单摆问题：

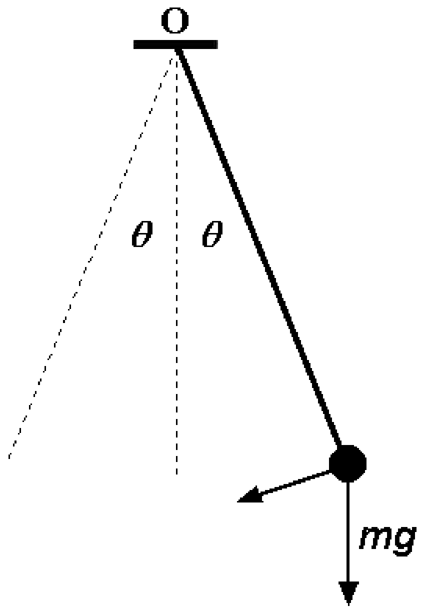
- 无阻尼单摆例子，哈密顿***H***为：

$$H = K + V = \dot{x}^2/2 + \omega_0^2 \cos x,\ \ \dot{p} = -\partial H/\partial q,\ \dot{q} = \partial H/\partial p$$

$$x = angle\ \&\ \omega_0 = intrinsic\ \ frequency, p = \dot{x}, q = x$$

- 无阻尼单摆例子，运动方程为：

$$\partial H/\partial t = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$



$\boldsymbol{\theta = x}$

- 平衡位置：

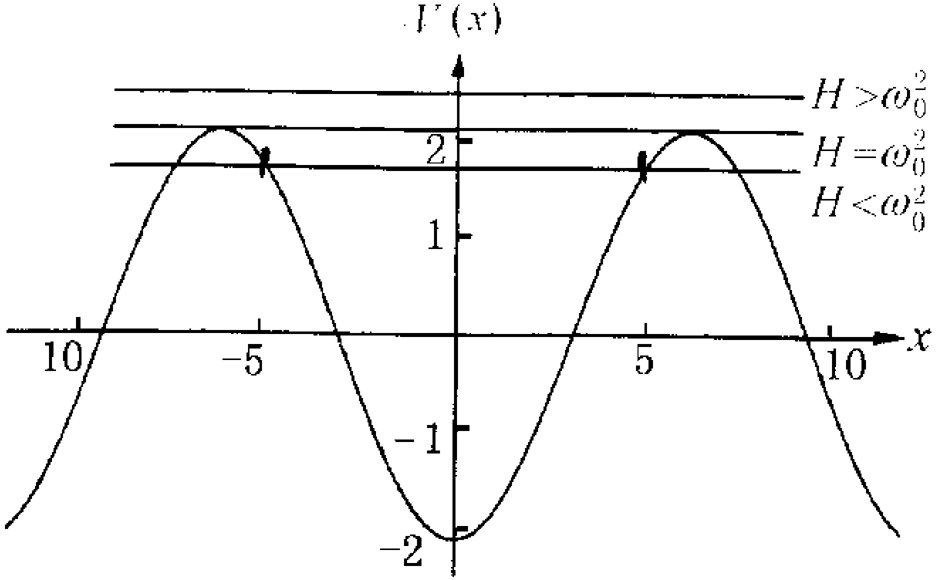
$$\dot{x}_e = 0,\ x_e = n\pi(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

- 系统势能在一个固定范围内交替变化：

$$V(x) = -\omega_0^2 \cos x \Rightarrow \begin{cases} V_{min} = -\omega_0^2,\ x_e = n\pi(n \geq 0) \\ V_{max} = \omega_0^2,\ x_e = n\pi(n \leq 0) \end{cases}$$

