

周期轨道与混沌：

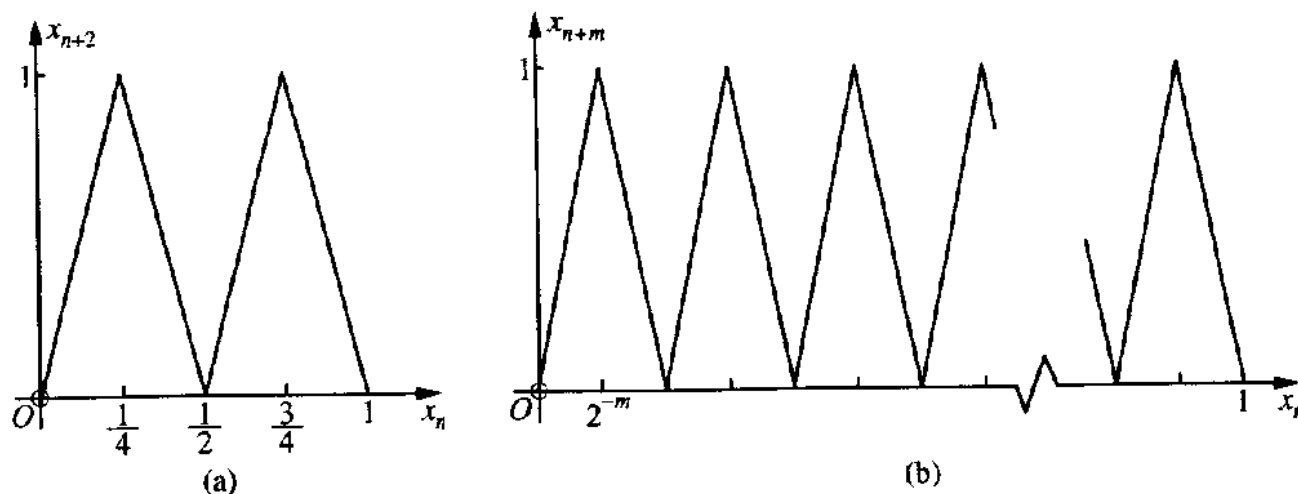
- 前面几小节讨论了非线性动力系统演化的多样性、分叉的基本概念及表征、非线性系统演化的几何特征和广域边界的分形特征。
- 下面开始讨论混沌发生本身的演化过程。我们最普遍的认识是：混沌系统是周期分叉导致，如果所有周期轨道在演化过程中都失稳，则混沌就不可避免。
- 以帐篷映射和锯齿映射为例来说明迭代过程中的周期轨道行为。

$$x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2 - 2x_n, & 1/2 < x_n \leq 1 \end{cases} \quad x_{n+1} = S(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n < 1/2 \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$



非线性物理：混沌物理

- 帐篷映射的两次迭代 $T^2(x)$ 与多次迭代 $T^m(x)$ 轨道如下图所示：

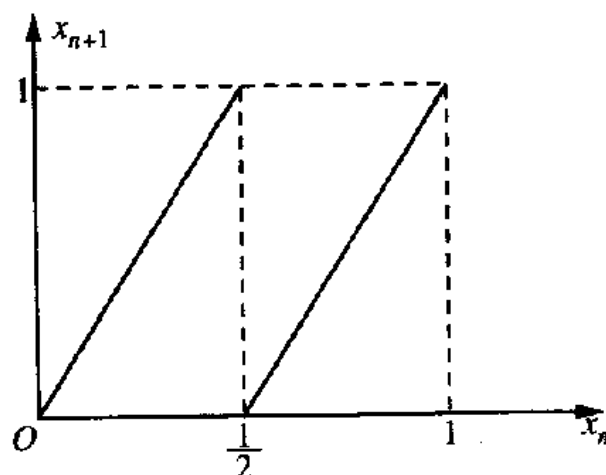


- $T^2(x)$ 与 $y=x$ 有四个交点， $x=0$ 和 $x=2/3$ 为周期1交点； $x=2/5$ 和 $x=4/5$ 为周期2交点。 $x \rightarrow 2/5 \rightarrow 4/5 \rightarrow 2/5 \rightarrow 4/5 \dots$ ， $T^m(x)$ 与 $y=x$ 的交点及其对应的周期数会更多，与 m 相关。
- 因为这些交点的斜率分别为 $|\lambda|=2$ 和 $|\lambda|=4$ ，因此都不稳定。

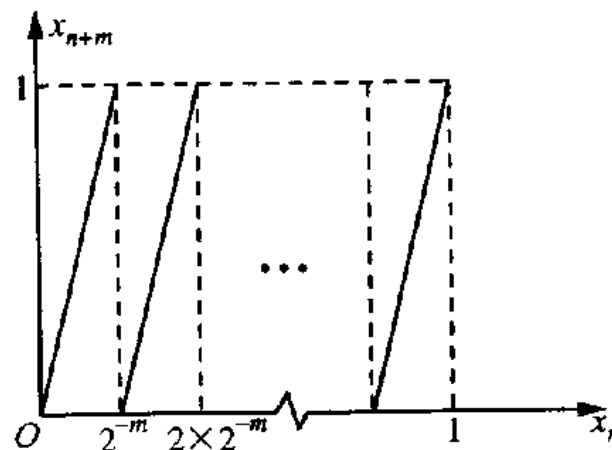


非线性物理：混沌物理

- 锯齿映射的二次和多次迭代 $S(x)$ 、 $S^m(x)$ 图示如下：



(a)



(b)

- $S^2(x)$ 与 $y=x$ 有四个交点， $x=0$ 和 $x=1$ 为周期1交点； $x=1/3$ 和 $x=2/3$ 为周期2交点， $x \rightarrow 1/3 \rightarrow 2/3 \rightarrow 1/3 \rightarrow 2/3 \dots$ ， $S^m(x)$ 与 $y=x$ 的交点及其对应的周期数会更多，与 m 相关。
- 同理，这些交点也是不稳定的。



非线性物理：混沌物理

- 对于 $T^m(x)$ 及 $S^m(x)$ 之类，如何判断这些轨道交点的周期数？一种有效方法是以二进制数来表示，非常有趣！
- 设初值是 $x_0=0.a_1a_2a_3a_4\dots$ ，其中 a_i 非0即1。
- 按照锯齿映射 S ， $2x_0$ 代表小数点向右移动一位，即 $a_1.a_2a_3a_4\dots$ ，如 $x_0<0.5$ ， $a_1=0$ ，迭代一次得到 $x_1=a_1.a_2a_3a_4\dots=0.a_2a_3a_4\dots$ ；如 $x_0\geq0.5$ ， $a_1=1$ ，按照迭代要求得到 $x_1=a_1.a_2a_3a_4\dots-1=0.a_2a_3a_4\dots$ 。锯齿映射就是每次迭代小数点向右移动一位，整数部分取0。
- 对帐篷映射 T ， $x_0<0.5$ 时迭代与上相同， $x_0\geq0.5$ 时， $x_1=2-2x_0=1-(2x_0-1)=1-S(x_0)$ ，即将 $0.a_2a_3a_4\dots$ 中的0和1对易， $0\rightarrow1$ ， $1\rightarrow0$ 。



非线性物理：混沌物理

- 例如： $x_0=0.101101>0.5$, $2x_0=1.01101\rightarrow0.01101$, $x_1=2-2x_0=0.10010$ 。
- 下面可以来分析锯齿映射的初值 x_0 对应的周期数了。
- 设 $x_0=0.1010101010\dots=2/3=0.\underline{10}$, $x_1=0.0101010\dots=1/3=0.\underline{01}$; 迭代在 $0.\underline{10}$ 和 $0.\underline{01}$ 之间循环, 说明是周期2轨道。
- 对于 $x_0=4/7=0.\underline{100}$, $x_1=1/7=0.\underline{001}$, $x_2=2/7=0.\underline{010}$, 依此类推, 周期3轨道。
- 如果 $x_0=0.a_1a_2a_3\dots a_pa_1a_2a_3\dots a_p\dots=0.\underline{a_1a_2a_3\dots a_p}$, 对应周期 P 轨道。



非线性物理：混沌物理

- 有趣的是，帐篷映射和锯齿映射具有下列关联：
- $TT(x)=TS(x)$, $TTT(x)=TTS(x)=TSS(x)$, $T^N(x)=TS^{N-1}(x)$ 。证明如下：
- $T(T(x))=T(2x)=4x$, $T(S(x))=T(2x)=4x$, $0 \leq x \leq 1/4$
- $T(T(x))=T(2x)=2-4x$, $T(S(x))=T(2x)=2-4x$, $1/4 < x \leq 1/2$
- $T(T(x))=T(2-2x)=-2+4x$, $T(S(x))=T(2-2x)=-2+4x$, $1/2 < x \leq 3/4$
- $T(T(x))=T(2-2x)=4-4x$, $T(S(x))=T(2-2x)=4-4x$, $3/4 < x \leq 1$
- 由此得到一个重要结论：如果 $w_0=S^P(w_0)$ ，则 $x_P=x_0=T(w_0)$ 。
- $x_P=T^P(x_0)=T^P(T(w_0))=T^{P+1}(w_0)=TS^P(w_0)=T(w_0)=x_0$ 。



非线性物理：混沌物理

- 例如： $w_0=1/7$ 是锯齿映射的周期3轨道点，则 $x_0=2/7=T(1/7)$ 就是帐篷映射周期3轨道点。事实上， $x_0=2/7 \rightarrow x_1=4/7 \rightarrow x_2=6/7 \rightarrow x_3=2/7$ 。
- 关于周期3轨道有一个著名的数论定理—**Sharkovsky定理**：一维映射 $x_{n+1}=f(x_n)$ 存在下列自然数列：
 - **L1: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...**
 - **L2=2*L1: 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, ...**
 - **L3=3*L1: 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, ...**
 - **$L_n=2^n, \dots, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1$**
- 如映射有周期为某数的解，就一定有排在此数后面全部数的解。
- 注意到，周期3的解表示系统具有全部周期解，即混沌！



非线性物理：混沌物理

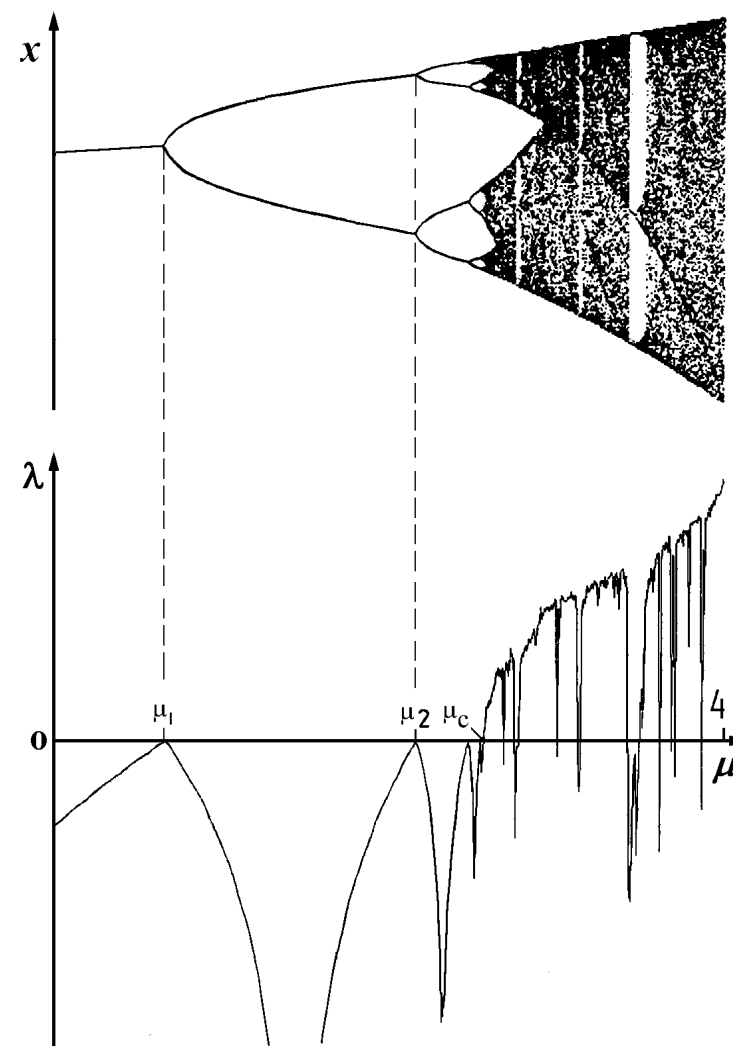
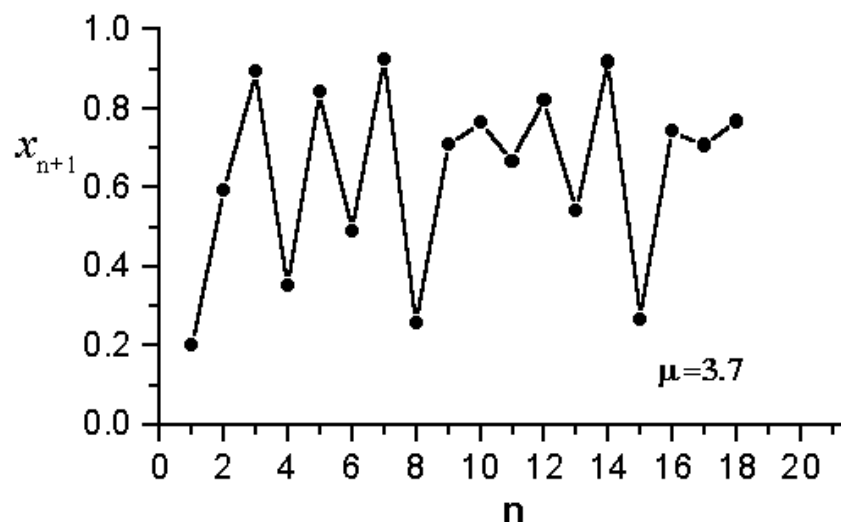
- 周期3意味着混沌：Li-Yorke定理！
- 一个例子是：
- $x_{n+1}=f(x_n)=3x_n \ (0 \leq x \leq 1/3), \ 17/9-8x_n/3 \ (1/3 \leq x \leq 2/3), \ 1/9 \ (2/3 \leq x \leq 1)$ 。
- 因为 $f(1/9)=1/3, f(1/3)=1, f(1)=1/9$ ，所以有周期3，即混沌。
- 混沌对应于统计物理中的各态历经。
- 事实上，我们前面提到的李雅普洛夫指数为正从稳定性角度描述了这种混沌的平均行为。



从倍周期走向混沌：

- 并非一定要有周期3才能混沌。现在说明平方映射的偶数周期走向混沌行为。

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$



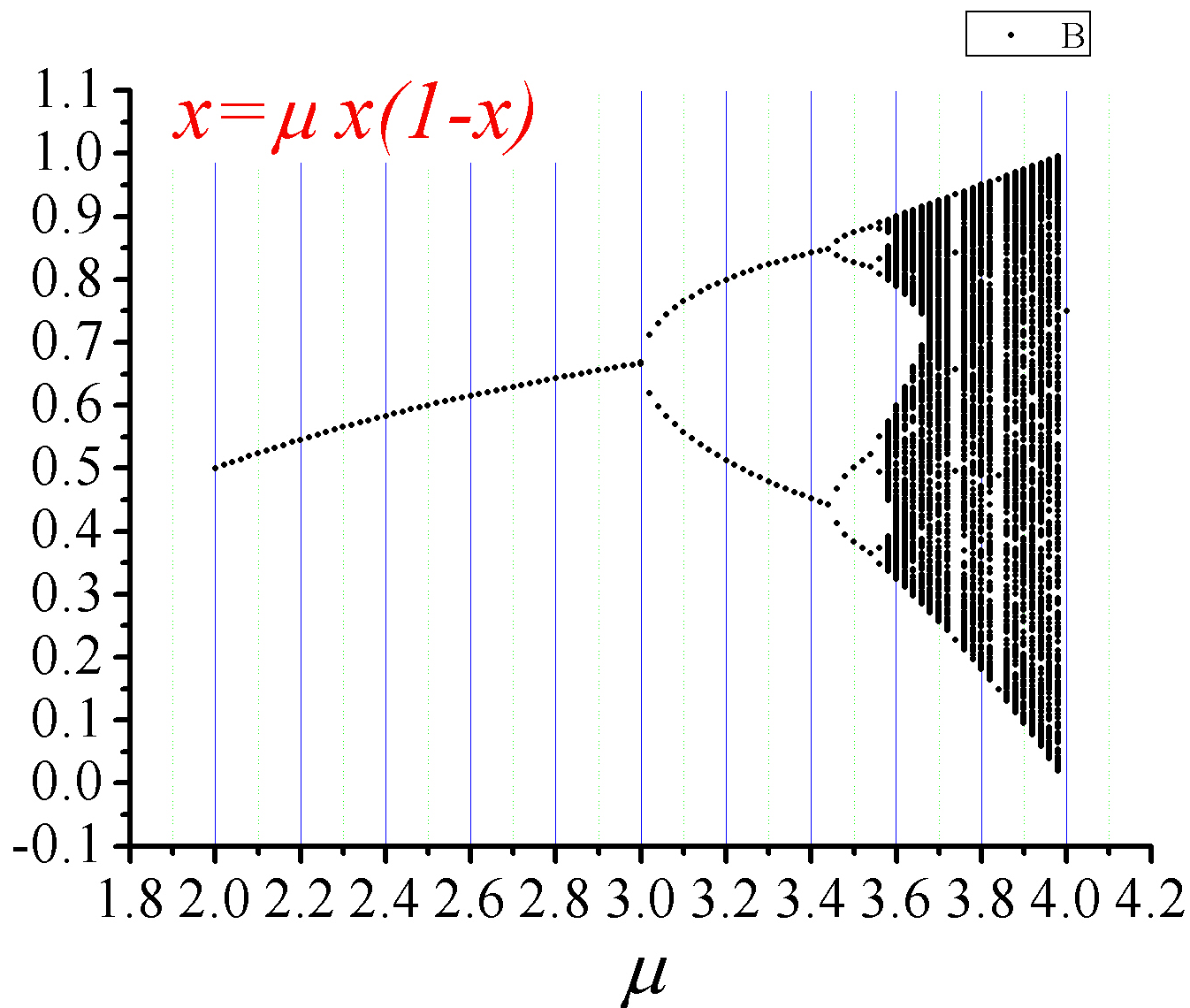
非线性物理：混沌物理

- 一些基本混沌特征：典型的倍周期分叉走向混沌。
 - 倍周期分叉对应的参数值 μ 间距越来越小，**Feigenbaum**常数。
 - 混沌初看模糊一片，细看可见模糊图象深浅程度不同，可区分出不同区域。说明迭代终值并非混乱一片，而是存在一定层次。
 - 模糊区域可见一些大大小小窗口，犹如两片乌云间有一小片蓝天，说明这些区域仍存在规则运动，对应于李雅普洛夫指数为负。
- 平方映射随参数值增加展现一幅规则—随机—规则—随机...交织起来的丰富多彩图象，说明混沌是一种特殊的、包含着无穷层次的运动形态。

