



2024年江苏省C++编程爱好者线上交流活动

研 讨 专 题

图 结 构

主 讲：陈卓

日 期：2024/07/04



目录

CONTENTS



1

模拟讲评

2

图论算法的直接应用

3

图性质的利用

4

图的构造

5

感谢观看



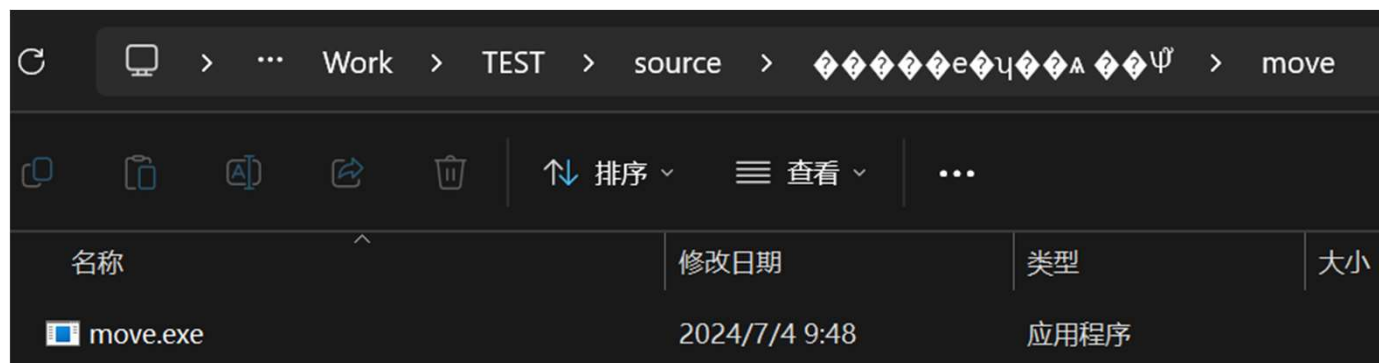
模拟讲评

✓ 应该.....挺友好的吧

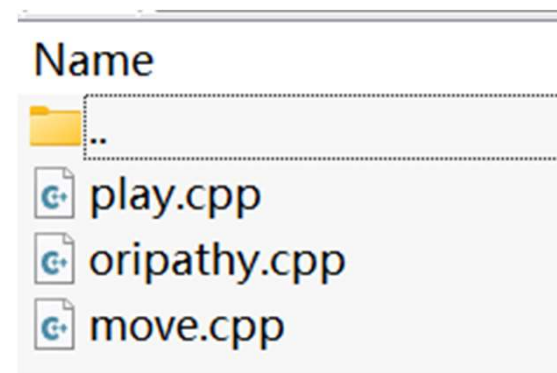


2024年江苏省C++编程爱好者线上交流活动

特别提醒



不要建子文件夹
提交的是源代码

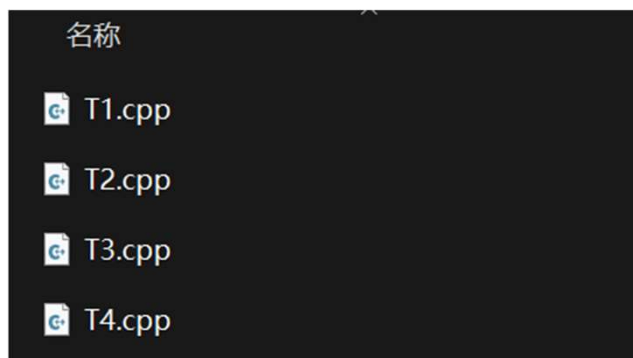


要建立姓名文件夹

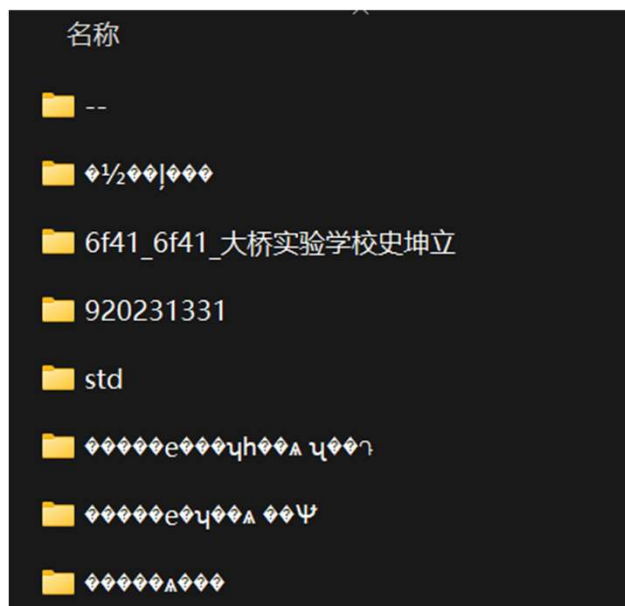


2024年江苏省C++编程爱好者线上交流活动

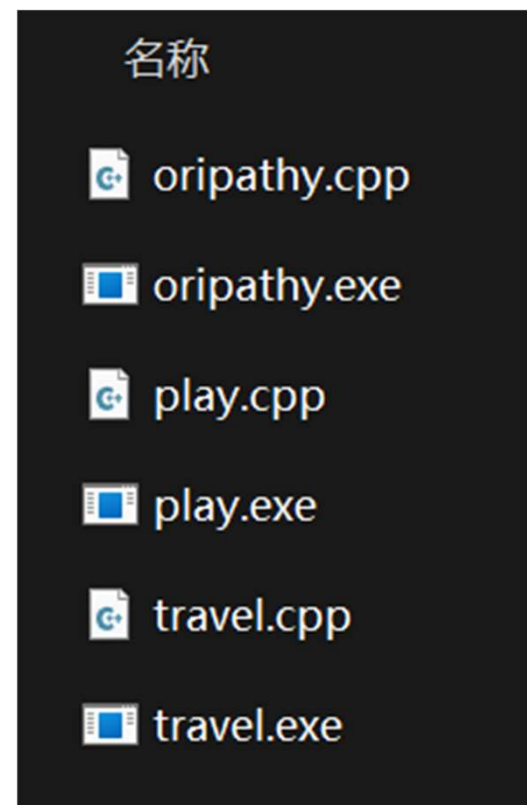
特别提醒



源程序名称



我也不知道怎么回事



只交
代码



考试相关

- 如何编译
- 编译错误?
- 如何使用大样例
- 如何 I/O



T1

- 将给出的 n 个正整数划分至两个非空集合，使得两个集合中所有数的乘积互质
- 求方案数对 $10^9 + 7$ 取模的结果
- 其实和二分图毫无关系
- 不互质的两个数一定会被划分到同一个集合中
- 若 $\gcd(a_i, a_j) \neq 1$ ，连边
- 同一个连通块的数字一定属于同一个集合
- 连通块任意组合形成两个集合
- 要求集合非空，故答案为 $2^k - 2$



T1

- 将给出的 n 个正整数划分至两个非空集合，使得两个集合中所有数的乘积互质
- 求方案数对 $10^9 + 7$ 取模的结果
- 若 $\gcd(a_i, a_j) \neq 1$ ，连边。 $O(n^2)$
- 不需要全都连一遍！
- 对于每个范围内的质数，记录上一个含有此因子的 a_{last}
- 将 a_i 质因数分解，向各因子的 a_{last} 连边并更新各因子的 last
- $O(n \times \text{因子个数})$
- 甚至不需要建图，并查集即可



T2

- 注意到一个单词只有首尾的三个字母是有用的
- 以三个字母作为结点编号，首三个字母向尾三个字母连边
- 当一个结点
 - 出度为 0，为必胜点
 - 每条出边都指向必败点，也为必胜点
 - 有一条出边指向必胜点，则为必败点
 - 否则，平局
 - 存在环
