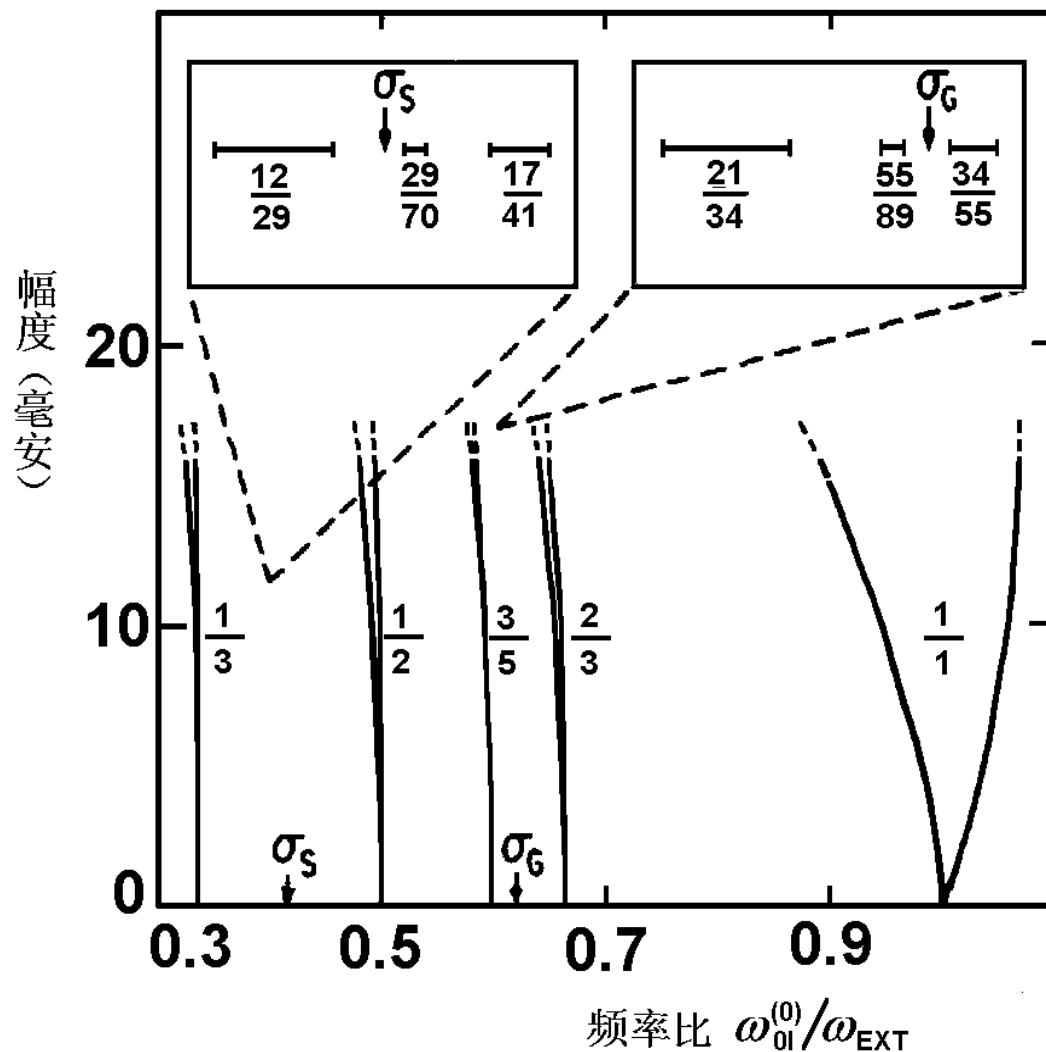


受驱Benard对流实验：

- 通过同步与锁模走向混沌的例子有许多，鉴于实际测量的复杂性，完美显示混沌进程需要精细设计与巧妙技术。
- 以实验首次证明倍周期分岔闻名的利布沙伯技高一筹。他们采用水银来做对流实验，水银是导体，可以加入电流驱动第二振子。
- 实验结果清晰地给出了振荡锁模的阿诺德舌头，以及进入混沌的准周期道路。
- 下面看看实验结果：



非线性物理：混沌物理



$$R = 4.09R_c$$

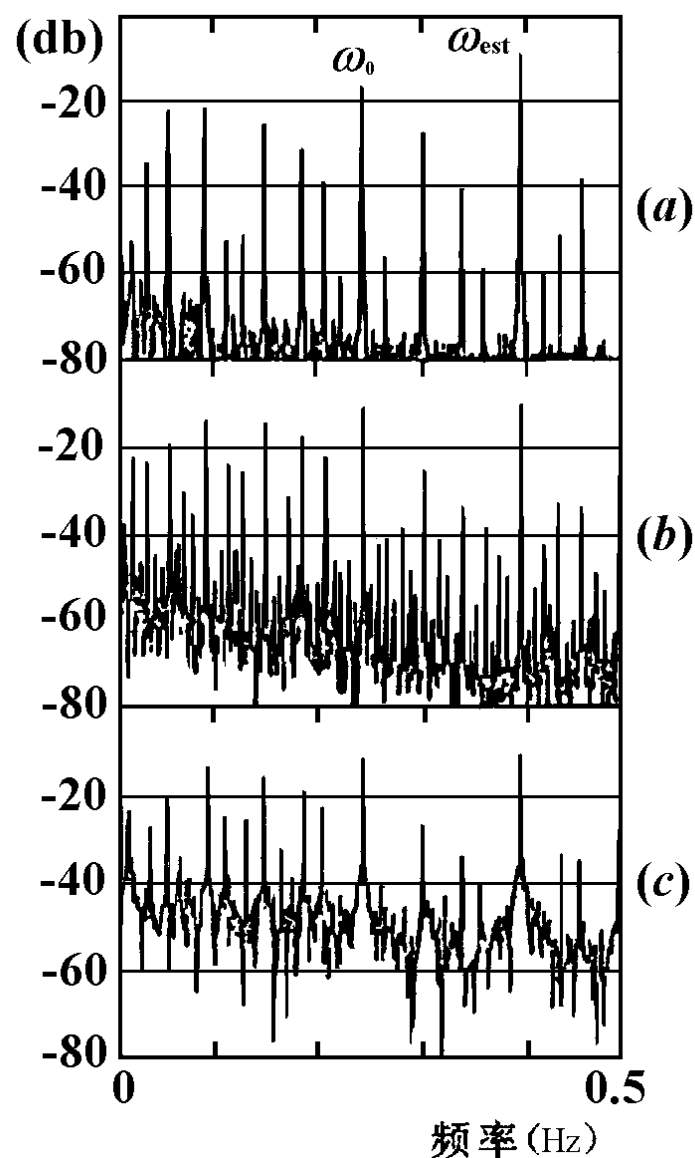
- 明显的锁模行为发生在激励电流升高的过程中。
- 混沌临界点不是水平线。

$$\sigma_G = [1, 1, 1, \dots] = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618033985\dots$$

$$\sigma_S = [2, 2, 2, \dots] = \sqrt{2} - 1 =$$



非线性物理：混沌物理



- 当驱动电流低于临界电流时，信号的功率谱主要由两个基频线性组合得到的少数谱峰；当达到临界驱动电流时，组合得谱峰数便很快增加起来，尤其是低频分量的密度越来越多；而当超过临界电流时，高频逐步地为噪声所替代，这是进入了混沌的特征。
- (a)为16.9mA，低于临界电流；(b)为17.4mA，最接近临界电流；(c)为21.5mA，高于临界电流。



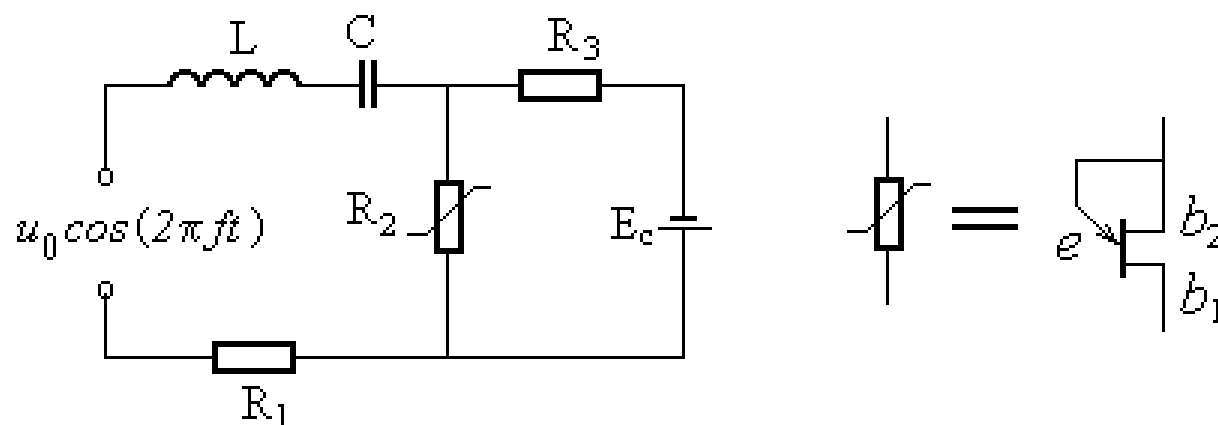
电子混沌电路：

- 采用电子电路容易实现各类非线性动力学体系，且电子测量比其它物理量测量更为方便，如果采用示波器可以直接获得被测量数据的图形，如果将数据采用计算机处理，可以计算出各类非线性动力学参数。
- 因此电子混沌电路在混沌研究中占有重要地位。
- 电子混沌电路基本上可以分成三类：一是外激励的非线性LC谐振电路；二类是模拟微分方程的电子电路；三是实际动力体系的电子模拟电路。



非线性LC谐振电路：

- 外激励的非线性LC谐振电路中，通常使用一些非线性电子元件，即非线性电阻、非线性电容、非线性电感等。考虑单结晶体管混沌电路。
- 在使用单结晶体管作为非线性电阻时，电路示意图很简单：



- 电路方程如下：

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L + g i_L + u_C = u_0 \cos(2\pi f t + \theta) \\ C \frac{du_C}{dt} = i_L \end{cases}$$

$$L \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R_1 C \frac{du_C}{dt} + g \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = u_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$

- 单结晶体管的V-I关系 g 近似表示为：

$$u_{R2} \approx g(i_L) = a_0 + a_1 i_L + a_2 g i_L^2 + a_3 i_L^3$$

- 可以监测电容两端电压 u_C (状态量) 与可变参量 u_0 、 f 之间的关系来判断混沌进程。



- 实验取 $L=30\text{mH}$, $C=0.07\mu\text{F}$, $R_1=125\Omega$, $R_3=33.8\text{k}\Omega$, $E_c=28\text{V}$, 单结晶体管BT33D。
- 取不同 u_0 、 f 可得系统不同运动状态：① 当 $u_0=0$ 时，电路处于单稳状态；② 固定 u_0 ，改变 f 使其逐步接近电路固有频率，电路出现突变的锁频状态；③ 固定 f ，将 u_0 增加，在一定范围内出现倍周期分岔与混沌。但不同 f 下出现倍周期分岔与混沌范围不同，过程也不一样；④ 当 f 远离固有共振时，随 u_0 升高电路出现倍周期分岔—混沌—反倍周期过程；⑤ u_0 值进一步升高，倍周期分岔与混沌现象消失，电路表现出一般非线性电路所共有的畸变波形。



混沌特性的模拟电子电路：

- 能产生混沌行为的典型非线性常微分方程是由三个独立变量的一阶微分方程组成。
- 可以将产生混沌行为的非线性微分方程写成一个三阶方程：
$$\ddot{x} = a_1 \ddot{x} + a_2 f(\ddot{x}) + a_3 \dot{x} + a_4 f(\dot{x}) + a_5 x + a_6 f(x) + a_7$$
- 其中 $f(x)$ 为非线性函数，由不同电子元件的伏安特性产生。
- 一个三阶方程描述的系统有三个李雅普诺夫指数，它是否具有混沌行为要求其中至少有一个是正值，且散值之和非正。下表表示一些对应的方程。



非线性物理：混沌物理

微分方程	初始条件 (x, \dot{x}, \ddot{x})	李雅普诺夫指数 (以 e 为底)
$\ddot{x} = -20017\ddot{x} \pm \dot{x}^7 - x$	(0, 0, ± 1)	0.055, 0, -2.072
$\ddot{x} = -2.8\dot{x} \pm x + x^2$	(∓ 0.5 , 0, ± 1)	0.002, 0, -0.002
$\ddot{x} = -0.44\ddot{x} - 2\dot{x} \pm (x^2 - 1)$	(0, 0, 0)	0.105, 0, -0.545
$\ddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} \pm x \pm x^2$	(0, ± 1 , 0)	0.094, 0, -0.594
$\ddot{x} = -2\dot{x} \pm (x - 1)$	$\pm(-1, -1, 1)$	0.003, 0, -0.003
$\ddot{x} = -0.6\ddot{x} - \dot{x} \pm (x - 1)$	(0, 0, 0)	0.036, 0, -0.636
$\ddot{x} = -0.3\ddot{x} - 0.3\dot{x} - D(x) + 1$	(0, 0, 0)	0.042, 0, -0.342
$\ddot{x} = -0.3\ddot{x} - 0.3\dot{x} - R(x) - 1$	(0, 0, 0)	0.042, 0, -0.342
$\ddot{x} = -2.9\dot{x} \pm (0.7x - D(x) + 1)$	$\pm(0, -0.5, 0.5)$	0.003, 0, -0.003
$\ddot{x} = -2.9\dot{x} \pm (0.7x - R(x) - 1)$	$\pm(0, 0.5, -0.5)$	0.003, 0, -0.003
$\ddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} - x + \text{sgn}(x)$	(0, 1, 0)	0.152, 0, -0.652
$\ddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} + x - \text{sgn}(x)$	(0, 1, 0)	0.601, 0, -1.101