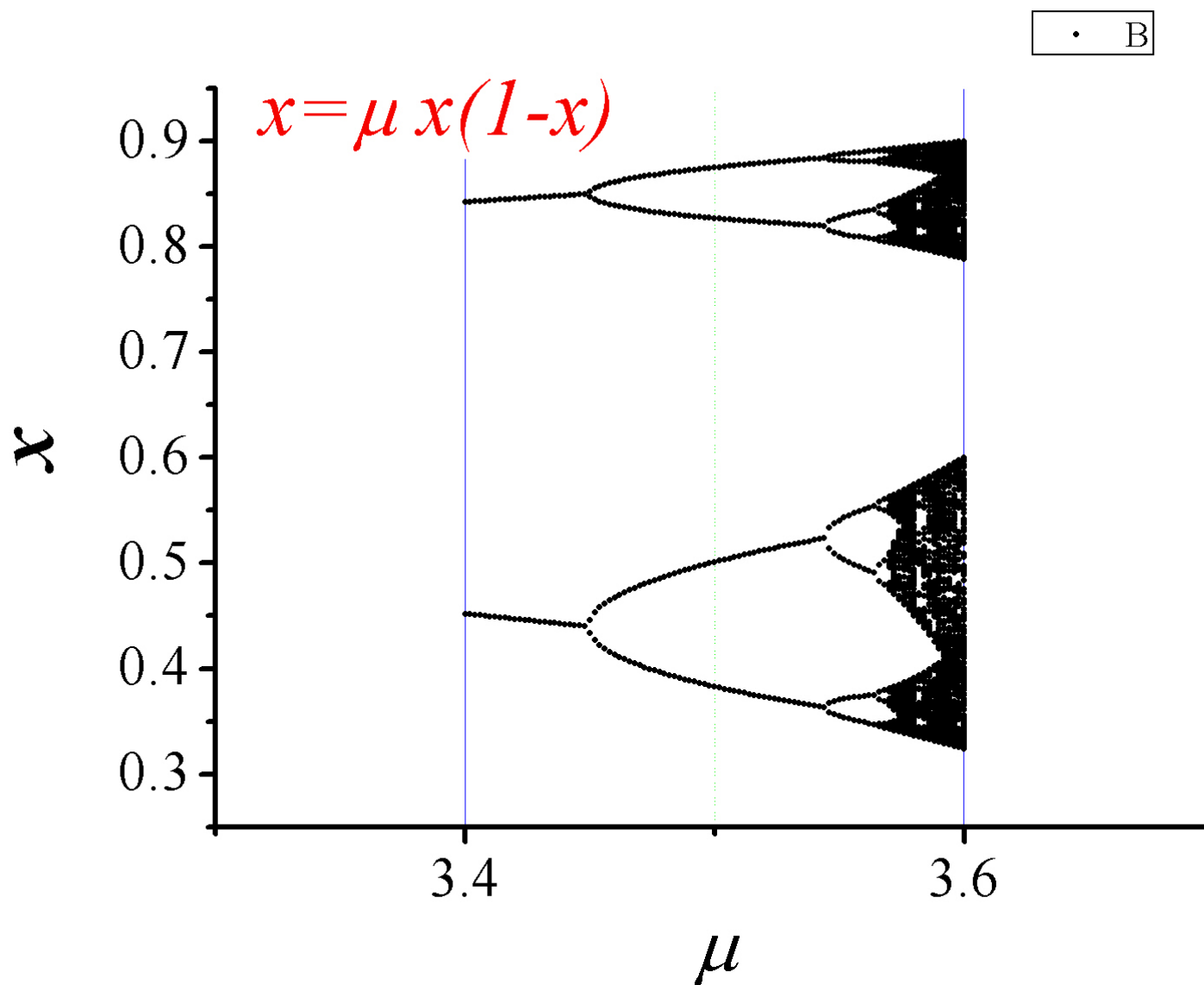


[3.4, 3.6]

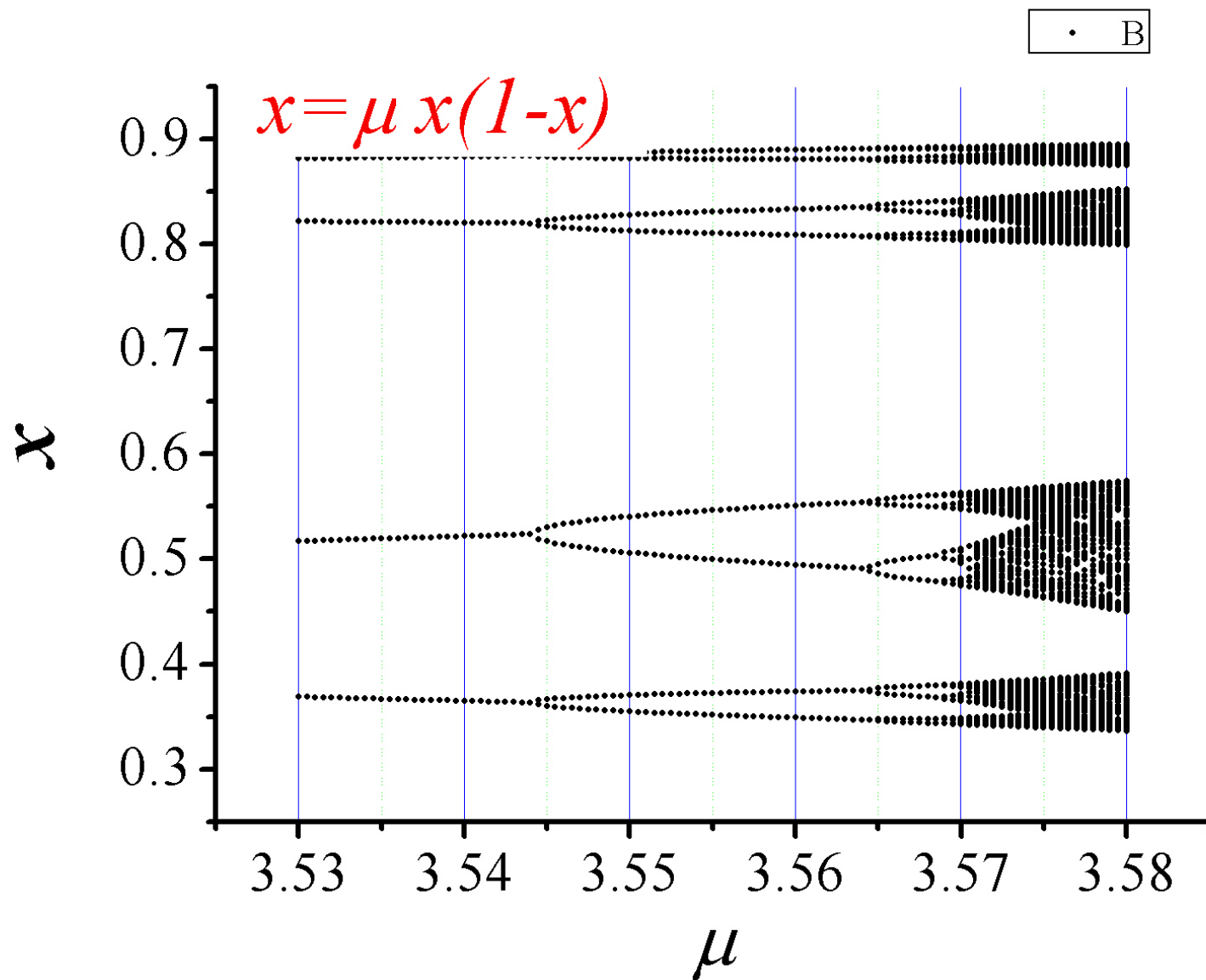
x



[3.53, 3.58]

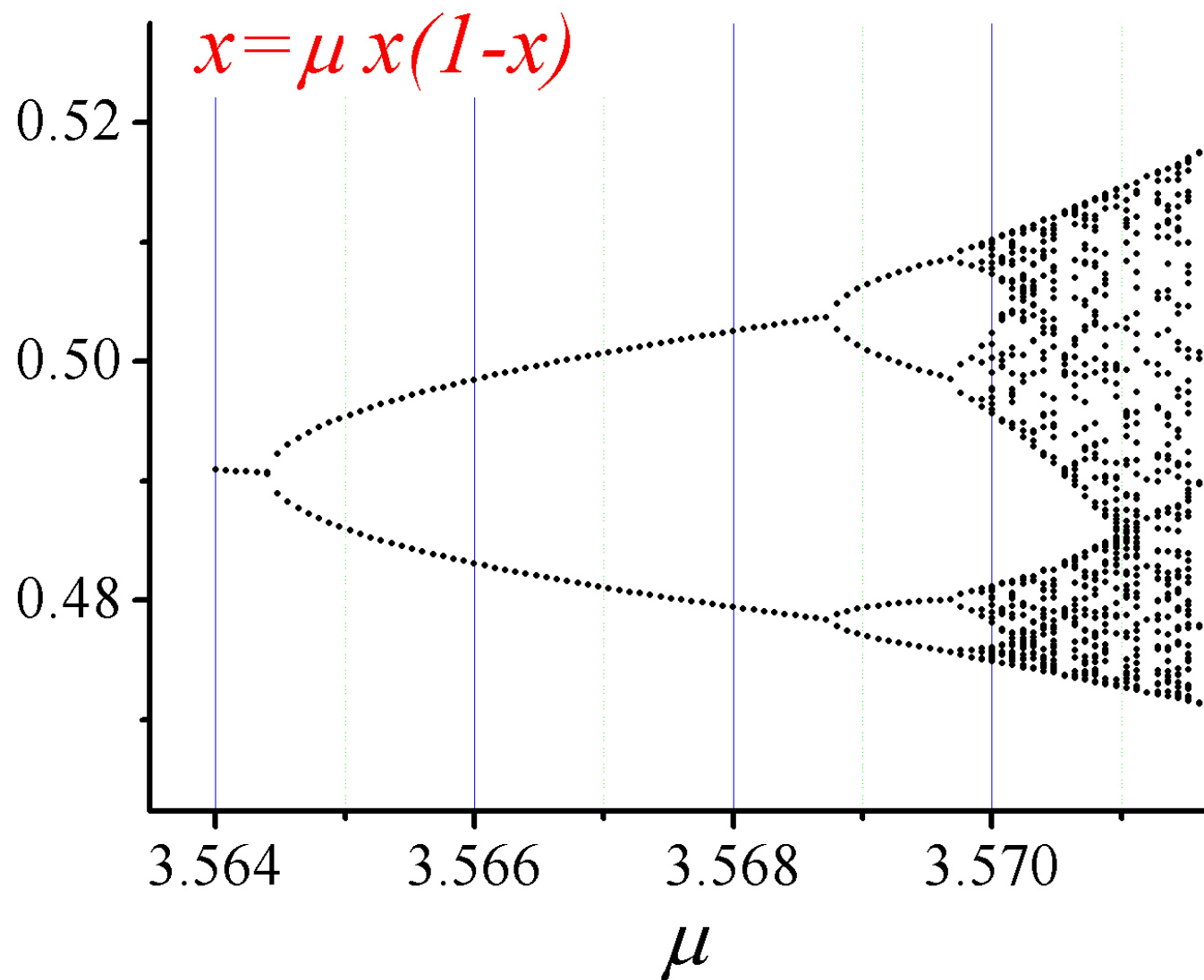


[3.564, 3.572]



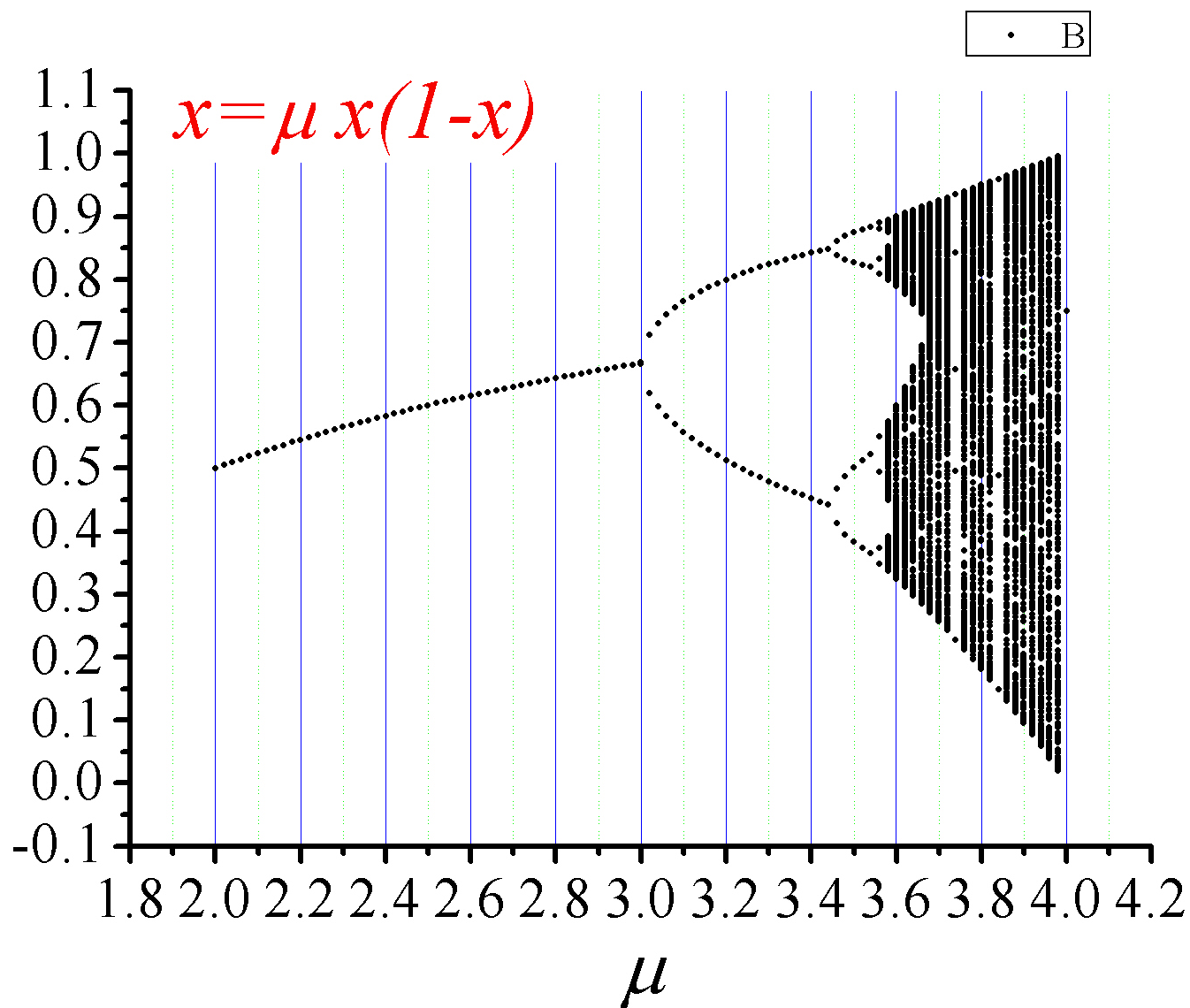
[3.564, 3.572]

