Programação Dinâmica

A Programação Dinâmica procura resolver o problema de otimização através da análise de uma seqüência de problemas mais simples do que o problema original.

A resolução do problema original de N variáveis é caracterizado pela determinação de uma variável e pela resolução de um problema que possua uma variável a menos (N-1). Este por sua vez é resolvido pela determinação de uma variável e pela resolução de um problema de N-2 variáveis e assim por diante. O problema a ser resolvido é do tipo:

-existem N atividades ou estágios numerados de 1 a N.

-X_i é a quantidade de recursos colocados nas atividades ou estágios i $(X_i \geq 0)$

-$g_i(X_i)$ é a função que representa o ganho ou o retorno devido a colocação de X_i recursos na atividade i, $Q = x_1 + x_2 + ... + x_N$ é a quantidade total de recursos disponíveis.

-O objetivo é determinar a distribuição de recursos X_i que maximiza o ganho total.

$R(X_1, X_2,...,X_N) = g_1(X_1) + g_2(X_2) + ...g_N(X_N)$.

considerando que as atividades são independentes e os ganhos g_i sejam aditivos.

Formulação

Maximizar R depende de Q e N. Esta dependência é explicada da seguinte maneira:

$$f_N(Q) = \underset{X_i}{\text{Max}} \{R(X_1, X_2, ..., X_N)\}$$

$f_N(Q)$ representa o ganho máximo devido à distribuição de Q quantidades de recursos nas N atividades.

Condição Inicial

a)$g_i(0) = 0 \Rightarrow$ para cada atividade i (ganho nulo para zeros recursos distribuídos).

b)$f_N(0) = 0 \Rightarrow$ para N = 1,2,... (se o total Q de recursos é nulo, o ganho máximo também é nulo).

c)$f_1(Q) = g_1(Q) \Rightarrow$ se existir N = 1 atividade, então $R(X_1) = g_1(X_1)$.

Relação de Recorrência entre $f_N(Q)$ e $f_{N-1}(Q)$

Ao atribuir a quantidade $X_N \; (0 \leq X_N \leq Q)$ de recursos à atividade N, restarão $Q-X_N$ recursos a serem distribuídos nas N-1 atividades restantes e o ganho máximo proveniente dessas N-1 atividades pode ser expresso por $f_{N-1}(Q-X_N)$. Sendo assim, o ganho total das N atividades pode ser expresso por:

$$g_N(X_N) + f_{N-1}(Q - X_N)$$

e se escolhermos X_N, que maximize esse ganho, teremos o valor $f_N(Q)$ do ganho máximo devido à aplicação de Q recursos em N atividades. Temos então a relação fundamental da Programação Dinâmica, dada por:

$$f_N(Q) = \underset{0 \le X_N \le Q}{\text{Max}} \left\{ g_N(X_N) + f_{N-1}(Q - X_N) \right\} \text{para} \quad N = 2,3,\ldots$$

$$\text{para} \quad N = 1 \Rightarrow f_1(Q) = g_1(Q)$$

<u>Exemplo : Problema de Investimento de Capital</u>

Q = \$6,00 unidades de capital disponível

N = 3 atividades diferentes para investimento e as funções de ganho $g_i(X_i)$ dadas pelo quadro abaixo:

Q	$g_1(Q)$	$g_2(Q)$	$g_3(Q)$
0	0	0	0
1	15	15	26
2	40	40	40
3	80	60	45
4	90	70	50
5	95	73	51
6	100	75	53

Qual a distribuição ótima do recurso Q = \$6,00 nas 3 atividades ?

Obtenção da função $f_1(Q)$ da atividade 1

Condição inicial

$$f_1(0) = g_1(0) = 0$$
$$f_1(1) = g_1(1) = 15$$
$$f_1(2) = g_1(2) = 40$$
$$f_1(3) = g_1(3) = 80$$
$$f_1(4) = g_1(4) = 90$$
$$f_1(5) = g_1(5) = 95$$
$$f_1(6) = g_1(6) = 100$$

Obtenção da função $f_2(Q)$ da atividade 2

$f_N(Q)$ para N=2

Para Q = 0, $f_2(0) = 0$ pela condição inicial (b)

$$\text{Para} \quad Q = 1, \quad f_2(1) = \underset{0 \le X_2 \le 1}{\text{Max}} \left\{ g_2(X_2) + f_1(1 - X_2) \right\}$$

e como os valores possíveis de X_2 são 0 e 1, temos:

$$f_2(1) = \text{Max}\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(1) = 0 + 15 = 15 \\ g_2(1) + f_1(0) = 15 + 0 = 15 \end{Bmatrix} = 15 \quad \text{para} \quad X_2 = 0 \quad \text{ou} \quad X_2 = 1$$

escolhemos, como solução ótima $X_2 = 0$ (poderia ter sido $X_2 = 1$).

