lab9

June 4, 2024

0.0.1 Zadanie 1.

Przedstaw kazde z ponizszych równan rózniczkowych zwyczajnych jako równowazny układ równan pierwszego rzedu (ang. first-order system of ODEs):

a) równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

$$y_1 = y'$$
$$y_1' = y''$$

$$y_1' = y_1(1 - y^2) - y$$

b) równanie Blasiusa:

$$y''' = -yy''$$

$$y_1 = y'$$
$$y_2 = y_1' = y''$$

$$y''' = y_2'$$
$$y_2' = -yy_2$$

c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = \frac{-GMy_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y_2'' = \frac{-GMy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y_1' = y_3$$

$$y_2' = y_4$$

$$y_3' = \frac{-GMy_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$y_4' = \frac{-GMy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

0.0.2 Zadanie 2.

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $ y(0) = 1 $. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $ h = 0.5 $.

a) Analityczna stabilność Rozwiązania równania $ y' = -5y $ są stabilne, ponieważ rozwiązanie analityczne $ y(t) = y(0)e^{-5t} $ dąży do zera gdy $ t $ rośnie.

b) Numeryczna stabilność - metoda Eulera Dla metody Eulera równanie różniczkowe jest stabilne, jeśli $|1+h\lambda| \leq 1$. Tutaj $\lambda = -5$, więc metoda Eulera będzie stabilna dla $h \leq \frac{2}{5}$. Z krokiem $h = 0.5$ metoda nie jest stabilna

(c) Obliczenia metodą Eulera Metoda Eulera:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

[1]:
```
def euler_method(f, y0, t0, tn, h):
    t_values = [t0]
    y_values = [y0]

    while t_values[-1] < tn:
        y_next = y_values[-1] + h * f(t_values[-1], y_values[-1])

        t_values.append(t_values[-1] + h)
        y_values.append(y_next)

    return t_values, y_values

def f(t, y):
    return -5 * y

y0 = 1
t0 = 0
tn = 0.5
h = 0.5
```

```
t_values, y_values = euler_method(f, y0, t0, tn, h)
print(f"Przybliżona wartość dla t = {tn}: y = {y_values[-1]}")
```

```
Przybliżona wartość dla t = 0.5: y = -1.5
```

b) Numeryczna stabilność - niejawna metoda Eulera Dla niejawnej metody Eulera równanie różniczkowe jest stabilne, jeśli $|\frac{1}{1-h\lambda}| \leq 1$. Tutaj $\lambda = -5$, więc niejawna metoda Eulera będzie stabila dla $h > 0$. Oznacza to, że z krokiem $h = 0.5$ metoda ta jest stabilna.

(c) Obliczenia niejawną metodą Eulera

[2]:
```
from scipy.optimize import fsolve

def implicit_euler_method(f, y0, t0, tn, h):
    t_values = [t0]
    y_values = [y0]

    while t_values[-1] < tn:
        # Rozwiązanie równania nieliniowego dla y_{n+1} przy użyciu fsolve
        y_next = fsolve(lambda y: y - y_values[-1] - h * f(t_values[-1] + h,
 ↪y), y_values[-1])[0]

        t_values.append(t_values[-1] + h)
        y_values.append(y_next)

    return t_values[-1], y_values[-1]

def f(t, y):
    return -5 * y

y0 = 1
t0 = 0
tn = 0.5
h = 0.5

t_target, y_target = implicit_euler_method(f, y0, t0, tn, h)
print(f"Przybliżona wartość dla t = {t_target}: y = {y_target}")
```

```
Przybliżona wartość dla t = 0.5: y = 0.2857142857142857
```