非线性物理：混沌物理

$\ddot{x} = -0.7\ddot{x} - \dot{x} - x + H(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.085, 0, -0.785$
$\ddot{x} = -0.4\ddot{x} - \dot{x} - x + 2S(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.072, 0, -0.472$
$\ddot{x} = -0.4\ddot{x} - \dot{x} + x - 2S(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.091, 0, -0.491$
$\ddot{x} = -0.19\ddot{x} - \dot{x} - x + 2 \tanh(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.128, 0, -0.318$
$\ddot{x} = -0.19\ddot{x} - \dot{x} + x - 2 \tanh(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.067, 0, -0.257$
$\ddot{x} = -3.7\dot{x} \pm (x - x^3)$	$(0, \pm 0.5, 0)$	$0.002, 0, -0.002$
$\ddot{x} = -0.6\ddot{x} + 2.8\dot{x} - x^3 - x$	$(0, 1, 0)$	$0.034, 0, -0.634$
$\ddot{x} = -0.7\ddot{x} - \dot{x} + x - x^3$	$(0, 1, 0)$	$0.138, 0, -0.838$
$\ddot{x} = -0.35\ddot{x} - \dot{x} - x + x^3$	$(0, 1, 0)$	$0.082, 0, -0.432$
$\ddot{x} = -0.2\ddot{x} - \dot{x} \pm \sin(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.123, 0, -0.323$

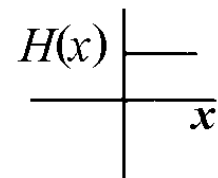
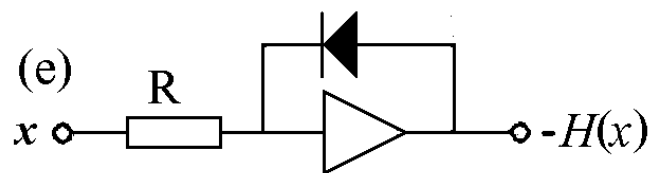
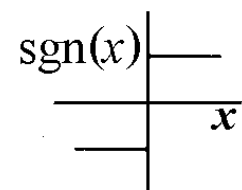
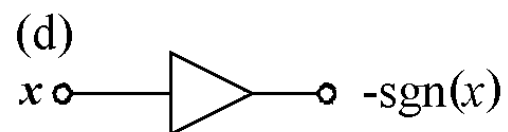
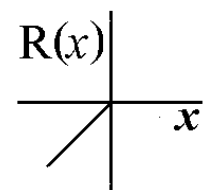
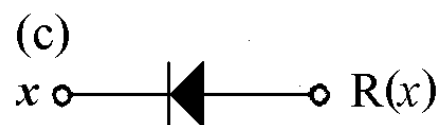
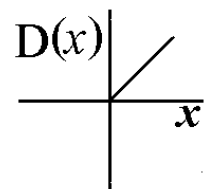
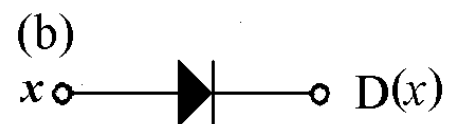
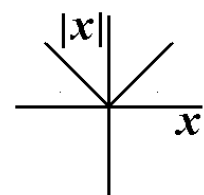
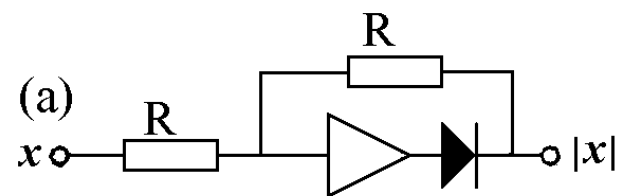


- 还要解决微分运算问题。通常采用由运算放大器组成的有源积分电路来完成。一个常见的有源积分电路，其输入电压 u_i 与输出电压 u_o 之间存在关系：

$$u_o = -\frac{1}{RC} \int u_i dt \quad \frac{du_o}{dt} = -\frac{1}{RC} \int du_i \quad u_i = -RC \frac{du_o}{dt}$$

- 非线性函数 $f(x)$ 在电路上面可以用二极管电路或二极管-运算放大电路来实现。几种电路如下图所示：

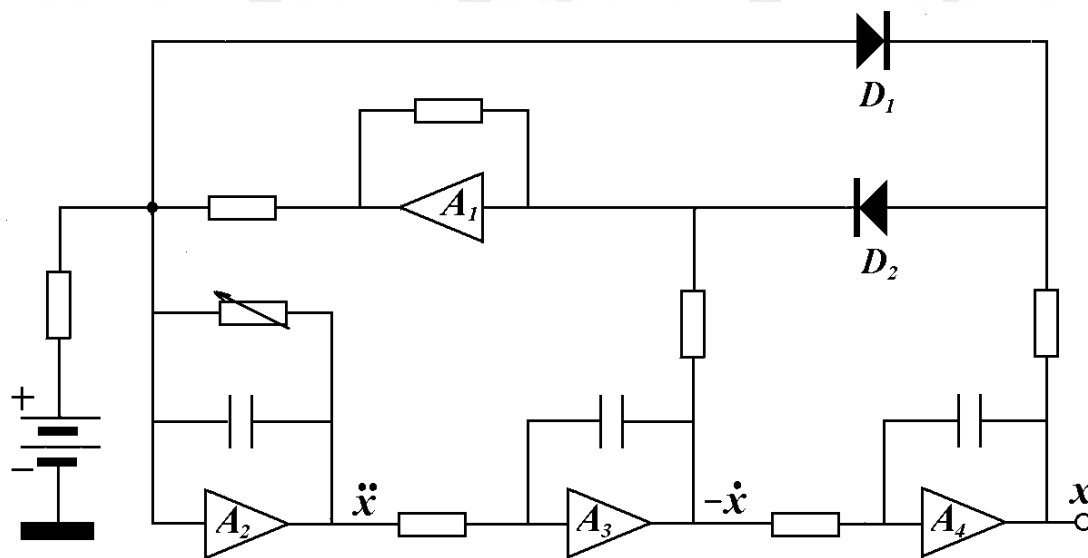
非线性物理：混沌物理



非线性物理：混沌物理

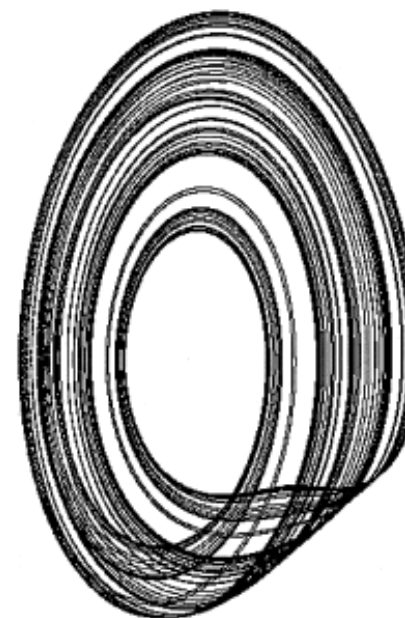
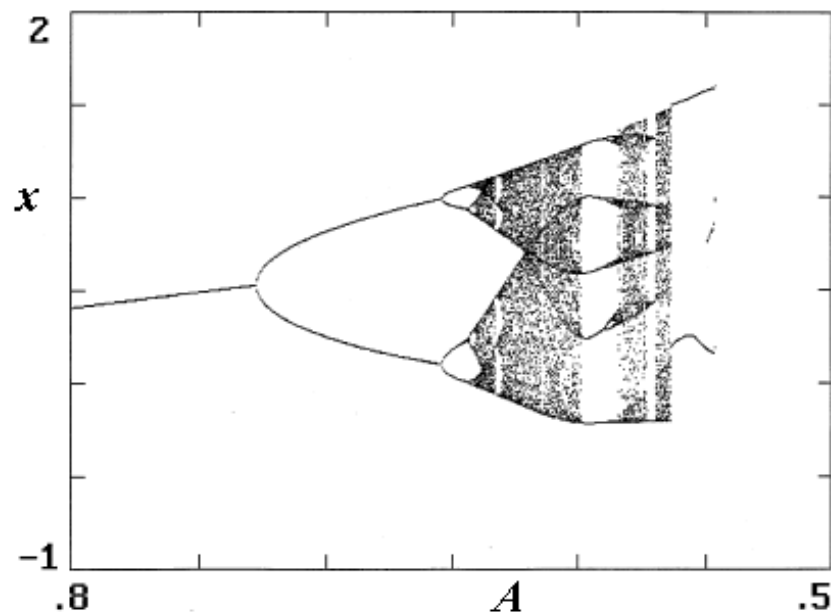
混沌电路1 : $f(x)=|x|$

- 微分方程如下: $\ddot{x} = -A\ddot{x} - \dot{x} \pm (|x| - 1)$
- 电路如下:



非线性物理：混沌物理

- 取方程右边的正负号为负号，初始条件为0，得 $0.5 < A < 0.8$ 区间的分岔图。当 A 由0.8向0.64085逼近时，系统以倍周期分岔进入混沌。 A 值小于0.64085后，出现类似于平方映射那样的带有大大小小窗口的典型的混沌带。



跃变非线性函数混沌：

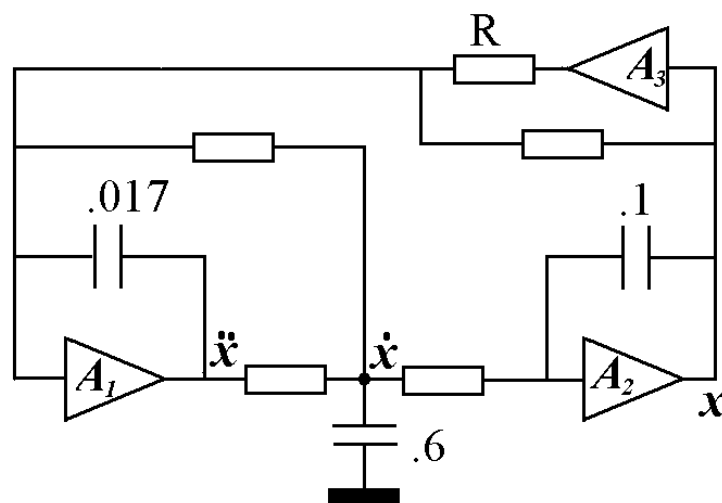
- 利用运算放大器的内在线性特性，即开环特性。当输入电压过零时理想放大器的输出将从负饱和值跃变到正饱和值。

- 一个简单的以跃变非线性函数的微分方程为：

$$\ddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} \pm [x - \text{sgn}(x)] \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

- 不同正负号对应的奇怪吸引子的形式很不相同。取正号时电路如下图，电阻 R 的选取是使运算放大器正向饱和电流为 $1mA$ ，图中的其它电阻均 $1k\Omega$ 。



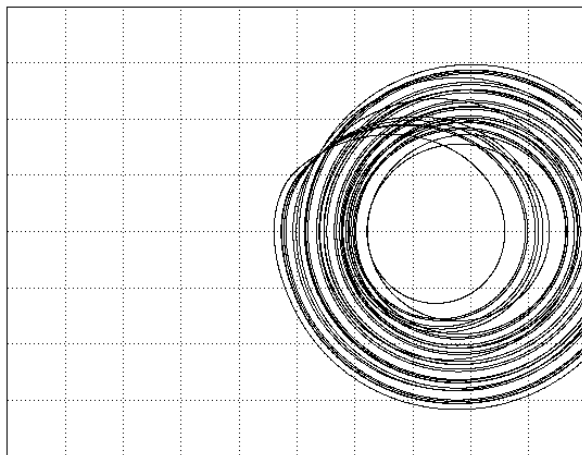


- 取正号时，奇怪吸引子是一种单折带形式。取负号时，奇怪吸引子是一种双旋结构，类似于洛仑兹吸引子。如果取负号，并设 x 项系数是可调参数 B ，则方程变为：

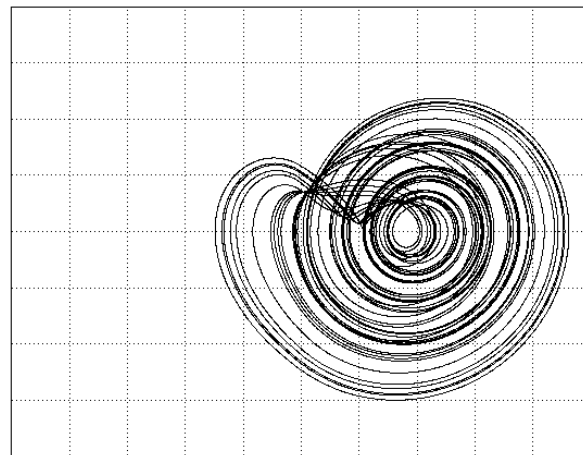
$$\ddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} - Bx + \text{sgn}(x)$$

- 不同 B 值取值情况下的吸引子图像如下：

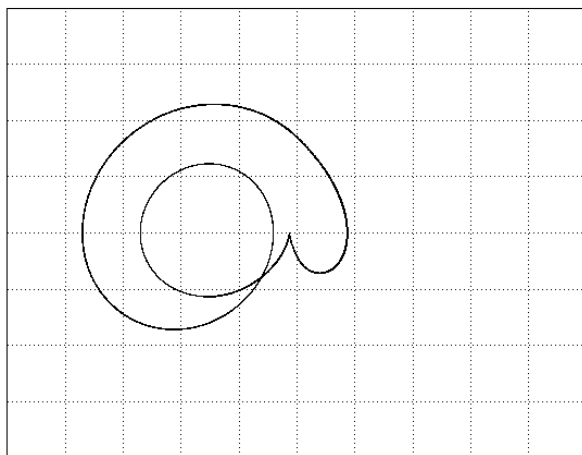
非线性物理：混沌物理



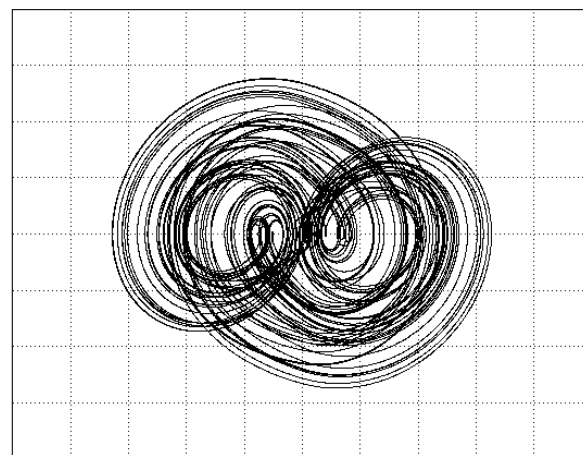
(a)