非线性物理：基础知识——相空间

- 势能曲线：



- 系统在 **$H=\omega_0^2$** 处出现分界：

$$x_e = -n\pi(n \geq 1),\ \dot{x}_e = 0$$

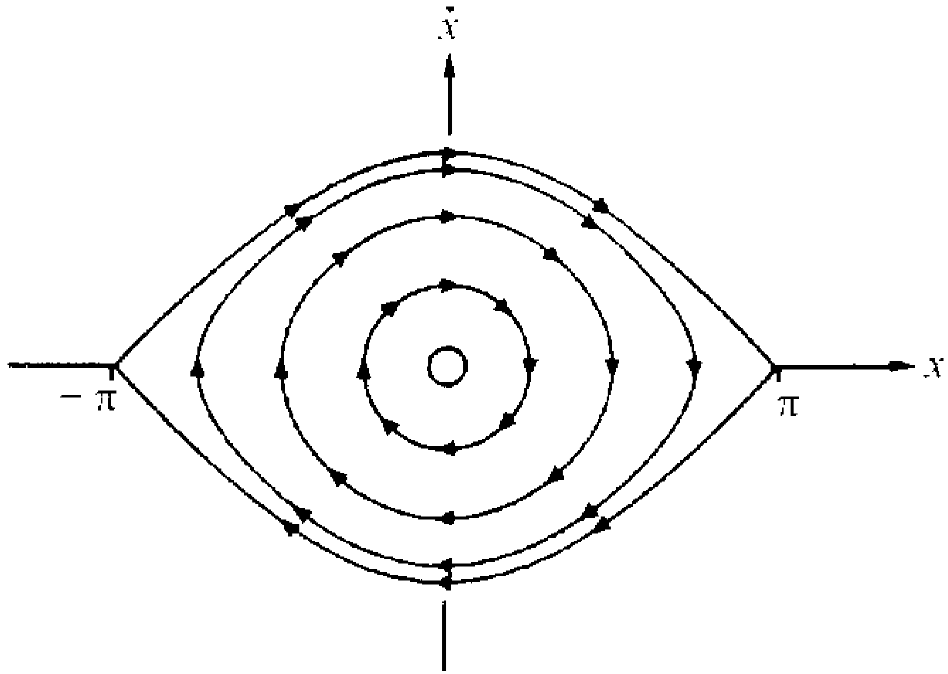
$$\dot{x}^2/2 = \omega_0^2 \cos x + \omega_0^2$$

