

# 2024 年计算机编程素养提升交流活动

## 拔尖班

### 实战模拟(二)

时间：2024 年 7 月 8 日 8:00 ~ 11:30

题目名称	1 + 6 = 7	Routing	Earthquakes	Delete Range Mex
题目类型	传统型	传统型	传统型	传统型
输入文件名	T1.in	T2.in	T3.in	T4.in
输出文件名	T1.out	T2.out	T3.out	T4.out
每个测试点时限	1.0 秒	1.0 秒	1.0 秒	2.0 秒
内存限制	256 MiB	256 MiB	256 MiB	256 MiB
测试点数目	20	20	20	20
测试点是否等分	是	是	是	是

提交源程序文件名

对于 C++ 语言	T1.cpp	T2.cpp	T3.cpp	T4.cpp
-----------	--------	--------	--------	--------

编译选项

对于 C++ 语言	-O2 -std=c++14 -static
-----------	------------------------

注意事项：

1. 本场测试只允许使用 C++ 语言。
2. 文件名 (程序名和输入输出文件名) 必须严格按照题目要求。
3. C++ 中函数 `main()` 的返回值类型必须是 `int`，程序正常结束时的返回值必须是 0。
4. 在机房测试的同学首先新建一个测试文件夹，文件夹名称为**学校和姓名**，并将所有的程序文件放到该文件夹内。
5. 若无特殊说明，题目中一行内有多个输入或输出时，默认使用空格间隔，结果的比较方式为全文比较 (即过滤行末空格及文末回车)。
6. 测试结束时将**文件夹**提交到教师机上。

$$1 + 6 = 7$$

**【题目描述】**

给定正整数  $A_1, A_2, A_3$ 。求满足以下所有条件的正整数三元组  $(X_1, X_2, X_3)$  的数量，结果对 998244353 取模。

- $X_1$  是一个十进制表示中有  $A_1$  位的正整数。
- $X_2$  是一个十进制表示中有  $A_2$  位的正整数。
- $X_3$  是一个十进制表示中有  $A_3$  位的正整数。
- $X_1 + X_2 = X_3$ 。

给定每个输入文件的  $T$  个测试用例，解决每个测试用例。

**【英文描述】**

You are given positive integers  $A_1, A_2, A_3$ . Find the number, modulo 998244353, of tuples of positive integers  $(X_1, X_2, X_3)$  that satisfy all of the following conditions.

- $X_1$  is a positive integer with  $A_1$  digits in decimal notation.
- $X_2$  is a positive integer with  $A_2$  digits in decimal notation.
- $X_3$  is a positive integer with  $A_3$  digits in decimal notation.
- $X_1 + X_2 = X_3$ 。

You are given  $T$  test cases per input file; solve each of them.

**【输入格式】**

从文件 `T1.in` 读入数据。

输入的第一行包含一个整数  $T$ ，代表测试用例个数；

接下来  $T$  行，每行包含 3 个整数。

**【输出格式】**

输出到文件 `T1.out` 中。

输出  $T$  行，第  $i$  行应包含第  $i$  个测试用例的答案。

**【样例 1 输入】**

```
4
1 1 1
1 6 7
167 167 167
111 666 777
```

**【样例 1 输出】**

```
36
45
731780675
0
```

**【样例解释】**

对于第一个测试用例，满足条件的三元组例如  $(X_1, X_2, X_3) = (1, 6, 7), (2, 1, 3)$ 。另一方面，不满足条件的三元组例如  $(X_1, X_2, X_3) = (6, 7, 13), (3, 4, 5)$ 。有 36 个满足条件的三元组  $(X_1, X_2, X_3)$ ，因此打印 36。