x

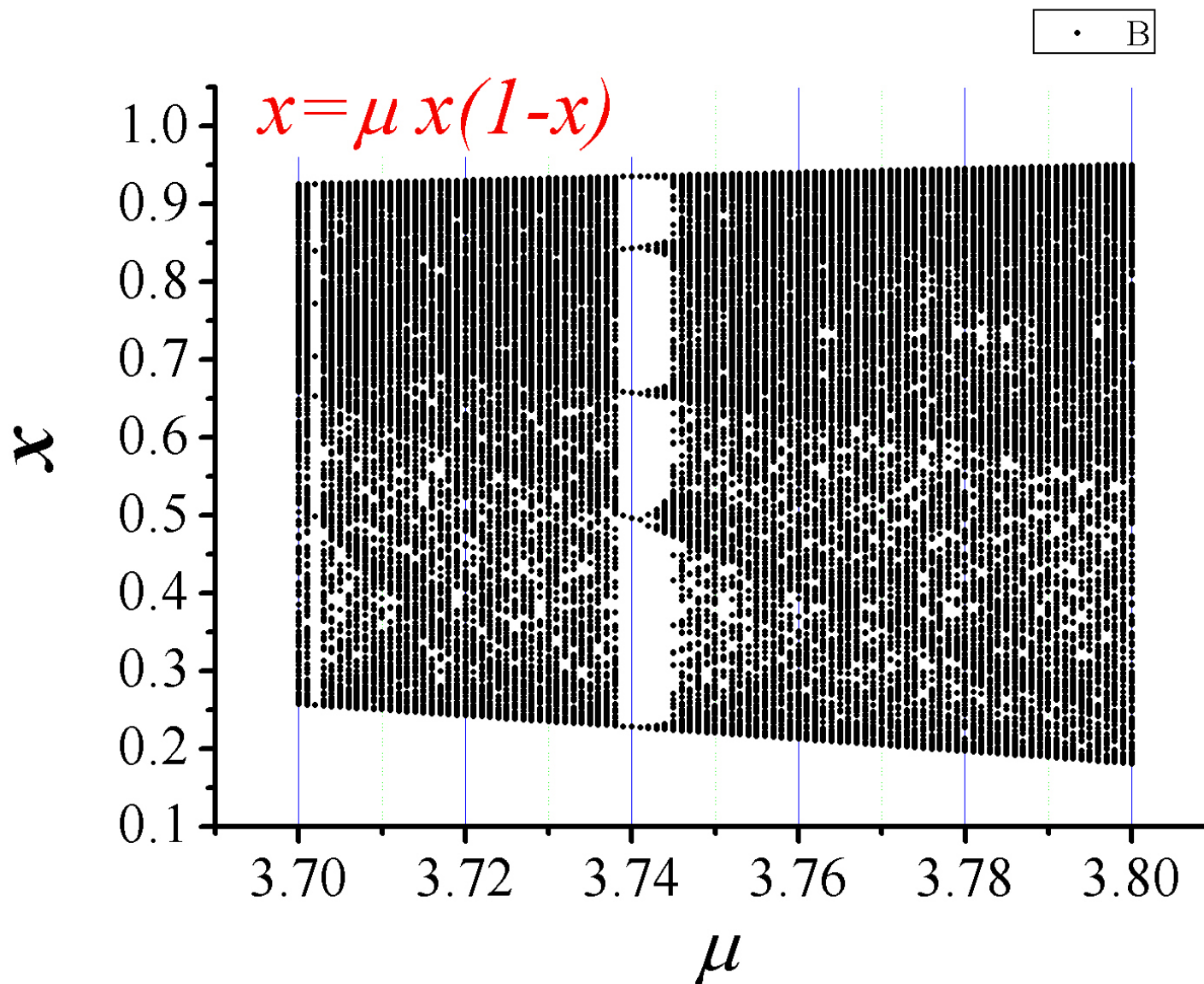


[3.7, 3.8]

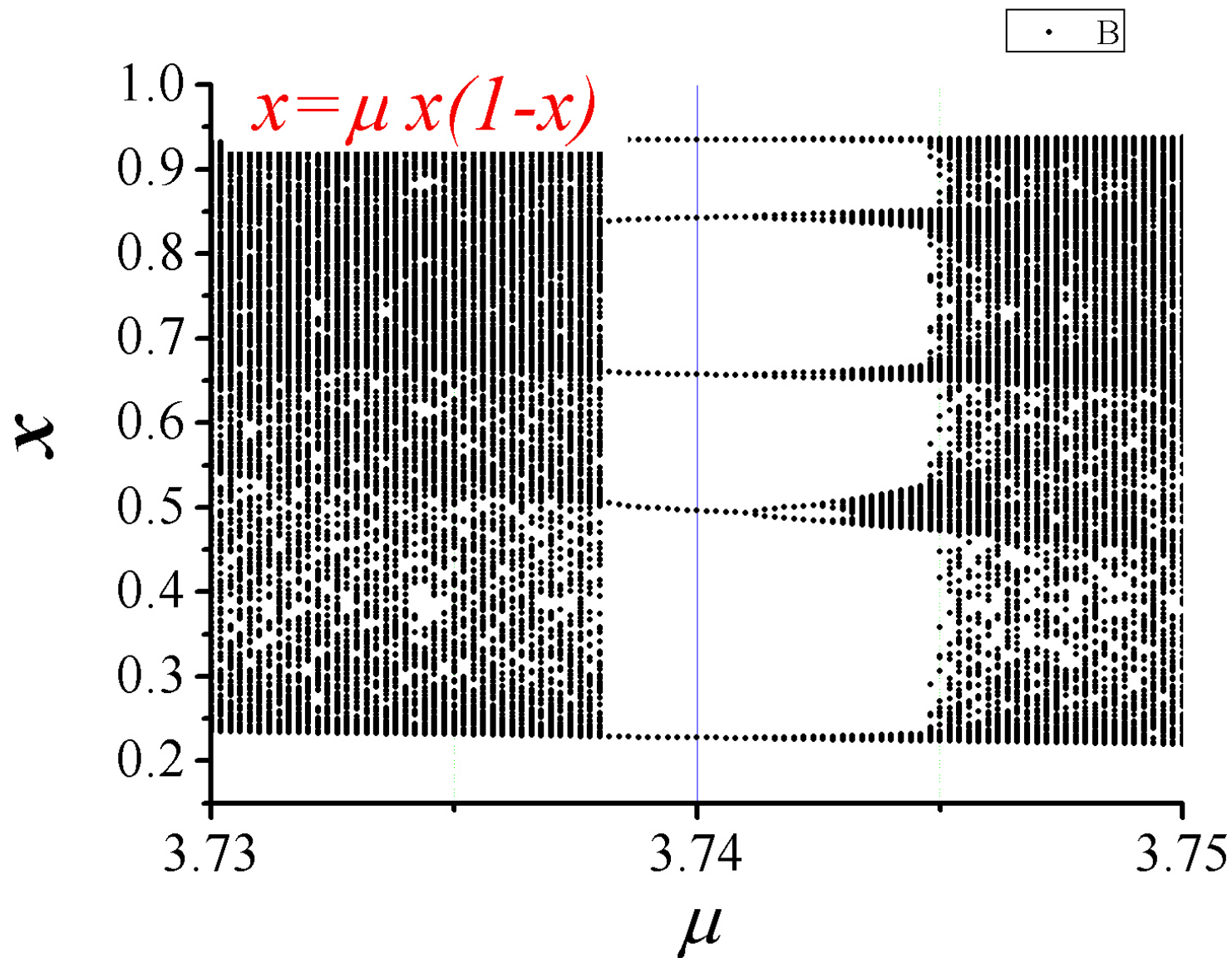
x



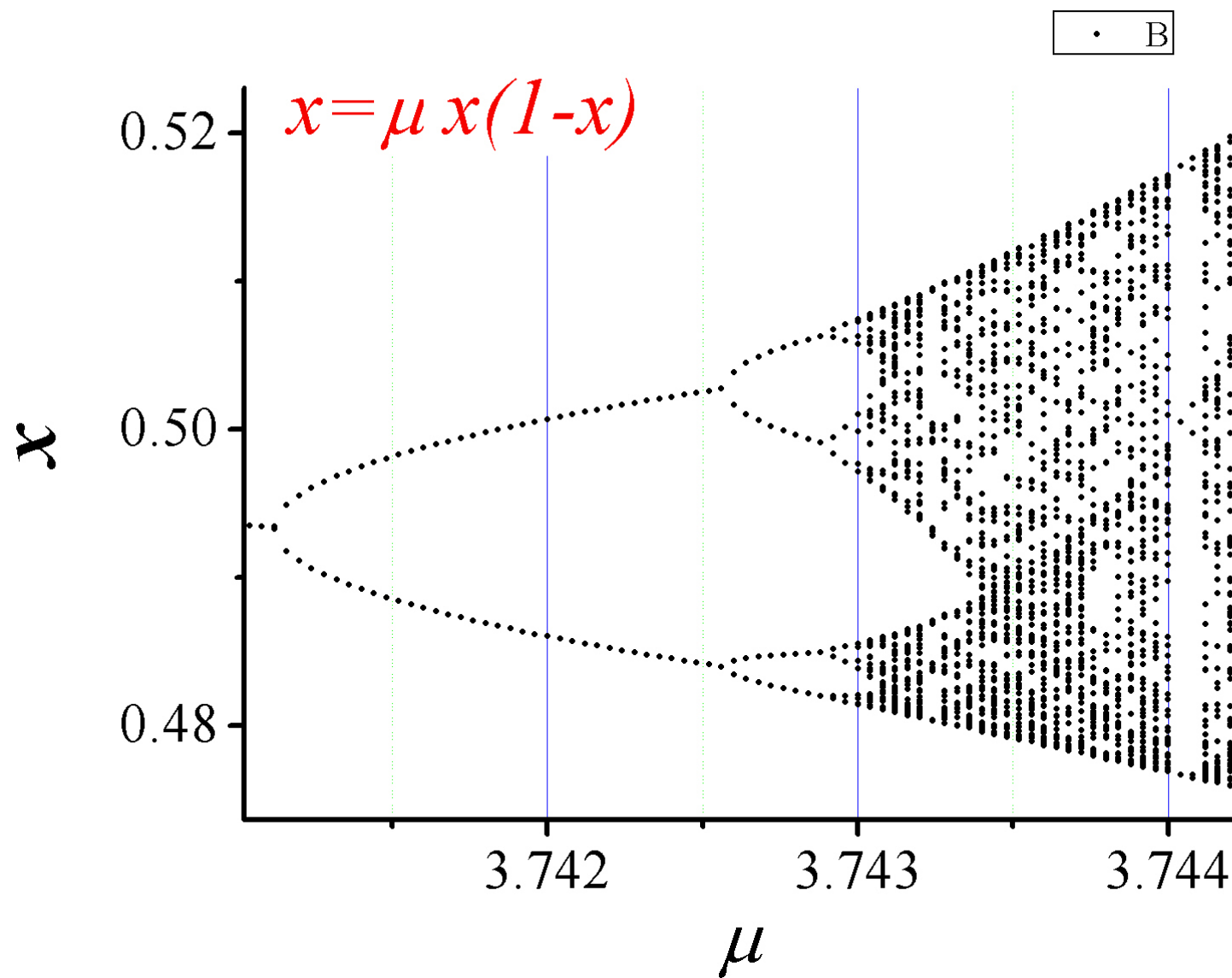
[3.7, 3.8]



[3.741, 3.745]



[更加细微的结构]



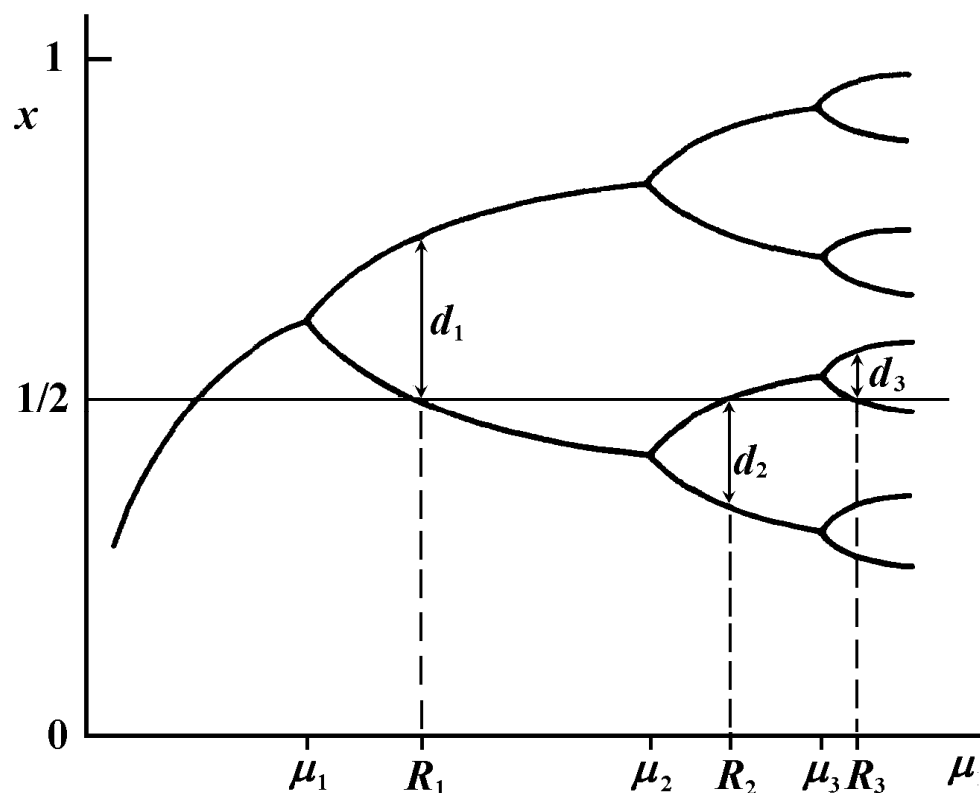
- Feigenbaum常数:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta$$

- $\delta=4.6692$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = \delta$$

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha = 2.5029$$



- δ 是第一常数， α 是第二常数，反映了非线性系统沿倍周期分岔系列通向混沌过程所具有的某种普适特性。



- 两个费根鲍姆常数虽然是在平方映射的计算中获得的，然而对于所有在 $[0, 1]$ 区间内为一条单峰的光滑曲线的映射都可计算得同样的常数，例如正弦曲线、圆与椭圆曲线等等。
- 在许多包含耗散的非线性系统中，只要发生倍周期分岔序列也会得到同样的普适常数。
- 费根鲍姆常数所包含的意义待进一步去发掘，它并不终止于某一位数，现在常见的第一常数位数为4.66920160910209909...，第二常数位数为2.502907875095....

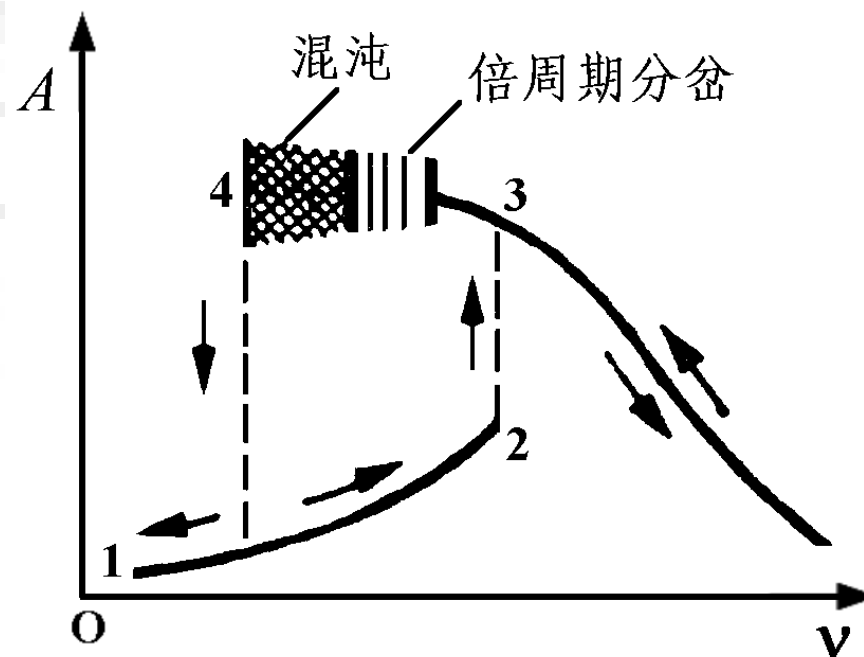


非线性物理：混沌物理

- **Dufin**方程的倍周期混沌：
- 软弹簧系统杜芬方程可以写成如下形式：

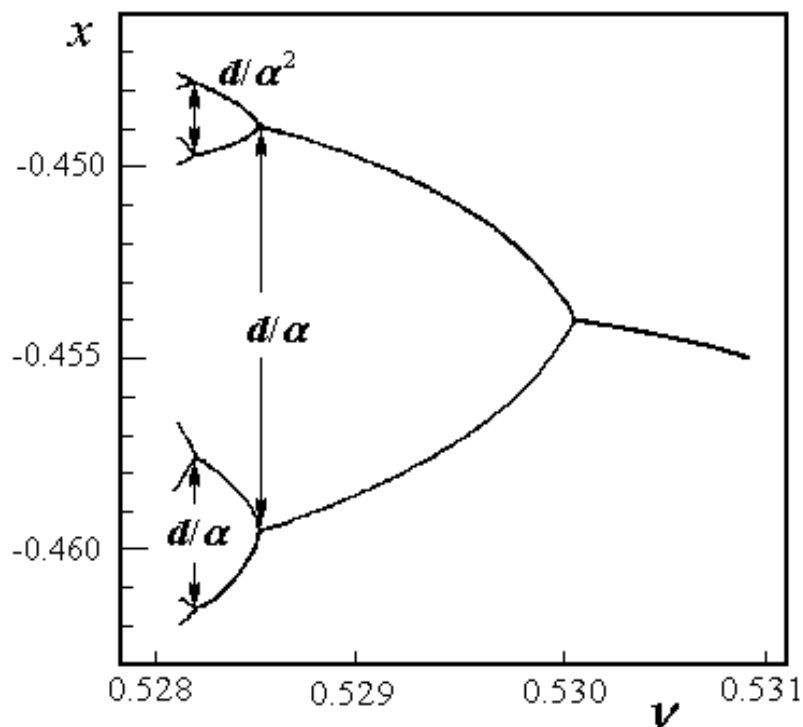
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \kappa \cdot x - \zeta \cdot x^3 = F \cos \nu t$$

- 设 $\gamma=0.4$, $\kappa=1$, $\zeta=4$, $F=0.115$,
计算弹簧振动的振幅变化：
- 对应于位置2处的参数值为0.68.



