahwa daerah arsiran simetri terhadap sumbu-y dan sumbu-x sehingga untuk mencari luasan daerah dapat dilakukan dengan cara mencari luasan kuadran I, kemudian dikalikan 4 seperti berikut

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(2 - 2\sin\theta)^2\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (2 - 2\sin\theta)^2\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} (1 - \sin\theta)^2\, d\theta$$

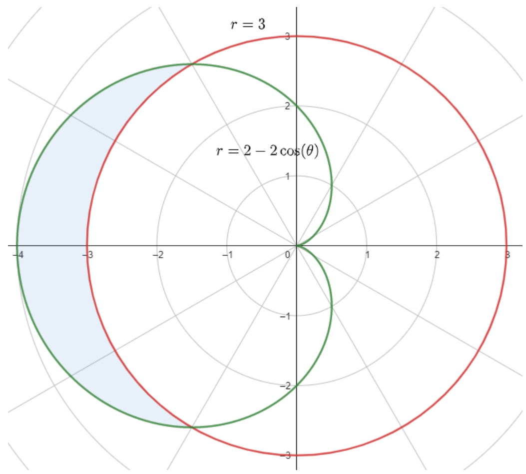
$$= 8\int_0^{\pi/2} 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} 1 - 2\sin\theta + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 8 - 16\sin\theta + 4\left(1 - \cos 2\theta\right)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} 12 - 16\sin\theta - 4\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= -2\sin(2\theta) + 16\cos(\theta) + 12\theta\Big|_0^{\pi/2} = 6\pi - 16 \text{ satuan luas}$$

10. **(EAS 2022)** Sketsa grafik di dalam kurva kutub $r = 2 - 2\cos\theta$ dan di luar kurva kutub $r = 3$, selanjutnya hitung luas daerah tersebut.

Pembahasan :
Perhatikan gambar sketsa pada soal



Terlebih dahulu mencari titik potong kedua kurva kutub $r = 2 - 2\cos\theta$ dan $r = 3$

$$2 - 2\cos\theta = 3 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

Dapat dilihat bahwa daerah arsiran simetri terhadap sumbu-x sehingga untuk mencari luasan daerah dapat dilakukan dengan cara mencari luasan disebelah atas sumbu-x kemudian dikalikan dua, seperti berikut

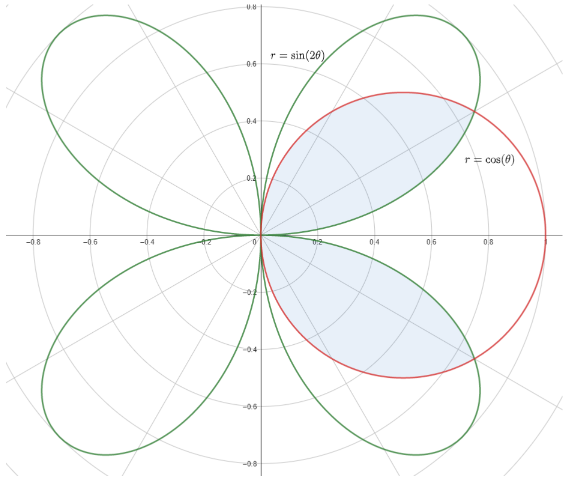
$$L = 2\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}\left[(2 - 2\cos\theta)^2 - (3)^2\right]\, d\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi} \left[(2 - 2\cos\theta)^2 - (3)^2\right]\, d\theta$$

$$= \int_{2\pi/3}^{\pi} 4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta - 9\, d\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi} 4\cos^2\theta - 8\cos\theta - 5\, d\theta$$

$$= \int_{2\pi/3}^{\pi} 4\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right) - 8\cos\theta - 5\, d\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi} 2(\cos 2\theta + 1) - 8\cos\theta - 5\, d\theta$$

$$= \int_{2\pi/3}^{\pi} 2\cos 2\theta - 8\cos\theta - 3\, d\theta = \sin(2\theta) - 8\sin(\theta) - 3\theta\Big|_{2\pi/3}^{\pi} = \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{2} \text{ satuan luas}$$

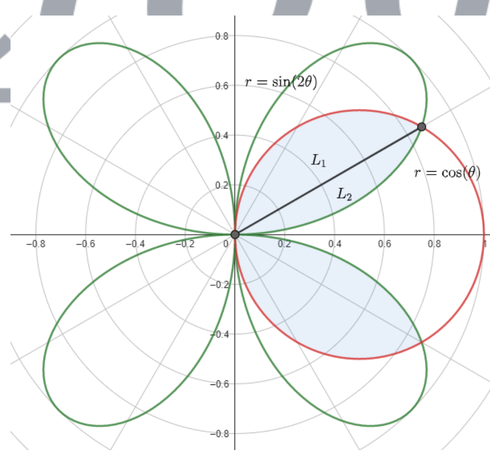
11. **(EAS 2020)** Gambarkan dan dapatkan luas irisan dari $r = \sin 2\theta$ dan $r = \cos\theta$.
Pembahasan :
Perhatikan gambar sketsa pada soal



Terlebih dahulu mencari titik potong kedua kurva kutub $r = \sin 2\theta$ dan $r = \cos\theta$

$$\sin 2\theta = \cos\theta \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$$

Ketika $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$, sedangkan ketika $\sin\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ Dapat dilihat bahwa daerah arsiran simetri terhadap sumbu-x sehingga untuk mencari luasan daerah dapat dilakukan dengan cara mencari luasan disebelah atas sumbu-x kemudian dikalikan dua. Perhatikan bahwa



Sehingga didapat bahwa $L = 2(L_1 + L_2)$.

$$L_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos^2\theta\, d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right) d\theta = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2\theta + 1\, d\theta = \left.\frac{\cos(\theta)\sin(\theta) + \theta}{4}\right|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}{4}\right) - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}}{4}\right) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{48}$$

sedangkan untuk L_2

$$L_2 = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) \, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} 1 - \cos 4\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{\sin(4x) - 4x}{16}\bigg|_0^{\pi/6} = \left(-\frac{\sin(4(0)) - 4(0)}{16}\right) - \left(-\frac{\sin\left(4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{16}\right) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{96}$$

Jadi luas daerah yang diarsir adalah

$$L = 2(L_1 + L_2) = 2\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{48} + \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{96}\right) = \frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{48} \text{ satuan luas}$$

12. **(EAS 2020)** Dapatkan panjang busur kurva $x = \mathrm{e}^t \cos t,\ y = \mathrm{e}^t \sin t$ di $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
Pembahasan :
Panjang kurva yang dihasilkan adalah