对于第三个测试用例，记得输出结果对 998244353 取模。

对于第四个测试用例，可能没有满足条件的三元组  $(X_1, X_2, X_3)$ 。

**【数据范围】**

- $1 \leq T \leq 10^5$ ;
- $1 \leq A_i \leq 10^9$
- 所有输入值都是整数。

# Routing

## 【题目描述】

有一个包含  $N$  行  $N$  列的网格。令  $(i, j)$  表示从上往下数第  $i$  行、从左往右数第  $j$  列的单元格，其中  $(1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N)$ 。每个单元格一开始会被涂成红色或蓝色，如果  $c_{i,j} = \text{R}$ ，则代表单元格  $(i, j)$  是红色，如果  $c_{i,j} = \text{B}$ ，则代表单元格  $(i, j)$  是蓝色。你希望将一些单元格改成紫色，以同时满足以下两个条件：

- **条件 1：**从单元格  $(1, 1)$  移动到单元格  $(N, N)$ ，保证存在一条路径使其只经过红色和紫色。
- **条件 2：**从单元格  $(1, N)$  移动到单元格  $(N, 1)$ ，保证存在一条路径使其只经过蓝色和紫色。

你可以通过不断移动到达相邻的**水平**或**垂直**单元格。

那么最少需要将多少个单元格改成紫色，才能满足上述条件？

## 【英文描述】

There is a grid with  $N$  rows and  $N$  columns. Let  $(i, j) (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N)$  denote the cell at the  $i$ -th row from the top and the  $j$ -th column from the left. Each cell is initially painted red or blue, with cell  $c_{i,j}$  being red if  $c_{i,j} = \text{R}$  and blue if  $c_{i,j} = \text{B}$ . You want to change the colors of some cells to purple so that the following two conditions are simultaneously satisfied:

- **Condition 1:** You can move from cell  $(1, 1)$  to cell  $(N, N)$  by only passing through cells that are red or purple.
- **Condition 2:** You can move from cell  $(1, N)$  to cell  $(N, 1)$  by only passing through cells that are blue or purple.

Here, "You can move" means that you can reach the destination from the starting point by repeatedly moving to a horizontally or vertically adjacent cell of the relevant colors.

What is the minimum number of cells that must be changed to purple to satisfy these conditions?