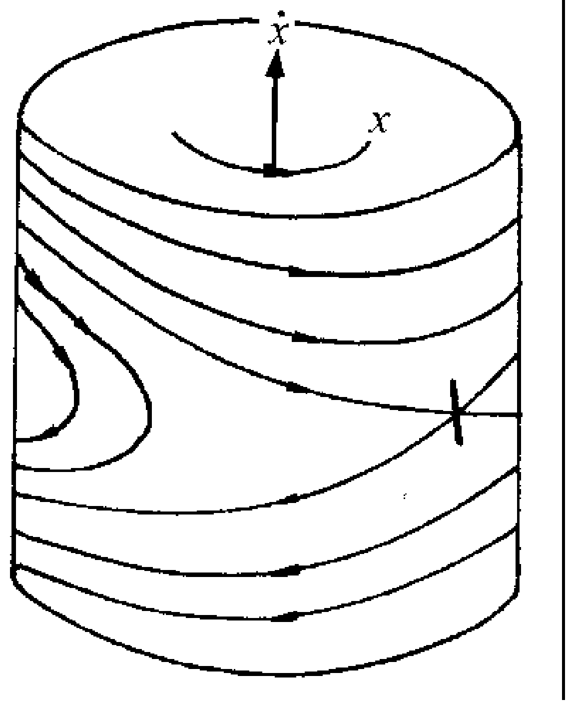
$$\dot{x} = \pm 2\omega_0 \cos(x/2)$$

$$for\ \ t = 0, x = 0$$

$$x = 4\arctan(e^{\omega_0 t}) - \pi$$

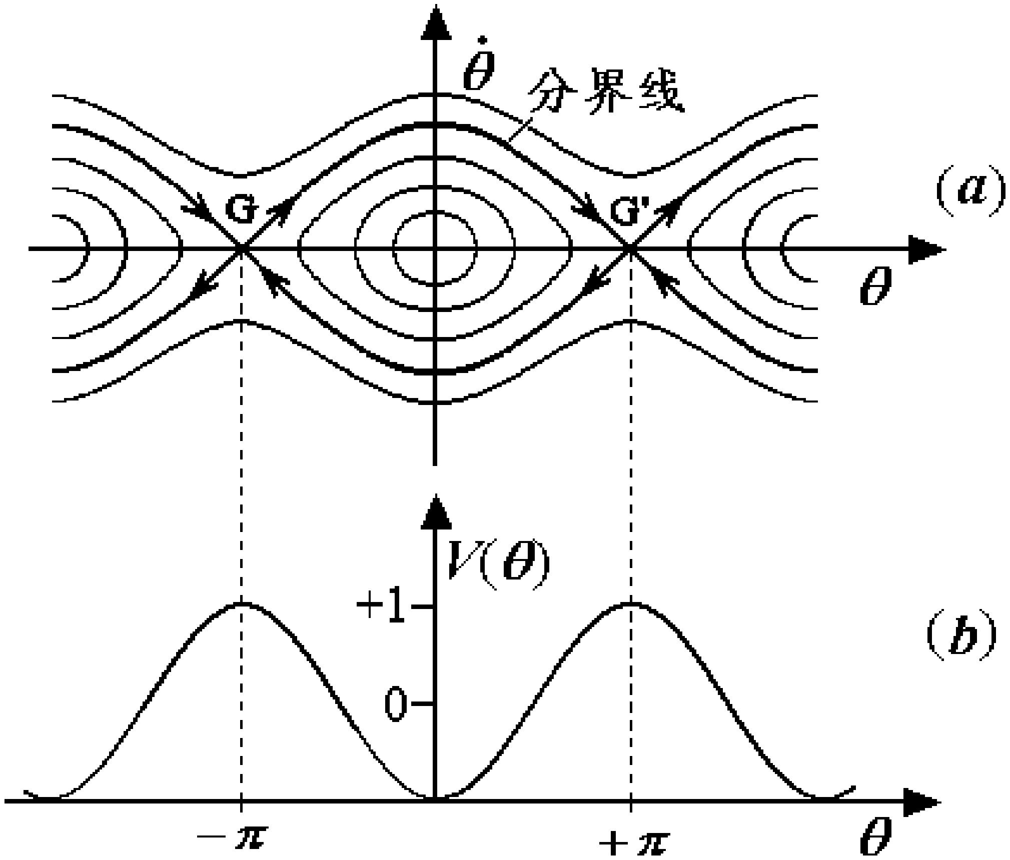
- 分界线将系统动力学分成单摆与圆周运动两个区域：$H<\omega_0^2$ 时来回摆动，$H>\omega_0^2$ 时，圆周运动。
- 摆动初始位置 $x_0 \Rightarrow \pi$，摆动周期越长，除非给定初速：$H>\omega_0^2$。