(b)



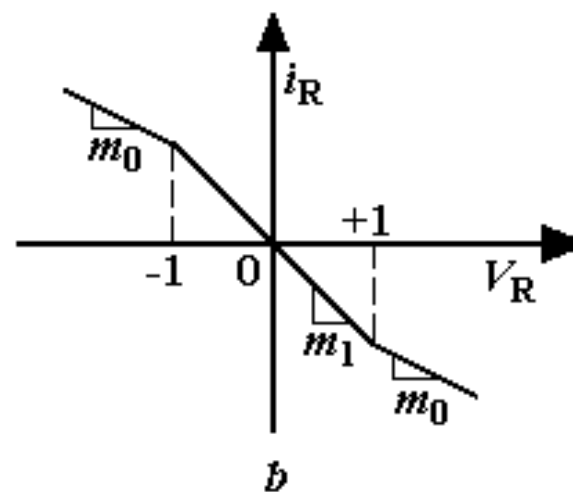
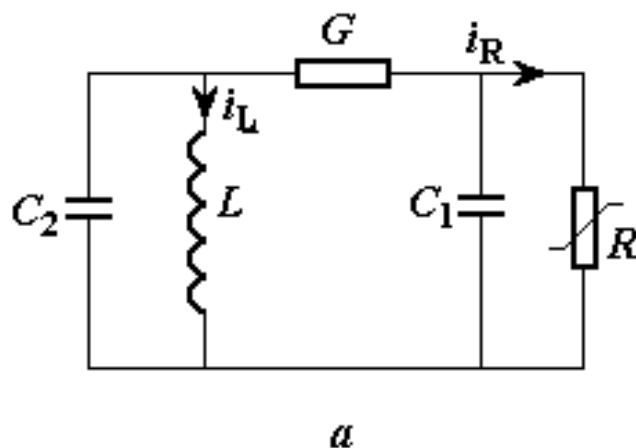
(c)



(d)

蔡氏混沌：

- 具有非线性电阻的混沌电子电路，由美籍华人蔡少棠首先发起研究。它是一个三阶自治电路，其中的非线性电阻 R 特性表现为分段线性电阻。



- 电路方程可以写成：

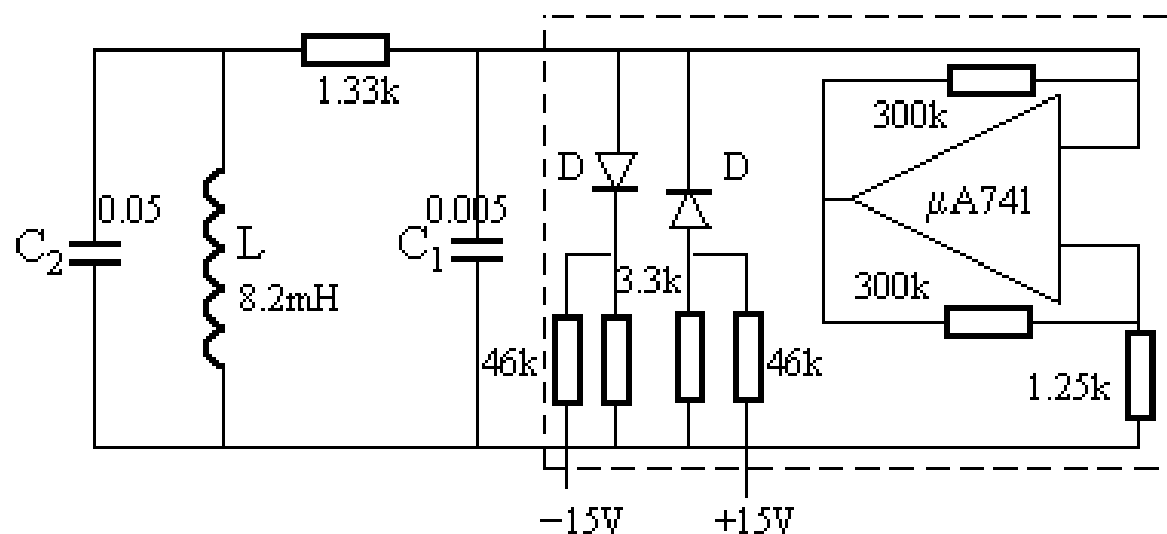
非线性物理：混沌物理

$$\begin{cases} \frac{du_{c1}}{dt} = (G / C_1)(u_{c2} - u_{c1}) - (1 / C_1)g(u_{c1}) \\ \frac{du_{c2}}{dt} = (G / C_2)(u_{c1} - u_{c2}) - (i_L / C_2) \\ \frac{di_L}{dt} = -(1 / L)u_{c2} \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= u_{c1} & y &= u_{c2} \\ z &= i_L / G & \alpha &= C_2 / C_1 \\ \beta &= C_2 / LG^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha[y - h(x)] \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta \cdot y \end{cases} \quad \begin{aligned} h(x) &= x + g(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[|x + 1| - |x - 1|] \\ h(x) &= \begin{cases} m_1 x + (m_0 - m_1) & x \geq 1 \\ m_0 x & |x| \leq 1 \\ m_1 x + (m_0 - m_1) & x \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

- 电路构造为：

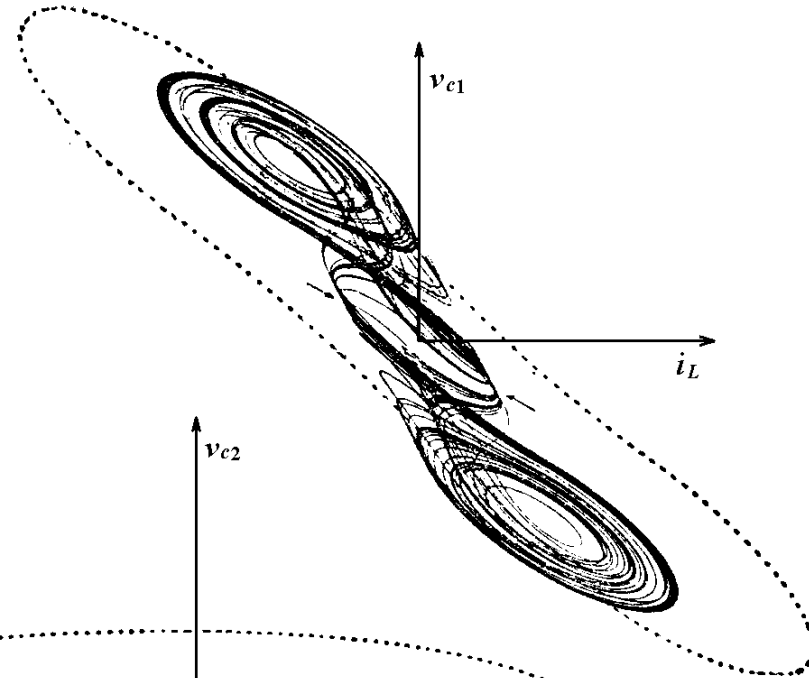




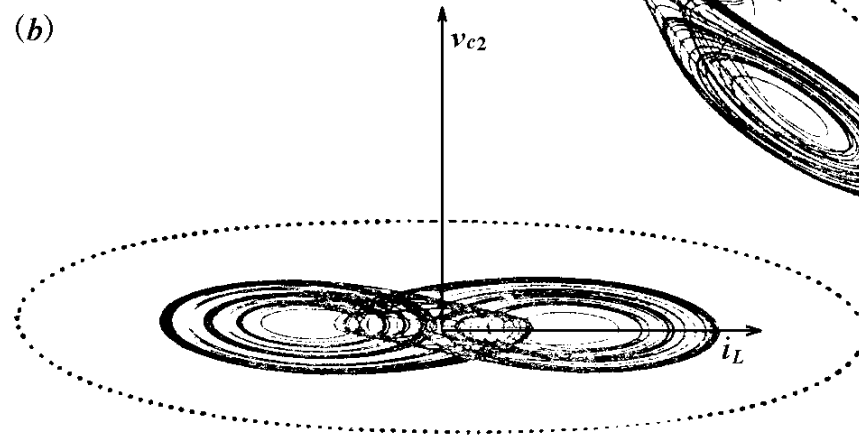
- 该方程关于原点对称， $\alpha=9$, $\beta=28$, $m_0=1/7$, $m_1=2.7$ ，有三个定常点 $(3/2, 0, -3/2)$ 、 $(-3/2, 0, 3/2)$ 和 $(0, 0, 0)$ ，均为鞍点。
- 吸引子的三个二维投影如图所示。这种形式的奇异吸引子称为双漩(Double Scroll)结构。

非线性物理：混沌物理

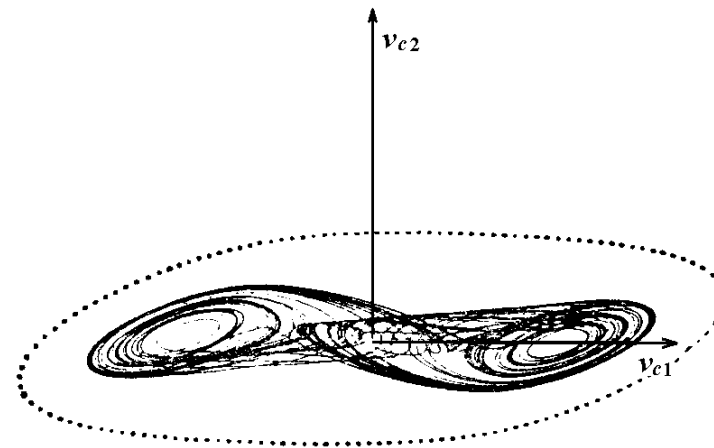
(a)



(b)



(c)



混沌控制：

- 控制混沌与同步混沌是近年混沌研究的重大进展。混沌控制是使一个系统从处于随机状态走向规则运动，从而使混沌从理论研究发展到具有经济价值的应用研究。
- 一台激光器处于混沌状态，则各项输出性能(输出功率、单色性、相干性等)不高。但如果混沌状态可以得到控制，激光的各项性能将会大幅度提高，应用价值将随之增加。
- 混沌状态蕴藏着巨大信息，如果使产生混沌的动力学系统得到同步，就可用来作最高保密通信。



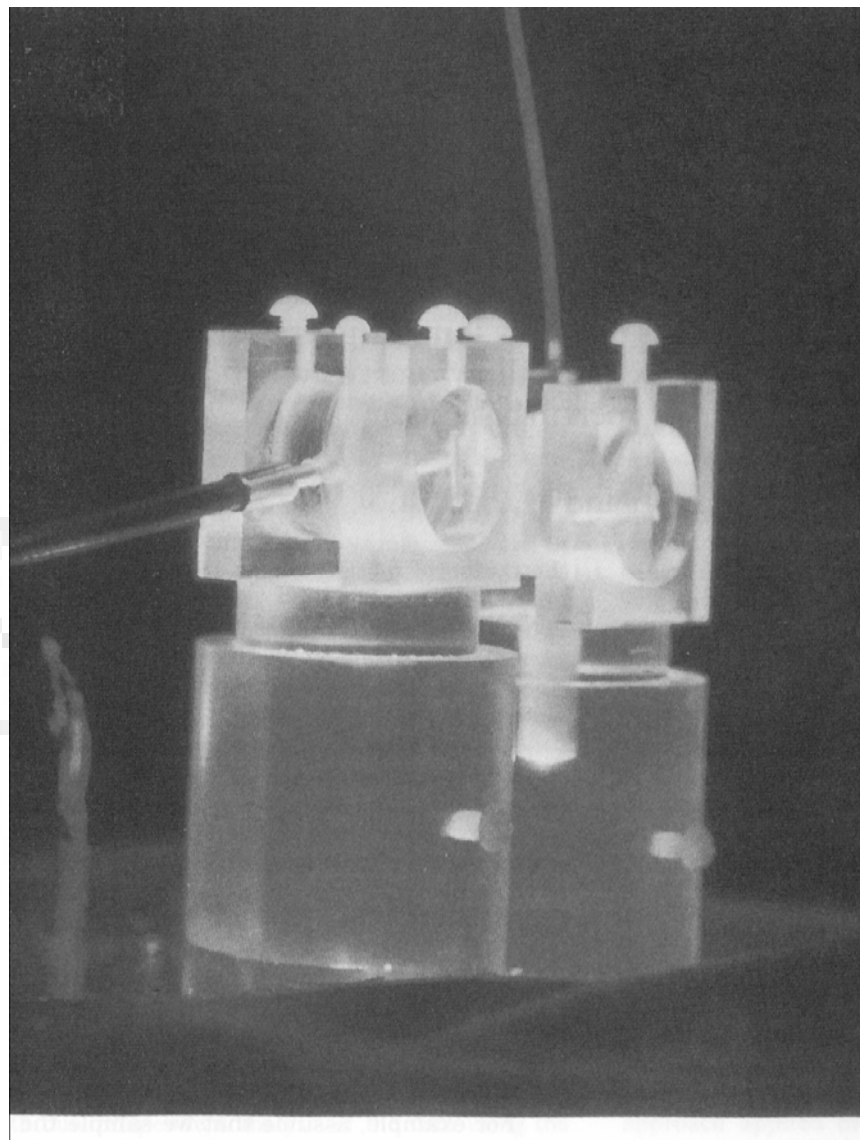
- 研究和应用较多的方法是OGY方法，由Ott、Grebogi和Yorke于1990年提出。OGY基本出发点是混沌吸引子的几何结构和混沌动力学对初值具有高度敏感性，通过适当调整可控参数稳定轨道。
- 奇异吸引子中存在无穷多不稳定周期轨道，在庞加莱截面上，这些轨道是不动点。由于周期轨道不稳定，实际相轨迹线只有少数几次回到庞加莱截面上的这些不稳定不动点附近。
- 具体实施混沌控制时，选定其中任一轨道为控制目标，调整系统某个可控参数，根据混沌对初值的敏感性，系统对所施加的任意小扰动作出迅速响应，使得系统达到并保持在这个目标轨道上，从而实现控制。



