

双线性插值的方法定义参数曲面

1851350 陈扬森

首先, 在 u 向进行线性插值, 可以得到以 $P(0,v)$ 和 $P(1,v)$ 为边界的直纹面 $P_1(u,v)$

$$P_1(u, v) = (1 - u)P(0, v) + uP(1, v), \quad u, v \in [0, 1]$$

再在 v 向进行线性插值, 可以得到以 $P(u,0)$ 和 $P(u,1)$ 为边界的直纹面 $P_2(u,v)$,

$$P_2(u, v) = (1 - v)P(u, 0) + vP(u, 1), \quad u, v \in [0, 1]$$

如果把 $P_1(u,v)$ 和 $P_2(u,v)$ 相加, 产生的新曲面的边界是除给定的边界外, 添加了一个连接边界两个端点的直线:

$$\begin{aligned} & (1 - v)P(0, 0) + vP(0, 1) \\ & (1 - v)P(1, 0) + vP(1, 1) \end{aligned} \quad u \in [0, 1]$$

因此把他们消去: 再对过端点 $P(0,0)$ 、 $P(0,1)$ 及 $P(1,0)$ 、 $P(1,1)$ 的直线段, 以这两条直线段为边界, 构造直纹面 $P_3(u,v)$:

$$\begin{aligned} P_3(u, v) &= (1 - u)[(1 - v)P(0, 0) + vP(0, 1)] + u[(1 - v)P(1, 0) + vP(1, 1)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}, \quad u, v \in [0, 1] \end{aligned}$$

$P(u, v) = P_1(u, v) + P_2(u, v) - P_3(u, v)$, $u, v \in [0, 1]$ 便是所要求构造的双线性曲面片。

$P(u, v)$ 可进一步改写成矩阵的形式:

$$P(u, v) = - \begin{bmatrix} -1 & 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(u, 0) & P(u, 1) \\ P(0, v) & P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, v) & P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

展开即为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= (1 - u)\mathbf{P}_0(v) + u\mathbf{P}_1(v) + (1 - v)\mathbf{Q}_0(u) + v\mathbf{Q}_1(u) \\ &\quad - (1 - u)(1 - v)\mathbf{P}_{0,0} - u(1 - v)\mathbf{P}_{1,0} - (1 - u)v\mathbf{P}_{0,1} - uv\mathbf{P}_{1,1} \end{aligned}$$