LAB3 - Interpolacja

Gosztyła Mikołaj, Smółka Antoni

Zadanie 1.

Populacja Stanów Zjednoczonych na przestrzeni lat przedstawiała się następująco:

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Istnieje dokładnie jeden wielomian ósmego stopnia, który interpoluje powyższe dziewięć punktów, natomiast sam wielomian może być reprezentowany na różne sposoby. Rozważamy następujące zbiory funkcji bazowych $\phi_j(t)$, j = 1 … 9:

1. $\phi_j(t) = t^{j-1}$
2. $\phi_j(t) = (t - 1900)^{j-1}$
3. $\phi_j(t) = (t - 1940)^{j-1}$
4. $\phi_j(t) = ((t - 1940)/40)^{j-1}$

(a) Dla każdego z czterech zbiorów funkcji bazowych utwórz macierz Vandermonde'a.

(b) Oblicz współczynnik uwarunkowania każdej z powyższych macierzy używając funkcji `numpy.linalg.cond`.

(c) Używając najlepiej uwarunkowanej bazy wielomianów, znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla danych z zadania. Narysuj wielomian interpolacyjny. W tym celu użyj schematu Hornera i oblicz na przedziale [1900,1990] wartości wielomianu w odstępach jednorocznych. Na wykresie umieść także węzły interpolacji.

(d) Dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990 wynoszącą 248 709 873. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990?

(e) Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a na podstawie 9 węzłów interpolacji podanych w zadaniu. Oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.

(f) Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie tych samych węzłów interpolacji i oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.

(g) Zaokrąglij dane podane w tabeli do jednego miliona. Na podstawie takich danych wyznacz wielomian interpolacyjny ósmego stopnia używając najlepiej uwarunkowanej bazy z podpunktu (c). Porównaj wyznaczone współczynniki z współczynnikami obliczonymi w podpunkcie (c). Wyjaśnij otrzymany wynik.

In [1]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial
from scipy.interpolate import lagrange, KroghInterpolator


years = np.array([1900, 1910, 1920, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980])
population = np.array([76_212_168, 92_228_496, 106_021_537, 123_202_624, 132
                       151_325_798, 179_323_175, 203_302_031, 226_542_199])
```

a)

In [2]:
```python
def create_vandermonde_matrix(years, base_type):
    if base_type == 1:  # φj(t) = t^(j-1)
        return np.vander(years, increasing=True)
    elif base_type == 2:  # φj(t) = (t - 1900)^(j-1)
        return np.vander(years - 1900, increasing=True)
    elif base_type == 3:  # φj(t) = (t - 1940)^(j-1)
        return np.vander(years - 1940, increasing=True)
    elif base_type == 4:  # φj(t) = ((t - 1940)/40)^(j-1)
        return np.vander((years - 1940) / 40, increasing=True)
```

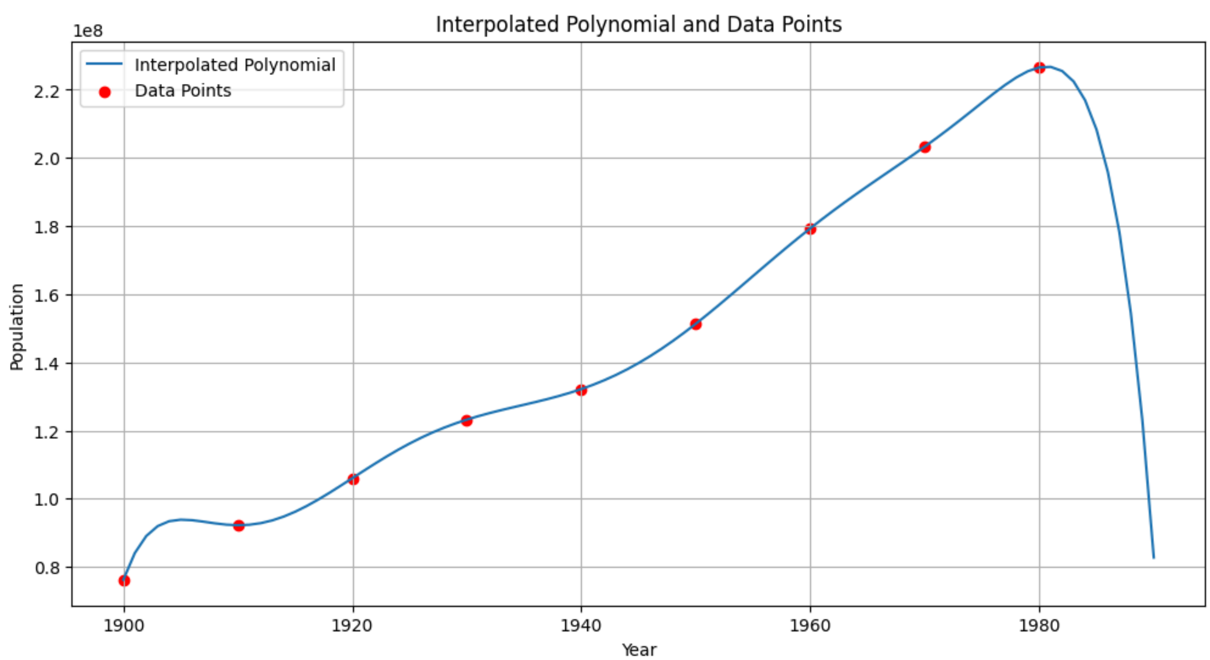
b)

In [3]:
```python
cond_numbers = []

