LAB11 - Optymalizacja

Gosztyła Mikołaj, Smółka Antoni

Zadanie 1

Wyznacz punkty krytyczne każdej z poniższych funkcji. Scharakteryzuj każdy znaleziony punkt jako minimum, maksimum lub punkt siodłowy. Dla każdej funkcji zbadaj, czy posiada minimum globalne lub maksimum globalne na zbiorze R^2.

$$f_1(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$$

$$f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$

$$f_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$$

$$f_4(x,y) = (x-y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$$

Rozwiązanie

$$f_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 4y = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y - 4x = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} < 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_1 to $(0,0)$ i jest on punktem siodłowym.

$$f_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = -4$$

$$\begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Dla $(0,0)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_2 to $(0,0)$ i jest on punktem siodłowym.

Dla $(1,1)$

$$\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 12 > 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_2 to $(1,1)$ i jest on minimum.

Dla $(-1,-1)$

$$\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 12 > 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_2 to $(-1,-1)$ i jest on minimum.

$$f_3$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -6x^2 + 12xy + 6x = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = 12x - 6 - 12y$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = 12x$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} = -12x + 12y + 6$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} = -12x + 12y + 6$$

$$\begin{bmatrix} 12x - 6 - 12y & -12x + 12y + 6 \\ -12x + 12y + 6 & 12x \end{bmatrix}$$

Dla $(0, 0)$

$$\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_3 to $(0, 0)$ i jest on punktem siodłowym.

Dla $(1, 0)$

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = 6 > 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_3 to $(1, 0)$ i jest on minimum.

Dla $(0, -1)$

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_3 to $(0, -1)$ i jest on punktem siodłowym.

Dla $(-1, -1)$

$$\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = -6 < 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_3 to $(-1, -1)$ i jest on maksimum.

$$f_4$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3 + 2x - 2 = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = -4x^3 + 12x^2y - 12xy^2 + y^3 - 2y + 2 = 0$$

$$2x - 2y = 0$$

$$x = y = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} = 12x^2 - 24xy + 12y^2 + 2$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} = 12x^2 - 24xy + 12y^2 - 2$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y} = -12x^2 + 24xy - 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial y \partial x} = -12x^2 + 24xy - 12y^2$$

Dla $(0, 0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0$$

Z powyzszych rownań wynika, ze punkt krytyczny funkcji f_4 to $(0, 0)$ i jest on punktem siodłowym.

Zadanie 2

Należy wyznaczyć najkrótszą ścieżkę robota pomiędzy dwoma punktami $x^{(0)}$ i $x^{(n)}$. Problemem są przeszkody usytuowane na trasie robota, których należy unikać. Zadanie polega na minimalizacji funkcja kosztu, która sprowadza problem nieliniowej optymalizacji z ograniczeniami do problemu nieograniczonej optymalizacji. Macierz $X \in R^{(n+1)\times 2}$ opisuje ścieżkę złożoną z $n+1$ punktów $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}$. Każdy punkt posiada 2 współrzędne, $x^{(i)} \in R^2$. Punkty początkowy i końcowy ścieżki, $x^{(0)}$ i $x^{(n)}$, są ustalone. Punkty z przeszkodami (punkty o 2 współrzędnych), $r^{(i)}$ dane są w macierzy przeszkód $R \in R^{k\times 2}$. W celu optymalizacji ścieżki robota należy użyć metody największego spadku. Funkcja celu użyta do optymalizacji $F(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)})$ zdefiniowana jest jako

$$F(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(n)}) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\varepsilon + ||x^{(i)} - r^{(j)}||_2^2} + \lambda_2 \sum_{i=0}^{n-1} ||x^{(i+1)} - x^{(i)}||_2^2$$

Symbole użyte we wzorze mają następujące znaczenie:

- Stałe λ_1 i λ_2 określają wpływ każdego członu wyrażenia na wartość F(X).
- λ_1 określa wagę składnika zapobiegającego zbytniemu zbliżaniu siędo przeszkody
- λ_2 określa wagę składnika zapobiegającego tworzeniu bardzo długich ścieżek
- n jest liczbą odcinków, a $n+1$ liczbą punktów na trasie robota.
- k jest liczbą przeszkód, których robot musi unikać.
- Dodanie ε w mianowniku zapobiega dzieleniu przez zero.