非线性物理：混沌物理

具体例子：磁弹非晶带Euler失稳

- 如图所示为一个简单的力学系统，由W. Ditto在海军水面武器中心进行的一项实验。系统由一根一端固定的磁弹金属非晶片与周围的磁铁组合构成，非晶片的弹性模量在外加一个小磁场后会减小一个数量级，从而出现因为Euler失稳导致的弯曲buckle现象。系统具有高度的非线性行为。

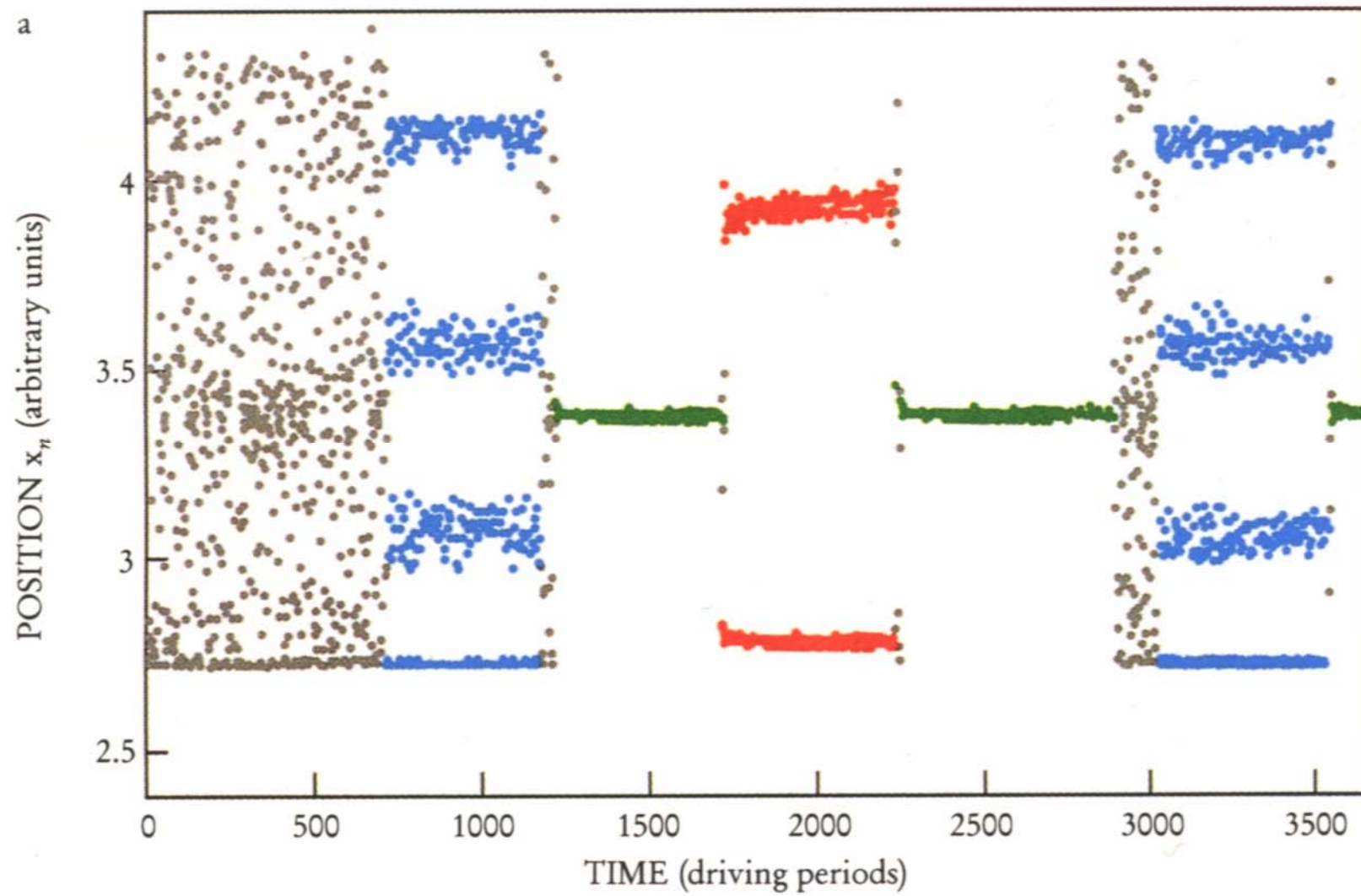


非线性物理：混沌物理

- 实验的基本思路是沿非晶片方向加上一个交变磁场：
 $H(t)=H_{dc}+H_{ac}\cos(2\pi ft)$, 其中 $f\sim 1.0\text{Hz}$ 。
- 借用一个光探测器来探测非晶片上某一点位移随时间 t 的变化，就可以大致描述系统的非线性动力学演化行为。在合适选取 H_{dc} 和 H_{ac} 时，系统随时间变化的行为处于混沌状态。
- 短时间内通过微小改变 H_{dc} 获得混沌控制。每一次改变一下 H_{dc} ，然后恢复到初始 H_{dc} 值，系统能够分别维持四周期分叉、单周期分叉和双周期分叉状态很长时间，然后才进入到混沌状态。
- 系统从混沌状态进入到倍周期状态，一旦 H_{dc} 回复到原来的值，倍周期状态就不再是稳定状态，但是可以维持相当一段时间。

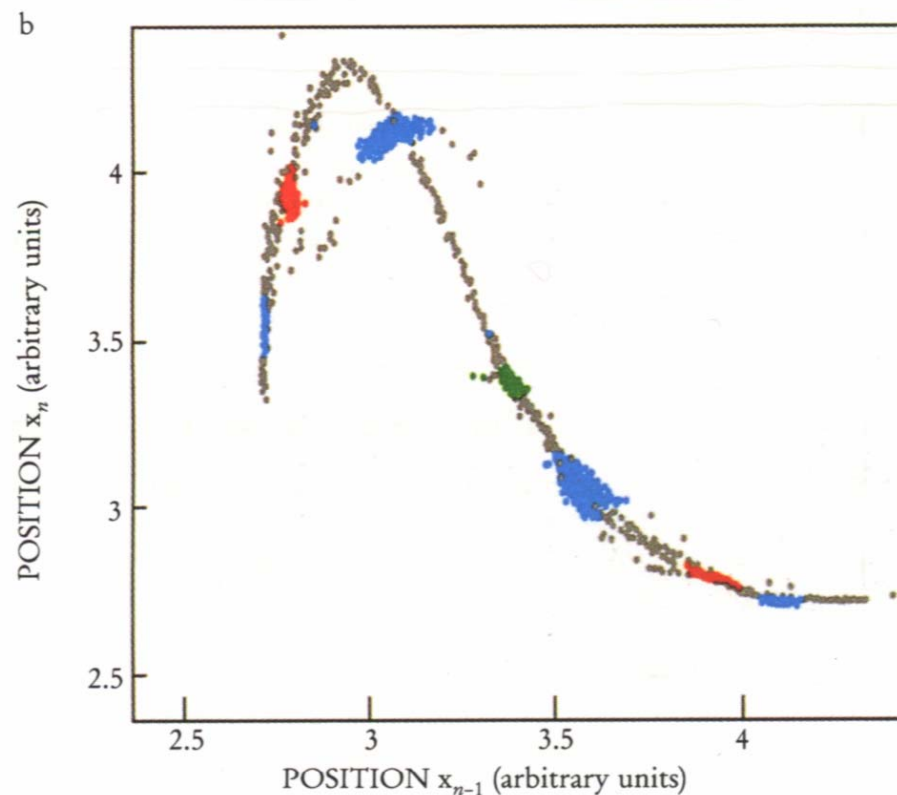


非线性物理：混沌物理



非线性物理：混沌物理

- 图中灰色点显示了混沌态下系统的奇异吸引子映射图。蓝色是四周期分叉，红色是双周期分叉，绿色是单周期分叉。
- 这些周期分叉态的控制是通过每四个、两个和一个时间周期改变一次 H_{dc} 而得到的，每隔三个周期改变一下 H_{dc} 会导致数据存在更多误差，所以四周期分叉态与奇异吸引子映射轨迹的偏离最大。



非线性物理：混沌物理

- 混沌控制假定在奇异吸引子中存在大量不稳定倍周期轨道或状态。一个可控的系统必须满足：
 - (1) 设定系统可由迭代 $\xi_{n+1}=f(\xi_n, p)$ 来表示，其中 p 为控制参数。
 - (2) 奇异吸引子轨迹中存在一个特定的倍周期轨道，系统能够暂时稳定在其周围微小区域。
 - (3) 针对参数 p 存在一个最大的扰动 δp^* ，当 p 从其名义值 p_0 发生改变不会完全改变系统的宏观稳定性特征。
- 有了上面三个条件，系统全方位的迭代映射图可以通过实验或者模拟完整地建立起来，从而可以了解某个特定周期轨道附近的迭代映射组态特征，由此得到局域稳定和不稳定迭代演化的本征值和本征矢量。



非线性物理：混沌物理

- 通过改变 p ，改变特定轨道在迭代映射中的位置，使下一次迭代本来已经偏离这个特定轨道的系统状态仍然回到轨道上。
- 上述控制的思路可以示意性地表述为下图。

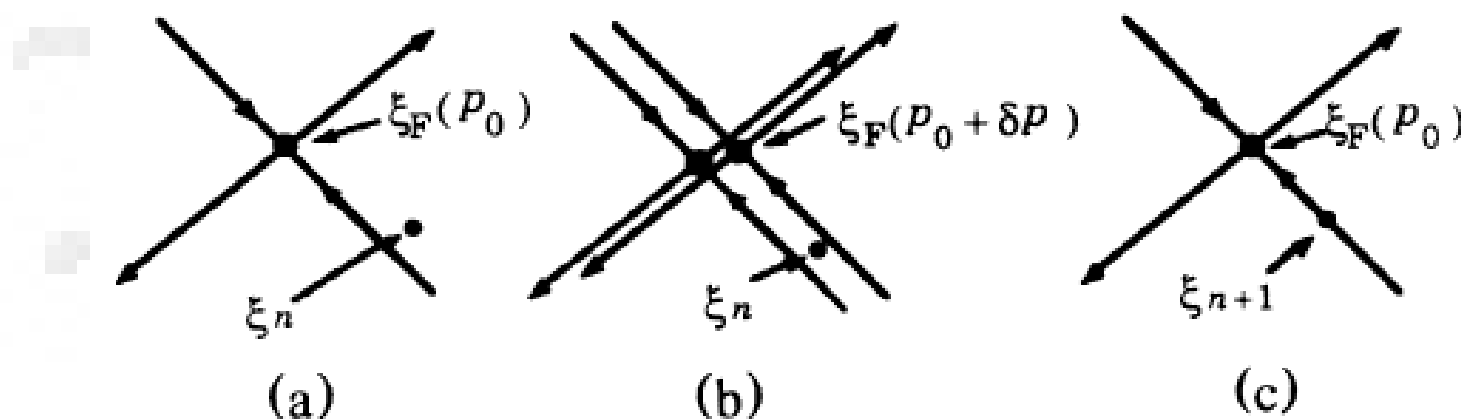


FIG. 1. Schematic of the OGY control algorithm for a saddle fixed point: (a) The n th iterate ξ_n falls near the fixed point $\xi_F(p_0)$. (b) Turn on the perturbation of p to move the fixed point. (c) The next iterate is forced onto the stable manifold of $\xi_F(p_0)$. Turn off the perturbation.