0.0.3 Zadanie 3

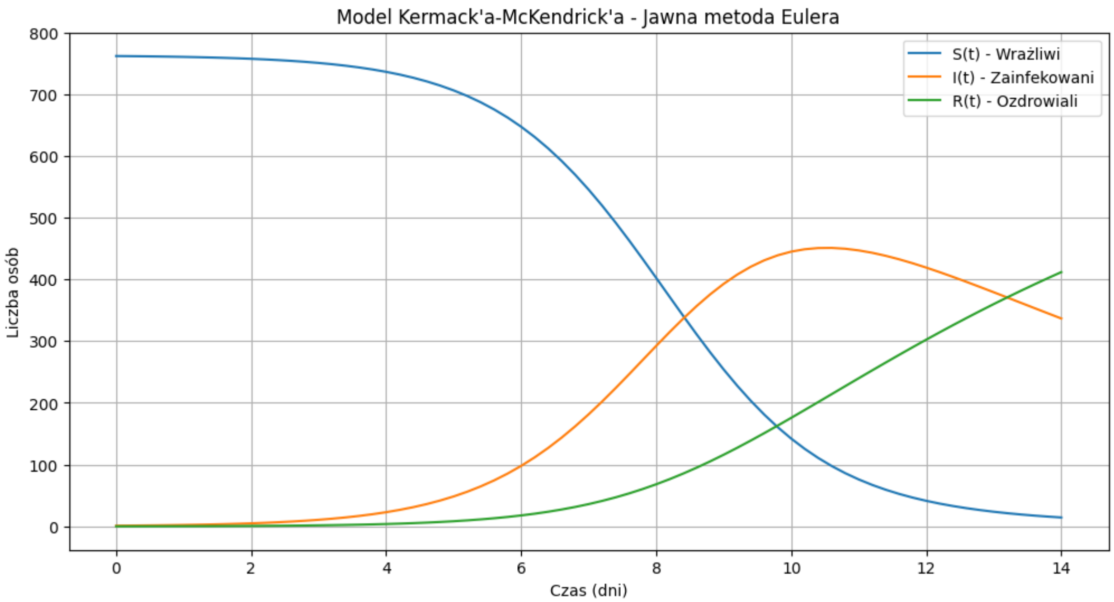
[20]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize

# Parametry modelu
beta = 1
```

```
gamma = 1/7

# Warunki początkowe
S0 = 762
I0 = 1
R0 = 0
N = S0 + I0 + R0

# Krok czasowy
h = 0.2
T = 14

# Funkcje pochodnych
def dS_dt(S, I, R):
    return -beta * S * I / N

def dI_dt(S, I, R):
    return beta * S * I / N - gamma * I

def dR_dt(S, I, R):
    return gamma * I

# Liczba kroków
steps = int(T / h)

t_values = np.linspace(0, T, steps+1)
S_values = np.zeros(steps+1)
I_values = np.zeros(steps+1)
R_values = np.zeros(steps+1)

S_values[0] = S0
I_values[0] = I0
R_values[0] = R0
```

[27]:

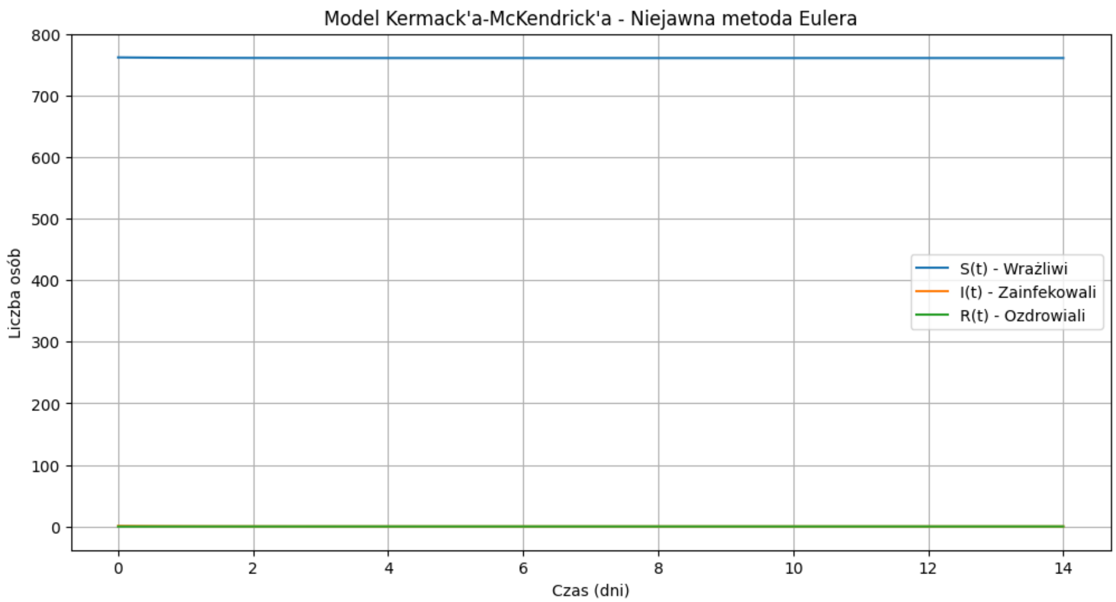
```
# Metoda Eulera
for k in range(steps):
    S_values[k+1] = S_values[k] + h * dS_dt(S_values[k], I_values[k],␣
 ↪R_values[k])
    I_values[k+1] = I_values[k] + h * dI_dt(S_values[k], I_values[k],␣
 ↪R_values[k])
    R_values[k+1] = R_values[k] + h * dR_dt(S_values[k], I_values[k],␣
 ↪R_values[k])

