LAB4 - Efekt Rungego

Gosztyła Mikołaj, Smółka Antoni

Zadanie 1. Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje

- $f1(x)=rac{1}{1+25x^2}$ na przedziale [–1, 1]
- $f2(x) = \exp(\cos(x))$ na przedziale [0, 2 π]

używając:

- ullet wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami xj=x0+jhgdzie $j=0,1,\ldots,n$ i h=(xn-x0)/n
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami xj=x0+jh gdzie $j=0,1,\dots,n$ i h=(xn-x0)/n
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = \cos(heta_j) gdzie heta_j = rac{\pi(2j+1)}{2(n+1)}i0 \leq j \leq n.$$

(a)

Dla funkcji Rungego f1(x) z n = 12 węzłami interpolacji przedstaw na wspólnym wykresie funkcję f1(x) oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonaj próbkowanie funkcji f1(x) i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych, jednostajne w x dla węzłów Czebyszewa). Pamiętaj o podpisaniu wykresu i osi oraz o legendzie.

(b)

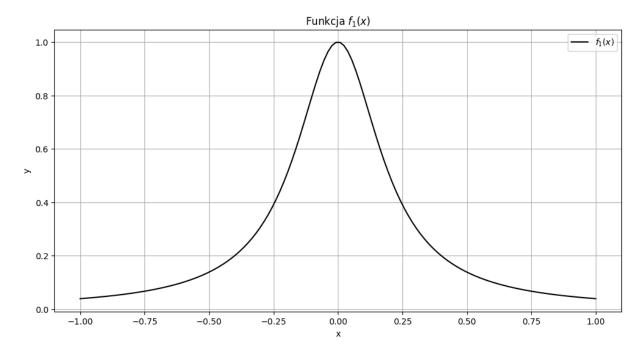
Wykonaj interpolację funkcji **f1(x)** i **f2(x)** z **n = 4, 5, ..., 50** węzłami interpolacji używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadź na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórz dwa rysunki: jeden dla **f1(x)**, drugi dla **f2(x)**. Na każdym rysunku przedstaw razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji **n** dla każdej z trzech metod interpolacji.

Która metoda interpolacji jest najbardziej dokładna a która najmniej?

Uwaga 1. Transformacja węzłów Czebyszewa $\mathbf{r} \in [-1, 1]$ na punkty $\mathbf{x} \in [a, b]$ dana jest wzorem x = a + (b - a) * (r + 1)/2.

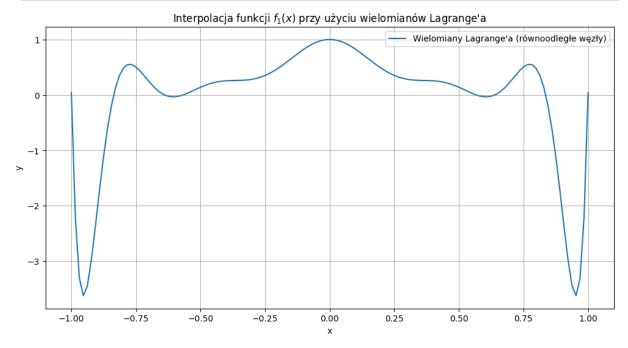
Uwaga 2. Interpolację funkcjami sklejanymi można zaimplementować funkcją scipy.interpolate.interp1d. Zaimplementuj własnoręcznie interpolację Lagrange'a. Interpolacja Lagrange'a w tym implementacja biblioteczna scipy.interpolate.lagrange jest niestabilna numerycznie.

