LAB5 - Aproksymacja

Gosztyła Mikołaj, Smółka Antoni

Zadanie 1.

Wykonaj aproksymację średniokwadratową punktową populacji Stanów Zjednoczonych w przedziale [1900,1980] wielomianami stopnia m dla 0 ≤ m ≤ 6.

(a)

Dla każdego m dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990? Dla jakiego m błąd względny był najmniejszy?

(b)

Zbyt niski stopień wielomianu oznacza, że model nie jest w stanie uwzględnić zmienności danych (duże obciążenie). Zbyt wysoki stopień wielomianu oznacza z kolei, że model uwzględnia szum lub błędy danych (duża wariancja), co w szczególności obserwowaliśmy w przypadku interpolacji. Wielomian stopnia m posiada k = m + 1 parametrów. Stopień wielomianu, m, jest hiperparametrem modelu. Do wyboru optymalnego stopnia wielomianu można posłużyć się kryterium informacyjnym Akaikego (ang. Akaike information criterion):

$$AIC = 2k + nln((\sum(i=1)^n[yi - \hat{y}(xi)]^2)/n)$$

gdzie yi (i = 1, . . . , n) oznacza prawdziwą liczbę osób w roku xi, natomiast ŷ(xi) liczbę osób przewidywaną przez model, tzn wartość wielomianu ŷ(x).

Ponieważ rozmiar próbki jest niewielki (dane z dziewięciu lat, n = 9), n/k < 40, należy użyć wzoru ze składnikiem korygującym:

$$AICc = AIC + 2k(k+1)/(n-k-1).$$

Mniejsze wartości kryterium oznaczają lepszy model. Czy wyznaczony w ten sposób stopień m, odpowiadający najmniejszej wartości AICc, pokrywa się z wartością z poprzedniego podpunktu?

Zadanie 2.

Wykonaj aproksymację średniokwadratową ciągłą funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale [0,2] wielomianem drugiego stopnia, używając wielomianów Czebyszewa. Aproksymacja ta jest tańszym obliczeniowo zamiennikiem aproksymacji jednostajnej.

Literatura

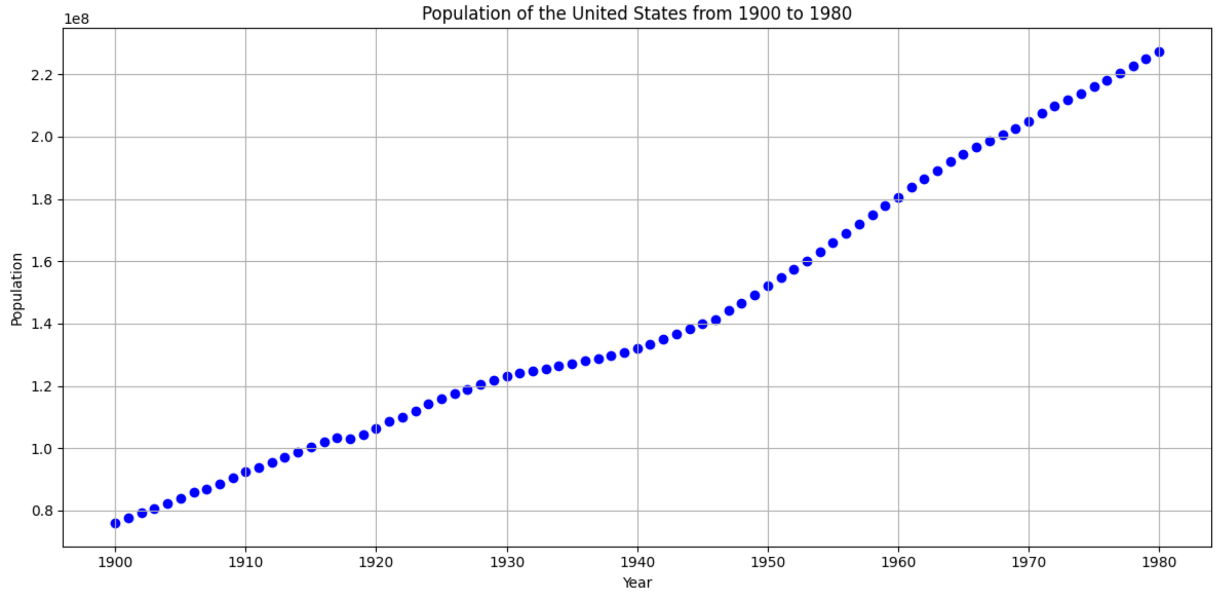
1. Xin-She Yang, Introduction to Algorithms for Data Mining and Machine Learning, 2019.