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t_values, S_values, label='S(t) - Wrażliwi')
plt.plot(t_values, I_values, label='I(t) - Zainfekowani')
plt.plot(t_values, R_values, label='R(t) - Ozdrowiali')
```

```
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób')
plt.legend()
plt.title('Model Kermack\'a-McKendrick\'a - Jawna metoda Eulera')
plt.grid()
plt.show()
```

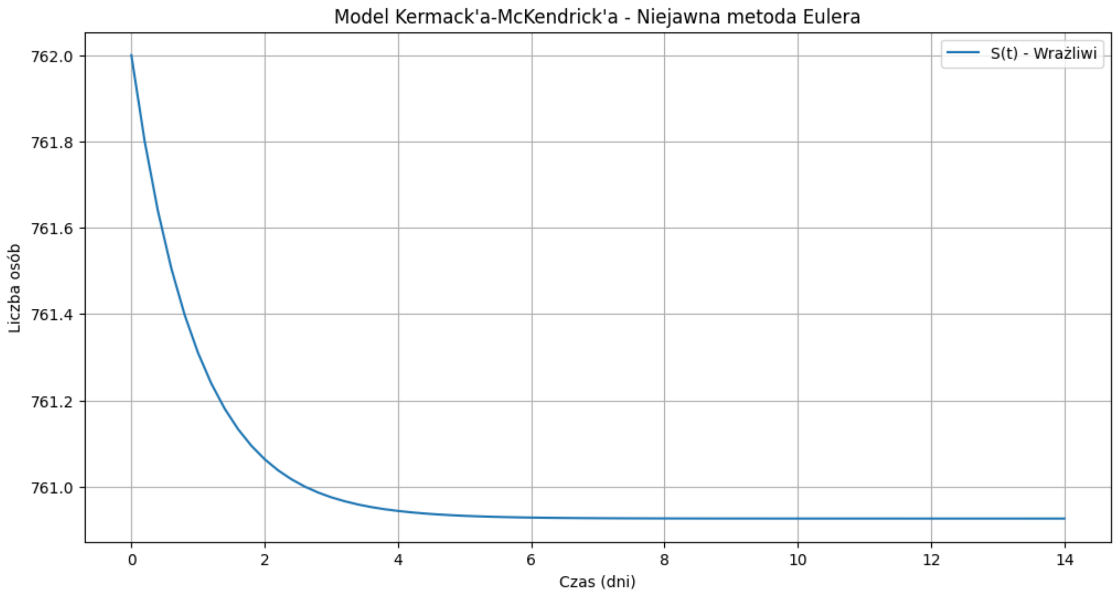


[32]:
```
# Niejawna metoda Eulera
S_values_implicit = np.zeros(steps+1)
I_values_implicit = np.zeros(steps+1)
R_values_implicit = np.zeros(steps+1)

S_values_implicit[0] = S0
I_values_implicit[0] = I0
R_values_implicit[0] = R0

for k in range(steps):
    S_next = S_values_implicit[k] / (1 + h * beta * I_values_implicit[k] / N)
    I_next = I_values_implicit[k] / (1 + h * (gamma + beta *␣
 ↪S_values_implicit[k] / N))
    R_next = R_values_implicit[k] + h * gamma * I_next

    S_values_implicit[k+1] = S_next
    I_values_implicit[k+1] = I_next
    R_values_implicit[k+1] = R_next