实验过程：

- 对磁弹体系，交变磁场导致非晶片发生混沌式弯曲振荡。调节 $H_{ac}=2.050\text{Oe}$, $H_{dc}=0.112\text{Oe}(p_0)$, $f=0.85\text{Hz}$ ，可以获得混沌振荡。光探测器记录下非晶片的弯曲程度，输出的是探测器的电压变化 $V(t)$ ，则迭代变量可以设定为 $X_n=V(t_n)$ 。
- 考虑单周期情况，即在奇异吸引子内部存在一个不稳定的鞍点状态(一定是鞍点，否则系统不可能再回到此点)。如果系统严格在此状态下，迭代是单值的，即单周期非稳定吸引子： X_{n+1} 和 X_n 是一一对应的。既然如此，控制使得 $X_{n+1}=X_n$ 。



非线性物理：混沌物理

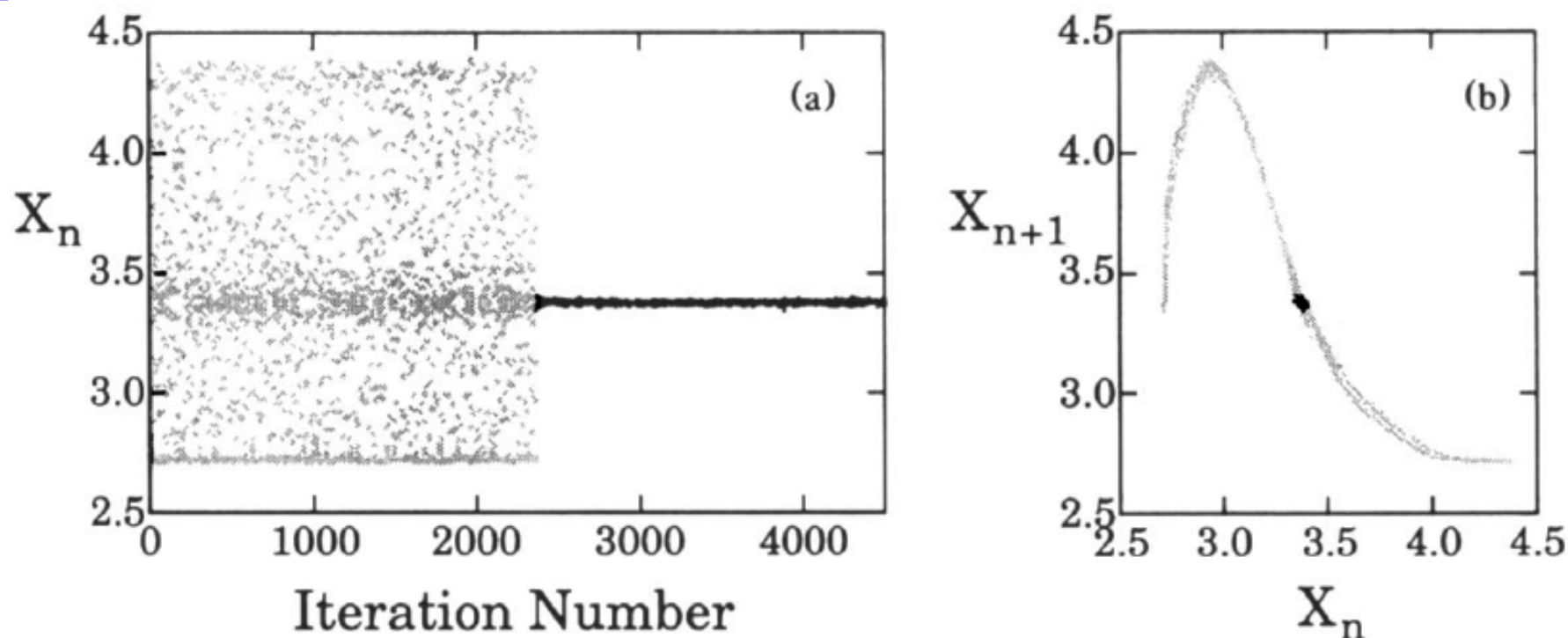


FIG. 2. (a) Time series of $X_n = V(t_n)$ for $H_{dc}(\text{nominal}) = 0.112$ Oe, $H_{ac} = 2.050$ Oe, and $f = 0.85$ Hz. Control was initiated after iteration 2350. (b) The first return map (X_{n+1} vs X_n) for the controlled system (in black) is superimposed on the map for the uncontrolled system (in gray). The large density of points of low values of X_n is due to the saturation of the sensor for large excursions of the ribbon away from the sensor.

- 清楚看到单周期吸引子在控制后稳定在单倍周期轨道。这种控制的数学计算依然是一种线性处理。



非线性物理：混沌物理

- 为在奇异吸引子中提高单周期吸引子的稳定性，先提取出来全部迭代对 (X_n, X_{n+1}) ，它们都在 $X_n=X_{n+1}$ 附近微小区域(0.05V)。
- 进行如下线性化近似拟合：

$$\xi_{n+1} - \xi_F = \mathbf{M}(\xi_n - \xi_F), \quad \xi_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+2} \\ X_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\xi_n = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \xi_F = \begin{pmatrix} X_F \\ X_F \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} X_{n+2} - X_F \\ X_{n+1} - X_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n+1} - X_F \\ X_n - X_F \end{pmatrix}$$

$$|M - \lambda E| = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_s \\ \lambda_u \end{pmatrix}$$



非线性物理：混沌物理

- 求得本征值(λ_s, λ_u)和本征矢量(e_s, e_u)。我们只对非稳定本征值有兴趣，因为它是它使系统失稳混沌。
- 求得对应于 λ_u 的逆变本征矢量 f_u ，满足 $f_u \cdot e_u = 1, f_u \cdot e_s = 0$ 。
- 实验时，再微调 H_{dc} ($H_{dc}=0.1200\text{e}$)，重复上述步骤，得到新的奇异吸引子和新条件下不稳定鞍点，求得响应因子 g ：

$$g = \partial \xi_F / \partial p \sim \partial \xi_F / \partial H_{dc}$$

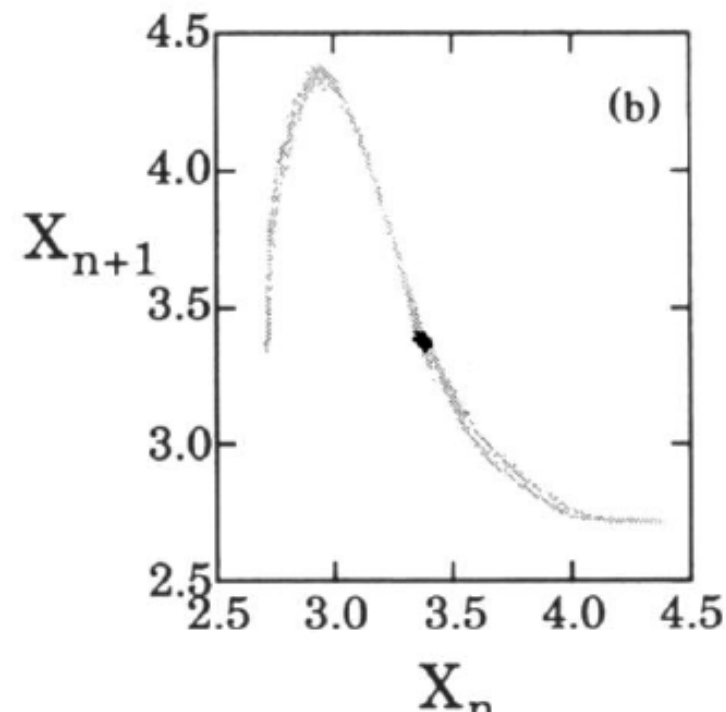
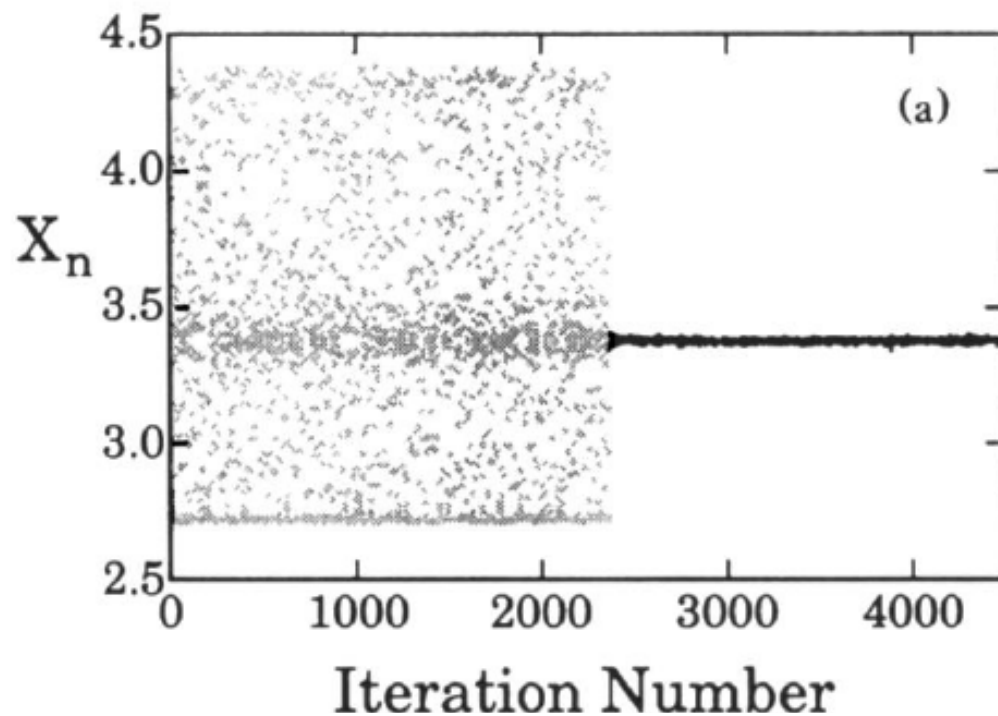
- 现在可以让系统回到 $H_{dc}=0.11200\text{e}$ ，开始控制操作。先求：

$$|\xi_n - \xi_F| < \delta \xi^* = [(\lambda_u - 1) / \lambda_u] \delta p^* (g \cdot f_u)$$

- 它表示在 δp^* 条件下系统能够控制对单周期吸引子 ξ_F 的最大偏离。根据计算就可以实现实时控制。 $(\lambda_u - 1)$ 表示对线性长大偏离。



非线性物理：混沌物理



- 类似的思想同样可以应用到从混沌到二倍周期吸引子和四倍周期吸引子的控制，只是这时应该有：

$$\xi_n = \begin{pmatrix} X_{2n+2} \\ X_{2n} \end{pmatrix}, \quad \xi_n = \begin{pmatrix} X_{4n+4} \\ X_{4n} \end{pmatrix}$$



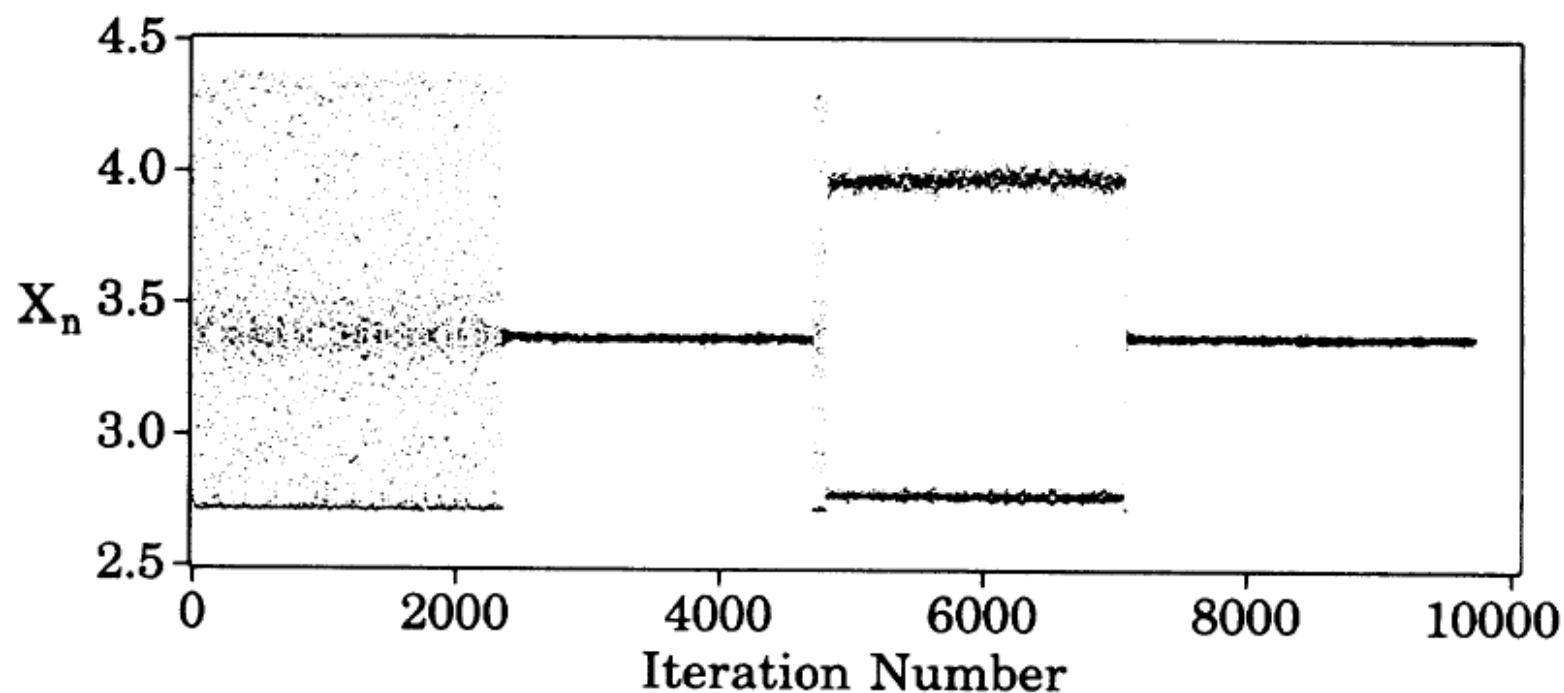


FIG. 3. Time-series data as the system is switched from no control to control about the fixed point (at $n = 2360$), to control about the period-2 orbit (at $n = 4800$), and back to control around the fixed point (at $n = 7100$).