非线性物理：混沌物理

- 详细计算在此不再叙述，下面左图是上一组数据对应的倍周期分叉图，右图给出 $\gamma=0.05$, $\kappa=-1$, $\zeta=-4$, $F=0.7$, $\nu=0.7$ 时在 $(x, dx/dt)$ 相空间的奇异吸引子。



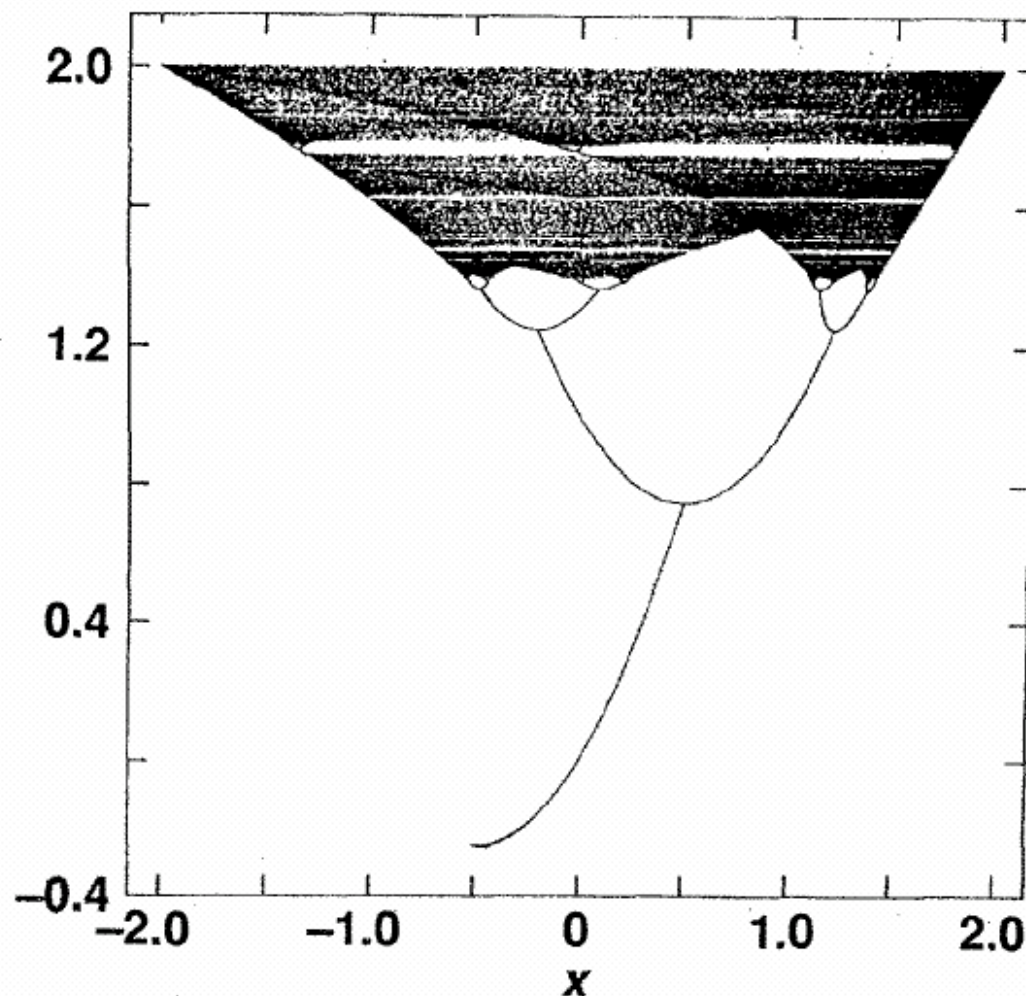
非线性物理：混沌物理

混沌区内的某些普适标度：

- 考虑一个稍微不同的一维映射系统，其实动力学演化是一样的，只是有现成文章，不要自己算罢了。

$$x_{n+1} = C - x_n^2$$

- 取 $C = -0.4$ 到 2.1 , $x_0 = -0.5$, 来看看迭代游戏。

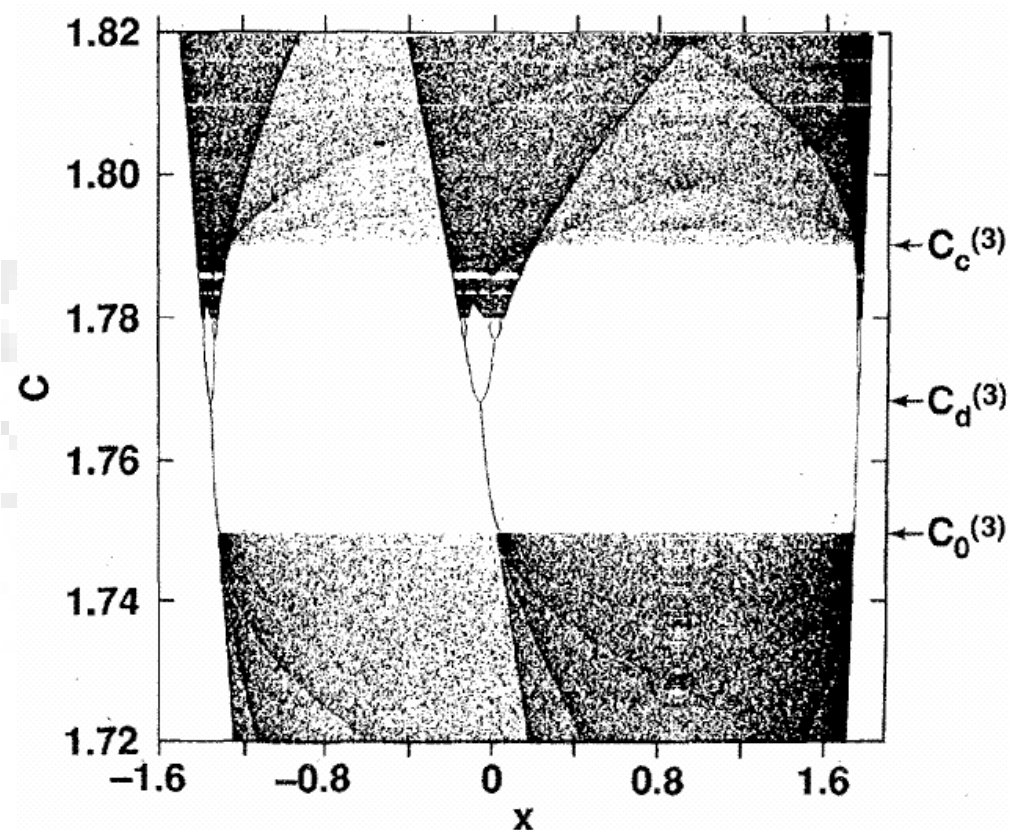


- 当 $C=C_0=-0.25$ 以下，在 $-2 < x < 2$ 范围内没有吸引子，因为迭代导致 x 趋于无穷。类似的事情在 $C=C_c=2.0$ 以上出现。
- 在 $[-0.25, 2.0]$ 之间，存在吸引子，但是结构十分复杂：
- (1) 在 -0.25 和 0.75 之间，存在单倍轨道吸引子。
- (2) 在 0.75 和 1.25 之间，出现双倍周期轨道($x_\alpha \rightarrow x_\beta \rightarrow x_\alpha \rightarrow x_\beta \rightarrow \dots$)。
- (3) 在 1.25 之上，出现了四倍周期轨道($x_a \rightarrow x_b \rightarrow x_c \rightarrow x_d \rightarrow x_a \rightarrow x_b \rightarrow x_c \rightarrow x_d \rightarrow \dots$)。



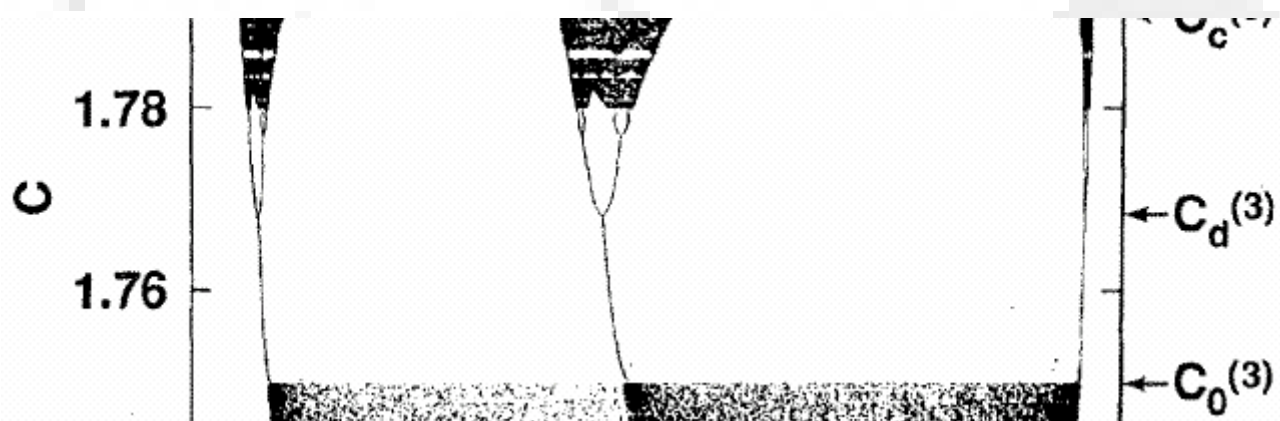
非线性物理：混沌物理

- (4) 上述倍周期分叉一直进行，周期数按照 2^n 到 2^{n+1} 方式进行，在 $n \rightarrow \infty$ 时达到 $C_\infty \sim 1.40$ 。
- 在 $C_\infty < C < C_c$ 之间发生的事情是混沌，或者说有很多 C 值对应混沌轨道，而另外一些 C 值对应有限周期轨道。
- 以 $1.72 < C < 1.82$ 这个区域为例，放大的分叉图是：



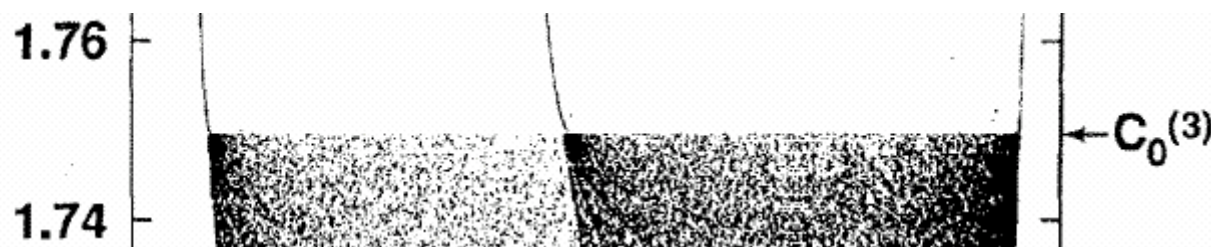
非线性物理：混沌物理

- 在 $C=C_0^{(3)}=1.75$ 之下是混沌区域；在此之上，出现了三倍周期分叉窗口，混沌吸引子消失。然后这个三倍周期轨道的每一个开始进行倍周期分叉，然后混沌，最后在 $C=C_c^{(3)}\sim 1.79$ 处三个混沌区域合并成一个大混沌区域。 $C_0^{(3)}<C<C_c^{(3)}$ 为三倍周期窗口。
- 结论：从正常吸引子到混沌吸引子需要经历无穷的倍周期分叉过程。不过这不是唯一的机制，还有两个机制。



非线性物理：混沌物理

- 一是间歇(或阵发)途径intermittency route: C 在 $C_0^{(3)}$ 之上时是三倍周期轨道, $C_0^{(3)}$ 之下是混沌轨道。由三倍周期到混沌的演化动力学特征如下: 很长时间内是三倍周期轨道, 然后出现短暂的喷发, 变成混沌轨道, 然后又回复到三倍周期轨道, 再经历很长时间后喷发, 如此反复, 叠加起来就是混沌轨道了。
- 动力学标度: C 由 $C < C_0^{(3)}$ 趋于 $C_0^{(3)}$ 时, 三倍周期持续时间满足:
 $t \sim (C_0^{(3)} - C)^{-1/2}$ 。所谓临界点标度行为!



非线性物理：混沌物理

- 同样的事情发生在当 C 从 $C_0^{(3)}$ 上方趋于 $C_0^{(3)}$ 时的情况，存在同样的标度关系。这种间歇式混沌的途径在很多体系中都会观测到！
- 另一途径是所谓临界滞后Crisis途径：在 $C < C_c = 2.0$ 区域，观测到混沌区域，而在 $C > 2.0$ 时没有混沌。当 C 从2.0以上减小通过 C_c 时，混沌发生。事实上，在 C_c 之上一点点处，系统先是在 $-2 < x < 2$ 混沌区域保持很长时间，然后突然离开这一区域，很快达到无穷。平均保持时间满足：
 - $t \sim (C - C_c)^{-1/2}$ 。所以在 C 从上趋向 C_c 时，混沌持续时间为无穷大。



非线性物理：混沌物理

- 上述间歇式途径和临界滞后在很多混沌系统中都观测到。例如 **Benard-Rayleigh** 对流系统中上述时间发散指数不是1/2而是4.0。

- Lorenz方程为：

$$dx/dt = Py - Px$$

$$dy/dt = -xz + rx - y$$

$$dz/dt = xy - bz$$

- 取 $P=10$ 和 $b=8/3$ ，改变 r 值时可以得到混沌。
- 在 r 取166.0和166.2时，系统经历从周期吸引子到混沌吸引子的间歇式转变，如图：