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}[\mathrm{e}^t \cos t]\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}[\mathrm{e}^t \sin t]\right)^2} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(-\mathrm{e}^t\left(\sin(t) - \cos(t)\right)\right)^2 + \left(\mathrm{e}^t\left(\sin(t) + \cos(t)\right)\right)^2} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t + \mathrm{e}^{2t}\cos^2 t - 2\mathrm{e}^{2t}\sin t\cos t + \mathrm{e}^{2t}\sin^2 t + \mathrm{e}^{2t}\cos^2 t + 2\mathrm{e}^{2t}\sin t\cos t} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2\mathrm{e}^{2t}} \, dt = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^t\sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^t \, dt = \sqrt{2}\mathrm{e}^t\Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{2}(\mathrm{e}^{\pi/2} - 1) \text{ satuan panjang}$$

13. **(EAS 2020)** Dapatkan kemirinagn garis singgung kurva $r = a\sec 2\theta$ di titik dengan $\theta = \frac{\pi}{6}$.
Pembahasan :
Turunan pertama dari kurva kutub $r(\theta) = a\sec\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta\frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sec 2\theta\cos\theta + \sin\theta\frac{d}{d\theta}[a\sec 2\theta]}{-a\sec\theta\sin\theta + \cos\theta\frac{d}{d\theta}[a\sec\theta]} = \frac{a\sec 2\theta\cos\theta + 2a\sin\theta\sec 2\theta\tan 2\theta}{-a\sec 2\theta\sin\theta + 2a\cos\theta\sec 2\theta\tan 2\theta}$$

$$= \frac{\sec 2\theta \cos\theta + 2\sin\theta \sec 2\theta \tan 2\theta}{-\sec 2\theta \sin\theta + 2\cos\theta \sec 2\theta \tan 2\theta} = \frac{3\cos\theta - \cos 3\theta}{\sin\theta + 3\sin 3\theta}$$

Sehingga kemirian garis singgung kurva pada $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ adalah

$$m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{\theta=\pi/6} = \frac{3\cos\theta - \cos 3\theta}{\sin\theta + 3\sin 3\theta}\bigg|_{\theta=\pi/6} = \frac{3\cos(\pi/6) - \cos(3\pi/6)}{\sin(\pi/6) + 3\sin(3\pi/6)} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

14. **(EAS 2022)** Dapatkan panjang busur dari kurva $r = a\cos\theta + b\sin\theta$. (Berikan gambar sketsa kurvanya)

Perhatikan: bilangan b dan a dalam soal ini adalah dua digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $b = 7$ dan $a = 6$, jika a atau b adalah 0 ganti dengan angka 10.

Pembahasan :

Pada pembahasan ini akan diselesaikan secara umum untuk sembarang a dan b tak nol. Perhatikan bahwa

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta \Rightarrow r^2 = r(a\cos\theta + b\sin\theta) = ar\cos\theta + br\sin\theta$$

dengan transformasi koordinat kutub $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ diperoleh

$$r^2 = ar\cos\theta + br\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = ax + by \Rightarrow x^2 - ax + y^2 - by = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

Persamaan

$$\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

merupakan lingkaran dengan pusat $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ dengan jari-jari $r = \sqrt{\dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}b^2}$. Sehingg panjang kurva yang diperoleh adalah keliling lingkaran tersebut yaitu

$$S = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2} \text{ satuan panjang}$$

15. **(EAS 2022)** Diberikan kurva kutub $r = 2(1 + \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

   (a) Dapatkan kemiringan garis singgung pada kurva tersebut di titik $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

   (b) Dapatkan semua titik (r, θ) pada kurva kutub tersebut dimana garis singgungnya vertikal.

Pembahasan :

(a) Turunan pertama dari kurva kutub $r(\theta) = 2(1 + \cos\theta)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta\frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin\theta\frac{d}{d\theta}[2(1+\cos\theta)]}{-2(1+\cos\theta)\sin\theta + \cos\theta\frac{d}{d\theta}[2(1+\cos\theta)]} = \frac{2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{-2(1+\cos\theta)\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta}{-(1+\cos\theta)\sin\theta - \cos\theta\sin\theta} = -\frac{(\cos\theta + \cos 2\theta)\csc\theta}{2\cos\theta + 1}$$

Sehingga kemirian garis singgung kurva pada $\theta = \frac{\pi}{2}$ adalah

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\pi/2} = -\frac{(\cos\theta + \cos 2\theta)\csc\theta}{2\cos\theta + 1}\Big|_{\theta=\pi/6} = -\frac{(\cos(\pi/2) + \cos(2\pi/2)\csc(\pi/2)}{2\cos(\pi/2) + 1} = 1$$

(b) Garis singgung vertikal terjadi ketika

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta} = -2(1+\cos\theta)\sin\theta + \cos\theta\frac{d}{d\theta}[2(1+\cos\theta)] \\ &= -2(1+\cos\theta)\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta \\ &= -2\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0\end{aligned}$$

solusi persamaan tersebut ketika $\sin\theta = 0$ diperoleh $\theta = 0, \pi, 2\pi$ dan ketika $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ diperoleh $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ Jadi semua nilai θ sehingga kurva kutub $r = 2(1 + \cos\theta)$ mempunyai garis singgung vertikal adalah $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.

16. **(EAS 2020)** Dapatkan kemiringan garis singgung kurva $r = 3\sin 3\theta$ di $\theta = \frac{\pi}{6}$
Pembahasan :

Turunan pertama dari kurva kutub $r(\theta) = 3\sin 3\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta\frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}} = \frac{3\sin 3\theta\cos\theta + \sin\theta\frac{d}{d\theta}[3\sin 3\theta]}{-3\sin 3\theta\sin\theta + \cos\theta\frac{d}{d\theta}[3\sin 3\theta]}$$

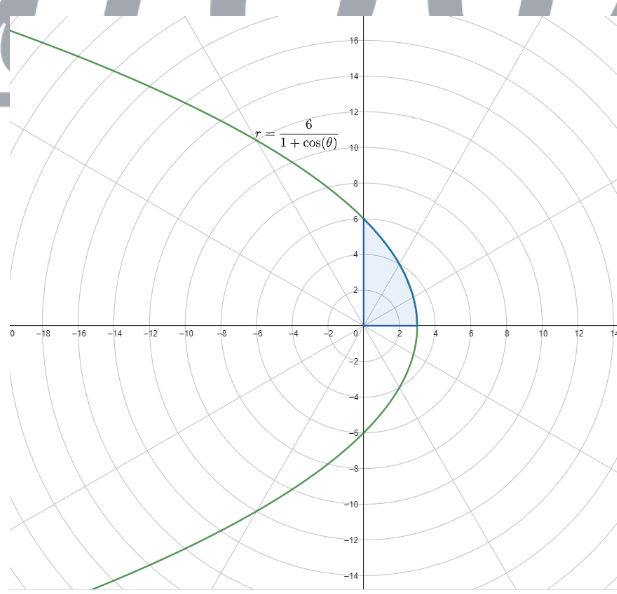
$$= \frac{3\sin 3\theta\cos\theta + 3\sin\theta\cos 3\theta}{-3\sin 3\theta\sin\theta + 3\cos\theta\cos 3\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 3\theta}{-\sin 3\theta\sin\theta + \cos\theta\cos 3\theta}$$