## 【输入格式】

从文件 `T2.in` 读入数据。

输入的第一行包含一个整数  $N$ ；

接下来  $N$  行，读入这个矩阵。其中以 **R** 代表红色，以 **B** 代表蓝色。

## 【输出格式】

输出到文件 `T2.out` 中。

输出仅一行，为最少刷成紫色的格子数。

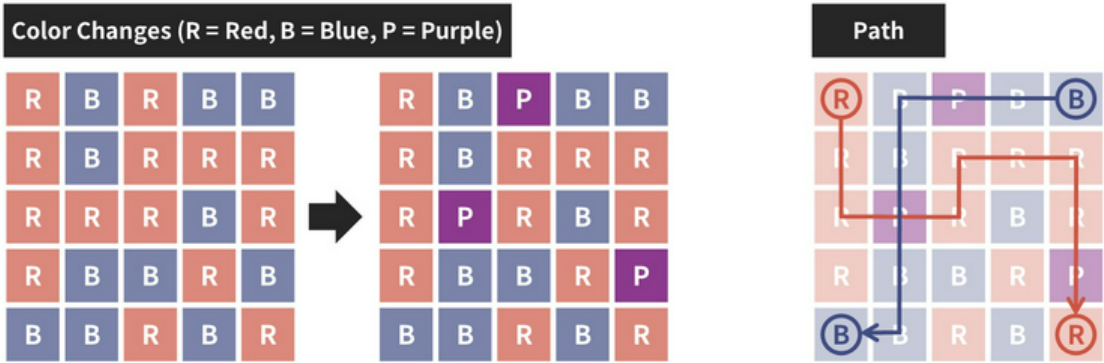
## 【样例 1 输入】

5  
RBRBB  
RBRRR  
RRRBR  
RBBRB  
BBRBR

【样例 1 输出】

3

【样例 1 解释】



如图所示，分别将单元格 (1,3), (3,2), (4,5) 的颜色改变为紫色可以满足条件。

【样例 2 输入】

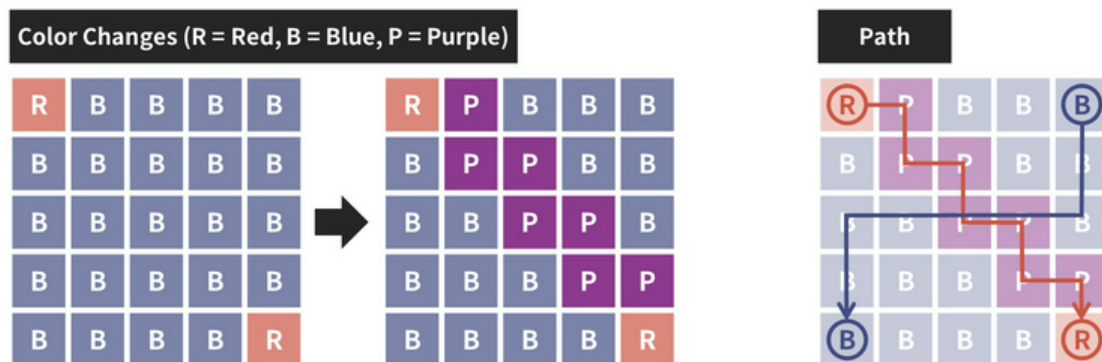
5  
RBBBB  
BBBBB  
BBBBB  
BBBBB  
BBBBB  
BBBBR

【样例 2 输出】

7

【样例 2 解释】

如下图所示，分别将单元格 (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5) 的颜色改变为紫色可以满足条件。



**【样例 3 输入】**

10

RRBBBBBBBBB

BRBBBBBBBBB

BBRRBBBBBBBB

BBBRBBBBBBB

BBBBRRBBBBB

BBBBBRBBBBB

BBBBBBRRRB

BBBBBBBRRB

BBBBBBBRRR

BBBBBBBBRR

### 【样例 3 输出】

3

### 【样例 4 输入】

17

RBBRRBRRRRRBBBBBB  
BBRBRBRBRBRBRBRBR  
BRBRBBBBRBRBRBRBB  
RBRRBBBBBBRRBRRRR  
RRRRRBRRRRRBBRBR  
RRRRRBRRBRBBRRBB  
BBRRRBRRBRBBRRBB  
BBRRRBRRBBBRBRBR

```
RRBBBBBBBBBBRRRR
RRRBRBRBRBRBRBBB
RRBRRRRBRBRBRBBR
RRRBBRBRBBBRBBRR
BBRBBRRRRRBBRBBB
BBBRBBBBBBBBBBRBB
RRRRRBRBRBBRRRRR
BRRRRBBBBRRRBBRBB
BBRRBBRRRBBBRBBR
```

**【样例 4 输出】**

8

**【数据范围】**

- $3 \leq N \leq 500$ ;
- 每个  $c_{i,j}$  是 R 或 B;
- $c_{1,1}$  和  $c_{N,N}$  是 R;
- $c_{1,N}$  和  $c_{N,1}$  是 B;
- $N$  是整数。

# Earthquakes

## 【题目描述】

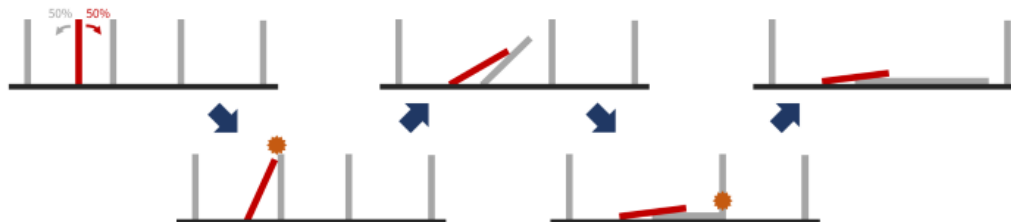
AtCoder 大街是一条在平面上的直线道路。这条路上竖立着  $N$  根高度为  $H$  的电线杆。电线杆按编号为  $1, 2, \dots, N$ 。电线杆  $i (1 \leq i \leq N)$  垂直固定在坐标  $X_i$  处。每根电线杆的底部都固定在地面上，且假设电线杆足够细。