In [1]:
```
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial
import matplotlib.pyplot as plt
```

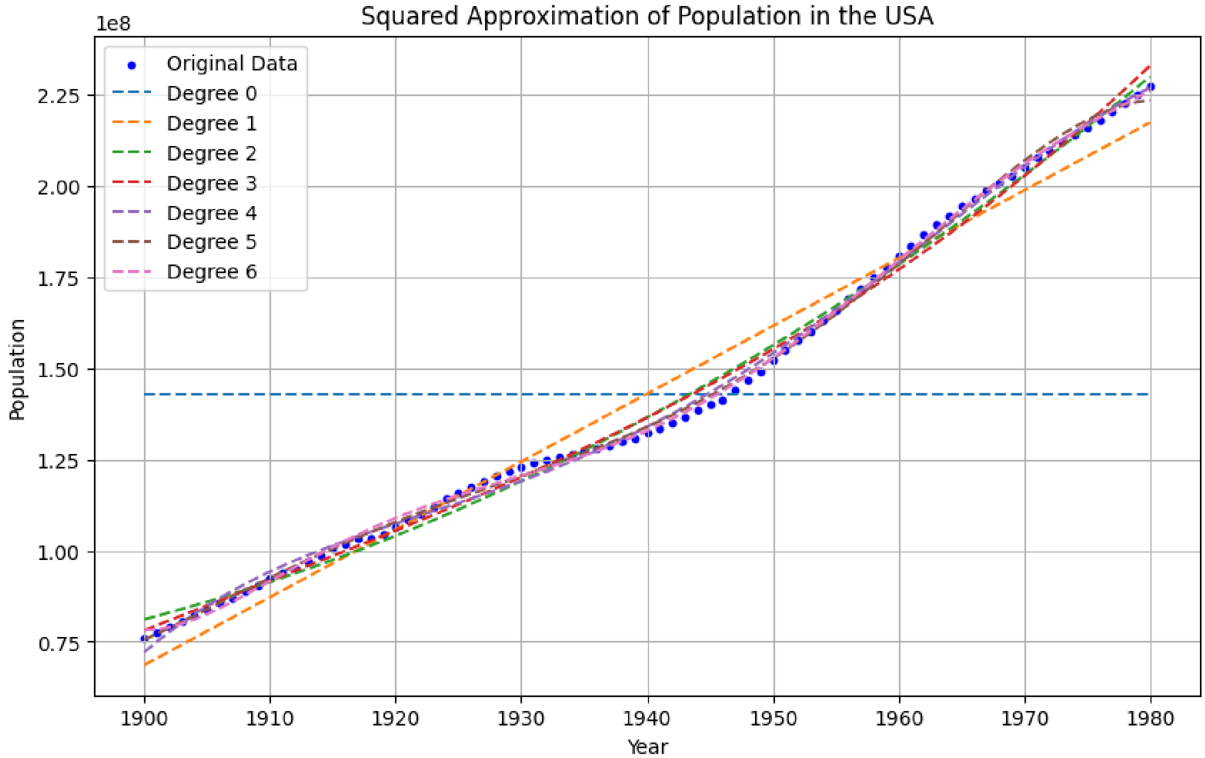
Zadanie 1.

In [2]:
```
years = np.arange(1900, 1981)
population = np.array([76094000, 77584000, 79163000, 80632000, 82166000, 838
                       92407000, 93863000, 95335000, 97112000, 98829000, 100
                       104514000, 106461000, 108538000, 110049000, 111947000
                       120509000, 121767000, 123076741, 124039648, 124840471
                       128824829, 129824939, 130879718, 132122446, 133402471
                       141388566, 144126071, 146631302, 149188130, 152271417
                       165931202, 168903031, 171984130, 174881904, 177829628
                       191888791, 194302963, 196560338, 198712056, 200706052
                       211908788, 213853928, 215973199, 218035164, 220239425
```