for i in range(1, 5):
    V = create_vandermonde_matrix(years, i)
    cond_number = np.linalg.cond(V)
    cond_numbers.append(cond_number)

print(cond_numbers)
```

```
[4.044398246625838e+26, 6211148482504961.0, 9315536040586.037, 1605.44370047
86669]
```

c)

In [4]:
```
best_base_type = np.argmin(cond_numbers) + 1  # Wychodzi 4, dlatego bierzemy
V_best = create_vandermonde_matrix(years, best_base_type)
coefficients = np.linalg.solve(V_best, population)

def horner(x, coeffs):
    n = len(coeffs) - 1
    result = coeffs[-1]
    for i in range(n-1, -1, -1):
        result = result * x + coeffs[i]
    return result

x_values = np.arange(1900, 1991)
y_values = horner((x_values - 1940)/40, coefficients)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_values, y_values, label='Interpolated Polynomial')
plt.scatter(years, population, color='red', label='Data Points')
plt.title('Interpolated Polynomial and Data Points')
plt.xlabel('Year')
plt.ylabel('Population')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



d)

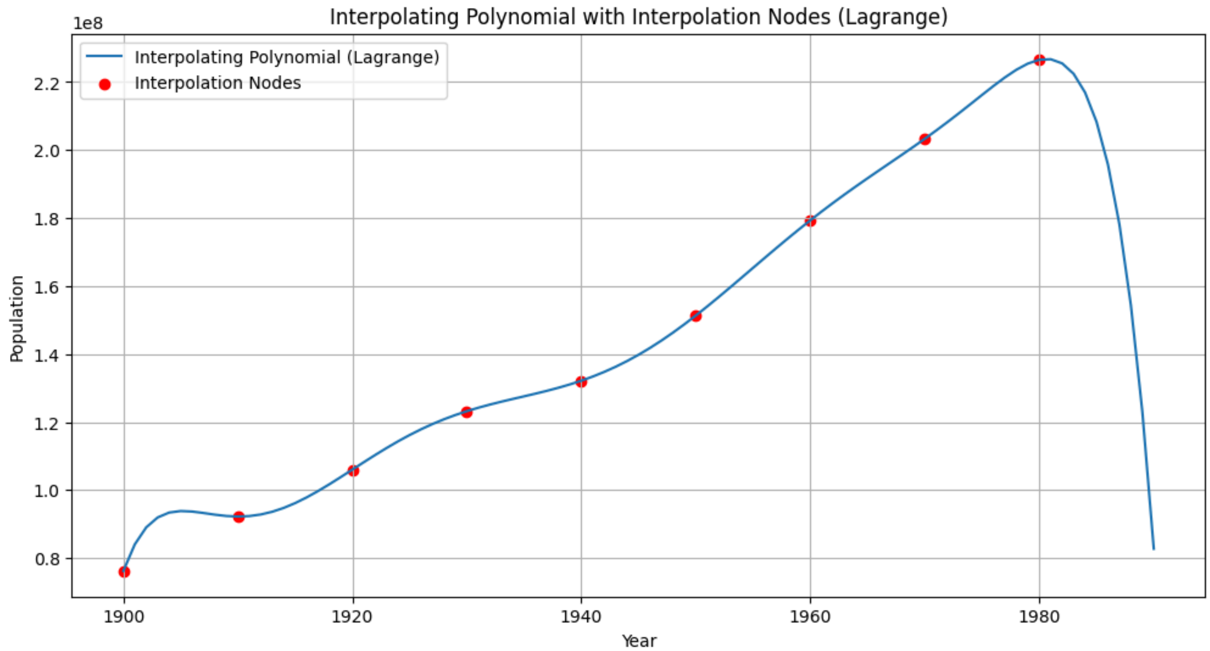
In [5]:
```
true_value_1990 = 248709873
#predicted_1990 = poly((1990 - 1940) / 40)
predicted_1990 = horner((1990 - 1940)/40, coefficients)
relative_error = np.abs(predicted_1990 - true_value_1990) / true_value_1990

print("Obtained value for the year 1990:", predicted_1990)
```

```python
print("Actural value for the year 1990:", true_value_1990)
print("Absolute extrapolation error for the year 1990:", np.abs(predicted_19
print("Relative extrapolation error for the year 1990:", relative_error)
```

```
Obtained value for the year 1990: 82749140.99999833
Actural value for the year 1990: 248709873
Absolute extrapolation error for the year 1990: 165960732.00000167
Relative extrapolation error for the year 1990: 0.6672864651416619
```

