PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN GIẢI GẦN ĐÚNG BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT

0.1 Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn là một trong những phương pháp dùng để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân bằng việc phân hoạch miền xác định thành hữu hạn các lưới nhỏ. Nghiệm xấp xỉ được tính tại các điểm lưới của miền xác định.

0.1.1 Bài toán một chiều

Xét bài toán truyền nhiệt một chiều

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < L, 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = p(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(L,t) = q(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{1}$$

Phân hoạch miền $[0, L] \times [0, T]$ thành $I \times N$ điểm lưới. Các điểm lưới cách đều nhau bởi các điểm chia

$$x_i = i\Delta x, \quad i = \overline{1, I+1} \text{ với } \Delta x = \frac{L}{I},$$

và

$$t_n = n\Delta t, \quad n = \overline{1, N+1} \text{ với } \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Gọi $u_i^n \simeq u(x_i, t_n)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút $(x_i, t_n), i = \overline{1, I+1}, n = \overline{1, N+1}$.

Từ điều kiện ban đầu $u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq L$, ta có

$$u_i^1 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{1, I+1}.$$

Từ điều kiện biên $\begin{cases} u(0,t) = p(t), \\ u(L,t) = q(t), \end{cases}$ với $0 \leq t \leq T$, ta có

$$\begin{cases} u_1^n &= p(t_n), \\ u_I^n &= q(t_n), \end{cases} \quad n = \overline{2, N+1}.$$

Từ $u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < L, 0 < t < T$, để xấp xỉ đạo hàm cấp hai theo biến x tại điểm lưới (x_i, t_n), ta sử dụng công thức sai phân trung tâm

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_{i-1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i+1}, t_n)}{\Delta x^2} \\ &\simeq \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}, \quad i = \overline{2, I}, n = \overline{2, N+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Đối với đạo hàm cấp một theo biến thời gian t, ta có thể sử dụng một trong hai công thức sai phân tiến hoặc lùi. Tùy theo việc sử dụng công thức nào, ta có các sơ đồ sai phân khác nhau.

(a) **Sử dụng công thức sai phân tiến**

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} \\ &\simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Thay (2) và (3) vào $u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t)$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + f(x_i, t_n) \\ \Leftrightarrow u_i^{n+1} &= \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) u_i^n + \lambda u_{i+1}^n + \Delta t f(x_i, t_n), \end{aligned} \tag{4}$$

với $\lambda = \frac{c^2 \Delta}{\Delta x^2}$.

Ta có thể viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn như sau

$$\begin{cases} u_i^{n+1} &= \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) u_i^n + \lambda u_{i+1}^n + \Delta t f(x_i, t_n), \\ & \quad i = \overline{2, I}, n = \overline{1, N}, \\ u_1^n &= p(t_n), n = \overline{2, N+1}, \\ u_{I+1}^n &= q(t_n), n = \overline{2, N+1}, \\ u_i^1 &= \varphi(x_i), i = \overline{1, I+1}. \end{cases} \tag{5}$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm $u_i^n, i = \overline{2, I}, n = \overline{2, N+1}$. Từ (4), ta thấy giá trị gần đúng của nghiệm tại thời điểm t_{n+1} được tính trực tiếp thông qua giá trị gần đúng của nghiệm tại thời điểm t_n.

(b) **Sử dụng công thức sai phân lùi**

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_n) - u(x_i, t_{n-1})}{\Delta t} \\ &\simeq \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Thay (2) và (6) vào $u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t)$, ta được

$$\begin{aligned} &\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + f(x_i, t_n) \\ \Leftrightarrow\ & u_i^{n-1} = -\lambda u_{i-1}^n + (1+2\lambda) u_i^n - \lambda u_{i+1}^n - \Delta t f(x_i, t_n) \end{aligned} \tag{7}$$

với $\lambda = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2}$.