In [3]:
```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.scatter(years, population, color='blue', marker='o')
plt.title('Population of the United States from 1900 to 1980')
plt.xlabel('Year')
plt.ylabel('Population')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



In [4]:
```
degrees = range(7)
years_adjusted = years - 1900

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(years, population, label='Original Data', color='blue', s=10)

all_coeffs = [[] for _ in degrees]
all_predictions = [[] for _ in degrees]
for m in degrees:
    X = np.column_stack([years_adjusted**i for i in range(m + 1)])
    coeffs, _, _, _ = np.linalg.lstsq(X, population, rcond=None)
    predicted_population = X @ coeffs
    plt.plot(years, predicted_population, label=f'Degree {m}', linestyle='--
    all_coeffs[m] = coeffs
    all_predictions[m] = predicted_population

plt.title('Squared Approximation of Population in the USA')
plt.xlabel('Year')
plt.ylabel('Population')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



a)

In [5]:
```
true_value_1990 = 248709873

min_relative_error = float('inf')
best_degree = -1
print("True value of population in 1990: ", end = "")
print(true_value_1990)

for m in degrees:
    coeffs = all_coeffs[m]
    predicted_population_1990 = 0
    it = 0
    for coeff in coeffs:
        predicted_population_1990 += (1990 - 1900) ** it * coeff
        it += 1

    relative_error = abs(predicted_population_1990 - true_value_1990) / true

    print(f"For m = {m}, predicted population is: {predicted_population_1990
    print(f"Relative error: {relative_error}\n")

    if relative_error < min_relative_error:
        min_relative_error = relative_error
        best_degree = m

print("Minimum relative error:", min_relative_error)
print("Degree with the smallest relative error:", best_degree)
```

```
True value of population in 1990: 248709873
For m = 0, predicted population is: 143007890.02469137
Relative error: 0.4250011537551974

For m = 1, predicted population is: 235951457.8194068
Relative error: 0.051298386456066394

For m = 2, predicted population is: 259186926.75758642
Relative error: 0.042125604549628874

For m = 3, predicted population is: 268498813.821987
Relative error: 0.07956636615703219

For m = 4, predicted population is: 235575481.29161596
Relative error: 0.05281009374478687

For m = 5, predicted population is: 200084156.92326498
Relative error: 0.1955118045383547

For m = 6, predicted population is: 251555006.5079279
Relative error: 0.011439568013964185

Minimum relative error: 0.011439568013964185
Degree with the smallest relative error: 6
```

b)

In [6]:

```
best_degree = -1
min_AICc = float('inf')

for m in degrees:
    coeffs = all_coeffs[m]
    predicted_population = all_predictions[m]

    # Calculate the AICc
    k = m + 1
    n = len(population)
    AIC = 2*k + n*np.log(np.sum((population - predicted_population) ** 2) /
    AICc = AIC + (2*k*(k + 1)) / (n - k - 1)

    if AICc < min_AICc:
        min_AICc = AICc
        best_degree = m

print("Best degree:", best_degree)
print("Minimum AICc:", min_AICc)
```