Sehingga kemirian garis singgung kurva pada $\theta = \frac{\pi}{6}$ adalah

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = \left.\frac{\sin 3\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 3\theta}{-\sin 3\theta\sin\theta + \cos\theta\cos 3\theta}\right|_{\theta=\pi/6}$$

$$= \frac{\sin(3\pi/6)\cos(\pi/6) + \sin(\pi/6)\cos(3\pi/6)}{-\sin(3\pi/6)\sin(\pi/6) + \cos(\pi/6)\cos(3\pi/6)} = -\sqrt{3}$$

17. **(EAS 2020)** Hitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola $r = \frac{6}{1+\cos\theta}$ yang berada di kuadran pertama (sertakan sketsa gambar geometrinya dan arsir luasannya)
Pembahasan :
Perhatikan gambar sketsa pada soal



Karena yang diminta adalah luasan pada kuadran I artinya nilai $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Sehingga diperoleh

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{6}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta = 18\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= 18\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)}\right)^2 d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\,d\theta$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\,d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)\,d\theta$$

misalkan $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ didapat $du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$. Ubah batas jika $\theta = 0$ maka $u = 0$, jika $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka $u = 1$. Sehingga dengan integral subtitusi diperoleh

$$\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\,d\theta = 9\int_0^1 (u^2+1)\,d = 9\left(\frac{1}{3}+1\right) = 12 \text{ satuan luas}$$

18. Dapatkan semua nilai t yang menyebabkan kurva parametrik $x = 2t^3 + 15t^2 + 24t + 7$ dan $y = t^2 + t + 1$ mempunyai garis singgung vertikal.

Pembahasan :

Garis singgung vertikal terjadi ketika $\frac{dx}{dt} = 0$ sehingga

$$\frac{dx}{dt} = 6t^2 + 30t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-3) = 0$$

jadi semua nilai t yang mengakibatkan garis singgung kurva pada soal vertikal adalah $t = 2$ dan$t = 3$.

19. Diberikan kurva parametrik $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$ dengan $-1 \leq t \leq 0$

(a) Nyatakan persamaan parametrik diatas ke persamaan dalam koordinat kartesian, beserta domainnya.

(b) Dapatkan panjang kurva tersebut

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa $x = \frac{1}{3}t^3 \Rightarrow t = \sqrt[3]{3x}$ sehingga diperoleh

$$y = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{3x}\right)^2 = \frac{1}{2}(3x)^{\frac{3}{2}}$$

(b) Dengan integral panjang kurva yang diperoleh

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}t^2\right]\right)^2}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{\left(t^2\right)^2 + (t)^2}\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{t^4 + t^2}\, dt = \int_{-1}^{0} t\sqrt{t^2+1}\, dt$$

misalkan $u = t^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = 2t \Rightarrow \dfrac{1}{2}du = t\,dt$. Ubah batas: jika $t = -1$ maka $u = 2$, jika $t = 0$ maka $u = 1$

Sehingga integral menjadi

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{2}\sqrt{u}\, du = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \text{ satuan panjang}$$

20. Diberikan kurva parametrik $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = t^2 - 3 \end{cases}$

(a) Nyatakan persamaan parametrik diatas ke persamaan dalam koordinat kartesian, beserta domainnya.

(b) Dapatkan persamaan garis singgung di titik $t = 1$

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa $x = t - 3 \Rightarrow t = x + 3$ sehingga didapat

$$y = t^2 - 3 = (x+3)^2 - 3.$$

dengan demikian fungsi kartesian dari persamaan karakteristik $f(x) = (x+3)^2 - 3$. Doman dari fungsi tersebut $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$.

(b) Gradien garis singgung kurva di $t = 1$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t\Big|_{t=1} = 2.$$

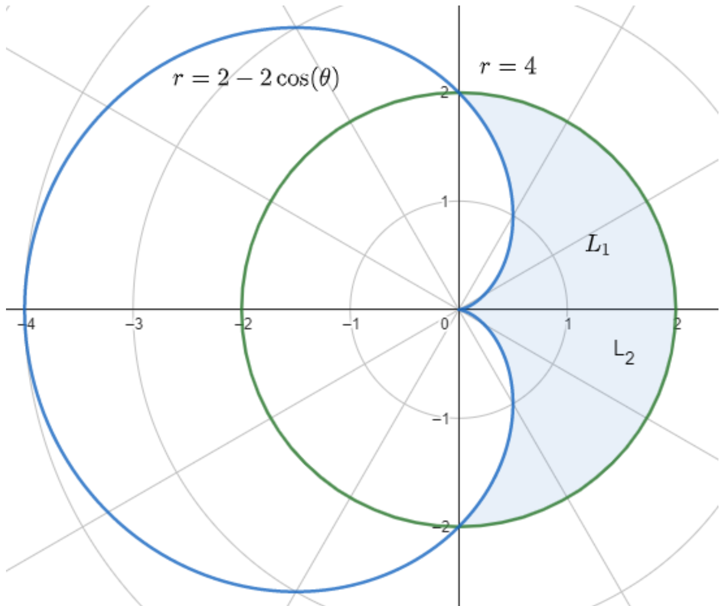
ketika $t = 1$ didapat $x = y = -2$. Sehingga persamaan garis singgung kurva di titik $(-2, -2)$ dengan gradien $m = 2$ adalah

$$y - (-2) = 2(x - (-2)) \Rightarrow y = 2x + 2$$

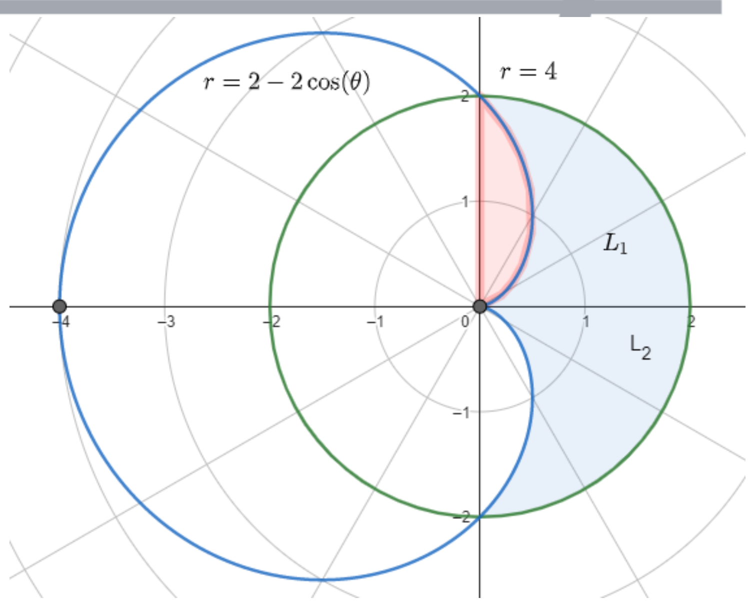
21. Luas daerah diluar kardioda $r = 2 - 2\cos\theta$ dan didalam lingkaran $r = 4$

