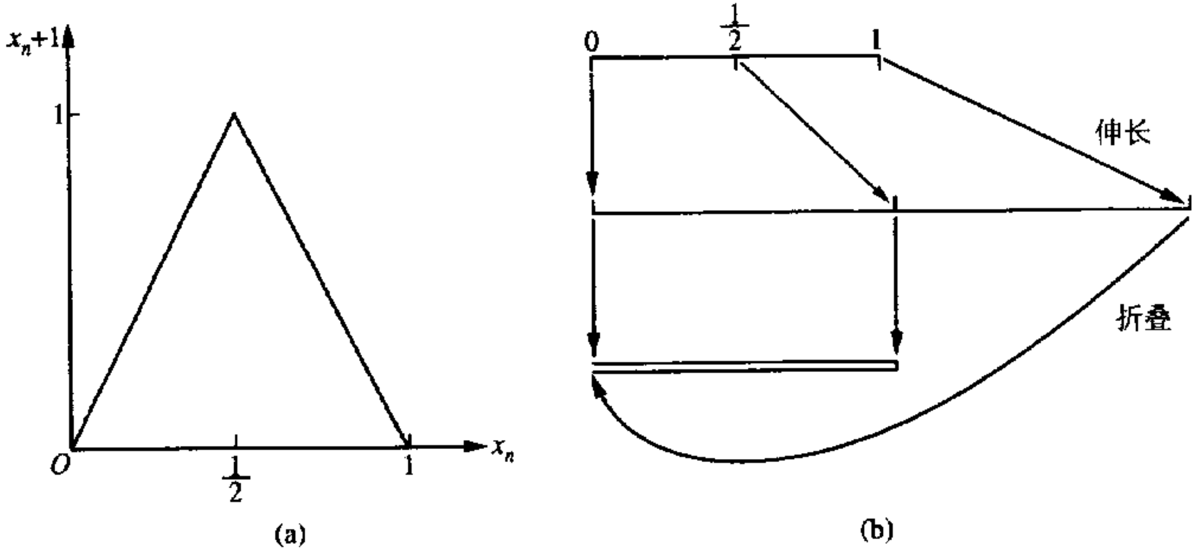
混沌的几何特征：

- 通过前面的一系列具体实例、李雅普洛夫指数和吸引子形态的分析，我们明白非线性系统的演化来自于驱动、耗散和非线性的共同作用。
- 驱动使系统离开原来状态，耗散保持系统整体结构，非线性使系统具有几何与拓扑上的多样性。
- 从几何学上理解混沌结构是有价值的。
- 从简单例子开始：

- 帐篷映射： $$x_{n+1}=T(x_n)=\begin{cases}2x_n, & 0\le x_n\le 1/2\\ 2-2x_n, & 1/2<x_n\le 1\end{cases}$$
- 锯齿映射： $$x_{n+1}=S(x_n)=\begin{cases}2x_n, & 0\le x_n<1/2\\ 2x_n-1, & 1/2\le x_n\le 1\end{cases}$$
- 这两类映射具有局域演变的两个特点：伸长与折叠。
- 帐篷映射第一半是驱动过程，具有伸长性质；后一半是耗散反馈过程，将伸长又折叠回来。构成局域的分叉甚至是混沌。
- 几何示意图如下：

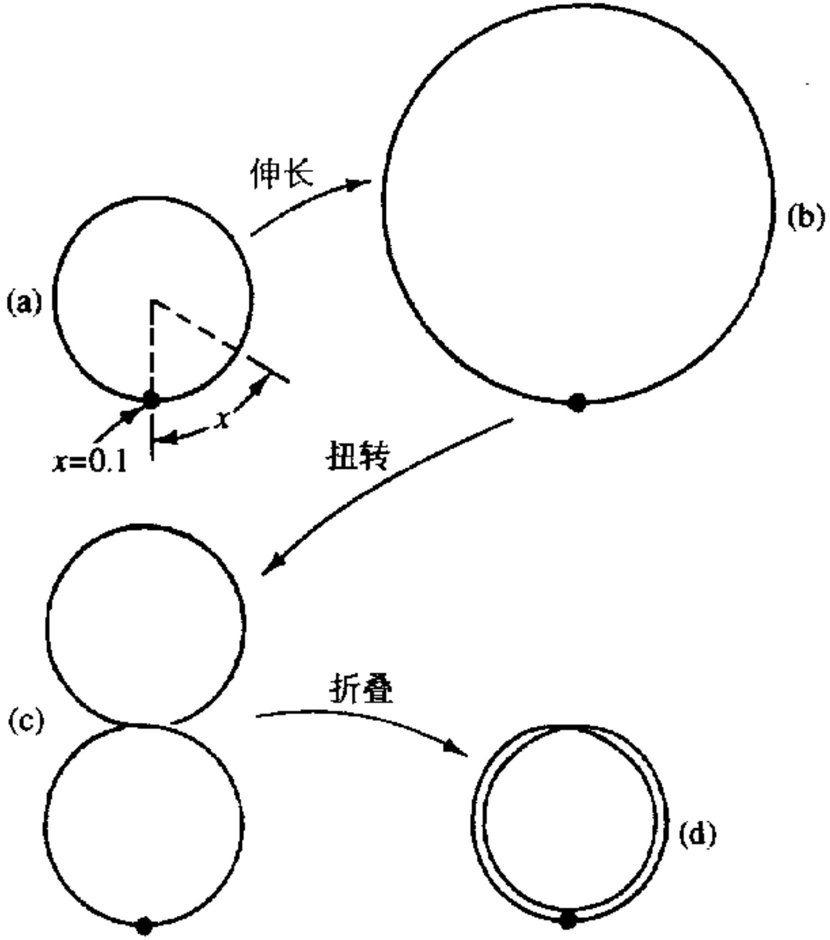
非线性物理：混沌物理



$$x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & 0 \le x_n \le 1/2 \\ 2 - 2x_n, & 1/2 < x_n \le 1 \end{cases}$$

- 锯齿映射显得更为有趣：将 **x** 看成角变量，映射是圆上的映射，**x** 从 **0** 到 **1** 对应于旋转一周，映射前一半是圆周伸长一倍，后一半将圆周扭转成 **8** 字型，再折叠成近似重合的一个圆：

非线性物理：混沌物理



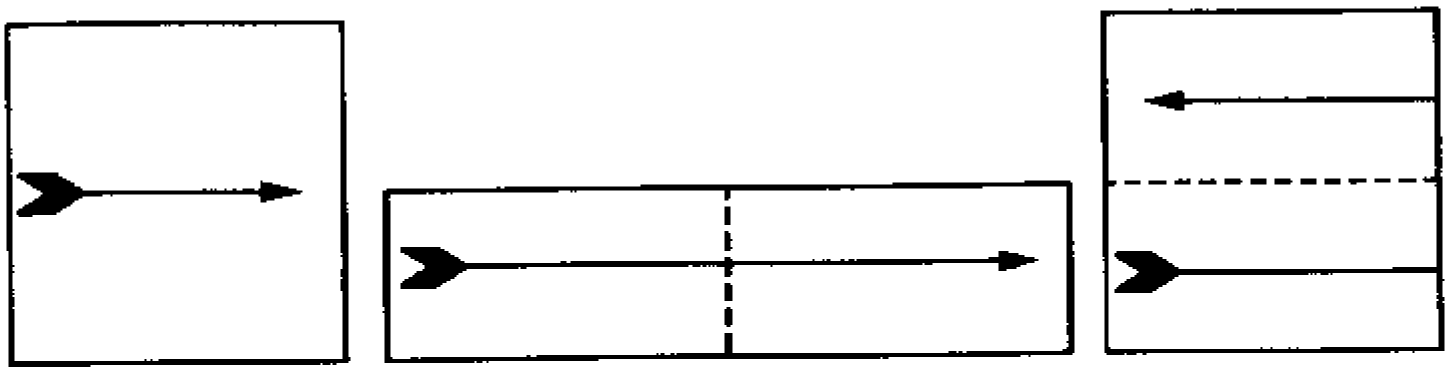
$$x_{n+1} = S(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & 0 \le x_n < 1/2 \\ 2x_n - 1, & 1/2 \le x_n \le 1 \end{cases}$$

- 可以看到，从几何上观察映射过程对应于系统在相空间中的伸长－扭转－折叠过程，具有明显几何构造特征。
- 所以，非线性动力学系统在广域上是稳定的，在局域上是失稳的。
- 对于二维及高维映射，有类似行为：

- 考虑折叠**Baker**映射：

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n, \\ y_{n+1} = y_n / 2, \end{cases} \quad 0 \le x_n < 1/2, \ \ 0 \le y_n \le 1;$$

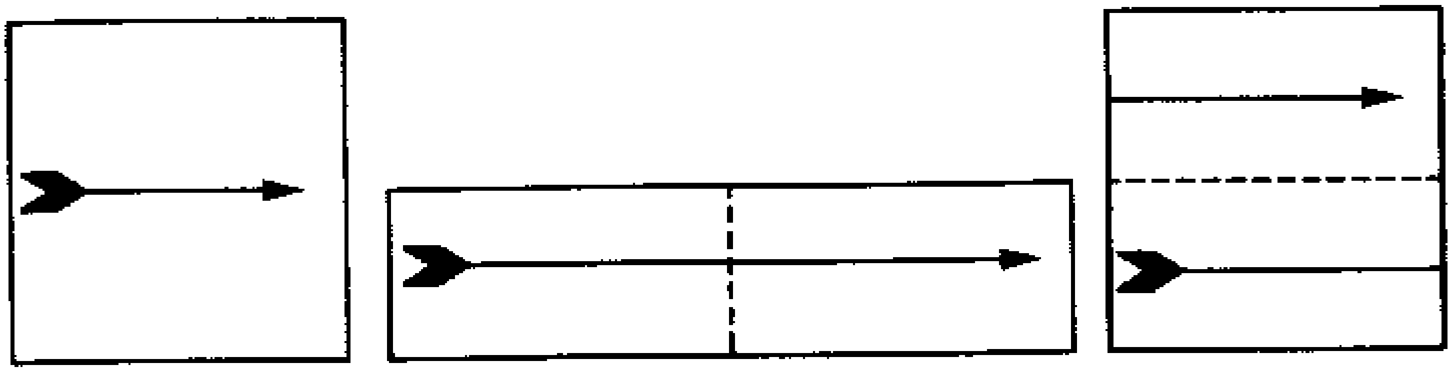
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2 - 2x_n, \\ y_{n+1} = 1 - y_n / 2, \end{cases} \quad 1/2 \le x_n < 1, \ \ 0 < y_n \le 1$$



(a) 折叠映射

- 考虑堆积Baker映射：

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) \Rightarrow \begin{cases} (2x_n, y_n/2), & 0 \le x_n \le 1/2 \\ (2x_n - 1, (1+y_n)/2), & 1/2 \le x_n \le 1 \end{cases}$$



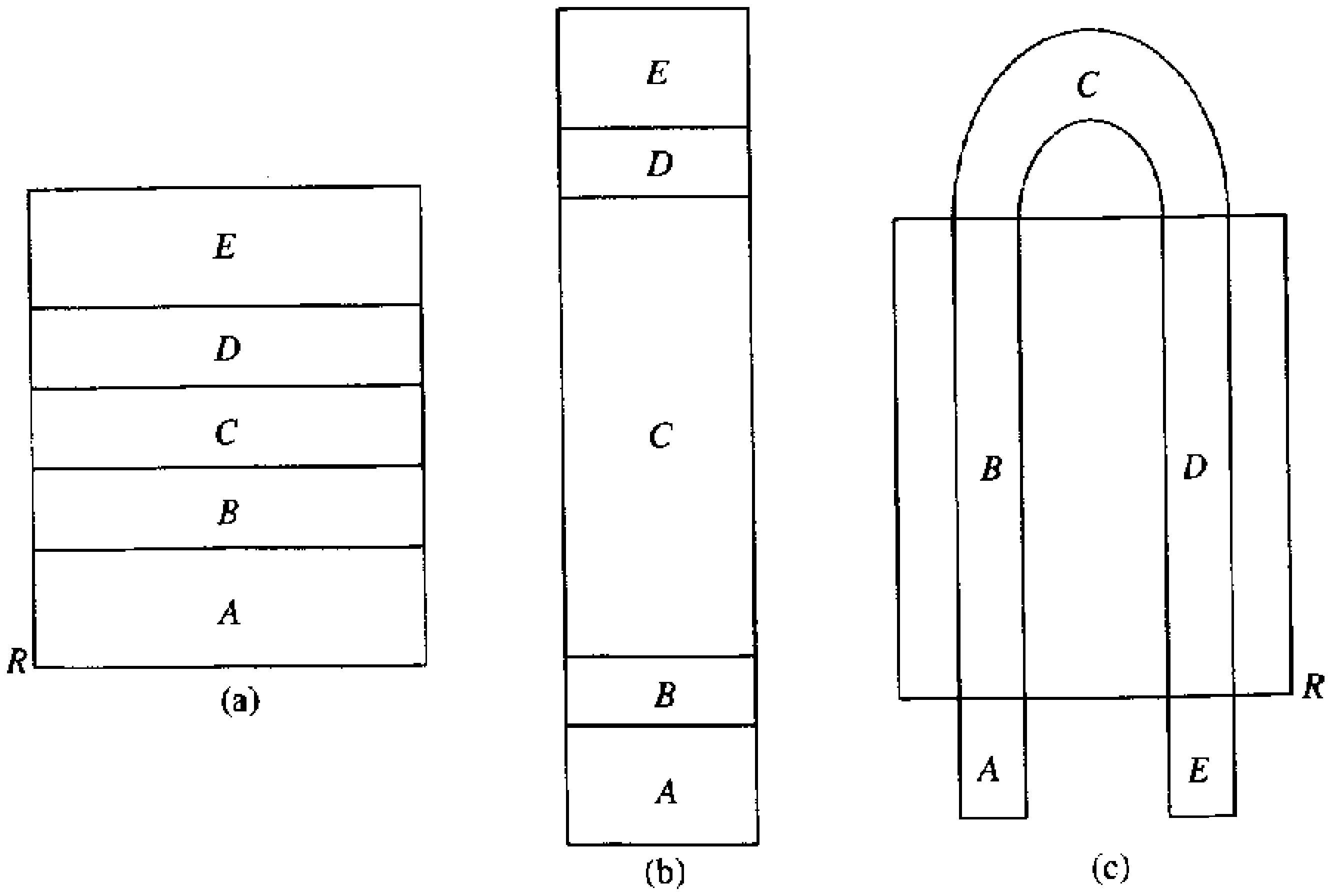
(b) 堆积映射

- 和折叠Baker映射的区别在于映射后上下两个半块是堆在一起，通量加倍了。

- 再看Small马蹄映射：

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) \Rightarrow \begin{cases} (x_n/3,\ 3y_n), & 0 \le y_n \le 1/3 \\ (1-x_n/3,\ 3(1-y_n)), & 2/3 \le y_n \le 1 \end{cases}$$

- 这一过程通过伸长和折叠变成了一个马蹄。



非线性物理：混沌物理

- 除了伸长、折叠、扭转之外，还有剪切过程存在，一般发生在三维情况下： $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (2x_n,\ y_n/2,\ f(y_n/2)), & 0 \le x_n < 1/2 \\ (2-2x_n,\ 1-y_n/2,\ f(1-y_n/2)), & 1/2 \le y_n \le 1 \\ f(y) = y - 1/2 \end{cases}$$

- 先是伸长，然后扭转，再是剪切。
- 非线性系统演化是伸长、折叠、扭转、剪切，传统线性动力学只是岿然不动或者原地兜圈。

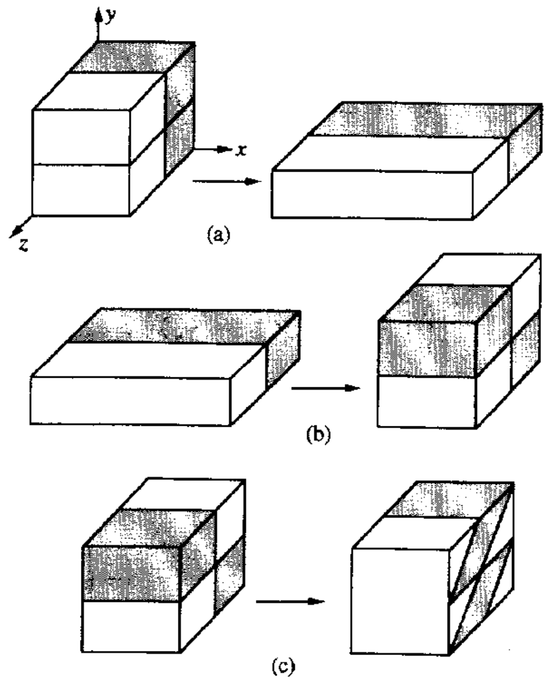


图 2.8　伸长—折叠—剪切映射

局域失稳导致分形特征：

- 从上述几何特征看出混沌系统首先要求局域失稳和广义稳定。先讨论广域稳定的边界几何特征。
- 非线性混沌动力学系统的奇异吸引子实际上就是其广域稳定性的表现。很多情况下，这类广域边界是分形结构。
- 从最经典的**Julia**和**Mandelbrot**迭代映射开始讨论问题。
- **Julia**集取名于法国数学家**Gaston Julia**，他在**1915**年开始研究简单复平面的迭代问题，在**1918**年发表一篇著名论文。当时他研究的是一个复杂的多项式：$z^4 + z^3/(z-1) + z^2/(z^3 + 4 z^2 + 5) + c$。

- 我们研究的Julia迭代要简单些：一个复平面，$z=x+iy$。考虑迭代 $z_{n+1}= z_n^2+c$，其中c为一个复常数，z_0是复平面上每一点。
- 迭代的图形变化由 c 的值决定。
- 从更一般角度看，Julia集：$z_{n+1}=f(z_n)$，这里$f(z)$为非线性函数。
- 通常使用的Julia函数包括：$z_{n+1}=c\sin(z_n)$, $z_{n+1}=c\exp(z_n)$, $z_{n+1}=c\, i\cos(z_n)$, $z_{n+1}=c\, z_n(1-z_n)$。
- 我们现在来考虑最著名的Julia集如何计算：$z_{n+1}=z_n^2+c$。

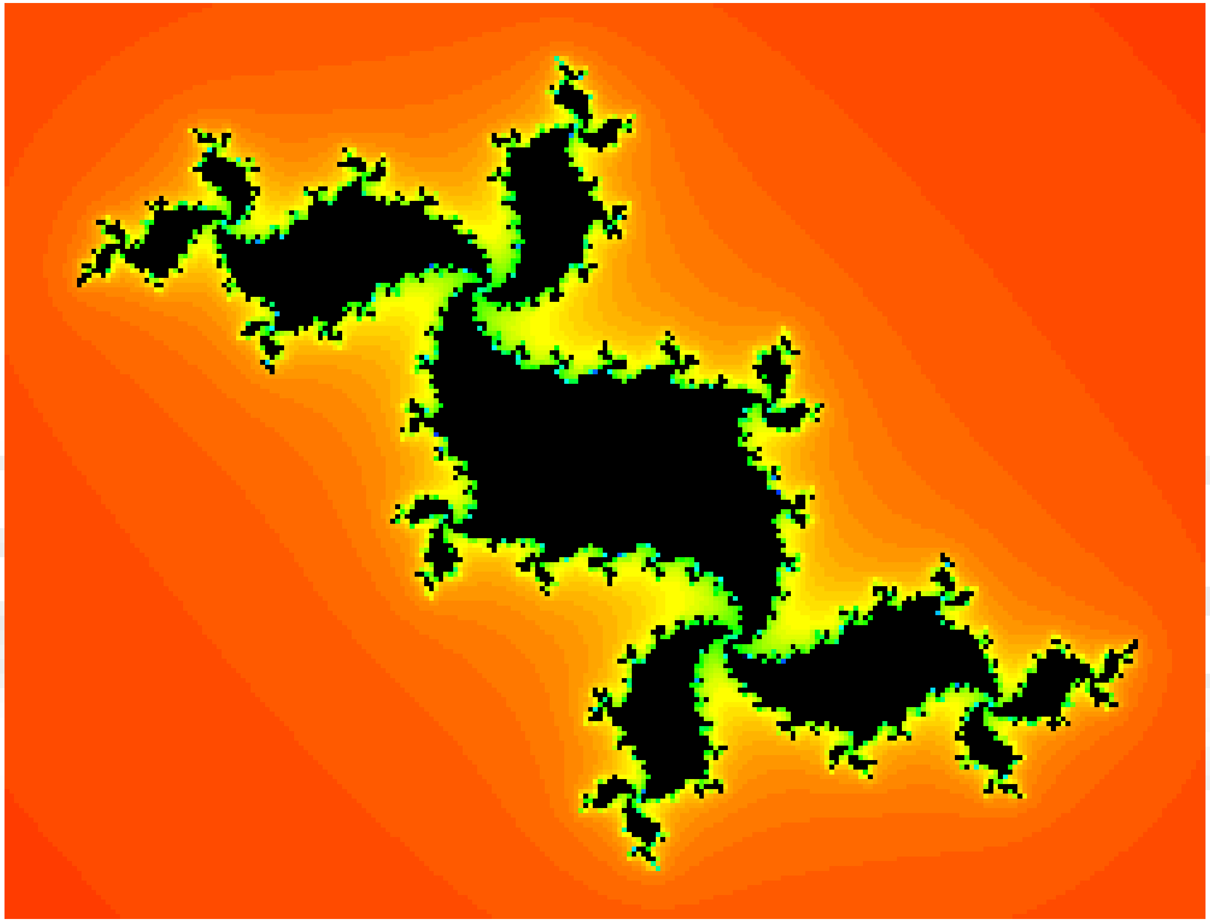
- 将要考虑的复平面画成很多方格子，相当于是一个正方点阵，每一个格点的坐标 (x,y) 作为 z_0 的值，这样给定一个 c 值，开始对每一个 z_0 进行迭代计算，得到一个迭代序列。
- 如果迭代结果是发散的，则这个 z_0 点就不画在平面内，如果是不发散的，这个 z_0 点将画在平面上，由此就形成图形。
- 确定一个序列是否收敛似乎不那么显而易见。一般考虑迭代超过一个很大的数，就认为是发散。而长时间不发散就认为是收敛。
- 关于发散与否的判断进行得越准确，且所取的点阵格点越细小，所产生的图形细节层次就越深，才有无限镶嵌奇异吸引子层次。

非线性物理：混沌物理

- 也可以计算每一点收敛的速度，将这些速度分成几个区间，对应不同速度区间的迭代序列标注上不同颜色，就有了美丽的图形。

- 关于Julia集的演示可见
  http://www.unca.edu/~mcmcclur/java/Julia/

- 下面我们先享受一下几张美丽图形，它们有些不是前面介绍的简单Julia集图形，而是更复杂一些的Julia集图形。

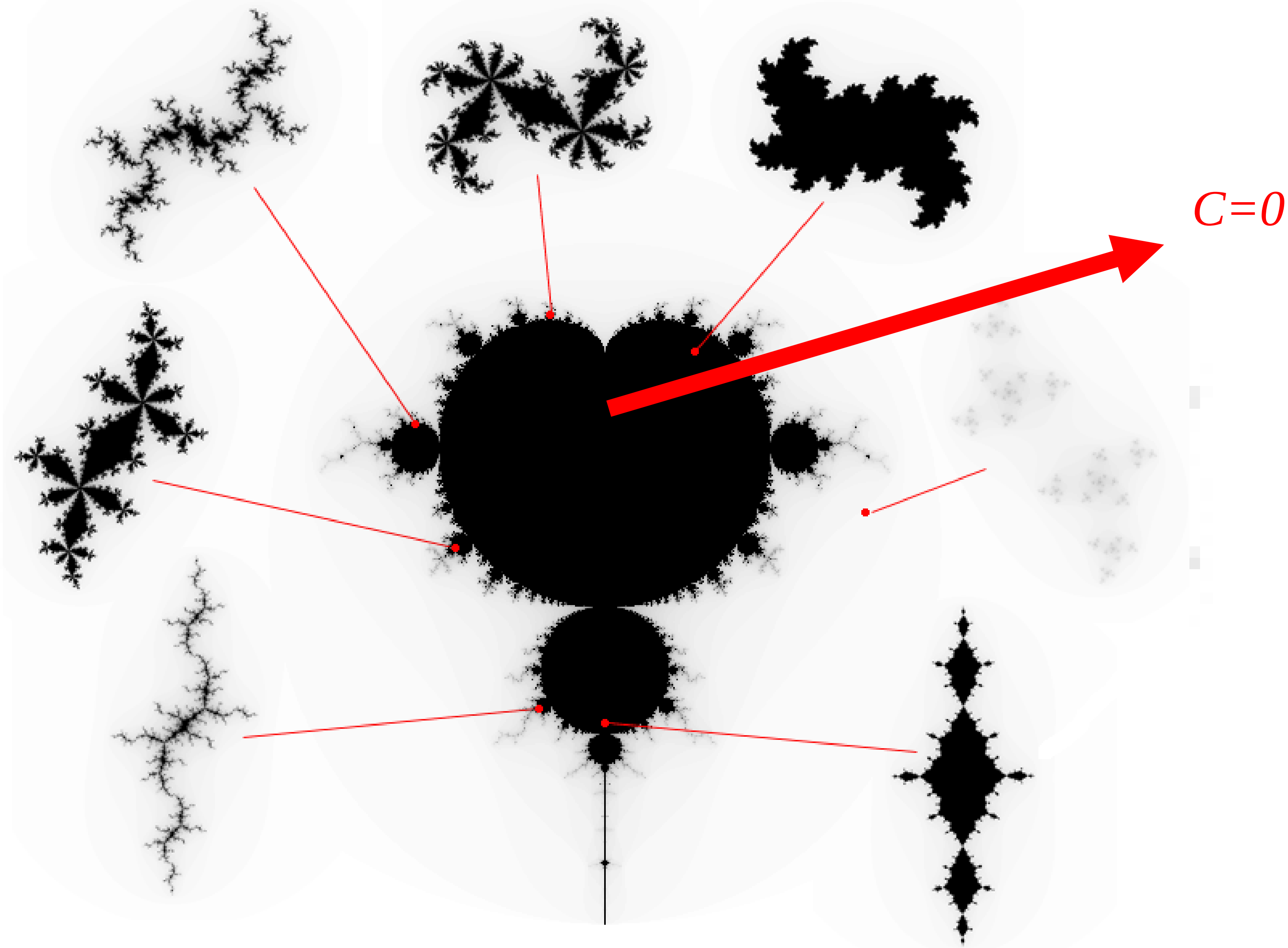


Julia集：

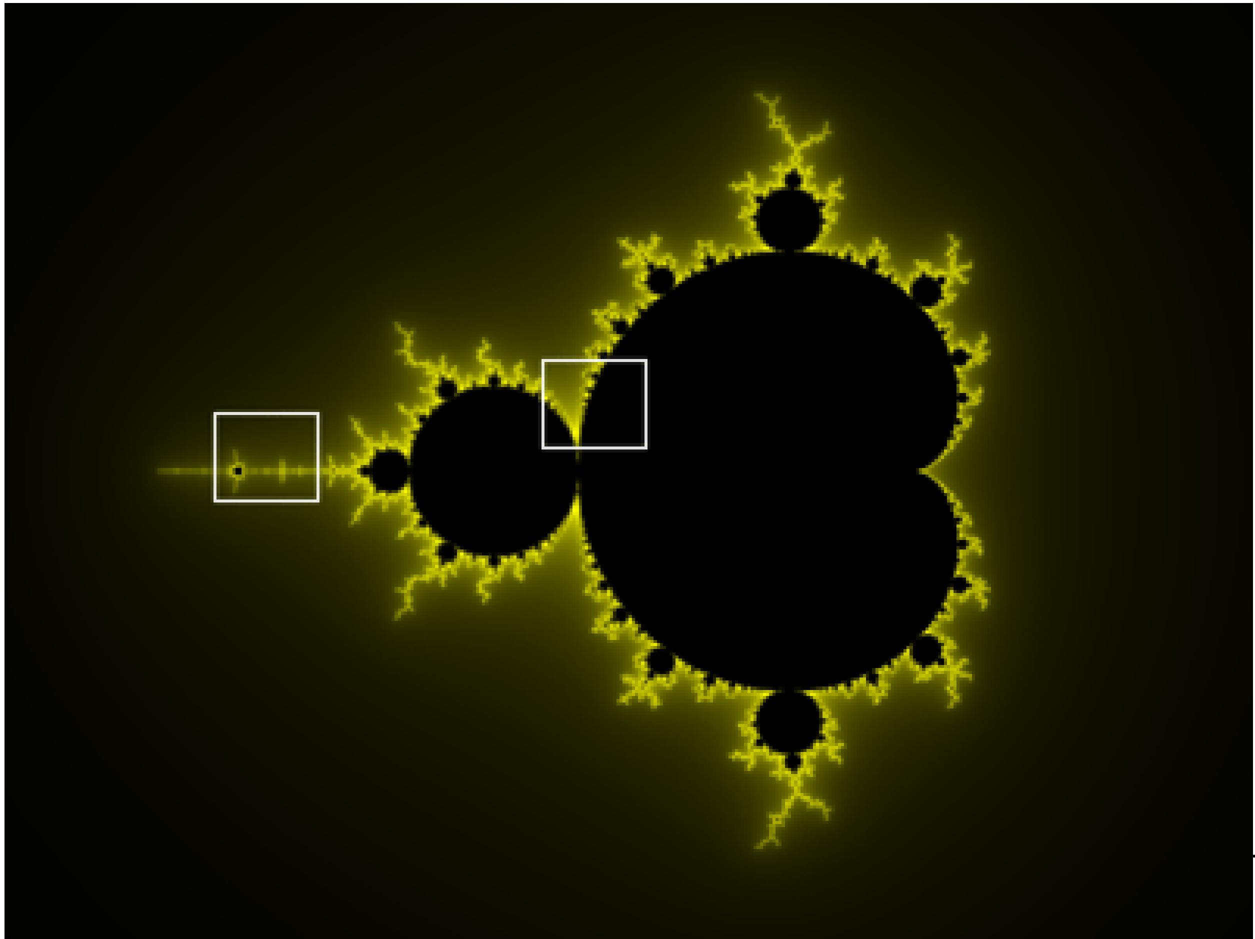
图形具有自相似性，也是分形

- Julia集的图形可以分为两类，一类图形是相互连通的，没有断裂，为**Fatou set**；而另外一类图形是一些孤岛分布在平面，无论你如何放大其中的一个孤岛，里面的结构仍然是相互分离的一系列孤岛，为**Cantor sets** (**Fatou dust**)。
- 如果将对应于前一类的c值在复平面全部画出来，则对应的图形叫做Mandelbrot集。如下图所示。
- Julia集就是c保持不变时的z空间非发散图形，每一个c对应一个Julia集。

非线性物理：混沌物理



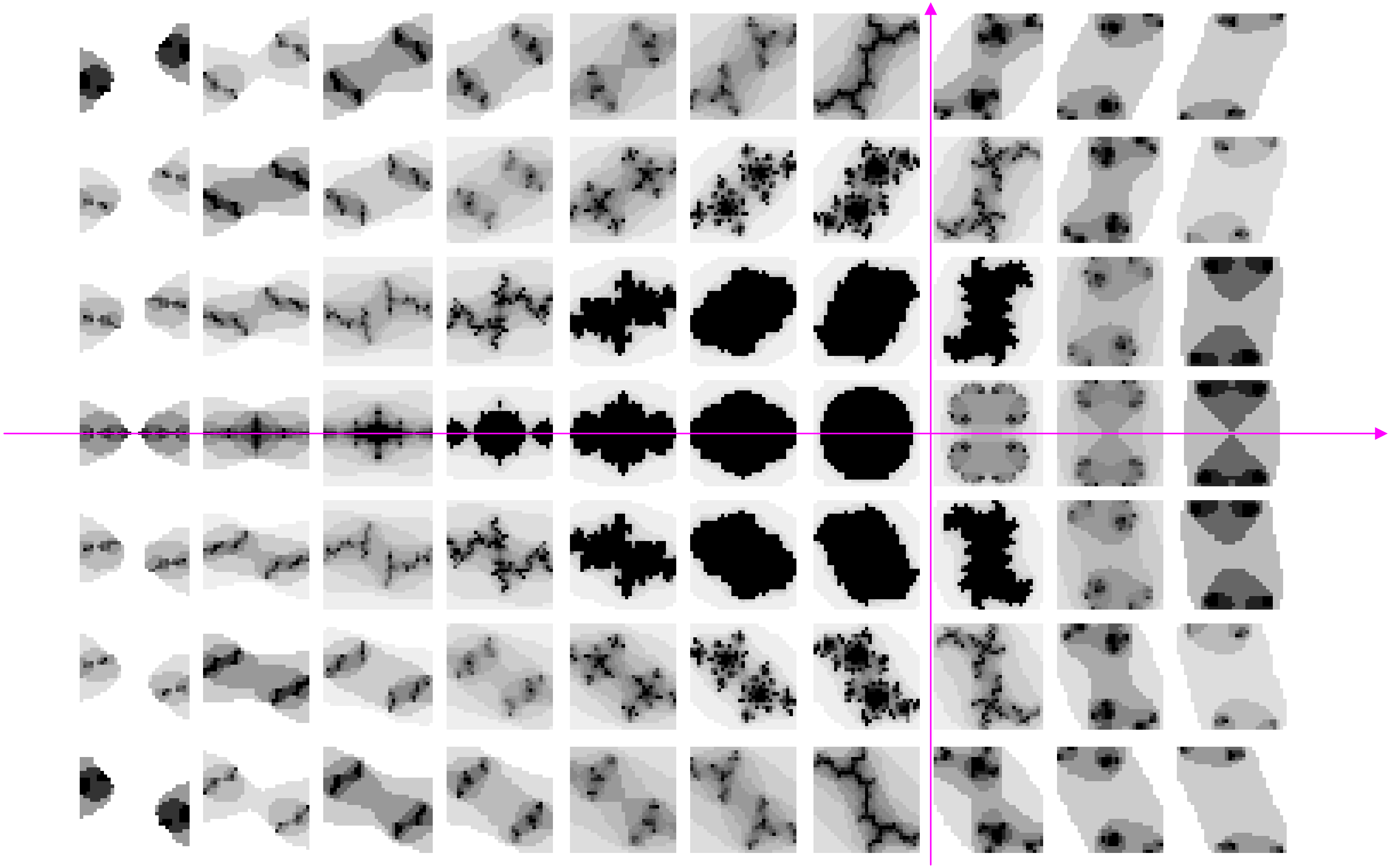
- Mandelbrot集是c空间的图形，对应的Julia集是相互连通的c空间区域构成Mandelbrot集。



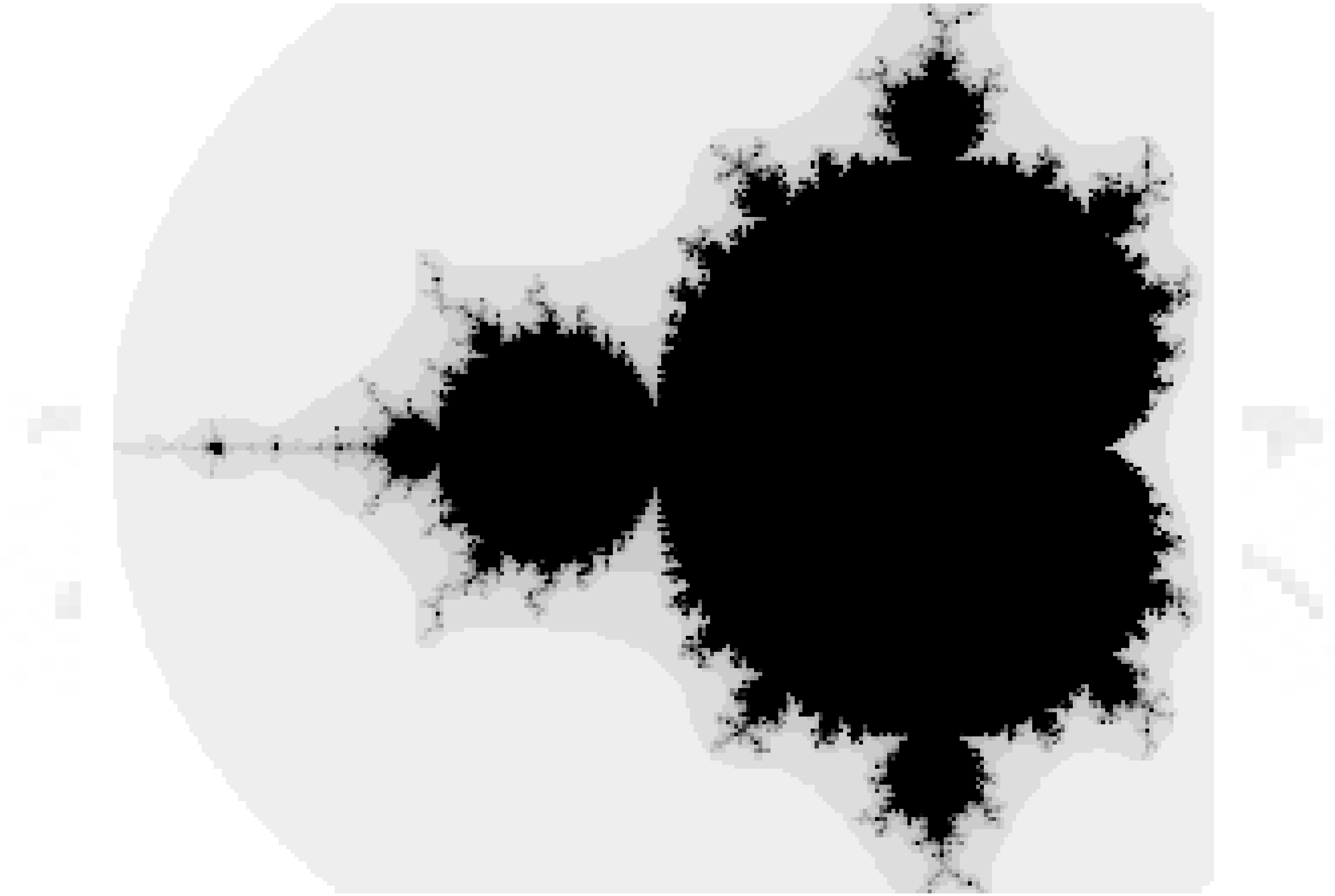
Mandelbrot集

图形具有自相似性，也是分形。

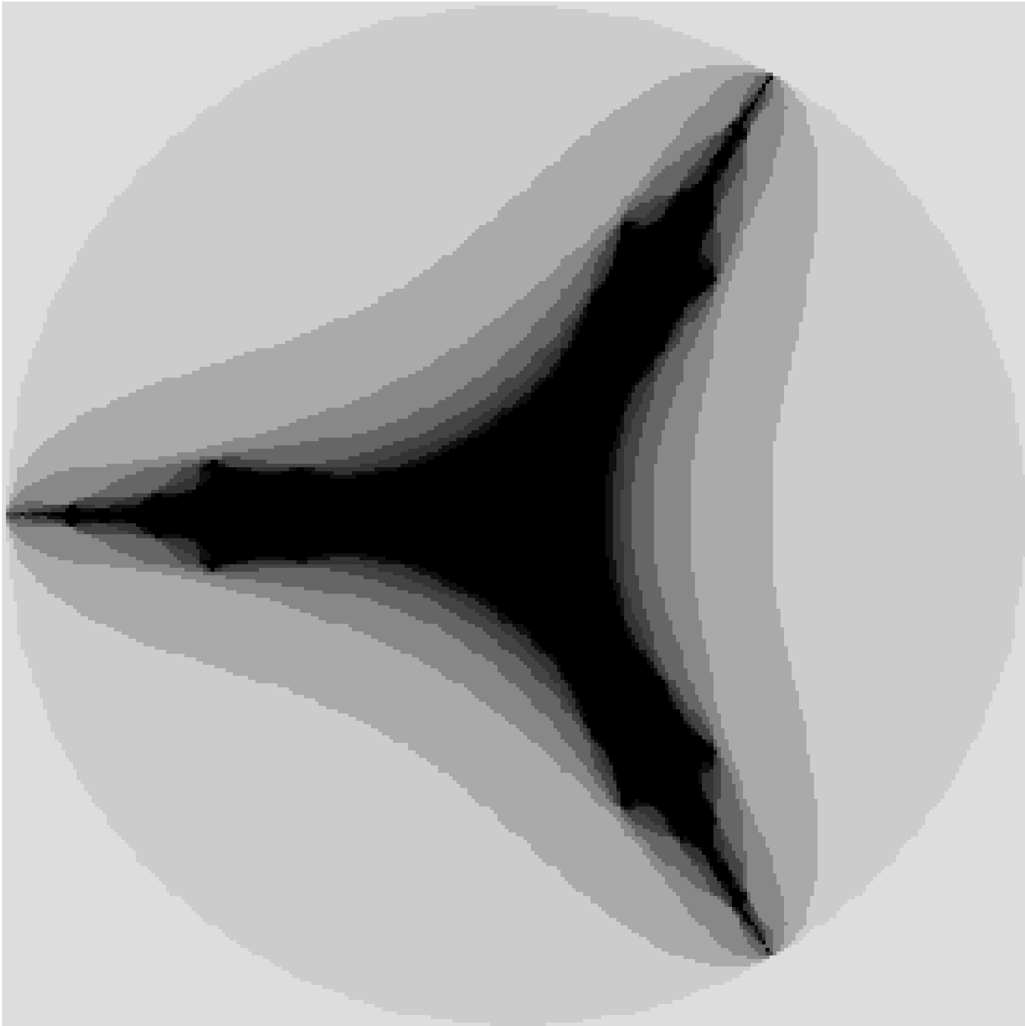
- Julia集的另外一个性质是关于c的取值的：如果c是一个实数，产生的Julia集图形关于x轴对称，否则产生的图形具有至少180度旋转对称。
- 的确是精彩而又玄妙的玩意！^_^
- 下面再展示一些。



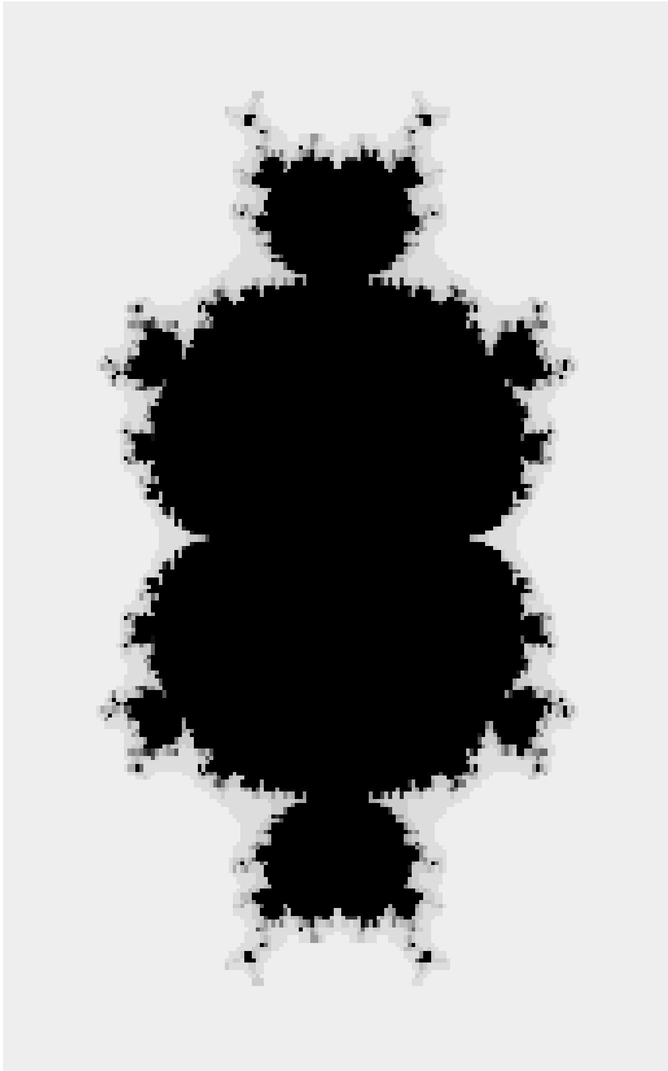
在c空间看对应的Julia集的图形一览：坐标原点c=0



Mandelbrot set (***M*(2):** z --> $z^2 + c$)

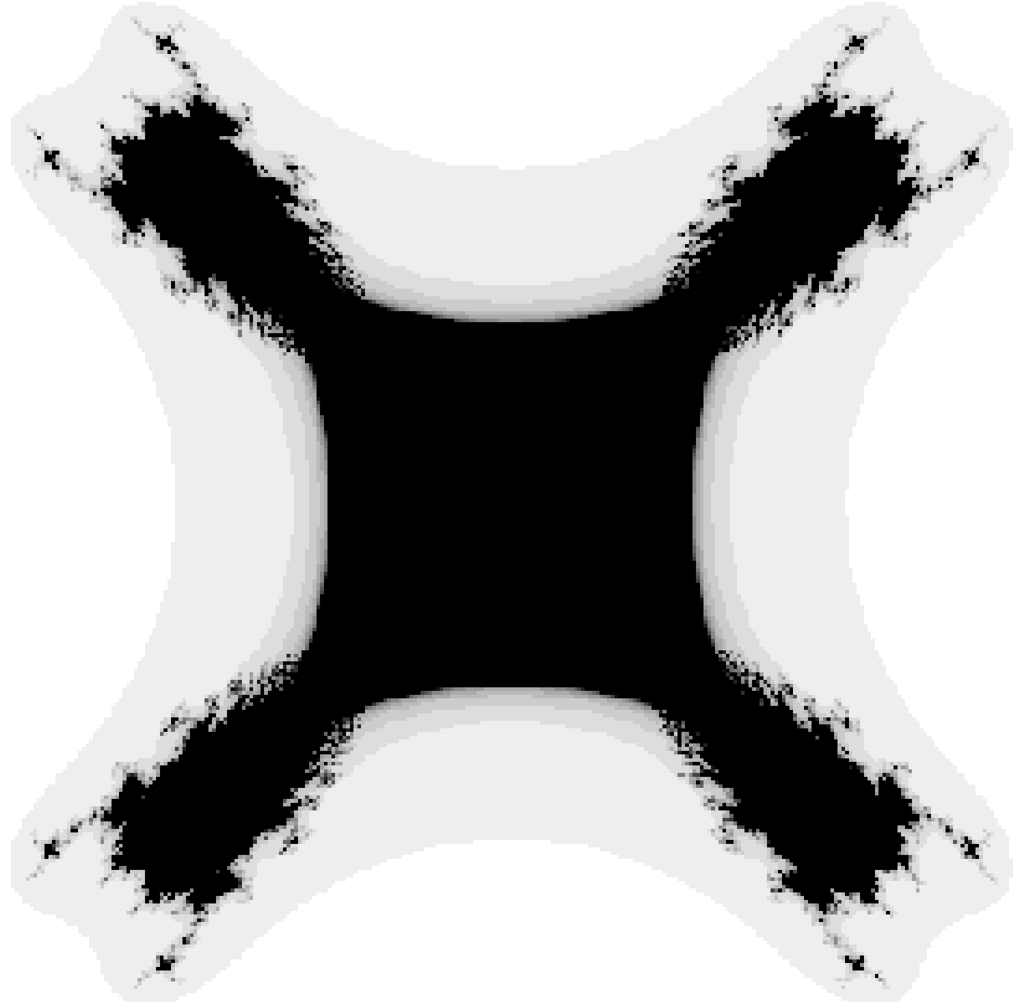


Mandelbrot set (***M**(2)**: ***z*** **-->** ***z**²** **+** ***c***)：***为共扼**

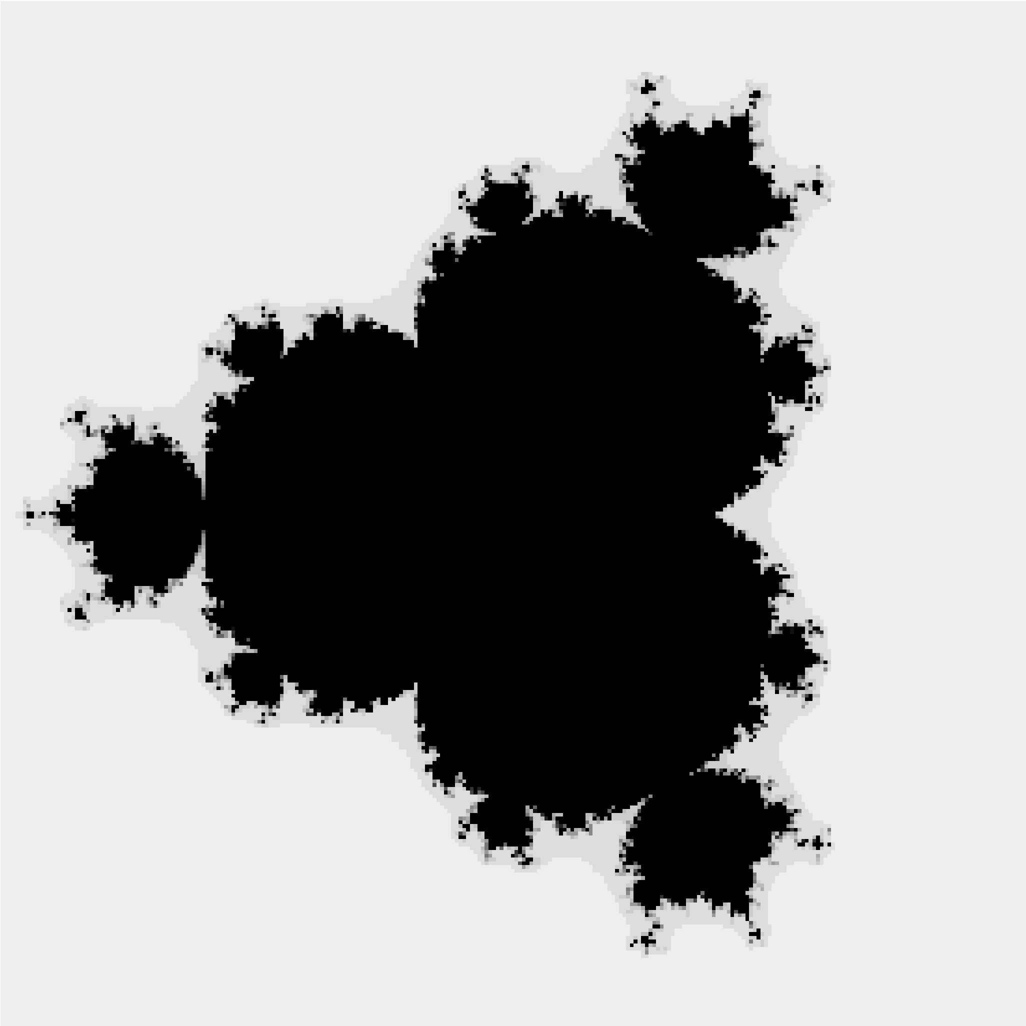


Mandelbrot set (***M*(3):** $z \dashrightarrow z^3 + c$)

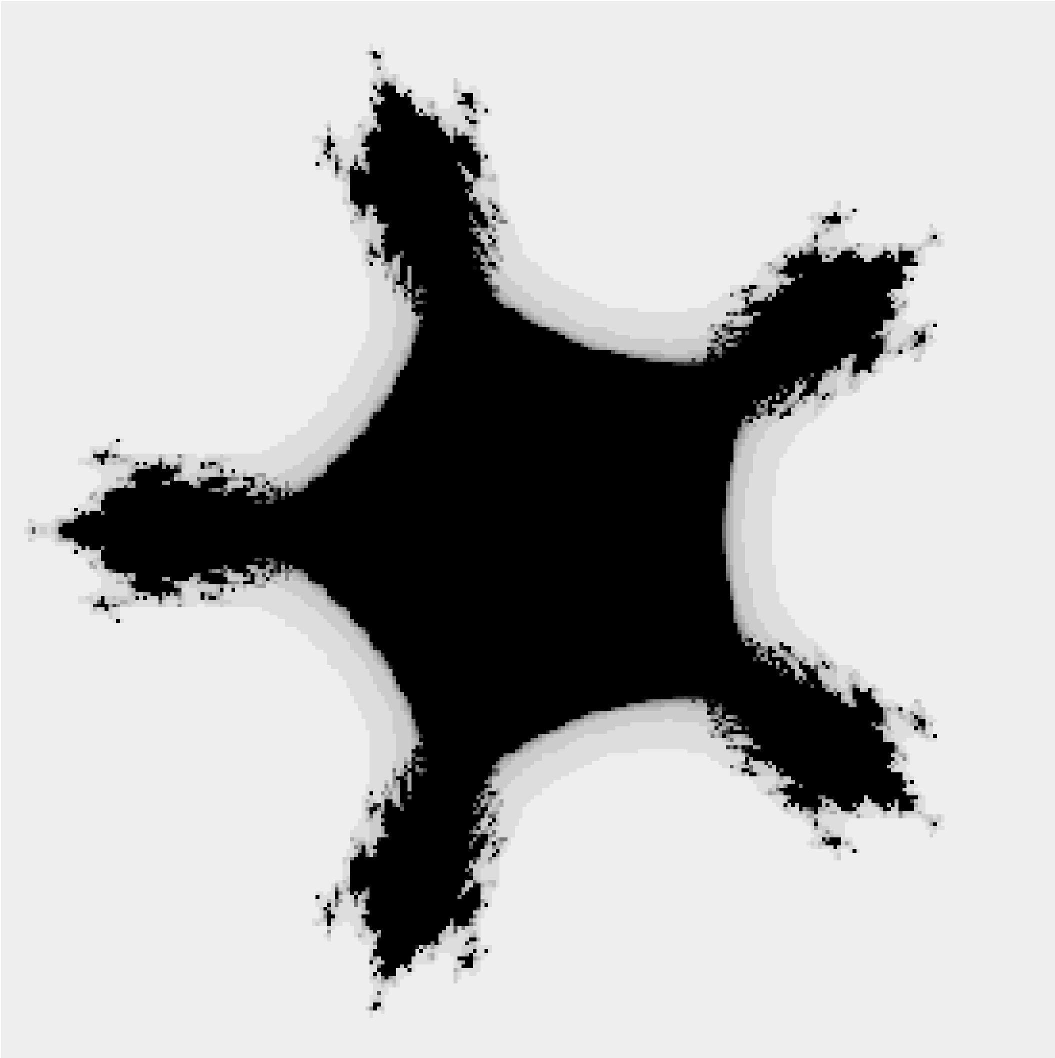
非线性物理：混沌物理



Mandelbrot set (***M**(3)**: $z \to z^{*3} + c$)：　*为共扼

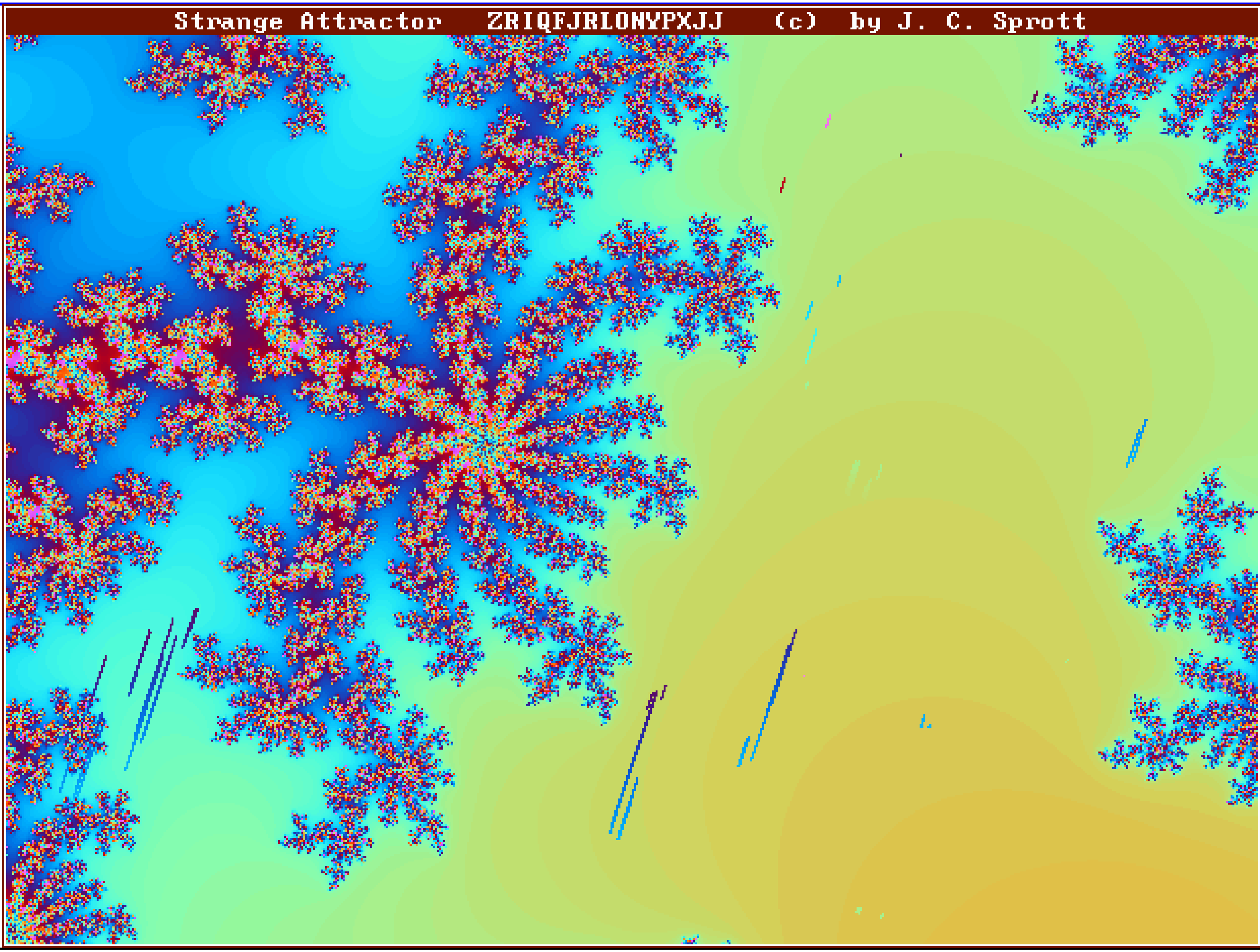


Mandelbrot set (***M*(4):** $z \dashrightarrow z^4 + c$)

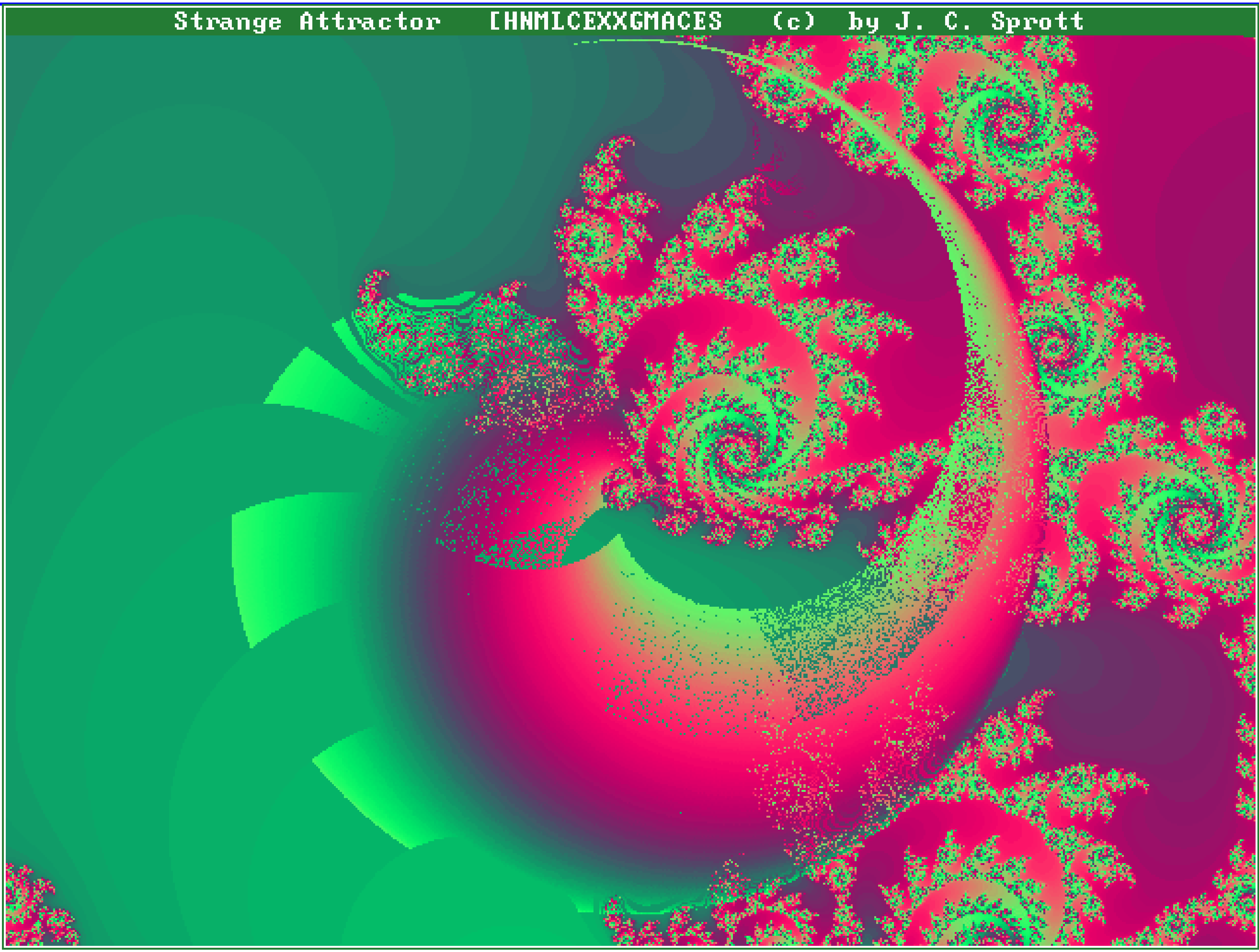


Mandelbrot set ($M^*(4)$: $z \dashrightarrow z^{*4} + c$)： *为共扼

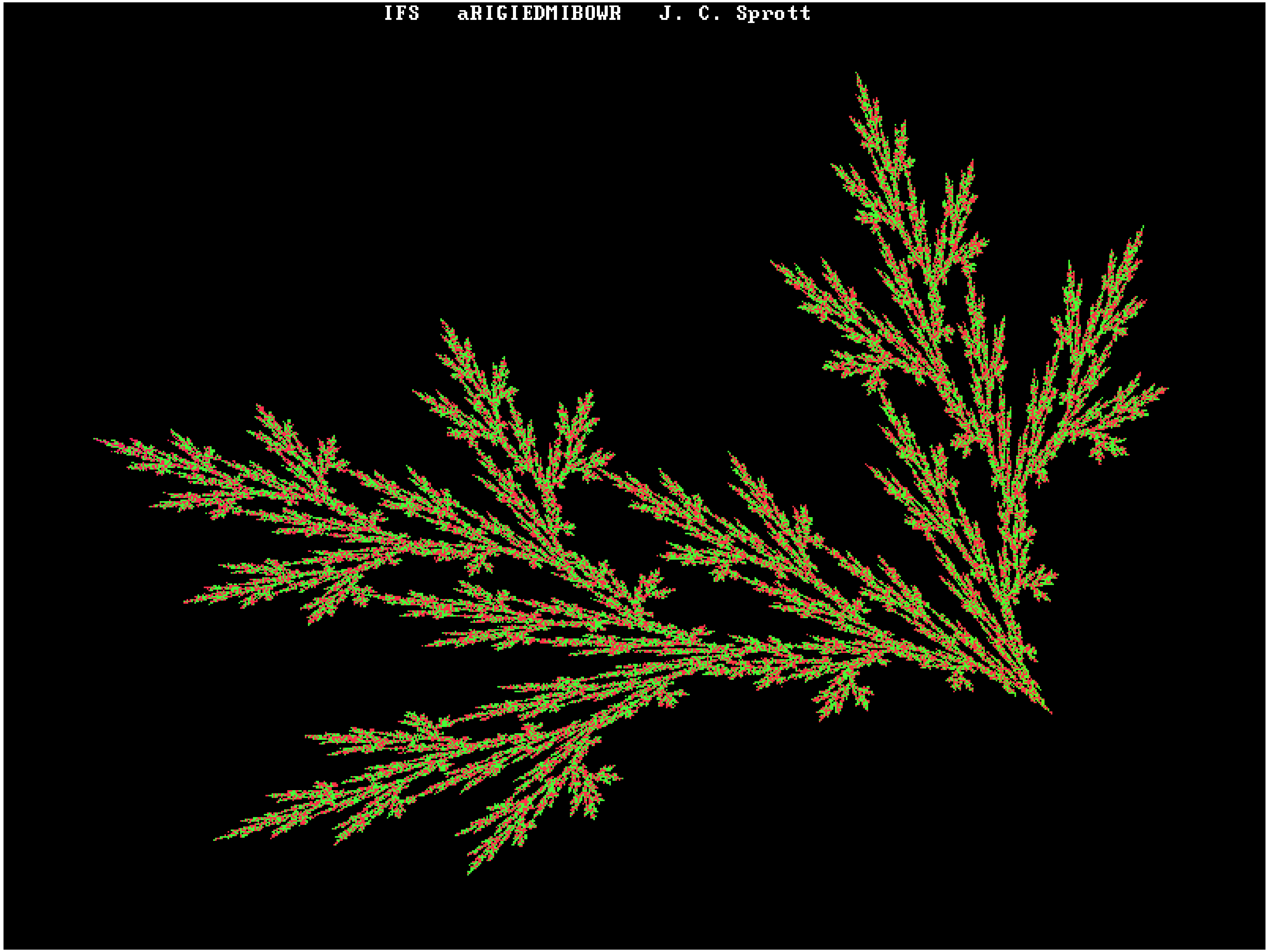
非线性物理：混沌物理



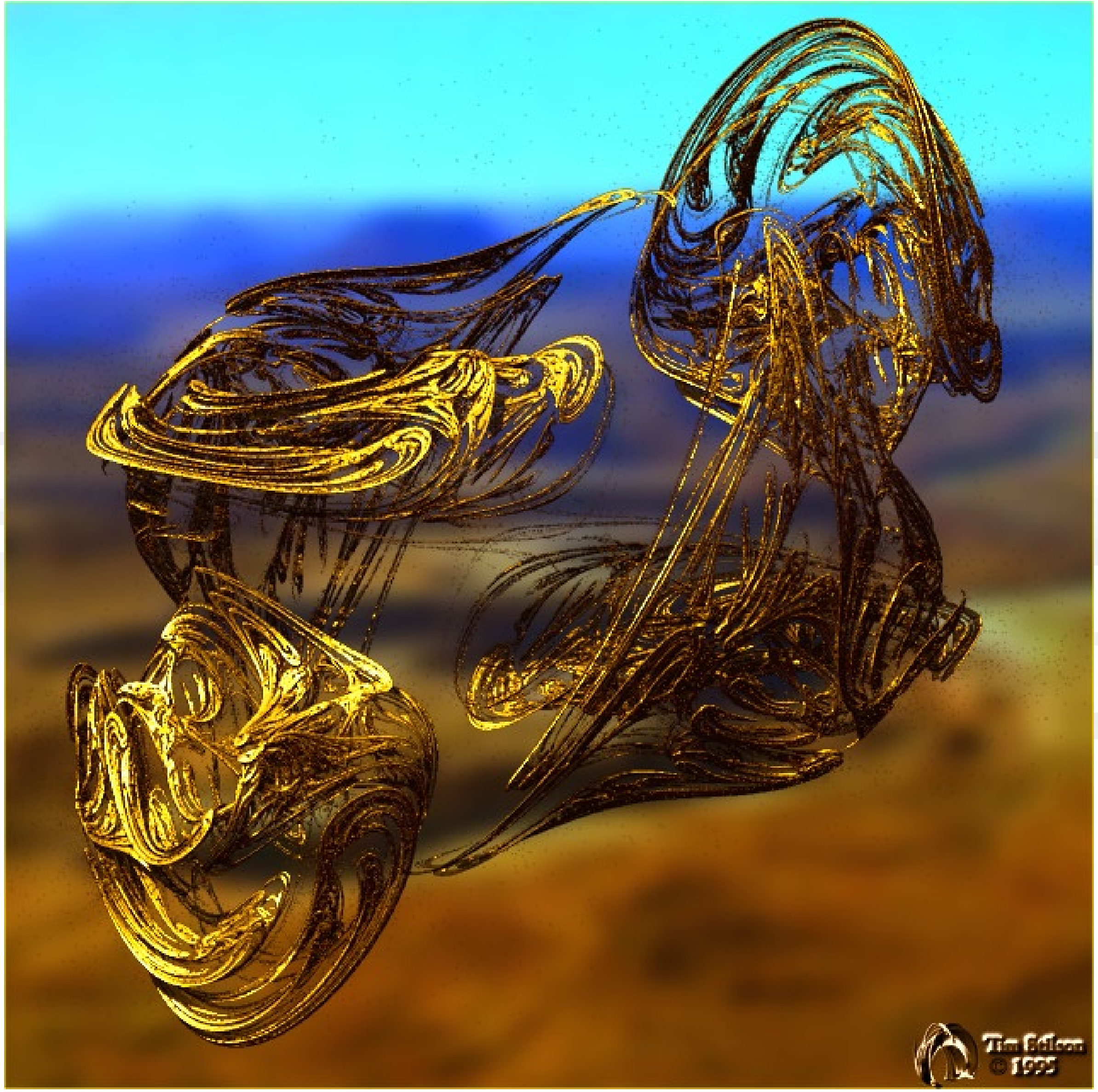
非线性物理：混沌物理



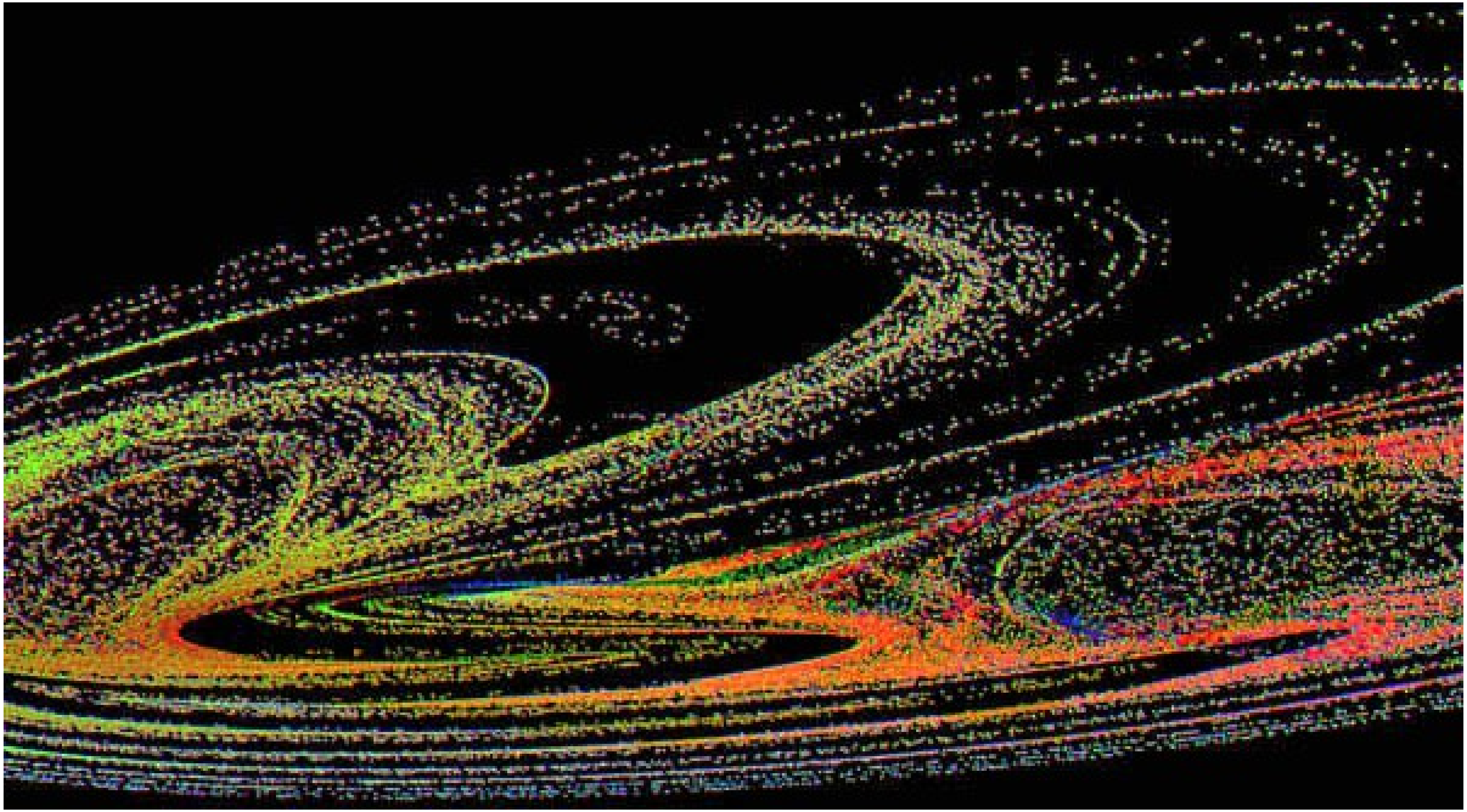
非线性物理：混沌物理



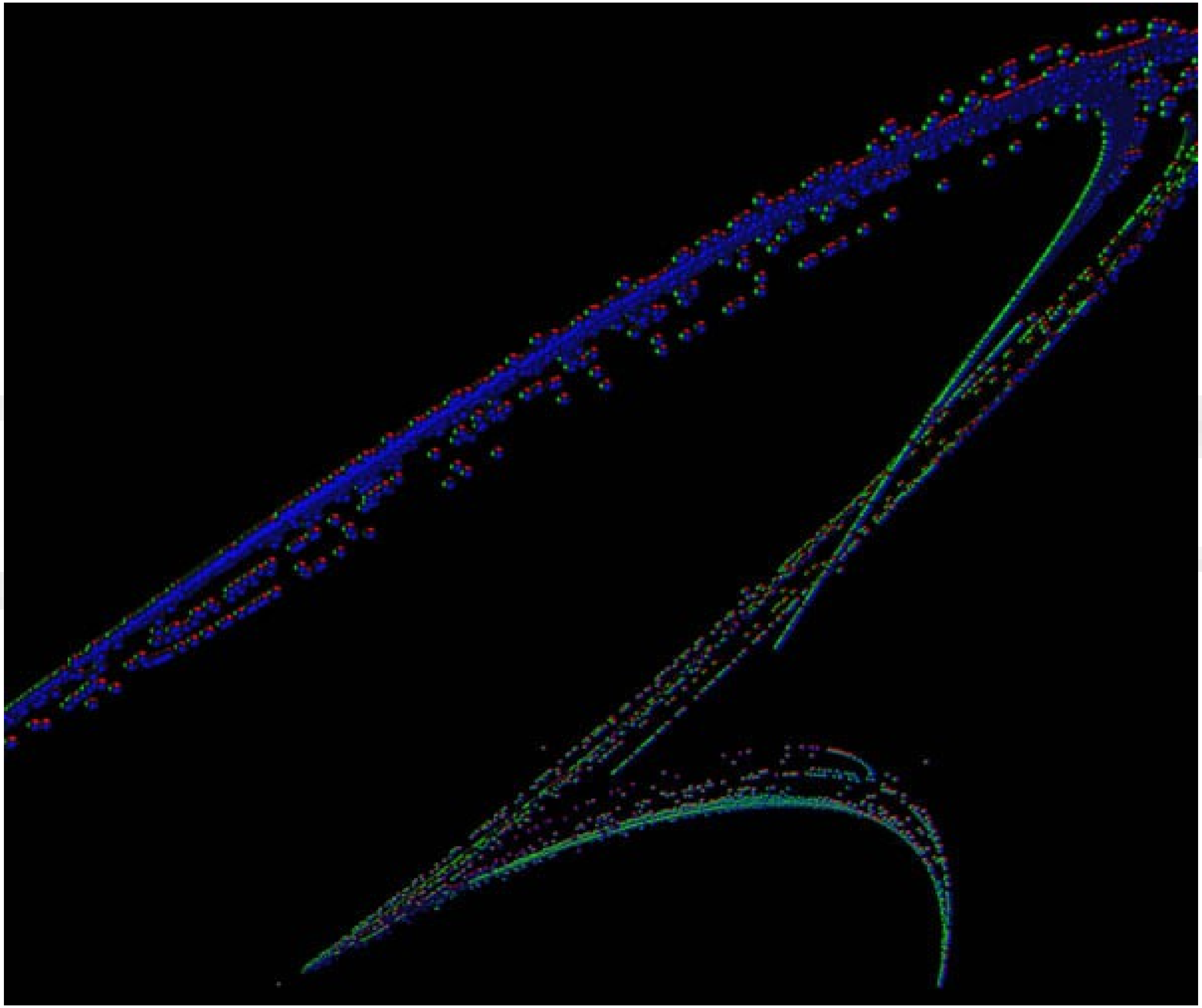
非线性物理：混沌物理



非线性物理：混沌物理



非线性物理：混沌物理



作业part I：编写程序给出Julia集在c取下面值的图形。

注意图形自相似性的证明。x和y取值在±2.25范围。

Real	Imaginary	Image
0.30900264	-0.0339787	Claws
0.33843684	-0.4211402	Snowflakes
-0.3985014	0.5848901	Turtles
-0.8184639	-0.2129812	Serpents
-0.3346212	0.6340579	Amoebas
-0.5530404	0.5933997	Sparklers

简单例子：Julia Set $c*sin(z)$

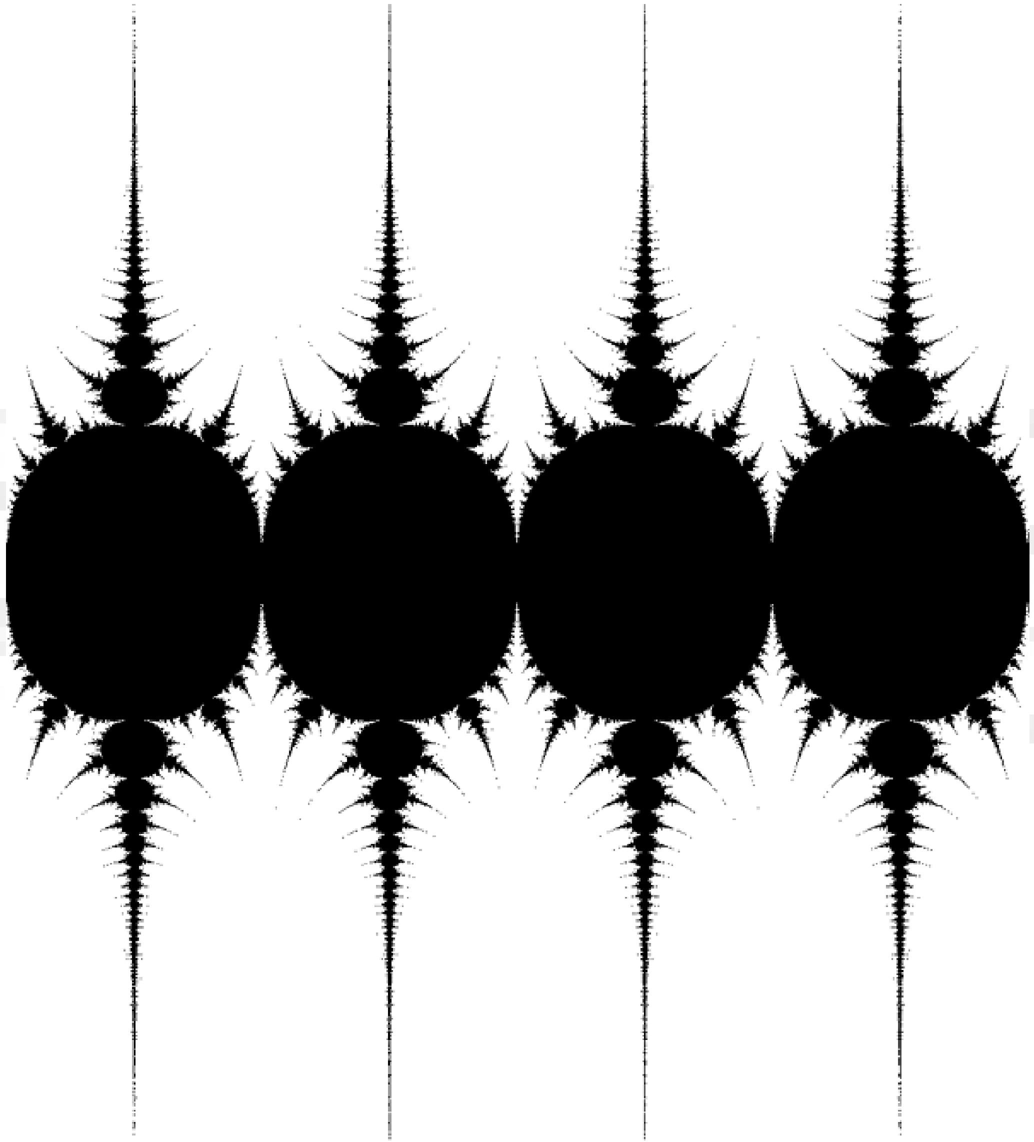
1. $z=x+iy$，$z_{k+1}=c\ sin(z_k)$
2. 对复平面内所有的点z_0进行计算，如果发散，则此点为非白色(黑色)；如果不发散，则为白色。
3. 发散点属于Julia集。
4. 迭代进行到虚部大于50就认为是发散的。
5. 注意到：

$$x_{k+1} = \sin(x_k)\cosh(y_k)$$

$$y_{k+1} = \cos(x_k)\sinh(y_k)$$

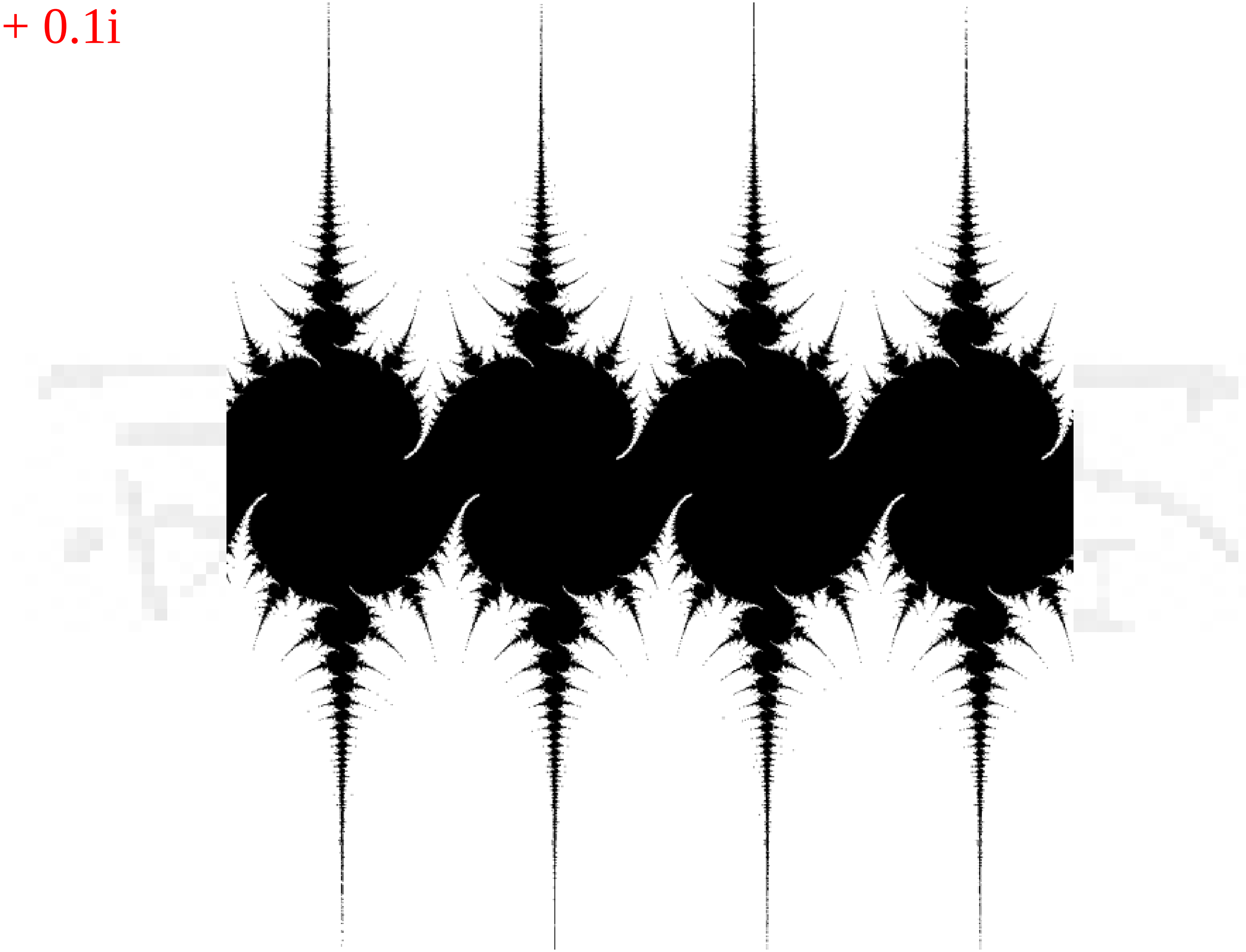
非线性物理：混沌物理

$c = 1 + 0i$



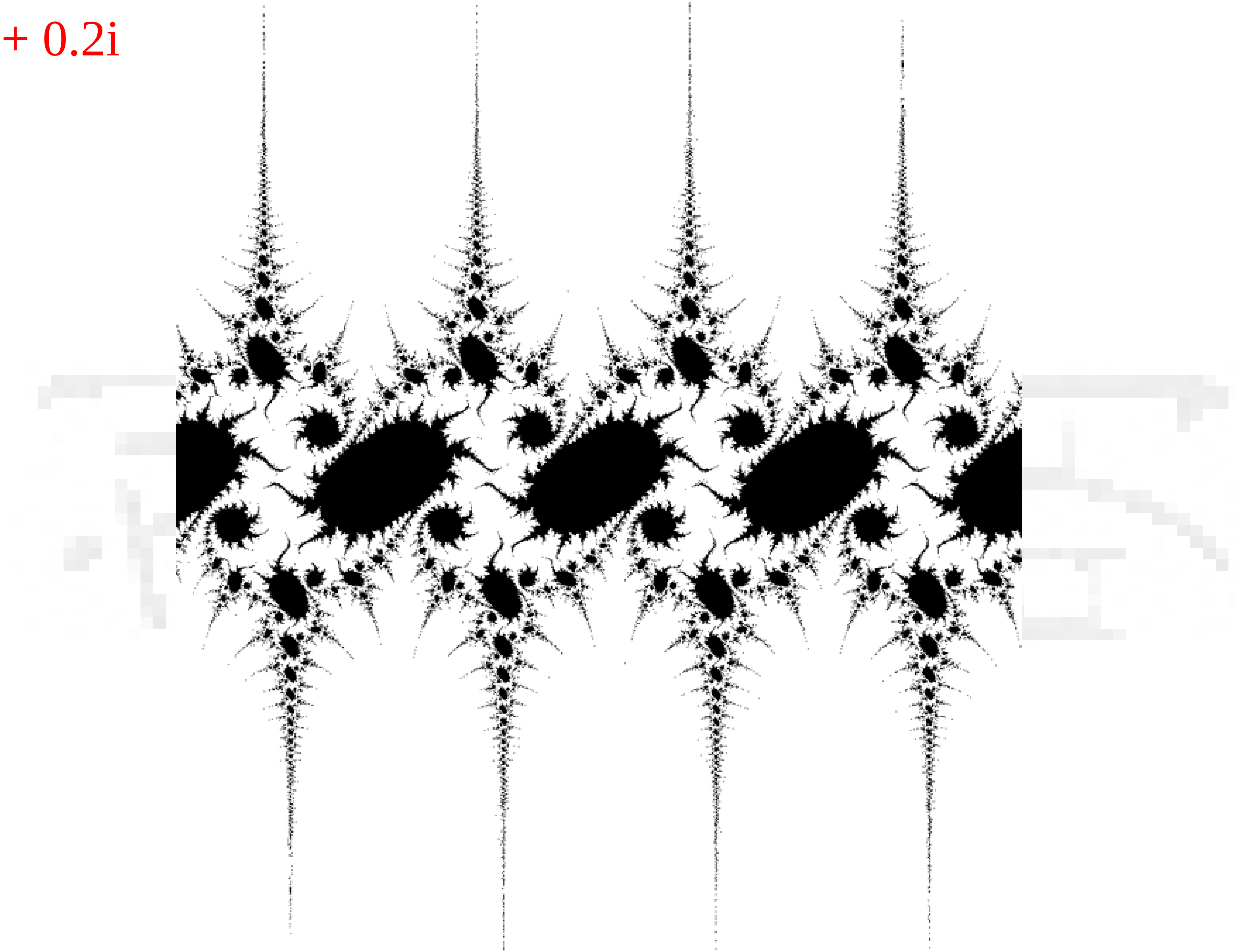
非线性物理：混沌物理

$c = 1 + 0.1i$



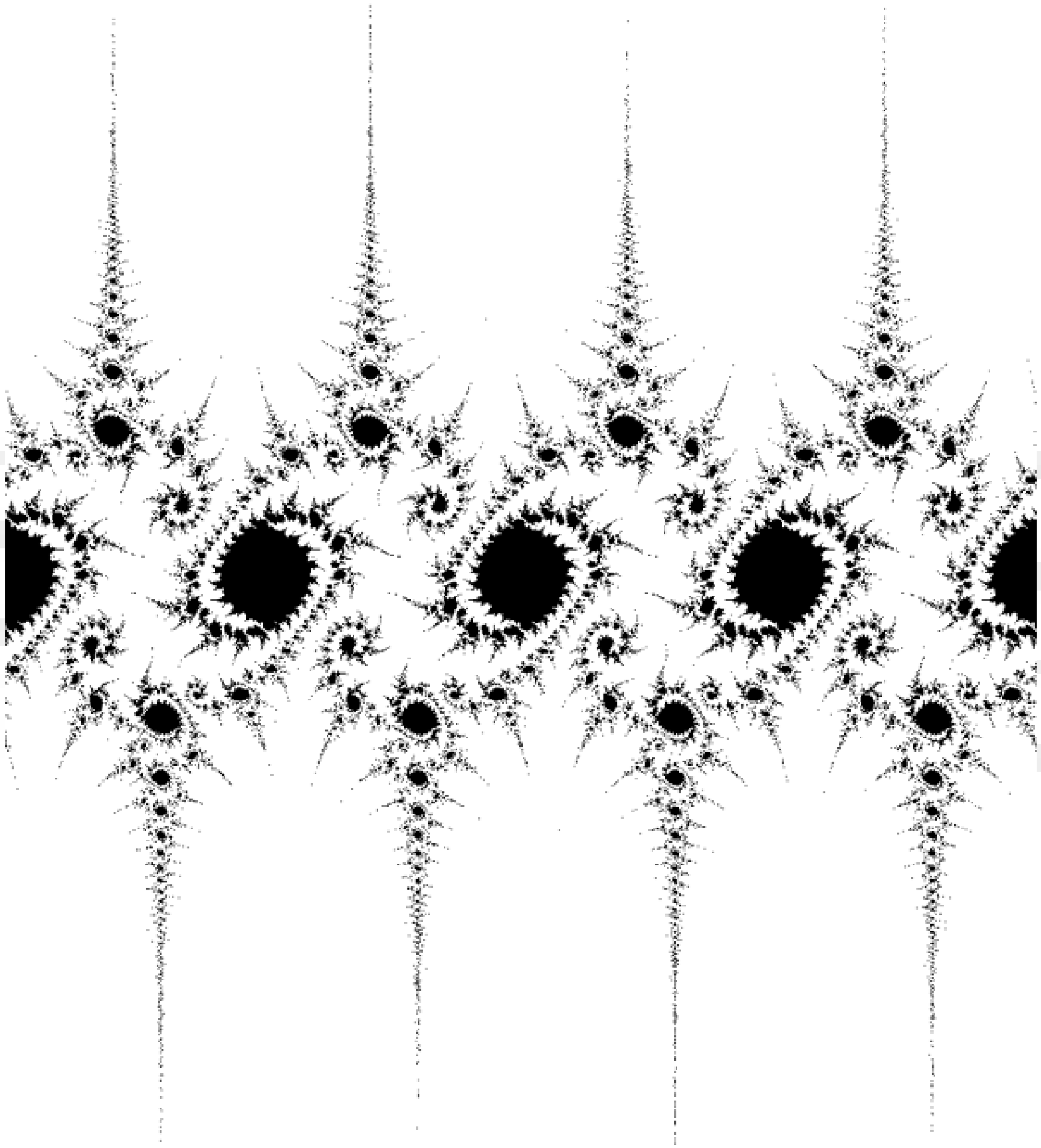
非线性物理：混沌物理

$c = 1 + 0.2i$

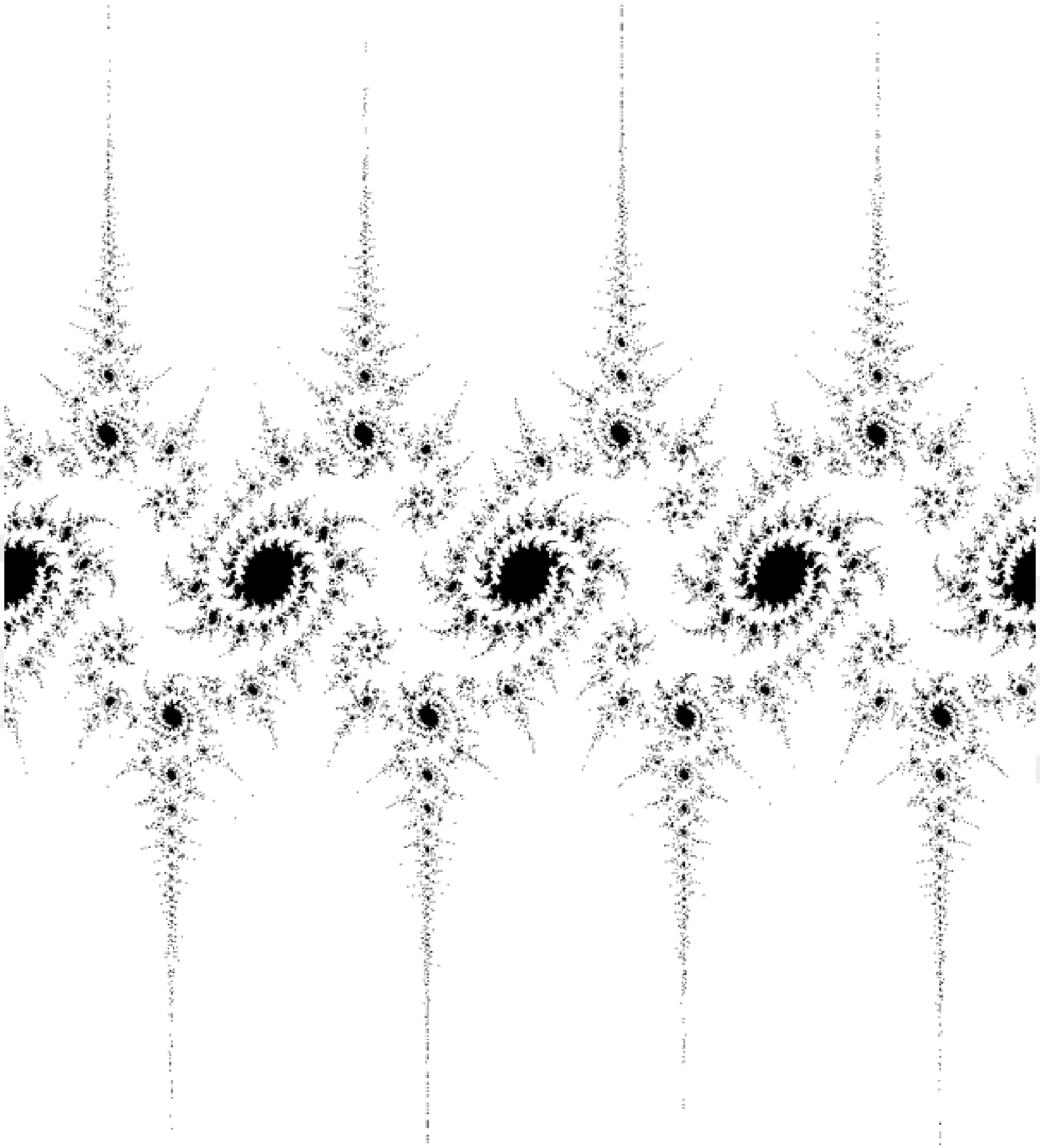


非线性物理：混沌物理

$c = 1 + 0.3i$

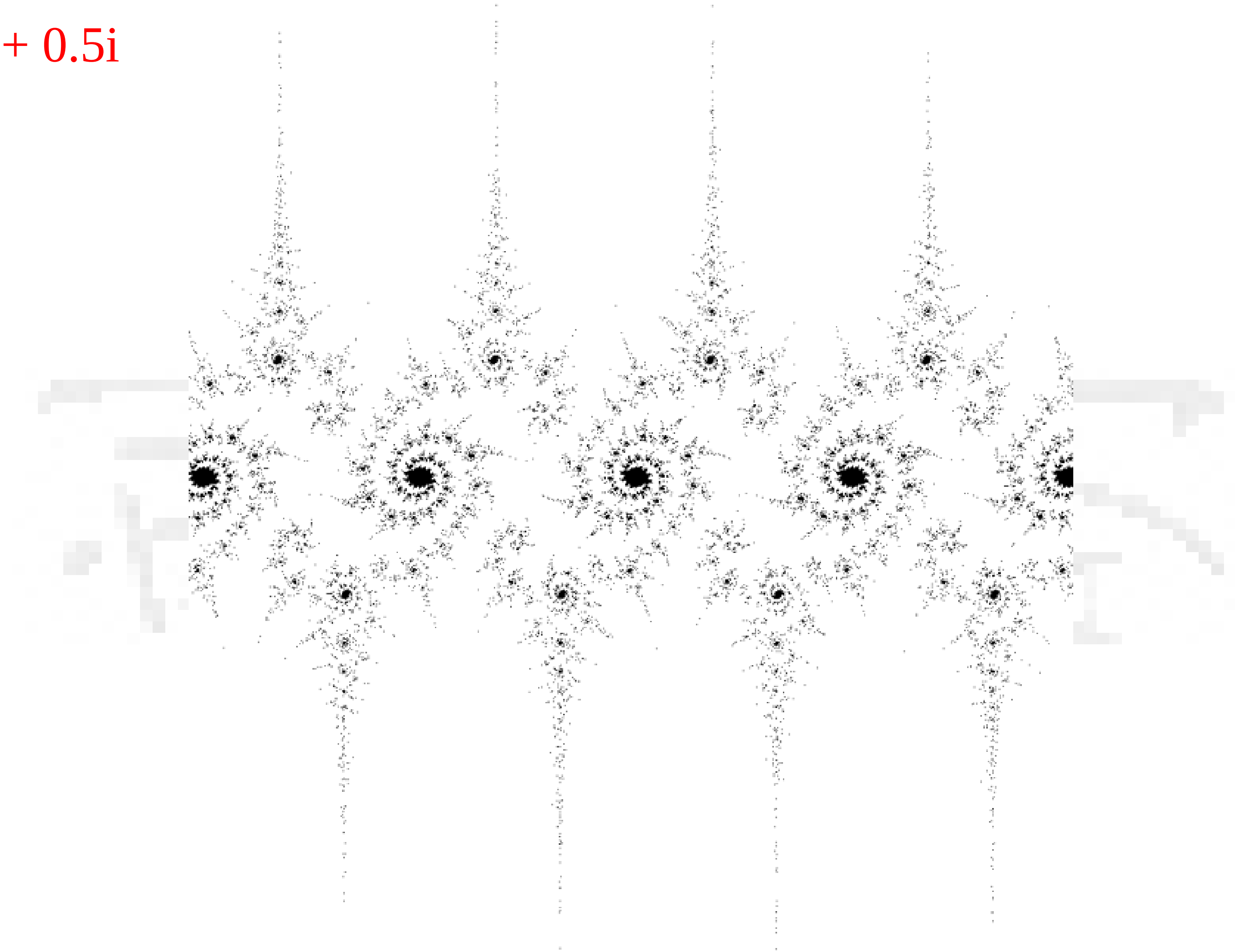


$c = 1 + 0.4i$



非线性物理：混沌物理

$c = 1 + 0.5i$



作业part II：翻译下面的诗歌

Strange Attractors*----*Robin S. Chapman

How to find them, those regions
Of space where the equation traces
Over and over a kind of path,
Like the moth that batters its way
Back toward the light
Or, hearing the high cry of the bat,
Folds its wings in a rolling dive? And ourselves, fluttering toward and away
In a pattern that, given enough
Dimensions and point-of-view,
Anyone living there could plainly see--
Dance and story, advance, retreat,
A human chaos that some slight
Early difference altered irretrievably?

For one, the sound of her mother
Crying. For this other,
The hands that soothed
When he was sick. For a third,
The silence that collects
Around certain facts. And this one,
Sent to bed, longing for a nightlight.

Though we think this time to escape,
Holding a head up, nothing wrong,
Finding a way to beat the system,
Talking about anything else--
Travel, the weather, time
At the flight simulator--for some
The journey circles back

To those strange, unpredictable attractors
Secrets we can neither speak nor leave.

moth: 蛀虫；batter：击打；bat：蝙蝠；flutter：摆动；irretrievably：不可逆性