$$\text{Para} \quad Q = 2, \quad f_2(2) = \underset{0 \le X_2 \le 2}{\text{Max}} \left\{ g_2(X_2) + f_1(2 - X_2) \right\}$$

e como os valores possíveis de X_2 são 0, 1 e 2 temos:

$$f_2(2) = \text{Max}\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(2) = 0 + 40 = 40 \\ g_2(1) + f_1(1) = 15 + 15 = 30 \\ g_2(2) + f_1(0) = 40 + 0 = 40 \end{Bmatrix} = 40 \quad \text{para} \quad X_2 = 0 \quad \text{ou} \quad X_2 = 2$$

escolhemos, como solução ótima $X_2 = 0$ (poderia ter sido $X_2 = 2$).

$$\text{Para} \quad Q = 3, \quad f_2(3) = \underset{X_2}{0 \le \text{Max} \le 3} \quad \{g_2(X_2) + f_1(3 - X_2)\}$$

e como os valores possíveis de X_2 são 0, 1, 2 e 3 temos:

$$f_2(3) = \text{Max}\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(3) = 0 + 80 = 80 \\ g_2(1) + f_1(2) = 15 + 40 = 55 \\ g_2(2) + f_1(1) = 40 + 15 = 55 \\ g_2(3) + f_1(0) = 60 + 0 = 60 \end{Bmatrix} = 80 \quad \text{para} \quad X_2 = 0$$

Prosseguindo, pode-se encontrar:

Para Q = 4, $f_2(4) = 95$, para $X_2 = 1$

Para Q = 5, $f_2(5) = 120$, para $X_2 = 2$

Para Q = 6, $f_2(6) = 140$, para $X_2 = 3$

Obtenção da função $f_3(Q)$ da atividade 3

De maneira análoga, obtemos $f_3(Q)$:

$$\text{Para} \quad Q = 2, \quad f_3(2) = \underset{0 \le X_3 \le 2}{\text{Max}} \{g_3(X_3) + f_2(2 - X_3)\}$$

$$f_3(2) = \text{Max}\begin{Bmatrix} g_3(0) + f_2(2) = 0 + 40 = 40 \\ g_3(1) + f_2(1) = 26 + 15 = 41 \\ g_3(2) + f_2(0) = 40 + 0 = 40 \end{Bmatrix} = 41 \quad \text{para} \quad X_3 = 1$$

Quadro dos Valores de $f_N(Q)$

Q	X_1	$f_1(Q)$	X_2	$f_2(Q)$	X_3	$f_3(Q)$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	15	0	15	1	26
2	2	40	0	40	1	41
3	3	80	0	80	1	80
4	4	90	1	95	0	106
5	5	95	2	120	1	121
6	6	100	3	140	1	146

Ganho Máximo do Investimento

Na coluna $f_3(Q)$ obtém-se como ganho máximo correspondente ao investimento nas 3 atividades, o valor \$146,00, para Q = 6.

A distribuição é:

a) para a atividade 3: X_3 = \$1,00 $\Rightarrow$ $f_3(Q) = 146$ e subtraindo o ganho $g_3(1) = 26$ (do quadro de ganhos) restam ainda 146-26 = 120 unidades que correspondem ao ganho da aplicação de Q = 5 unidades nas outras 2 atividades.

b) para a atividade 2, o ganho de 120 unidades corresponde a aplicação de $X_2 = 2$ unidades na atividade e

c) para a atividade 1, restam, portanto, $Q-X_3-X_2 = 3$ unidades a serem aplicadas. Portanto, $X_1 = 3$.