这条街将经历  $N$  次地震。在第  $i$  次地震中 ( $1 \leq i \leq N$ )，会发生以下事件：

1. 如果电线杆  $i$  尚未倒下，它将以  $1/2$  的概率向左或向右倒下。
2. 如果倒下的电线杆碰到了尚未倒下的另一根电线杆（包括在电线杆底部的碰撞），则后者也会以相同的方向倒下。这可能会触发连锁反应。

第 1 步中电线杆倒下的方向与其他电线杆倒下的方向无关。

下图是一次地震中电线杆可能倒下的示例：



为了地震防护，对于每个  $t = 1, 2, \dots, N$ ，找出所有电线杆都在第  $t$  次地震时倒下的概率，将其乘以  $2^N$  并将结果对 998244353 取模后输出。

可以证明要打印的值是整数。

## 【英文描述】

AtCoder Street is a road represented by a straight line on flat ground. There are  $N$  utility poles of height  $H$  standing on this road. The poles are numbered  $1, 2, \dots, N$  in chronological order. Pole  $i (1 \leq i \leq N)$  is vertically positioned at coordinate  $X_i$ . **The base of each pole is fixed to the ground.** Assume that the poles are sufficiently thin.

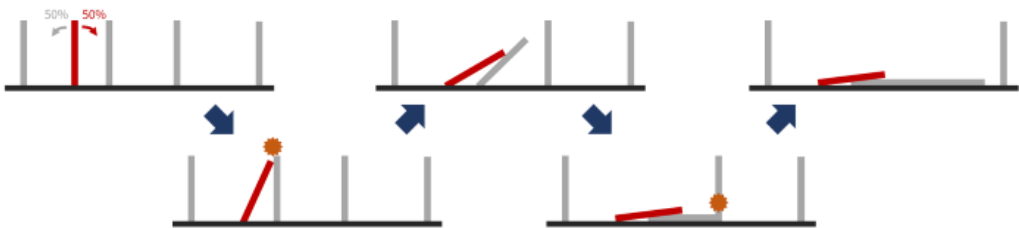
The street will experience  $N$  earthquakes. During the  $i$ -th earthquake ( $1 \leq i \leq N$ ), the following events occur:

1. If pole  $i$  has not yet fallen, it falls to the left or the right on the number line, each with a probability of  $\frac{1}{2}$ .
2. If a falling pole collides with another pole that has not yet fallen (including collision at the base of the pole), the latter pole will also fall in the same direction. This may trigger a chain reaction.

The direction in which a pole falls during step 1 is independent of the direction in which other poles have fallen.



The following figure is an example of how poles might fall during one earthquake:



For earthquake preparedness, for each  $t = 1, 2, \dots, N$ , find the probability that all poles have fallen by exactly the  $t$ -th earthquake. Multiply it by  $2^N$  and print the result modulo 998244353. It can be proved that the values to be printed are integers.

【输入格式】

从文件 `T3.in` 读入数据。

输入的第一行包含两个整数  $N$  和  $H$ ，分别电线杆的数量和高度；

输入的第二行包含  $N$  个整数  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ，分别表示电线杆的坐标。