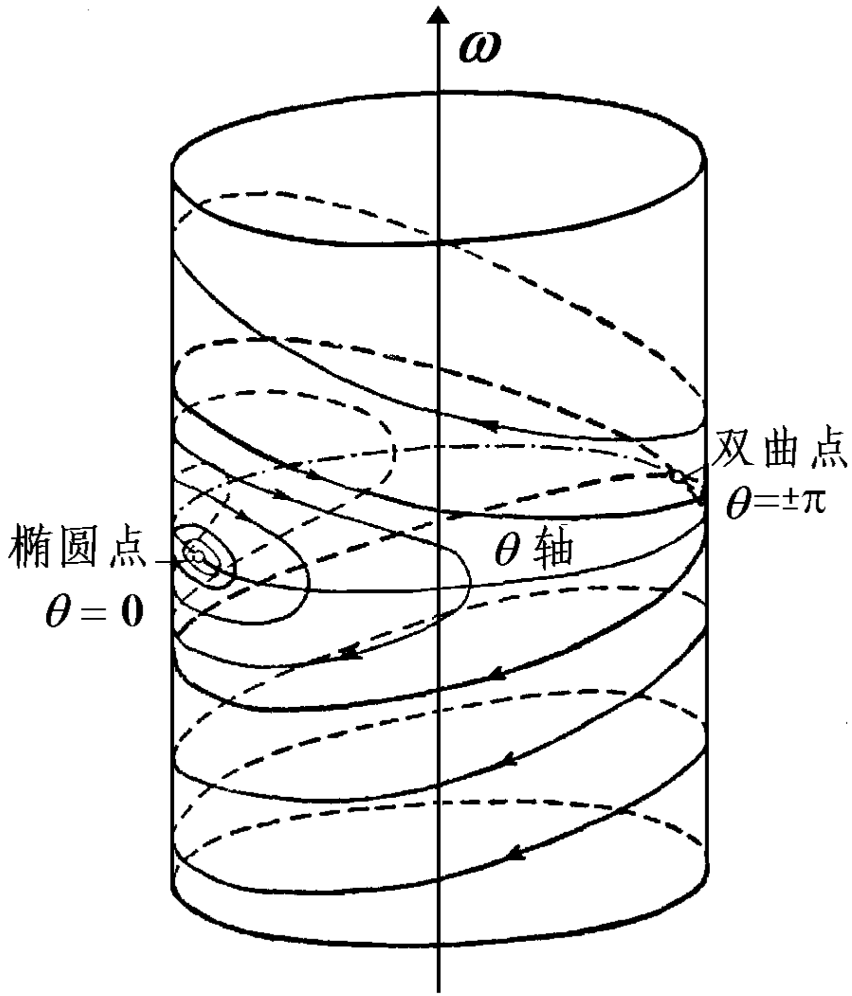




非线性物理：基础知识——相空间

- 相空间相图：



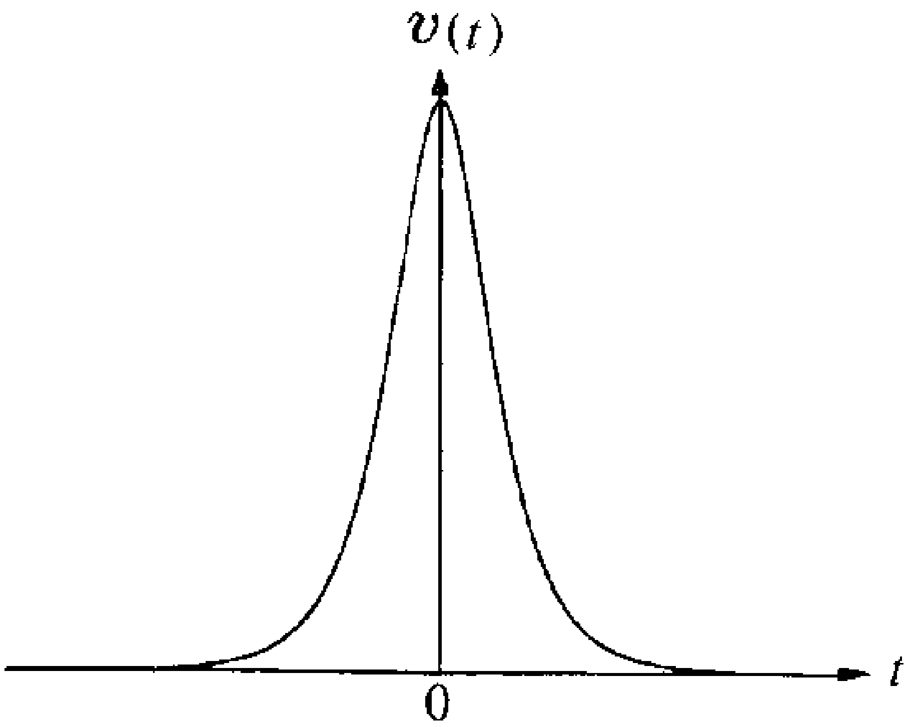


- 对于分界线性质，可求解分界方程看摆动速度与时间的关系：

$$\because \sin 2x = \frac{2\tan x}{(1+\tan^2 x)} \quad \therefore \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\cosh(\omega_0 t)}$$

$$x = 4\arctan(e^{\omega_0 t}) - \pi \quad \therefore \dot{x} = v(t) = \pm\frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)}$$