e)

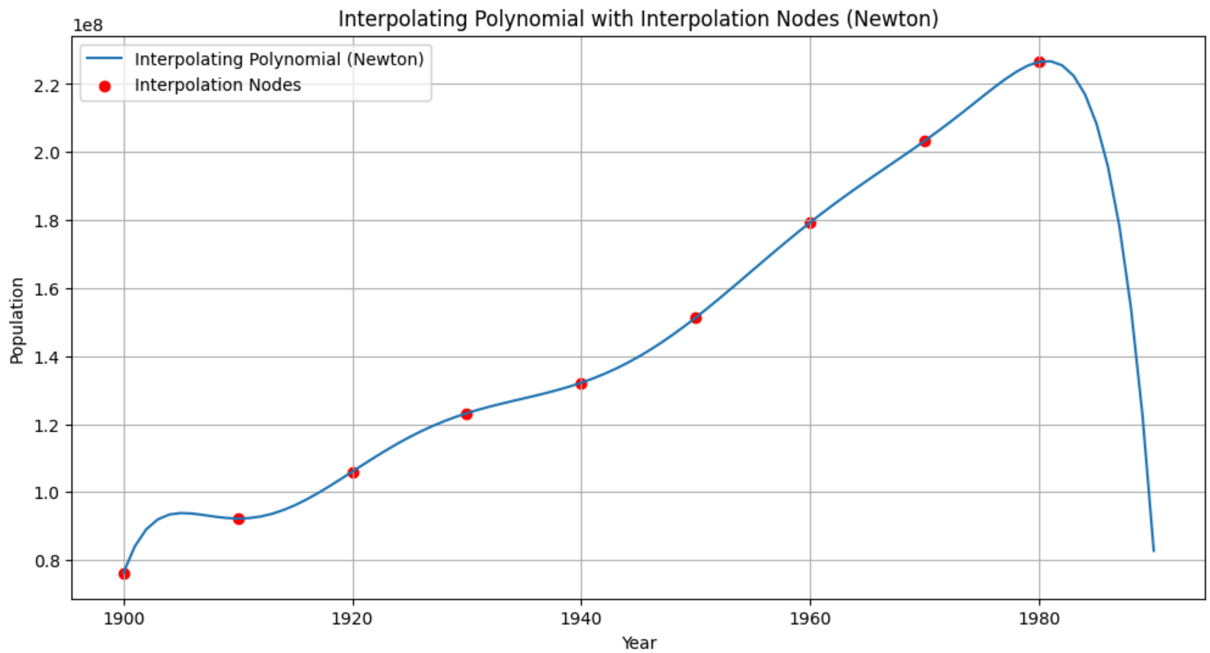
In [6]:
```python
def lagrange(x, y, x_values):
    n = len(x)
    y_values = np.zeros_like(x_values, dtype=np.float64)

    for i in range(n):
        poly = np.ones_like(x_values, dtype=np.float64)
        for j in range(n):
            if j != i:
                poly *= (x_values - x[j]) / (x[i] - x[j])
        y_values += y[i] * poly

    return y_values

x_values = np.arange(1900, 1991)
y_values = lagrange(years, population, x_values)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_values, y_values, label='Interpolating Polynomial (Lagrange)')
plt.scatter(years, population, color='red', label='Interpolation Nodes')
plt.xlabel('Year')
plt.ylabel('Population')
plt.title('Interpolating Polynomial with Interpolation Nodes (Lagrange)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



f)

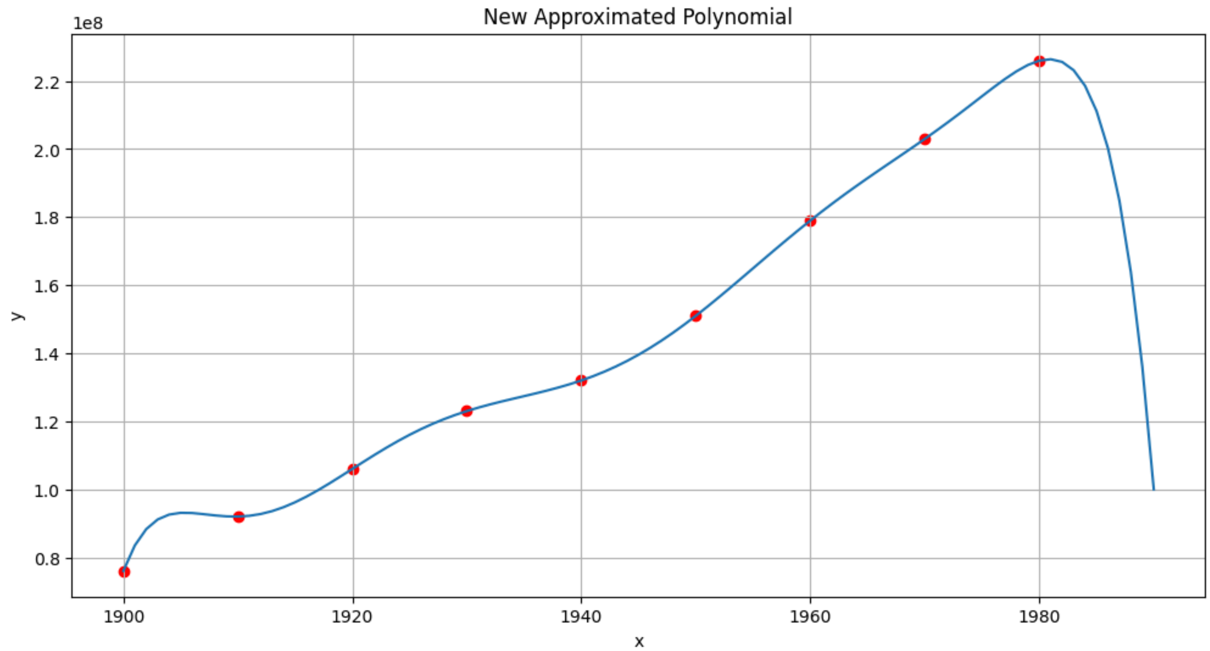
In [7]:
```
def newton_interpolation_coefficients(x, y):
    n = len(x)
    coefficients = np.zeros(n)
    divided_differences = np.zeros((n, n))
    divided_differences[:, 0] = y