plt.figure(figsize=(12, 6))
```

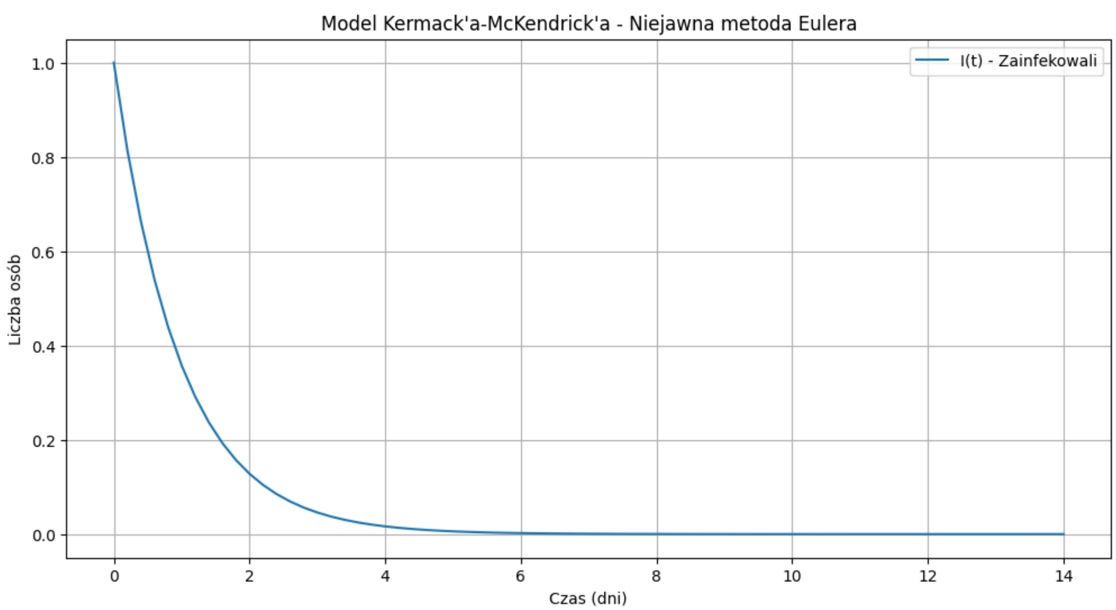
```
plt.plot(t_values, S_values_implicit, label='S(t) - Wrażliwi')
plt.plot(t_values, I_values_implicit, label='I(t) - Zainfekowali')
plt.plot(t_values, R_values_implicit, label='R(t) - Ozdrowiali')
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób')
plt.legend()
plt.title('Model Kermack\'a-McKendrick\'a - Niejawna metoda Eulera')
plt.grid()
plt.show()
```



[33]:
```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t_values, S_values_implicit, label='S(t) - Wrażliwi')
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób')
plt.legend()
plt.title('Model Kermack\'a-McKendrick\'a - Niejawna metoda Eulera')
plt.grid()
plt.show()