Pembahasan :

Perhatikan sketsa gambar dibawah ini



Dapat dilihat bahwa daerah arsiran simetri terhadap sumbu-x sehingga untuk mencari luasan daerah dapat dilakukan dengan cara mencari luasan disebelah atas sumbu-x kemudian dikalikan dua. Sehingga $L_1 = L_2$ artinya $L = 2L_1$.



Dapat dilihat bahwa untuk mencari L_1 diperoeh dengan cara luas seperempat lingkaran dikurangi dengan luas daerah arsiran merah, dapat dilihat pada gambar diatas.

$$L_{\text{merah}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(2-2\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 2(1-1\cos\theta)^2\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 - 2\cos\theta + 1\,d\theta$$

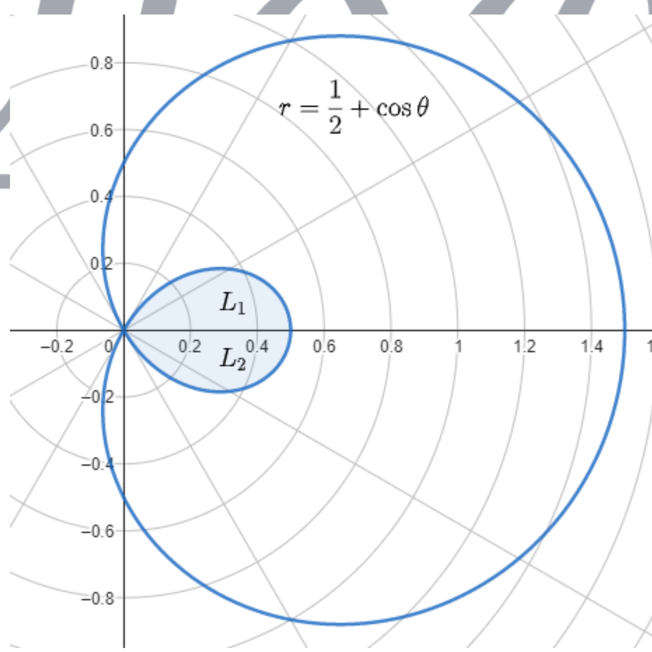
$$= 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - 2\cos\theta + 1\,d\theta = \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta) - 4\cos\theta + 2\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta - 4\cos\theta + 3\,d\theta = 2\sin 2\theta - 4\sin\theta + 3\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi-8}{2}.$$

Sehingga $L_1 = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 4 - \frac{3\pi-8}{2} = \frac{8+\pi}{2}$, jadi luas daerah yang diarsir biru adalah

$$L = 2L_1 = 2\left(\frac{8+\pi}{2}\right) = 8+\pi$$

22. Luas daerah loop-loop limacon $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.
Pembahasan :
Perhatikan sketsa gambar pada soal dibawah ini



Dapat dilihat bahwa daerah arsiran simetri terhadap sumbu-x sehingga untuk mencari luasan daerah dapat dilakukan dengan cara mencari luasan disebelah atas sumbu-x kemudian dikalikan dua. Sehingga $L_1 = L_2$ artinya $L = 2L_1$. Perhatikan bahwa ketika

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ didapat $r = 0$ dan ketika $\theta = \pi$ maka $r = -1$. Sehingga

$$L_2 = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right)^2 d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{8} + \frac{\cos\theta}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{3}{8} + \frac{\cos\theta}{2} + \left(\frac{\cos 2\theta}{4}\right) d\theta$$

$$= \frac{\sin(2x) + 4\sin(x) + 3x}{8}\bigg|_{\pi/3}^{\mathcal{P}} = \frac{12\pi - 15\sqrt{3}}{48}$$

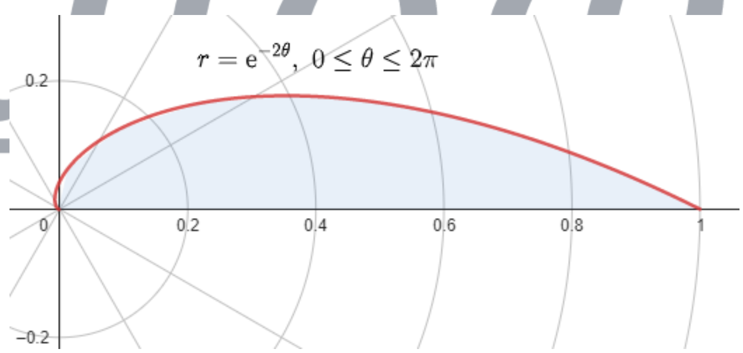
Sehingga luas derah yang dimaksud di soal adalah

$$L = 2L_2 = 2\left(\frac{12\pi - 15\sqrt{3}}{48}\right) = \frac{12\pi - 15\sqrt{3}}{24}$$

23. Dapatkan luasan daerah yang tersapu oleh garis radial dari titik asal ke kurva $r = \mathrm{e}^{-2\theta}$ untuk θ yang bergerak $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Pembahasan :

Perhatikan sketsa kurva pada soal



Sehingga luas yanh dihasilkan adalah

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\theta}\right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-4\theta}\, d\theta = -\frac{\mathrm{e}^{-4}}{8}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{\mathrm{e}^{-8\pi}}{4}}{2} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-8\pi}}{8} \text{ satuan luas}$$

6. Barisan dan Deret

1. Tentukan apakah barisan dibawah ini konvergen atau tidak jika iya dapatkan limit konvergensinya.

   (a) $\left\{\dfrac{3n^3+n-1}{n^4+2n-7}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   (b) $\left\{\dfrac{5n^5+3n^2-n}{n^5+0.5n+10}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   (c) $\left\{\dfrac{n!}{3^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   (d) $\left\{(-1)^n\dfrac{n^4+n^3+n+1}{n^4+8}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   (e) $\{n!\mathrm{e}^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$

   Pembahasan :

   (a) Perhatikan bahwa

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n-1}{n^4+2n-7}=\lim_{n\to\infty}=\frac{\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}{1+\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{7}{n^4}}=\frac{0+0-0}{1+0-0}=0$$

   Jadi barisan $\left\{\dfrac{3n^3+n-1}{n^4+2n-7}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 0.