Ta có thể viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn như sau

$$\begin{cases} u_i^{n-1} & = -\lambda u_{i-1}^n + (1+2\lambda) u_i^n - \lambda u_{i+1}^n - \Delta t f(x_i, t_n), \\ & \quad i = \overline{2, I}, n = \overline{2, N+1}, \\ u_1^n & = p(t_n), n = \overline{2, N+1}, \\ u_{I+1}^n & = q(t_n), n = \overline{2, N+1}, \\ u_i^1 & = \varphi(x_i), i = \overline{1, I+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm $u_i^n, i = \overline{2, I}, n = \overline{2, N+1}$. Từ (7), với mỗi n từ 2 đến N, ta cho i lần lượt nhận thấy giá trị từ 1 đến $I-1$, kết hợp với điều kiện biên và điều kiện ban đầu, ta được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$AU^n = F^n, \tag{9}$$

trong đó

$$A_{(I+1)\times(I+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U^n_{(I+1)\times 1} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{I-1}^n \\ u_I^n \\ u_{I+1}^n \end{bmatrix}, F^n_{(I+1)\times 1} = \begin{bmatrix} \psi_1(t_n) \\ u_2^{n-1} + \Delta t f(x_2, t_n) \\ u_3^{n-1} + \Delta t f(x_3, t_n) \\ \vdots \\ u_{I-1}^{n-1} + \Delta t f(x_{I-1}, t_n) \\ u_I^{n-1} + \Delta t f(x_I, t_n) \\ \psi_2(t_n) \end{bmatrix}.$$

0.1.2 Bài toán hai chiều

Xét bài toán truyền nhiệt hai chiều với điều kiên biên Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), & 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \\ u(0,y,t) = p_1(y,t), \quad u(a,y,t) = p_2(y,t), & 0 \le y \le b, t \ge 0, \\ u(x,0,t) = q_1(x,t), \quad u(x,b,t) = q_2(x,t), & 0 \le x \le a, t \ge 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & 0 \le x \le a, 0 \le y \le b. \end{cases} \tag{10}$$

Tương tự như với bài toán một chiều, ta phân hoạch miền xác định $[0,a]$ và $[0,b]$ thành $I \times J$ điểm lưới. Các điểm lưới cách đều nhau bởi các điểm chia

$$x_i = i\Delta x, \quad i = \overline{1, I+1} \text{ với } \Delta x = \frac{a}{I},$$

và

$$y_j = j\Delta y, \quad j = \overline{1, J+1} \text{ với } \Delta y = \frac{b}{J}.$$

Xét phân hoạch thời gian chia bởi các điểm

$$t_n = n\Delta t, \quad n = \overline{1, N+1} \text{ với } \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Gọi $u^n_{i,j} \simeq u(x_i, y_j, t_n)$ là giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm nút (x_i, y_j, t_n). Từ điều kiện ban đầu $u(x, y, 0) = \varphi(x, y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, ta có

$$u^1_{i,j} = \varphi(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, I+1}, j = \overline{1, J+1}.$$

Từ điều kiện biên

$$\begin{cases} u(0, y, t) = p_1(y, t), u(a, y, t) = p_2(y, t), & 0 \leq y \leq b, t \geq 0, \\ u(x, 0, t) = q_1(x, t), u(x, b, t) = q_2(x, t), & 0 \leq x \leq a, t \geq 0, \end{cases}$$

ta có

$$u^n_{1,j} = p_1(y_j, t_n), u^n_{I+1,j} = p_2(y_j, t_n), \quad j = \overline{1, J+1}, n = \overline{1, N+1},$$

$$u^n_{i,1} = q_1(x_i, t_n), u^n_{i,J+1} = q_2(x_i, t_n), \quad i = \overline{1, I+1}, n = \overline{1, N+1.}$$

Sử dụng công thức sai phân trung tâm ta được

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u(x_{i-1}, y_j, t_n) - 2u(x_i, y_j, t_n) + u(x_{i+1}, y_j, t_n)}{\Delta x^2} \\ &\simeq \frac{u^n_{i-1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j}}{\Delta x^2}, \end{aligned} \tag{11}$$

và

$$\begin{aligned} u_{yy}(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u(x_i, y_{j-1}, t_n) - 2u(x_i, y_j, t_n) + u(x_i, y_{j+1}, t_n)}{\Delta y^2} \\ &\simeq \frac{u^n_{i,j-1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j+1}}{\Delta y^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Đối với đạo hàm cấp một theo biến thời gian t, ta sử dụng một trong hai công thức sai phân tiến hoặc sai phân lùi.

(a) **Sử dụng công thức sai phân tiến**

$$\begin{aligned} u_t(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u(x_i, y_j, t_{n+1}) - u(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t} \\ &\simeq \frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{13}$$

Thay (11), (12) và (13) vào $u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$, ta được

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= c^2\left(\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2}\right) \\
&\quad + f(x_i, y_j, t_n) \\
\Leftrightarrow \qquad u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \lambda_1(u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) + \lambda_2(u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n \\
&\quad + u_{i,j+1}^n) + \Delta t f(x_i, y_j, t_n)
\end{aligned}$$

với $\lambda_1 = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x^2}$ và $\lambda_2 = \frac{c^2\Delta t}{\Delta y^2}$.

Ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn như sau

$$\begin{cases}
u_{i,j}^{n+1} & = u_{i,j}^n + \lambda_1(u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) + \lambda_2(u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n) \\
& +\Delta t f(x_i, y_j, t_n) \quad i = \overline{2, I}, j = \overline{2, J}, n = \overline{2, N+1}, \\
u_{1,j}^n & = p_1(y_j, t_n), u_{I+1,j}^n = p_2(y_j, t_n), \quad j = \overline{1, J+1}, n = \overline{1, N+1}, \\
u_{i,1}^n & = q_1(x_i, t_n), u_{i,J+1}^n = q_2(x_i, t_n), \quad i = \overline{1, I+1}, n = \overline{1, N+1}, \\
u_{i,j}^1 & = \varphi(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, I+1}, j = \overline{1, J+1}.
\end{cases}$$

(b) **Sử dụng công thức sai phân lùi**

$$\begin{aligned}
u_t(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u(x_i, y_j, t_n) - u(x_i, y_j, t_{n-1})}{\Delta t} \\
&\simeq \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Thay (11), (12) và (15) vào $u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$, ta được

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} &= c^2\left(\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2}\right) \\
&\quad + f(x_i, y_j, t_n) \\
\Leftrightarrow \qquad u_{i,j}^{n-1} &= u_{i,j}^n - \lambda_1(u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) - \lambda_2(u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n) \\
&\quad - \Delta t f(x_i, y_j, t_n)
\end{aligned} \tag{15}$$

với $\lambda_1 = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x^2}$ và $\lambda_2 = \frac{c^2\Delta t}{\Delta y^2}$.

Như vậy ta viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn như sau

$$\begin{cases} u_{i,j}^{n-1} & = (1+2\lambda_1+2\lambda_2)u_{i,j}^n - \lambda_1(u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n) - \lambda_2(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n) \\ & -\Delta t f(x_i, y_j, t_n), \quad i = \overline{2, I}, j = \overline{2, J}, n = \overline{2, N+1}, \\ u_{1,j}^n & = p_1(y_j, t_n), u_{I+1,j}^n = p_2(y_j, t_n), \quad j = \overline{1, J+1}, n = \overline{1, N+1}, \\ u_{i,1}^n & = q_1(x_i, t_n), u_{i,J+1}^n = q_2(x_i, t_n), \quad i = \overline{1, I+1}, n = \overline{1, N+1}, \\ u_{i,j}^1 & = \varphi(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, I+1}, j = \overline{1, J+1}. \end{cases}$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm $u_{i,j}^n, i = \overline{2, I}, j = \overline{2, J}, n = \overline{2, N+1}$. Từ (15), với mỗi n từ 1 đến $N+1$, ta cho i lần lượt nhận thấy giá trị từ 2 đến I và cho j lần lượt nhận giá trị từ 2 đến J, kết hợp với điều kiện biên và điều kiện ban đầu, ta được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$AU^n = F^n,$$

trong đó $A_{M\times M}$ là một ma trận vuông với $M = (I-1)*(J-1)$ (do ta chỉ xét $i = \overline{2, I}$ và $j = \overline{2, J}$), gồm có M khối, mỗi khối là một ma trận vuông kích thước $(I-1)$ được xây dựng như sau:

- Với M khối có đường chéo chính trùng với đường chéo chính của ma trận A, các phần tử của hai đường chéo khối phụ bên trên và bên dưới đường chéo khối chính bằng $-\lambda_1$.
- Những khối liền kề với các khối trên sẽ có các phần tử trên đường chéo chính bằng $-\lambda_2$ và các phần tử còn lại bằng 0.
- Các khối còn lại đều là ma trận không.

Ví dụ, với $I = 3$, $J = 4$ ta được ma trận A như sau

$$A_{6\times 6} = \begin{bmatrix} d & -\lambda_1 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & d & -\lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & d & 0 & 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 & 0 & d & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & -\lambda_1 & d & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & -\lambda_1 & d \end{bmatrix},$$

trong đó $d = 1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2$.