- 我们得到所谓的孤波解(Soliton)：物理学家如何孤波？



$$\dot{x}=v(t)=\pm\frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)}$$

- 当单摆存在阻尼时：

$$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0 \qquad \lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2=0$$

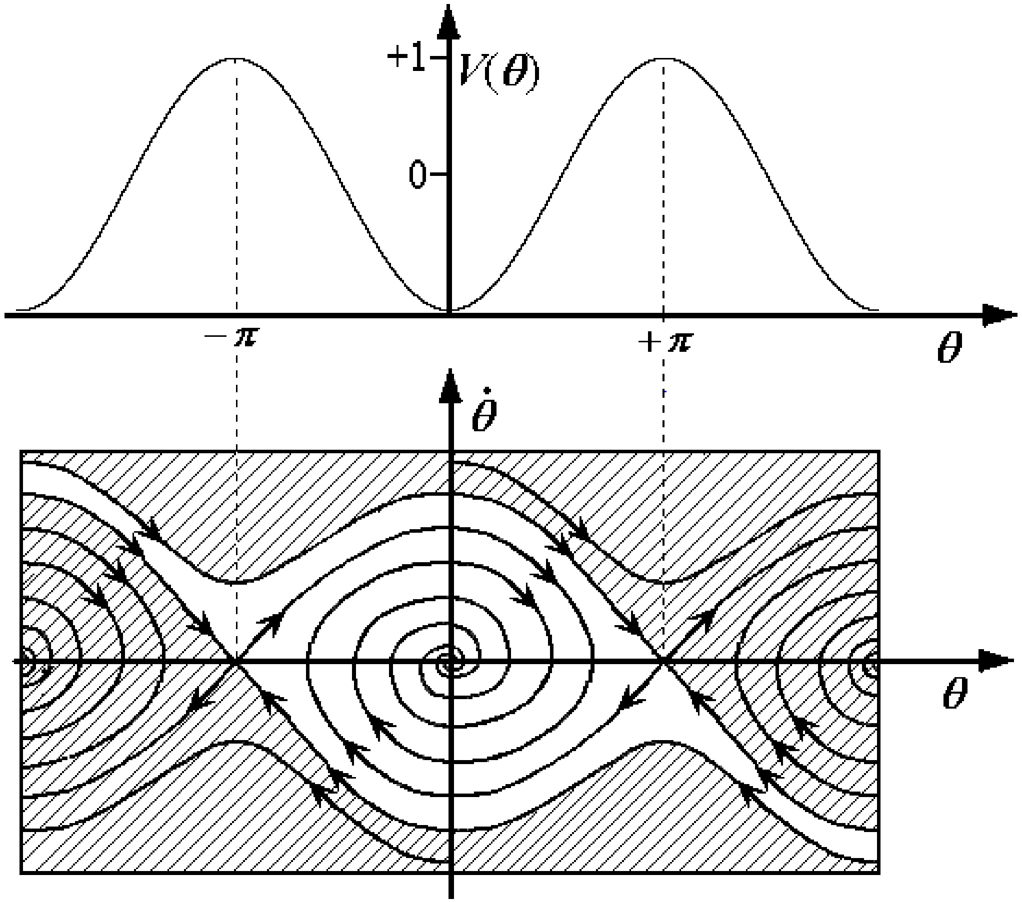
$$\lambda_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2} \qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$\lambda_{1,2}=-\beta\pm i\omega$$