 - 环可能有指向必胜/必败点的出边，有环不一定有平局
 - 不过不用考虑
- 建立反向图，以拓扑排序的顺序跑即可



T3

- 答案似乎具有单调性?
- 二分最短时间 T , 干员向 T 时间内能到达的城市连边
 - 注意到 N 小到刚好可以跑 Floyd, 预处理任意两点最短路
 - 干员 - 目的连边
 - 二分图匹配
 - 二分答案的判断条件即为最大匹配数 $\geq K$



T4

- 多次询问两点最短路, $E - V \leq 20$
- 几乎是棵树
 - 拎出任意一棵生成树
 - 非树边至多 21 条
- 最短路的可能情形:
 - 路径中不存在非树边
 - LCA, $O(1)$ 查询
 - 路径中存在非树边
 - 枚举边? 枚举点! 至多 42 个点在非树边上
 - 枚举最短路中经过的特殊点
 - 至多 42 次 Dijkstra 预处理, 即可做到 $O(1)$ 查询



图论算法的直接应用

✓ 不那么板子的板子



例 1. Make It Connected

- 给定 n 个点, 点权为 a_1, \dots, a_n , 连接 a_i, a_j 的代价为 $a_i + a_j$
- 另有 m 种以 w_i 代价连接 u_i, v_i 的方式
- 求构造出连通的图的最小代价
- $n, m \leq 2 \times 10^5$; $a_i, w_i \leq 10^{12}$
- $O(n^2)$ 连边?
- 先不考虑使用特殊方式
 - 我们要在一个完全图上跑最小生成树
 - 令 $u = \operatorname{argmin}(a_i)$ 。最小生成树一定是 u 向各点连边
 - 反证法, 显然
 - 把这 $n - 1$ 条边记下来
- $n - 1 + m$ 条边一起, 跑最小生成树即可



例 2

- 给定一个带边权的有向图，求一条途径使得其上第 k 大的边权最大
- 途径：既可以重复经过边，又可以重复经过点
- $|V| \leq 5 \times 10^4, |E| \leq 5 \times 10^5$
- 考虑二分答案
 - 将边权 $\geq mid$ 的置为 1，否则置为 0
 - 判断条件：1 到 n 的最长途径长度是否 $\geq k$
 - 缩点，记录每个 SCC 中是否有边的边权为 1
 - 如果 1 所在的 SCC 到 n 所在的 SCC 中的任意一条路径上有一个 SCC 的权值不为 0，最长途径可以取到正无穷
 - 否则我们只需要考虑 SCC 之间的边，拓扑序上 DP 即可
- $O((V + E)\log(\max w_i))$