```

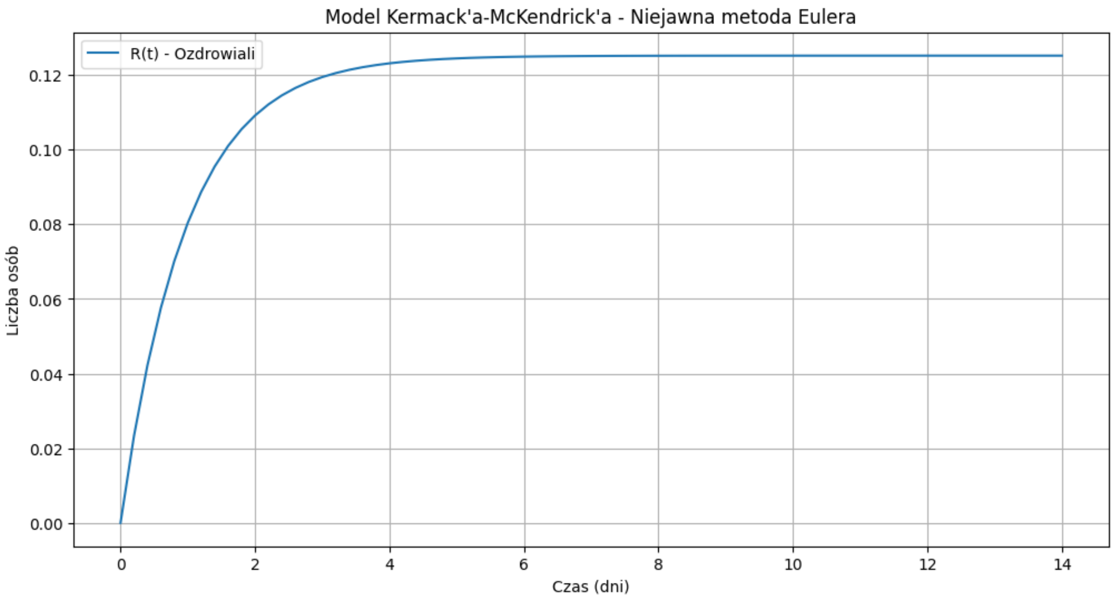


[34]:
```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t_values, I_values_implicit, label='I(t) - Zainfekowali')
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób')
plt.legend()
plt.title('Model Kermack\'a-McKendrick\'a - Niejawna metoda Eulera')
plt.grid()
plt.show()
```



[35]:

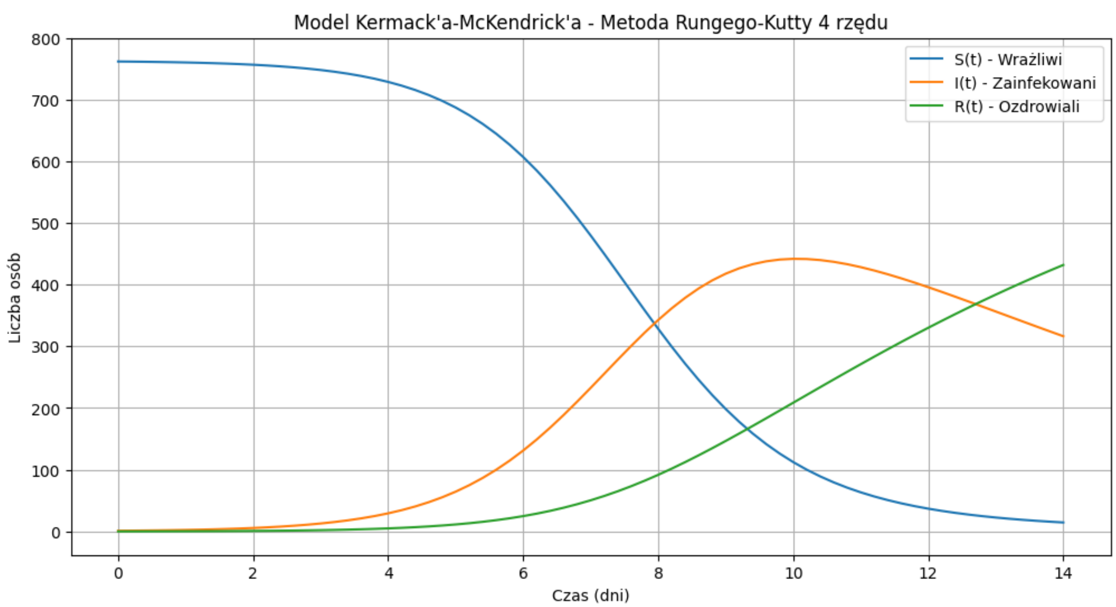
```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t_values, R_values_implicit, label='R(t) - Ozdrowiali')
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób')
plt.legend()
plt.title('Model Kermack\'a-McKendrick\'a - Niejawna metoda Eulera')
plt.grid()
plt.show()
```



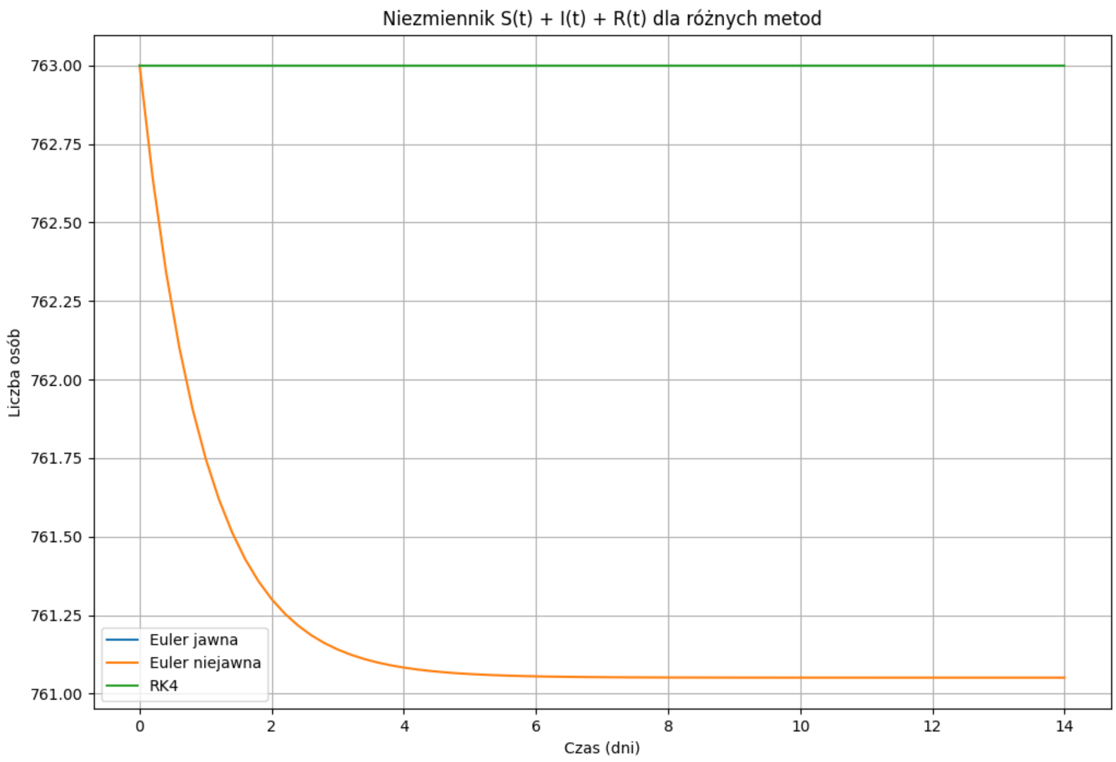
[25]:

```
# Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)
S_values_rk4 = np.zeros(steps+1)
I_values_rk4 = np.zeros(steps+1)
R_values_rk4 = np.zeros(steps+1)

S_values_rk4[0] = S0
I_values_rk4[0] = I0
R_values_rk4[0] = R0

for k in range(steps):
    S_k, I_k, R_k = S_values_rk4[k], I_values_rk4[k], R_values_rk4[k]

    k1_S = h * dS_dt(S_k, I_k, R_k)
    k1_I = h * dI_dt(S_k, I_k, R_k)
    k1_R = h * dR_dt(S_k, I_k, R_k)
```

```
    k2_S = h * dS_dt(S_k + k1_S / 2, I_k + k1_I / 2, R_k + k1_R / 2)
    k2_I = h * dI_dt(S_k + k1_S / 2, I_k + k1_I / 2, R_k + k1_R / 2)
    k2_R = h * dR_dt(S_k + k1_S / 2, I_k + k1_I / 2, R_k + k1_R / 2)

    k3_S = h * dS_dt(S_k + k2_S / 2, I_k + k2_I / 2, R_k + k2_R / 2)
    k3_I = h * dI_dt(S_k + k2_S / 2, I_k + k2_I / 2, R_k + k2_R / 2)
    k3_R = h * dR_dt(S_k + k2_S / 2, I_k + k2_I / 2, R_k + k2_R / 2)

    k4_S = h * dS_dt(S_k + k3_S, I_k + k3_I, R_k + k3_R)
    k4_I = h * dI_dt(S_k + k3_S, I_k + k3_I, R_k + k3_R)
    k4_R = h * dR_dt(S_k + k3_S, I_k + k3_I, R_k + k3_R)

    S_values_rk4[k+1] = S_k + (k1_S + 2*k2_S + 2*k3_S + k4_S) / 6
    I_values_rk4[k+1] = I_k + (k1_I + 2*k2_I + 2*k3_I + k4_I) / 6
    R_values_rk4[k+1] = R_k + (k1_R + 2*k2_R + 2*k3_R + k4_R) / 6