【输出格式】

输出到文件 `T3.out` 中。

输出  $t = 1, 2, \dots, N$  的答案，以空格分隔。

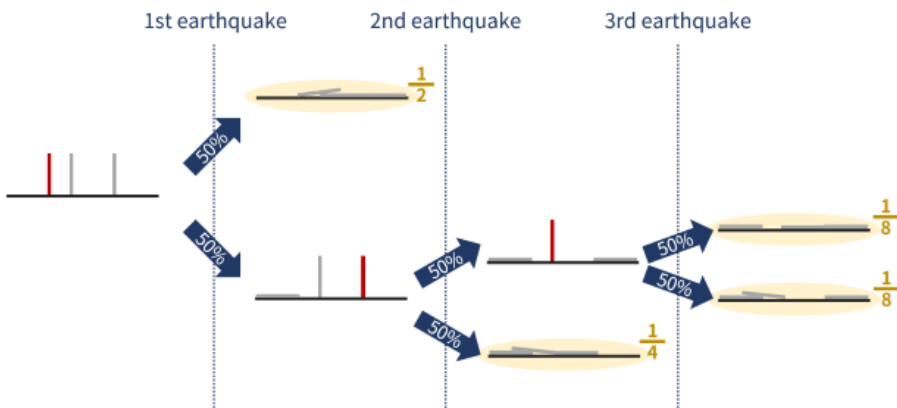
【样例 1 输入】

```
3 2
0 3 1
```

【样例 1 输出】

```
4 2 2
```

【样例 1 解释】



上图显示了该示例输入的电线杆可能倒下的方式，图中的分数表示每种状态发生的概率。

所有电线杆在第 1 次、第 2 次、第 3 次地震前倒下的概率分别为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ ，将这些乘以 8 得到输出 4, 2, 2。

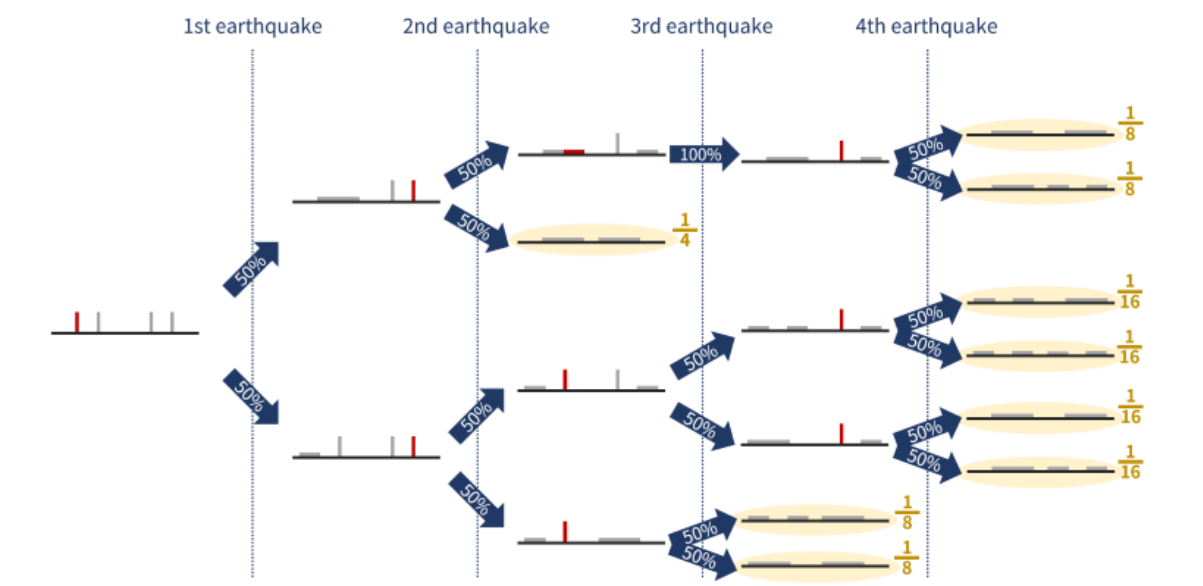
【样例 2 输入】

```
4 10
10 55 20 45
```

【样例 2 输出】

```
0 4 4 8
```

【样例 2 解释】



上图显示了该示例输入的电线杆可能倒下的方式，图中的分数表示每种状态发生的概率。  
所有电线杆在第 1 次、第 2 次、第 3 次、第 4 次地震前倒下的概率分别为  $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ ，将这些乘以 16 得到输出 0, 4, 4, 8。