Solução Ótima

$X_1 = 3$ com $g_1(3) = 80$, $X_2 = 2$ com $g_2(2) = 40$, $X_3 = 1$ com $g_3(1) = 26$ e

$R = g_1 + g_2 + g_3 =$ \$146,00

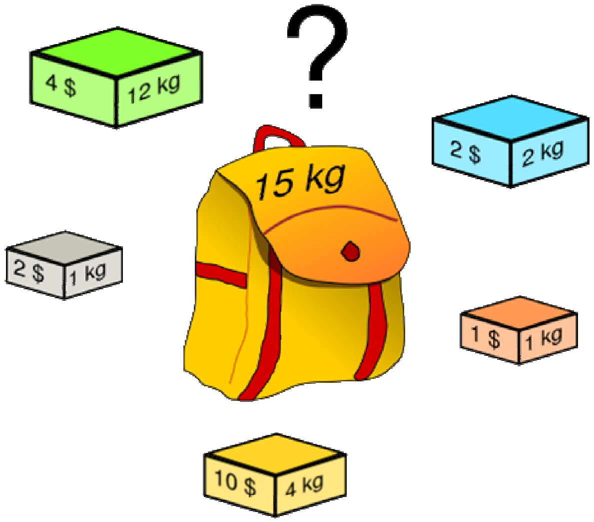
Problema da Mochila (*Knapsack problem*)

Objetivo: maximizar a somatória dos valores dos itens que serão colocados na mochila, respeitando a sua capacidade.

Existem n itens. Cada item i possui um valor c_i e um peso w_i associado. A capacidade da mochila é L. As variáveis de controle são x_i tal que:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq L \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$



Código MPL para o exemplo da figura

MAX 4X1 + 2X2 + 10X3 + 1X4 + 2X5

SUBJECT TO

12X1 + 1X2 + 4X3 + 1X4 + 2X5 <= 15;

BINARY X1 X2 X3 X4 X5

Outra “versão” deste problema é quando as variáveis de controle não são binárias, mas sim inteiras (neste caso a solução irá determinar quantas unidades de cada produto serão colocados na mochila):

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq L \\ x_i \geq 0 \quad e \in Z \end{cases}$$

Outra “versão” deste problema é quando as variáveis de controle são reais, limitadas por valores máximos b_i (neste caso a solução irá determinar a quantidade (grandeza contínua) de cada produto que será colocado na mochila):

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq L \\ 0 \leq x_i \leq b_i \end{cases}$$

Exemplo

Um navio pode carregar 4 toneladas. Existem 3 itens. A seguinte tabela fornece o peso unitário w_i em toneladas e o retorno unitário c_i em \$ para cada item i. Como o navio deve ser carregado para maximizar o retorno total?

Item i	$\mathbf{w_i}$	$\mathbf{c_i}$
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Uma vez que os pesos w_i e o peso máximo que o navio pode carregar W são inteiros, as variáveis x_i devem ser somente inteiras também.

Porque $w_3 = 1$, o número máximo de itens 3 que o navio pode carregar é 4/1 = 4, que significa que os valores de m_3 são 0,1,2,3,4. Uma alternativa m_3 é viável somente se $w_3 m_3 \leq x_3$

$$f_3(x_3) = \max_{m_3}\{14m_3\}, \max\{m_3\} = \left[\frac{4}{1}\right] = 4$$

	$14m_3$					**Solução ótima**	
x_3	m_3=0	m_3=1	m_3=2	m_3=3	m_3=4	$f_3(x_3)$	m_3
0	0	---	---	---	---	0	0
1	0	14	---	---	---	14	1
2	0	14	28	---	---	28	2
3	0	14	28	42	---	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

$$f_2(x_2) = \max_{m_2}\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}, \max\{m_2\} = \left[\frac{4}{3}\right] = 1$$

	$47m_2+f_3(x_2-3m_2)$		**Solução ótima**	
x_2	$m_2=0$	$m_2=1$	$f_2(x_2)$	m_2
0	0+0=0	---	0	0
1	0+14=14	---	14	0
2	0+28=28	---	28	0
3	0+42=42	47+0=47	47	1
4	0+56=56	47+14=61	61	1

$$f_1(x_1) = \max_{m_1}\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}, \max\{m_1\} = \left[\frac{4}{2}\right] = 2$$

	$31m_1+f_2(x_1-2m_1)$			Solução ótima	
x_1	$m_1=0$	$m_1=1$	$m_1=2$	$f_1(x_1)$	m_1
0	0+0=0	---	---	0	0
1	0+14=14	---	---	14	0
2	0+28=28	31+0=31	---	31	1
3	0+47=47	31+14=45	---	47	0
4	0+61=61	31+28=59	62+0=62	62	2

Solução ótima

$m_1 = 2$

$x_2 = x_1 - 2m_1$

$x_2 = 4 – 2 \text{ x } 2 = 0 \Rightarrow m_2 = 0$

$x_3 = x_2 – 3m_2$

$x_3 = 0 – 3 \text{ x } 0 = 0 \Rightarrow m_3 = 0$

$m_1 = 2, m_2 = 0, m_3 = 0$

Z = \$62,00