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t_values, S_values_rk4, label='S(t) - Wrażliwi')
plt.plot(t_values, I_values_rk4, label='I(t) - Zainfekowani')
plt.plot(t_values, R_values_rk4, label='R(t) - Ozdrowiali')
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób')
plt.legend()
plt.title('Model Kermack\'a-McKendrick\'a - Metoda Rungego-Kutty 4 rzędu')
plt.grid()
plt.show()
```

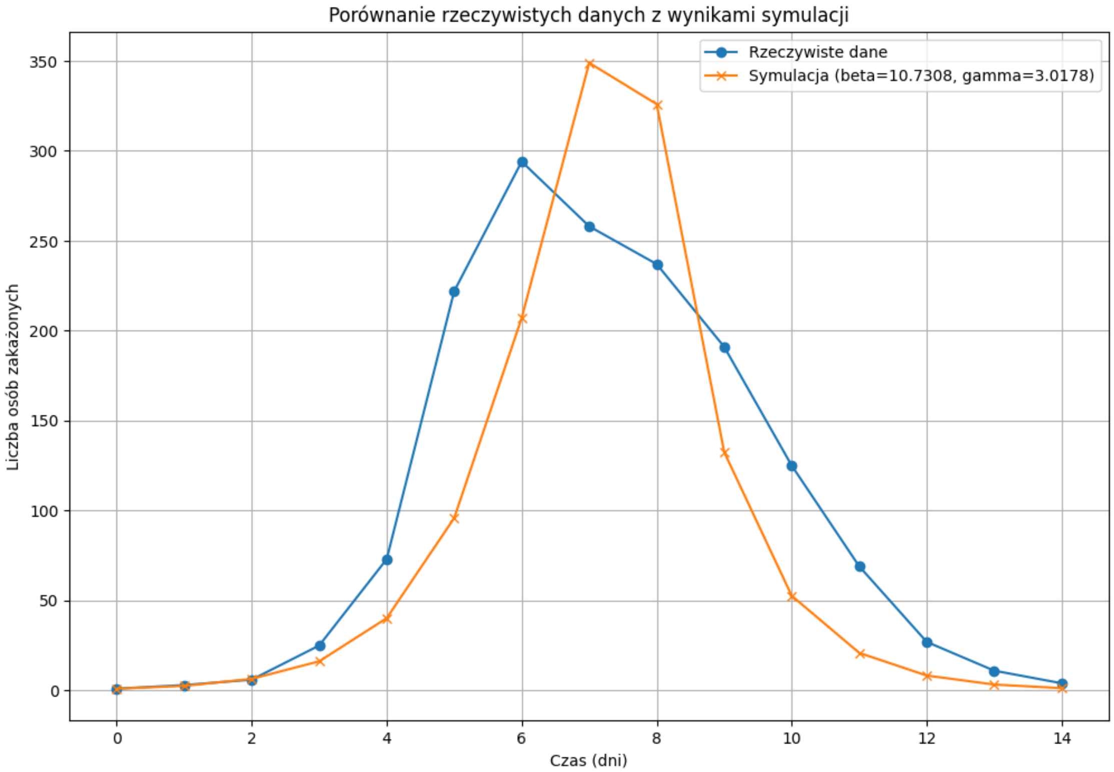


[8]:
```
# Wykres sumy S + I + R dla wszystkich metod
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(t_values, S_values + I_values + R_values, label='Euler jawna')
plt.plot(t_values, S_values_implicit + I_values_implicit + R_values_implicit,␣
↪label='Euler niejawna')
plt.plot(t_values, S_values_rk4 + I_values_rk4 + R_values_rk4, label='RK4')
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób')
plt.legend()
plt.title('Niezmiennik S(t) + I(t) + R(t) dla różnych metod')
plt.grid()
plt.show()
```



[9]:
```
# Dane rzeczywiste
real_I = np.array([1, 3, 6, 25, 73, 222, 294, 258, 237, 191, 125, 69, 27, 11,␣
↪4])
days = np.arange(0, 15)

def simulate_model(beta, gamma):
    S, I, R = S0, I0, R0
    I_values = [I0]
    for day in range(1, 15):
```

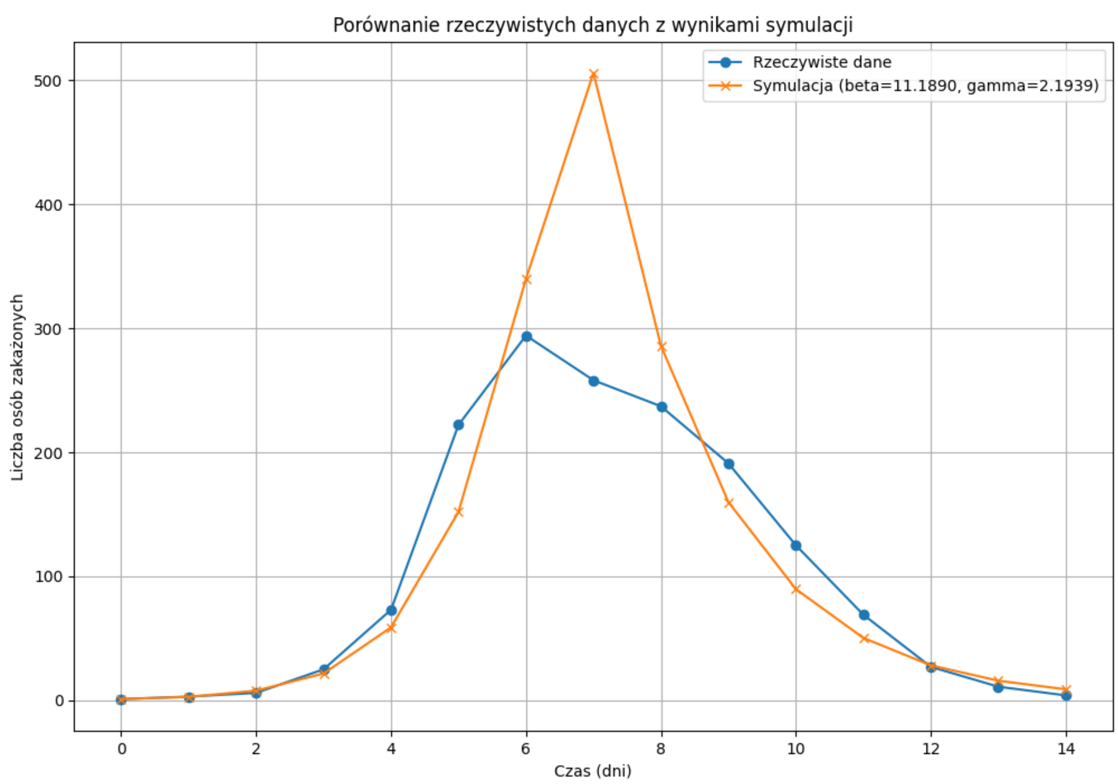
```
        S_next = S - h * beta * S * I / N
        I_next = I + h * (beta * S * I / N - gamma * I)
        R_next = R + h * gamma * I