【数据范围】

- $1 \leq N \leq 2 \times 10^5$ ;
- $1 \leq H \leq 10^9$ ;
- $0 \leq X_i \leq 10^9$  ( $1 \leq i \leq N$ ) ;
- $X_1, X_2, \dots, X_N$  互不相同;
- 所有输入值都是整数。

# Delete Range Mex

## 【题目描述】

给定正整数  $N$  和一个由  $M$  个非负整数组成的序列  $A = (A_1, A_2, \dots, A_M)$ ，其中  $A$  的所有元素都是  $0$  到  $N - 1$  之间的不同整数。

求满足以下条件的  $(0, 1, \dots, N - 1)$  的排列  $P$  的数量，结果对  $998244353$  取模：

- 初始化一个序列  $B = (B_1, B_2, \dots, B_N)$  为  $P$  后，通过重复以下操作若干次，可以使  $B = A$ ：
  - 选择  $l$  和  $r$  使得  $1 \leq l \leq r \leq |B|$ ，如果  $\text{mex}(B_l, B_{l+1}, \dots, B_r)$  存在于  $B$  中，则从  $B$  中移除它。

什么是  $\text{mex}(X)$ ？

对于一个非负的有限整数集合  $X$  来说， $\text{mex}(X)$  被定义为不在  $X$  中的最小非负整数。

## 【英文描述】

You are given a positive integer  $N$  and a sequence of  $M$  non-negative integers  $A = (A_1, \dots, A_M)$ .

Here, all elements of  $A$  are distinct integers between  $0$  and  $N - 1$ , inclusive.

Find the number, modulo  $998244353$ , of permutations  $P$  of  $(0, 1, \dots, N - 1)$  that satisfy the following condition.

- After initializing a sequence  $B = (B_1, B_2, \dots, B_N)$  to  $P$ , it is possible to make  $B = A$  by repeating the following operation some number of times:
  - Choose  $l$  and  $r$  such that  $1 \leq l \leq r \leq |B|$ , and if  $\text{mex}(\{B_l, B_{l+1}, \dots, B_r\})$  is contained in  $B$ , remove it from  $B$ .

What is  $\text{mex}(X)$ ?

For a finite set  $X$  of non-negative integers,  $\text{mex}(X)$  is defined as the smallest non-negative integer that is not in  $X$ .

## 【输入格式】

从文件 `T4.in` 读入数据。

输入的第一行包含两个整数  $N, M$ ；

输入的第二行包含  $M$  个整数  $A_1, A_2, \dots, A_M$ ；

## 【输出格式】

输出到文件 `T4.out` 中。

输出结果。

## 【样例 1 输入】

```
4 2
1 3
```

【样例 1 输出】

8

【样例 1 解释】

初始化  $B = (2, 1, 0, 3)$  后，通过以下步骤，可以使  $B = (1, 3)$ ：

- 选择  $(l, r) = (2, 4)$ ，移除  $\text{mex}(1, 0, 3) = 2$ ，使  $B = (1, 0, 3)$ 。
- 选择  $(l, r) = (3, 3)$ ，移除  $\text{mex}(3) = 0$ ，使  $B = (1, 3)$ 。因此， $P = (2, 1, 0, 3)$  满足条件。

包括上述排列，总共有八种满足条件的排列  $P$ ，因此打印 8。

【样例 2 输入】

4 4  
0 3 2 1

【样例 2 输出】

1

【样例 2 解释】

只有  $P = (0, 3, 2, 1)$  满足条件。

【样例 3 输入】

16 7  
9 2 4 0 1 6 7

【样例 3 输出】

3520

【样例 4 输入】

92 4  
1 67 16 7

【样例 4 输出】

726870122

【样例 4 解释】

结果对 998244353 取模。

【数据范围】

- $1 \leq M \leq N \leq 500$ ;

- $0 \leq A_i < N$ ;
- $A$  的所有元素互不相同;
- 所有输入值都是整数。