   (b) Perhatikan bahwa

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^5+3n^2-n}{n^5+0.5n+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}{1+\dfrac{0.5}{n^4}+\dfrac{10}{n^5}}=\frac{5+0-0}{1+0+0}=5$$

   Jadi barisan $\left\{\dfrac{5n^5+3n^2-n}{n^5+0.5n+10}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 5.

   (c) Perhatikan bahwa $n!>3^{n-1}$ untuk nilai $n\geq 5$ dan secara pergerakan grafik, grafik $y=3^{n-1}$ jauh lebih lambat dari $y=n!$ sehingga dapat disimpulkan

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{3^{n-1}}=+\infty$$

   Jadi barisan $\left\{\dfrac{n!}{3^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ divergen.

(d) Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3+n+1}{n^4+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}{1+\dfrac{8}{n^4}} = \frac{1+0+0+0}{1+0} = 1$$

dan untuk nilai n genap barisan tersebut konvergen ke 1 sedangkan untuk nilai n ganjil barisan tersebut konvergen ke -1 artinya tidak ada nilai yang didekati untuk setiap nilai n sehingga barisan

$$\left\{(-1)^n \frac{n^4+n^3+n+1}{n^4+8}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

divergen.

(e) Perhatikan bahwa $n! > \mathrm{e}^n$ untuk nilai $n \geq 5$ dan secara pergerakan grafik, $y = \mathrm{e}^{n-1}$ jauh lebih lambat dari $y = n!$ sehingga dapat disimpulkan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$$

Jadi barisan $\{n!\mathrm{e}^{-n}\}$ divergen.

2. Dapatkan limit barisan $\{(3^n+7^n)^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$

Pembahasan :

Tinjau limit barisan pada soal. Misalkan

$$y = \lim_{n\to\infty} (3^n+7^n)^{1/n}$$

$$\ln y = \ln\left(\lim_{n\to\infty} (3^n+7^n)^{1/n}\right)$$

$$\ln y = \lim_{n\to\infty} \left(\ln (3^n+7^n)^{1/n}\right)$$

$$\ln y = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln (3^n+7^n)}{n}\right)$$

Dengan dalil L'Hopital didapat

$$\ln y = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n \ln 3 + 7^n \ln 7}{3^n+7^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n \ln 3 + \ln 7}{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n + 1}\right)$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{7}\right)^n = 0$ akibatnya diperoleh

$$\ln y = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n \ln 3 + 7^n \ln 7}{3^n + 7^n}\right) = \ln 7.$$

Karena $\ln y = \ln 7$ akibatnya $y = 7$ untuk nilai $n \to \infty$. Sehingga barisan $\{(3^n + 7^n)^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 7.

3. Klasifikasikan barisan-barisan berikut apakah monoton naik atau turun

   (a) $\left\{\dfrac{n!}{3^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   (b) $\left\{3 - \dfrac{1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   (c) $\left\{\dfrac{3^n}{1+3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   Pembahasan :

   (a) Perhatikan bahwa

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{3^{(n+1)-1}}}{\dfrac{n!}{3^{n-1}}} = \frac{(n+1)!}{3^{(n+1)-1}} \cdot \frac{3^{n-1}}{n!} = \frac{(n+1)n!}{3^n} \cdot \frac{3^{n-1}}{n!} = \frac{n+1}{3} > 1$$

   untuk $n > 2$. Sehingga untuk nilai $n > 2$ diperoleh $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ atau $a_{n+1} > a_n$ jadi barisan pada soal adalah barisan monoton naik di akhir.

   (b) Perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(3 - \frac{1}{(n+1)^2+1}\right) - \left(3 - \frac{1}{n^2+1}\right) = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} \\ &= \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

   dapat dilihat bahwa $a_{n+1} - a_n > 0$ atau $a_{n+1} > a_n$ untuk semua nilai n. Sehingga barisan $\left\{3 - \dfrac{1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan monoton naik.

   (c) Perhatikan bahwa

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{1+3^{n+1}}}{\dfrac{3^n}{1+3^n}} = \frac{3^{n+1}}{1+3^{n+1}} \cdot \frac{1+3^n}{3^n} = 3\left(\frac{1+3^n}{1+3^{n+1}}\right) > 1$$

Diperoleh $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ atau $a_{n+1} > a_n$ jadi barisan pada soal adalah barisan monoton naik.

4. Tentukan nilai konvergensi dari deret-deret berikut

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2^n}-\frac{4}{6^n}\right)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+11n+30}\right)$

   Pembahasan :

   (a) Dengan menggunakan sifat notasi sigma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2^n}-\frac{4}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2^n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6^n}\right)$$

   dapat dilihat bahwa masing-masing deret merupakan deret geometri tak hingga dengan rasio berada pada $-1 < r < 1$. Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2^n}\right)=\frac{7}{2}+\frac{7}{4}+\frac{7}{8}+\cdots=\frac{\frac{7}{2}}{1-\frac{1}{2}}=7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6^n}\right)=\frac{4}{6}+\frac{4}{36}+\frac{4}{216}+\cdots=\frac{\frac{4}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{4}{5}$$

   Sehingga diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2^n}-\frac{4}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2^n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6^n}\right)=7-\frac{4}{5}=\frac{31}{5}$$

   (b) Dengan menggunakan dekomposisi pecahan parsial diperoleh (BAB 2)

$$\frac{1}{n^2+11n+30}=\frac{1}{(n+5)(n+6)}=\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}$$

   Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^2+11n+30}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N+5}-\frac{1}{N+6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{N+6}$$

untuk nilai $N \to \infty$ diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+11n+30}\right)=\frac{1}{6}$$

5. Dengan uji yang sesuai tentukan apakah deret-deret berikut konvergen atau tidak.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{3k^3+1}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4^k}{k^4}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$

Pembahasan :

(a) Dengan menggunakan uji integral, menghitung integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{k^2}{3k^3+1}\,dk=\cdots$$

misalkan $u=3k^3+1 \Rightarrow \frac{du}{dk}=9k^2 \Rightarrow \frac{1}{9}du=k^2\,dk$. Ubah batas: untuk $k=1 \Rightarrow u=4$, untuk $k=+\infty \Rightarrow u=+\infty$ sehingga didapat

$$\int_1^{+\infty}\frac{k^2}{3k^3+1}=\frac{1}{9}\int_4^{+\infty}\frac{1}{u}\,du=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{9}\ln|u|+C\Big|_4^t=+\infty$$

karena hasil uji intergal divergen artinya deret merupakan deret yang divergen.

(b) Dengan menggunakan uji rasio, perhatikan bahwa

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^4}}{\frac{4^n}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{(n+1)^4}\frac{n^4}{4^n}=\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{n}{n+1}\right)^4=4$$

karena didapat $\rho>1$ artinya deret tersebut merupakan deret divergen.