再以受驱单摆为例：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{q} \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = F \cos vt$$

- q 为品质因子， q 、 F 或 v 为控制参数。
- 为实现控制，还是看庞加莱截面 (θ, ω) ，其每次迭代可以表示为如下形式：

$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = M(\theta, \omega) \begin{pmatrix} \theta_n \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

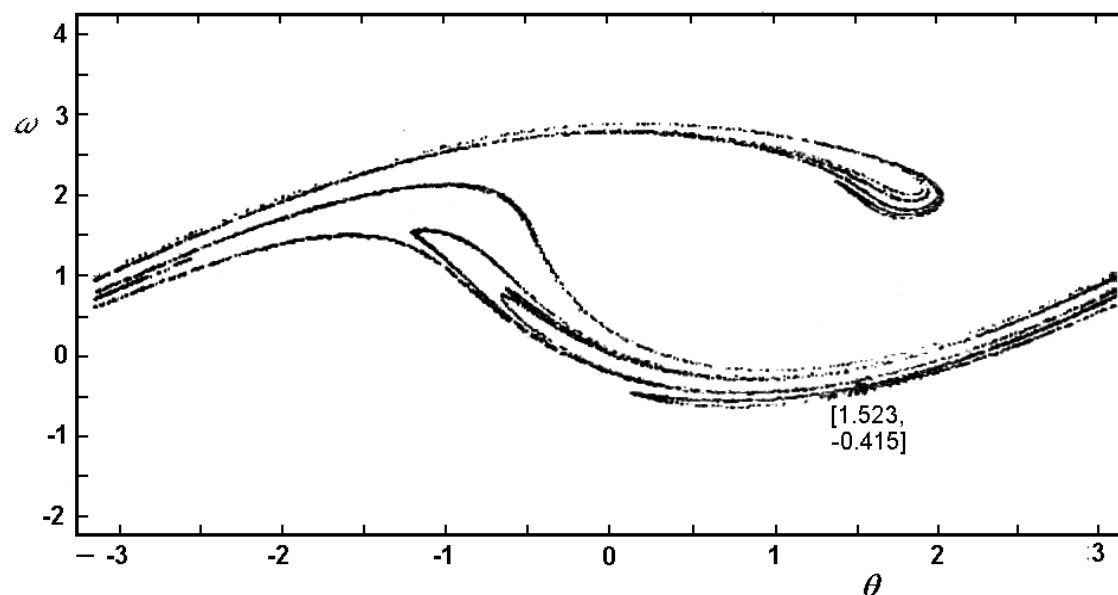
- 其中变换矩阵 $M(\theta, \omega)$ 在每一次迭代都可能不同，需要从庞加莱截面轨道来确定。



非线性物理：混沌物理

- 以阻尼参数 q 为可控参数，通过计算作出以 q 为变量的单摆分叉图 (ω, q) ，其中 ω 是某一周期时刻的角速度。在混沌区中找出某个不动点作为控制目标。设每个驱动周期开始时给 q 一个微小改变 δq ，适当选择使系统轨线逐步地返回到周期轨道。步骤如下：

- (1) 确定不动点 (θ_n, ω_n)
坐标：取 $q=3.9$ 、 $F=1.5$ 、 $v=2/3$ ，运行10000次迭代，得到下面的庞加莱截面：



- 在庞加莱截面上，寻找一对相邻迭代点 (θ_n, ω_n) 和 $(\theta_{n+1}, \omega_{n+1})$ ，计算两点之间的距离，并与事先设定的某个小量 ε 比较。如果该距离小于 ε ，说明附近有不动点存在。计算过程中系统会多次回到此不动点的邻近，即会出现多个不同的距离，通过对这些值的平均，估算出不动点位置。例如，求得坐标 $(1.523, -0.415)$ 处的不动点 (θ_F, ω_F) 。
- (2) 确定参数 q 微小变动对不动点 (θ_F, ω_F) 的影响：设 q 有微小改变 δq ，则产生新的不动点 (θ'_F, ω'_F) ，新的不动点坐标可近似为：

$$\begin{pmatrix} \theta'_F \\ \omega'_F \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \theta_F \\ \omega_F \end{pmatrix} + \delta q \begin{pmatrix} \delta\theta_F / \delta q \\ \delta\omega_F / \delta q \end{pmatrix} \quad [\delta\theta_F / \delta q, \delta\omega_F / \delta q]$$



- 计算 q 作微小改变时不动点的变化，并作出 $\theta_F \sim q, \omega_F \sim q$ 关系曲线。它们可近似为直线，通过对数据的拟合，可得如下结果：

$$[\delta\theta_F / \delta q, \delta\omega_F / \delta q] = [-0.41, -0.29]$$

- (3) 确定变换矩阵 M ：变换矩阵 M 是由 (θ_n, ω_n) 到 $(\theta_{n+1}, \omega_{n+1})$ 的复杂映射。然而在相平面小区域内可以近似为线性映射。在不动点附近，这个映射可以写成：

$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \theta_n \\ \omega_n \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \theta_n - \theta_F \\ \omega_n - \omega_F \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta\theta_{n+1} \\ \Delta\omega_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Delta\theta_n \\ \Delta\omega_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_n \\ \Delta\omega_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \theta_n - \theta_F \\ \omega_n - \omega_F \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta\theta_{n+1} \\ \Delta\omega_{n+1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \theta_{n+1} - \theta_F \\ \omega_{n+1} - \omega_F \end{pmatrix}$$



- 与前一个例子所作本征值分析计算类似，我们得到：

$$M = \begin{pmatrix} -3.42 & -5.79 \\ -1.52 & -2.48 \end{pmatrix} \quad \lambda_u = -5.85 \quad \mathbf{e}_u = (e_{u1}, e_{u2}) = (0.92, 0.40)$$
$$\lambda_s = +0.050 \quad \mathbf{e}_s = (e_{s1}, e_{s2}) = (0.86, -0.52)$$

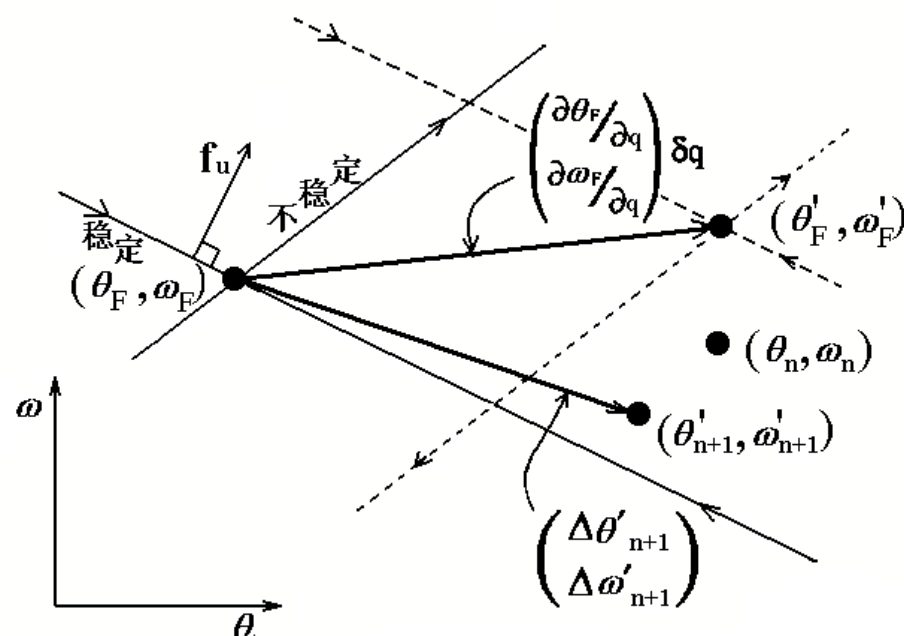
$$\mathbf{f}_s = (f_{s1}, f_{s2}) = (0.49, -1.12) \quad \mathbf{f}_u = (f_{u1}, f_{u2}) = (0.63, 1.04)$$

$$M = \lambda_u \begin{pmatrix} e_{u1} \\ e_{u2} \end{pmatrix}^{(f_{u1}, f_{u2})} + \lambda_s \begin{pmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \end{pmatrix}^{(f_{s1}, f_{s2})}$$



- (4) 控制算法:

$$\begin{pmatrix} \Delta \theta'_{n+1} \\ \Delta \omega'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'_F \\ \omega'_F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_F \\ \omega_F \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \theta_n - \theta'_F \\ \omega_n - \omega'_F \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \Delta \theta'_{n+1} \\ \Delta \omega'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \theta_F / \partial q \\ \partial \omega_F / \partial q \end{pmatrix} \delta q + \begin{bmatrix} \lambda_u \begin{pmatrix} e_{u1} \\ e_{u2} \end{pmatrix}^{(f_{u1}, f_{u2})} + \lambda_s \begin{pmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Delta \theta_n \\ \Delta \omega_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial \theta_F / \partial q \\ \partial \omega_F / \partial q \end{pmatrix} \delta q \right]$$

- 为了得到控制，我们希望点 $(\theta'_{n+1}, \omega'_{n+1})$ 向着稳定流形运动，因而 $\Delta(\theta'_{n+1}, \omega'_{n+1})$ 必需与稳定流形一致运动，这意味着 $\Delta(\theta'_{n+1}, \omega'_{n+1})$ 与 f_u 的点积等于零，这样就可以解出控制的条件：

$$(f_{u1}, f_{u2}) \begin{pmatrix} \Delta\theta'_{n+1} \\ \Delta\omega'_{n+1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\delta q = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \cdot \frac{(f_{u1}, f_{u2}) \begin{pmatrix} \Delta\theta_n \\ \Delta\omega_n \end{pmatrix}}{(f_{u1}, f_{u2}) \begin{pmatrix} \partial\theta/\partial q \\ \partial\omega/\partial q \end{pmatrix}}$$



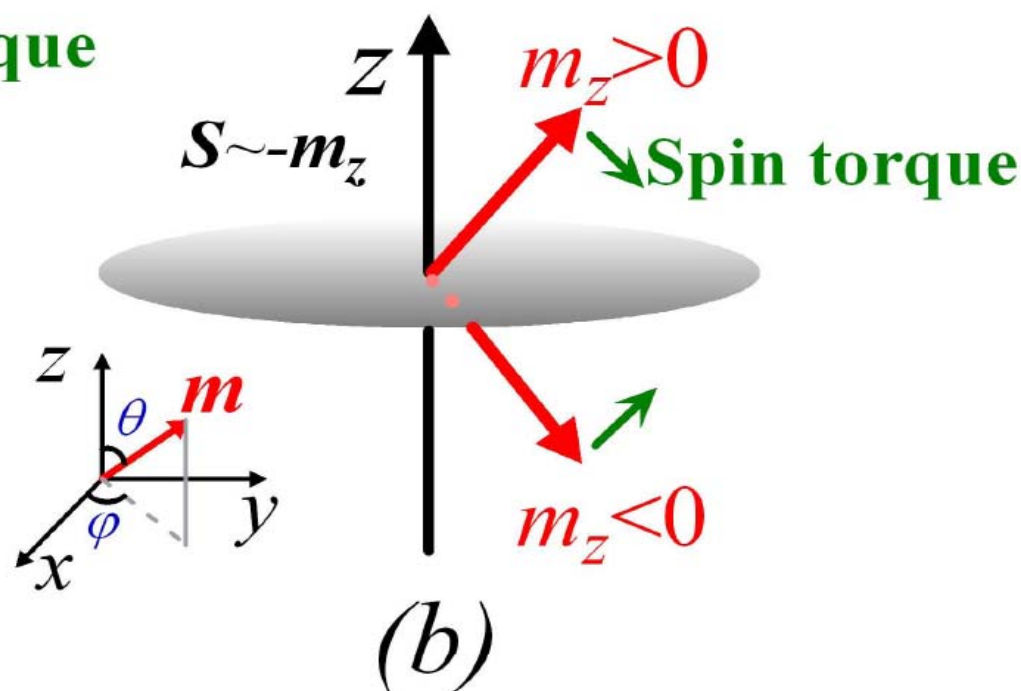
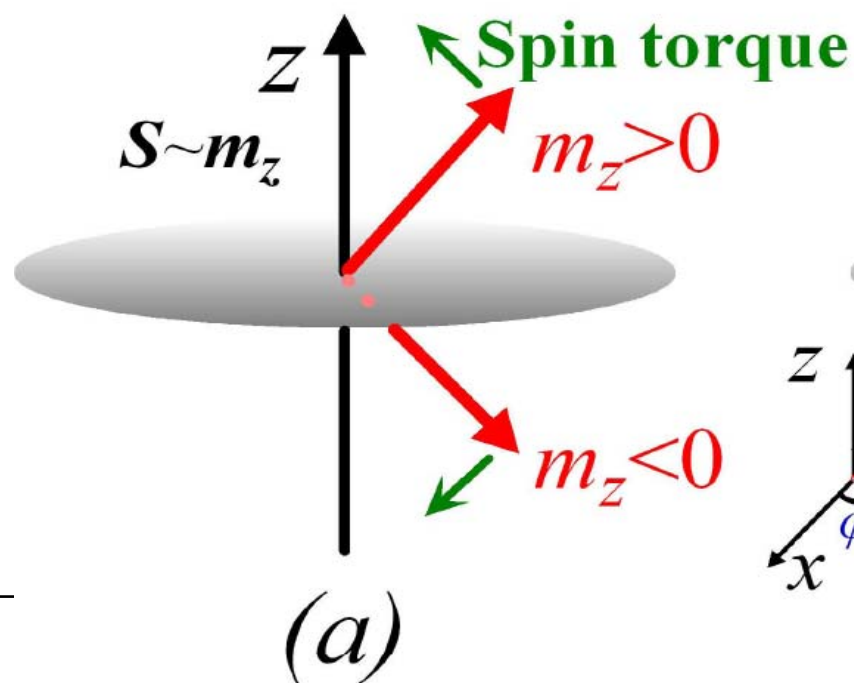
控制方法的优点：

1. No model for the dynamics is required
2. The computations required at each iterate are minimal
3. The required changes in the parameter can be quite small
4. Different periodic orbits can be stabilized for the same system in the same parameter range
5. Control can be achieved even with imprecise measurements of the eigenvalues and eigenvectors
6. This method is not restricted to periodically driven mechanical systems, but extends to any system whose dynamics can be characterized by a nonlinear map.