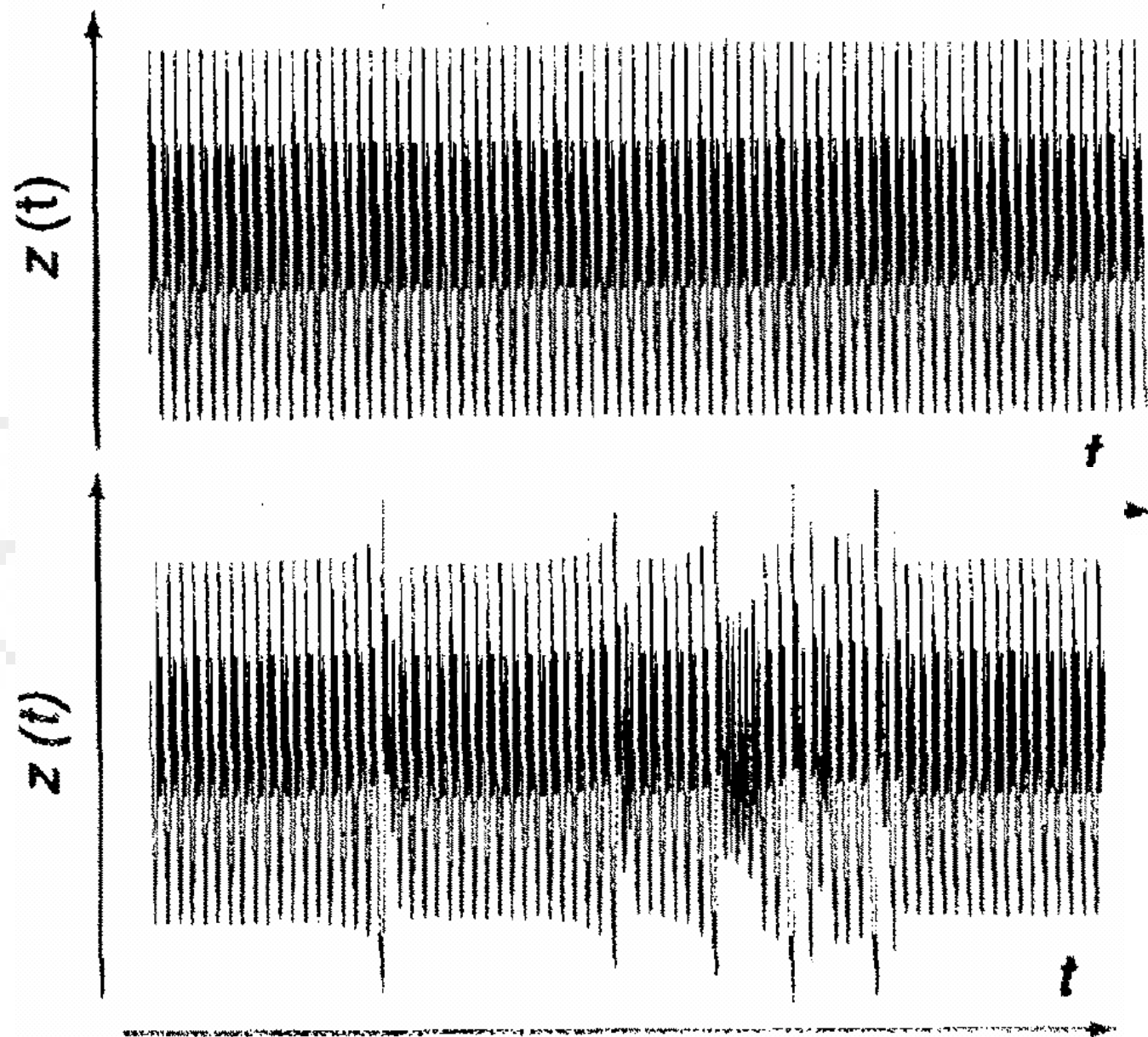


非线性物理：混沌物理

上图 $r=166.0$

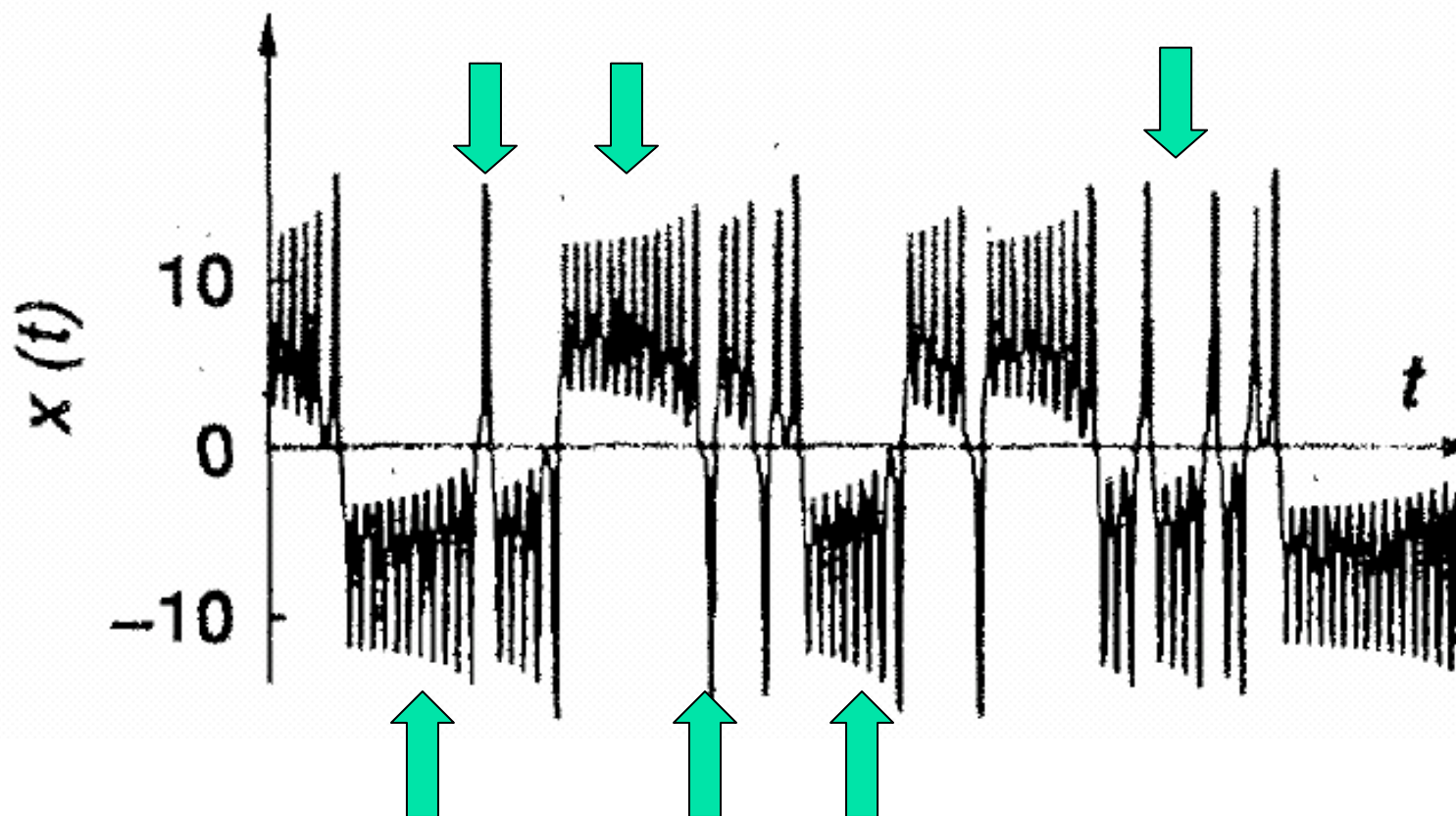
下图 $r=166.2$

在两者之间
都存在间歇
式混沌行为



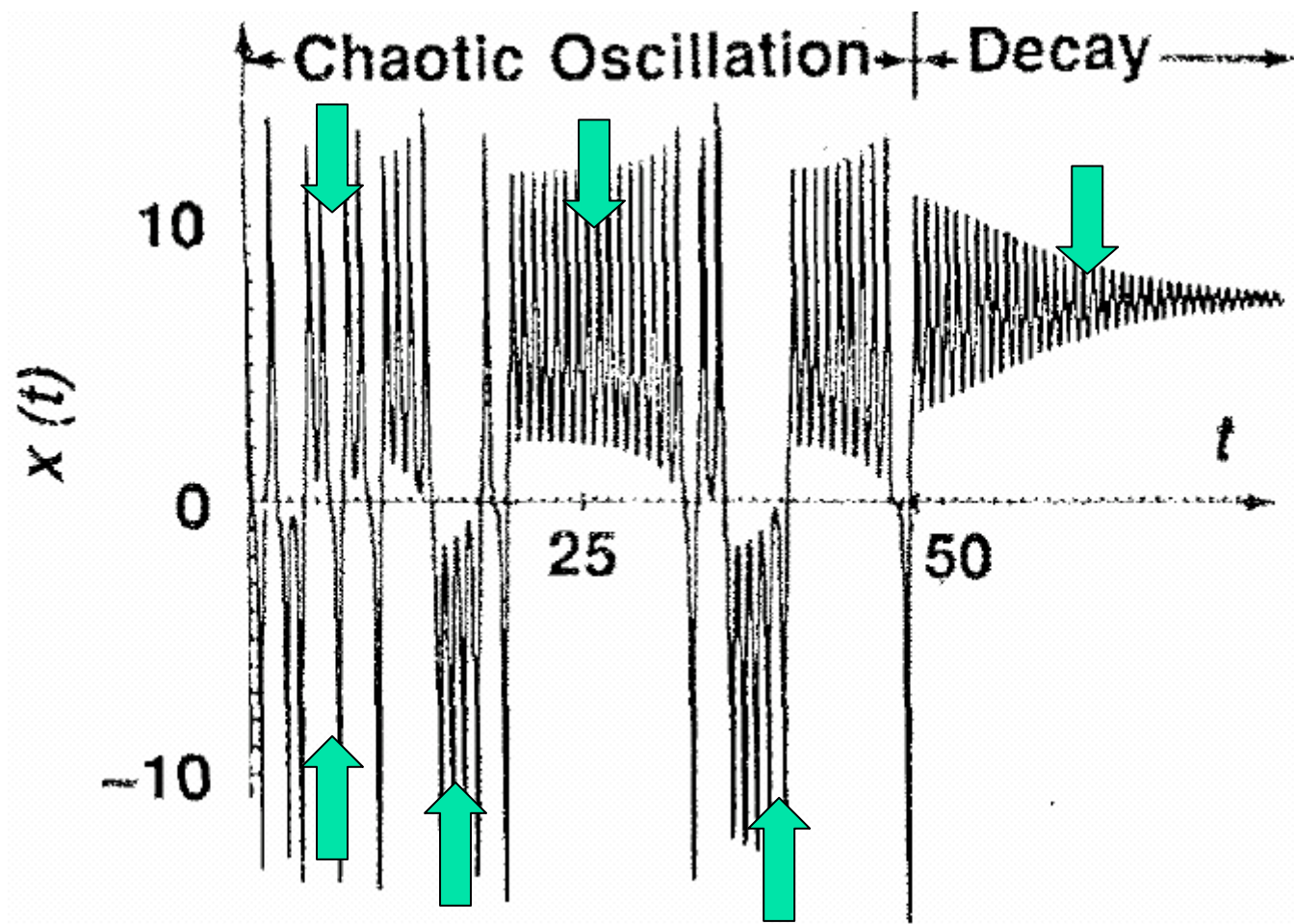
非线性物理：混沌物理

- 在 r 取24.06稍小一些时，存在两个周期吸引子，对应两个反方向对流胞。但当 r 取24.06稍大一些时，出现三个吸引子，其中一个混沌吸引子，另两个为周期吸引子。对应间隙式混沌 $r=28$ ：



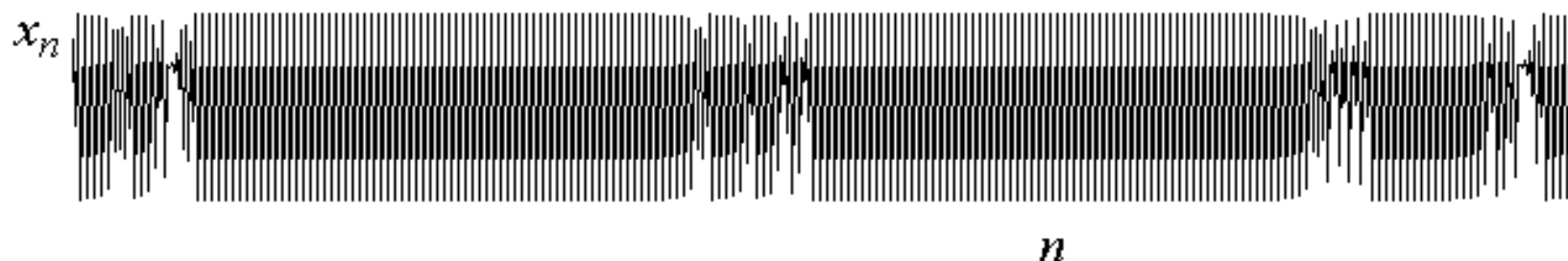
非线性物理：混沌物理

- r 取较大值，形成混沌吸引子，然后减小到较低值 $r=22$ ，可以观测到混沌通过临界滞后途径向周期吸引子转变。对应混沌临界转变，如图 $r=22$ ：



间歇式混沌理论：

- 在混沌产生机制中，倍周期机制被研究得最多，其次是混沌区域里面的混沌——3倍周期演化机制，所谓间歇式混沌机制。
- 基本问题是3倍周期窗口的形成机制是什么。
- 在此再以平方映射为例，间歇式混沌形成特征如下：



平方映射参数在 $\mu = 3.85$ 附近的计算结果

- 混沌与周期3间歇式转变的 $\mu=\mu_c=3.8284\sim 3.83$ 。迭代映射在此处发生切分叉：产生一个稳定平衡点和一个不稳定平衡点。
- 周期2一般是由二次平方映射产生，可以类推周期3由3次方迭代产生。由 $x_{n+1}=f(x_n)=\mu x_n(1-x_n)$ 我们构造三次迭代：

$$f^3(x) = f \cdot (f \cdot (f(x)))$$

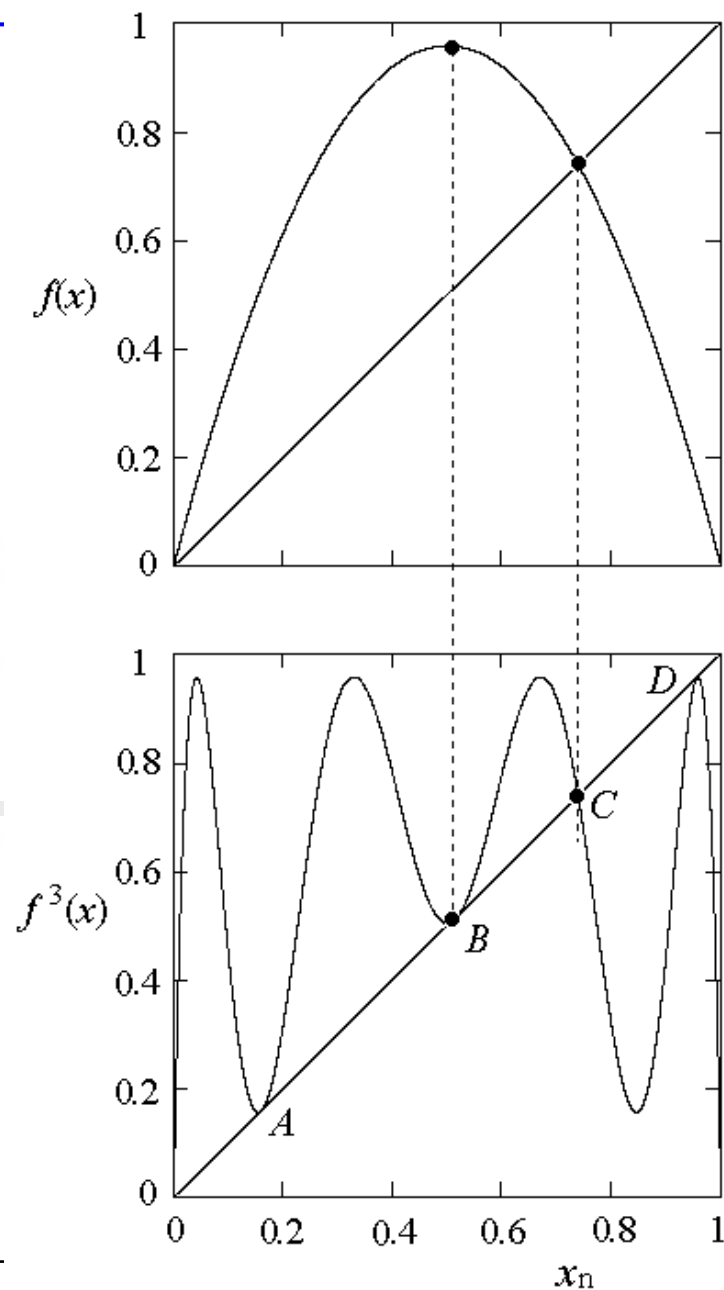
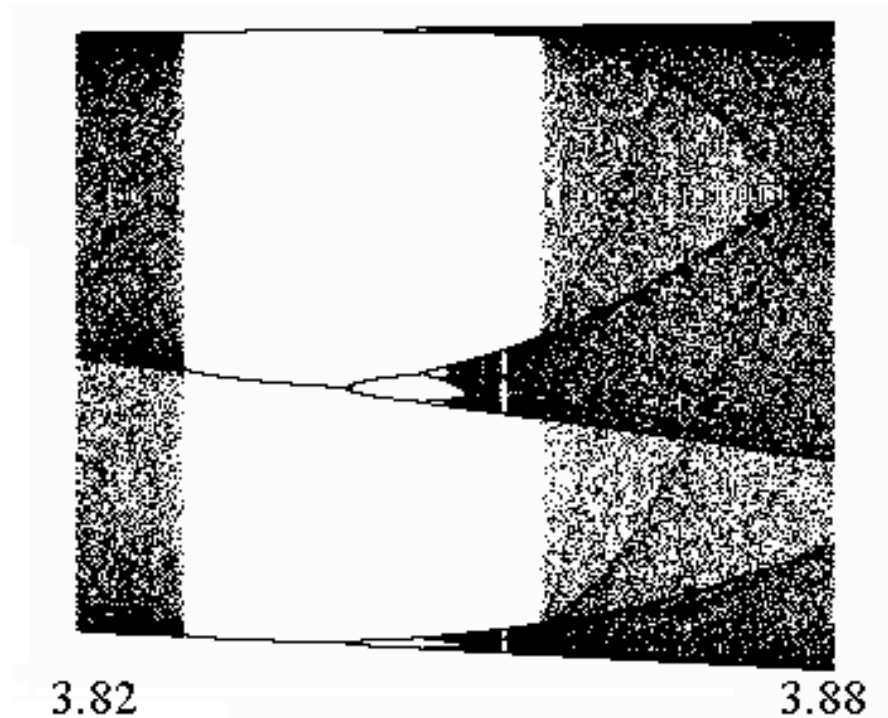
- 三次迭代产生一含 x^8 的多项式， x_{n+3} 和 x_n 之间的函数关系如下：

$$x_{n+3} = f^3(x_n) = \mu(\mu\mu x_n(1-x_n)(1-\mu x_n(1-x_n))) \\ (1-\mu\mu x_n(1-x_n)(1-\mu x_n(1-x_n)))$$