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        from scipy.interpolate import interp1d
        from numpy.polynomial.chebyshev import chebpts2
        from scipy.interpolate import CubicSpline
        import numpy.random as npr
In [2]: def f1(x):
            return 1 / (1 + 25 * x**2)
        def f2(x):
            return np.exp(np.cos(x))
        def lagrange_interpolation(f, x, x_interp):
            n = len(x)
            P = np.zeros_like(x_interp)
            for j in range(n):
                L = np.ones like(x interp)
                for i in range(n):
                    if i != j:
                        L *= (x_interp - x[i]) / (x[j] - x[i])
                P += f(x[i]) * L
            return P
        def chebyshev_nodes(n, a, b):
            j = np.arange(n + 1)
            nodes = np.cos((2*j + 1) * np.pi / (2 * (n + 1)))
            return a + 0.5 * (b - a) * (1 + nodes)
In [3]: n = 12
        x_uniform = np.linspace(-1, 1, n + 1)
        x_{dense\_uniform} = np.linspace(-1, 1, 10*(n + 1))
        plt.figure(figsize=(12, 6))
        plt.plot(x_dense_uniform, f1(x_dense_uniform), 'k', label='$f_1(x)$')
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('y')
        plt.title('Funkcja $f_1(x)$')
        plt.legend()
        plt.grid(True)
        plt.show()
```



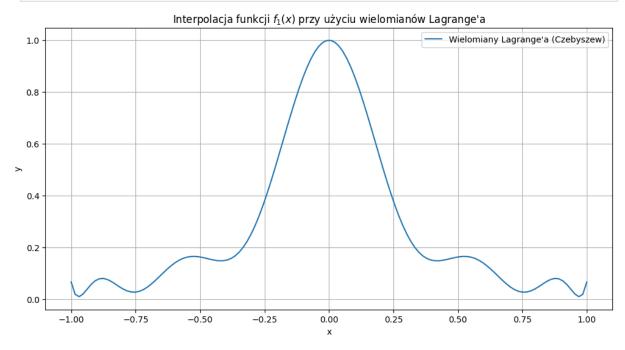
```
In [4]: P_uniform = lagrange_interpolation(f1, x_uniform, x_dense_uniform)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_dense_uniform, P_uniform, label='Wielomiany Lagrange\'a (równoodl
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolacja funkcji $f_1(x)$ przy użyciu wielomianów Lagrange\'a
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



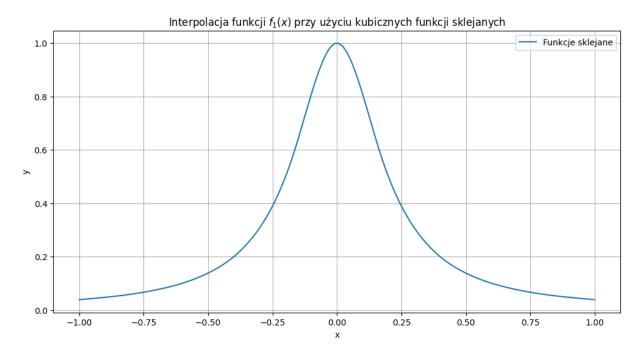
```
In [5]: x_chebyshev = chebyshev_nodes(n, -1, 1)
x_dense_chebyshev = np.linspace(-1, 1, 10*(n + 1))
P_chebyshev = lagrange_interpolation(f1, x_chebyshev, x_dense_chebyshev)
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_dense_chebyshev, P_chebyshev, label='Wielomiany Lagrange\'a (Czek
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolacja funkcji $f_1(x)$ przy użyciu wielomianów Lagrange\'a
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

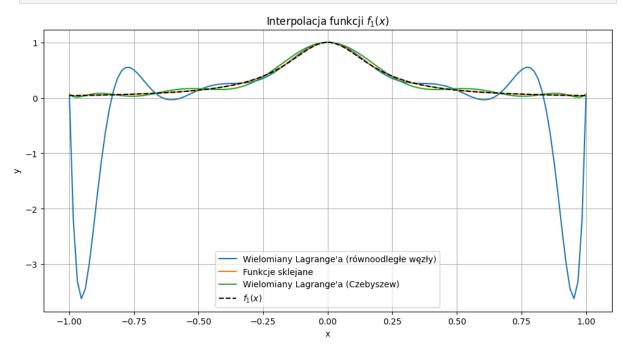


```
In [6]: x = np.linspace(-1, 1, n + 1)
y = f1(x)
cs = interp1d(x, y, kind='cubic')
P_cubic = cs(x_dense_uniform)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x_dense_uniform, P_cubic, label='Funkcje sklejane')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolacja funkcji $f_1(x)$ przy użyciu kubicznych funkcji skleplt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