1. Wyprowadź wyrażenie na gradient ∇F funkcji celu F względem $x^{(i)} : \nabla F = [\frac{\partial F}{\partial x^{(0)}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}]$. Wzór wyraź poprzez wektory x(i) i ich składowe, wektory r(j) i ich składowe, $\varepsilon, \lambda 1, \lambda 2, n$ i k (niekoniecznie wszystkie). Wskazówka. $\frac{\partial F||x||^2}{\partial x} = 2x$.

2. Opisz matematycznie i zaimplementuj kroki algorytmu największego spadku z przeszukiwaniem liniowym, który służy do minimalizacji funkcji celu F. Do przeszukiwania liniowego (ang. line search) użyj metody złotego podziału (ang. golden section search). W tym celu załóż, że F jest unimodalna (w rzeczywistości tak nie jest) i że można ustalić początkowy przedział, w którym znajduje się minimum.

3. Znajdź nakrótszą ścieżkę robota przy użyciu algorytmu zaimplementowanego w w poprzednim punktcie. Przyjmij następujące wartości parametrów:

- $n = 20, k = 50$
- $x^{(0)} = [0, 0], x^{(n)} = [20, 20]$
- $r^{(i)} \sim U(0, 20) \times U(0, 20)$
- $\lambda 1 = \lambda 2 = 1$
- $\varepsilon = 10^{-13}$
- liczba iteracji = 400

Ponieważ nie chcemy zmieniać położenia punktu początkowego i końcowego, $x^{(0)}, x^{(n)}$, wyzeruj gradient funkcji F względem tym punktów. Obliczenia przeprowadź dla 5 różnych losowych inicjalizacji punktów wewnątrz ścieżki $x^{(0)}, \dots, x^{(n-1)}$. Narysuj przykładowy wykres wartości funkcji F w zależności od iteracji.

1.

$$F(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(n)}) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\varepsilon + ||x^{(i)} - r^{(j)}||_2^2} + \lambda_2 \sum_{i=0}^{n-1} ||x^{(i+1)} - x^{(i)}||_2^2$$

Liczymy pochodne cząstkowe po $x^{(i)}$:

$$\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}\frac{1}{\varepsilon + ||x^{(i)} - r^{(j)}||_2^2} = -\frac{2(x^{(i)} - r^{(j)})}{\varepsilon + ||x^{(i)} - r^{(j)}||_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}||x^{(i+1)} - x^{(i)}||_2^2 = 2(x^{(i)} - x^{(i+1)})$$

Finalnie:

$$\nabla F_{x^{(i)}} = -\lambda_1 \frac{2(x^{(i)} - r^{(j)})}{\varepsilon + ||x^{(i)} - r^{(j)}||_2^2} + 2(x^{(i)} - x^{(i+1)})$$

2.

Poniżej przedstawiony jest algorytm największego spadku z przeszukiwaniem liniowym z metodą złotego podziału.

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [ ]:
```
n = 20
k = 30
x0 = np.array([0, 0])
xn = np.array([20, 20])
r = np.random.uniform(0, 20, (k, 2))
lambda1 = 1
lambda2 = 1
epsilon = 1e-3
num_iterations = 400
x = np.linspace(x0, xn, n+1)
```

In [ ]:
```
def compute_F(x, r, lambda1, lambda2):
    term1 = sum(1 / (np.linalg.norm(x[i] - r[j])**2 + epsilon) for i in r
    term2 = sum(np.linalg.norm(x[i+1] - x[i])**2 for i in range(n))
    return lambda1 * term1 + lambda2 * term2
```

In [ ]:
```
def compute_gradient(x, r, lambda1, lambda2):
    grad = np.zeros_like(x)
    for i in range(1, n):
        term1_grad = np.zeros(2)
        for j in range(k):
            term1_grad += (x[i] - r[j]) / (np.linalg.norm(x[i] - r[j])**2
        term1_grad *= -2 * lambda1

        term2_grad = np.zeros(2)
        if i > 0:
            term2_grad += 2 * lambda2 * (x[i] - x[i-1])
        if i < n:
            term2_grad += 2 * lambda2 * (x[i] - x[i+1])

        grad[i] = term1_grad + term2_grad
    return grad
```