(c) Dengan menggunakan uji integral, menghitung integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln k}{k^2}\,dk=\cdots$$

Dengan menggunakan metode integral parsial. Misalkan $u = \ln k \Rightarrow du = \dfrac{1}{k}\,dk$ dan $dv = \dfrac{1}{k^2}\,dk \Rightarrow v = -\dfrac{1}{k}$. Sehingga diperoleh

$$\int \frac{\ln k}{k^2}\,dk = -\frac{\ln k}{k} - \int -\frac{1}{k}\,dk = -\frac{\ln k}{k} + \int \frac{1}{k^2}\,dk = -\left(\frac{\ln k + 1}{k}\right) + C$$

Dengan demikian didapat

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}\,dk = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln k}{k^2}\,dk = \lim_{t\to+\infty} -\left(\frac{\ln k + 1}{k}\right)\Big|_1^t = 1$$

karena hasil uji intergal konvergen artinya deret tersebut merupakan deret yang konvergen.

6. **(EAS 2022)**Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   (a) Dapatkan polinomial Taylor derajat 5 dari fungsi tersebut di sekitar $x = -1$

   (b) Dapatkan deret Taylor fungsi tersebut di sekitar $x = -1$ dan nyatakan dalam notasi sigma

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{2}{(-1)^3} = 2$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} \Rightarrow f''(-1) = \frac{6}{(-1)^4} = 6$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5} \Rightarrow f'''(-1) = -\frac{24}{(-1)^5} = 24$$

$$f''''(x) = \frac{120}{x^6} \Rightarrow f''''(-1) = \frac{120}{(-1)^6} = 120$$

$$f'''''(x) = -\frac{720}{x^7} \Rightarrow f'''''(-1) = -\frac{720}{(-1)^7} = 720$$

Polinomial Taylor derajat 5 dari fungsi tersebut di sekitar $x = -1$

$$\begin{aligned} p_5(x) \;&=\; f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x-(-1)) + \frac{f''(-1)}{2!}(x-(-1))^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x-(-1))^3 \\ &\quad + \frac{f''''(-1)}{4!}(x-(-1))^4 + \frac{f'''''(-1)}{5!}(x-(-1))^5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3\\
&\quad+\frac{f''''(-1)}{4!}(x+1)^4+\frac{f'''''(-1)}{5!}(x+1)^5\\
&= 1+\frac{2}{1!}(x+1)+\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{24}{3!}(x+1)^3+\frac{120}{4!}(x+1)^4+\frac{720}{5!}(x+1)^5\\
&= 1+2(x+1)+3(x+1)^2+4(x+1)^3+5(x+1)^4+6(x+1)^5
\end{aligned}
$$

(b) Perhatikan bahwa

$$f(-1)=\frac{1}{(-1)^2}=1$$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}\Rightarrow f'(-1)=-\frac{2}{(-1)^3}=2$$

$$f''(x)=\frac{6}{x^4}\Rightarrow f''(-1)=\frac{6}{(-1)^4}=6$$

$$f'''(x)=-\frac{24}{x^5}\Rightarrow f'''(-1)=-\frac{24}{(-1)^5}=24$$

$$f''''(x)=\frac{120}{x^6}\Rightarrow f''''(-1)=\frac{120}{(-1)^6}=120$$

$$f'''''(x)=-\frac{720}{x^7}\Rightarrow f'''''(-1)=-\frac{720}{(-1)^7}=720$$

$$\vdots$$

$$f^n(x)=(-1)^n\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\Rightarrow f(-1)=(n+1)!$$

Deret Taylor untuk $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ di $x=-1$ adalah

$$
\begin{aligned}
p_\infty(x) &= f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3\\
&\quad+\frac{f''''(-1)}{4!}(x+1)^4+\frac{f'''''(-1)}{5!}(x+1)^5+\cdots\\
&= 1+\frac{2}{1!}(x+1)+\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{24}{3!}(x+1)^3+\frac{120}{4!}(x+1)^4+\frac{720}{5!}(x+1)^5+\cdots\\
&= 1+2(x+1)+3(x+1)^2+4(x+1)^3+5(x+1)^4+6(x+1)^5+\cdots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n
\end{aligned}
$$

7. **(EAS 2022)** Diberikan fungsi $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

(a) Dapatkan polinomial Taylor derajat 5 dari fungsi tersebut di sekitar $x=-2$

(b) Dapatkan deret Taylor fungsi tersebut di sekitar $x=-2$ dan nyatakan dalam notasi sigma

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{1+(-2)} = -1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{1}{(1+(-2))^2} = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(-2) = \frac{2}{(1+(-2))^3} = -2$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f'''(-2) = -\frac{6}{(1+(-2))^4} = -6$$

$$f''''(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \Rightarrow f''''(-2) = \frac{24}{(1+(-2))^5} = -24$$

$$f'''''(x) = -\frac{120}{(1+x)^6} \Rightarrow f'''''(-2) = -\frac{120}{(1+(-2))^6} = -120$$

Polinomial Taylor derajat 5 dari fungsi tersebut di sekitar $x = -2$

$$\begin{aligned} p_5(x) &= f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x-(-2)) + \frac{f''(-2)}{2!}(x-(-2))^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x-(-2))^3 \\ &\quad + \frac{f''''(-2)}{4!}(x-(-2))^4 + \frac{f'''''(-2)}{5!}(x-(-2))^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5(x) &= -1 + \frac{(-1)}{1!}(x-(-2)) + \frac{(-2)}{2!}(x-(-2))^2 + \frac{(-6)}{3!}(x-(-2))^3 \\ &\quad + \frac{(-24)}{4!}(x-(-2))^4 + \frac{(-120)}{5!}(x-(-2))^5 \\ &= -1 - (x+2) - (x+2)^2 - (x+2)^3 - (x+2)^4 - (x+2)^5 \end{aligned}$$

(b) Perhatikan bahwa

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{1+(-2)} = -1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{1}{(1+(-2))^2} = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(-2) = \frac{2}{(1+(-2))^3} = -2$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f'''(-2) = -\frac{6}{(1+(-2))^4} = -6$$

$$f''''(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \Rightarrow f''''(-2) = \frac{24}{(1+(-2))^5} = -24$$

$$f'''''(x) = -\frac{120}{(1+x)^6} \Rightarrow f'''''(-2) = --\frac{120}{(1+(-2))^6} = -120$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow f^n(-2) = (-1)^n \frac{n!}{(1+(-2))^{n+1}} = -n!$$