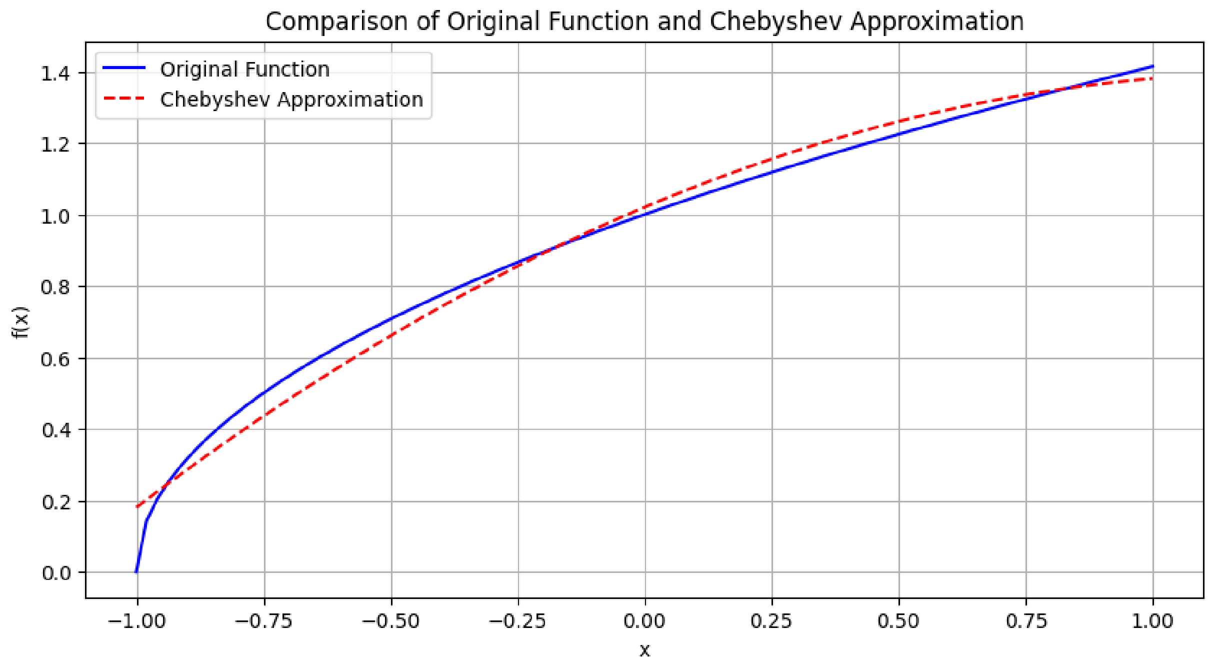
```
Best degree: 6
Minimum AICc: 2288.705094289584
```

Zadanie 2

In [7]:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad
```

```
def rescale(x):
    return (x + 1)
def f_rescaled(x):
    return np.sqrt(rescale(x))

def weight_function(x):
    return (1 - x**2)**(-1/2)

def chebyshev_coefficient(f, n):
    # Anonimowa funkcja dla n-tego wielomianu Czebyszewa i funkcji f(x)
    integrand = lambda x: f(x) * np.cos(n * np.arccos(x)) * weight_function(
    # Współczynnik a_n jest 2/pi-krotnością całki, z wyjątkiem a_0, gdzie je
    coefficient = (2 / np.pi) * quad(integrand, -1, 1)[0] if n > 0 else (1 /
    return coefficient

def approximated_function(x):
    return a0 + a1 * np.cos(np.arccos(x)) + a2 * np.cos(2 * np.arccos(x))

a0 = chebyshev_coefficient(f_rescaled, 0)
a1 = chebyshev_coefficient(f_rescaled, 1)
a2 = chebyshev_coefficient(f_rescaled, 2)

x_values = np.linspace(-1, 1, 100)
y_true = f_rescaled(x_values)
y_approx = approximated_function(x_values)





plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x_values, y_true, label='Original Function', color='blue')
plt.plot(x_values, y_approx, label='Chebyshev Approximation', color='red', l
plt.title('Comparison of Original Function and Chebyshev Approximation')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



1. Zastosowanie wielomianów ortogonalnych: Wielomiany ortogonalne, takie jak wielomiany Czebyszewa użyte w drugim zadaniu, są szczególnie przydatne w aproksymacji funkcji ze względu na ich właściwości minimalizujące maksymalny błąd na danym przedziale. Dzięki temu są one efektywnym narzędziem w sytuacjach, gdzie kluczowe jest równomierne przybliżenie funkcji w całym zakresie jej definicji.
2. Aproksymacja ciągła vs dyskretna:

- Aproksymacja ciągła jest często bardziej precyzyjna i teoretycznie idealna do modelowania zjawisk ciągłych, ponieważ aproksymuje funkcję w całym jej zakresie, a nie tylko w wybranych punktach. Jest szczególnie użyteczna, gdy zależy nam na ogólnej formie funkcji, a nie tylko na wartościach w konkretnych punktach.
- Aproksymacja dyskretna może być bardziej praktyczna w przypadkach, kiedy dysponujemy tylko dyskretnymi danymi lub kiedy koszt obliczeń ciągłych jest zbyt wysoki. W przypadku danych rzeczywistych, które są naturalnie dyskretne (np. pomiary roczne), może dostarczyć wystarczającej dokładności przy niższym koszcie obliczeniowym.

```
In [ ]:
```