非线性物理：混沌物理

在 $\mu=3.83$ 附近间歇式混沌演化与
 $f(x)$ 和 $f^3(x)$ 函数曲线。

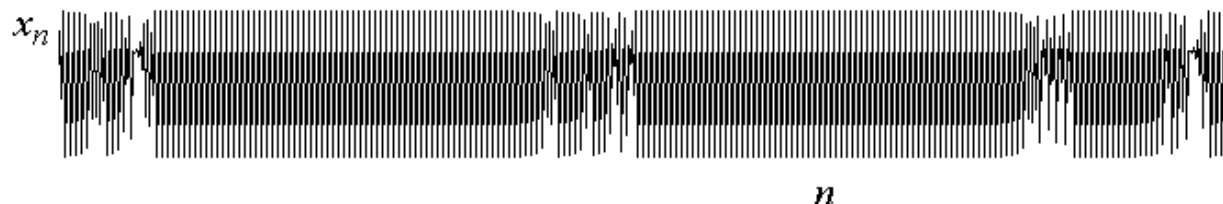
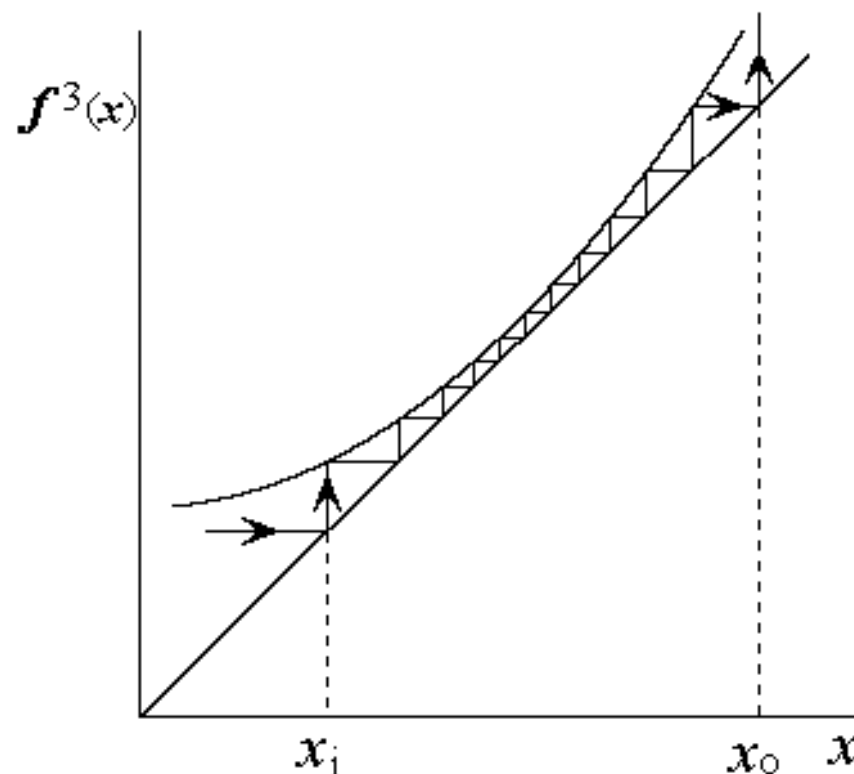


- $f^3(x)$ 有四个不动点，一个为 $f(x)$ 本身带来的，另三个系 $f^3(x)$ 与 $y=x$ 相切所致。 $f(x)$ 本身带来的是不稳定点，我们不考虑。
- 从稳定性角度看，函数 $f(x)$ 上一点如果 $f'(x)>1$ ，此点不稳定； $f'(x)<1$ 的点是稳定的。
- 在 $\mu>3.83$ 时， $f^3(x)$ 与 $y=x$ 相交，有6个不动点，由于切分叉的缘故，其中三个是稳定的，三个是不稳定的。
- 三个不稳定不动点随演化将消失，另外三个不动点保留下来，成为3倍周期分叉的根源。因此，混沌区中的周期3与切分叉密切相关。看看 $\mu<\mu_c$ 时的情况：



非线性物理：混沌物理

- 对映射 $f^3(x)$ 进行迭代如右图。
- 显然， μ 与 μ_t 之间的距离决定这种迭代所需的“时间”，在 $(\mu - \mu_t) \rightarrow 0$ 时即 $f^3(x)$ 与 $y=x$ 相切时，时间 $t \rightarrow \infty$ 。
- 因此在 $\mu < \mu_t$ 区域已经存在混沌分布的不均匀性，成功解释了为什么有下图：



非线性物理：混沌物理

- 在 $\mu=\mu_t$ 处混沌出现的间歇时间无限长，就是3倍周期轨道了。
- 前面也已经提到，数学严格证明了一维体系中只要出现3倍周期轨道，就一定有间歇式混沌行为出现。
- 以前提到的所谓普适行为： $t \sim (\mu_t - \mu)^{-1/2}$ 我们可以进行简单的推导。
- 在相切点附近， $f^3(x)$ 可以近似展开表示成：

$$x_{n+1} = \varepsilon + x_n + ax_n^2 \qquad \varepsilon \propto \mu - \mu_t$$



- 作些简单推导：

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\Delta x}{\Delta n} \approx \frac{dx}{dn} \quad \frac{dx}{\varepsilon + ax_n^2} = dn$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \arctan\left(\frac{x_o - x_i}{\sqrt{\varepsilon/a}}\right)$$

$$\tan^{-1}[(x_o - x_i) / \sqrt{\varepsilon/a}] \rightarrow \pi/2 \quad \langle n \rangle \propto \varepsilon^{-1/2}$$

- 这个推导是普适的，没有涉及具体函数形式。



非线性物理：混沌物理

- 原则上对于5倍分叉和更高周期分叉，可以进行类似的分析，但是实际进行起来要困难得多了。
- 总之，由这一分析我们至少理解了为什么说混沌区域里面也是有结构的。这些分布的不均匀源自于各级倍周期分叉过程按照各种机制仍然出现在混沌区域中。



同步与锁模：

1. 前面讨论了一维单参量控制分叉与混沌。实际系统远不止如此。
2. 当有多个控制参量时，这些参量变化本身会将系统带入分叉或者混沌，而且这些参量之间还会相互耦合，导致更美妙混沌演化。
3. 我们打算讨论所谓的同步锁模问题：其基本现象是两个频率不同的动力学系统靠近或者耦合将导致各自行为的变化。
4. 同步或锁模，顾名思义是两个不同频率振动系统在频率之比满足某有理数时，会出现同步振动现象。当两者有耦合时更是如此。
5. 考虑有名的水桶滴水实验。



弹簧水桶滴水实验：

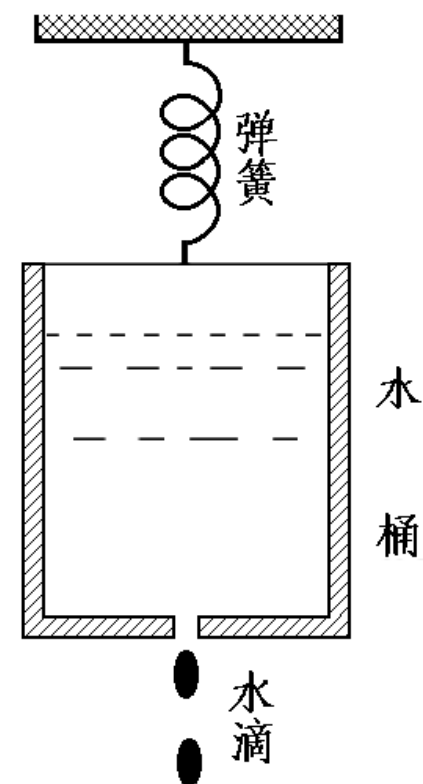
1. 前面我们讨论的问题都是一维的单参量控制分叉与混沌。
2. 静止状态下，滴水时间为：

$$\tau = m^* / C$$

3. 水桶振动周期为 T ， $f(t/T)$ 为周期函数。复合振动状态下滴水质量变成：

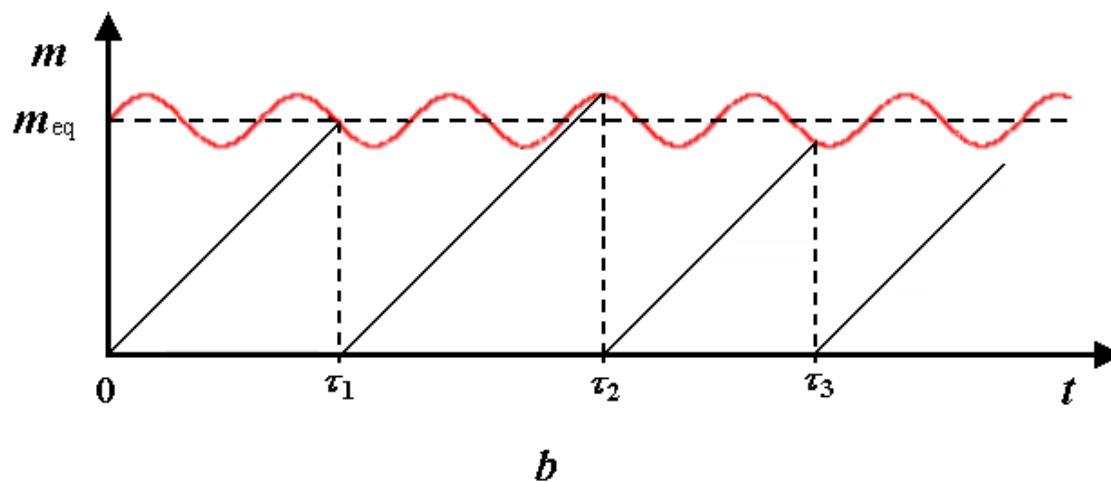
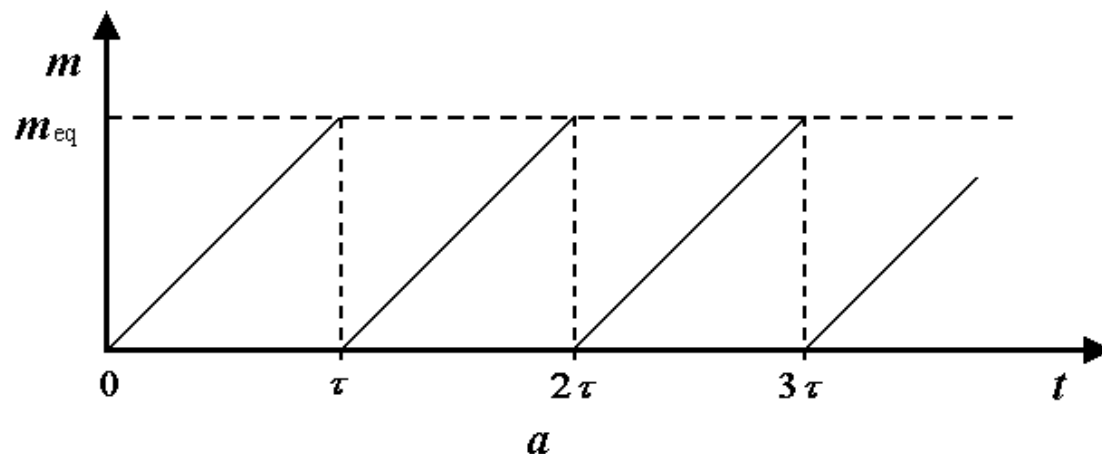
$$m_{eq} = m^* [1 + f(t/T)]$$

m^* 为临界质量， m_{eq} 为水滴质量随时间变化



非线性物理：混沌物理

1. 由于弹簧振动导致了滴水周期的变化和水滴质量的变化。



注意弹簧振动周期 T 比滴水周期 τ 小很多:

$$T \ll \tau$$



1. 定性分析：

$$m_{\text{eq}} = (\tau / T) m^* [1 + f(\theta)] \quad \theta = t / T$$

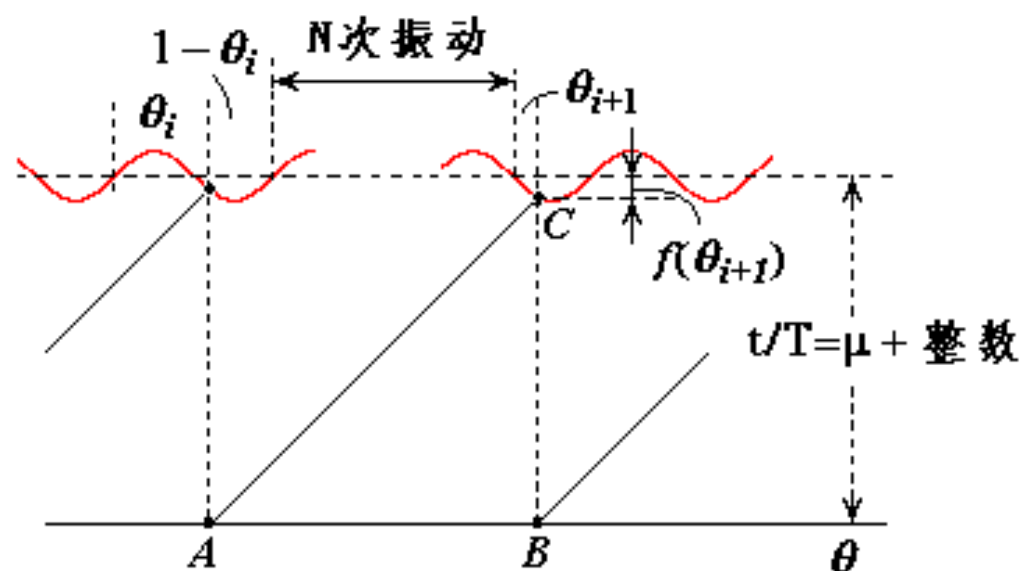
$$AB = 1 - \theta_i + \theta_{i+1} + \text{某整数}$$

$$BC = \tau / T + f(\theta_{i+1}) = \mu + f(\theta_{i+1}) + \text{某整数}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \mu + f(\theta_{i+1})$$

$$\theta_i = \varphi(\theta_{i+1}, \mu)$$

以上是圆映射



非线性物理：混沌物理

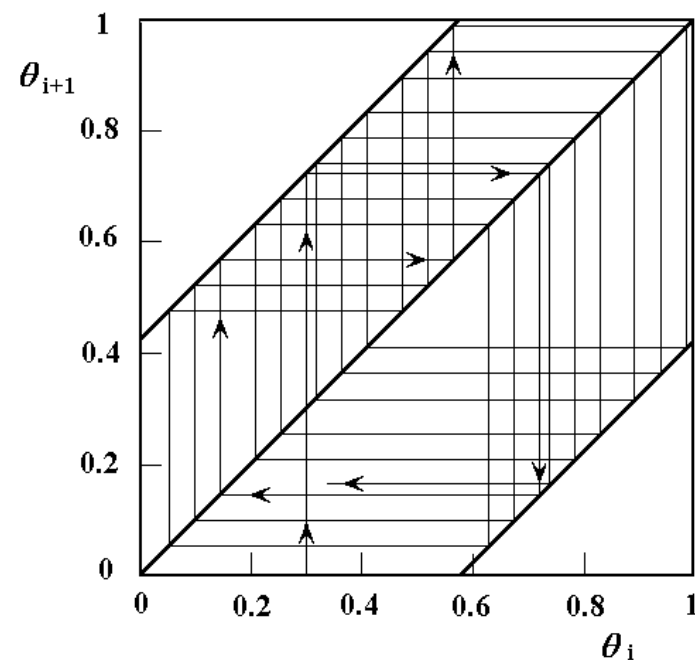
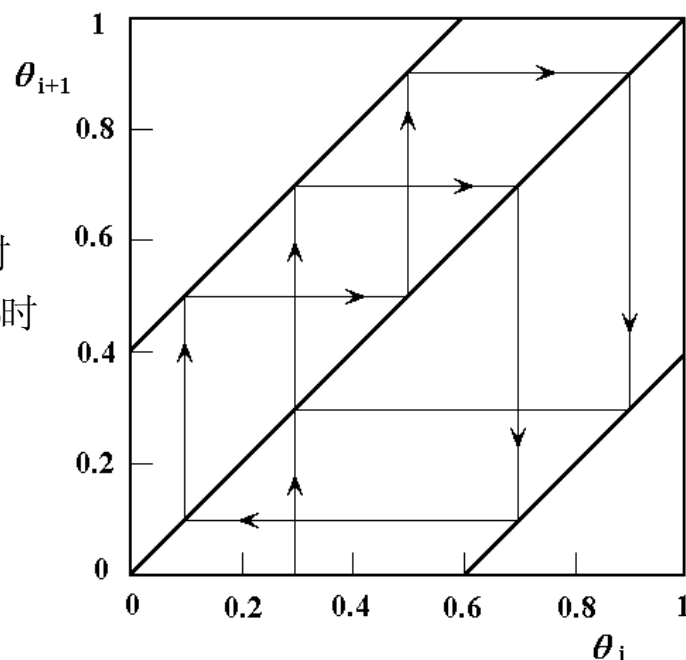
1. 取 $f(t/T)$ 为周期正弦函数，则方程变成可以计算的了。

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega - (K / 2\pi) \sin 2\pi\theta_i \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \Omega$$