Và

$$U^n_{M\times 1} = \begin{bmatrix} u^n_{2,2} \\ u^n_{3,2} \\ \vdots \\ u^n_{I-1,2} \\ u^n_{I,2} \\ u^n_{2,3} \\ u^n_{3,3} \\ \vdots \\ u^n_{I-1,3} \\ u^n_{I,3} \\ \vdots \\ u^n_{I,J} \end{bmatrix}, F^n_{M\times 1} = \begin{bmatrix} u^{n-1}_{2,2} \\ u^{n-1}_{3,2} \\ \vdots \\ u^{n-1}_{I-1,2} \\ u^{n-1}_{I,2} \\ u^{n-1}_{2,3} \\ u^{n-1}_{3,3} \\ \vdots \\ u^{n-1}_{I-1,2} \\ u^{n-1}_{I,3} \\ \vdots \\ u^{n-1}_{I,J} \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} u^n_{1,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u^n_{I+1,2} \\ u^n_{1,3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u^n_{I+1,3} \\ \vdots \\ u^n_{I+1,J} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} u^n_{2,1} \\ u^n_{3,1} \\ \vdots \\ u^n_{I,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ u^n_{2,J+1} \\ \vdots \\ u^n_{I,J+1} \end{bmatrix}.$$

0.2 Phương pháp Crank Nicolson

Phương pháp Crank Nicolson cũng là một phương pháp sai phân hữu hạn có dạng ẩn, dựa trên công thức hình thang

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(y_n + t_n) + f(y_{n+1} + t_{n+1})]$$

với bước nhảy $h = t_{n+1} - t_n$.

Rời rạc hóa miền xác định tương tự như mục 0.1.1.

Bài toán một chiều

Xấp xỉ đạo hàm theo thời gian như sau:

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} \\ &\simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{16}$$

Xấp xỉ dạo hàm cấp hai của u theo không gian như sau:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i,t_n) &= \frac{1}{2}[\frac{u(x_{i-1},t_n)-2u(x_i,t_n)+u(x_{i+1},t_n)}{\Delta x^2} \\ &\quad + \frac{u(x_{i-1},t_{n+1})-2u(x_i,t_{n+1})+u(x_{i+1},t_{n+1})}{\Delta x^2}] \\ &\simeq \frac{1}{2}(\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{\Delta x^2}+\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}). \end{aligned} \tag{17}$$

Thay (16) và (17) vào $u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t)$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} &= \frac{c^2}{2}(\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{\Delta x^2}+\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}) \\ &\quad + f(x_i,t_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad -\lambda u_{i-1}^{n+1}+(2+2\lambda)u_i^{n+1}-\lambda u_{i+1}^{n+1} &= \lambda u_{i-1}^n+(2-2\lambda)u_i^n+\lambda u_{i+1}^n \\ &\quad + 2\Delta t f(x_i,t_n) \end{aligned}$$

với $\lambda = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x^2}$.

Ta có thể viết lại bài toán dưới dạng sai phân hữu hạn như sau

$$\begin{cases} -\lambda u_{i-1}^{n+1}+(2+2\lambda)u_i^{n+1}-\lambda u_{i+1}^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n+(2-2\lambda)u_i^n+\lambda u_{i+1}^n \\ \qquad\qquad + 2\Delta t f(x_i,t_n),\ i=\overline{2,I}, n=\overline{1,N} \\ u_1^n = p(t_n), n=\overline{2,N+1}, \\ u_{I+1}^n = p(t_n), n=\overline{2,N+1}, \\ u_i^1 = \varphi(x_i), i=\overline{1,I+1}. \end{cases} \tag{18}$$

Ta được hệ phương trình

$$AU^{n+1} = BU^n + F^n,$$

trong đó

$$A_{(I+1)\times(I+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2+2\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2+2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{(I+1)\times(I+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2-2\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 2-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U^{n+1}_{(I+1)\times 1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{I-1}^{n+1} \\ u_I^{n+1} \\ u_{I+1}^{n+1} \end{bmatrix}, U^n_{(I+1)\times 1} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{I-1}^n \\ u_I^n \\ u_{I+1}^n \end{bmatrix}, F^n_{(I+1)\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\Delta t f(x_2, t_n) \\ 2\Delta t f(x_3, t_n) \\ \dots \\ 2\Delta t f(x_{I-1}, t_n) \\ 2\Delta t f(x_I, t_n) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Đối với trường hợp hai chiều, lược đồ Crank-Nicolson được áp dụng hoàn toàn tương tự như trong trường hợp một chiều.