图性质的利用

✓ 注意力涣散



例 3. Number Clicker

- 给定三个数 u, v, p , 可以进行若干次如下操作之一
 - $u \leftarrow (u + 1) \bmod p$
 - $u \leftarrow (u - 1) \bmod p$
 - $u \leftarrow u^{p-2} \bmod p$
- 求不超过 200 步的方案使得最终 u 变为 v
- $u, v < p \leq 10^9 + 9$, p 为质数
- 非常莫名其妙的求逆元?
 - 操作 1、2 互逆
 - 操作 3 也是可逆的!
- 于是可以双向 BFS



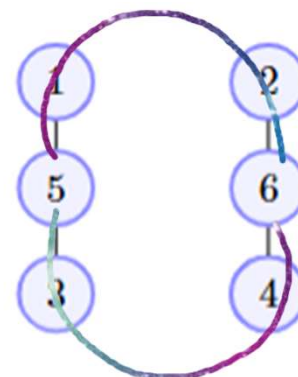
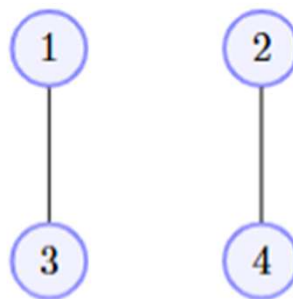
例 3. Number Clicker

- 搜索空间是不是太大了？
- 求逆元操作会使 u 的值非常随机
 - 近似地认为这张图是随机的
- 从 u 出发进行 BFS，取出前 \sqrt{p} 个状态后反向 BFS
 - 找不到解的概率几乎为 0
- 生日悖论
 - 23 个人里有两个生日相同的人的概率为
 - 50.7%



T3废案

- 给定一张简单无向图，询问最大极差环的极差
- 两条边属于同个环 \Leftrightarrow 两条边属于同个边双
 - 必要性：环是边双
 - 充分性：
- 从而只需找到边双中的最大边与最小边
- Tarjan 找桥，DFS 即可
- $O(V + E)$





图的构造

✓ 构造好难.....



T2废案

- 给定一个 n 排列 p , 每次操作可以交换 p_i, p_j
- 求使得 p 恰好含有一个逆序对的最小操作次数
- 写完发现和 T1 并查集算连通块撞车了, 但是 T1 更友好一些
- 逆序对为 1 的排列, 只可能对 $1 \dots n$ 排列交换 $(i, i + 1)$ 得到
- 建边 $i \rightarrow p_i$, 可以发现这张图由一些环划分
- 将 p 变为 $1 \dots n$ 的最小次数为?
 - 对于一个环, 需要 $size - 1$ 次交换使其变为升序。
 - $\sum (size - 1) = n - cycles$
- 交换 $(i, i + 1)$?



T2废案

- 给定一个 n 排列 p , 每次操作可以交换 p_i, p_j
- 求使得 p 恰好含有一个逆序对的最小操作次数
- 讨论 $n - 1$ 种 $(i, i + 1)$
 - 假设 p 中有 $x \rightarrow i, y \rightarrow i + 1$
 - 对于当前考虑的 $(i, i + 1)$, 需要把上面的两边换成 $x \rightarrow i + 1, y \rightarrow i$
 - 观察一下对 *cycles* 的影响:
 - 若 x, y 在同一个环中, 环分裂, *cycles* ++
 - 若 x, y 不在同一个环中, 环合并, *cycles* --
 - 无需真正删边, 并查集维护即可



例 4. Magical Ornament

- 从 $1 \dots n$ 中可重复地选择数字构造一个数列
- 有 m 个规定允许 (i, j) 相邻, 顺序不限。要求数列中所有的 (a_t, a_{t+1}) 均符合规定
- 判断是否存在这样的数列, 且包含 c_1, \dots, c_k 中的所有数字, 并给出数列的最短长度
- $n, m \leq 10^5$; $k \leq 17$
- 如何表达约束?
 - 对于每个规定 (i, j) , 两点连边
 - 于是我们只需要找到一个经过 c_1, \dots, c_k 所有点的最短路
- 观察到 k 非常小, 考虑状态压缩。用 S 表示 c_1, \dots, c_k 是否在路径上
- 令 $f_{S,i}$ 表示状态为 S 且以 i 结尾的最短路长度, 有转移方程
 - $f_{S,i} = \min\{f_{S',j} + \text{dis}_{i,j}\}$, 其中 $S' \subset S$
- $\text{dis}_{i,j}$ 中的 $i \in \{c_1, \dots, c_k\}$, 因此复杂度为 $O(kn \log n + 2^k k^2)$



2024年江苏省C++编程爱好者线上交流活动

感谢观看



主 讲：陈卓

日 期：2024/07/04