两个参量： K 表示非线性耦合强度， Ω 为两个振动的频率之比。
这是标准的圆映射或者迭代。

2. 考虑线性行为， $K=0$ ， Ω 为有理数 $2/5=0.4$ 和无理数 $0.40404\dots$ ：

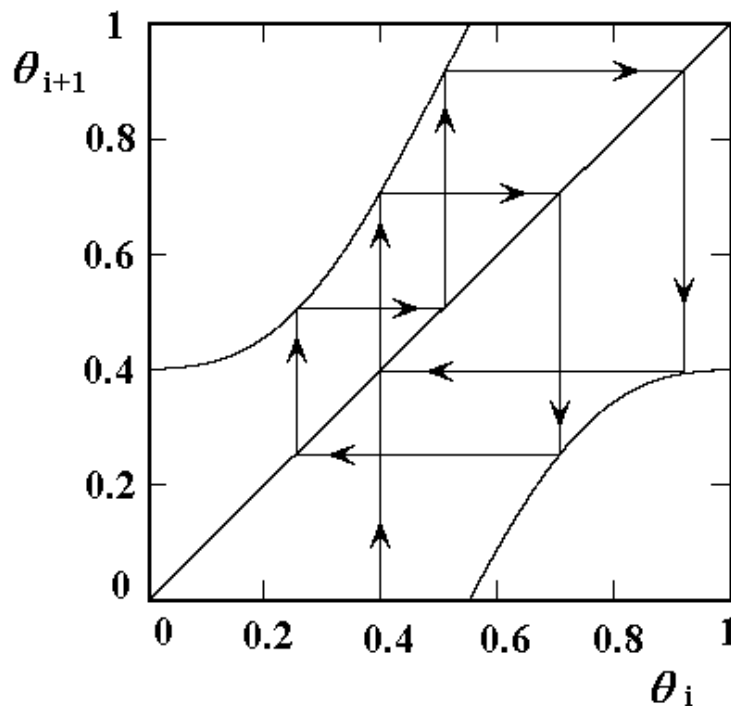
$$\theta_{i+1} = \begin{cases} \theta_i + 0.4 & \text{当 } \theta_i < 0.6 \text{ 时} \\ \theta_i + 0.4 - 1 & \text{当 } \theta_i > 0.6 \text{ 时} \end{cases}$$



非线性物理：混沌物理

1. Ω 为有理数时有周期解； Ω 为无理数时只有准周期解，没有同步现象。
2. 然而，如果 $K \neq 0$ ，则会出现同步或者锁模现象了。
3. 对于 $K=0.95$ 和 $\Omega=0.4040\dots$ 的情况，有：
4. 因此，即使 Ω 为无理数，非线性仍然可以使系统出现同步和锁模。
5. 这也提供了一种混沌控制方法。
6. 可以定义卷绕数(winding number) W 来表征锁模行为，注意 θ 在 $[0,1]$ 内：

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i (\theta_i - \theta_0)$$

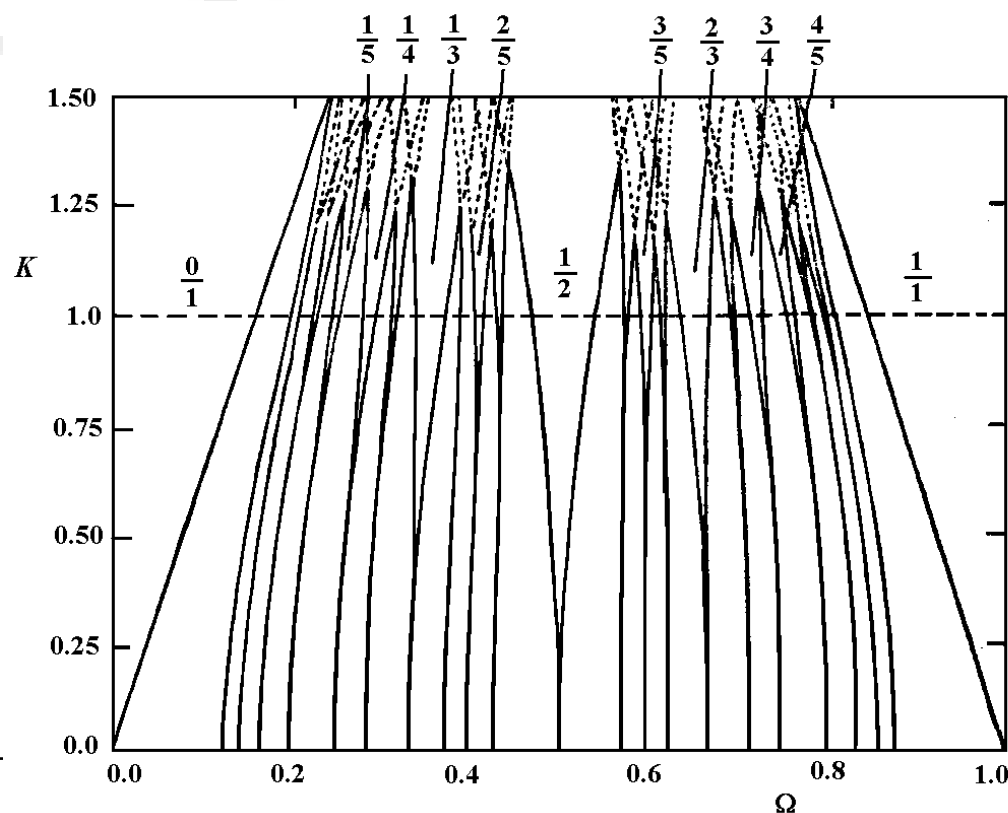


非线性物理：混沌物理

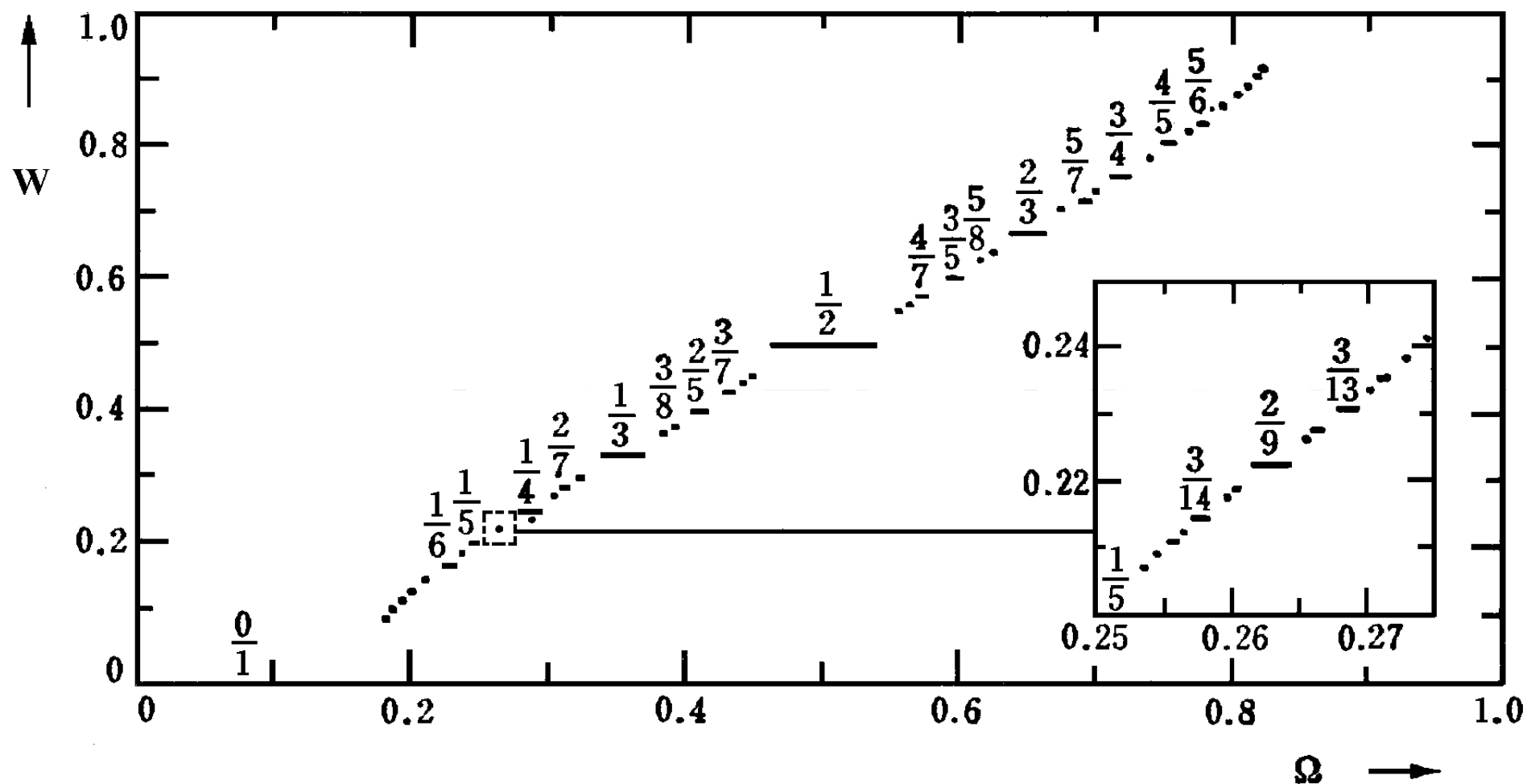
1. K - Ω 平面相图：随着 K 的增加，所有锁模频率范围都会增加。
2. 这样的图象为阿诺德舌头(Arnold tongue)。
3. $K=1$ ，舌头宽度彼此衔接，任何 Ω 值都满足共振条件； $K>1$ ，舌头开始重叠，迭代函数不再单调，系统进入混沌状态。