In [ ]:
```
def golden_section_search(func, a, b, tol=1e-5):
    phi = (1 + np.sqrt(5)) / 2
```

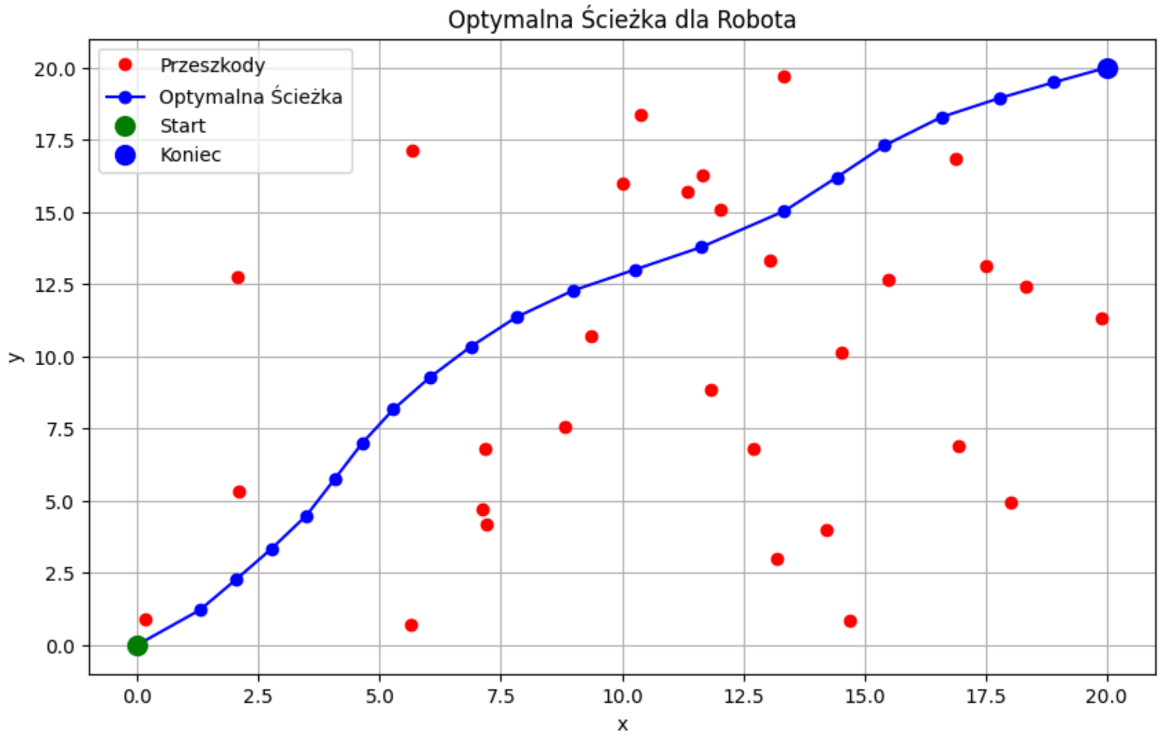
```python
    while (b - a) > tol:
        c = b - (b - a) / phi
        d = a + (b - a) / phi
        if func(c) < func(d):
            b = d
        else:
            a = c
    return (b + a) / 2
```

In [ ]:
```python
def gradient_descent_with_line_search(x, r, lambda1, lambda2, num_iterati
    history = []
    for _ in range(num_iterations):
        grad = compute_gradient(x, r, lambda1, lambda2)

        def line_search_func(alpha):
            new_x = x.copy()
            new_x[1:n] = new_x[1:n] - alpha * grad[1:n]
            return compute_F(new_x, r, lambda1, lambda2)

        alpha = golden_section_search(line_search_func, 0, 1)

        x[1:n] = x[1:n] - alpha * grad[1:n]

        history.append(compute_F(x, r, lambda1, lambda2))
    return x, history
```

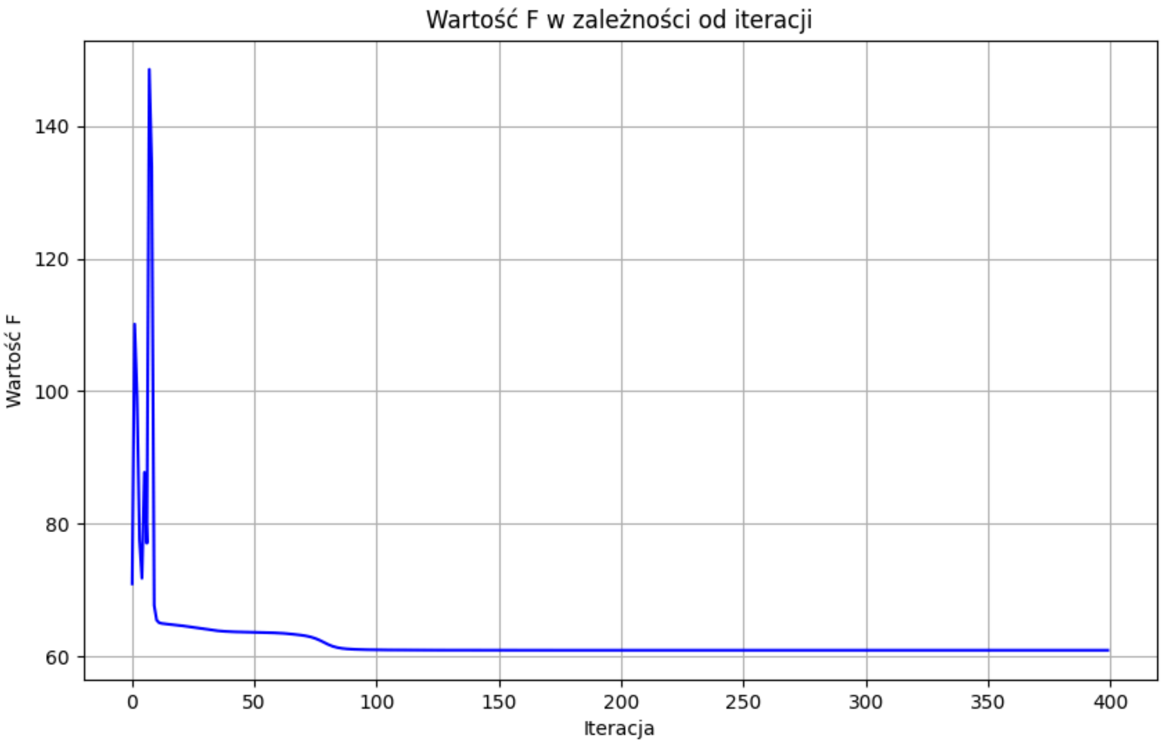
3.

In [ ]:
```python
optimal_path, history = gradient_descent_with_line_search(x, r, lambda1,
```

In [ ]:
```python
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(r[:, 0], r[:, 1], 'ro', label='Przeszkody')
plt.plot(optimal_path[:, 0], optimal_path[:, 1], 'b-', marker='o', label=
plt.plot(x0[0], x0[1], 'go', markersize=10, label='Start')
plt.plot(xn[0], xn[1], 'bo', markersize=10, label='Koniec')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Optymalna Ścieżka dla Robota')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



In [ ]:
```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(history, 'b-')
plt.xlabel('Iteracja')
plt.ylabel('Wartość F')
plt.title('Wartość F w zależności od iteracji')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Wnioski

Metoda gradientu okazała się skuteczna w nawigacji robota w środowisku z przeszkodami, umożliwiając znalezienie bezkolizyjnej ścieżki. Robot dynamicznie dostosowywał trasę w czasie rzeczywistym, unikając przeszkód i minimalizując odległość do celu.

Algorytm jest mało wymagający obliczeniowo, co pozwala na jego efektywne wykorzystanie w czasie rzeczywistym bez opóźnień. Jednakże, zbliżanie się robota do przeszkód może być ryzykowne, a metoda ta może czasem utknąć w lokalnych minimach, zwłaszcza w bardziej skomplikowanych środowiskach