混沌作业：PRB 74, 054417 (2006)

- 单自旋体系中的自旋进动过程：在现代高速磁记录和自旋电子学中具有重要价值。
- 考虑一个单一自旋体系，其磁矩大小恒定： $|m|=1$



非线性物理：混沌物理

- 磁矩 m ($m_{x,y,z}$) 空间轨迹演化满足下面的动力学方程(矢量形式):

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\gamma m \times H_{eff} + \alpha m \times \frac{\partial m}{\partial t} + S m \times (m \times e_x)$$

$$S = a_{dc} + a_{ac} \cos \omega t$$

- 其中 a_{dc} 和 a_{ac} 是外加直流和交流电流产生的自旋磁力矩， ω 为频率， H_{eff} 为有效场。对 permalloy 薄膜， $\gamma=1.7 \times 10^7 (\text{Oe})^{-1} \text{s}^{-1}$ 是 gyro-magnetic ratio 回转惯量， $\alpha=0.02$ 为损耗因子， $e_{x,y,z}$ 矢量坐标。
- 因为此方程为矢量方程，考虑三维空间坐标，混沌一定存在。我们只是处理很简单的情况： $H_{eff}=H_{ext}e_x+H_k m_x e_x-4\pi M_s e_z$ ，取 $4\pi M_s=8400 \text{Oe}$ 。



非线性物理：混沌物理

- 我们将看到根据外场条件的变化，这一演化系统会展现出同步(synchronization)、调制(modification)和混沌(chaos)行为。
- 我们只是利用数值计算方法来显示一下结果，同学们只需要重复本文的结果就可以了。能在此基础上做得更好那是我们的造化。
- 计算过程利用the fourth-order Runge-Kutta algorithm。此方法基本步骤在计算物理书中可以找到。其基本思路是精细差分格式。
- 对微分方程 $y' = f(x, y)$ ，给定初值 (x_0, y_0) ，差分迭代得到 (x_n, y_n) 。为了求得 (x_{n+1}, y_{n+1}) ，采用如下代数：
- $y_{n+1} = y_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \cdot \delta / 6$ ，这里 δ 为差分步长。

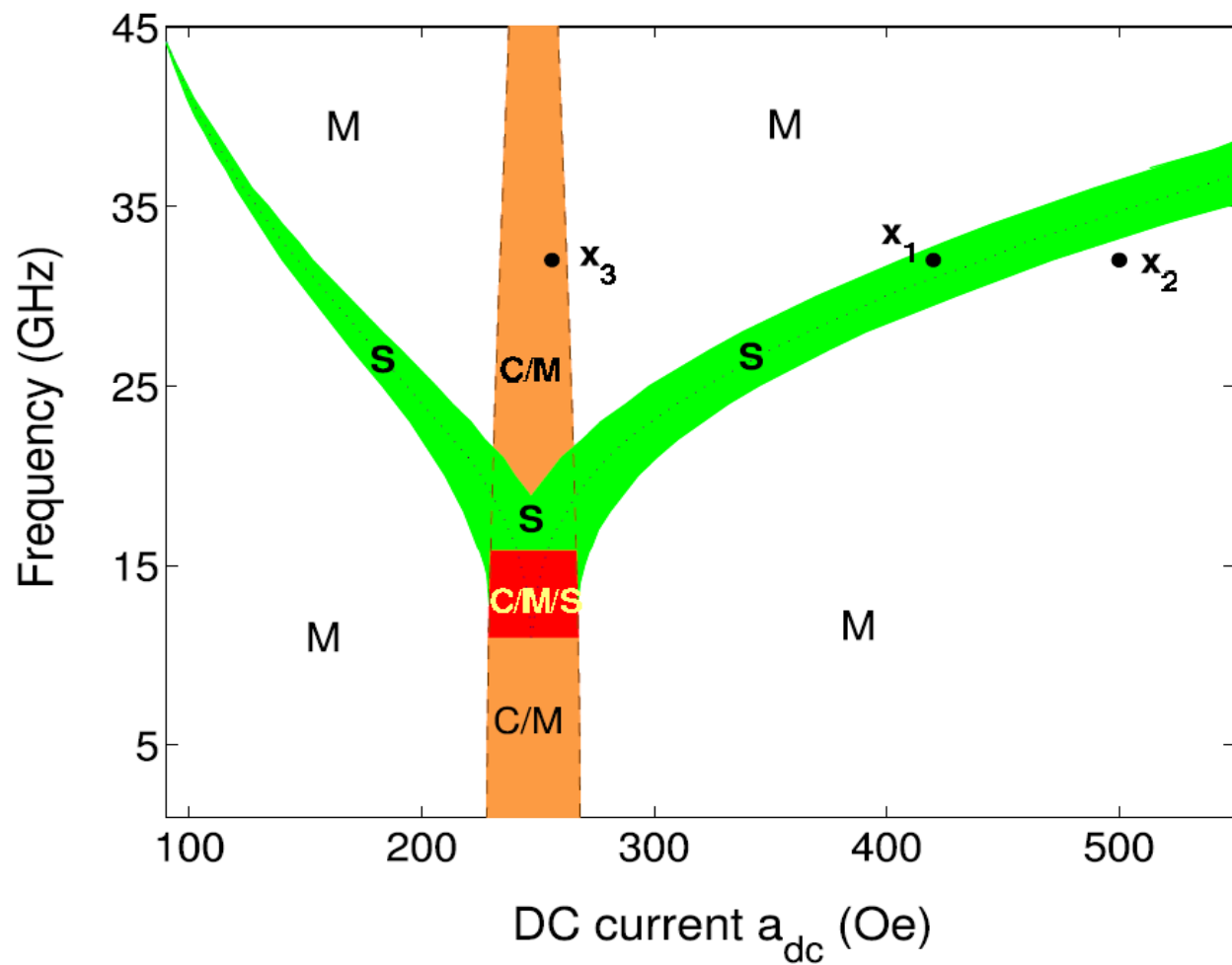


非线性物理：混沌物理

- 其中：
- $K_1=f(x_n, y_n); K_2=f(x_n+\delta/2, y_n+\delta K_1/2); K_3=f(x_n+\delta/2, y_n+\delta K_2/2);$
 $K_4=f(x_n+\delta, y_n+\delta K_3)。$
- 上述迭代在数学上被证明是十分有效的，但是 δ 的取值仍然要足够小以消去迭代误差。
- 动力学演化相图如下图所示：取 $H_{ext}=200\text{Oe}$, $a_{ac}=200\text{Oe}$ ，计算进动频率与外加直流场 a_{dc} 的关系。



非线性物理：混沌物理



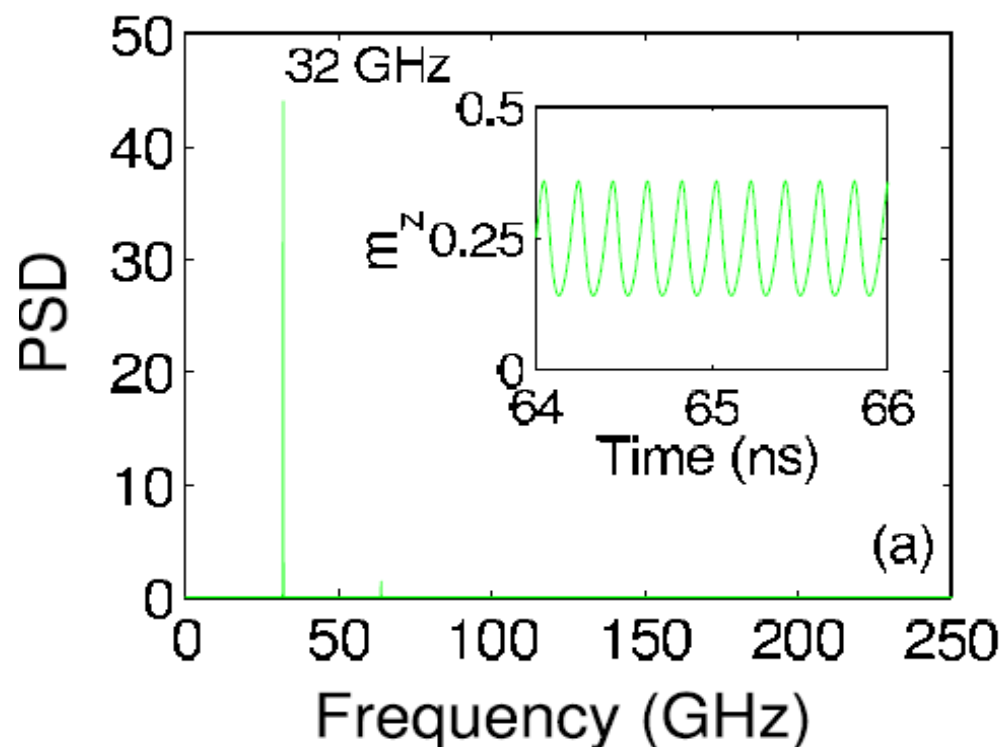
- (1) $a_{ac}=0$ 时，静态情况下有极限环解，极限环频率与 a_{dc} 关系由dot line表示。



非线性物理：混沌物理

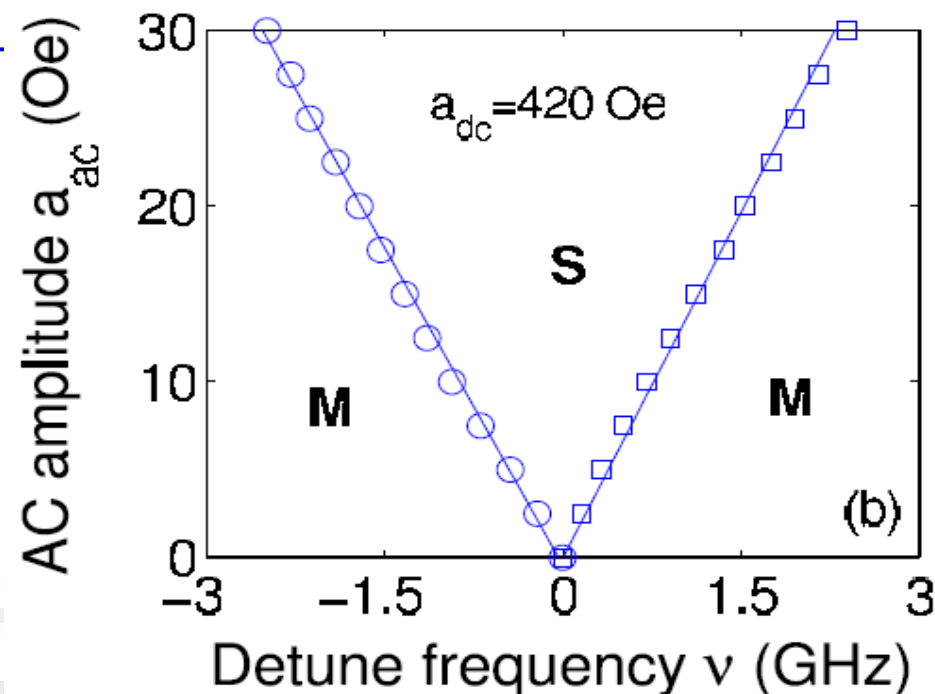
- 可以看到，极限环频率 ω_0 与 a_{dc} 关系有两个分枝：随 a_{dc} 增加先是下降然后上升，对应于 m 在面内 (x,y) 进动和垂直于 (x,y) 面进动。
- 当外加 a_{ac} 时，如果 $\nu=(\omega-\omega_0)$ 很小，则最后会达到 $\omega_0=\omega$ 。当 ν 比较大时，就会出现调制与混沌行为，分别用 M 和 C 表示。

- (2) 同步区域(green regions):
极限环完全同步到 a_{ac} 频率，使得 $\nu=0$ 。
- 功率谱峰值狭窄锐利。
- x_I 点 ($a_{dc}=420\text{Oe}$, $\omega=32\text{GHz}$)。



非线性物理：混沌物理

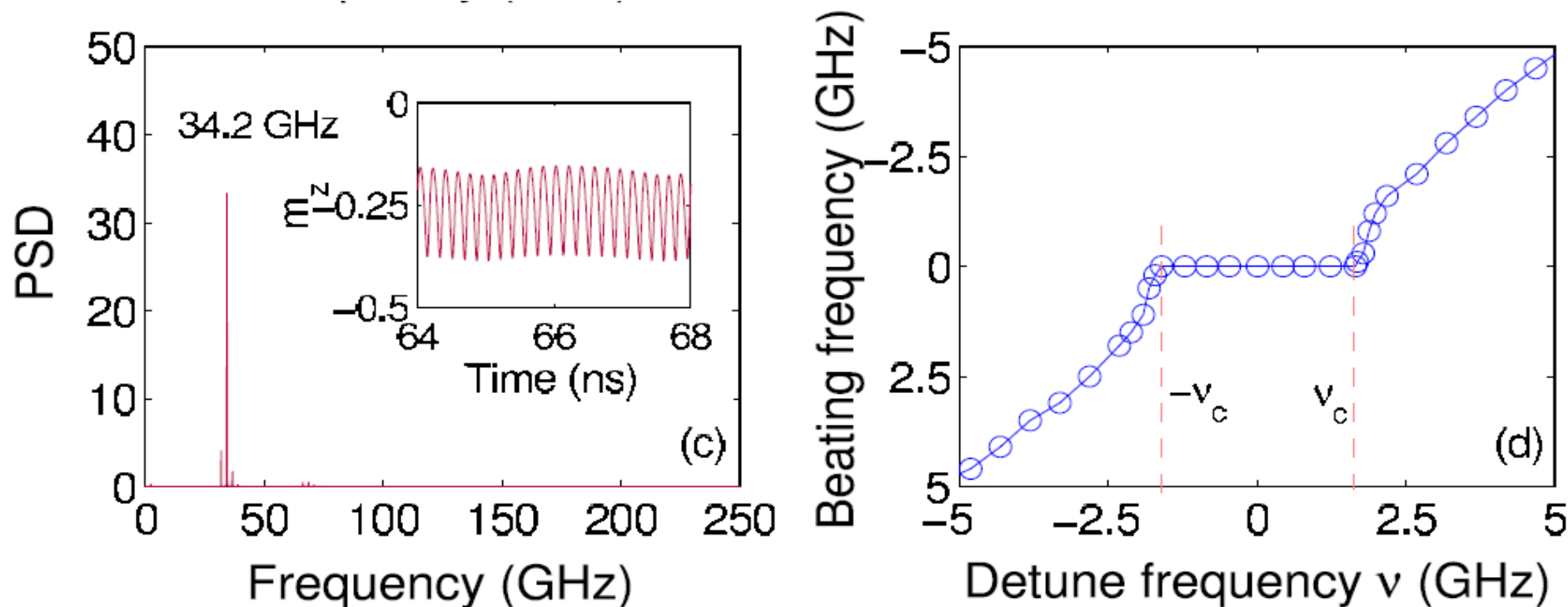
- 增大 a_{ac} 扩展同步区域大小。
- 同步区域与调制区域的边界为直线，表明交流场可以作为一种微扰处理。