4. 给定 K 值，如果以 W 为纵坐标， Ω 为横坐标，就将得到与全部频率比相应的同步范围所构成的一座特殊的楼梯，它有无数个台阶与宽窄不等平台。

5. 戏称魔梯(devil's staircase)。



非线性物理：混沌物理



台阶无限可分的原因是两个无理数之间存在无穷个有理数，反之亦然



The Devil's staircase

GETTMAN ARCHIVE



非线性物理：混沌物理

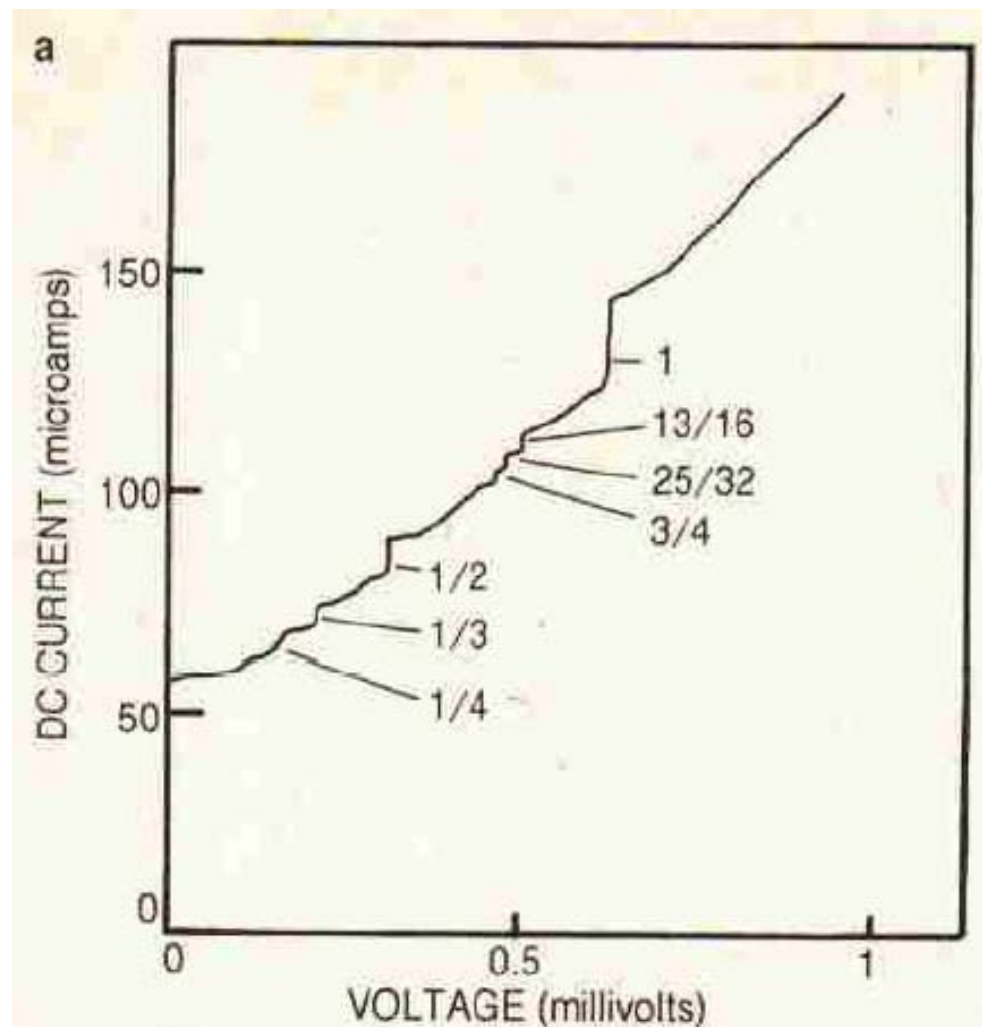
类似的同步或锁模行为在很多物理系统中存在。

1. 超导Josephson结

2. Ni超导体Josephson结在 295GHz微波驱动下的I-V特性

：这里电压是频率的表征。

3. 物理是结的伏安特性满足一个 与阻尼外驱动物理摆非常类似 的微分方程。



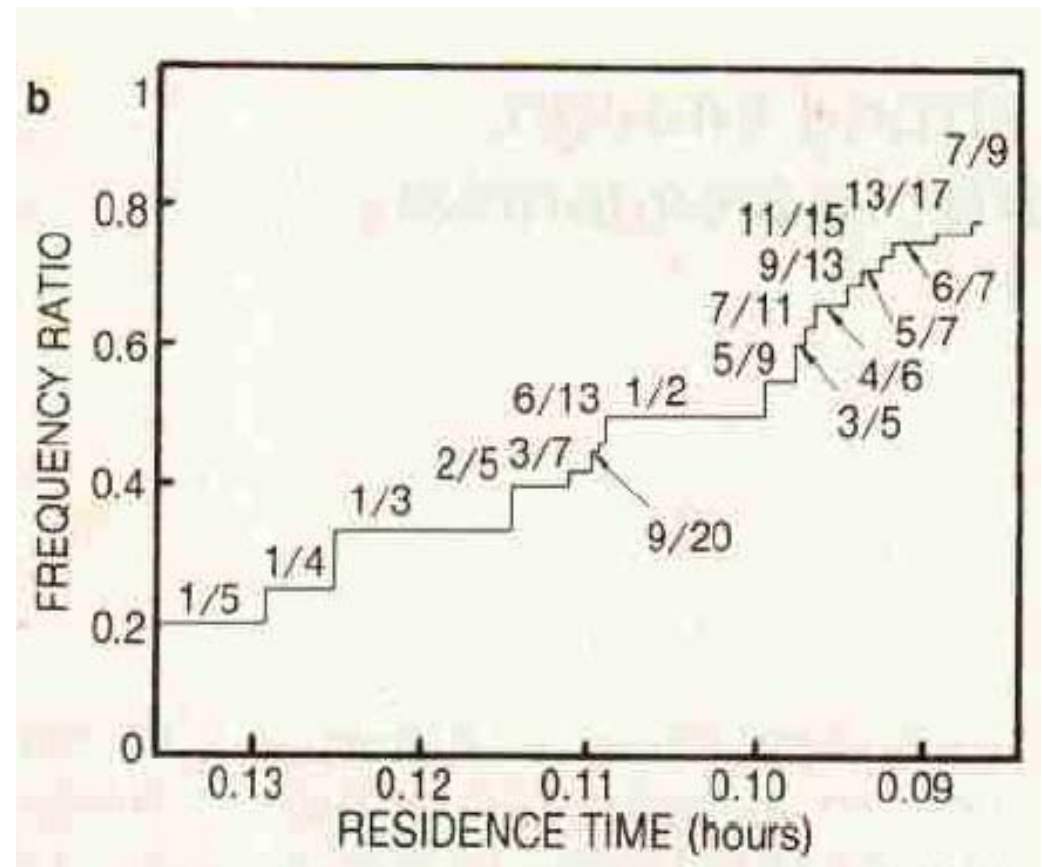
非线性物理：混沌物理

类似的同步或锁模行为在很多物理系统中存在。

1. 复杂化学反应。

2. Belisov-Zabotinsky复杂化学反应中振动周期与反应速率的关系。

3. 物理是这一反应存在两种不同频率的振荡。



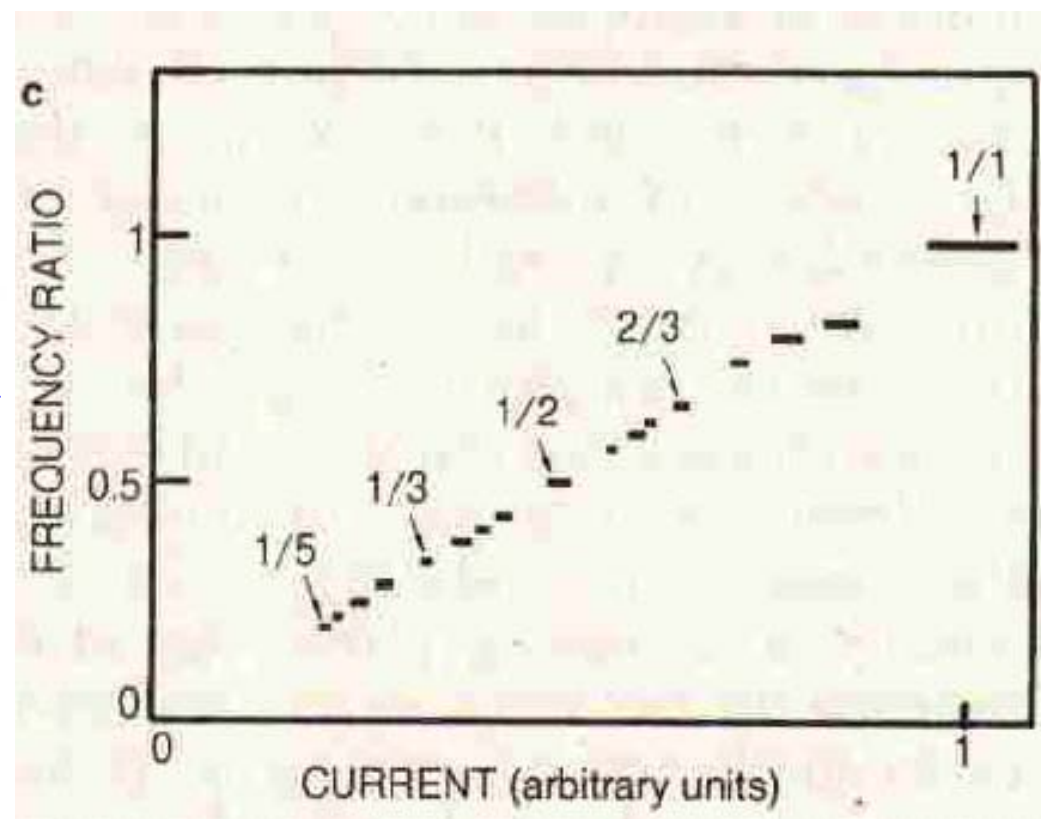
非线性物理：混沌物理

类似的同步或锁模行为在很多物理系统中存在。

1. 快离子导体电导。

2. 铌酸钡钠快离子导体中电压振动频率与电流之间的关系。

3. 离子导体中电导是靠离子运动来实现的。



非线性物理：混沌物理

基本特征：

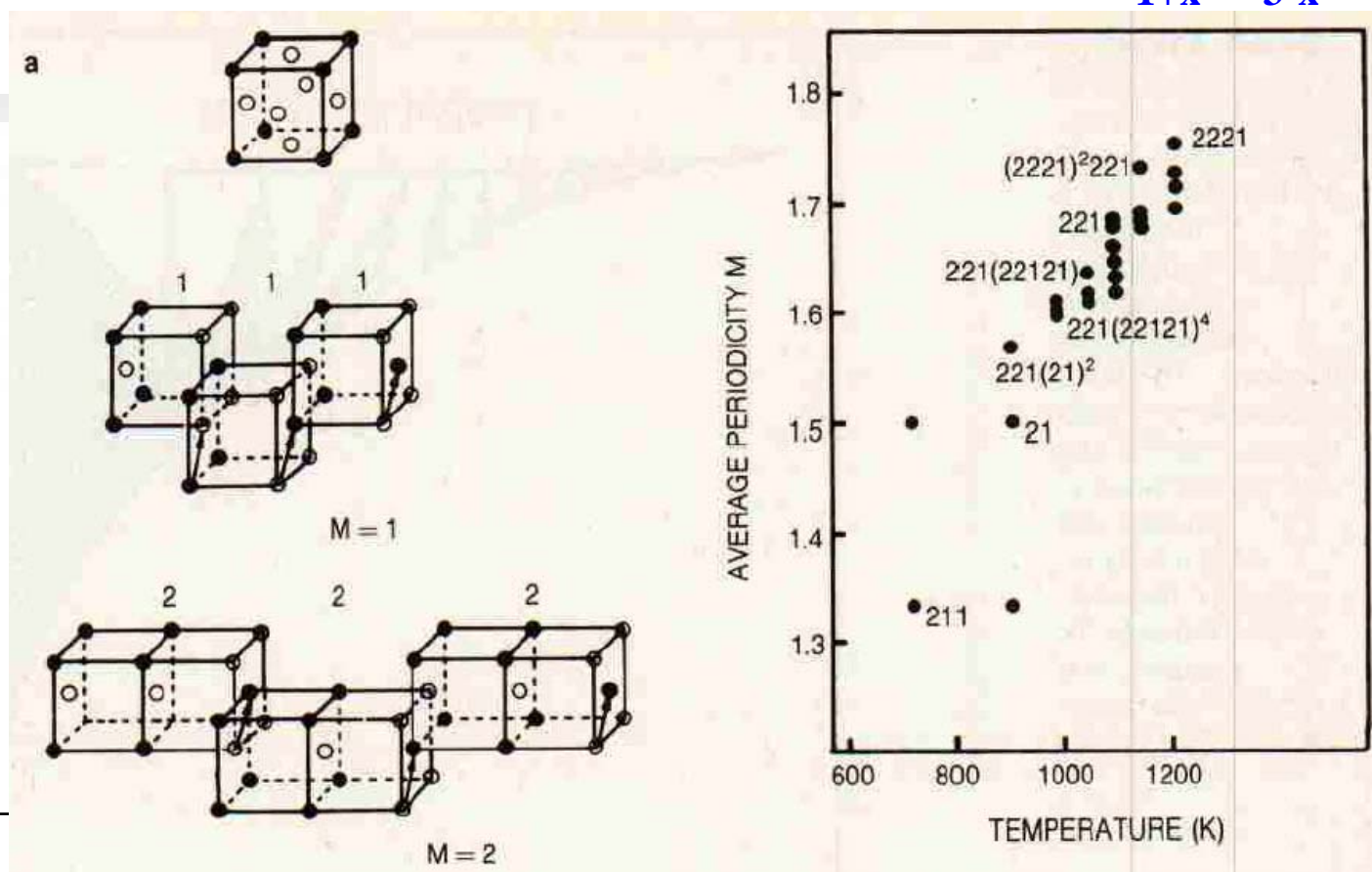
- 当动力学系统的两种振动之间耦合很弱时，各人自扫门前雪；当振动耦合很强时，系统总是会锁定在一个固定频率之处，且约化频率是有理数。
- 魔梯结构具有空间自相似性，具有标度性质，可以解释为一个 **Cantor** 集。如果计算其分形维，这维数是普适的，所有这些动力学系统魔梯具有一样的维度。这个魔梯维度是自然界的一个普适常数。
- $d \sim 0.87$ ，其计算很简单：将所有被锁定的频率计数投影在频率轴上，然后画一个半径为 r 的圆去套住轴上任一个区域，则点的数目与 r^d 成正比。



非线性物理：混沌物理

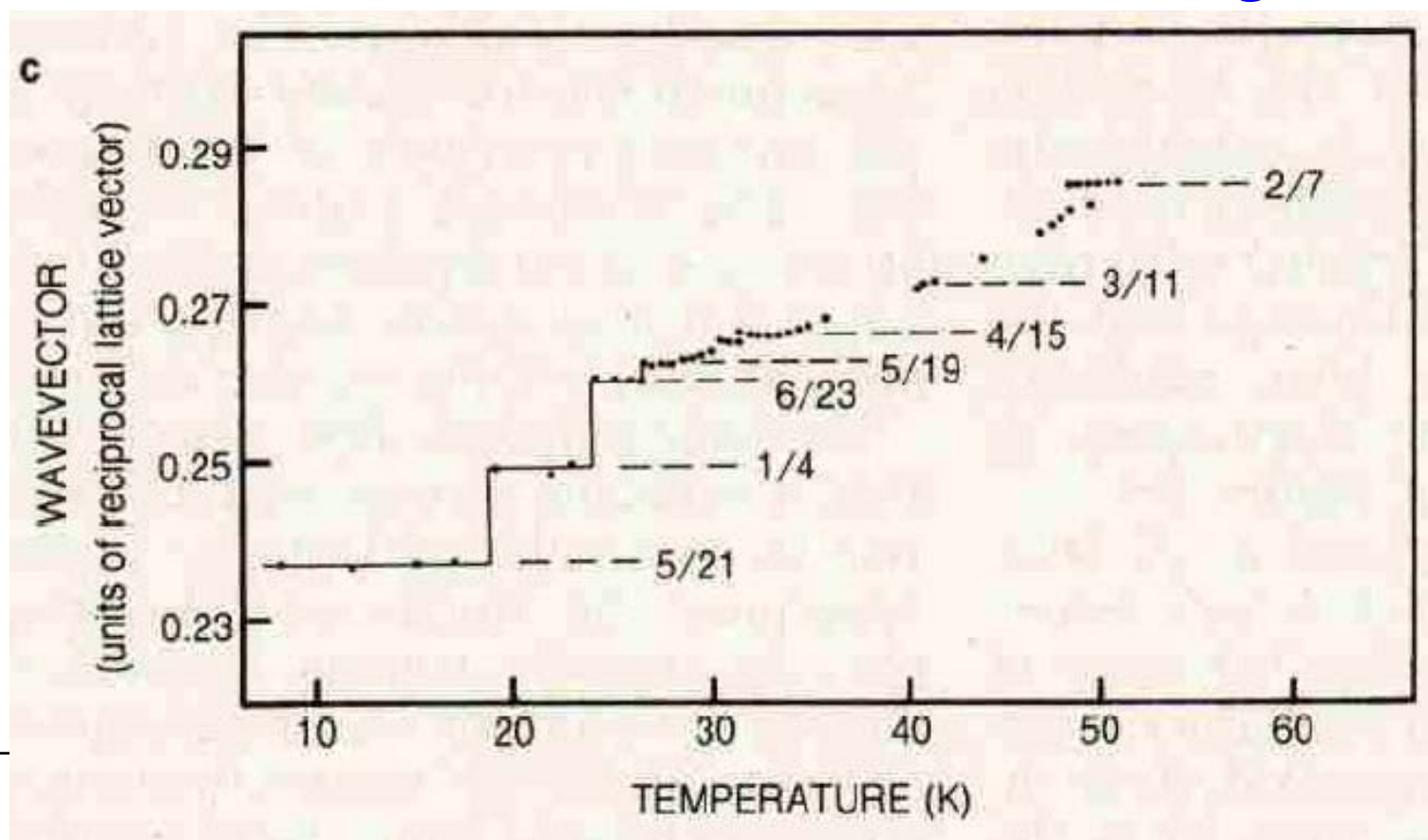
固体物理中的魔梯：

1. 很多固体结构中存在不止一种晶格周期性排列，这些周期的比值与固体成分或者交互作用的关系也构成所谓的魔梯结构。
2. 理解这种魔梯容易，是两个周期之比而已： $\text{Ti}_{1+x}\text{Al}_{3-x}$ ，Al=72%



非线性物理：混沌物理

1. 稀土金属Er中磁畴结构的周期性与温度的关系：将波矢 k 与温度 T 作图有如下的魔梯图。例如， $k=1/4$ 表示磁畴周期为4，有两个spin-up然后接两个spin-down。 $k=5/21$ 表示周期21，有5次自旋翻转。
2. 对于这样的周期结构，我们可以从一个简单的Ising模型出发。



非线性物理：混沌物理

1. 在一维情况下，Ising模型的能量为：

$$E = - \sum_i H S_i + \sum_{\langle i,j \rangle} J(i-j)(S_i + 1/2)(S_j + 1/2) \quad (1)$$

其中 $S_i = \pm 1/2$ ， $J(i-j)$ 为 i 和 j 两个位置的spin-up的长程反自旋耦合，这种耦合是长程的，随距离按幂指数或者e指数衰减。

2. 美国科学家P. Pak曾经研究了这样一个模型的稳定自旋组态：在体系中spin-up的数目占百分比 q ，则第 i 个spin-up自旋的坐标应该是： $x_i = \text{integer}(i/q)$ 。设 $q=1/2$ 和 $q=10/23$ ，我们有：

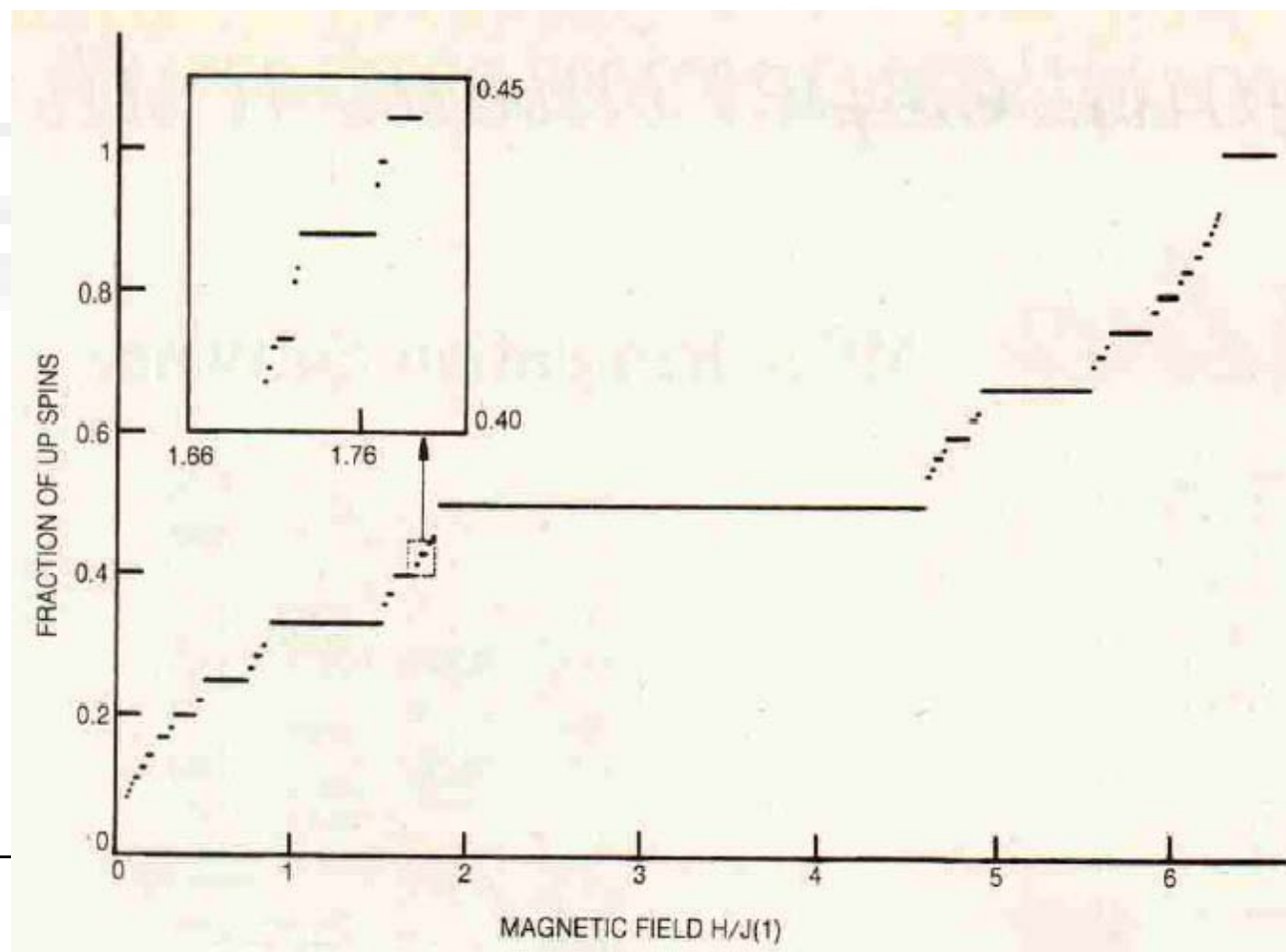
— + — + — + — +

— + — + — + — — + — + — + — — + — + ...



非线性物理：混沌物理

1. 但如果 q 是无理数，比如黄金分割数 $(\sqrt{5}-1)/2$ ，则晶体结构不再是周期排列，而是准周期排列，所谓准晶了。
2. 在外磁场作用下，这样一个周期性分布仍然可以保持稳定，从而产生很漂亮的魔梯图($J(n)=n^{-2}$):



作业：

- 对上面的一维模型，计算一下 $T=0$ 时的spin排列，然后关注外磁场作用下的魔梯图。注意一维链长至少2000以上。
- $J(n)=n^{-2}$
- 利用WL代数计算基态魔梯结构及其与温度的关系？



非线性物理：混沌物理

1. 如果将模型推广到二维和三维，考虑轴线次近邻Ising模型：沿轴线最近邻具有铁磁交互作用 J_1 ，轴向次近邻存在反铁磁交换作用 J_2 ，则我们可以得到一个更漂亮的0和1/4之间的魔梯图。

数字表示波矢

