双线性插值的方法定义参数曲面

1850217 杨煜

2021 年 3 月 10 日

为了通过双线性插值获得 Coons 曲面。目前我们有四个端点。首先，需要在 u 向进行线性插值，可以得到以 $P(0,V)$ 和 $P(1,v)$ 为边界的直纹面 $P_1(u,v)$

$$P_1(u,v)=(1-u)P(0,v)+uF(1,v),\quad u,v\in[0,1]$$

再在 v 向进行线性插值，可以得到以 $P(u,0)$ 和 $P(u,1)$ 为边界的直纹面 $P_2(u,V)$，

$$P_2(u,v)=(1-v)P(u,0)+vP(u,1),\quad u,v\in[0,1]$$

如果把 $P_1(u,v)$ 和 $P_2(u,v)$ 叠加，产生的新曲面的边界是除给定的边界外，叠加了一个连接边界两个端点的直边:

$$\begin{matrix}(1-v)P(0,0)+vP(0,1)\\(1-v)P(1,0)+vP(1,1)\end{matrix}\qquad v\in[0,1]$$

因此把他们消去。再对过端点 $P(0,0)$、$P(0,1)$ 及 $P(1,0)$、$P(1,1)$ 的直线段，以这两条直线段为边界，构造直纹面 $P_3(u,v)$:

$$\begin{aligned}P_3(u,v)&=(1-u)[(1-v)P(0,0)+vP(0,1)]+u[(1-v)P(1,0)+vP(1,1)]\\&=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P(0,0) & P(0,1)\\P(1,0) & P(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\v\end{bmatrix},\qquad u,v\in[0,1]\end{aligned}$$

$P(u,v)=P_1(u,v)+P_2(u,v)-P_3(u,v),u,v\in[0,1]$ 便是所要求构造的双线性曲面片，也可以写成基函数的形式。$P(u,v)$ 可进一步改写成矩阵的形式:

$$P(u,v)=-\begin{bmatrix}-1 & 1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & P(u,0) & P(u,1)\\P(0,v) & P(0,0) & P(0,1)\\P(1,v) & P(1,0) & P(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1-v\\v\end{bmatrix}$$

展开即为:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(u,v)=(1-u)\mathbf{P}_0(v)+u\mathbf{P}_1(v)+(1-v)\mathbf{Q}_0(u)+v\mathbf{Q}_1(u)\\-(1-u)(1-v)\mathbf{P}_{0,0}-u(1-v)\mathbf{P}_{1,0}-(1-u)v\mathbf{P}_{0,1}-uv\mathbf{P}_{1,1}\end{gathered}$$

即我们所要求得的双线性插值定义参数曲面的方法。