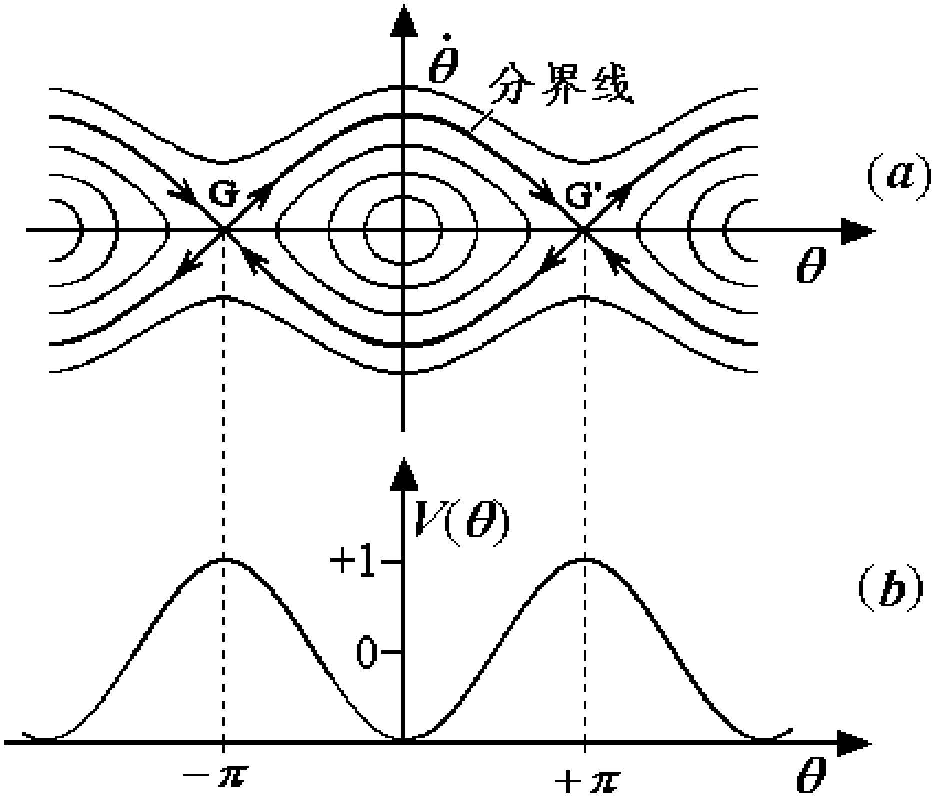
$$\theta=P\cdot e^{-\beta}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\dot{\theta}=-P\cdot e^{-\beta t}[\beta\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi)]$$

- 存在阻尼时的相空间相图：



无阻尼时



相空间：

- 绝大多数非线性问题要么找不到描述的微分方程，要么微分方程无解。建立空间几何分析图像比较有效。
- 动力学系统满足牛顿力学：

$$\ddot{x} = F$$

$$v = \dot{x}(t)$$

- 用位置 ***x(t)*** 和速度 ***v*** 就可以完全描述系统状态，用平面***(x,y)***上的点表示这个状态，即***(x,y)***空间是相空间。

- 因此，一般地一个动力系统总可以化成相空间的一阶微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = f(x,y) \\ \dot{y} = v_y = g(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_x = f(x,y,z) \\ \dot{y} = v_y = g(x,y,z) \\ \dot{z} = v_z = h(x,y,z) \end{cases}$$

- 因为不显含时间 t，定义为自治动力系统；速度场与 t 无关，定常系统。

- 非自治动力系统可以化成更高维自治动力系统：

$$\ddot{x}+x=A\cos(\omega t)\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x+A\cos(z)\\ \dot{z}=\omega\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{u}=f(u,v,t)\\ \dot{v}=g(u,v,t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{u}=f(u,v,w)\\ \dot{v}=g(u,v,w)\\ \dot{w}=1\end{cases}$$

保守系统、耗散系统、吸引子：

- 保守系统指系统总能量与时间 ***t*** 无关，如无阻尼系统：

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ \ddot{x} + \sin x = 0 \end{cases} \qquad \dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$H(x,y) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = Const.$$