Deret Taylor untuk $f(x) = \frac{1}{x^2}$ di $x = -1$ adalah

$$\begin{aligned} p_\infty(x) &= f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3 \\ &\quad + \frac{f''''(-2)}{4!}(x+2)^4 + \frac{f'''''(-2)}{5!}(x+2)^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1!}{1!}(x+2) - \frac{2!}{2!}(x+2)^2 - \frac{3!}{3!}(x+2)^3 - \frac{4!}{4!}(x+2)^4 - \frac{5!}{5!}(x+2)^5 + \cdots \\ &= -1 - (x+2) - (x+2)^2 - (x+2)^3 - (x+2)^4 - (x+2)^5 + \cdots \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n \end{aligned}$$

8. **(EAS 2022)** Diberikan fungsi $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
   (a) Dapatkan polinomial Maclaurin derajat 5 dari fungsi tersebut.
   (b) Dapatkan deret Maclaurin fungsi tersebut dan nyatakan dalam notasi sigma

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa

$$f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f'(0) = \mathrm{e}^0 = -1$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f''(0) = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$f'''(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f'''(0) = \mathrm{e}^0 = -1$$

$$f''''(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f''''(0) = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$f'''''(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f'''''(0) = \mathrm{e}^0 = -1$$

Polinomial Macalurin derajat 5 dari fungsi tersebut

$$\begin{aligned} p_5(x) &= f(0) - \frac{f'(0)}{1!}(x-(0)) + \frac{f''(0)}{2!}(x-(0))^2 - \frac{f'''(0)}{3!}(x-(0))^3 \\ &\quad + \frac{f''''(0)}{4!}(x-(0))^4 - \frac{f'''''(0)}{5!}(x-(0))^5 \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \end{aligned}$$

(b) Perhatikan bahwa

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \Rightarrow f(0) = \mathrm{e}^{0} = 1$$

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f'(0) = -\mathrm{e}^{0} = -1$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^{x} \Rightarrow f''(0) = \mathrm{e}^{0} = 1$$

$$f'''(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f'''(0) = -\mathrm{e}^{0} = -1$$

$$f''''(x) = \mathrm{e}^{x} \Rightarrow f''''(0) = \mathrm{e}^{0} = 1$$

$$f'''''(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f'''''(0) = -\mathrm{e}^{0} = -1$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = (-1)^{n}\mathrm{e}^{x} \Rightarrow f^{n}(0) = \mathrm{e}^{0} = (-1)^{n}$$

Polinomial Macalurin dari fungsi tersebut

$$\begin{aligned}
p_{\infty}(x) &= f(0) - \frac{f'(0)}{1!}(x-(0)) + \frac{f''(0)}{2!}(x-(0))^{2} - \frac{f'''(0)}{3!}(x-(0))^{3} \\
&\quad + \frac{f''''(0)}{4!}(x-(0))^{4} - \frac{f'''''(0)}{5!}(x-(0))^{5} + \cdots \\
&= 1 - x + \frac{x^{2}}{2!} - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} - \frac{x^{5}}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n!}
\end{aligned}$$

9. **(EAS 2021)**

(a) Gunakan uji yang sesuai untuk menentukan apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n}+1}$$

konvergen atau divergen

(b) Dapatkan jumlahan deret

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^{k}} + \frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]$$

Pembahasan :

(a) Dengan menggunakan uji perbandingan limit, perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n}+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n}}$$

dapat dilihat bahwa deret pada ruas kanan merupakan deret geometri tak hingga dengan rasio $r = \dfrac{1}{3}$ yang artinya deret tersebut konvergen. Dengan demikian, berdasarkan uji perbandingan limit, deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ merupakan deret yang konvergen.

(b) Berdasarkan sifat sigma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7}{3^k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right)$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7}{3^k}\right)=\frac{7}{3}+\frac{7}{9}+\frac{7}{27}+\cdots=\frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}$$

dan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{k+3}-\frac{6}{k+4}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{4}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{6}{6}\right)+\left(\frac{6}{6}-\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{6}{8}-\frac{6}{9}\right)+\cdots=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Sehingga didapat

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$$

10. **(EAS 2021)**

(a) Tentukan konvergensi barisan $\left\{n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Dari jawaban tersebut, tentukan konvergensi $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) Dengan uji perbandingan, tentukan deret berikut konvergen atau divergen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n}$$

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

misalkan $a = \frac{1}{n}$ artinya jika $n \to \infty$ maka $a \to 0$ sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{a\to 0} \frac{\sin(\pi a)}{a} = \pi.$$

Jadi barisan $\left\{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan konvergen ke π. Sedangkan untuk

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\cdot n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(b) Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n + \cos^2 n} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n}$$

dengan menggunakan fakta bahwa $\sin^2(5n) \le 1$ akibatnya didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n + \cos^2 n} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

dapat dilihat bahwa deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ merupakan deret geometri dengan rasio $r = \frac{1}{2}$ artinya deret tersebut konvergen. Sehingga berdasarkan uji perbandingan limit, deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n + \cos^2 n}$ merupakan deret konvergen.

11. **(EAS 2021)** Buktikan deret

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$$

konvergen jika $p > 1$

Pembahasan :

Dengan menggunakan uji integral, hitung integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}\, dk = \cdots$$

Misalkan $u = \ln k \Rightarrow du = \dfrac{1}{k}\, dk$, ubah batas: jika $k = 2$ maka $u = \ln 2$, jika $k = +\infty$ maka $u = +\infty$. Sehingga integral menjadi

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}\, dk &= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^p}\, du = \lim_{t\to\infty} \int_{\ln 2}^{t} \frac{1}{u^p}\, du = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{-p+1} u^{-p+1}\right)\Big|_{\ln 2}^{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{-p+1} t^{-p+1}\right) - \left(\frac{1}{-p+1} (\ln 2)^{-p+1}\right)\end{aligned}$$

agar integral tersebut konvergen maka haruslah $-p + 1 < 0$ sehingga $p > 1$

12. **(EAS 2021)** Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{1}{1-ax}$
    (a) Dapatkan deret Maclaurin dari $f(x)$ (Nyatakan dalam notasi Sigma).
    (b) Gunakan hasil dari (a) untuk mendapatkan deret Maclaurin dari fungsi $f(x) = \dfrac{1}{(1-ax)^2}$

Pembahasan :

(a) Perhatikan bahwa

$$f(x) = \frac{1}{1-ax} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1-a(0)} = 1$$

$$f'(x) = \frac{a}{(1-ax)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{a}{(1-a(0))^2} = a$$

$$f''(x) = \frac{2a^2}{(1-ax)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{2a^2}{(1-a(0))^3} = 2a^2$$

$$f'''(x) = \frac{6a^3}{(1-ax)^4} \Rightarrow f'''(0) = \frac{6a^3}{(1-a(0))^4} = 6a^3$$

$$f''''(x) = \frac{24a^4}{(1-ax)^5} \Rightarrow f''''(0) = \frac{24a^4}{(1-a(0))^5} = 24a^4$$

$$f'''''(x) = \frac{120a^5}{(1-ax)^6} \Rightarrow f'''''(0) = \frac{120a^5}{(1-a(0))^6} = 120a^5$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = \frac{n!a^n}{(1-ax)^{n+1}} \Rightarrow f^n(0) = \frac{n!a^n}{(1-a(0))^{n+1}} = n!a^n$$

