

Exercice 1 : Calculs matriciels

Exercice 1.1 : Produit d'une matrice 3×3 par une matrice 3×2

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Questions

1. Vérifier que le produit AB est bien défini.
 2. Calculer la matrice produit AB .
 3. Donner la dimension de la matrice obtenue.
-

Exercice 1.2 : Produit d'une matrice 2×3 par une matrice 3×2

On considère maintenant :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (Synthèse - Application complète). Une entreprise possède deux usines A et B. Chaque mois, la production est répartie selon le modèle suivant :

- L'usine A garde 60% de sa production pour le mois suivant et envoie 40% à B.
- L'usine B garde 70% de sa production pour le mois suivant et envoie 30% à A.
- Chaque usine reçoit en plus un approvisionnement extérieur : 50 unités pour A et 30 unités pour B.

On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant les productions des usines A et B au mois n, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que $U_{n+1} = AU_n + C$ où l'on déterminera les matrices A et C.
- 2) Calculer les productions U_1 , U_2 et U_3 pour les trois premiers mois.
- 3) Déterminer la production d'équilibre S (matrice stationnaire) vérifiant $S = AS + C$.
- 4) Calculer $(I_2 - A)^{-1}$ et en déduire S.
- 5) On pose $V_n = U_n - S$. Montrer que $V_n = A^n V_0$.
- 6) Calculer V_0 puis A^2 .
- 7) Étudier la convergence de la suite (U_n) sachant que A^n converge vers une matrice limite L quand $n \rightarrow +\infty$.
- 8) Déterminer vers quelle production stable les deux usines convergent-elles à long terme.
- 9) Si on double l'approvisionnement extérieur (100 pour A et 60 pour B), comment évolue la production d'équilibre ?
- 10) Quelle condition sur la matrice A garantit la convergence de la suite (U_n) ?