- ***H***是哈密顿量。系统能量性质也可以通过速度流来表征：

$$\begin{cases} u = \dot{x} = y \equiv \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ v = \dot{y} = -x \equiv -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

$$\vec{v} = (u,v,w) \Rightarrow div\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

- ***divv*=0**表示保守系统，相空间体积**V**在运动中保持不变。***divv*<0** 表示耗散系统，相空间体积随时间缩小。

- 保守系统：

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ \ddot{x} + \sin x = 0 \end{cases}$$

$$div\vec{v} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0$$

- 耗散系统——以阻尼单摆为例：

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = 0 \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - x \end{cases} \Rightarrow div\vec{v} = -\alpha < 0$$

- 状态的归宿是耗散系统的吸引子：点 或 曲线 或 曲面。

定常状态：

- 非线性动力系统的求解一般很难，作定性分析的第一步是研究定常态(空间每一点只有一个速度矢量)：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,z) = 0 \\ \dot{y} = g(x,y,z) = 0 \\ \dot{z} = h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

- 以一维动力系统为例：

$$\dot{x} = f(x) = \mu x(1-x)$$

- 两个定常态：$x^*=0$和$x^*=1$。
- μx代表驱动力，μx^2代表耗散力。对于定常态的微小扰动是：

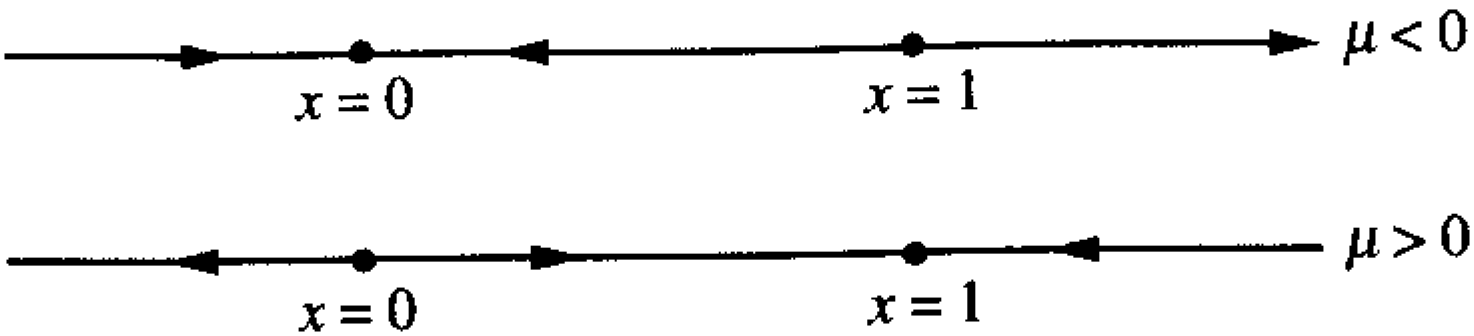
$$\delta\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} \delta x \qquad \delta x = \delta x_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*}$$

- λ 是雅可比矩阵在 $x=x^*$ 处的特征值。
- $Re\lambda>0$：驱动力大于耗散力，δx 随时间 t 增加；
- $Re\lambda<0$：驱动力小于耗散力，δx 随时间 t 减小。

- 在两个定常态处，特征值为：

$$\lambda = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu \Leftrightarrow \lambda = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=1} = -\mu$$

- 轨迹、吸引子及分叉 (**μ=0**) 图：



- 二维线性动力系统：

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,y) = ax + by \\ \dot{y} = g(x,y) = cx + dy\end{cases}$$

- 定常态为(0, 0)。变换成一维是非线性系统，得到：

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} - (bc - ad)x = 0$$

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \Leftarrow p = -(a+d),\quad q = -(bc - ad)$$

- 第一项是加速度，第二项是阻尼，第三项是回复力(负驱动力)。

- 速度散度为负，如果有阻尼的话，因此是耗散系统。

$$div\vec{v} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = (a+d) = -p < 0$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