Polinomial Macalurin dari fungsi tersebut

$$\begin{aligned}
p_\infty(x) &= f(0) - \frac{f'(0)}{1!}(x-(0)) + \frac{f''(0)}{2!}(x-(0))^2 - \frac{f'''(0)}{3!}(x-(0))^3 \\
&\quad + \frac{f''''(0)}{4!}(x-(0))^4 - \frac{f'''''(0)}{5!}(x-(0))^5 + \cdots \\
&= 1 + \frac{a}{1!}(x-(0)) + \frac{2a^2}{2!}(x-(0))^2 + \frac{6a^3}{3!}(x-(0))^3 \\
&\quad + \frac{24a^4}{4!}(x-(0))^4 + \frac{120a^5}{5!}(x-(0))^5 + \cdots \\
&= 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + a^4x^4 + a^5x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n
\end{aligned}$$

(b) Perhatikan bahwa dengan hasil dari (a)

$$f(x) = \frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + a^4x^4 + a^5x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$$

turunan pertama dari $f(x)$

$$f'(x) = \frac{a}{(1-ax)^2} = a + 2a^2x + 3a^3x^2 + 4a^4x^3 + 5a^5x^4 + 6a^6x^5 + \cdots$$

masing-masing ruas dibagi a, sehingga deret Maclaurin dari $f(x) = \dfrac{1}{(1-ax)^2}$ adalah

$$\frac{1}{(1-ax)^2} = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + 5a^4x^4 + 6a^5x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n x^n$$

13. **(EAS 2016)**

(a) Tuliskan lima suku pertama dari barisan berikut

$$\left\{\frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

(b) Selidiki apakah barisan berikut merupakan barisan monoton?

(c) Selidiki barisan tersebut konvergen ?

Pembahasan :

(a) Berikut lima suku pertama dari barisan pada soal

$$a_1 = \frac{4(1)^2+2}{(1)^2+3(1)-1} = 2$$

$$a_2 = \frac{4(2)^2+2}{(2)^2+3(2)-1} = 2$$

$$a_3 = \frac{4(3)^2+2}{(3)^2+3(3)-1} = \frac{38}{17}$$

$$a_4 = \frac{4(4)^2+2}{(4)^2+3(4)-1} = \frac{22}{9}$$

$$a_5 = \frac{4(5)^2+2}{(5)^2+3(5)-1} = \frac{34}{13}$$

(b) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{4(n+1)^2+2}{(n+1)^2+3(n+1)-1}\right) - \left(\frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}\right) \\ &= \frac{6(2n^2-2)}{(n^2+3n-1)(n^2+5n+3)} > 0 \end{aligned}$$

dapat dilihat bahwa $a_{n+1} - a_n > 0$ atau $a_{n+1} > a_n$ untuk semua nilai n bilangan asli. Sehingga barisan $\left\{\frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan monoton naik.

(c) Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1} = \lim_{n\to\infty} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{4+0}{1+0-0} = 4$$

Jadi barisan $\left\{\frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 4.

14. **(EAS 2021)** Diberikan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2}$$

Tuliskan lima suku pertama dari barisan tersebut, dan daptkan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Pembahasan :

Lima suku pertama dari $\{a_n\}$ adalah

$$a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^2} = \frac{4}{2^2} = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^2} = \frac{9}{3^2} = 1$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^2} + \frac{7}{4^2} = \frac{16}{4^2} = 1$$
$$a_5 = \frac{1}{5^2} + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^2} + \frac{7}{5^2} + \frac{9}{5^2} = \frac{25}{5^2} = 1$$

Perhatikan bahwa secara umum untuk sembarang nilai n bilangan asli.

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = \frac{1}{n^2}(n^2) = 1$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

jadi barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 1.

15. Diberikan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan

$$a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}$$

Tuliskan lima suku pertama dari barisan tersebut, dan daptkan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Pembahasan :

Lima suku pertama dari $\{a_n\}$

$$a_1 = \frac{1^2}{1^3} = 1$$
$$a_2 = \frac{1^2}{2^3} + \frac{2^2}{2^3} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$
$$a_3 = \frac{1^2}{3^3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^2}{3^3} = \frac{14}{3^3} = \frac{14}{27}$$
$$a_4 = \frac{1^2}{4^3} + \frac{2^2}{4^3} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{4^2}{4^3} = \frac{30}{4^3} = \frac{30}{64}$$
$$a_5 = \frac{1^2}{5^3} + \frac{2^2}{5^3} + \frac{3^2}{5^3} + \frac{4^2}{5^3} + \frac{5^2}{5^3} = \frac{55}{5^3} = \frac{55}{125} = \frac{11}{25}$$

Perhatikan bahwa untuk sembarang nilai n

$$a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

Sehingga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3}$$

jadi barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\dfrac{1}{3}$.

16. Dapatkan nilai deret tak hinggga dari deret-deret berikut :

    (a) $\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\dfrac{1}{7\times 9}+\dfrac{1}{9\times 11}+\cdots=\cdots$

    (b) $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{2\times 4}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{4\times 6}+\cdots=\cdots$

    Pembahasan :

    (a) Perhatikan bahwa dengan dekomposisi pecahan parsial diperoleh

    $$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

    sehingga diperoleh

    $$\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots+\frac{1}{N(N+2)}$$

    $$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)$$

    $$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{N+2}\right]$$

    untuk nilai $N\to\infty$ didapat

    $$\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

    (b) Perhatikan bahwa deret pada soal dibagi menjadi dua deret seperti berikut

    $$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{4\times 6}+\cdots=\cdots$$

    $$=\left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots\right)$$

    Dengan dekomposisi pecahan parsial diperoleh

    $$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

    Perhatikan untuk deret pertama diperoleh

    $$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\cdots+\frac{1}{N(N+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{N+2}\right]$$

untuk nilai $N \to \infty$ didapat

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Sedangkan untuk deret kedua diperoleh

$$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\frac{1}{8\times 10}+\cdots+\frac{1}{N(N+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}\right]$$

untuk nilai $N \to \infty$ didapat

$$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\frac{1}{8\times 10}+\frac{1}{10\times 12}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Jadi

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{4\times 6}+\cdots=\cdots$$

$$= \left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

REFERENSI

[1] Buku Ajar Matematika 2. Departemen Matematika ITS.