    for j in range(1, n):
        for i in range(n - j):
            divided_differences[i, j] = (divided_differences[i + 1, j - 1] -

    coefficients[0] = divided_differences[0, 0]
    for i in range(1, n):
        coefficients[i] = divided_differences[0, i]

    return coefficients

def newton_interpolation_polynomial(x, coefficients, x_interp):
    n = len(coefficients)
    y_interp = np.zeros_like(x_interp, dtype=np.float64)

    for i in range(n):
        term = coefficients[i]
        for j in range(i):
            term *= (x_interp - x[j])
        y_interp = np.add(y_interp, term)  # Poprawna operacja dodawania
    return y_interp

coefficients_newton = newton_interpolation_coefficients(years, population)

x_interp = np.arange(1900, 1991)

y_interp_newton = newton_interpolation_polynomial(years, coefficients_newtor
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_interp, y_interp_newton, label='Interpolating Polynomial (Newton)
plt.scatter(years, population, color='red', label='Interpolation Nodes')
plt.xlabel('Year')
plt.ylabel('Population')
plt.title('Interpolating Polynomial with Interpolation Nodes (Newton)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



g)

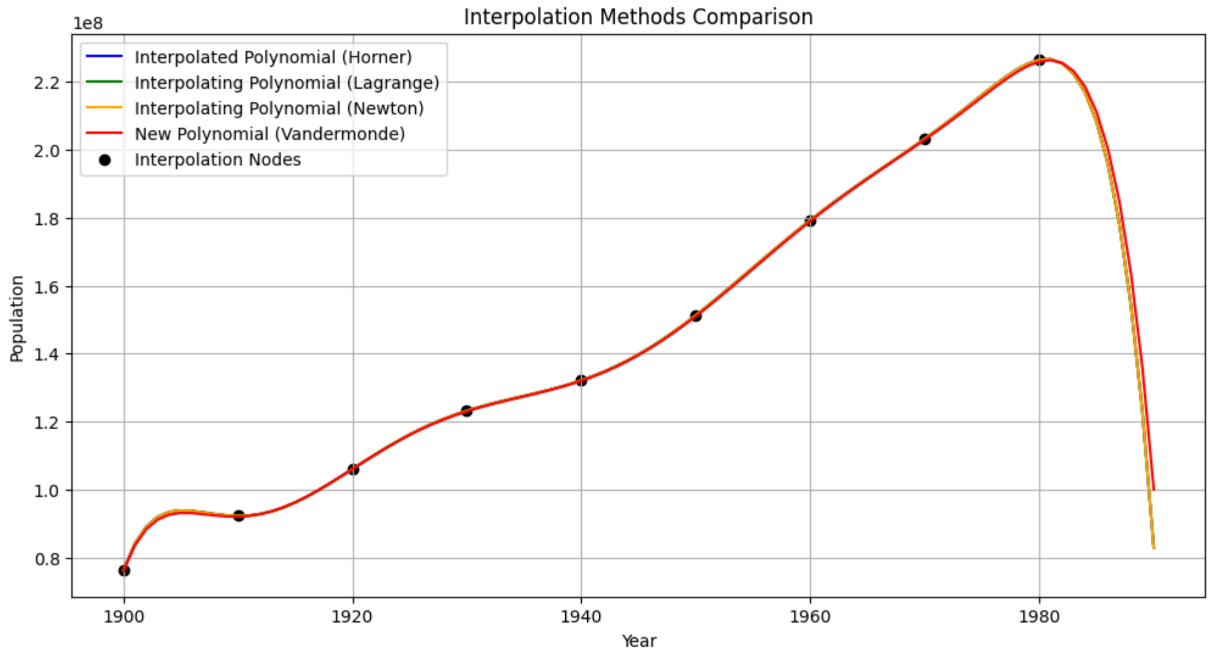
In [8]:
```
new_population = population - population%10**6
V_best = create_vandermonde_matrix(years, 4)
coefficients_new = np.linalg.solve(V_best, new_population)
x_interp = np.arange(1900, 1991)
y_interp = horner((x_interp - 1940)/40, coefficients_new)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_interp, y_interp)
plt.scatter(years, new_population, color='red', label='Interpolation Nodes')
plt.title("New Approximated Polynomial")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.show()
```



In [9]:
```
predicted_1990 = horner((1990 - 1940)/40, coefficients_new)
true_value_1990 = 248709873
relative_error = np.abs(predicted_1990 - true_value_1990) / true_value_1990

print("Obtained value for the year 1990:", predicted_1990)
print("Actural value for the year 1990:", true_value_1990)