        S, I, R = S_next, I_next, R_next
        I_values.append(I)
    return np.array(I_values)

def cost_function(theta):
    beta, gamma = theta
    predicted_I = simulate_model(beta, gamma)
    return np.sum((real_I - predicted_I)**2)

theta_initial = [1, 1/7]

# Minimalizacja funkcji kosztu
result = minimize(cost_function, theta_initial, method='Nelder-Mead')
beta_est, gamma_est = result.x

# Symulacja z estymowanymi parametrami
I_estimated = simulate_model(beta_est, gamma_est)

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(days, real_I, 'o-', label='Rzeczywiste dane')
plt.plot(days, I_estimated, 'x-', label='Symulacja (beta={:.4f}, gamma={:.4f})'.
 ↪format(beta_est, gamma_est))
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób zakażonych')
plt.legend()
plt.title('Porównanie rzeczywistych danych z wynikami symulacji')
plt.grid()
plt.show()

print(f"Estymowane wartości parametrów: beta={beta_est:.4f}, gamma={gamma_est:.
 ↪4f}")
print(f"Współczynnik reprodukcji R0: {beta_est/gamma_est:.4f}")
```




```
Estymowane wartości parametrów: beta=10.7308, gamma=3.0178
Współczynnik reprodukcji R0: 3.5558
```

[12]:
```
real_I = np.array([1, 3, 6, 25, 73, 222, 294, 258, 237, 191, 125, 69, 27, 11,␣
 ↪4])
days = np.arange(0, 15)

def simulate_model(beta, gamma):
    S, I, R = S0, I0, R0
    I_values = [I0]
    for day in range(1, 15):
        S_next = S - h * beta * S * I / N
        I_next = I + h * (beta * S * I / N - gamma * I)
        R_next = R + h * gamma * I

        S, I, R = S_next, I_next, R_next
        I_values.append(I)
    return np.array(I_values)

def cost_function(theta):
    beta, gamma = theta
    predicted_I = simulate_model(beta, gamma)
```

```
    return -np.sum(real_I * np.log(predicted_I)) + np.sum(predicted_I)

theta_initial = [1, 1/7]

result = minimize(cost_function, theta_initial, method='Nelder-Mead')
beta_est, gamma_est = result.x

I_estimated = simulate_model(beta_est, gamma_est)

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(days, real_I, 'o-', label='Rzeczywiste dane')
plt.plot(days, I_estimated, 'x-', label='Symulacja (beta={:.4f}, gamma={:.4f})'.
 ↪format(beta_est, gamma_est))
plt.xlabel('Czas (dni)')
plt.ylabel('Liczba osób zakażonych')
plt.legend()
plt.title('Porównanie rzeczywistych danych z wynikami symulacji')
plt.grid()
plt.show()

print(f"Estymowane wartości parametrów: beta={beta_est:.4f}, gamma={gamma_est:.
 ↪4f}")
print(f"Współczynnik reprodukcji R0: {beta_est/gamma_est:.4f}")
```



```
Estymowane wartości parametrów: beta=11.1890, gamma=2.1939
Współczynnik reprodukcji R0: 5.1001
```

0.0.4 Wnioski

- Jawna metoda Eulera może być niestabilna dla większych kroków czasowych, co może prowadzić do nielogicznych wyników, jednak może być użyteczna do szybkiego oszacowania w przypadku prostych modeli
- RK4 jest znacznie dokładniejsza niż jawna metoda Eulera
- Jawna metoda Eulera i RK4 pokazują podobne ogólne trendy dla S, I, i R, ale różnią się szczegółami. RK4 lepiej radzi sobie z dokładnym odwzorowaniem przebiegu epidemii.