- (3) 调制区域(M): 同步行为在差频 ν 达到临界值 ν_c 时失稳，进入到调制区域。磁矩进动呈现高频振荡与低频振荡的叠加，即存在低频拍频现象。但是拍频频率 ν_b 并非位于线性系统中的拍频位置，即并非 ν 。相图中点 x_2 ($a_{dc}=500$ Oe, $\omega=32$ GHz) 的结果。



非线性物理：混沌物理

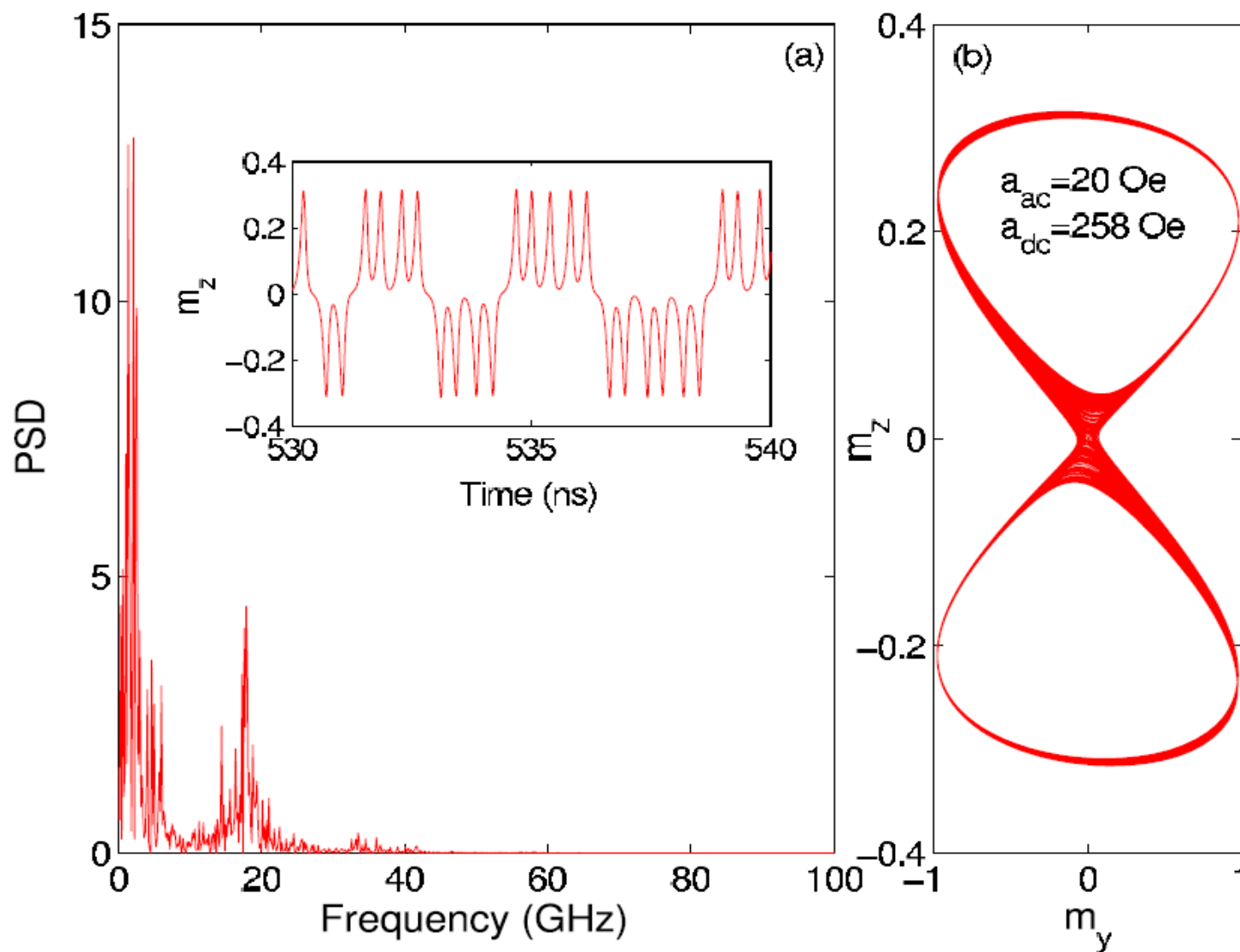


- 可以看到，在 $|\nu| < |\nu_c|$ 时，对应锁频同步行为； $|\nu| > |\nu_c|$ 时，才出现拍频行为。
- 在同步区域附近，有 $\nu_b \sim (|\nu| - \nu_c)^{1/2}$ ，与实验吻合。



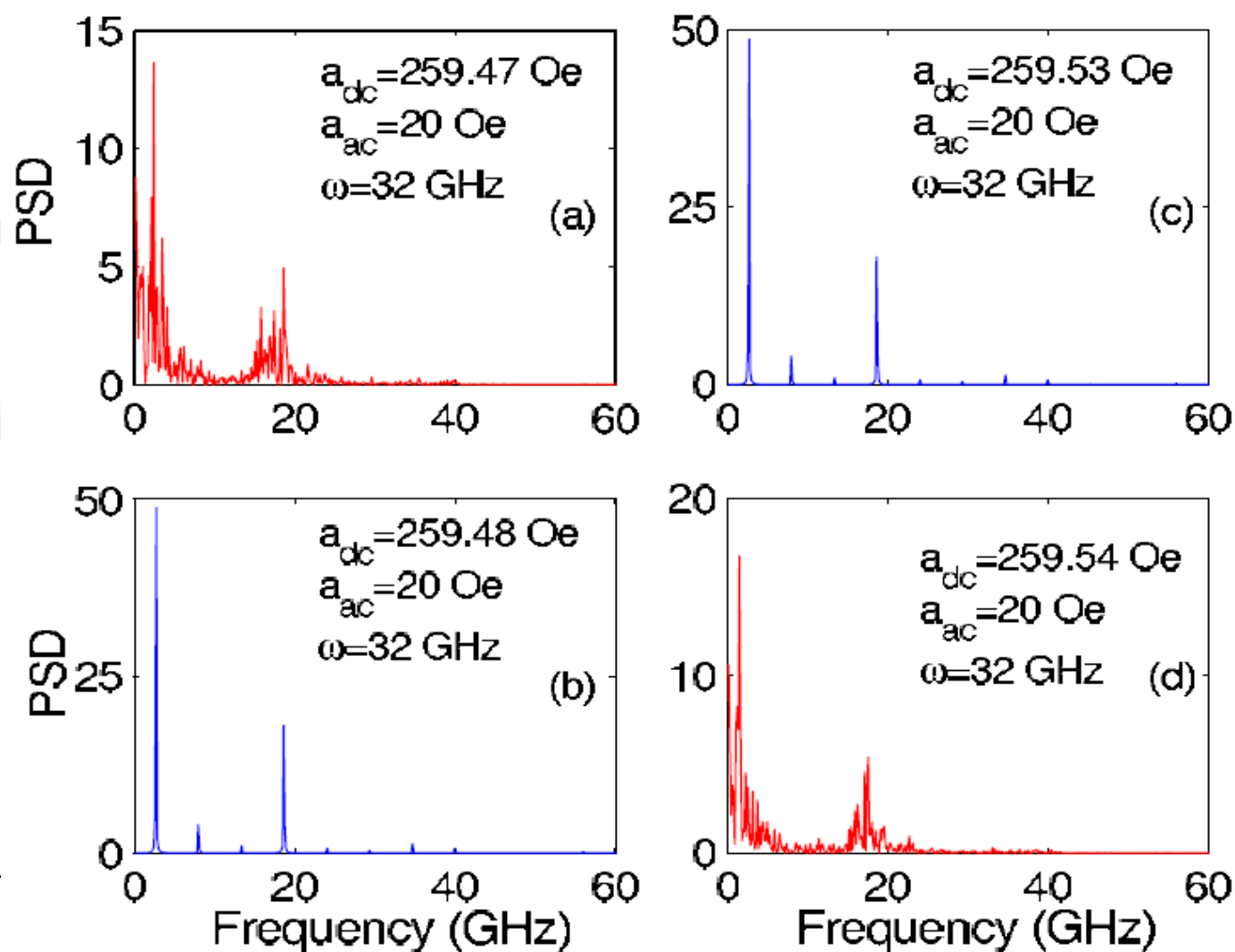
非线性物理：混沌物理

- (4) 混沌区域：混沌区域只发生在两个同步分枝相交的窄小区域内。
- 对点 x_3 计算。



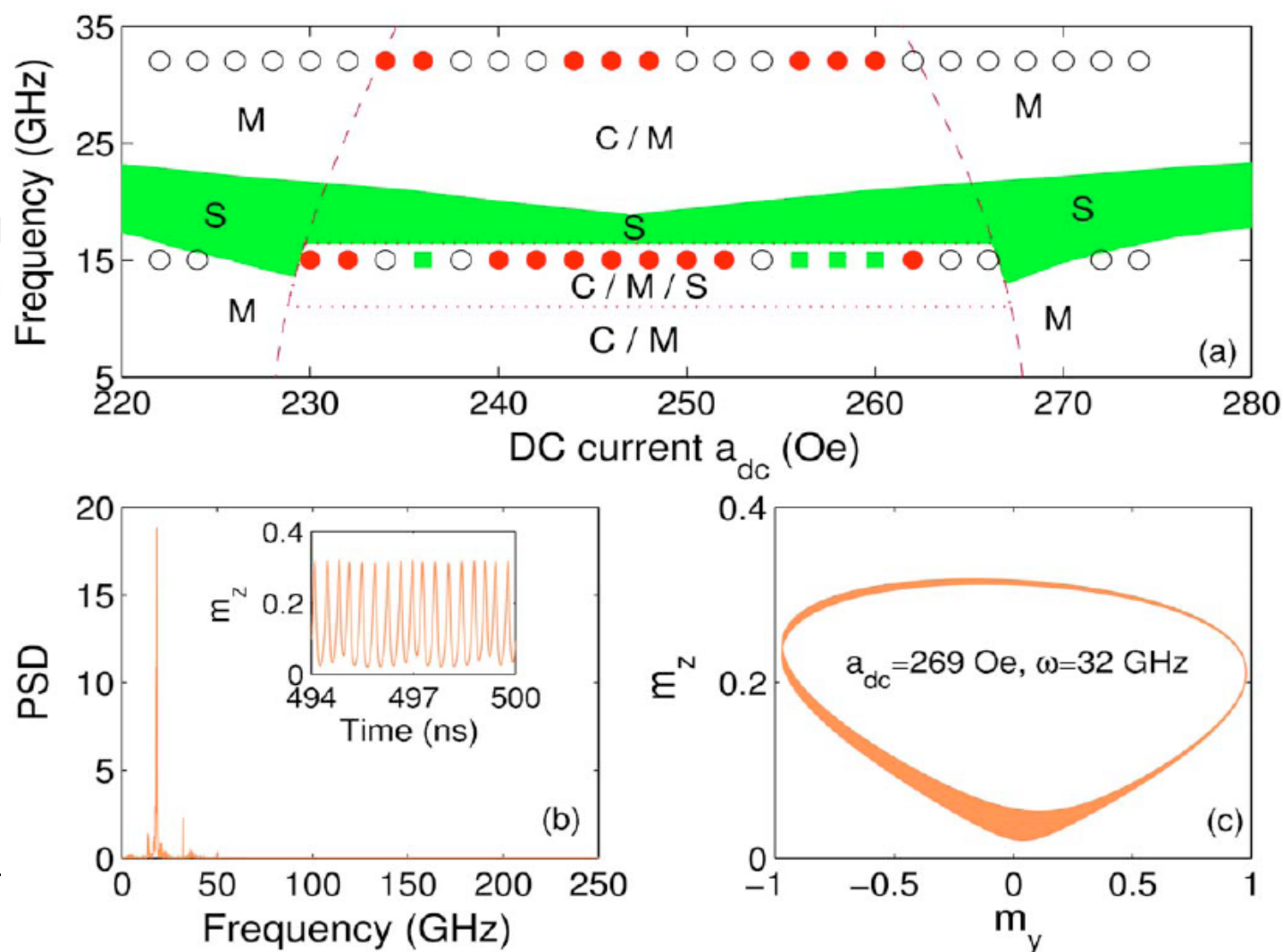
非线性物理：混沌物理

- 在这个系统中，混沌窗口非常小，直流场的微小变化将会导致混沌失稳而进入到调制区域，如图所示。



非线性物理：混沌物理

- 红、绿、空心点分别表示混沌、同步和调制位置，可见混沌窗口之间有乾坤。



非线性物理：混沌物理

- 关于混沌存在的数学证明，作者原文中给出了详细描述。可以参考处理。
- 作业要求：三者必一，或者三者都作最好！
- 1，重复本文的主要数值结果。
- 2，分析混沌道路，计算其三个分量的李雅普洛夫指数。
- 3，考虑有效场 $H_{eff}=H_{ext}e_x+H_k m_x e_x-4\pi M_s e_z$ 和交直流外场取不同方向时的情况，看看有没有什么奇异行为发生。



混沌作业：二维海森堡模型动力学

- 前一个作业显得比较复杂。我们考虑一个相对简单一些的磁学模型：二维海森堡模型的回线动力学。
- 考虑 (x, z) 平面上一个 $L \times L$ 的正方点阵，其哈密顿为：

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i \cdot S_j - K \sum_i S_{iz}^2 - \left[h_{z0} \sin(\omega_z t) e_z + h_{x0} \sin(\omega_x t) e_x \right] \cdot \sum_i S_i$$

$$S_i = S_{ix} e_x + S_{iz} e_z$$



非线性物理：混沌物理

- 存在几个可控参量： $J, K, (h_z, \omega_z), (h_x, \omega_x)$ 。
- 计算系统磁矩 M 与 z 轴外场 h_z 之间的回线。给定 ω_z 和 h_x ，研究 $h=h_{z0}$ 时的 M 值 M_0 与 ω_x 的关系，看看有没有同步锁频行为和混沌行为。当然， ω_x 可以表示为 ω_x/ω_z 。