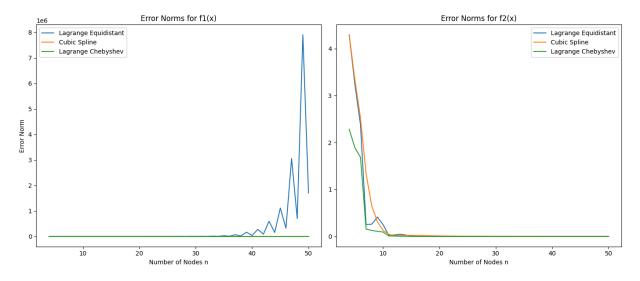


```
In [7]: plt.figure(figsize=(12, 6))
    plt.plot(x_dense_uniform, P_uniform, label='Wielomiany Lagrange\'a (równoodl
    plt.plot(x_dense_uniform, P_cubic, label='Funkcje sklejane')
    plt.plot(x_dense_chebyshev, P_chebyshev, label='Wielomiany Lagrange\'a (Czek
    plt.plot(x_dense_uniform, f1(x_dense_uniform), 'k--', label='$f_1(x)$')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.title('Interpolacja funkcji $f_1(x)$')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.show()
```

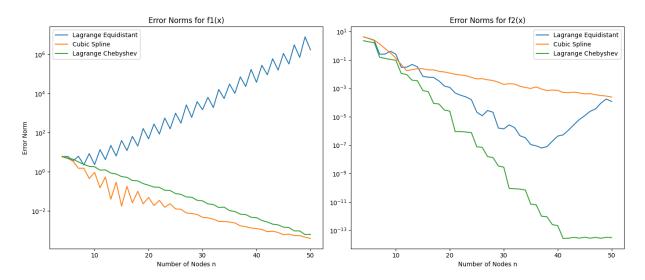


b.)

```
In [8]: n values = range(4, 51)
        errors_f1 = np.zeros((len(n_values), 3))
        errors_f2 = np.zeros((len(n_values), 3))
        for idx, n in enumerate(n values):
            x_{equidistant} = np.linspace(-1, 1, n)
            x_{chebyshev} = chebyshev_{nodes(n-1, -1, 1)}
            x_{random} = np.sort(np.random.uniform(-1, 1, 500))
            y_lagrange_eq = lagrange_interpolation(f1, x_equidistant, x_random)
            y_cubic_spline_eq = interp1d(x_equidistant, f1(x_equidistant), kind='cub
            y_lagrange_cheb = lagrange_interpolation(f1, x_chebyshev, x_random)
            errors_f1[idx] = [np.linalg.norm(f1(x_random) - y_lagrange_eq),
                               np.linalg.norm(f1(x_random) - y_cubic_spline_eq),
                               np.linalg.norm(f1(x random) - y lagrange cheb)]
            x_equidistant_f2 = np.linspace(0, 2*np.pi, n)
            x chebyshev f2 = chebyshev nodes(n-1, 0, 2*np.pi)
            x_{random_f2} = np.sort(np.random.uniform(0, 2*np.pi, 500))
            y_lagrange_eq_f2 = lagrange_interpolation(f2, x_equidistant_f2, x_random
            y cubic spline eq f2 = interp1d(x equidistant f2, f2(x equidistant f2),
            y_lagrange_cheb_f2 = lagrange_interpolation(f2, x_chebyshev_f2, x_random
            errors_f2[idx] = [np.linalg.norm(f2(x_random_f2) - y_lagrange_eq_f2),
                               np.linalg.norm(f2(x_random_f2) - y_cubic_spline_eq_f2)
                               np.linalg.norm(f2(x_random_f2) - y_lagrange_cheb_f2)]
        plt.figure(figsize=(14, 6))
        plt.subplot(1, 2, 1)
        plt.plot(list(n_values), errors_f1[:, 0], label='Lagrange Equidistant')
        plt.plot(list(n_values), errors_f1[:, 1], label='Cubic Spline')
        plt.plot(list(n values), errors f1[:, 2], label='Lagrange Chebyshev')
        plt.title('Error Norms for f1(x)')
        plt.xlabel('Number of Nodes n')
        plt.ylabel('Error Norm')
        plt.legend()
        plt.subplot(1, 2, 2)
        plt.plot(list(n_values), errors_f2[:, 0], label='Lagrange Equidistant')
        plt.plot(list(n_values), errors_f2[:, 1], label='Cubic Spline')
        plt.plot(list(n_values), errors_f2[:, 2], label='Lagrange Chebyshev')
        plt.title('Error Norms for f2(x)')
        plt.xlabel('Number of Nodes n')
        plt.legend()
        plt.tight_layout()
        plt.show()
```



```
In [9]: plt.figure(figsize=(14, 6))
        plt.subplot(1, 2, 1)
        plt.plot(list(n_values), errors_f1[:, 0], label='Lagrange Equidistant')
        plt.plot(list(n_values), errors_f1[:, 1], label='Cubic Spline')
        plt.plot(list(n_values), errors_f1[:, 2], label='Lagrange Chebyshev')
        plt.title('Error Norms for f1(x)')
        plt.xlabel('Number of Nodes n')
        plt.ylabel('Error Norm')
        plt.yscale('log')
        plt.legend()
        plt.subplot(1, 2, 2)
        plt.plot(list(n_values), errors_f2[:, 0], label='Lagrange Equidistant')
        plt.plot(list(n_values), errors_f2[:, 1], label='Cubic Spline')
        plt.plot(list(n_values), errors_f2[:, 2], label='Lagrange Chebyshev')
        plt.title('Error Norms for f2(x)')
        plt.xlabel('Number of Nodes n')
        plt.yscale('log')
        plt.legend()
        plt.tight_layout()
        plt.show()
```



