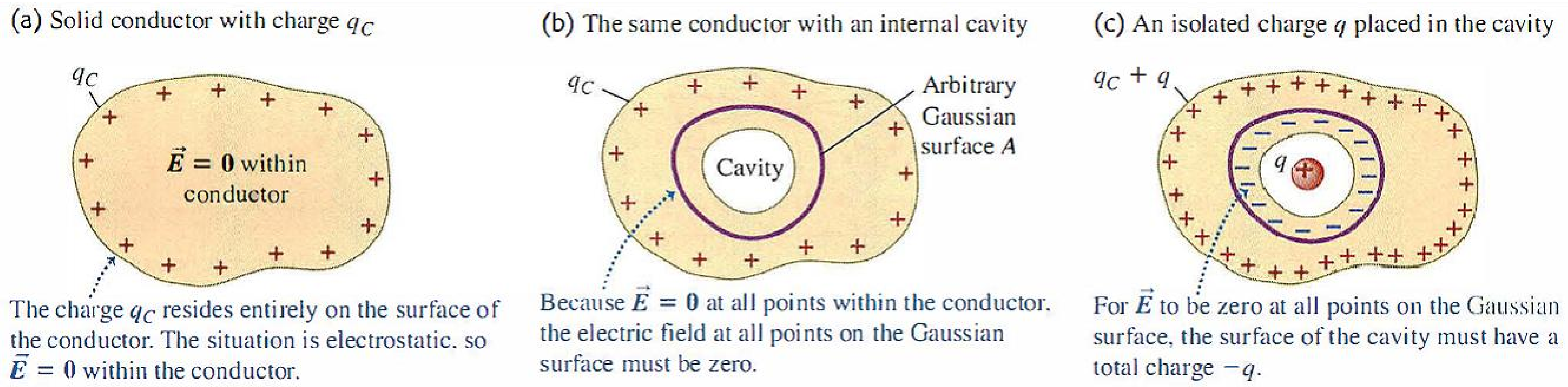
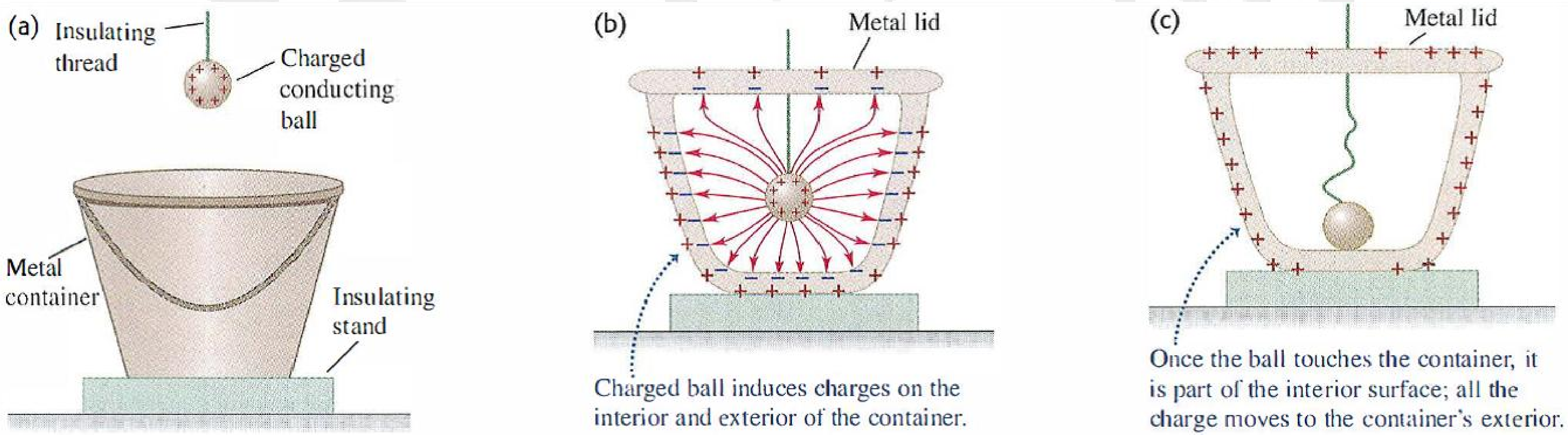
第二章 导体周围的静电场，静电能量

- 导体的性质：
- 第一类导体(金属，均匀)
- 电平衡弛豫时间极短(瞬时)
- 周围不存在电介质，绝缘材料的相对介电常数为1，
- 电荷密度、静止等定义均指宏观量。
- 静电平衡条件：
- 均匀导体内部场强处处为零
- 每个均匀导体都是等势体；
- 电荷静止不动(宏观)。

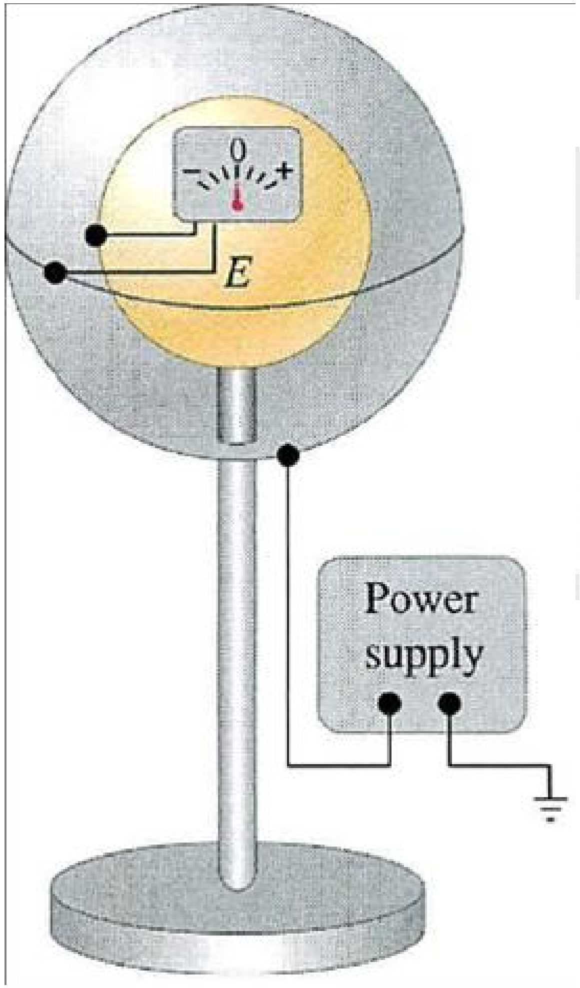
$$\begin{cases} \sum_{system} Q_i = \text{constant} \\ \vec{E} = \sum_{Q_i} \vec{E}_i = \iiint_V \vec{E}(r)dV \\ U = \sum_{Q_i} U_i = \iiint_V U(r)dV \\ \oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} Q \Rightarrow divE = -\nabla^2 U = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \oint_S E \cdot dl = 0 \Rightarrow rotE = 0 \\ d\vec{E} = 0 \quad \text{(inside conductor)} \end{cases}$$

导体表面电荷与法拉第圆桶实验:

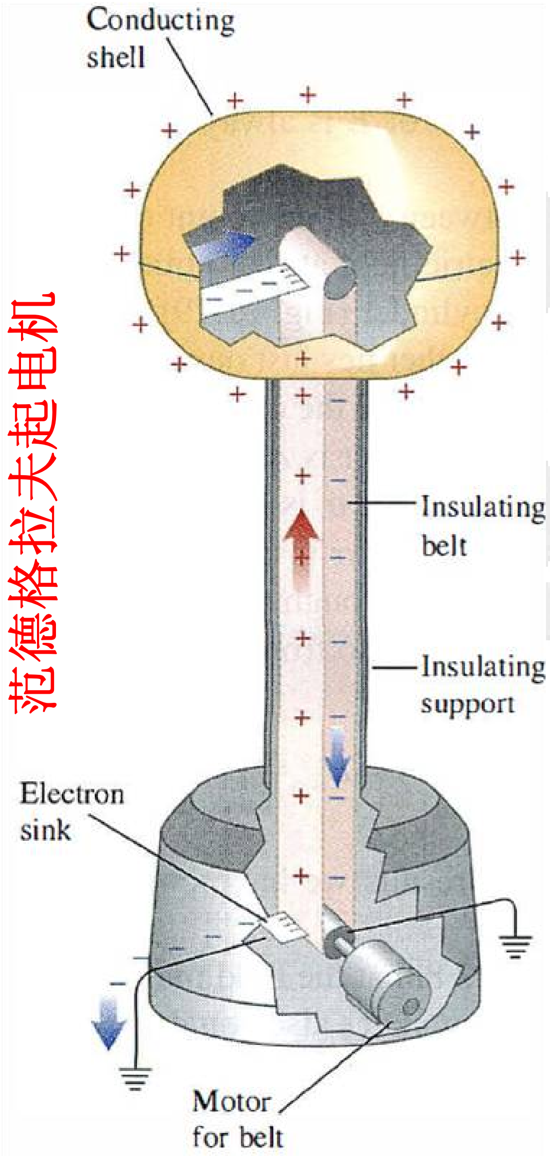




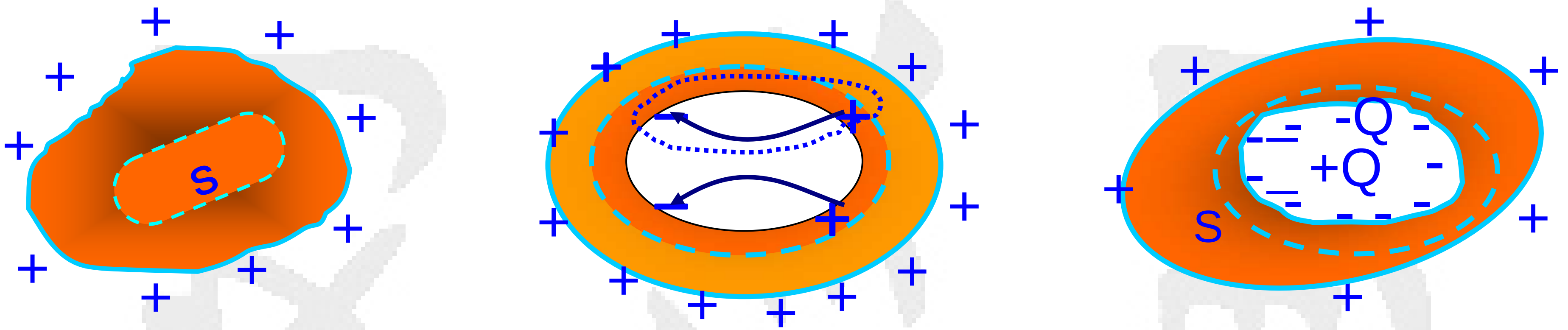
Other experiments:



范德格拉夫起电机



- 实验事实是：静电平衡时，导体所带的电荷都分布在导体的表面上，导体内部不可能有未抵消的静电荷。



$$\psi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q/\varepsilon_0 = 0$$

$$\psi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q/\varepsilon_0 = 0,\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

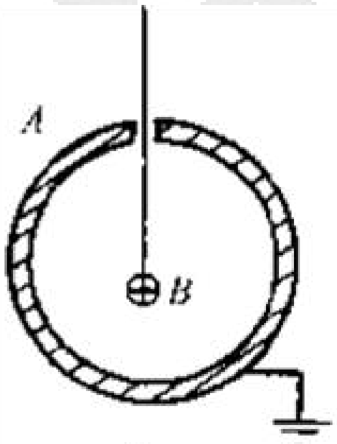
$$\psi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 = +Q + (-Q) = 0$$

不仅是高斯定理，还有环路定理，都需要被满足

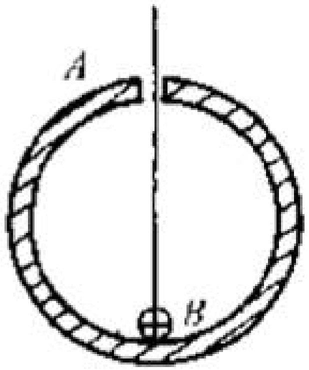
- 【例2.1.7】一导体球壳 A 带有电荷量 $q_A<0$，导体小球 B 带有电荷量 $q_B>0$。用绝缘丝带吊起小球B经小孔放入球壳A内。

  (1) B与A不接触，另A瞬时接地，然后断开接地，将B取出。球壳A与小球B带电情况如何?

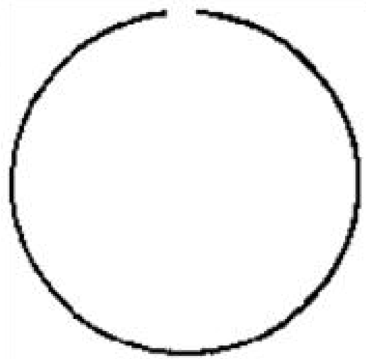
  (2) B与A的内壁接触，A不接地，然后将B取出。球壳A与小球B带电情况如何?



(1)

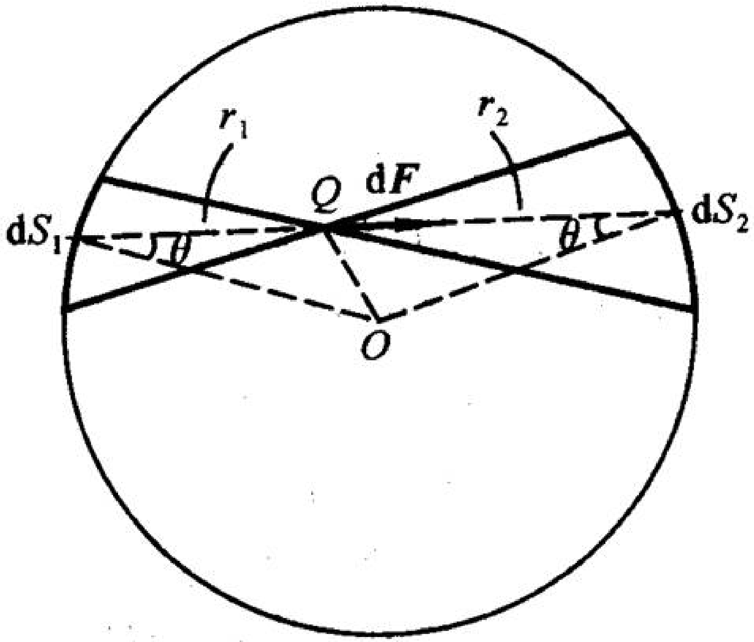


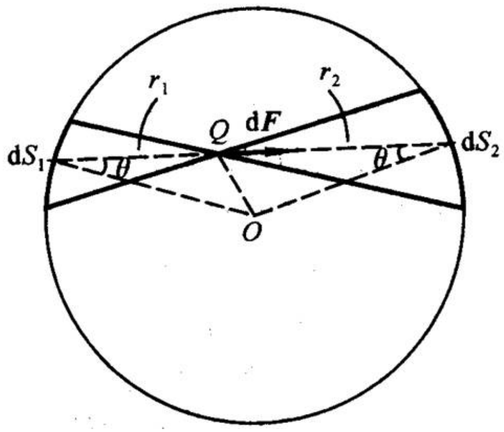
(2)



静电平衡条件下上面的球壳内表面有电荷么?

- 源于Cavendish-Maxwell 多年的工作，
- Cavendish(1731-1810)设想：库仑力 $F \propto r^{-2\pm\delta} \propto r^{-n}$， 若δ≠0，则均匀带电导体球壳内表面将带电。找出此函数关系(理论)，比较$Q_{内}$与$Q_{总}$(实验)，便可确定δ的下限。





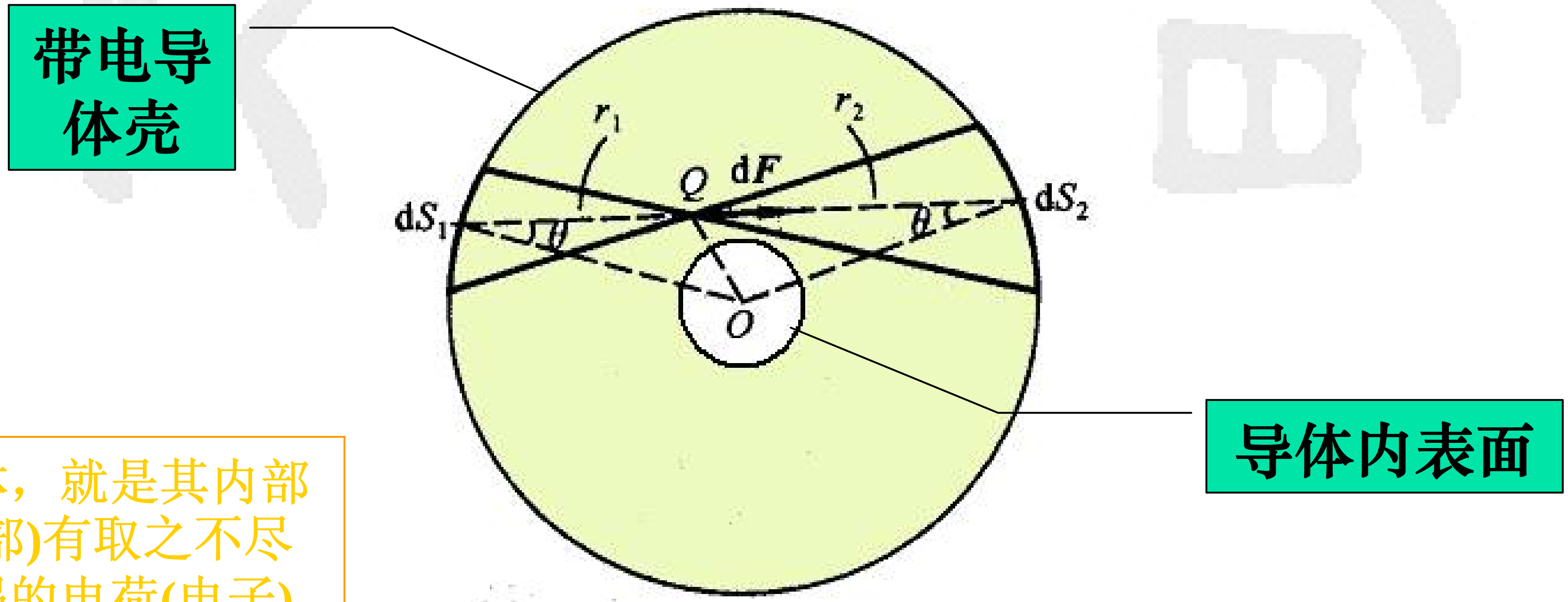
- 首先，若δ ≠0，则均匀带电球面对内部任意点电荷作用力不为零。球面电荷密度σ。位于球内任意电荷 **Q** 受电荷元 σdS_1 和 σdS_2 的共同作用。

$$dF \propto \frac{\sigma dS_1 Q}{r_1^n} - \frac{\sigma dS_2 Q}{r_2^n}, \quad \because d\Omega = \frac{dS_1\cos\theta}{r_1^2} = \frac{dS_2\cos\theta}{r_2^2}$$

$$\therefore dF \propto \frac{\sigma Q d\Omega}{\cos\theta}\left(\frac{1}{r_1^{n-2}} - \frac{1}{r_2^{n-2}}\right) \Rightarrow n = 2 \Rightarrow dF = 0$$

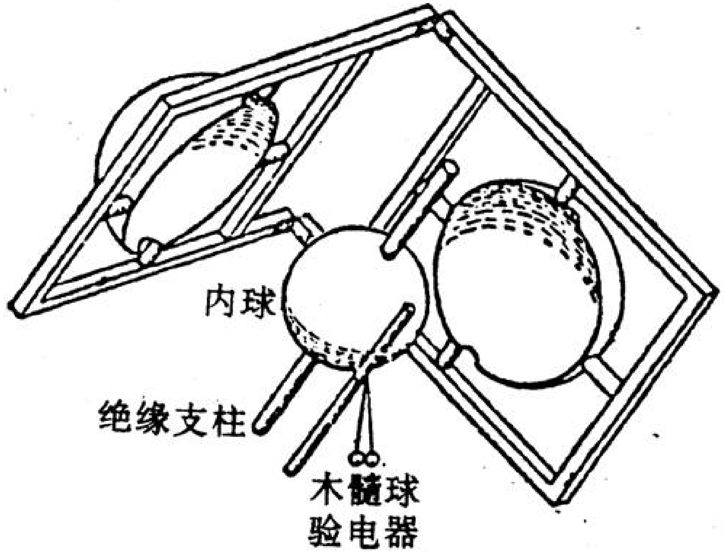
- 电荷在球壳内任一点处 (除球心外) 都受到电场力；
- 结论：若δ ≠0 ，均匀带电球壳在球内各处场强不严格为零(球心除外)。

- 推论：若δ ≠0，带电导体球壳内表面应带电。
- δ ≠0时，若内表面无电荷分布(只分布在外表面)，使导体中自由电子因受力或趋向球心运动，或背离球心而移动，最终使电荷分布满足导体内场强处处为零的条件——内表面有电荷分布。



所谓导体，就是其内部(球壳内部)有取之不尽用之不竭的电荷(电子)

- 1773年："我取一个直径为12.1英寸的球，用一根实心的玻璃棒穿过中心当作轴，并覆盖以封蜡。……然后把这个球封在两个中空的半球中间，半球直径为13.3英寸，1/20英寸厚。……然后，我用一根导线将莱顿瓶的正极接到半球，使半球带电。"

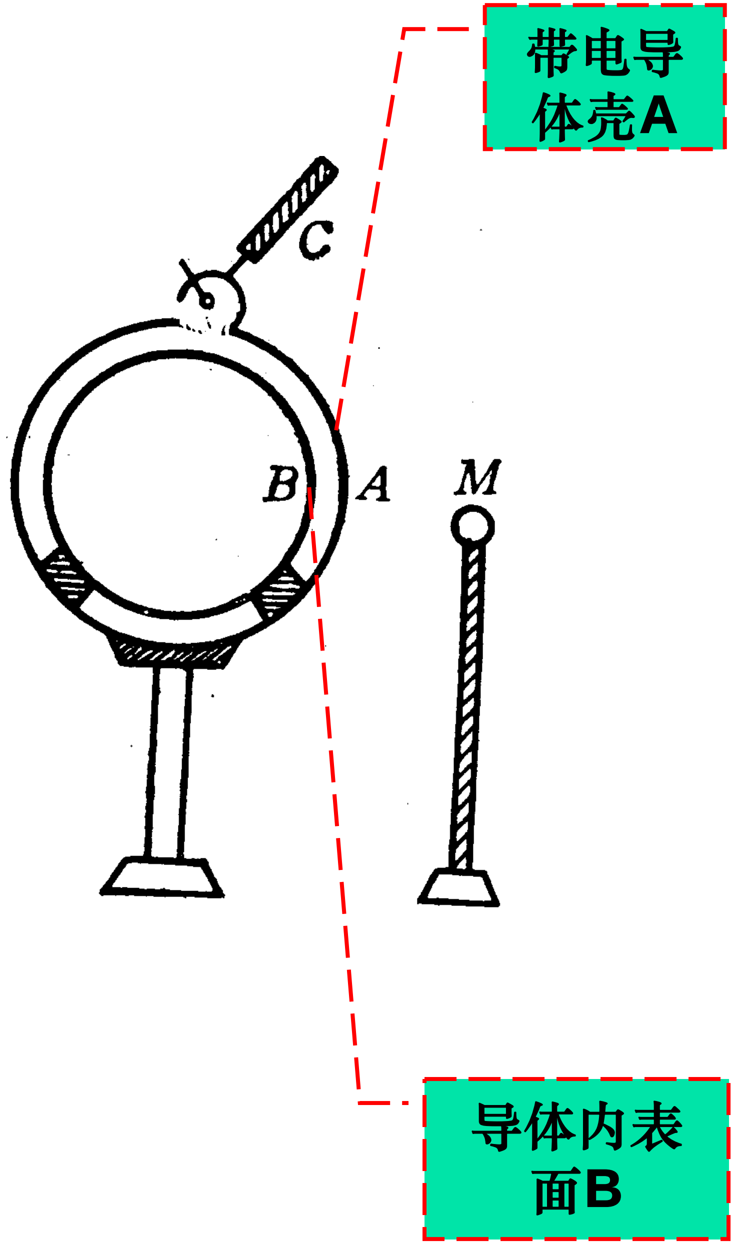


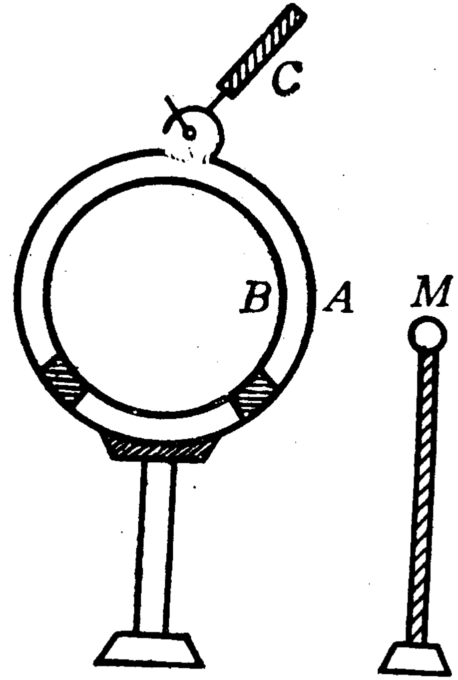
- 用一根导线将内外球联在一起，外球壳带电后，取走导线，打开外球壳，用木髓球验电器试验内球。

- 木髓球验电器没有指示，证明内球没带电，指数$\delta \leq 0.02$

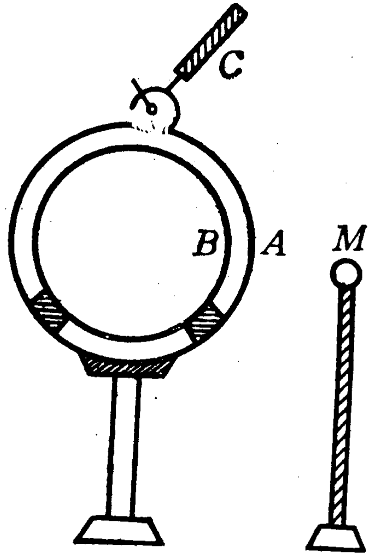
- Cavendish同心球实验结果和他自己的许多看法没有公开发表。
- 19世纪中叶，开尔文发现Cavendish的手稿中有圆盘和同半径的圆球所带电荷的正确比值，才注意到这些手稿的价值，经他催促，才于1879年由Maxwell整理发表。
- 他的许多重要发现埋藏了一百年之久。
- Maxwell说：“这些关于数学和电学实验的手稿近20捆，其中物体上电荷(分布)的实验，Cavendish早就写好了详细的叙述，并且费了很大气力书写得十分工整(就象要拿出去发表的样子)，而且所有这些工作在1774年以前就已完成，但Cavendish(并不急于发表)仍是兢兢业业地继续做电学实验，直到1810年去世时，手稿仍在他身边。”

- 看看Maxwell这个大理论家是如何做实验的。
- 改进Cavendish实验：导体球壳 *A*、*B* 之间用绝缘的硬橡胶环固定；*A* 球固定在绝缘支架上；利用 *C*，使之可相连或分开；*M* 用来估计外壳上的原始电荷。
- 推论：若δ ≠0，带电导体球壳内表面应带电。





- 与δ≠0对应，下述实验完成后，应有：
- 球壳内电荷$Q'_{内}$，球壳 **B** 电势V'_B
- $Q_{内}(Q_{总}, \delta, a, b)\neq 0$
- $V'_B(V, \delta, a, b)\neq 0$
- a为 **A** 球壳半径，b为 **B** 球壳半径，**V** 为两球壳初始电势。
- 实验步骤：
- (1) 合 C，A 与 B 相连，充电$V_A=V_B=V$
- (2) 撤 C，A 与 B 分开，A 接地放电，留原处，$V'_A=0$。如果δ=0，B 之电荷一定全跑到 A 上，因此应有 $V'_B=0$
- (3) 如果δ≠0，则一般 $Q_B\neq 0$，感应导致 $Q'_A\neq 0$，$V'_B\neq 0$



- 只要求出 $V'_B(V, \delta, a, b)\neq 0$，即可证明 $\delta\neq 0$ 并求出 δ 的最大值。
- 任何时刻，球壳内外表面的电荷分布均匀，可得半径 R 的球壳产生的电势分布(空间任意一点 P，球坐标):

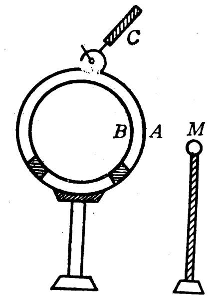
$$\because E \propto r^{-2\pm\delta} (\delta \neq 0)$$

$$\therefore V_P = \int_{\text{球面}} dV = \int_{\text{球面}} \int_r^{\infty} E dr = \int_{\text{球面}} \int_r^{\infty} \frac{dq}{r^{2-\delta}} dr,$$

取 (2-δ) 为例

- 考虑原点位于球心的球坐标:

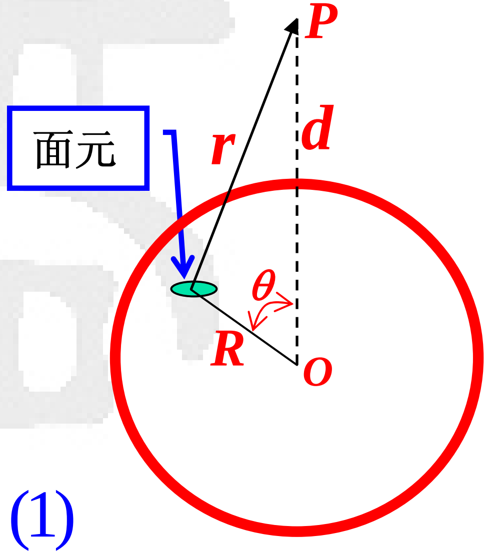
电磁学02-03: 库仑定律验证



$$\because dq = \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \quad \Phi(r) = \frac{1}{r^{2-\delta}}, \quad f'(r) = r\int_r^{\infty} \Phi(r)dr$$

$$\therefore V_P = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_r^{\infty} \Phi(r)\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(r)}{r}\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(r)}{r}\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$



$$\because r^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta$$

$$\therefore rdr = Rd\sin\theta d\theta \Rightarrow \int_{r_2}^{r_1} \frac{rdr}{Rd} = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$

$$\therefore V_P = \int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_1} \sigma\frac{R}{d} f'(r)drd\varphi = 2\pi\sigma\frac{R}{d}[f(r_1) - f(r_2)] \leftrightarrow (1)$$

$$\because \theta = \pi \Rightarrow r = r_1 = R + d, \quad \theta = 0 \Rightarrow r = r_2 = \begin{cases} d - R & for \;\; d > R \\ R - d & for \;\; d < R \\ 0 & for \;\; d = R \end{cases}$$

$$\therefore V_P = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2Rd}[f(R+d)-f(d-R)] \quad for \quad P\text{在球外} \leftrightarrow (2) \\ \dfrac{\alpha}{2a^2}[f(2R)-f(0)] \quad for \quad P\text{在球上} \leftrightarrow (3) \\ \dfrac{\alpha}{2Rd}[f(R+d)-f(R-d)] \quad for \quad P\text{在球内} \leftrightarrow (4) \end{cases}$$

$\alpha = 4\pi R^2\sigma$**为球面总电量**

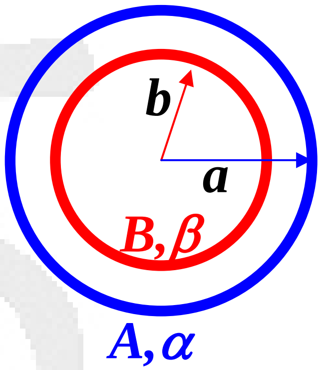
- 可以看到，表达式与满足库仑定律下的表达式很不相同，都是$\delta\neq 0$惹的祸。
- 下面针对两个套在一起但不连通的同心球壳来计算各个球壳内外表面处的电势(注意，对每个球壳，薄薄的壳层内部电势是相等的)。

- 对球壳 A：球壳 A 与球壳 B 各自电荷产生的电势和。

$$V_A = \frac{\alpha}{2a^2}[f(2a)-f(0)] + \frac{\beta}{2ab}[f(a+b)-f(a-b)] \leftrightarrow (5)$$

外壳上，***R=a, d=a***

内壳外，***R=b, d=a***



- 对球壳 B：球壳 A 与球壳 B 各自电荷产生的电势和。

$$V_B = \frac{\beta}{2b^2}[f(2b)-f(0)] + \frac{\alpha}{2ab}[f(a+b)-f(a-b)] \leftrightarrow (6)$$

内壳上，***R=b***

外壳内，***R=a, d=b***

$$V_A \neq V_B$$

- 现在假定两个球壳用导线连通，电荷重新分布，$V_A=V_B=V$

- (1) 合C，A 与B相连，充电V_A=V_B=V，使得式(5)=(6)，消去球壳B上的电荷β，得到

$$\beta = 2Vb\frac{b[f(2a)-f(0)]-a[f(a+b)-f(a-b)]}{[f(2a)-f(0)][f(2b)-f(0)]-[f(a+b)-f(a-b)]^2} \leftrightarrow (7)$$

$$\because \Phi(r)=\frac{1}{r^{2-\delta}}, \qquad \therefore f'(r)=r\int_r^{\infty}\Phi(r)dr \Rightarrow f(r)=F(\delta) \Rightarrow \beta \neq 0$$

- (2) 撤C，A与B分开，A接地放电，则A球上电势$V_A=V \Rightarrow V'_A=0$
- 因留原处并保持接地——A表面有感应电荷α'，由式(5)=0解得：

$$\alpha' = -\beta \frac{b}{a}\left[\frac{f(a+b)-f(a-b)}{f(2a)-f(0)}\right] \leftrightarrow (8)$$

$$\alpha'/\beta \Rightarrow Eq.(6) \Rightarrow V'_B = V\left[1-\frac{a}{b}\frac{f(a+b)-f(a-b)}{f(2a)-f(0)}\right] \leftrightarrow (9)$$

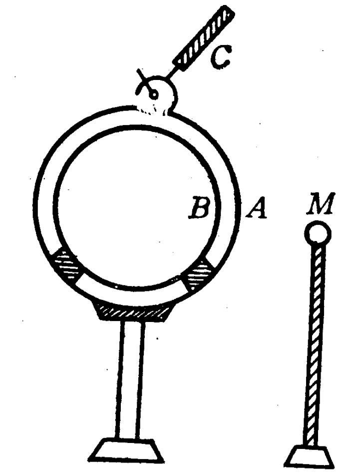
- 可见在球壳A接地后，电荷重新分布导致球壳B的电势$V'_B \neq 0$。
- 近似计算 V'_B=？先计算 $f(r)$=?

$$f'(r) = r\int_r^{\infty}\Phi(r)dr = r\int_r^{\infty} r^{-2+\delta}dr = r\frac{1}{-1+\delta}r^{-1+\delta}\Big|_r^{\infty} = \frac{r^{\delta}}{1-\delta}$$

$$f(r) = \int f'(r)dr = \int\frac{r^{\delta}}{1-\delta}dr = \frac{r^{\delta+1}}{1-\delta^2} + f(0)$$

$$f(r) - f(0) = \frac{r^{\delta+1}}{1-\delta^2} = \frac{r}{1-\delta^2}e^{\delta\ln r}$$

$$= \frac{r}{1-\delta^2}(1+\delta\ln r + \frac{1}{2!}(\delta\ln r)^2 + \cdots) \leftrightarrow (10)$$



- 最后求得 V'_B:

$$V'_B = V\left\{1 - \frac{a}{b}\cdot\frac{(a+b)[1+\delta\ln(a+b)]-(a-b)[1+\delta\ln(a+b)]}{2a[1+\delta\ln a]}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}V\delta\left\{\ln\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a-b}\right\} \leftrightarrow (11)$$

- **Maxwell**经过这些巧妙的理论推导，然后代入其实验参数(***V*, *a*, *b***)，得到下式，其中 ***d*** 为静电计最大零点漂移或者说精度：

$$V_B' = \left| -0.1478 V\delta \right| < d \leftrightarrow (12)$$

此 ***d*** 非彼 ***d***

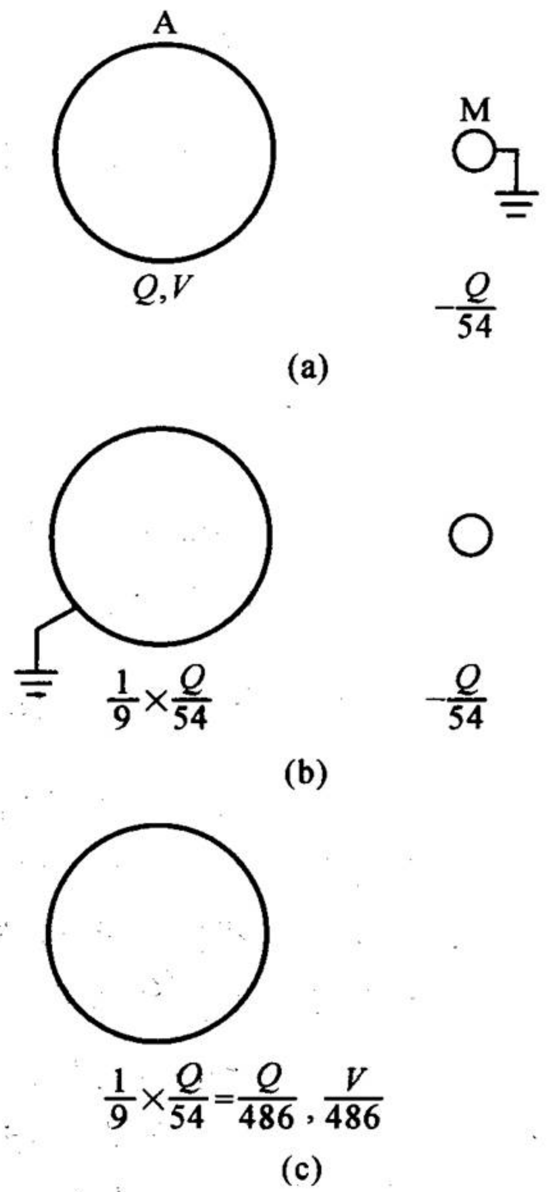
- 如何确定 ***d***？给予静电计零点漂移 ***d*** 以定量结果。
- ***d*** 取决于仪器的灵敏度，当时实验设备十分简陋，没有绝对测量的标准仪器，确定 ***d*** 有困难。
- **Maxwell**巧妙地将 ***d*** 与充电电势***V*** 相比较给出 ***d/V*** 的下限，再由式**(12)**确定 δ 的下限。
- 方法：因**V**太大，经反复感应，使之缩小为**V/486**。

巧妙方法：

将球A充电到电势V、带电量Q (Q>0)，小球接地，因感应，小球带电 -Q/54

撤去小球地线，保持其电量，再将大球接地，达到平衡后大球因受小球感应带正电，电量为小球的1/9

撤去大球地线，保持其电量，再将小球移去——单独的大球的电势和电量从最初的Q、V减少为最终的值



- 确定 δ 的下限：静电计指示偏转为 **D=V/486**，将 **D** 与 **d** 相比较，估计得 **D > 300d**。比较后得

$$d < \frac{D}{300} = \frac{V}{300\times 486} = \frac{V}{145800} \Rightarrow \frac{d}{V} < \frac{1}{145800}$$

$$\delta < \frac{d}{0.1478V} < \frac{1}{0.1478\times 145800} = \frac{1}{21600}$$

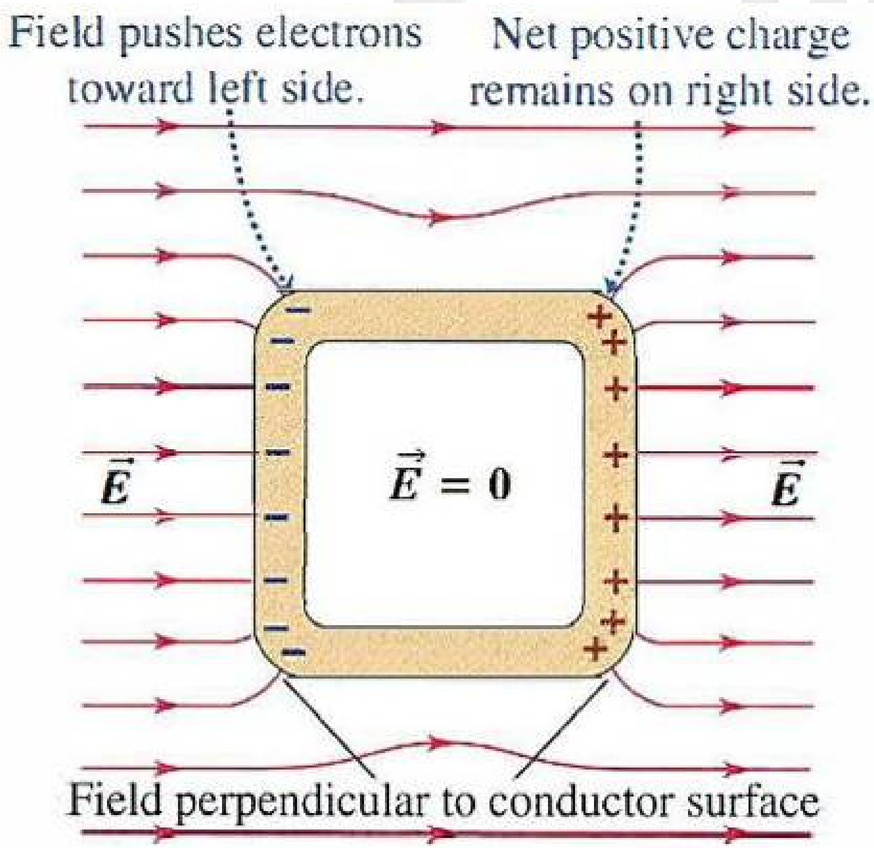
$$1879,\ \text{Maxwell} \Rightarrow \delta < 5\times 10^{-5}$$

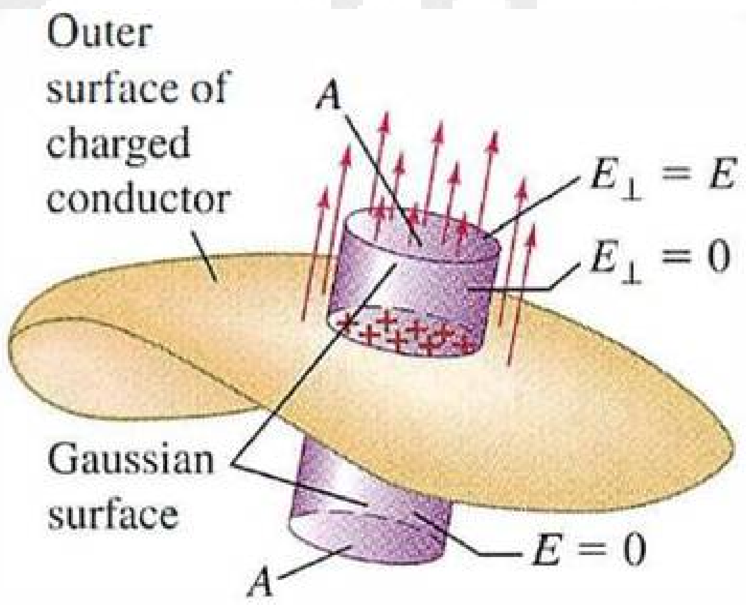
$$1936,\ \text{Plimpton et al} \Rightarrow \delta < 2\times 10^{-9}$$

$$1971,\ \text{William et al} \Rightarrow \delta < (2.7\pm 3.1)\times 10^{-16}$$

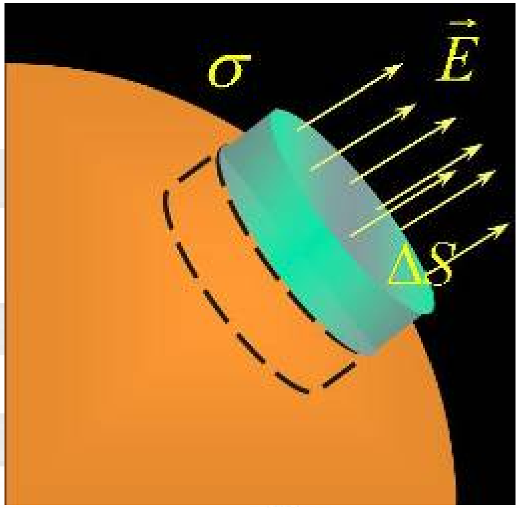
- 测量方法构思巧妙：示零实验——假定有，证实没有。
- 理论分析用到了静电学中许多知识，如：导体的静电平衡、电势计算、利用数学工具来避免复杂计算。
- 要从前辈大师杰出工作中领悟物理学研究方法，通过对他们提出问题、研究问题、设计实验来证实自己猜测与判断最后得出结论的了解而得到启迪。
- 大家相信了库仑定律了没？如果没有，我们可以继续用数学让你痛苦！
- 放飞你的思维，看看有没有新招来检测库仑定理的平方反比准确性！

- 导体表面附近电场强度
- 定性分析：因为导体表面为一个等势面，其外侧电场强度垂直于导体表面。





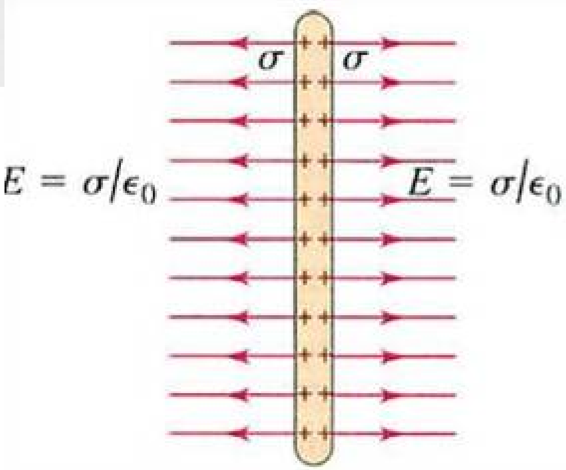
- 定量分析：电荷面密度 σ(*x*, *y*, *z*)，对应的电场强度 *E*表(*x*, *y*, *z*)，则表面附近一点 *P* 处微元的电通量：



$$\because \Psi = E_{表} \cdot \Delta S + E_{内} \cdot \Delta S = E_{表} \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

- 注意到无限大电荷面板两侧的电场强度是：



$$E_{\Delta S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \xleftrightarrow{\text{What is wrong?}} E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

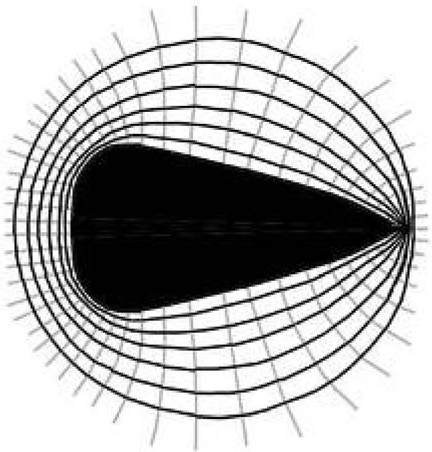
- 为什么导体表面电荷可以看成是面电荷？思考题

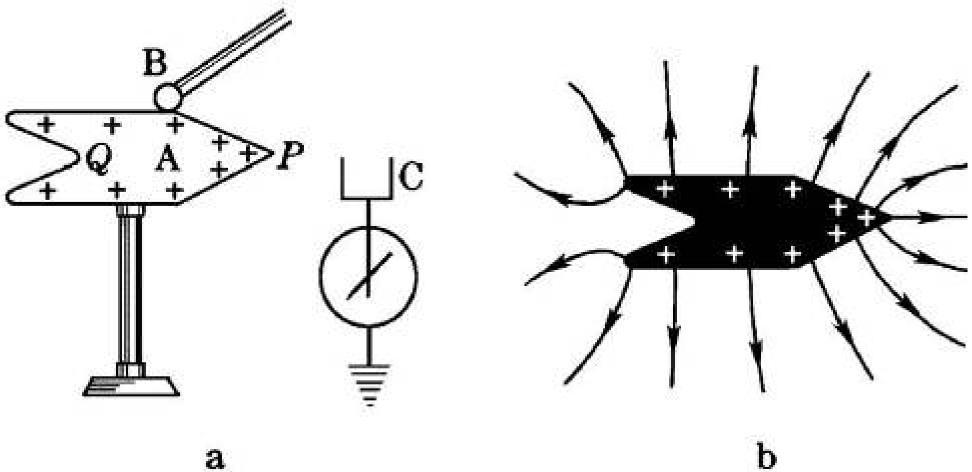
- 导体表面上电荷分布：不仅与表面形状有关，还和周围存在的其它带电体有关。
- 对孤立带电体，电荷面密度的大小与该处表面的曲率有关：

  (1) 曲率较大，表面尖而凸出部分，电荷面密度较大

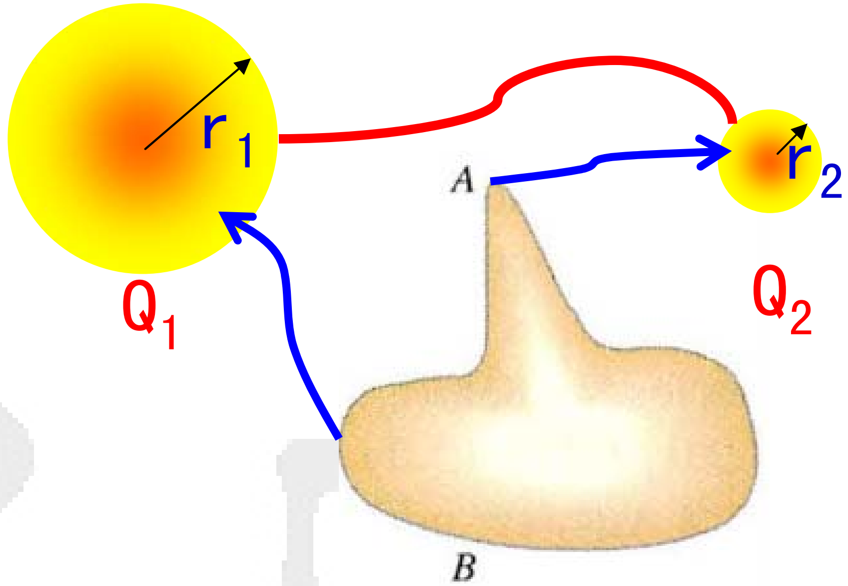
  (2) 曲率较小，表面比较平坦部分，电荷面密度较小

  (3) 曲率为负，表面凹进去的部分，电荷面密度最小





电磁学02-05: 尖端效应

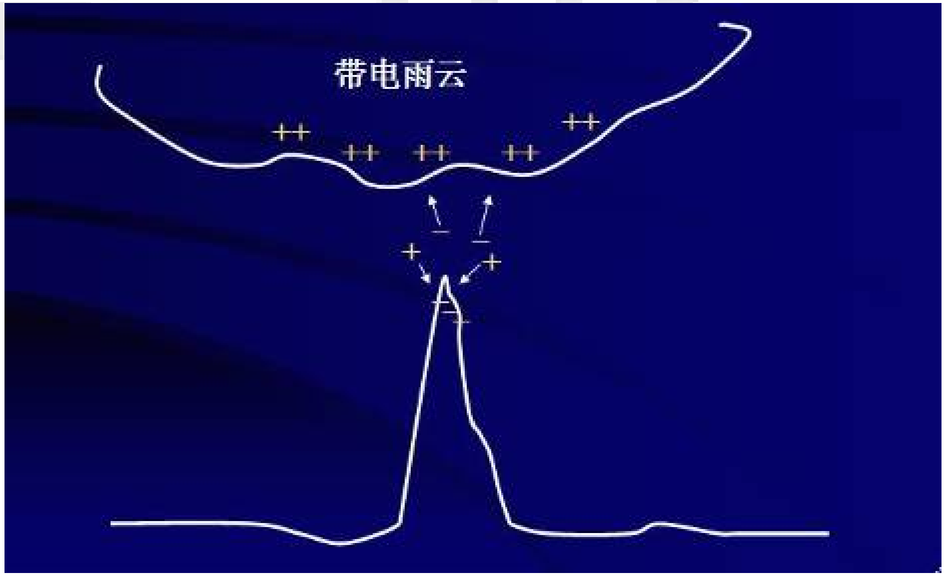


- 定性分析：电势相等条件

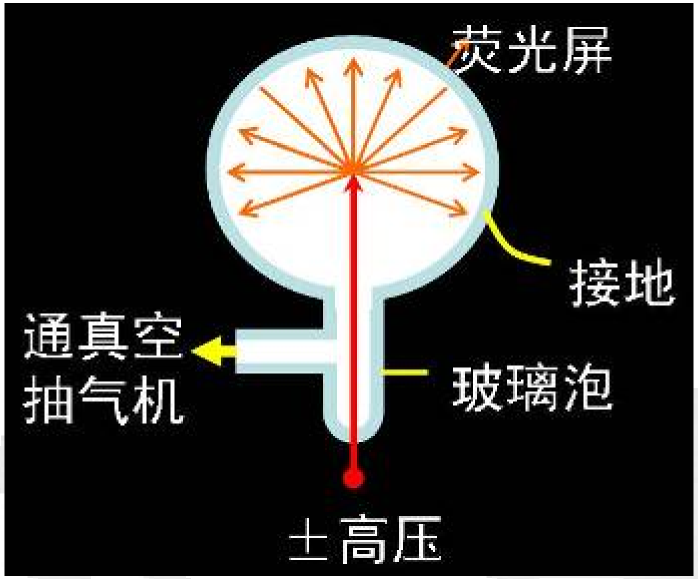
$$U_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1}=U_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2}$$

$$\frac{Q_1}{r_1}=\frac{Q_2}{r_2}\Rightarrow\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{Q_1}{4\pi r_1^2}\Big/\frac{Q_2}{4\pi r_2^2}=\frac{r_2}{r_1}$$

- 尖端放电：
- 避雷针：
- **STM**：
- **AFM**：
- 近场显微术：

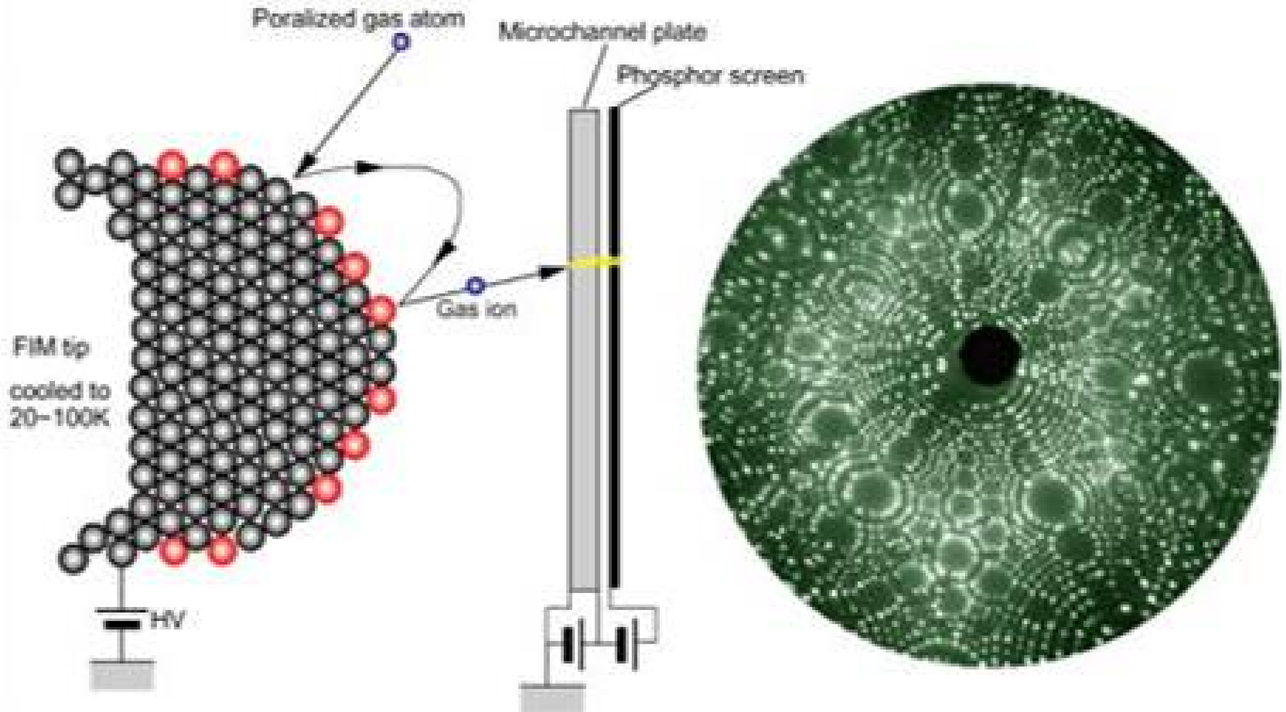


□ 场致发射电子显微术：

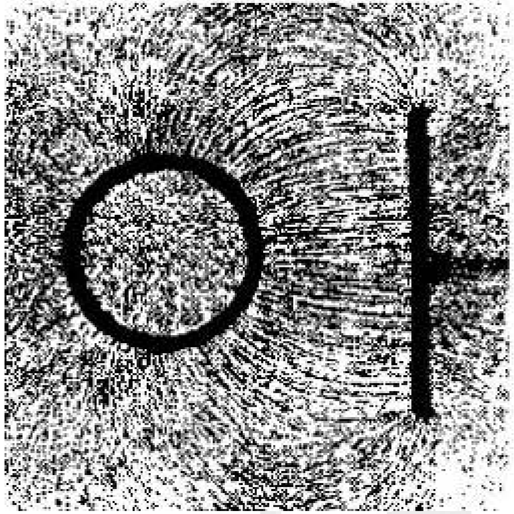


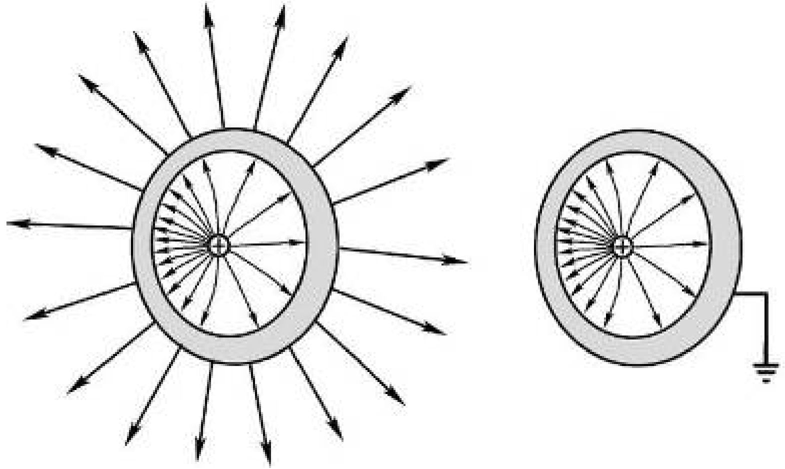
$$\boxed{E = U / r}$$

□ 场离子显微术：



□ 静电屏蔽:

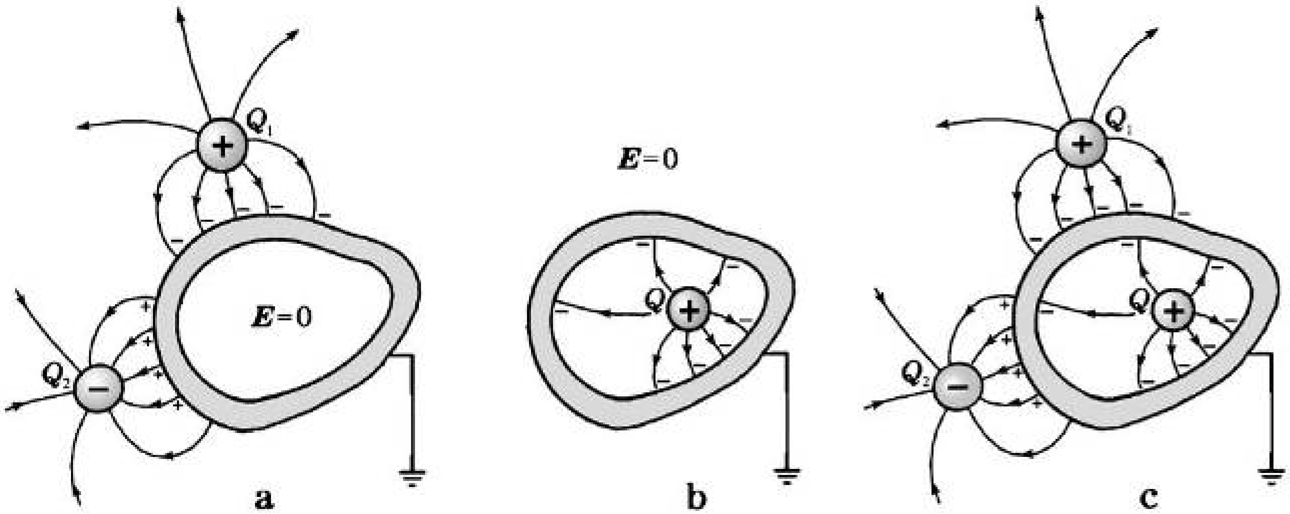




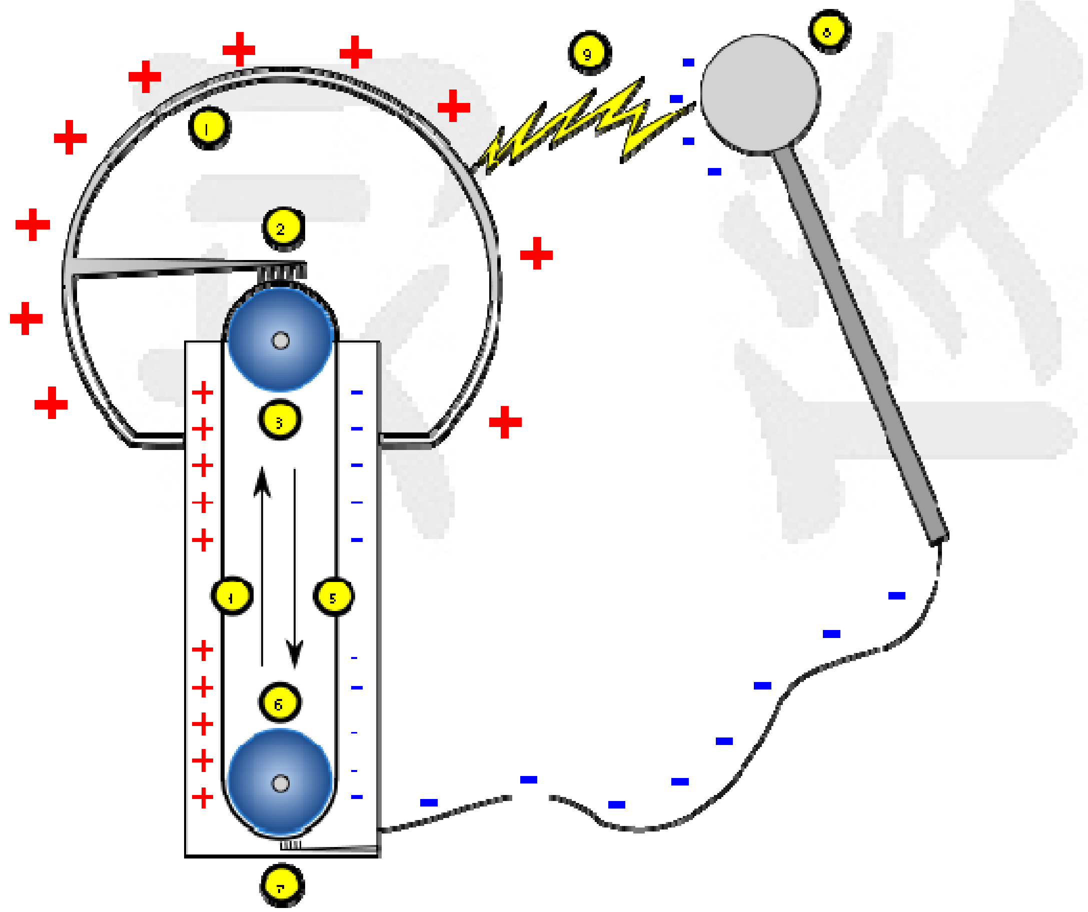
小子站在等势体上

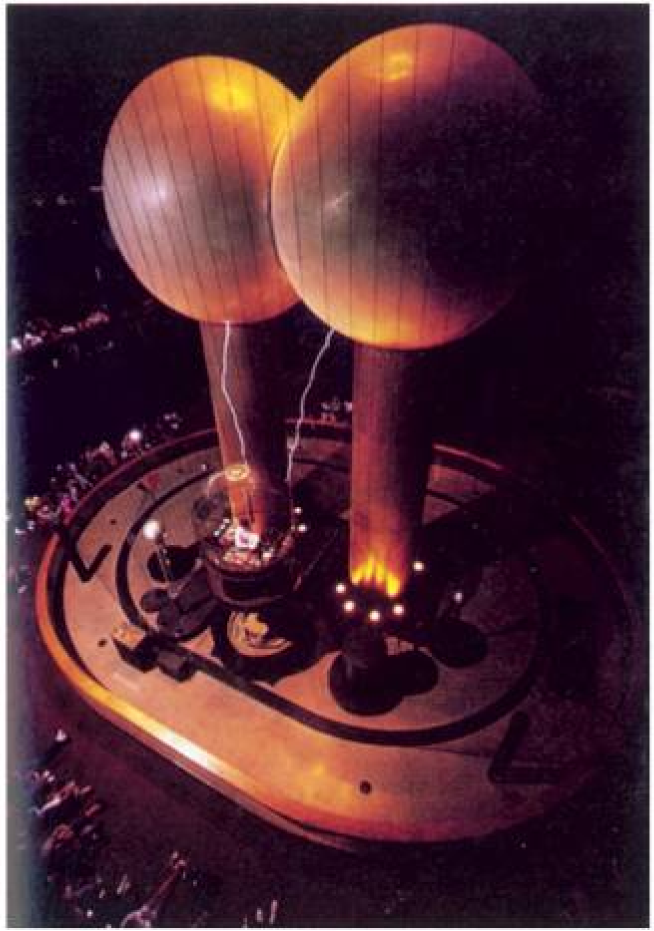
静电屏蔽袋

这玩意啥时候会失效?



- 范德格拉夫静电高压起电机：
- 电势可达 ~ 2×10^{6} V



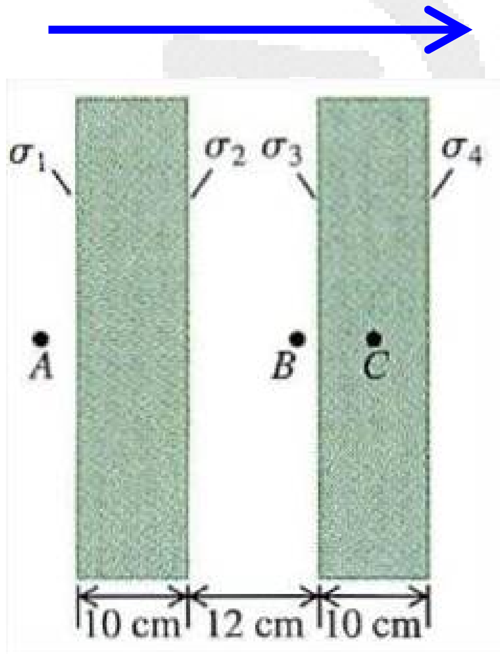


- 基本原则: 找出导体表面电荷分布，使导体内部各点合场强为零，每个导体都有一定的电势。
- 具体方法: 先假定表面电荷面密度 σ(*x*,*y*,*z*)；根据静电平衡条件用相关定律、定理计算。尽量利用对称性。
- P.68【例题1】

$$E_A = \frac{1}{2\varepsilon_0}(-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)$$

$$E_B = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)$$

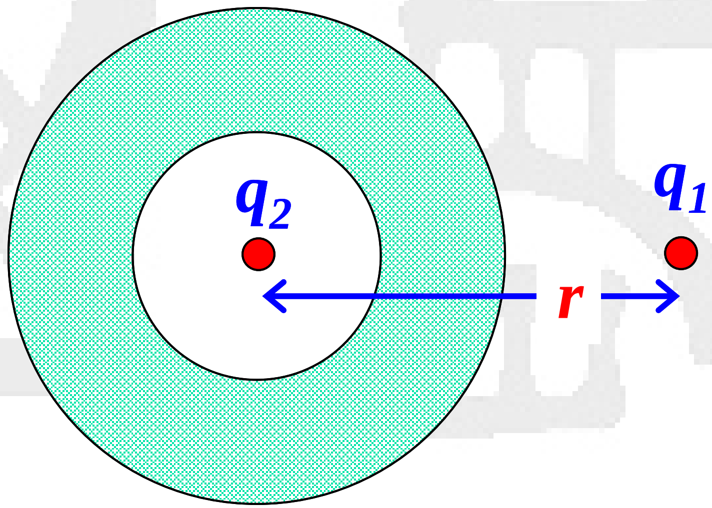
$$E_C = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4) = 0$$



- 【例2.1.1】已知导体球壳上所有电荷代数和为零，求：(1) q_1作用在q_2上的力，(2) q_2所受的力。

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12}$$

$$F_2 = 0$$

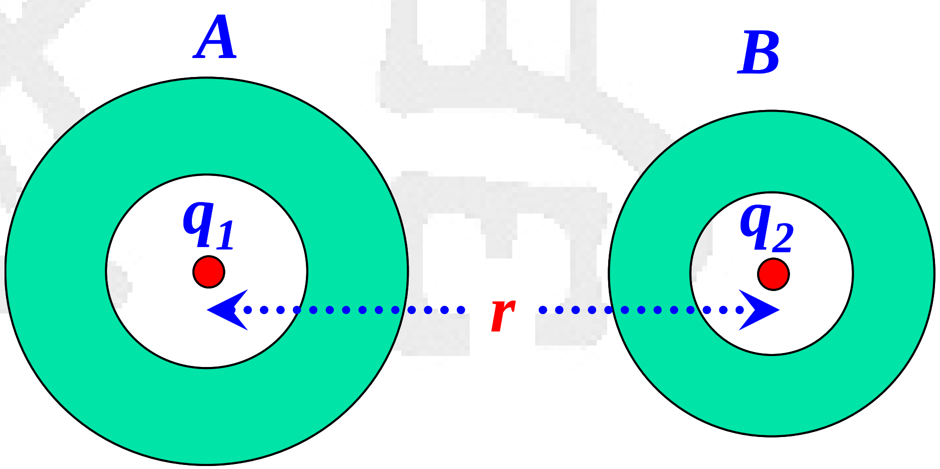


- 导致 q_2受力为零的物理图像是啥？

- 【例2.1.3】已知A、B原先不带电，在球壳中心放置电荷 q_1、q_2，求：(1) q_1作用在q_2上的力，(2) 去掉球壳B，求q_1作用在q_2上的力。两种情况下 q_2 有加速度么？

$$F_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_{12},\quad a_{q_2}=0$$

$$F_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_{12},\quad a_{q_2}\neq 0$$



【例2.1.10】真空中有一组彼此不接触的带电导体，论证空间电势的极大值与极小值只能出现在导体上。

$$\nabla\cdot E=\rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \because E=-\nabla U,$$

$$\therefore \nabla^2 U=-\rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \partial^2 U/\partial x^2+\partial^2 U/\partial y^2+\partial^2 U/\partial z^2=-\rho/\varepsilon_0$$

$$\therefore U_{\max} \Leftrightarrow \partial^2 U/\partial x^2<0,\quad \partial^2 U/\partial y^2<0,\quad \partial^2 U/\partial z^2<0$$

$$\therefore U_{\min} \Leftrightarrow \partial^2 U/\partial x^2>0,\quad \partial^2 U/\partial y^2>0,\quad \partial^2 U/\partial z^2>0$$

$$\because \rho(r)=0,\quad \therefore \partial^2 U/\partial x^2+\partial^2 U/\partial y^2+\partial^2 U/\partial z^2=0$$

- 【一题25】有1998个半径相同的导体球，各球均带有相同的正电荷，彼此不接触。证明，在静电平衡时，至少有一个导体球的表面处处无负电荷。

- 【2.1.12】两导体上分别带有电荷 2q 和 -q，q>0。它们都处在一个封闭的金属壳内。证明电荷量为 2q 的导体电势高于球壳。

- 【2.1.13】封闭导体壳 A 内有两导体 B 和 C，它们原先都不带电。现在设法让导体 B 带正电，证明 $U_B > U_C > U_A > 0$

- 【例2.1.14】真空中有一不带电导体球，现将一点电荷 **q** 放置球心外 **a** 处，试求导体球的电势。

$$U=U_1+U_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{q'}dq'/R$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a}+\frac{1}{R}\int_{q'}dq'\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}$$

针对球心一点！

- 【例2.1.15】半径为 **r** 的导体球带电荷 **Q**，如果将一系列点电荷 $\boldsymbol{q_i}$ 放在球外离球心为 $\boldsymbol{r_i}$ 处，导体球电势是多少？

$$U=U_1+U_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_{\langle i\rangle}q_i'}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_{\langle i\rangle}q_i}{r_i}$$

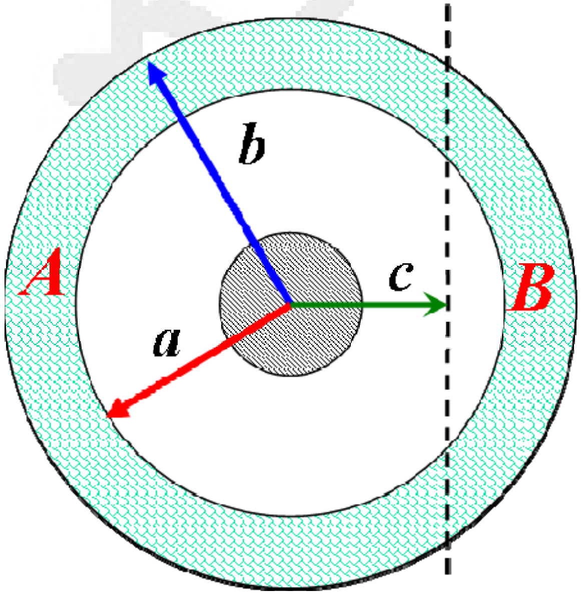
球之原始电势　点电荷对球心电势　感应电荷对球心电势

- 【例2.1.16】电荷量为 q 的点电荷放在半径为 R 的导体球外部，离球心距离为 a，而此时导体球电势为零。求导体球的电荷。

- 【例2.1.36】电子二极管由两个同轴的金属直圆筒构成，内筒发射电子，外半径为1.0mm；外筒接受电子，内半径为1.0cm。如果板压为300V，不考虑边缘效应，求：(1) 发射极表面电荷面密度；(2) 电子刚刚离开发射极时的受力；(3) 电子到达接受极的速度。电子发射时初速度设为0，电子质量为9.11×10^{-31}kg，电荷为1.60×10^{-19}C。

- 【例2.1.43】在一金属球外有一同心金属球壳，球壳有紧密接触的两部分 A 和 B 组成，其交界面为平面。初始时球与球壳都不带电。

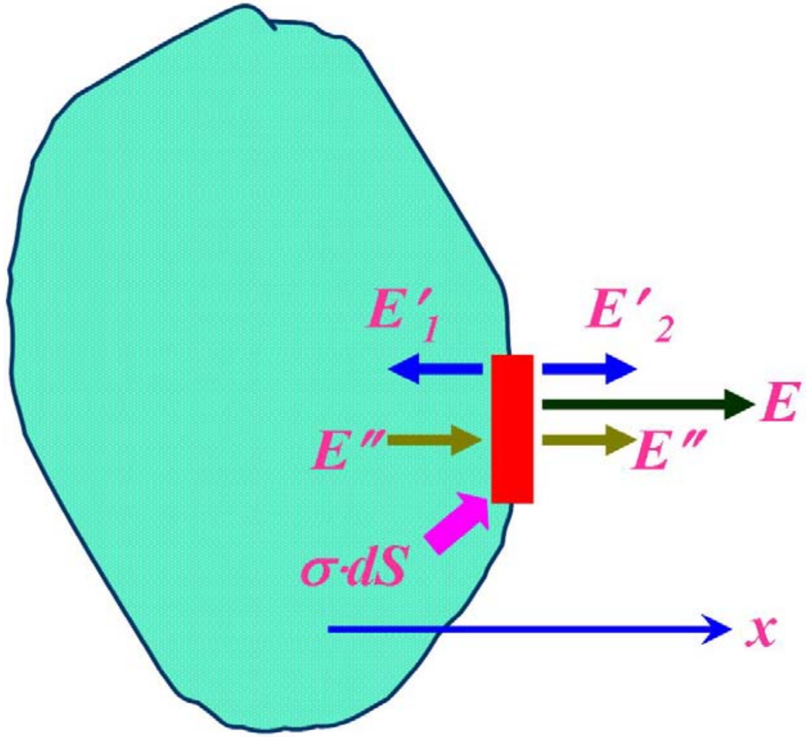
  现在让球带电 q，证明当 $c < ab/\sqrt{(a^2+b^2)}$ 时，B部分所受的静电力为吸引力。



$$\vec{F}^{B}_{Inter} = -\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{a^2-c^2}{a^2}\vec{e}_r$$

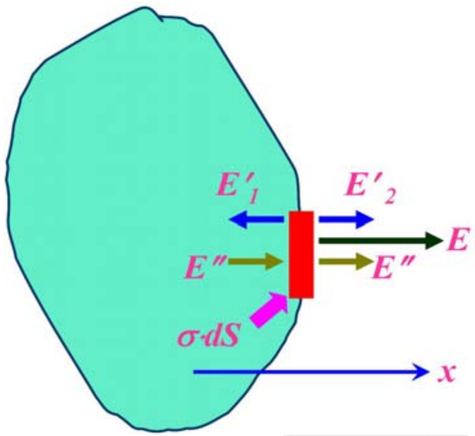
$$\vec{F}^{B}_{Outer} = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 b^2}\frac{b^2-c^2}{b^2}\vec{e}_r$$

- 导体表面电场突变与受力问题(2.1.37 & 2.1.38):



$$E = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{for infinite plate with } \sigma \text{ on the surface} \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{near the unit } dS \text{ of a conductor surface} \end{cases}$$

What is wrong with it?



$$\sigma\cdot dS \Rightarrow E_1' = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\quad E_2' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

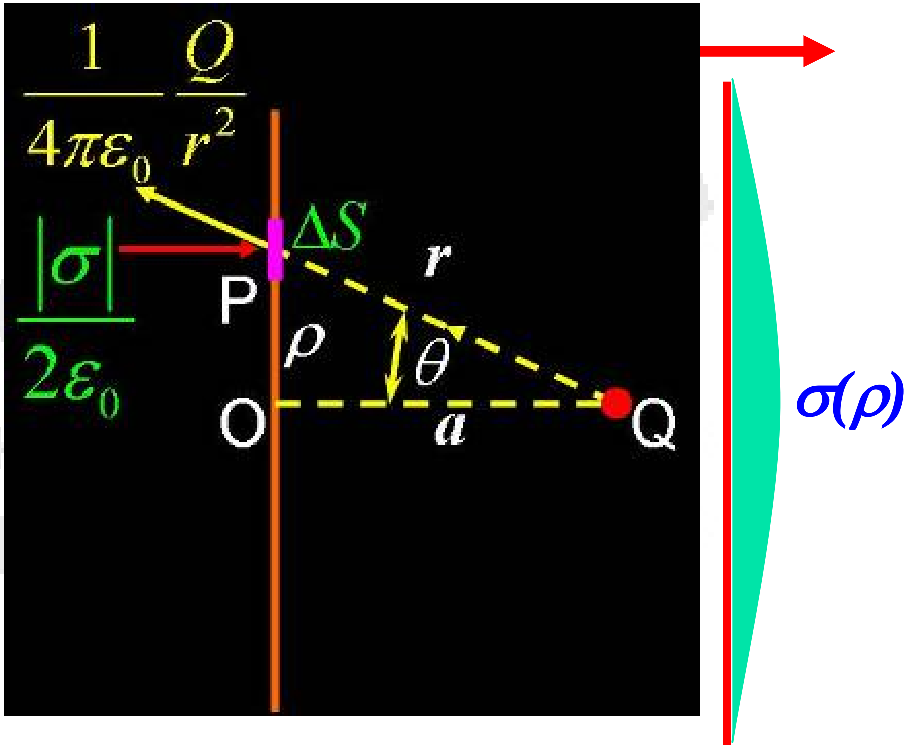
$$\because \underset{\text{Inside the conductor}}{dE} \equiv 0,\quad \therefore \sigma\cdot(S-dS) \Rightarrow E'' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

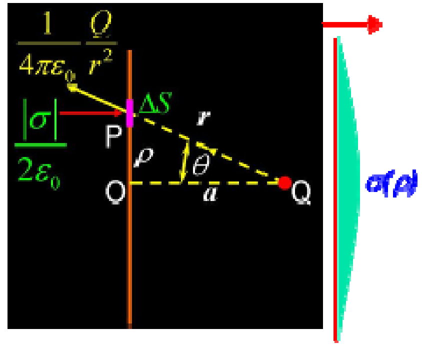
$$\therefore E'' + E_1' = 0 \quad \& \quad E = E_2' + E'' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$dF = E''\sigma\cdot dS = \frac{1}{2}E\sigma\cdot dS$$

- 如何在 $E=\sigma/\varepsilon_0$ 和 $E=\sigma/2\varepsilon_0$ 之间过渡？问题出在 σ 的定义?
- 导体表面微元 dS 总受力作用，但孤立导体整个表面合力为0。

- P.68【例题1】半无限大导体表面对点电荷Q的感应电荷分布
- (1) 在P点(导体内侧)合电场为0。
- (2) ΔS外其它表面电荷对 *P* 点的场强法向分量为0，仅沿表面方向。
- (3) 可把ΔS面对 *P* 点作用特征看作无限大均匀带电平面。





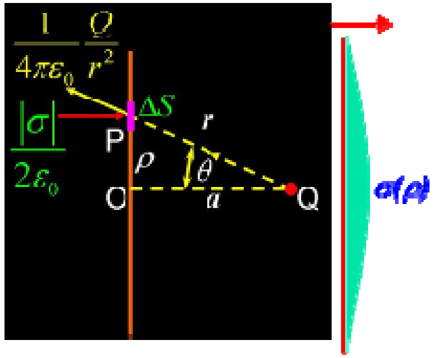
- **P点的电场强度为:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{along OQ-axis, } \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\cos\theta + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \\ \qquad\qquad\quad \text{from} \quad \text{charge Q} \qquad\qquad \text{surface unit } \Delta S \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{Q}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{r^3}$$

- 有了感应电荷分布$\sigma(\rho)$，其中$\rho=r\cdot\sin\theta$，则 **Q** 点处感受的感应电荷电场可求。

电磁学02-06: 导体周围电场、受力、电势计算



- 微分微元+积分：以Q点投影O为中心，作圆环微分元，面环元面积 $2\pi\rho d\rho$，则圆环微分元产生的电场 dE：

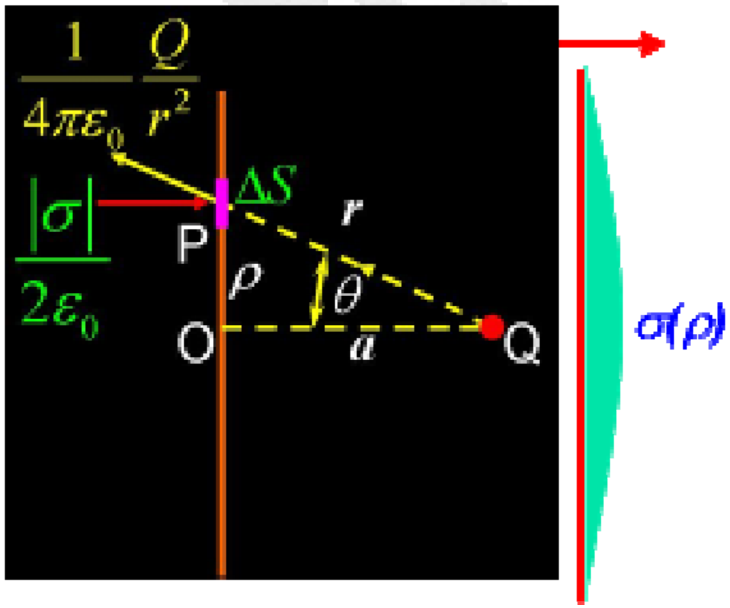
$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2\pi\rho d\rho)\sigma}{r^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\rho d\rho\frac{a}{r^3}\left(-\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{r^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2Q}{r^6}\rho d\rho$$

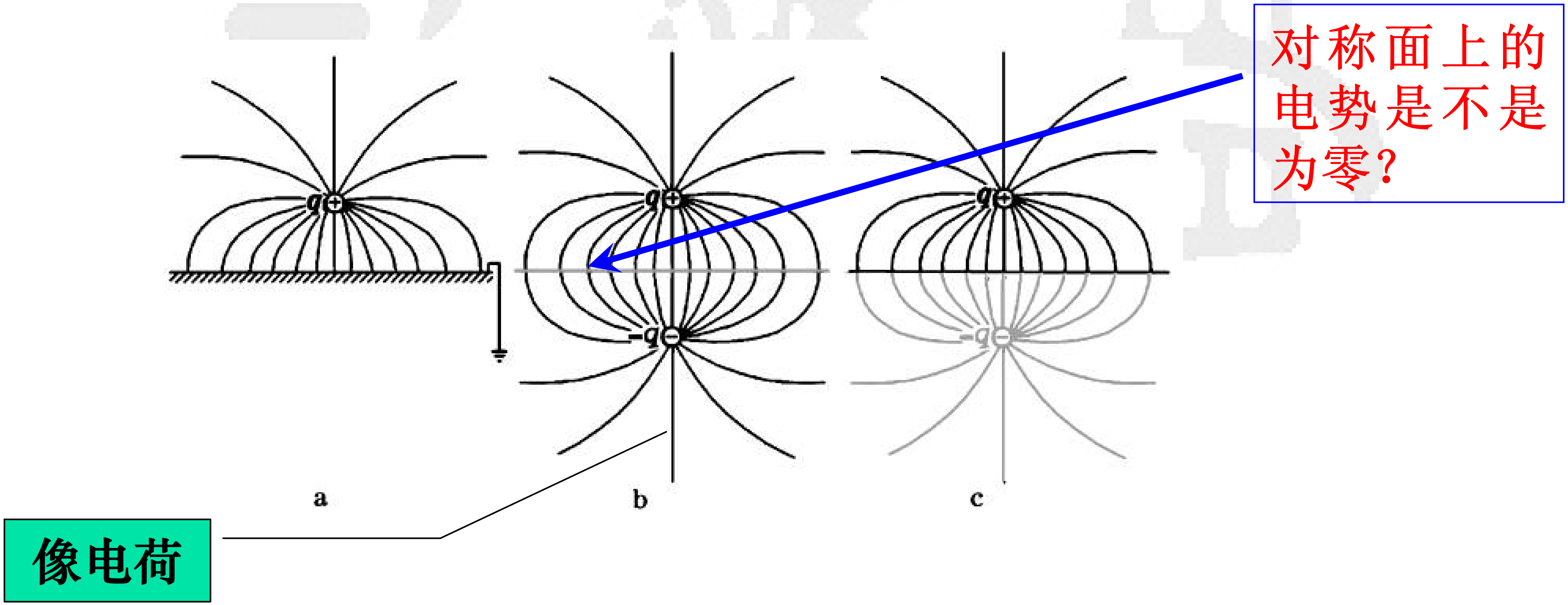
$$E=\int_0^\infty-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}a^2Q\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^3}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{4a^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(2a)^2}$$

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4a^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2a)^2}$$

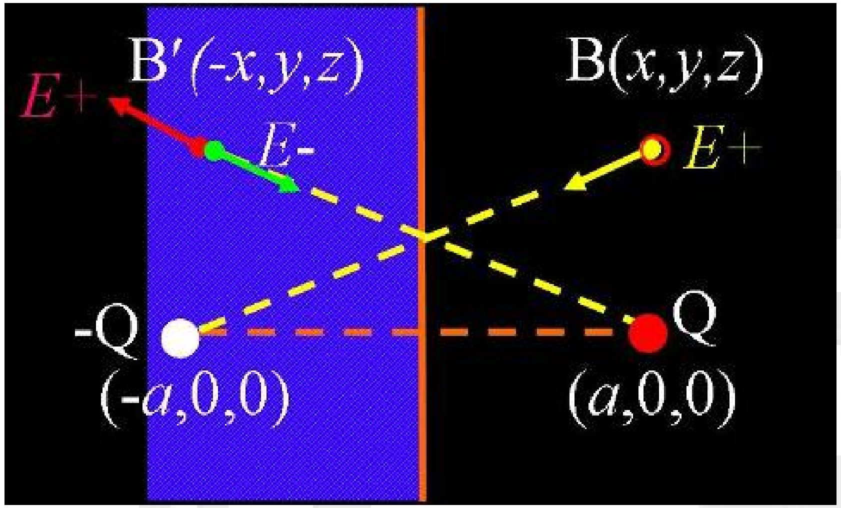
- 感应电荷在Q点产生的电场 ***E***，等效于与点电荷Q关于导体表面对称的镜像电荷Q′=-Q，在Q点所产生的电场；
- 感应电荷对点电荷Q施加的力等效于Q′对Q产生的力；
- 电像作用原理。

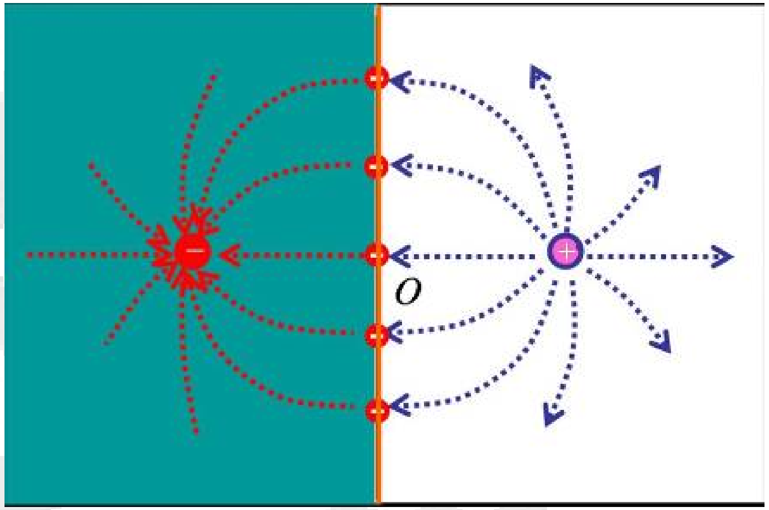


- 电像法——解静电问题的一种特殊方法。
- 在一接地的无穷大平面导体前有一点电荷q，求空间的电场分布和导体表面上的电荷分布。



- 注意电像作用的适用条件：导体表面、感应电荷、点电荷、方向问题，等等

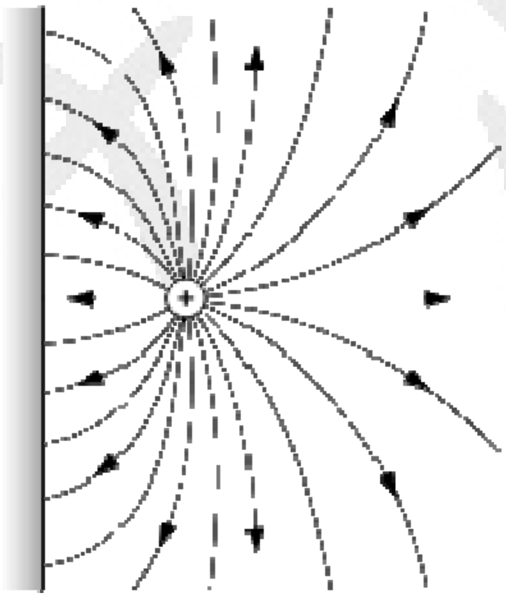


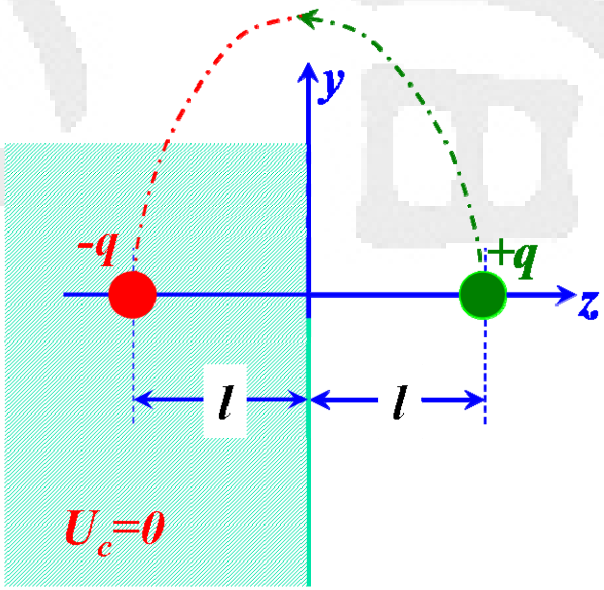


$$E_B = E_{B'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(a+x)^2+y^2+z^2}$$

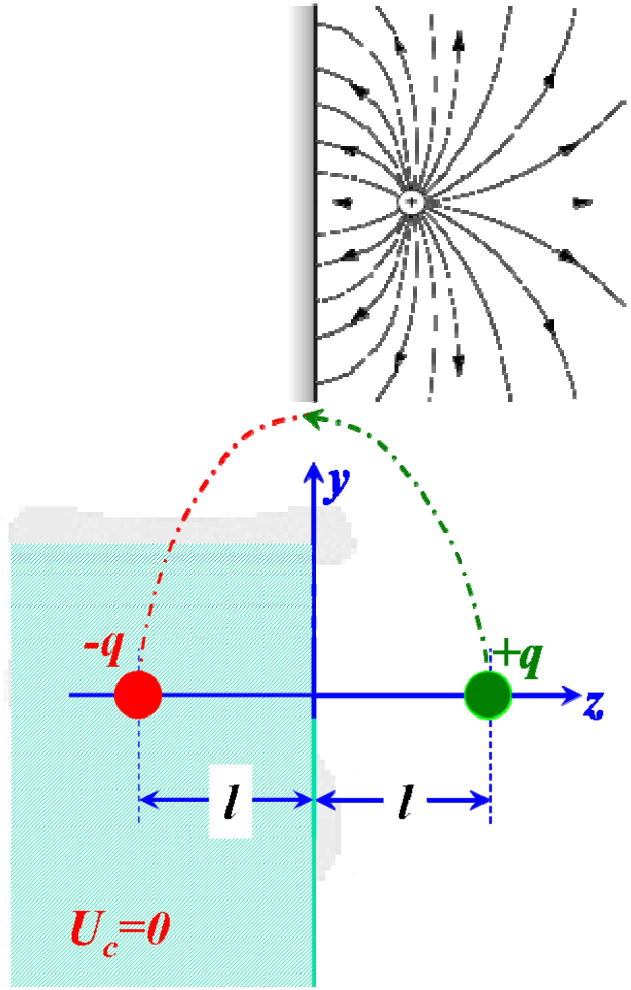
- 要点：由于像电荷放置在区域之外，因而不改变区域内的电荷分布，不影响静电场基本微分方程。只要边界条件满足，唯一性定理就保证了找到的解是问题唯一正确的解。

- 【例2.1.44/45】电荷量为 q 的点电荷到一无穷大导体平面的距离为 l。已知导体电势为零，(1) 求导体表面上的电荷分布；(2) 电场线从电荷 q 发出时，有些是与导体表面平行的，求这些电场线在何处碰到导体表面？

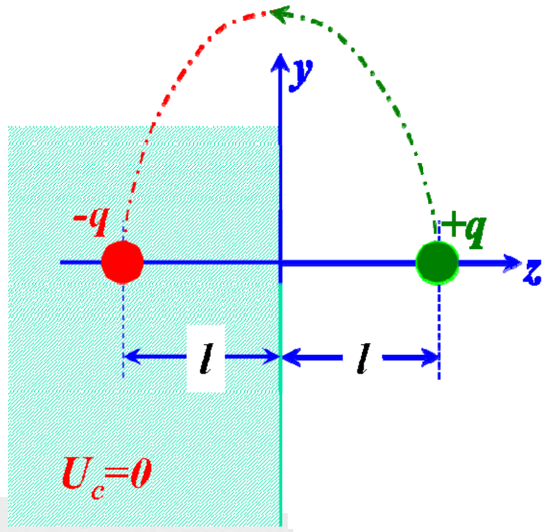




- 再用电像法求解：去掉导体大平面，加上一个镜像电荷-*q*，则在导体表面处电势**U=0**，满足静电感应条件下的边界条件；
- 由上节提到的惟一性定理，一个区域的电势由区域内电荷分布与边界上的电势惟一确定；
- 在 ***z*>0** 空间任一点 ***P*(*x*, *y*, *z*)**的电势 ***U*:**



$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}}\right)$$



- $z>0$处，电场 E 为：

$$\vec{E}=-\nabla U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z-l)\vec{e}_z}{\left[x^2+y^2+(z-l)^2\right]^{3/2}}-\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z+l)\vec{e}_z}{\left[x^2+y^2+(z+l)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

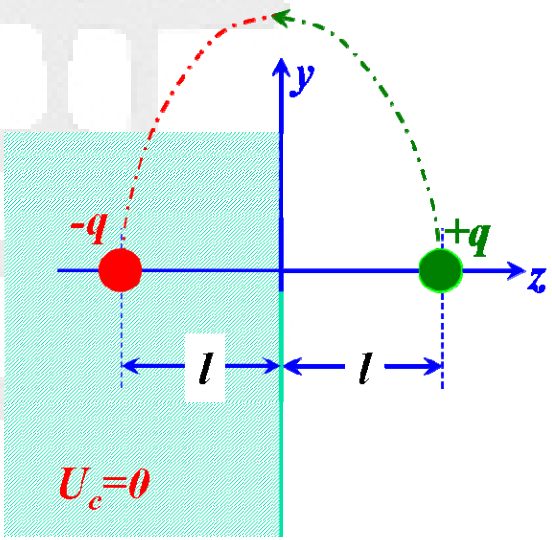
➤ 在 $z \Rightarrow 0$处，电场 $\boldsymbol{E}$ 的分布为(在 $z \Rightarrow 0$处电场只有 z 分量):

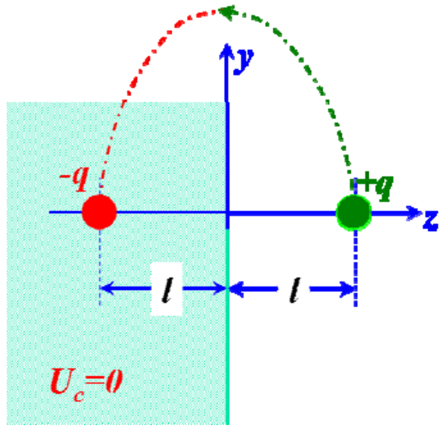
$$\vec{E} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{l}{\left[x^2+y^2+l^2\right]^{3/2}}\vec{e}_z$$

$$\because \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\therefore \sigma = -\frac{q}{2\pi}\frac{l}{\left[x^2+y^2+l^2\right]^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi}\frac{l}{\left[r^2+l^2\right]^{3/2}}$$

$$\therefore q' = \int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r dr = -ql\int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+l^2)^{3/2}} = -q$$





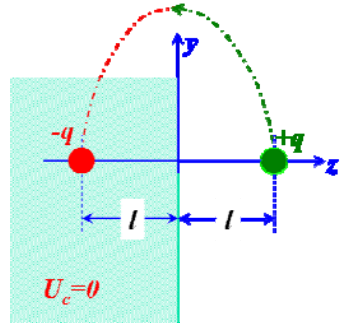
- 只考虑 x=0的平面(即 yz 面)，则电场表示为：

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z-l)\vec{e}_z}{\left[x^2+y^2+(z-l)^2\right]^{3/2}}-\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z+l)\vec{e}_z}{\left[x^2+y^2+(z+l)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y\vec{e}_y+(z-l)\vec{e}_z}{\left[y^2+(z-l)^2\right]^{3/2}}-\frac{y\vec{e}_y+(z+l)\vec{e}_z}{\left[y^2+(z+l)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

- 由上式分别求出电场分量 E_y 和 E_z，则电场线轮廓由如下微分方程确定。求解这个微分方程得到：

$$\frac{dz}{dy}=\frac{E_z}{E_y}\Rightarrow\frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2+y^2}}-\frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2+y^2}}=\frac{2l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$



- 既然电场线在 **q** 处与导体表面平行，即 **$dy/dz=\infty$**。对下述方程求 **dy/dz**，化成单一分式，其分母应为零：

$$\frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2+y^2}}-\frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2+y^2}}=\frac{2l}{\sqrt{r^2+l^2}}\leftrightarrow(*)$$

- 最后得到：

$$\frac{(z-l)}{\sqrt{y^2+(z-l)^2}}=\frac{(z+l)}{\left[y^2+(z+l)^2\right]^{3/2}}\left[y^2+(z-l)^2\right]\leftrightarrow(**)$$

- 又，**$dy/dz=\infty$**只有在**$(z=l, y=0)$**处满足，对**(*)**式移项并求极限：

$$\lim_{\substack{z\to l\\ y\to 0}}\frac{(z-l)}{\sqrt{y^2+(z-l)^2}}=\lim_{\substack{z\to l\\ y\to 0}}\left(\frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2+y^2}}-\frac{2l}{\sqrt{r^2+l^2}}\right)=1-\frac{2l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

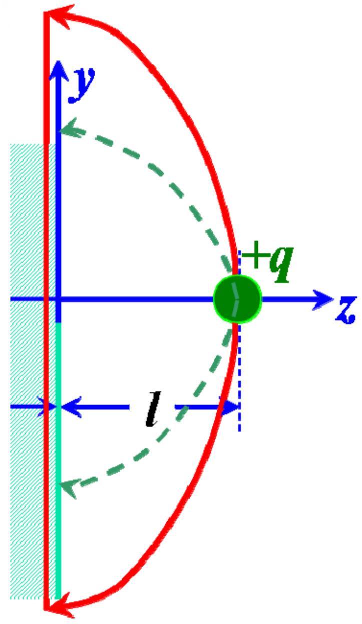
- 对上一页(**)式右边再施加 $y\to 0$ 和 $z\to l$ 的条件，得到：

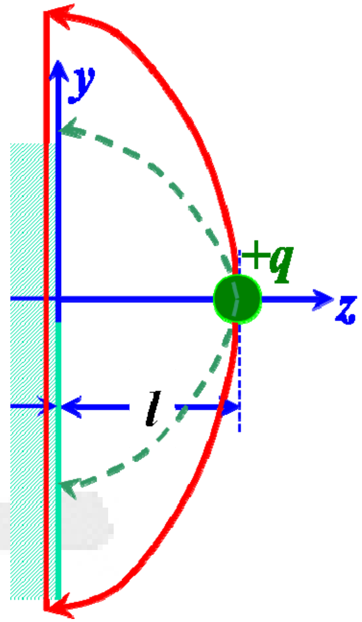
$$\lim_{\substack{z\to l\\ y\to 0}} \frac{(z+l)}{\left[y^2+(z+l)^2\right]^{3/2}}\left[y^2+(z-l)^2\right]=\frac{2l}{(2l)^3}\cdot 0=0$$

$$\therefore 1-\frac{2l}{\sqrt{r^2+l^2}}=0 \Rightarrow r=\sqrt{3}l$$

- 第(2)个问题也可利用高斯定理简单求解。构造如图示高斯面 *S* (粗红线包络)，因包络面也是电场线包络面，故 $E\cdot dS\equiv 0$；且导体内 $E=0$，故有：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot dS\equiv 0$$





- 由高斯定理，高斯面内的电荷代数和应为 0。
- 高斯面 **S** 内包含的电荷有两项：(1) 点电荷 +q 的一半，因为高斯面在点电荷 +q 处满足dy/dz=0；(2) 导体表面部分 **S′**的感应电荷 σ。由此得：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot dS = 0$$

$$\frac{q}{2}+\iint_{S'}\sigma dS = 0$$

$$\because \sigma = -\frac{q}{2\pi}\frac{l}{\left[r^2+l^2\right]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \iint_{S'}\sigma dS = \iint_{S'}\sigma\cdot 2\pi r dr = -ql\int_0^r \frac{rdr}{(r^2+l^2)^{3/2}}$$

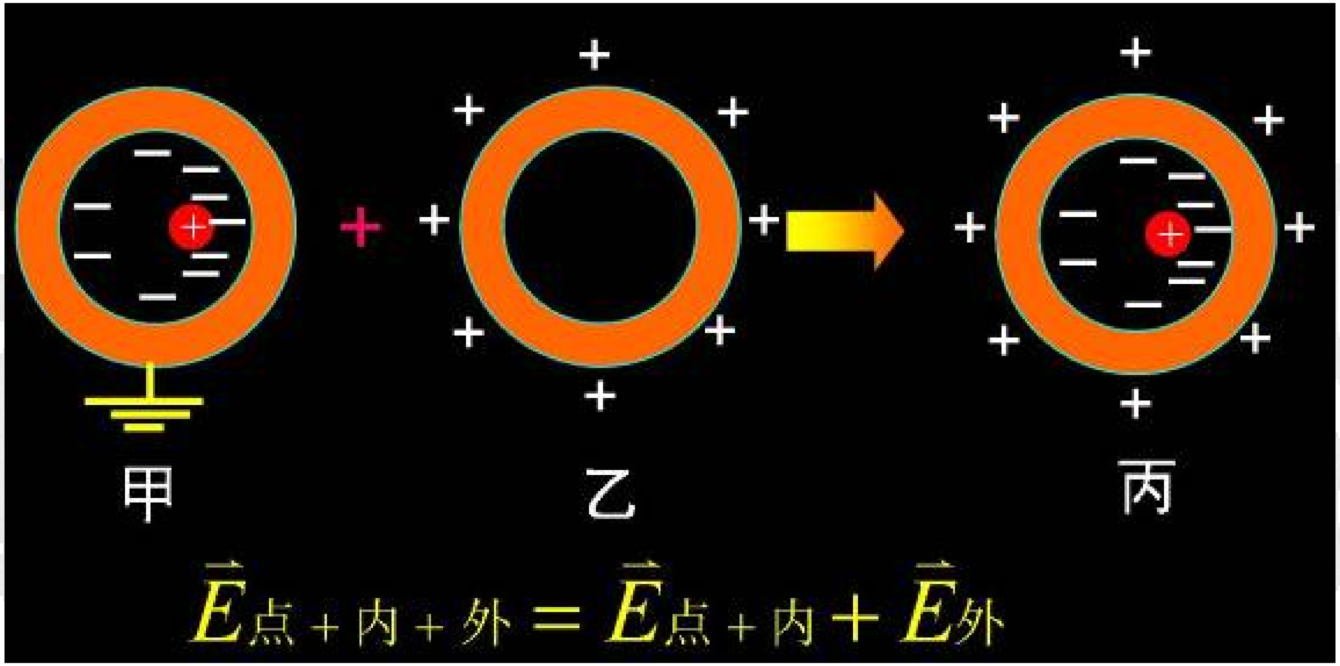
$$\therefore \frac{q}{2}-ql\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{(r^2+l^2)^{1/2}}\right) \Rightarrow r=\sqrt{3}l$$

谁说电荷发出的与导体表面平行的电场线刚好切出点电荷的一半？

- 边界条件可将静电场的空间分布唯一地确定下来。即，给定边界条件后，不可能存在不同的静电场分布。(电动力学上将作详细论证，亦可用反证法)

- 唯一性定理的实质是：唯一性定理保证了不管我们用什么方法求出的解都是问题的真正的解。因此可以通过各种方法(捷径)来计算(分析)。

- 前面的电像法给出的一定是正确结果。下面的推理也是惟一的。

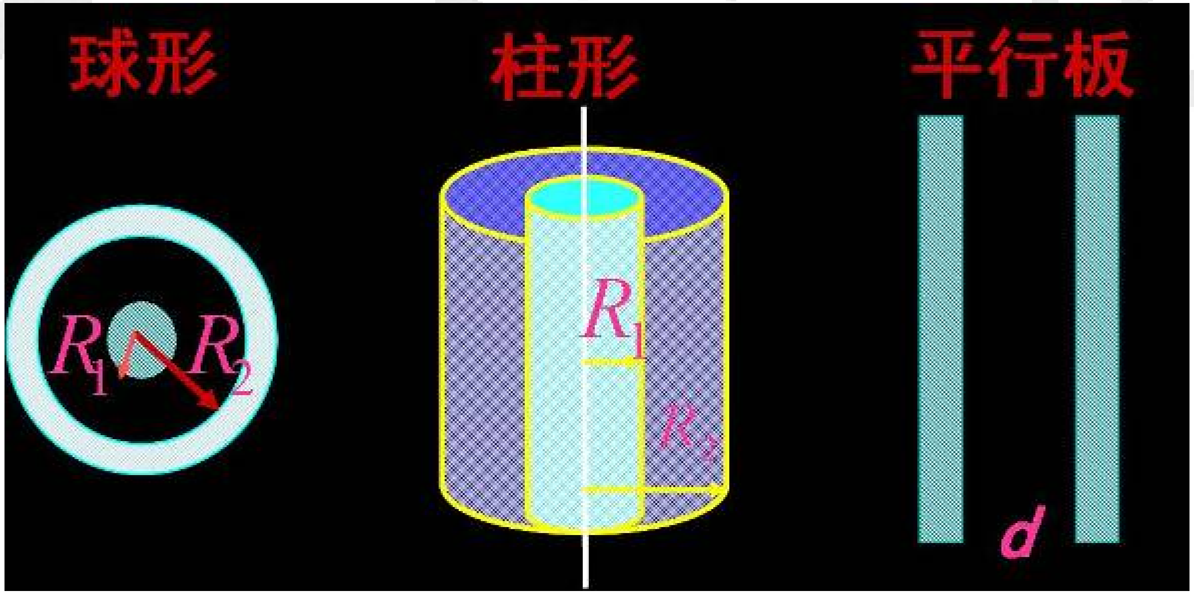


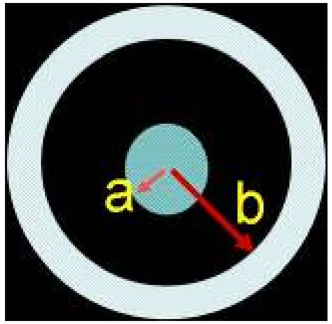
- 无论点电荷+Q位于空腔中什么位置，外表面的感应电荷+Q都是均匀分布。

- 孤立导体球之电势为：电荷量越多，电势越高。
- 标度单位电势所需电量的物理量为电容 ***C***。
- ***C*** 与 ***Q*** 和 ***U*** 无关，决定于几何尺寸。
- **1F=1C/1V，1μF=10^{-6}F，1pF=10^{-12}F**。
- 因此，一个电容器的电容 $C = Q/(U_1 - U_2)$。
- 典型电容器：

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

$$C = Q/U = 4\pi\varepsilon_0 a$$

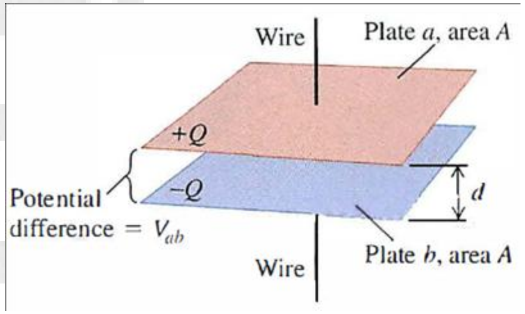




- 球形电容器：***a*** 表示内球壳的外半径，***b*** 为外球壳的内半径

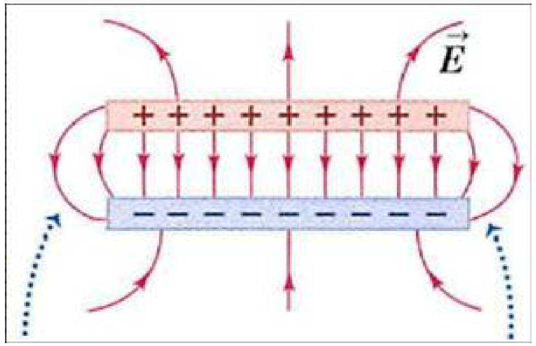
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\Rightarrow U_1-U_2=\int_a^b\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}-\frac{Q}{b}\right)$$

$$C=\frac{Q}{U_1-U_2}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

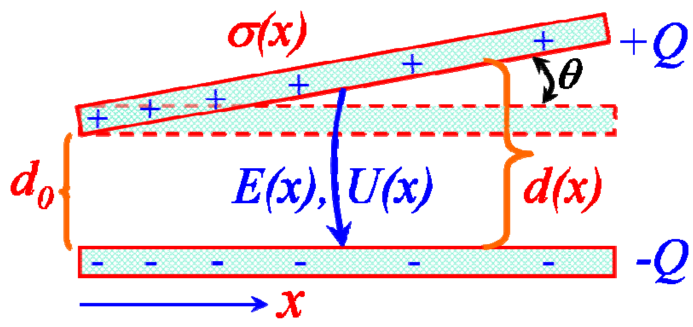


- 平行板电容器：

$$E=\frac{U_1-U_2}{d}\Rightarrow\sigma=E\varepsilon_0\Rightarrow C=\frac{Q}{U_1-U_2}=\frac{\sigma S}{Ed}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



- 有限尺寸平板电容器：电场不可能均匀，引入校正因子***f***恒大于**1**。



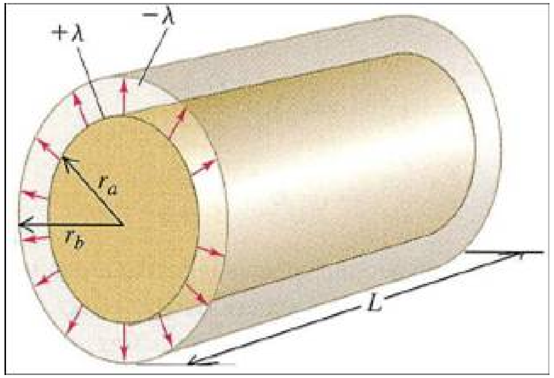
- 【习题p.99-2.7】非平行平板电容器
- 平行板电容器电荷±Q，变形后保持不变
- 因为 θ 很小，不考虑 x 方向电场分量，只考虑垂直于底板方向的电场分量。

$$\because d(x)=d_0(1+\theta x/d_0),\quad E(x)=\sigma(x)/\varepsilon_0,\quad U(x)=E(x)d(x)$$

$$\therefore U(x)=\frac{d_0}{\varepsilon_0}(1+\frac{\theta}{d_0}x)\sigma(x)\Rightarrow U(0)=\frac{d_0}{\varepsilon_0}\sigma(0)\Rightarrow \sigma(x)=\sigma(0)/(1+\frac{\theta}{d_0}x)$$

$$\because Q=\text{constan}\Rightarrow \int_0^a \sigma(x)adx=Q\Rightarrow \sigma(0)=\frac{Q}{a^2}\left(\frac{a\theta}{d_0}\right)\frac{1}{\ln\left(1+\frac{a\theta}{d_0}\right)}$$

$$\because U(0)=E(0)d_0=\frac{\sigma(0)}{\varepsilon_0}d_0,\quad \therefore C=\frac{Q}{U(0)}=\frac{\varepsilon_0 a^2}{d_0}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a\theta}{d_0}+\dots\right)$$

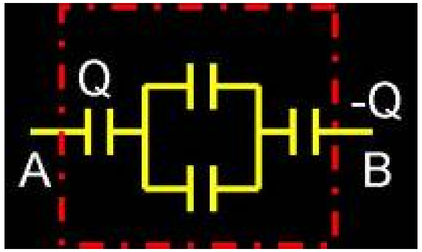


- 圆柱体电容器：***a*** 内柱壳半径，***b*** 外柱壳半径

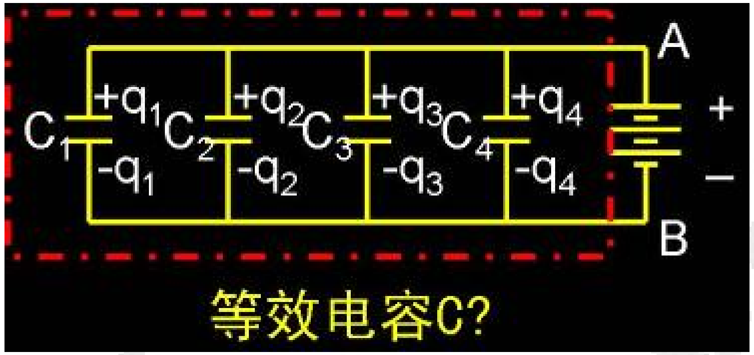
$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$$

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$



电容器的组合：并联导致等效电容C。

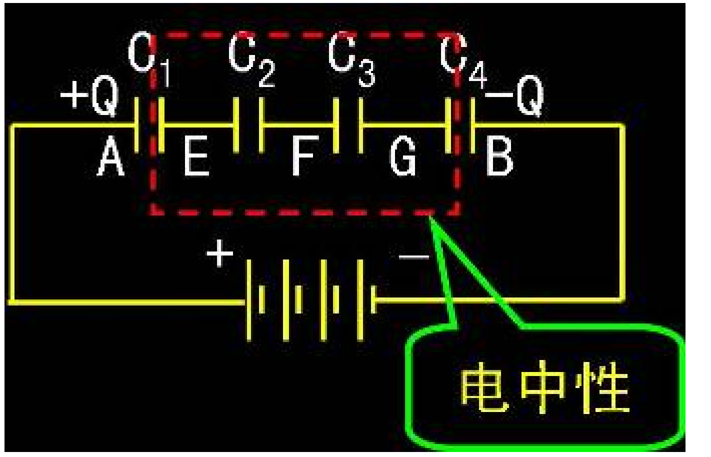


$$q_1 = C_1 U_{AB}, q_2 = C_2 U_{AB}, \ldots\ldots q_n = C_n U_{AB}$$

$$Q = q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_n$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_2}{U_{AB}}$$

$$= C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n$$



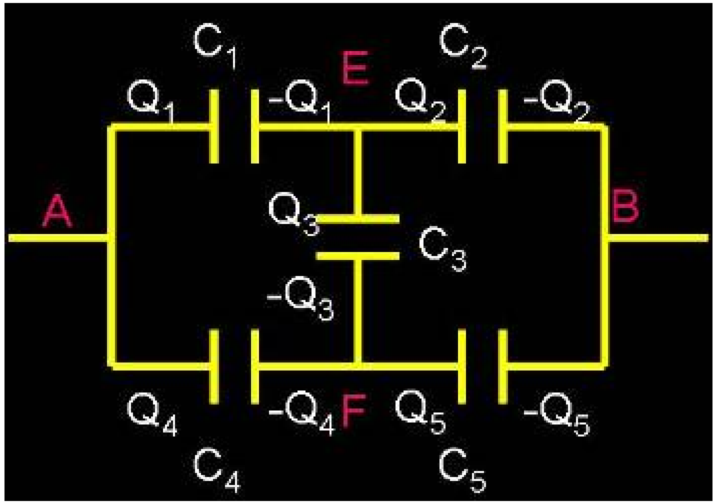
- 电容器的组合：串联导致等效电容C。

$$U_A - U_E = \frac{Q}{C_1},\quad U_E - U_F = \frac{Q}{C_2},\ldots\ldots,\quad U_G - U_B = \frac{Q}{C_n}$$

$$U_A - U_B = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n}$$



- 复杂结构的等效电容计算关键在于虚构一充电过程，然后求等效电容两端建立起电势差U_{12}时组合电容储存的净电荷。

- 复杂结构内部导线节点电中性，闭合回路电势差为零。

$$\begin{cases} -Q_1+Q_2+Q_3=0 \\ -Q_3-Q_4+Q_5=0 \end{cases},\quad \begin{cases} \oint_{AEFA} E\cdot dl=\dfrac{Q_1}{C_1}+\dfrac{Q_3}{C_3}-\dfrac{Q_4}{C_4}=0 \\ \oint_{EBFE} E\cdot dl=\dfrac{Q_2}{C_2}-\dfrac{Q_5}{C_5}-\dfrac{Q_3}{C_3}=0 \end{cases}$$

$$U_{AB}=\int_{A\to E\to B} E\cdot dl=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}\Rightarrow C_{AB等效}=\frac{Q_1+Q_4}{U_{AB}}$$

- 电容计算问题放到电介质一章去，在此略去不表！

- 作业：2.6，2.8，2.10，2.11

- 在点电荷 Q_1 的电场空间中，一个试探电荷 Q_2 从 r_a 移动到 r，静电力做功：

$$A_{ab}=Q_2\int_{r_a}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r}\right)\Rightarrow \text{if }\ r_a=\infty,\quad \text{then } A_{ab}=-\frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 静电力之功=静电势能增量之负值。

- 定义无穷远处电势能为0，则 q_0 在空间r处的电势能是：

$$W=-A_{ab}=\frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}=U_2Q_2$$

- 这一电势能属于 Q_1 和 Q_2 系统整体，考虑静电力做功的对称性：

$$W=\frac{1}{2}(U_1Q_1+U_2Q_2)$$

电磁学02-10: 真空静止电荷系能量

- 对于三电荷系统： Q_1、Q_2、Q_3 (与移动次序无关)

$$Q_3(U_1+U_2)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right)\Rightarrow W=-A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}}+\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}+\frac{Q_3Q_1}{r_{31}}\right)$$

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Q_iU_i}$$

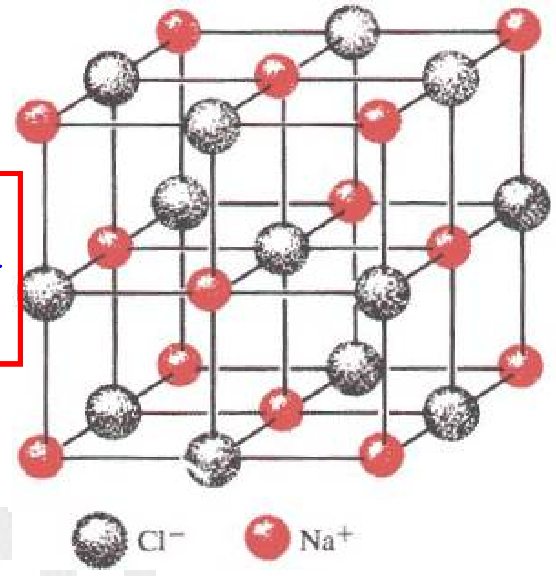
$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}Q_iU_i$$

- 注意：最后一项中 U_i 表示除 Q_i 之外所有电荷在 Q_i 处产生的电势
- 推广到n个电荷，甚至是连续电荷体，有类似结果：

连续分布电荷系

全部电荷在该位置上产生的电势

$$W=\frac{1}{2}\int_V \rho U d\tau+\frac{1}{2}\int_S \sigma U dS$$



- 离子晶体崩塌诅咒

$$W = \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_k}{r_{1k}}$$

- 以正离子为中心：

六个近邻氯离子

立方体边上的次近邻钠离子

$$W = \frac{1}{2} N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \cdots\cdots\right)$$

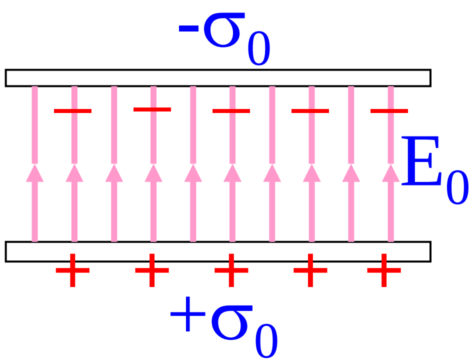
$$W = -\frac{0.8738 N e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -8.61\times 10^5\, J/mol < 0$$

静电能起着使正负离子聚集成晶体的作用

$$W_{Exp}(\text{电离能}) = -7.64\times 10^5\, J/mol$$

- 静电能随 **a** 减小而下降，离子结构应该崩坍，但离子间电子云重叠受制于泡利不相容原理，晶体因此维持稳定。

电磁学02-10: 真空静止电荷系能量



- 真空电场的概念：存在电荷分布的真空具有静电能，即电场引起电势能。

- 如何评估电场中电能⇒能量密度***w***！以平板电容为例：外力将 ***dq*** 注入到电容器中需做功 ***dA***:

$$dA = dq(U_1' - U_2') \Rightarrow \because (U_1' - U_2') = \frac{q}{C}, \quad \therefore A = \int_0^Q \frac{qdq}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\therefore W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q(U_1 - U_2) = \frac{1}{2}C(U_1 - U_2)^2$$

$$\because U_1 - U_2 = Ed,\ Q = \sigma S = \varepsilon_0 ES$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd \Rightarrow w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

- 可以推广到连续电荷分布体系，虽然严格证明等到电动力学。

- 考虑电势能：

无表面电荷

导体表面

$$W=\frac{1}{2}\int_V \rho U d\tau+\frac{1}{2}\int_S \sigma U dS=\frac{1}{2}\int_V \rho U d\tau=\frac{1}{2}\int_S \sigma U dS \quad (\text{if } \rho=0)$$

$$\because \rho U=\frac{dq}{dv}U=\frac{dq}{dSdl}U=\frac{dq}{dS}\frac{U}{dl}=\frac{dq}{dS}E=\sigma E=\varepsilon_0 E^2$$

$$\therefore W=\frac{1}{2}\int_V \rho U d\tau=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 d\tau$$

- 可以看到，对于一个真空电荷系统，可以从不同角度计算电能。

(1) 利用电势能来计算，只需对存在电荷的空间进行积分；

(2) 利用电场能来计算，则需对电场存在的整个空间积分，无论那里有无电荷；

(3) 利用电容器计算，则需要判定是否为电容器！

- 导体和电荷系的电能计算是电磁学一个重要内容，需要加以注意！

【例题p.84】带电(Q)球体的静电能：导体与介电体

$$W=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\\ \dfrac{1}{2}\int_S \sigma U dS=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_S \sigma dS=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\\ \int_V \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau=\int_a^\infty \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\end{cases}$$

charge on surface

$$\boxed{\frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}>\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}}$$

- 体电荷分布能量比面电荷分布能量高。
- 选择电荷分布以达最小能量(**Thomson**定理)。

$$W=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\int_V \rho U d\tau=\dfrac{1}{2}\int_0^a\left(\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\right)\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3a^2-r^2}{2a^3}\right)4\pi r^2 dr=\dfrac{3}{20\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{a}\\ \int_0^a \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^3}\right)^3 4\pi r^2 dr+\int_a^\infty \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr=\dfrac{3}{20\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{a}\end{cases}$$

charge in body

电磁学02-10: 真空静止电荷系能量

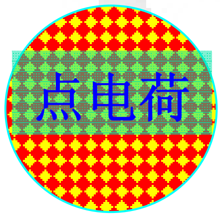
- 点电荷固有能量(离散电荷集合与连续电荷分布):

$$W=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^{n}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_iQ_j}{r_{ij}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}Q_iU_i\Rightarrow\begin{cases}W>0\\ W<0\end{cases}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\int_V\rho U d\tau=\int_V\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2d\tau\Rightarrow W>0\end{cases}$$

considering the inter-dq interaction

including the self-energy of dq

what is wrong?

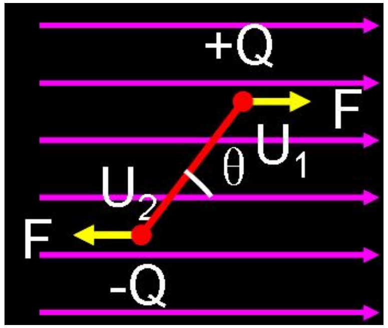


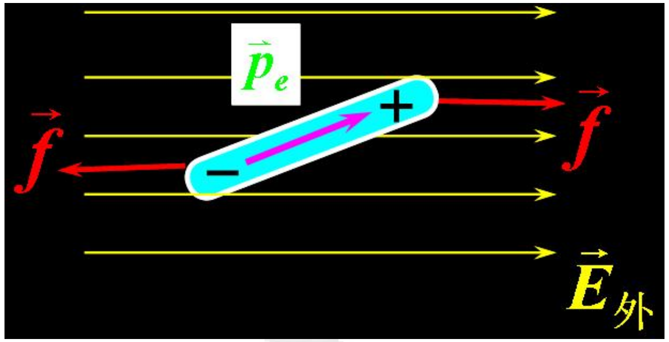
$$\Rightarrow\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ_1dQ_2}{r_{12}}$$

- 点电荷处理到微观尺度不再有效;
- 别扭地处理电子"球"半径:

$$W=\frac{1}{2}\int_S\sigma UdS=\frac{1}{2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0a}\int_S\sigma dS=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0a}\Leftrightarrow W=mc^2$$

$$r_e=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0mc^2}\sim2.8\times10^{-15}m$$





问题1由来：电偶极矩 *p* 的电能

设+*Q* 与-*Q* 之间的距离为 *l*，电荷的电势能为：

$$W = QU_1 - QU_2 = Q\Delta U = Q\frac{\partial U}{\partial l}\vec{l} = Q\vec{l}(-E_l) = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{L} = \vec{p}\times\vec{E}$$

外电场 *E* 如果不均匀，电偶极子除受力矩外，还要受合力作用：

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}\cdot\vec{E}),\quad F_y = \frac{\partial}{\partial y}(\vec{p}\cdot\vec{E}),\quad F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\vec{p}\cdot\vec{E})$$

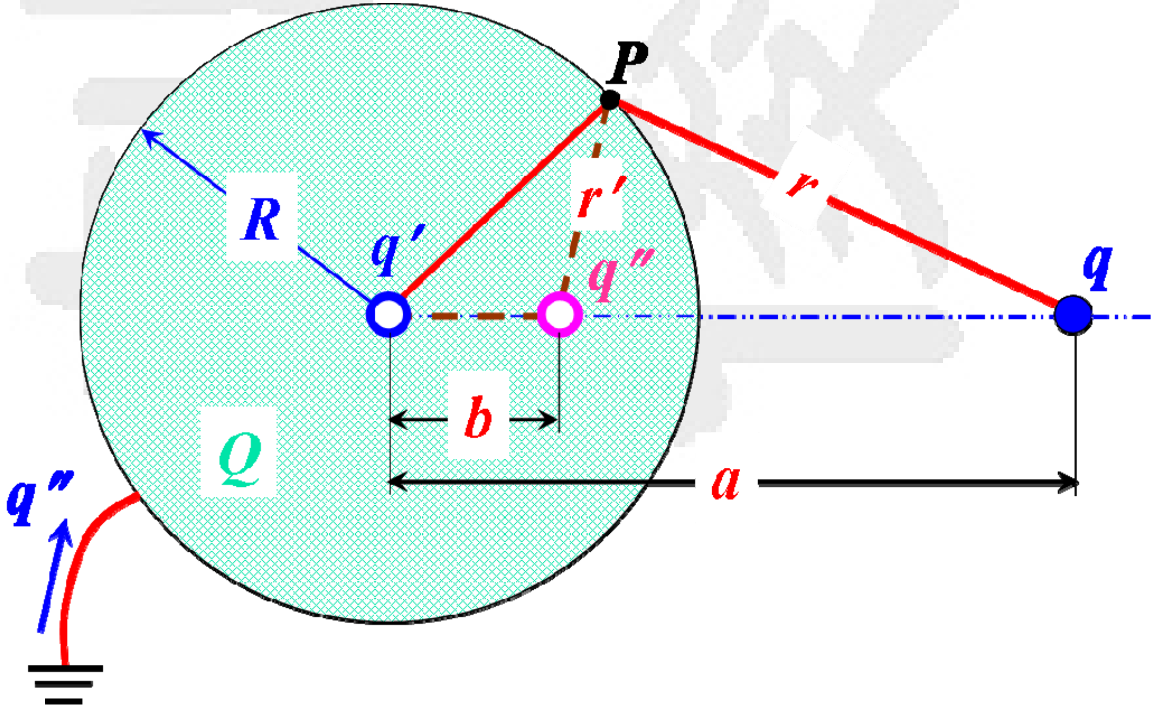
$$\vec{F} = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(\vec{p}\cdot\vec{E}) = \nabla(\vec{p}\cdot\vec{E})$$

导体表面微元 *dS* 总受力作用，但孤立导体整个表面合力为**0**。

- 问题2由来：同号电荷之间的相互吸引问题(2.1.46)。

(1) 真空中一接地导体球，距球心 a (>R) 处有点电荷 q，求空间各点的电势；

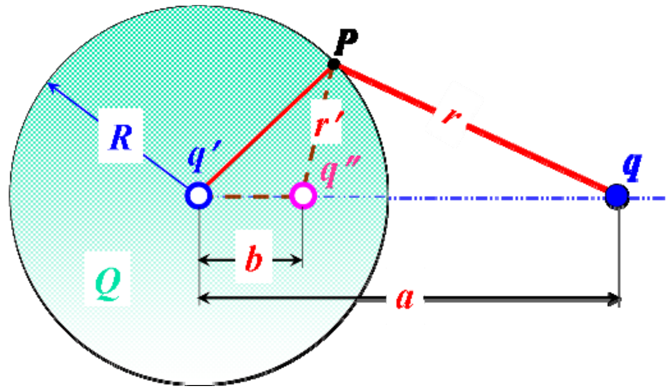
(2) 如果导体球不接地而是带电 Q，求球外空间电势与电荷 q 之受力。



为什么可以用电像法？因为导体表面感应导致电荷重新分布！

- 强行划分微元并积分也是可以的，但电像法更漂亮！

电磁学02-11: 有关电荷的几个问题



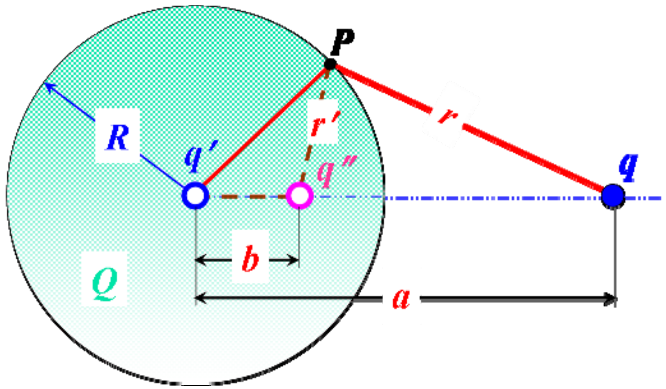
- 问题(1)：初始态导体球不带电，因此 $Q=q'=0$；
- 既然接地，球体电势 $U=0$，且球面上也满足 $U=0$；
- 电荷 q 加盟导致球面产生感应电荷(总感应电荷为0)，其分布关于中心轴线上下对称。可假想去掉导体球，加上一电像电荷 q''位于轴线，它来自地面；
- 根据解的惟一性定理，q''应使球面电势 $U=0$得到满足；考虑球面点P，有：

$$\boxed{\frac{q}{r}+\frac{q''}{r'}=0 \Rightarrow \frac{r'}{r}=-\frac{q''}{q}=const}$$

- 事实上，只要 $\Delta Pq''q' \sim \Delta qPq'$，则上述条件恒被满足；即：

$$\text{if } \frac{b}{R}=\frac{R}{a},\ \text{then } \Delta Pq''q' \sim \Delta qPq' \Rightarrow \frac{r'}{r}=\frac{R}{a}=const$$

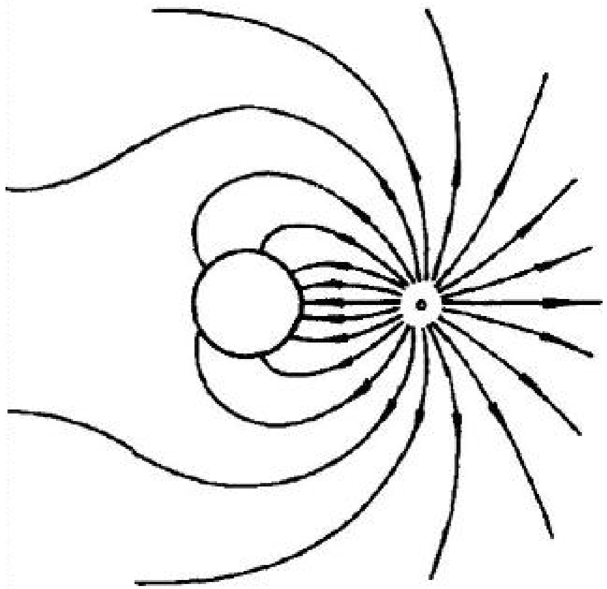
$$\therefore b=\frac{R^2}{a} \Rightarrow q''=-\frac{R}{a}q$$



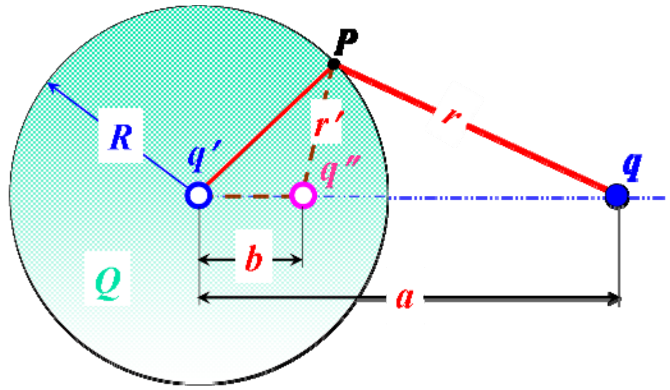
- 由 q 和 q'' 组成的电荷系在球外任一点 P 产生的电势 U 与原系统完全等价：

$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{ar'}\right)}$$

- 因为 $R<a$，所以 $|q''|<|q|$，即由 q 发出的电场线只有部分终止于球面，另外一部分终止于无穷远处；球面另一侧的正电荷也发出电场线到无穷远处。



- 右图示意出电场线分布，可见电荷 q 与导体球相互吸引的可能性跃然纸上。
- OK，我们以此为基础讨论问题(2)。



- 与问题(1)的不同是问题(2)球内电势 $U\neq 0$，待定；但球体内等势条件不变；

- 注意到电荷 q 和 q''产生的电势在球面处恒为0；

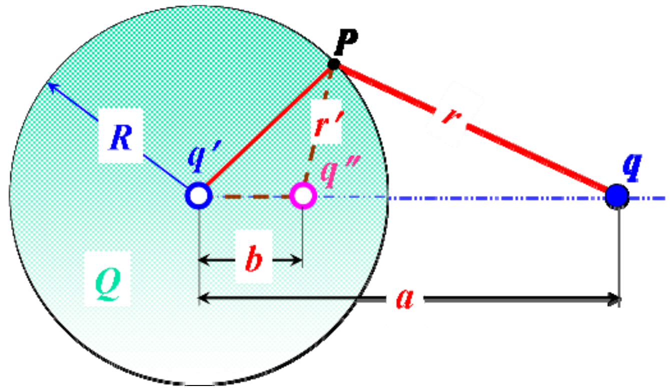
- 为保证电荷守恒，球体总电荷=Q，所以在球心假想一个电荷 $q'=Q-q''$，则问题(1)的一切求解过程不变；球面电势 U 为：

$$U=\frac{Q-q''}{4\pi\varepsilon_0 R}+\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 r'}\right)=\frac{Q-q''}{4\pi\varepsilon_0 R}+0=\frac{Q+Rq/a}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- 球外任一点的电势 U：

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{Q+qR/a}{R}-\frac{qR}{ar'}\right)$$

注意，式中 R 不再表示球面半径，而是 P 点对球心的矢径

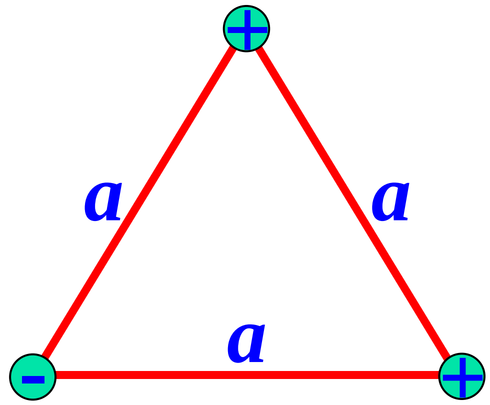


- 点电荷 **q** 所受的力：

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq'}{a^2}+\frac{qq''}{(a-b)^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{a^2}-\frac{q^2R^3(2a^2-R^2)}{a^3(a^2-R^2)^2}\right)$$

$$\text{if } a\Rightarrow R,\quad \text{then } F<0$$

- 或者 **q** 很大、或者 **Q** 很小、或者电荷 **q** 非常靠近球面，即便 **Q** 与 **q** 同号，相互吸引也成为一种时尚！
- 不要轻易推广结论：同号点电荷相互排斥是没错的，嗯！



- 【例3.1】求电荷系静电能:

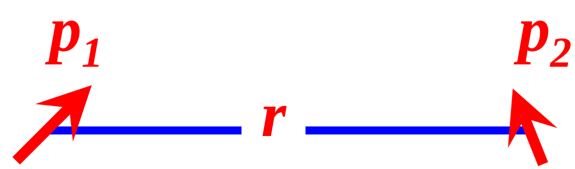
$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}q_iU_i$$

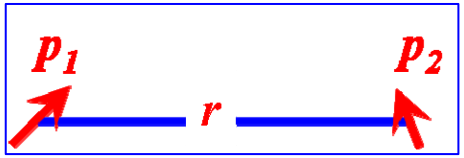
$$=\frac{1}{2}\left[q\frac{2q+(-4q)}{4\pi\varepsilon_0 a}+2q\frac{-4q+q}{4\pi\varepsilon_0 a}+(-4q)\frac{q+2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right]=-\frac{5q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

- 【例3.6】电偶极矩分别为 ***p*₁**和 ***p*₂**的两个电偶极子之静电相互作用能，假定两者相距较远：相互作用能即 ***p*₂**在 ***p*₁**场中的电势能，反之亦然

$$W=-\vec{p}_2\cdot\vec{E}_{21}\qquad \because \vec{E}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left[3(\vec{p}_1\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}_1\right]$$

$$\therefore W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left[r^2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2-3(\vec{p}_1\cdot\vec{r})\cdot(\vec{p}_2\cdot\vec{r})\right]$$





- 能否从电势角度演算？根据定义，p_2 在 p_1 产生的电场中电势能：

$$W=q_2U_{1+}+(-q_2)U_{1-}=q_2(U_{1+}-U_{1-})=q_2\Delta U_1$$

$$=q_2(\vec{\nabla}U_1)\cdot\vec{l}_2=q_2\vec{l}_2\cdot\vec{\nabla}U_1=\vec{p}_2\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)=\vec{p}_2\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{p_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$$

$$=\frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}_2\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)$$

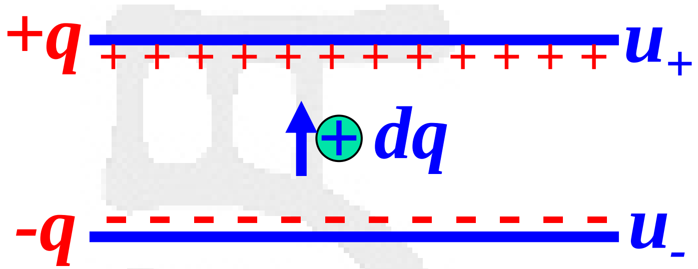
$$=\frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}_2\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\vec{e}_r+\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\vec{e}_\theta\right]=\frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{p}_2\cdot\left[-2\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{p}_2\cdot\left[-3p_1\cos\theta\vec{e}_r+p_1\cos\theta\vec{e}_r-p_1\sin\theta\vec{e}_\theta\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{p}_2\cdot\left[-\frac{3\vec{p}_1\cdot\vec{r}}{r}\vec{e}_r+\vec{p}_1\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{r})(\vec{p}_2\cdot\vec{r})}{r^2}+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\right]$$

- 【例3.9】电荷连续分布时，静电能量有三组方法计算。说明各自物理意义并以平行板电容器为例计算静电能量(电容器C、Q)

$$W=\begin{cases}\int u\,dq & (1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}\int U\,dq & (2)\\[2mm] \dfrac{1}{2}\iiint \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV=\dfrac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 E^2\,dV & (3)\end{cases}$$



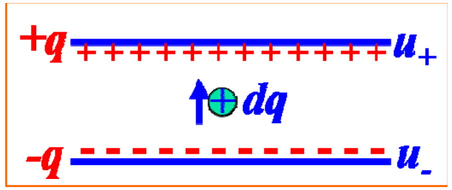
- (1) 外力将 dq 从电势 $u=0$处移到 u 处做功，数值上等于静电能增量 dW:

$$dW=u_-d(-q)+u_+dq=(u_+-u_-)dq=udq$$

$$\because q=Cu,\quad \therefore W=\frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

将$-q$从$u=0$移动到电势为u_-的电极上，将$+q$从$u=0$移动到电势为u_+的电极上。这两个过程同时进行，形成如上所示的电荷分布！这个过程不是唯一的。

电磁学02-12: 静电能量的计算问题



- (2) 电荷分布达到静态，空间各处电荷感受电场，即具有电势能。系统全部电荷所具有电势能之和的一半：

$$\text{for dispersed charges: } W=\frac{1}{2}\sum_i q_i U_i$$

$$\text{for capacitor: } W=\frac{1}{2}\int U dq=\frac{1}{2}\left(\int_0^{Q} U_+ dq+\int_0^{-Q} U_- dq\right)=$$

$$=\frac{1}{2}Q(U_+-U_-)=\frac{1}{2}UQ=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- (3) 空间电场的能量密度为 ***dW***：

$$w=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\Rightarrow dW=wdV=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV \qquad \because E=U/d,\ C=\varepsilon S/d$$

$$\therefore W=\frac{1}{2}\iiint \vec{E}\cdot\vec{D}dV=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon E^2 dV=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- 【例3.12】电荷量Q均匀分布在半径为R的球体内，求静电能量。
- (1) 外力做功计算：

for an sphere with radius r, $u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Rightarrow dW=udq=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}dq$

$$\because q=\frac{4\pi r^3}{3}\rho,\quad \therefore dq=4\pi r^2\rho dr\Rightarrow dW=\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 r^4 dr$$

$$W=\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2\int_0^R r^4 dr=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}\Leftarrow\rho=Q/4\pi R^3$$

- (2) 静态的静电能量计算：对虚拟的半径为 **r** 的球，求其电势 U_r；再求 dW；

$$\begin{cases}\vec{E}_i=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\ \text{ if } r\le R\\[2ex] \vec{E}_0=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}\ \text{ if } r\ge R\end{cases}\Rightarrow U=\int_r^\infty\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)\Rightarrow W=\frac{1}{2}\int_0^R Udq$$

- **(3) 利用电场能计算:**

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\iiint_{0\to R}\vec{E}\cdot\vec{D}dV+\frac{1}{2}\iiint_{R\to\infty}\vec{E}\cdot\vec{D}dV=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}\Leftarrow\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}}$$

- 【例3.22】电荷量Q均匀分布在半径为*a*的球体内，电荷量-Q均匀分布在半径为b的同心球面上。求静电能量。

- (1) 根据对称性与高斯定理：

$$\vec{E}=\begin{cases}\vec{E}_1=\dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, & r<a\\ \vec{E}_2=\dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, & a<r<b\\ \vec{E}_1=0, & r>b\end{cases} \Rightarrow W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V E^2 dV=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_0^a E_1^2\cdot 4\pi r^2 dr\\ +\\ \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_a^b E_2^2\cdot 4\pi r^2 dr\end{cases}$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{5a}-\frac{1}{2b}\right)$$

- (2) 均匀带电球体本身的静电能(自能，恒为正)为：

$$\boxed{W_1 = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}}$$

- (3) 均匀带电球壳本身的静电能(自能，恒为正)为：

$$\boxed{W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}}$$

- (4) 均匀带电球体与均匀带电球壳的静电交互作用能(可正可负)为：

$$\boxed{W_3 = (-Q)U_a = -Q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 b} < 0}$$

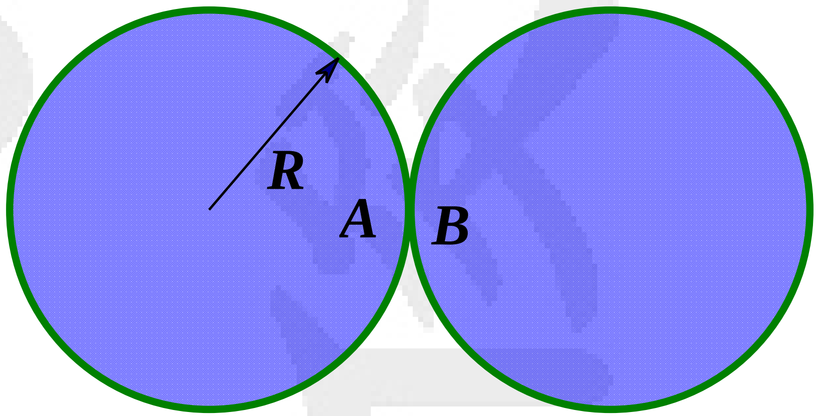
- (5) 系统静电能为上述三项能量之和：

$$\boxed{W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{5a} - \frac{1}{2b}\right)}$$

- 理解p.92的三个补充例题，至少要理解【例1、2】
- 作业：2.16，2.17，2.21，2.25，2.29

- 【例3.15】论证导体球的电荷只有全部都分布在球面时，电场的能量才最小
- 【例3.21】电荷量 Q 均匀分布在一球壳内，壳体的内外半径为 a 和 b，求这个电荷系统的电势能与电场能量
- 【例3.24】一金属球外有同心的金属球壳，两者都带电，如果用导线将两者连接起来，证明系统静电能量如何变化
- 【例3.25】半径为R的一个雨点(导体)，带电Q。令其破碎为两个相同的雨点并分开很远，试问静电能量改变多少？
- 【一题35】两个半径均为 R 的导体球相互接触形成一孤立导体，试求此孤立导体的电容。

- 【一题35】两个半径均为 ***R*** 的导体球相互接触形成一孤立导体，试求此孤立导体的电容。



$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=8\pi\varepsilon_0 R\cdot\ln 2}$$

张又天、张朴涵