print("Absolute extrapolation error for the year 1990:", np.abs(predicted_19
print("Relative extrapolation error for the year 1990:", relative_error)
```

```
Obtained value for the year 1990: 99999999.99999869
Actural value for the year 1990: 248709873
Absolute extrapolation error for the year 1990: 148709873.0000013
Relative extrapolation error for the year 1990: 0.5979250892062549
```

In [10]:
```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_values, y_values, label='Interpolated Polynomial (Horner)', color
plt.plot(x_values, lagrange(years, population, x_values), label='Interpolati
plt.plot(x_interp, y_interp_newton, label='Interpolating Polynomial (Newton)
plt.plot(x_interp, y_interp, label='New Polynomial (Vandermonde)', color='re

plt.scatter(years, population, color='black', label='Interpolation Nodes')
plt.xlabel('Year')
plt.ylabel('Population')
plt.title('Interpolation Methods Comparison')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



In [11]:
```
print("Coefficients:", coefficients)
print("New Coefficients:", coefficients_new)
print("Relative error:", (coefficients - coefficients_new)/coefficients)
```

```
Coefficients: [ 1.32164569e+08  4.61307656e+07  1.02716315e+08  1.82527130e+
08
 -3.74614715e+08 -3.42668456e+08  6.06291250e+08  1.89175576e+08
 -3.15180235e+08]
New Coefficients: [ 1.32000000e+08  4.59714286e+07  1.00155556e+08  1.808000
00e+08
 -3.57066667e+08 -3.37066667e+08  5.71733333e+08  1.85295238e+08
 -2.95822222e+08]
Relative error: [0.00124518 0.00345403 0.0249304  0.00946232 0.04684292 0.01
634755
 0.05699887 0.02051183 0.06141887]
```

Na wspólnym wykresie widać, że błędy te przy takiej skali są niezauważalne. Błąd względny przy zaokrąglaniu populacji jest na poziomie częsci dziesiętnych procenta. Na podstawie nowo policzonych współczynników wielomianu możemy również zauważyć, że błąd względny tych współczynników jest już większy (na poziomie kilku procent) jednak wciąż tylko nieznacznie wpływa on na kształt wykresu.

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]: