

要干什么？

- 现在我们来处理最为困难的问题：形态发生。
- 形态是一个很难明确定义的术语，形态千姿百态、形形色色。
- 我们要面对的问题是回答千差万别的系统中为什么会产生能够稳定演化的形态。
- 我们借助稳定性分析、随机模拟、元胞自动机、混沌和孤波物理中的方法来处理，因此是非线性物理之集成问题。
- 通过一系列例子来说明形态发生研究的共性和特点。



可能的物理

- 我们研究的均匀物体其特征长度可视为无穷大，而扩散随机生长过程产生的物理可视为没有特征长度。形态发生问题实质上就是在这两者之间构建特征尺度有限的物体，即我们感兴趣的形态。
- 既然如此，构建一个特征长度一定是某种随机扩散过程与某种有序过程的竞争，从而达到一种平衡**balance**，即存在特征尺度。
- 从非线性物理角度说，分形与混沌没有特征尺度，孤波的特征尺度无限大，现在看看形态的特征尺度决定于什么。



非线性物理：形态发生

反应-扩散系统：图灵形态

- 耗散系统自组织现象和研究已经成为一种公众的成词滥调！1945年Ilya Prigogine就提出非平衡动力学系统总是取熵产生最小态为选择态，1975年Rolf Landauer证明这一原理不充分。但是P大人照样在1977年获得诺贝尔化学奖。
- 图灵形态发生针对的是化学系统，其中存在扩散和化学反应的交互作用，而且必须是两种以上扩散和反应动力学都具有较大差别的化学系统。产生的形态可以是稳态也可以是振荡态。
- 图灵形态因此可以认为是缓慢扩散和快速反应之间的一种非线性竞争的结果。



非线性物理：形态发生

- 其实化学反应系统中的扩散限制问题在1938年就由Nicolas Rashevsky提出过，但是荣誉都被英国数学家和计算机学家图灵捞取，因为后者在1952年建立了处理问题的数学模型。
- 图灵原意是处理生物学中的形态问题，但他建立数学模型时将生物系统中的电学和力学效应一概去除，只剩下扩散和化学反应。
- 虽然有很多生物自组织现象可以由图灵形态动力学定性解释，但是确定性的证据显得很不足。
- 一个故事是图灵1952年就提出的化学反应系统的形态发生问题直到1990年由Patrick De Kepper的实验证实！



非线性物理：形态发生

- 事实上，早在1950年代俄国生物化学家 **Boris Belousov** 就观察到化学反应中的振荡问题，但他的论文无处发表，因为当时此结果是不可思议的胡说，违反热力学第二定律。
- 当然 **Belousov-Zhabotinsky** 反应形成的是行波，而图灵形态是时间相关形态变化。
- Kepper** 的实验是含有 **chlorite** 亚氯酸盐离子、**iodide** 碘离子和 **malonic acid** 丙二酸的化学反应(**CIMA**反应)。



非线性物理：形态发生

Seashells: 形态问题

- 先不管三七二十一，来
enjoy一下海贝的美丽，排
除一下郁闷。

注意：我们南京有雨花石吧。



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生



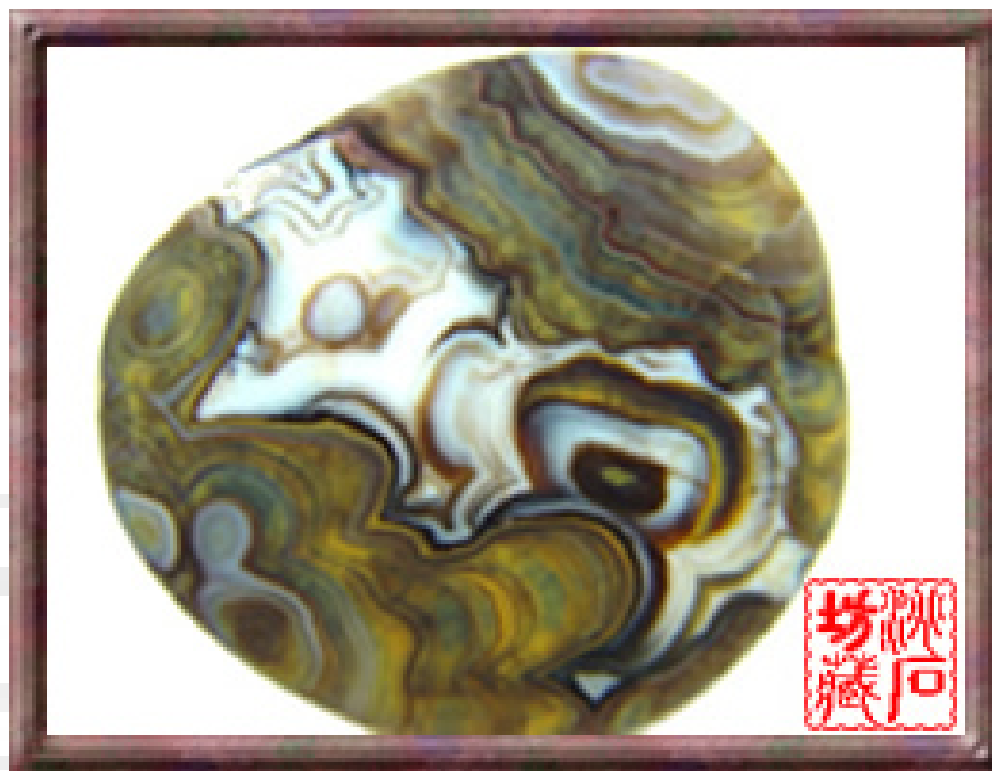
非线性物理：形态发生

雨花石：形态问题



- 转世石佛 玛瑙质，色普通，质精细，形端，纹路清晰，酷似人脸，石之左眼及天顶有折光晃影，当转动此石时，左眼仿佛活的一样，跟随着眼波流动，为此石奇妙之处。古之“活石”之谓盖有此意耶？可惜其右眼不能流动，一憾。淘石坊藏。

非线性物理：形态发生



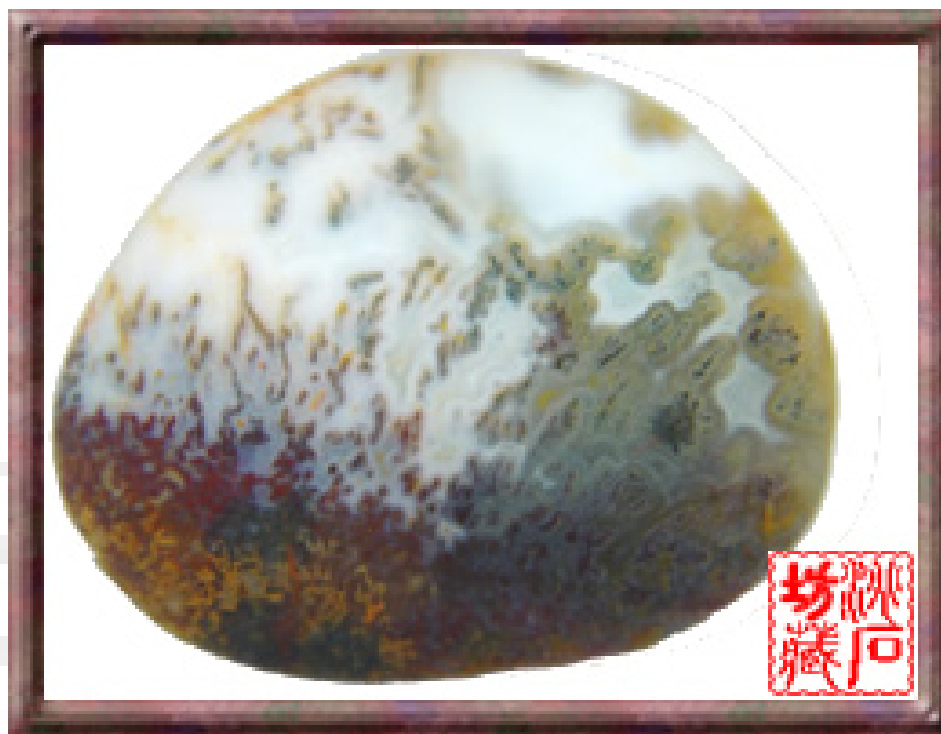
- 神兽巡天 玛瑙质。内中图案似狗非狗，奇在耳鼻眼口腿尾俱全，妙在身上还有一仿佛肚兜图案，足踩云端似巡狩之状。自然造物之神奇，令人叹为观止。淘石坊藏。

非线性物理：形态发生



- 山河守护神 玛瑙质，色普通，质完整，形状标准，纹路虚实相间，中有一白羊栩栩如生，其侧一水牛相伴，水牛脊背上尚有一绿身小鸟蹲于其上，石之上部呈天河之状，故命名为“山河守护神”。淘石坊藏。

非线性物理：形态发生



- 春山雾霭 玛瑙质，石形完美、端好，色彩有七色之多，意境雅致，一幅庐山春天的早晨，雾霭漫遍丛林的感觉跃然石面，恍若人工描绘，谁知天赐雨花？淘石坊藏。

非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生

- 参考M. Ishikawa, K. Miyajima发表在ICIC International一文。
- 象海贝和雨花石这样的形态结构源于海贝生长和雨花石沉积过程中的空时结构形成动力学，在生物世界中这是一类很有代表性的形态发生过程。
- 在物理上表述，这类空时结构形成依赖于具有一定随机性的 **activator-inhibitor** 耦合系统，其研究早期是完全确定性的微分方程，现在可以考虑生长过程中的随机性。
- 针对海贝条纹空时形成动力学的特征，提出了四种模型：
stochastic activator-inhibitor systems without saturation and ones with saturation in time-invariant or time-variant domains respectively.



- **Stochastic Activator-Inhibitor Systems without Saturation**

- 我们考虑一维问题：设 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 分别为activator物质和Inhibitor物质的空时浓度，则演化方程可以写成：

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d_u \Delta u(t, x) + s_1 \left(\frac{u^2(t, x)}{v(t, x)} + b_u \right) - r_u u(t, x), \quad (t, x) \in \Theta \times G$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = d_v \Delta v(t, x) + s_2 u^2(t, x) + b_v - r_v v(t, x), \quad (t, x) \in \Theta \times G$$

- d_u 、 d_v 为 u 、 v 的扩散系数， Δ 为Laplace算符， (s_1, s_2) 为 (u, v) 的产率， (r_u, r_v) 为 (u, v) 的removal rate， (b_u, b_v) 为 (u, v) 的外部供应产率， $\Theta \in (0, T)$ 是时域， $G \in \mathbb{R}^n$ 是 n 维开放空域。
- 考虑两种情况：时域不变，即 G 为固定空域；另一种， $G(t) \sim t$ 。



非线性物理：形态发生

- 从演化方程可以看到， u 本身有非线性自催化功能，它能提高自身产率并提高inhibitor(v)的产率；而 v 升高反过来抑制 u 的产率；因此，演化可能达到一个静态(steady state)，只是这个静态局域不稳定，会因为 u 的自催化行为而失稳。

- 初始条件：

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in G.$$

- 假定物流不会超出 G 的边界，因此边界条件：

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(t, x)}{\partial \nu} = 0, \quad (t, x) \in \Theta \times \Gamma$$

- 这里 $\partial/\partial \nu$ 表示对于 G 的边界外法向导数。



非线性物理：形态发生

- 实际的海贝演化过程伴随随机性，因此需要加随机项：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = & d_u \Delta u(t, x) + s_1 \left(\frac{u^2(t, x)}{v(t, x)} + b_u \right) \\ & - r_u u(t, x) + \alpha u \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}, \quad (t, x) \in \Theta \times G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = & d_v \Delta v(t, x) + s_2 u^2(t, x) + b_v \\ & - r_v v(t, x) + \beta v \frac{\partial r(t, x)}{\partial t}, \quad (t, x) \in \Theta \times G\end{aligned}$$

- 这里 $w(x, t)$ 和 $r(x, t)$ 表示互不关联的Wiener过程，其 $\partial/\partial t$ 就是高斯噪声。



- 上述方程可以写成：

$$\begin{aligned} u(t, x) - \int_0^t d_u \Delta u(s, x) ds &= u_0(x) \\ + \int_0^t s_1 \left(\frac{u^2(s, x)}{v(s, x)} + b_u \right) ds &- \int_0^t r_u u(s, x) ds \\ + \alpha \int_0^t u(s, x) dw(s, x) &\quad (t, x) \in \Theta \times G \end{aligned}$$



- 上述方程可以写成：

$$\begin{aligned} v(t, x) - \int_0^t d_v \Delta v(s, x) ds &= v_0(x) \\ &+ \int_0^t (s_2 u^2(s, x) + b_v) ds - \int_0^t r_v v(s, x) ds \\ &+ \beta \int_0^t v(s, x) dr(s, x), \quad (t, x) \in \Theta \times G \end{aligned}$$

- 针对上述方程的边界条件保持不变。



- **Stochastic Activator-Inhibitor Systems with Saturation:**
- 实验观测发现，在u很高时，因为类似催化剂的酵素(enzyme)缺乏，导致系统u最终趋于饱和，因此更合理的演化方程为：

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d_u \Delta u(t, x) + s_1 \left(\frac{u^2(t, x)}{v(t, x)(1 + s_u u^2(t, x))} + b_u \right) - r_u u(t, x) + \alpha u(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \quad (t, x) \in \Theta \times G$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = d_v \Delta v(t, x) + s_2 u^2(t, x) + b_v - r_v v(t, x) + \beta v(t, x) \frac{\partial r(t, x)}{\partial t}$$

- 这里 s_u 为饱和系数，在u较低时 $s_u u^2 \ll 1$ 。其它参数同前。



非线性物理：形态发生

- 积分方程变成：

$$\begin{aligned} u(t, x) - \int_0^t \Delta u(s, x) ds &= u_0(x) + \int_0^t (s_1 b_u - r_u u(s, x)) ds \\ &+ s_1 \int_0^t \frac{u^2(s, x)}{v(s, x)(1 + s_u u^2(s, x))} ds + \alpha \int_0^t u(s, x) dw(s, x), \quad (t, x) \in \Theta \times G \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v(t, x) - \int_0^t d\Delta v(s, x) ds &= v_0(x) + \int_0^t (b_v - r_v v(s, x)) ds \\ &+ s_2 \int_0^t u^2(s, x) ds + \beta \int_0^t v(s, x) dr(s, x), \quad (t, x) \in \Theta \times G \end{aligned} \quad (12)$$



非线性物理：形态发生

- 模拟结果：
- 由于解析求解十分困难，这里只介绍数值计算结果。
- 对于无饱和限制情况，分两种情形考虑，**1**，**G**域不变的情况：
G=(0, 100)，其它参数如下：

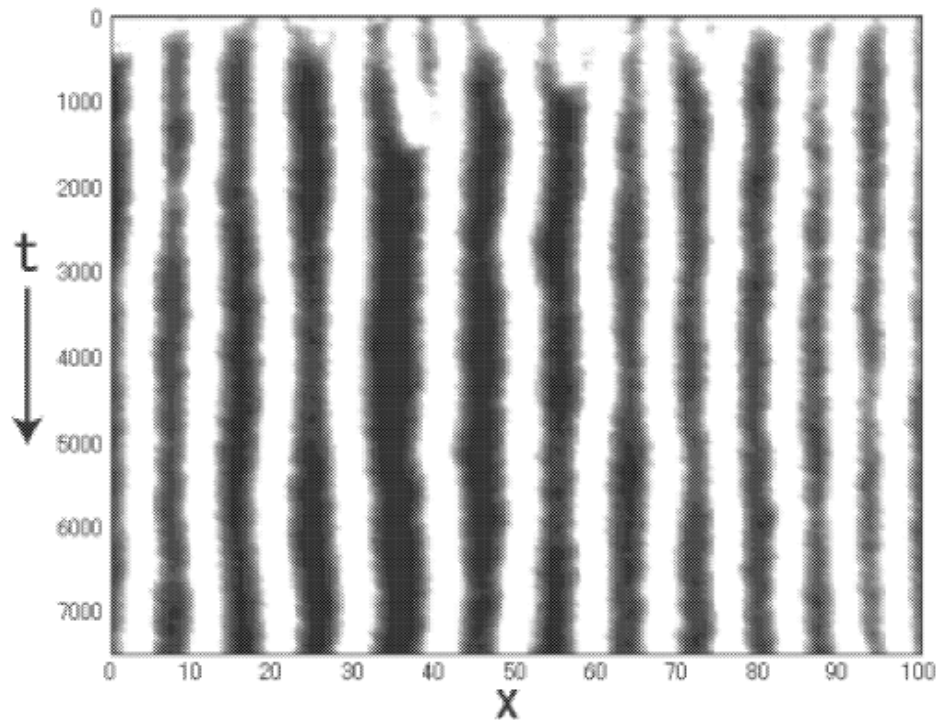
Initial values	: $u_0(x) = 1.0 + 0.1\xi(x), v_0(x) = 0.5$
Diffusion coefficients	: $d_u = 0.01, d_v = 0.4$
Removal rates	: $r_u = 0.02, r_v = 0.06$
Basic production rates	: $b_u = 0.03, b_v = 0$
Production rates	: $s_1 = s_2 = 0.02$
Coefficients of noises	: $\alpha = \beta = 0.03$

$\xi(x)$ is normal random numbers on G .

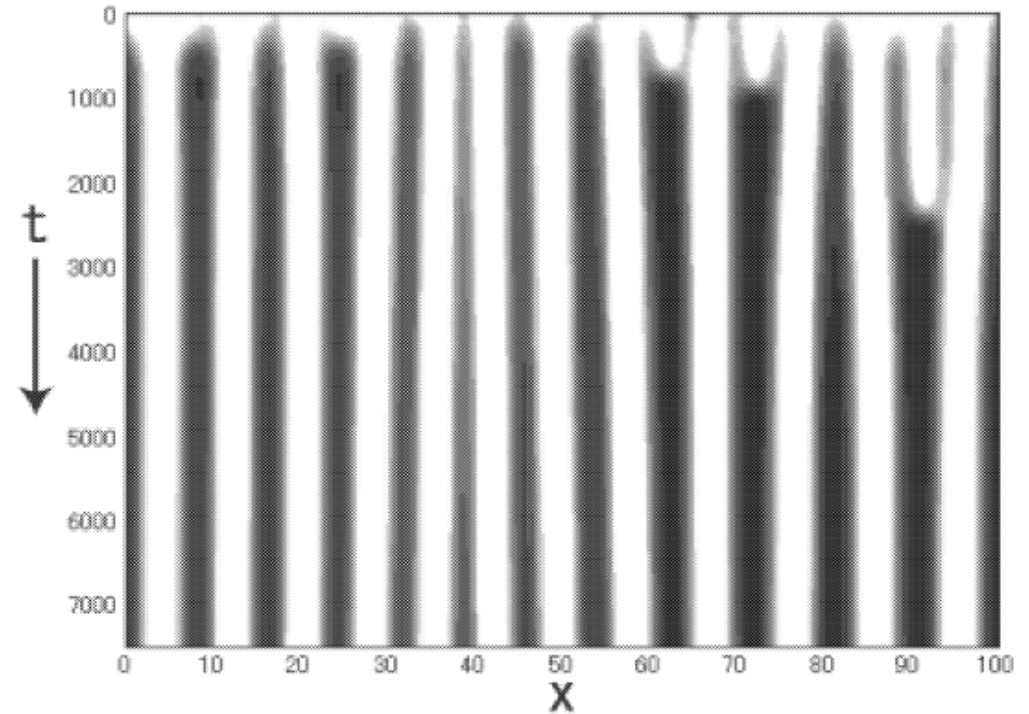


非线性物理：形态发生

- 模拟结果：



(a) Under the noise

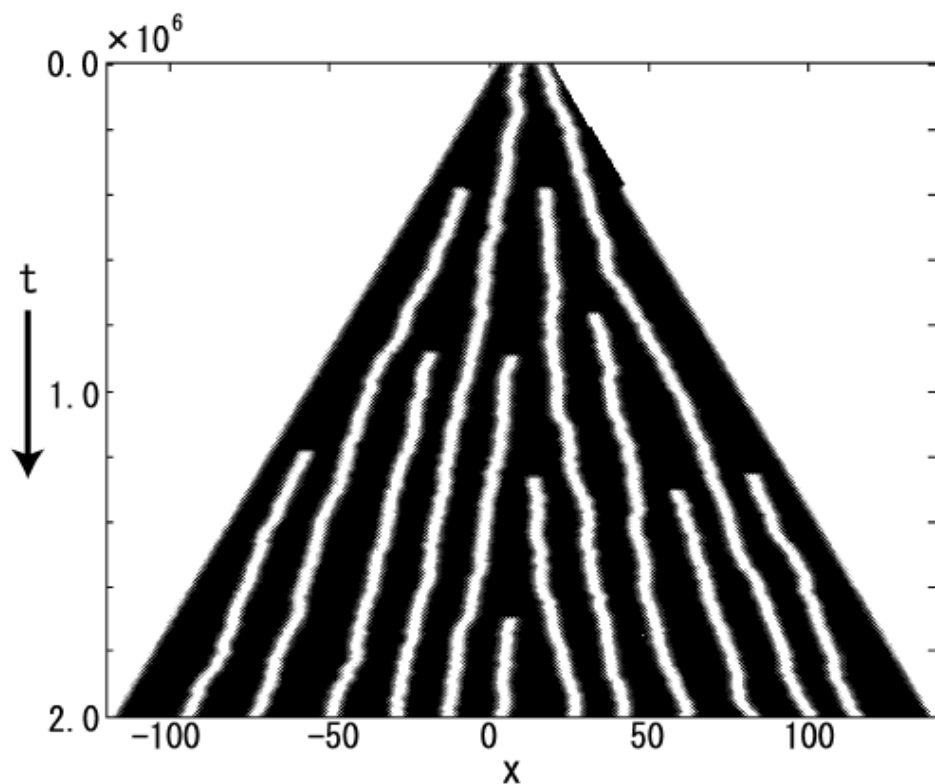


(b) Under the no noise

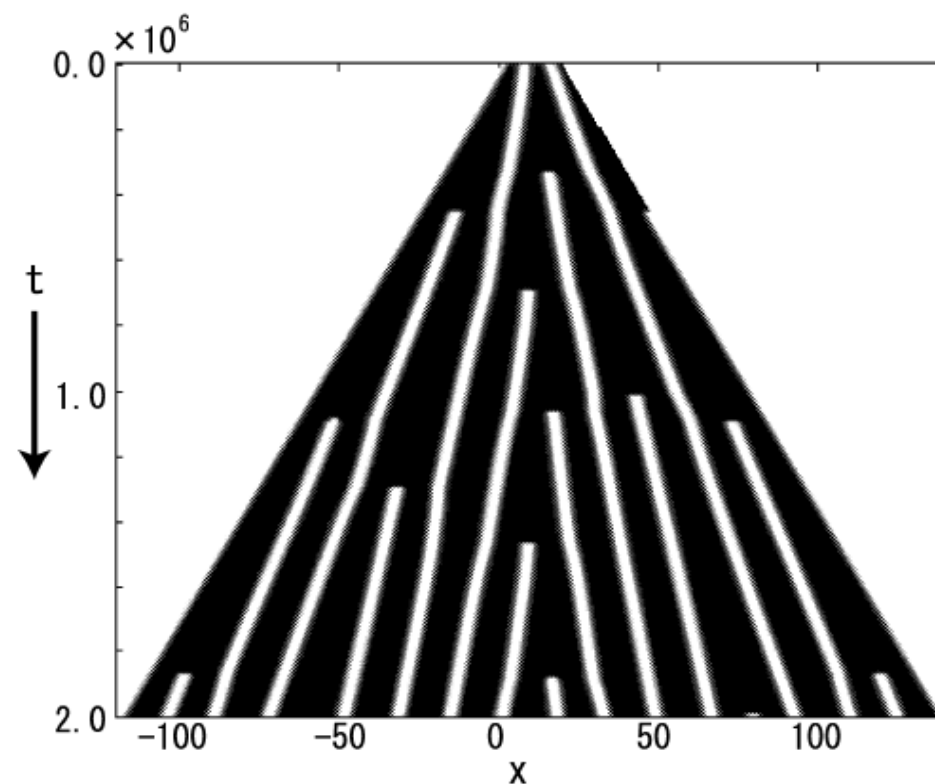
- 模拟结果与一种叫做**Lyria Planicostana Taiwanica**的海贝形态非常类似。

非线性物理：形态发生

- 如果在 $G(t)$ 域中， $G(t)=(-0.0006t, 20+0.0006t)$ ，模拟结果：



(a) Under the noise

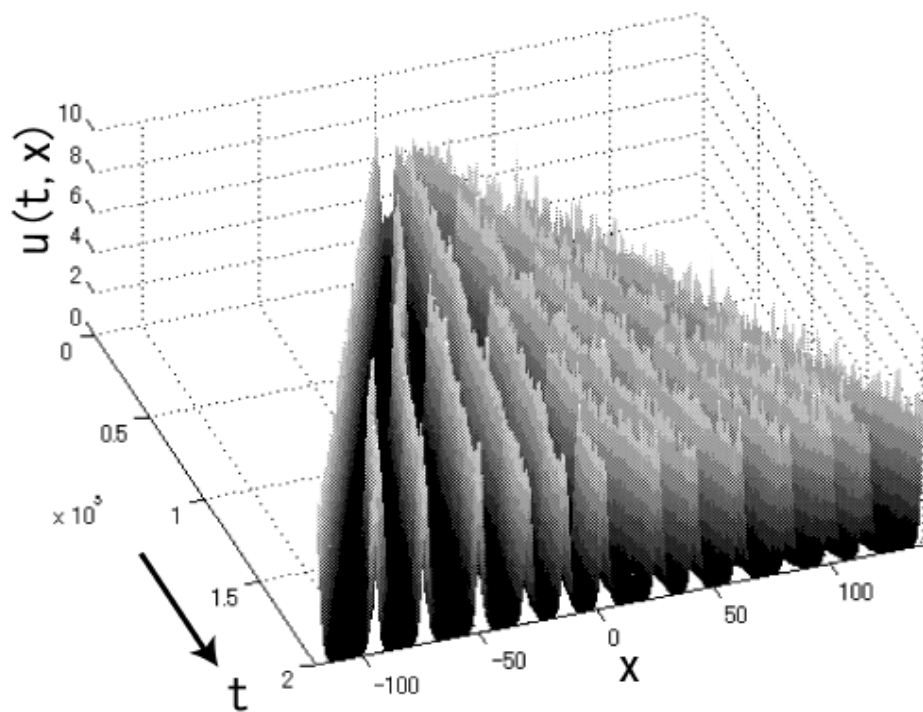


(b) Under the no noise

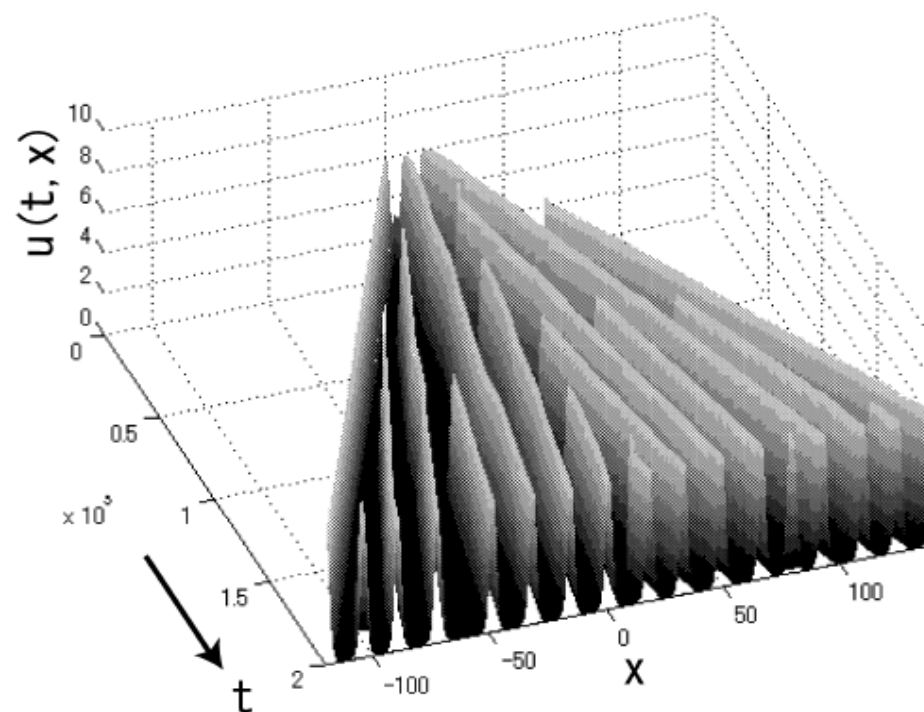
- 三维模拟结果是：



非线性物理：形态发生



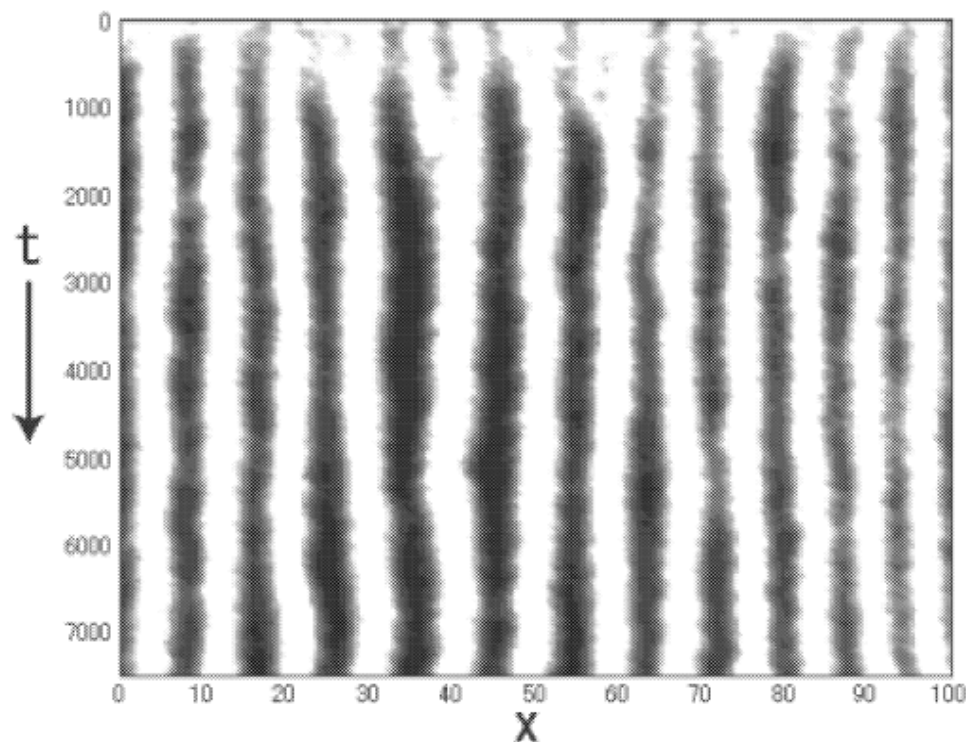
(a) 3D-view of Fig. 2(a)



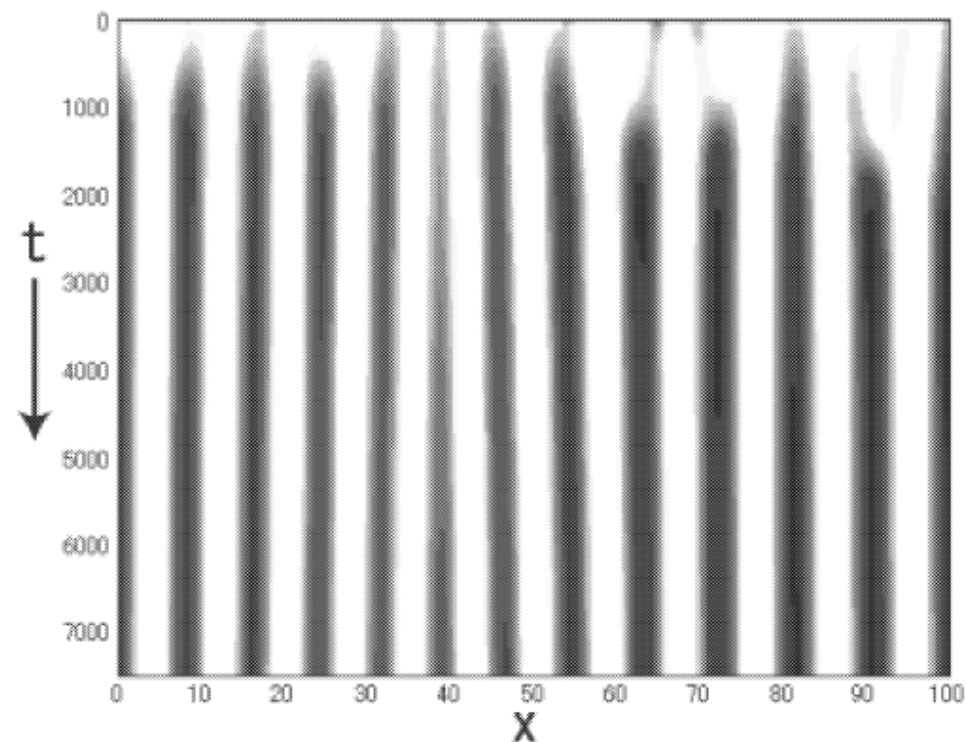
(b) 3D-view of Fig. 2(b)

非线性物理：形态发生

- 针对 u 饱和的情况，设 $s_u=0.01$ ，恒定 G 域 $(0, 1)$ 模拟结果：



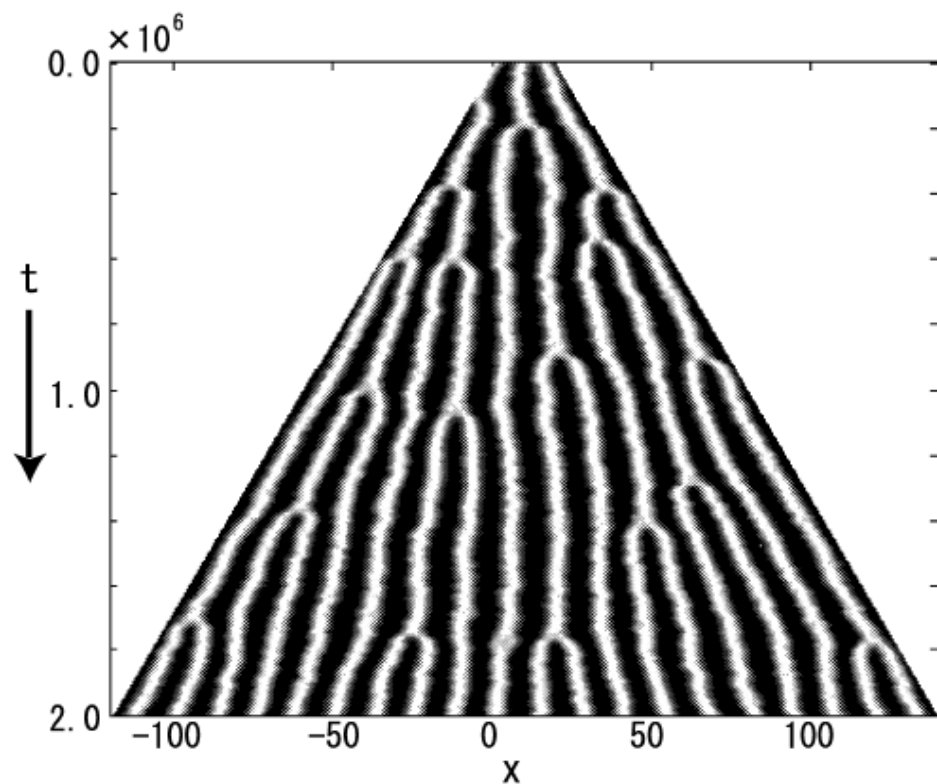
(a) Under the noise



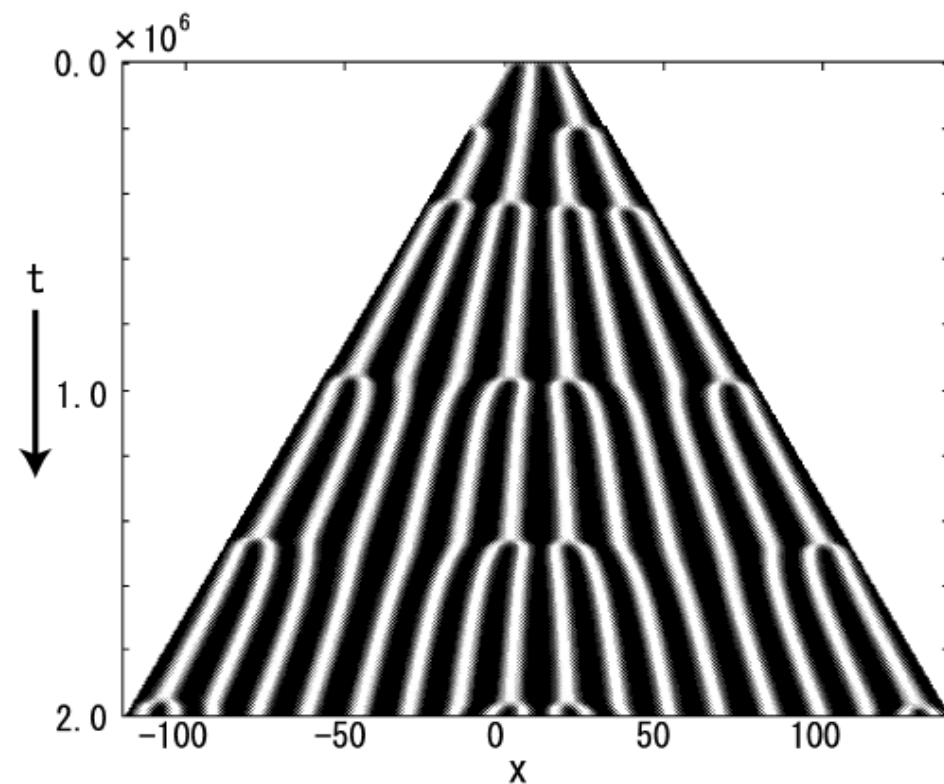
(b) Under the no noise

非线性物理：形态发生

- 针对 u 饱和的情况，设 $s_u=0.01$ ， $G(t)$ 模拟结果：



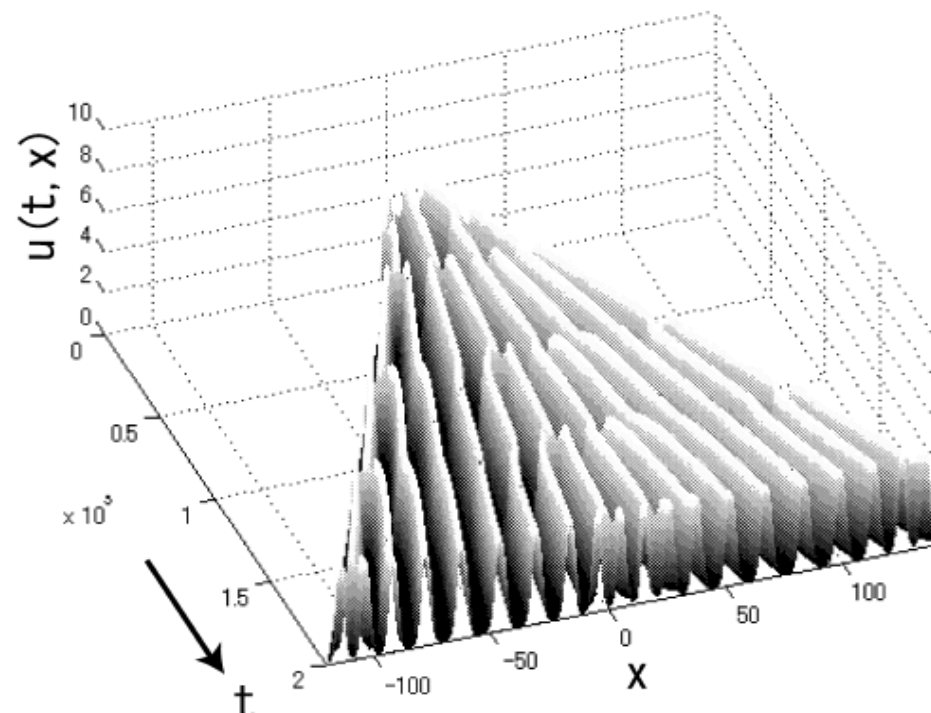
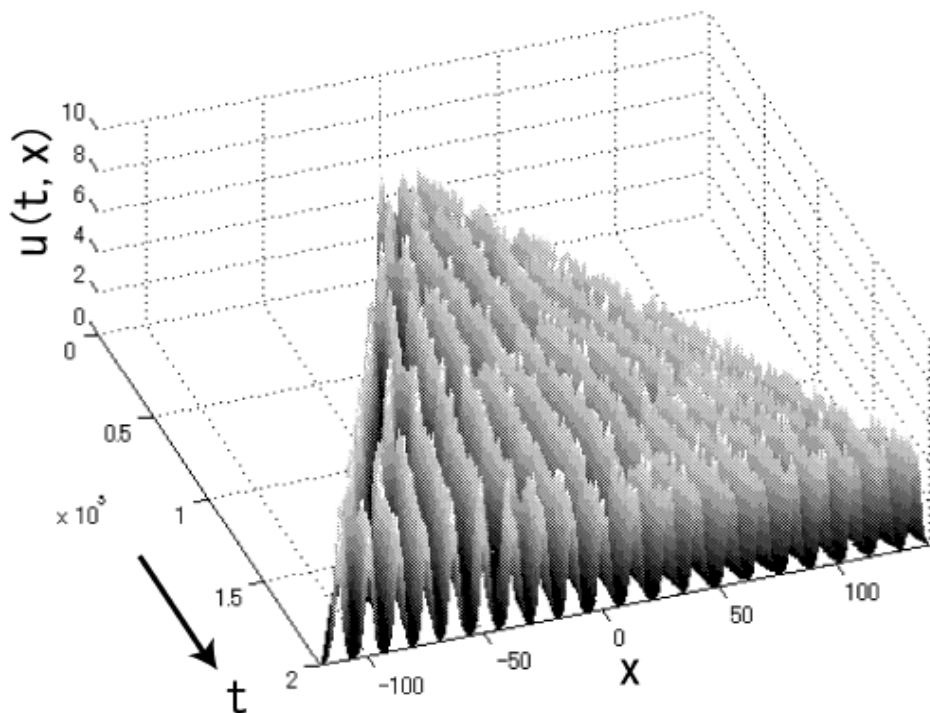
(a) Under the noise



(b) Under the no noise

非线性物理：形态发生

- 针对 u 饱和的情况，设 $s_u=0.01$ ， $G(t)$ 模拟结果：



- 与图灵形态发生类似，这也是一个化学反应与扩散耦合在一起的动力学演化过程。



图灵形态

- 图灵形态的关键是化学反应物质的扩散系数有很大差别。而在扩散驱动系统中扩散总是不稳定的根源。
- 考虑两个空间时间相关的化学浓度量 $U(x, t)$ 和 $V(x, t)$ ，其中 x 表示 n 维空间的坐标变量， t 为时间。图灵系统关注下面的方程：

$$\begin{aligned}U_t &= D_U \nabla^2 U + f(U, V) \\V_t &= D_V \nabla^2 V + g(U, V),\end{aligned}$$

- 式中 D_U 和 D_V 为扩散系数， f 和 g 实际上为两个扩散方程的耦合项，由此产生图灵形态。



非线性物理：形态发生

- 耦合函数 f 和 g 的形式决定了系统的动力学特征，著名的包括Gray-Scott模型、Gierer-Meinhardt模型、Selkov模型、Schnackenberg模型、Brysselator模型和Lengyel-Epstein模型。
- 图灵形态的静态解为 (U_c, V_c) ，对应于 $f(U_c, V_c)=g(U_c, V_c)=0$ 。如果没有扩散存在，那么围绕 (U_c, V_c) 进行的微小扰动都会导致系统回到 (U_c, V_c) 态，但是如果存在扩散，那么系统动力学就不一样了。
- 考虑一个最简单的图灵模型，由Barrio提出，只保留到三次项：



非线性物理：形态发生

$$u_t = D\delta\nabla^2 u + \alpha u(1 - r_1 v^2) + v(1 - r_2 u)$$

$$v_t = \delta\nabla^2 v + v(\beta + \alpha r_1 uv) + u(\gamma + r_2 v),$$

- 式中 $u=U-U_c$, $v=V-V_c$, 静态解在 $(u=0, v=0)$ 处; $r_1, r_2, \alpha, \beta, \gamma$ 等是描述反应动力学的参数; 两个扩散系数经归一化处理后由 δ 表征, 其中 $D \neq 1$ 。进行无量纲处理后得到:

$$\bar{u}_t = D\nabla^2 \bar{u} + \nu(\bar{u} + a\bar{v} - \bar{u}\bar{v}^2 - C\bar{u}\bar{v})$$

$$\bar{v}_t = \nabla^2 \bar{v} + \nu(b\bar{v} + h\bar{u} + \bar{u}\bar{v}^2 + C\bar{u}\bar{v}),$$

$$(u, v) = \frac{1}{\sqrt{r_1}}(\bar{u}, \bar{v}) \quad T = L^2/\delta \quad (t = T\tau \text{ and } x = L\bar{x})$$



非线性物理：形态发生

式中 $C=r_2/(\alpha r_1^{1/2})$, $a=1/\alpha$, $b=\beta/\alpha$, $h=\gamma/\alpha$, $v=\alpha T$ 。参数 C 可以调制平方和立方非线性项的相对大小, 从而形成条状或者spot状形态。

- 上述方程有静态解 $(u_c, v_c)=(0, 0)$ 。 $h \neq -1$ 时存在另外两个静态解:

$$u_c^i = -v_c^i / K,$$

$$v_c^i = \frac{-C + (-1)^i \pm \sqrt{C^2 - 4(h - bK)}}{2}$$

$$K = \frac{1+h}{a+b} \text{ and } i = 1, 2$$



线性稳定性分析：

1. 线性稳定性分析针对的是静态附近的系统演化行为。先考虑无扩散的情况：

$$\vec{w}_t = \mathbf{A} \vec{w} \quad \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{u_c, v_c} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

式中 f_u, f_v, g_u, g_v 为相应偏导数， u_c 和 v_c 由前面给出。矩阵 \mathbf{A} 如下：

$$\mathbf{A} = \nu \begin{pmatrix} 1 - v_c^2 - C v_c & -2u_c v_c + a - C u_c \\ v_c^2 + h + C v_c & b + 2u_c v_c + C u_c \end{pmatrix}$$

2. 下面考虑有扩散的情形。假定在 (u_c, v_c) 附近有如下线性稳定性涨落解，其中 \mathbf{k} 为涨落的波数：

$$w(\vec{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{\lambda t} w_{\mathbf{k}}(\vec{r}, t)$$

3. 将上述解的形式带入到线性化处理后的演化方程组中，得到如下本征值方程：

$$|\mathbf{A} - \mathbf{D}k^2 - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

式中 \mathbf{A} 由原始定义给出， $D_{11}=D_u, D_{22}=D_v, D_{12}=D_{21}=0$ 。对无量纲演化方程，我们有 $D_{11}=D$ 和 $D_{22}=1$ 。上式的代数表达式为：



非线性物理：形态发生

$$\lambda^2 + [(D_u + D_v)k^2 - f_u - g_v] \lambda + D_u D_v k^4 - k^2(D_v f_u + D_u g_v) + f_u g_v - f_v g_u = 0$$

4. 上式中 $k^2=k_c k_c$ ，此式即为关于失稳涨落的色散关系，由此可以求得 λ 与其它参量的关系。线性不稳定性出现在 $\lambda(k_c)=0$ 处。上式中不含 λ 的项在 $k=k_c$ 处应该为零，这给出下式：

$$Dk_c^4 - k_c^2 \nu(Db + 1) + \nu^2(b - ah) = 0$$



非线性物理：形态发生

5. 上述方程只有一个解：

$$k_c^2 = \nu(Db + 1)/(2D) \quad a = a_c = -(Db - 1)^2/(4Dh)$$

6. 图灵不稳定性发生在 $a < a_c$ 的情况下，由此可以得到：

$$\begin{aligned} f_u + g_v &< 0 \\ f_u g_v - f_v g_u &> 0 \\ D_v f_u + D_u g_v &> 0 \end{aligned}$$

7. 数值计算和线性稳定性分析表明： $h < -1$ 时， $(0, 0)$ 不再稳定，其它的静态将出现Hopf分叉，呈现阻尼的随时间振荡形态，没有特征长度。如果 $h > -1$ ，则将出现更为复杂的空间时间振荡特征。




非线性物理：形态发生

8. 下面只讨论 $h=-1$ 的情况，此时 $(0, 0)$ 为唯一的静态解，这就是图灵形态。此时图灵不稳定性只能出现在下面两式包围的区域：

$$\begin{aligned} -b < a < a_c &= (Db - 1)^2 / (4D) \\ -1/D < b < -1 \end{aligned} \quad h = -1$$

9. 在整个动力系统区域，图灵形态发生事实上只能在一个很小的区域内。其它区域对应的是稳态或者其它种类的不稳定性。
10. 求解色散关系，即本征值与波数的关系，可以判断初始线性失稳区对应于哪些波数会失稳。那些本征值实部为正的波数将会长大，而那些为负的波数将衰减下去。那些实部为零，虚部非零的则是Hopf分叉，与图灵失稳不同。


$$Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{\tilde{\lambda}(k)}$$

非线性物理：形态发生

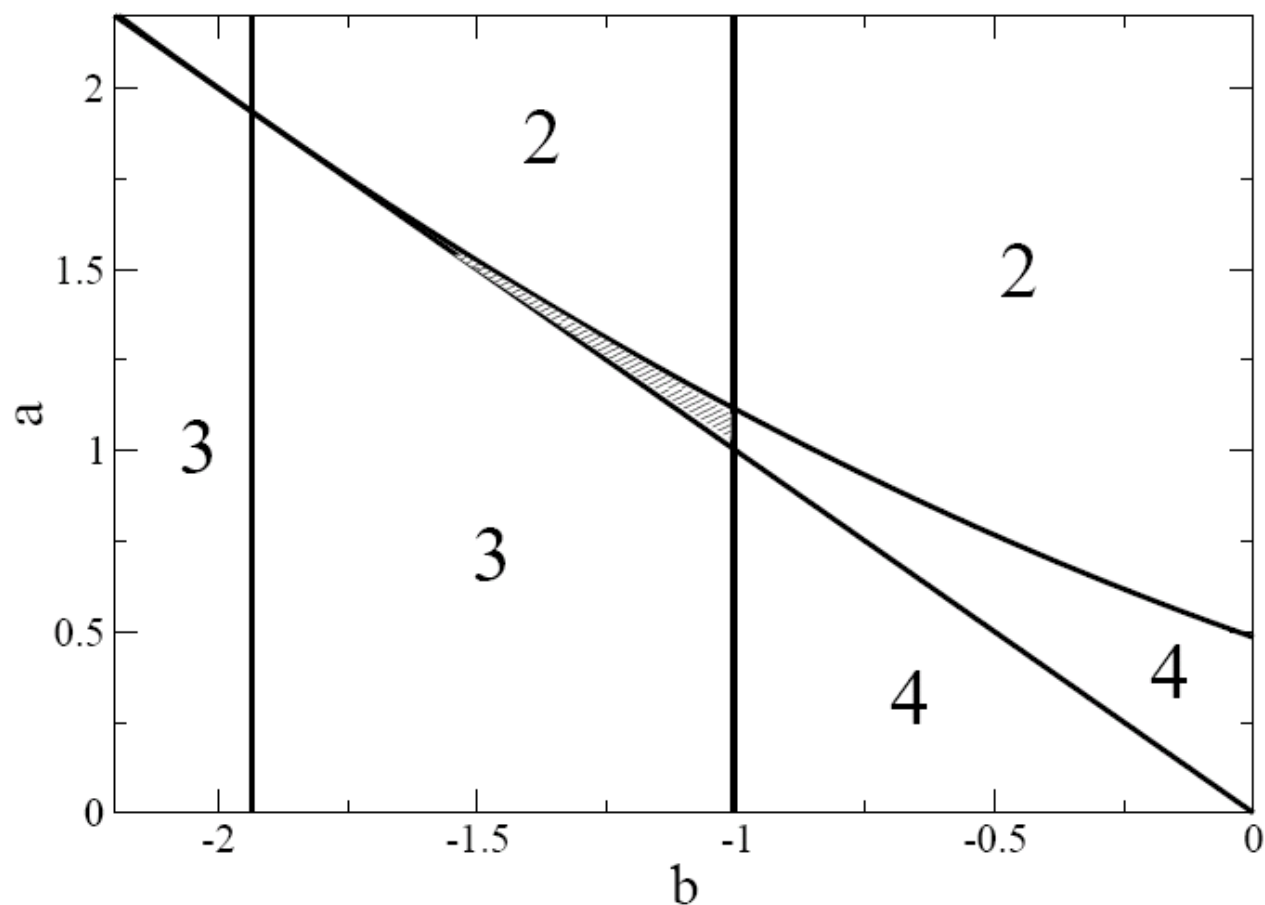
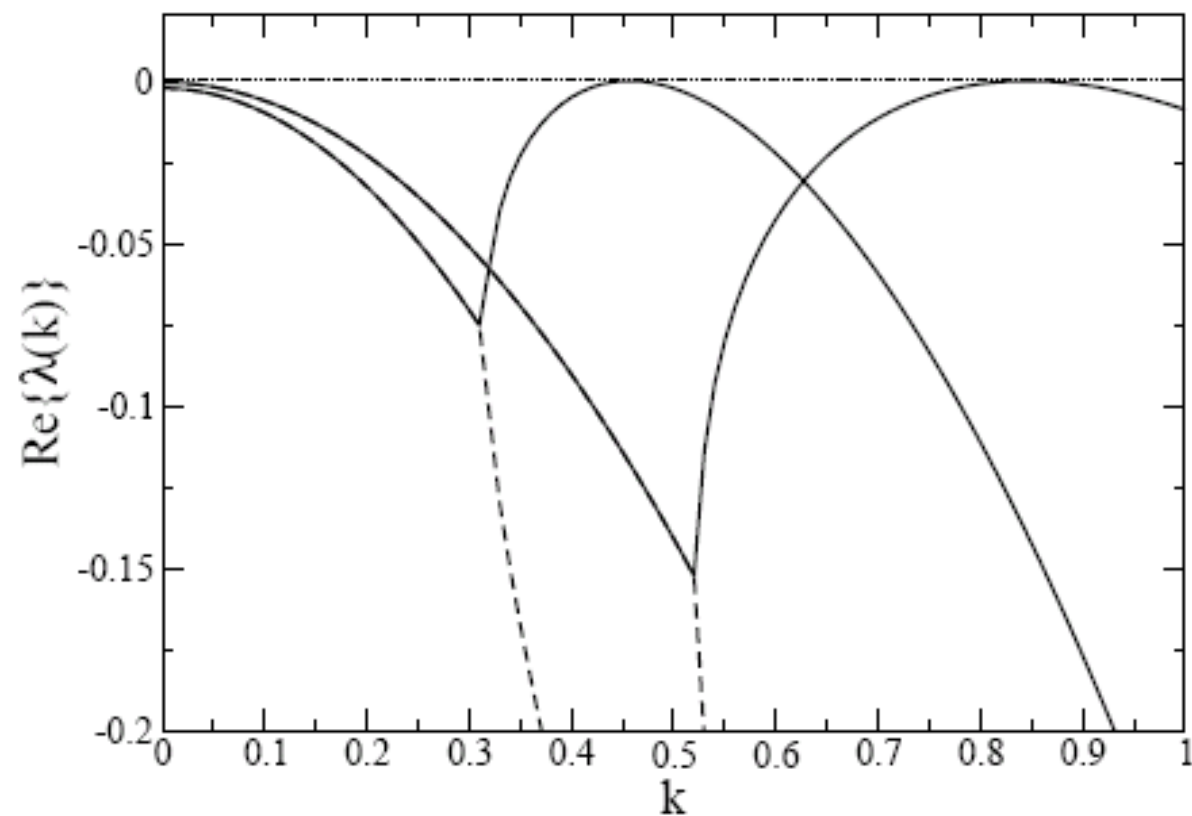


Fig. 1. The stability diagram of the generic Turing model (Eq. (3)). The Turing space (shaded region) is bounded by lines $b = -1/D$, $b = -1$, $b = -a$ and the curve $a = (Db - 1)^2 / (4D)$. For the plot parameters were fixed to $D = 0.516$. The other regions: stable state (2), other instabilities (3) and Hopf instability (4).



非线性物理：形态发生

11. 色散关系举例：

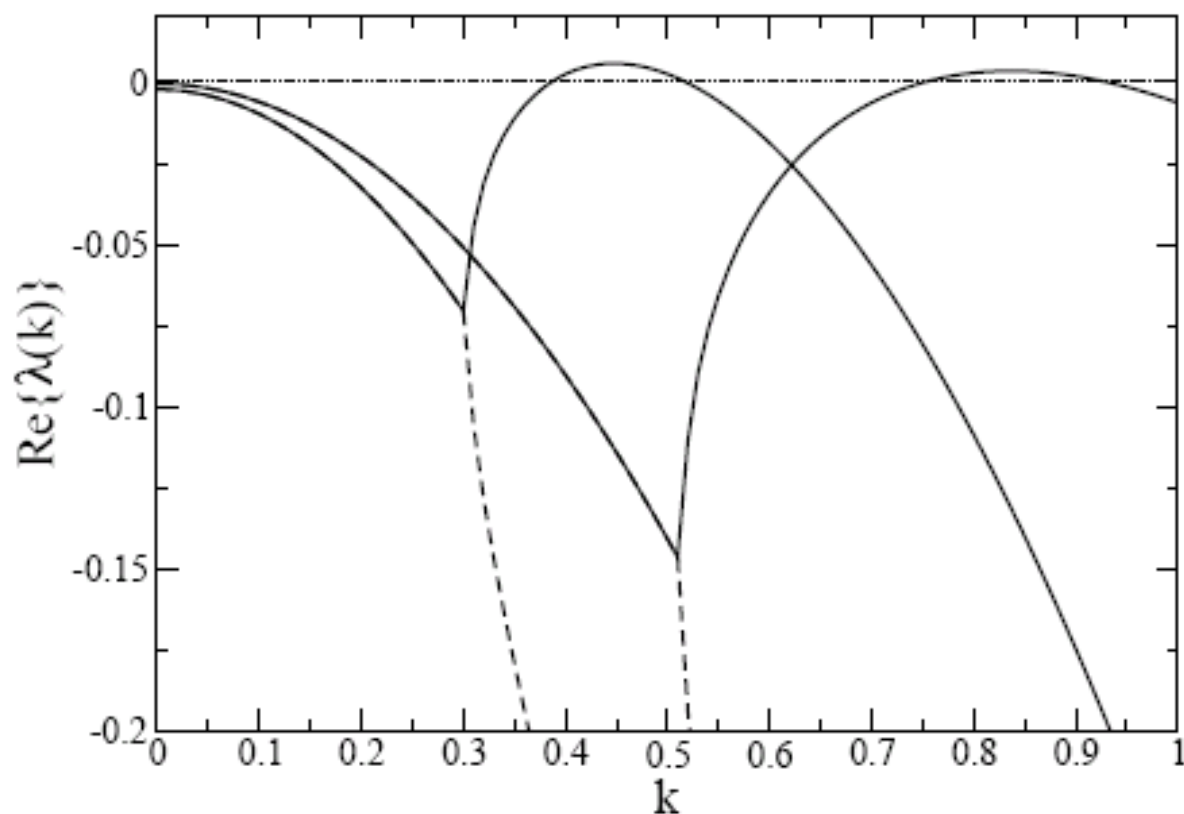


$$D = 0.516, a = 1.112, b = -1.01$$
$$\nu = 0.450 \text{ for } k_c = 0.46 \text{ (} a_c = 1.121 \text{)}$$



非线性物理：形态发生

12. 色散关系举例：



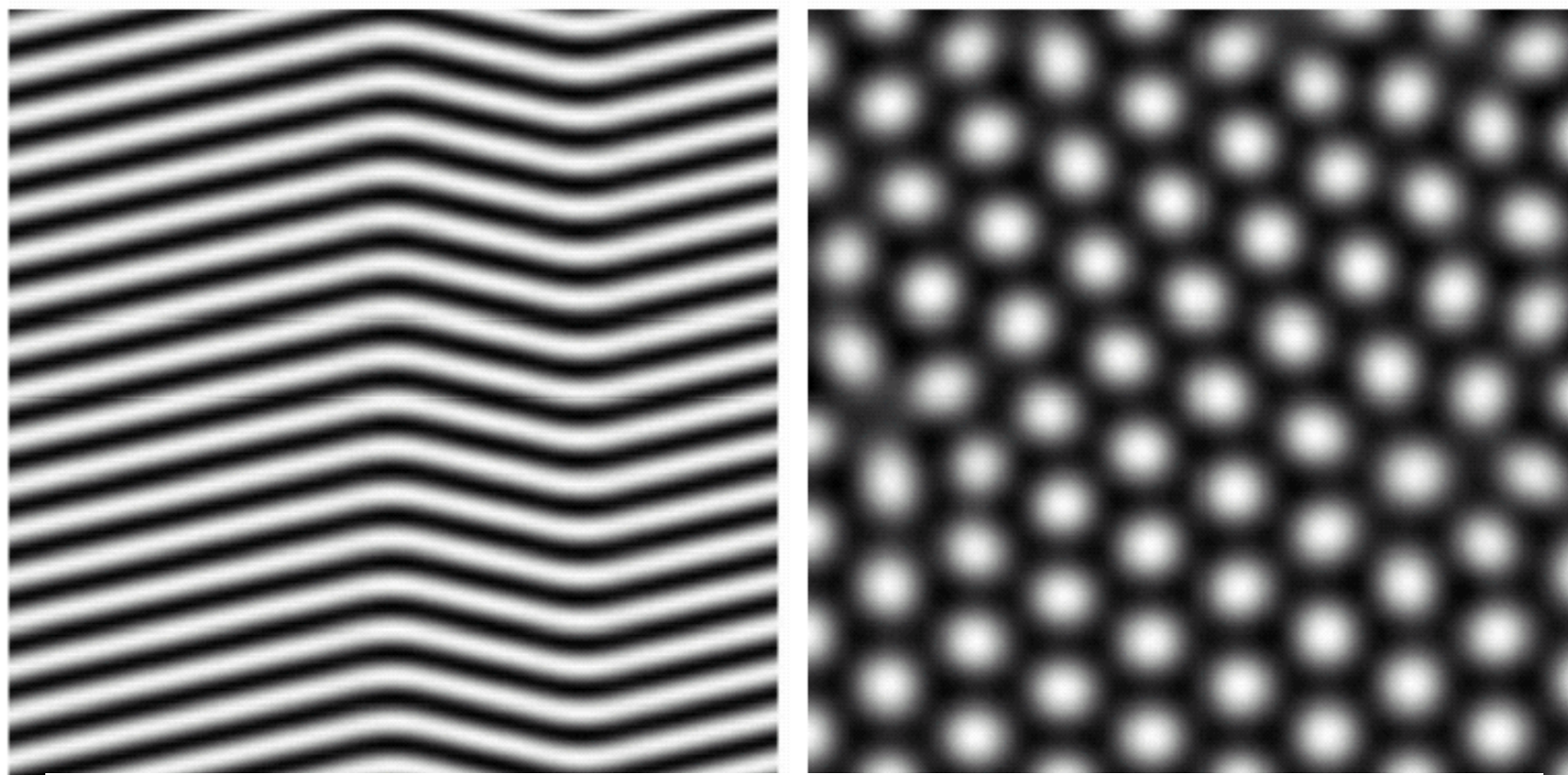
$$D = 0.122, a = 2.513, b = -1.005$$

$$\nu = 0.199 \text{ for } k_c = 0.85 \text{ (} a_c = 2.583 \text{)}$$



非线性物理：形态发生

1. 两种形态：



Chemical concentration patterns obtained from numerical simulations
Left: Stripe pattern ($k_c = 0.85$, $C = 0$).

Right: Hexagonal spotty pattern
($k_c = 0.46$, $C = 1.57$)

非线性稳定性分析：

1. 分叉理论是非线性稳定性分析的有力数学工具，就图灵形态发生而言，分叉分析将告诉我们在系统参数改变时不同的简单形态之稳定性是如何变化的。
2. 当然，分叉分析在数学上很复杂，我们这里只是进行一些非常简略的分析，很多数学推导就省去不提了。
3. 分叉分析的基本思路是得到空间浓度场中那些**active**的傅立叶模式：



$$\vec{w} = (u, v)^T$$

$$\vec{w} = \vec{w}_0 \sum_{\vec{k}_j} (W_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} + W_j^* e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}})$$

式中 \vec{w}_0 为有效模式的方向， W_j 和 W_j^* 是对应于波矢为 \vec{k}_j 和 $-\vec{k}_j$ 的模式之振幅。

非线性物理：形态发生

1. 分叉分析包括三个步骤：在特定对称性条件下推导振幅方程的一般形式；决定振幅方程的参数值；最后借助对振幅方程系统的线性稳定性分析，来判断不同形态的稳定性。
2. 关于形态发生的研究方法，我们前面已经提到对于无界面问题最佳的分析方法就是振幅方程。图灵形态问题也是一个例子。
3. 一个动力学系统含有 n 个非稳的模式 $k_j(j=1,2,\dots,n)$ ，其振幅为 W_j 。关于 W_j 的振幅方程一般包括两项：前面线性稳定性分析给出的具有正本征值的线性增长项和不同非稳定模式之间耦合导致的非线性耦合项：



$$\frac{dW_j}{dt} = \lambda_c W_j + f_j(W_1, \dots, W_n)$$

4. 对于线性项，可以根据失稳起始点处的本征态来描述，根据前面的分析，就有：

$$\lambda_c = \left. \frac{d\lambda}{da} \right|_{a=a_c} (a - a_c) = \frac{\nu^2(\nu - 2R)}{(\nu(1 + b) - 2R)(\nu - R)}$$



这里参数 $R = \sqrt{(Db+1)/2}$ ，各参数意义见前面的线性稳定性分析。
而非线性耦合项 $f(W_1, \dots, W_n)$ 可以通过几何方法来讨论对称性而进行处理。

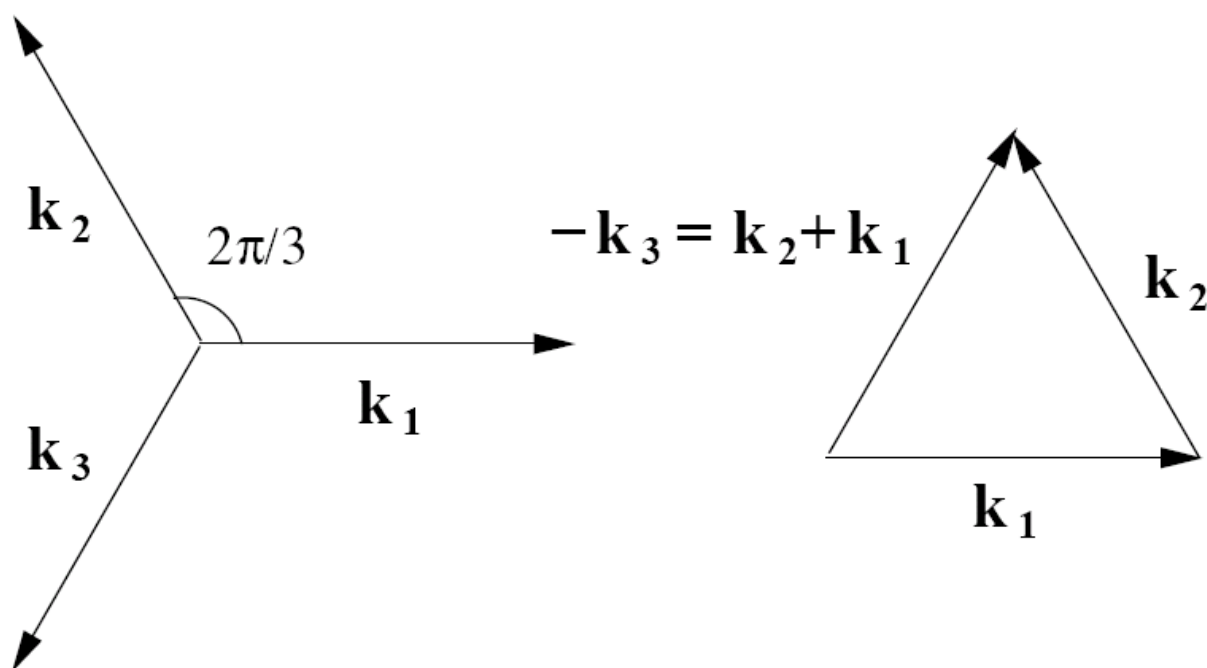
5. 在二维扩散-反应系统中，典型的形态是条状和六角对称的点状。而在三维情况下，可以是简单立方SC、体心立方BCC和面心立方形态。
6. 下面我们讨论几种具体情况。



非线性物理：形态发生

二维六角点阵：

1. 二维六角点阵的波矢量有三个： $k_1=k_c(1,0)$, $k_2=k_c(-1/2,\sqrt{3}/2)$ 和 $k_3=k_c(-1/2,-\sqrt{3}/2)$ ，满足 $|k_{1,2,3}|=k_c$ 。从矢量分析角度说，有 $k_3=-k_1-k_2$ ，所以这三个矢量间存在共振模式。在推导振幅方程时必须考虑这一因素。在其它对称性情况下，这种共振模式未必存在。



非线性物理：形态发生

1. 由此可知，在振幅方程中 $f_j(W_1, W_2, W_3)$ ($j=1,2,3$) 中存在平方项($-W_{j+1}^*(-W_{j+2}^*)$)。其它的等价于 k_j 波矢组合包括： $k_j - k_{j+1} + k_{j+2}$, $k_{j+1} - k_{j+2} + k_j$, $k_{j+2} - k_j + k_{j+1}$ 。这些组合对 $f_j(W_1, W_2, W_3)$ 的贡献变成 $-|W_{j+1}|^2 W_j$, $-|W_{j+2}|^2 W_j$ 。
2. 我们假定只考虑到三次项后振幅方程演化达到饱和，更高项不再考虑，则振幅方程就是：



非线性物理：形态发生

$$\frac{dW_j}{dt} = \lambda_c W_j + \Gamma W_{j+1}^* W_{j+2}^* - g[|W_j|^2 + \kappa(|W_{j+1}|^2 + |W_{j+2}|^2)]W_j$$

式中系数 Γ 、 g 和 κ 可以根据原始扩散反应方程来决定：

$$\bar{u}_t = D\nabla^2 \bar{u} + \nu(\bar{u} + a\bar{v} - \bar{u}\bar{v}^2 - C\bar{u}\bar{v})$$

$$\bar{v}_t = \nabla^2 \bar{v} + \nu(b\bar{v} + h\bar{u} + \bar{u}\bar{v}^2 + C\bar{u}\bar{v}),$$

但是确定这些系数的数学十分复杂，本课程很难讲述明白。



三维立方点阵：

1. 三维简单立方点阵的波矢量有三个： $k_1=k_c(1,0,0)$, $k_2=k_c(0,1,0)$ 和 $k_3=k_c(0,0,1)$ ，满足 $|k_{1,2,3}|=k_c$ 。这些矢量是线性不相干的，所以之间不存在共振模式。振幅方程为：

$$\frac{dW_j}{dt} = \lambda_c W_j - g[|W_j|^2 + \kappa(|W_{j+1}|^2 + |W_{j+2}|^2)]W_j$$

非线性物理：形态发生

1. 三维体心立方点阵的波矢量有四个： $k_1=k_c(1,1,1)/\sqrt{3}$, $k_2=k_c(1,1,-1)/\sqrt{3}$, $k_3=k_c(1,-1,1)/\sqrt{3}$ 和 $k_4=k_c(1,-1,-1)/\sqrt{3}$ ，满足 $|k_{1,2,3,4}|=k_c$ 。这四个单位矢量并不是不相干的，因为 $k_2+k_3-k_4=k_1$ ，所以存在立方共振耦合项。振幅方程为：

$$\begin{aligned} \frac{dW_j}{dt} = & \lambda_c W_j + \Gamma W_{j+1}^* W_{j+2}^* W_{j+3}^* - g[|W_j|^2 \\ & + \kappa(|W_{j+1}|^2 + |W_{j+2}|^2 + |W_{j+3}|^2)] W_j \end{aligned}$$



中心流型梯减(CMR: central manifold reduction):

1. **CMR**方法的根本目的是将浓度空间映射到高维等价的振幅波矢空间。中心流型就是将波矢空间中稳定区与非稳定区分开的表面。使用这一方法可以将振幅方程右边的各个系数推导出来。详细的推导证明我们不再讲述。
2. 应用到二维六角点阵，可以得到：



$$\Gamma = \frac{-2bC\nu R\sqrt{\nu(\nu - 2R)}}{(\nu + b\nu - 2R)\sqrt{(\nu + b\nu - 2R)(\nu - R)}}$$

$$g = \frac{3b\nu^2(\nu - 2R)R}{(\nu + b\nu - 2R)^2(\nu - R)},$$

$$\kappa = 2,$$

$$R = Dk_c^2 = \nu(Db + 1)/2.$$

对其它的点阵可以依此类推了。



1. 简单立方点阵：

$$g = \frac{-b\nu^2(C^2(8\nu - 23R) - 27R)(\nu - 2R)}{9(\nu + b\nu - 2R)^2(\nu - R)}$$

$$\kappa = \frac{18(C^2(8\nu - 7R) - 3R)}{C^2(8\nu - 23R) - 27R},$$



2. 体心立方点阵：

$$\Gamma = \frac{6b\nu^2(\nu - 2R)(3C^2(8\nu - 7R) - R)}{(\nu + b\nu - 2R)^2(\nu - R)},$$
$$g = \frac{-b\nu^2(C^2(8\nu - 23R) - 27R)(\nu - 2R)}{9(\nu + b\nu - 2R)^2(\nu - R)}$$
$$\kappa = \frac{18(C^2(648\nu - 583R) - 75R)}{25(C^2(8\nu - 23R) - 27R)},$$



图灵结构稳定性分析：

1. 在得到了振幅演化方程之后，我们再对振幅演化进行线性稳定性分析。
2. 首先确定振幅系统的静态解 W_c ，这强烈依赖具体系统的对称性。然后对振幅方程进行线性化处理。例如，对下面的二维六角点阵振幅方程进行线性化处理：

$$\frac{dW_j}{dt} = \lambda_c W_j + \Gamma W_{j+1}^* W_{j+2}^* - g[|W_j|^2 + \kappa(|W_{j+1}|^2 + |W_{j+2}|^2)]W_j$$



非线性物理：形态发生

可以得到相应的**Jacobian**线性矩阵**A**:

$$\{\mathbf{A}\}_{ij} = \left| \frac{df_i}{d|W_j|} \right|_{(W_1^c, W_2^c, W_3^c)}$$

然后我们求线性化方程 $dW/dt = \mathbf{A}W$ 的本征值随参数**C**的变化来决定振幅的稳定性。



二维六角点阵：

1. 二维六角点阵存在两种形态：条状和六角点状： $W_c=(W_1^c,0,0)^T$ 和 $W_c=(W_1^c=W_2^c=W_3^c)^T$ 。其振幅线性化方程中第一项指数项线性化为一次项，这样，线性化方程变为：

$$\begin{aligned}\frac{dW_1}{dt} &= \lambda_c W_1 + \Gamma W_2^* W_3^* - g[|W_1|^2 + \kappa(|W_2|^2 + |W_3|^2)]W_1, \\ \frac{dW_2}{dt} &= \lambda_c W_2 + \Gamma W_1^* W_3^* - g[|W_2|^2 + \kappa(|W_1|^2 + |W_3|^2)]W_2, \\ \frac{dW_3}{dt} &= \lambda_c W_3 + \Gamma W_1^* W_2^* - g[|W_3|^2 + \kappa(|W_1|^2 + |W_2|^2)]W_3\end{aligned}$$



非线性物理：形态发生

其静态解由 $dW_j/dt=0$ 决定：

$$|W_{\pm}^c| = \frac{|\Gamma| \pm \sqrt{\Gamma^2 + 4\lambda_c g[1 + 2\kappa]}}{2g(1 + 2\kappa)}$$



非线性物理：形态发生

1. 对条状形态，线性化处理的本征值为：

$$\mu_1^s = -2\lambda_c, \mu_2^s = -\Gamma\sqrt{\frac{\lambda_c}{g}} + \lambda_c(1 - \kappa)$$

$$\mu_3^s = \Gamma\sqrt{\frac{\lambda_c}{g}} + \lambda_c(1 - \kappa)$$

2. 对六角形态，线性化处理的本征值为：

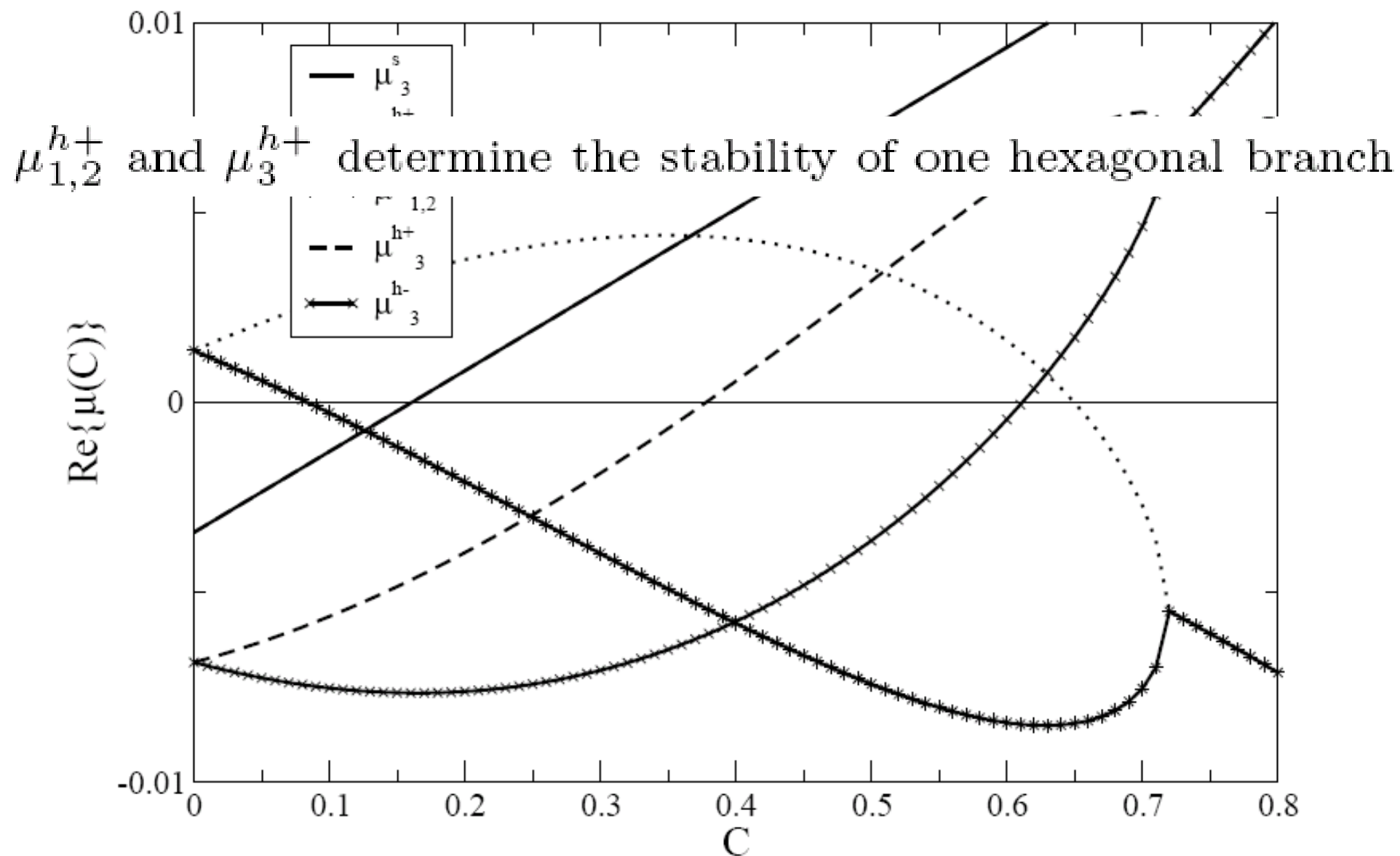
$$\mu_{1,2}^h = \lambda_c - W_c^\pm(\Gamma + 3gW_c^\pm)$$

$$\mu_3^h = \lambda_c + W_c^\pm(2\Gamma - 3g(2\kappa + 1)W_c^\pm)$$

3. 下面可以计算这些本征值与参数C的关系了。那些为正的本征值对应的振幅将消失，而那些本征值为负的振幅将保持稳定而被观察到。



非线性物理：形态发生



非线性物理：形态发生

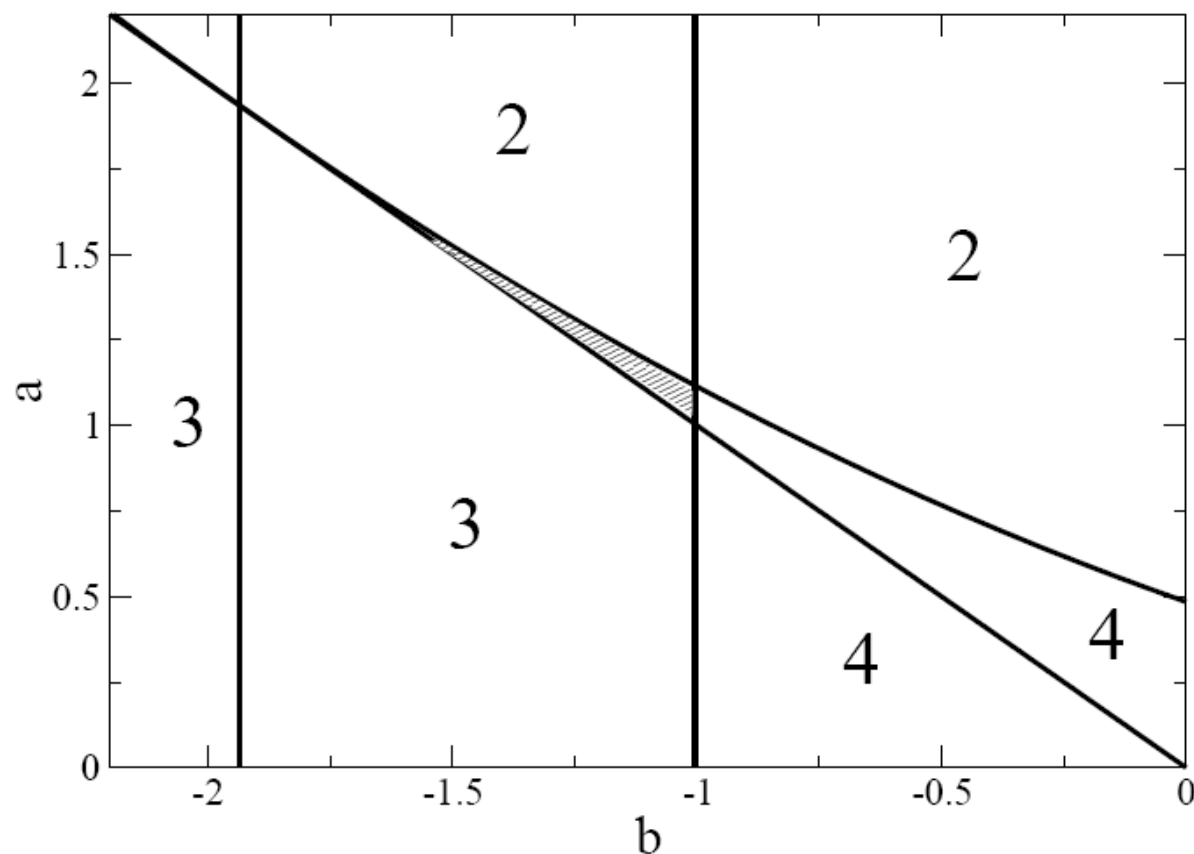
电影：针对图灵形态演化有一些数值计算结果！

- Self-assembly of a minimal surface in the presence of noise in 3D
- Self-assembly of a planar lamellae in 3D
- The self-organization of a network in 3D
- The self-organization of a network with Gaussian noise in 2D
- The self-organization of spherical structures in 3D
- The self-organization of spherical structures under Gaussian noise in 3D
- The self-organization of spherical structures under strong Gaussian noise in 3D
- Time dependent oscillations in 3D under noise
- Turing-Hopf-bifurcation-in-a-monostable-system
- Turing-Hopf-Turing-bifurcation-in-a-tristable-system-with-twinkling-spots
- Turing-Turing-bifurcation-(coupled-with-Hopf)-in-a-tristable-system



非线性物理：形态发生

作业：针对下图图灵区域数值计算图灵形态！



$$D = 0.516, a = 1.112, b = -1.01$$

$$\nu = 0.450 \text{ for } k_c = 0.46 \text{ } (a_c = 1.121)$$