Wykresy norm błędów zarówno dla $f1(x) = 1/(1 + 25x^2)$, jak i dla $f2(x) = \exp(\cos(x))$ w funkcji liczby węzłów interpolacji (n) ujawniają kilka interesujących wzorców, które odnoszą się do natury interpolowanych funkcji oraz charakterystyk używanych metod interpolacji. Oto wyjaśnienie, dlaczego wykresy mogą wyglądać w ten sposób:

Dla **f1(x)**:

- 1. Zjawisko Rungego: Funkcja f1(x) jest klasycznym przykładem, gdzie równoodległe węzły prowadzą do zjawiska Rungego. Jest to problem oscylacji na krawędziach przedziału, który pojawia się przy użyciu wielomianów wysokiego stopnia i równoodległych węzłów interpolacji. W związku z tym, gdy n rośnie, błąd może nie maleć, jak można by oczekiwać. Wyjaśnia to, dlaczego interpolacja Lagrange'a z równoodległymi węzłami nie zawsze działa dobrze, szczególnie dla wyższych wartości n.
- 2. **Splajny Kubiczne**: Błąd związany z interpolacją splajnami kubicznymi pozostaje stosunkowo niski i stabilny dla różnych wartości **n**. Ta stabilność wynika z tego, że splajny kubiczne są wielomianami kawałkowymi, które unikają problemu oscylacji wielomianów wysokiego stopnia. Są one szczególnie dobrze przystosowane do funkcji o gładkich zmianach, takich jak **f1(x)**.
- 3. **Węzły Czebyszewa**: Użycie węzłów Czebyszewa do interpolacji pomaga złagodzić zjawisko Rungego, ponieważ te węzły są gęściej rozmieszczone na końcach przedziału interpolacji. Taki rozkład redukuje oscylacje i sprawia, że interpolacja Lagrange'a z węzłami Czebyszewa jest bardziej dokładna niż z równoodległymi węzłami, szczególnie gdy **n** rośnie.

Dla **f2(x)**:

 Okresowość: Okresowy charakter f2(x) oznacza, że błędy mogą być bardziej równomiernie rozłożone na całym przedziale interpolacji, szczególnie dla metod, które mogą naturalnie dostosować się do gładkości funkcji i jej zachowania okresowego, takich jak splajny kubiczne.

In []:		
---------	--	--