- 特征方程和雅可比矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

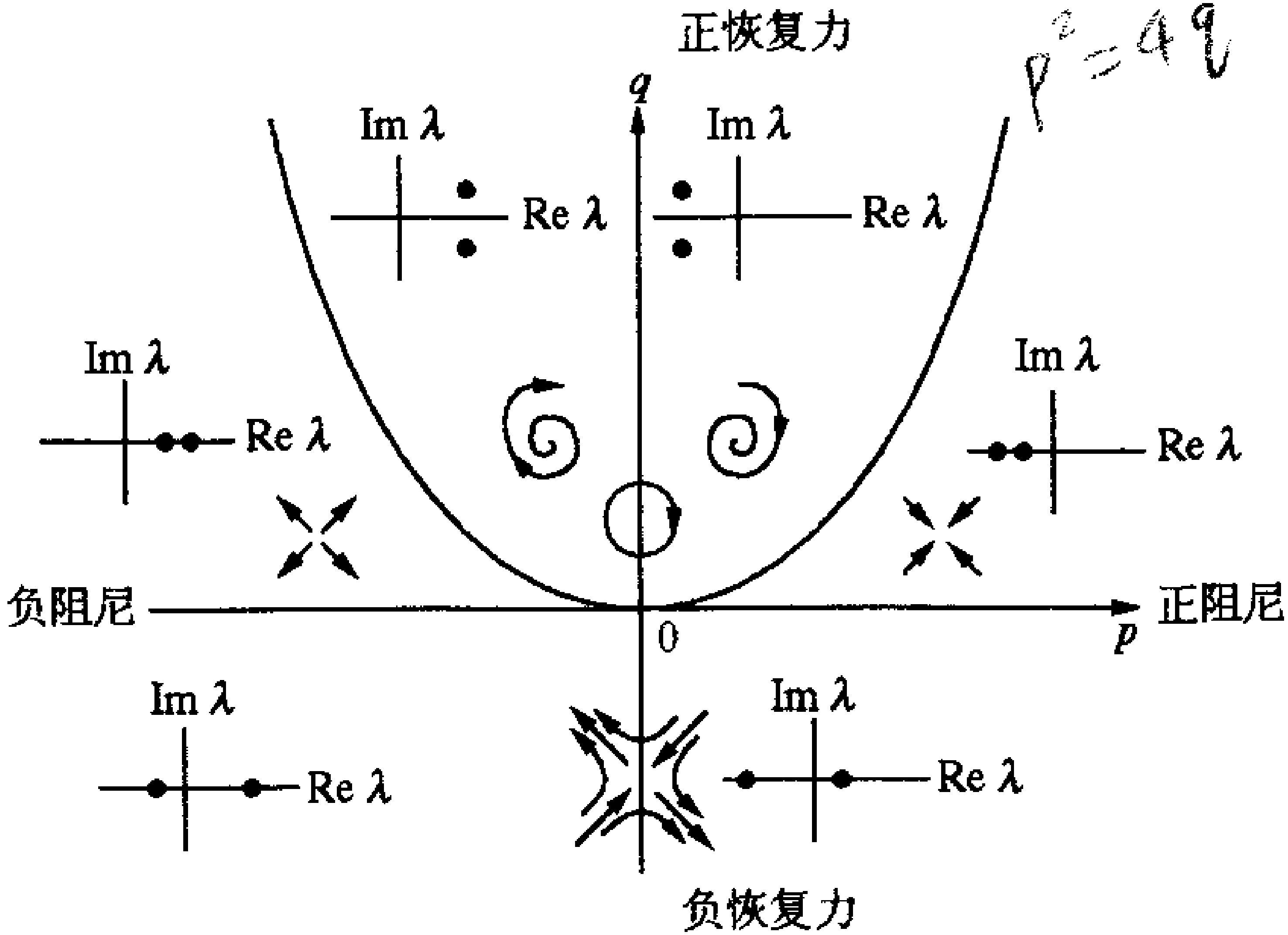
- 特征行列式和特征根：

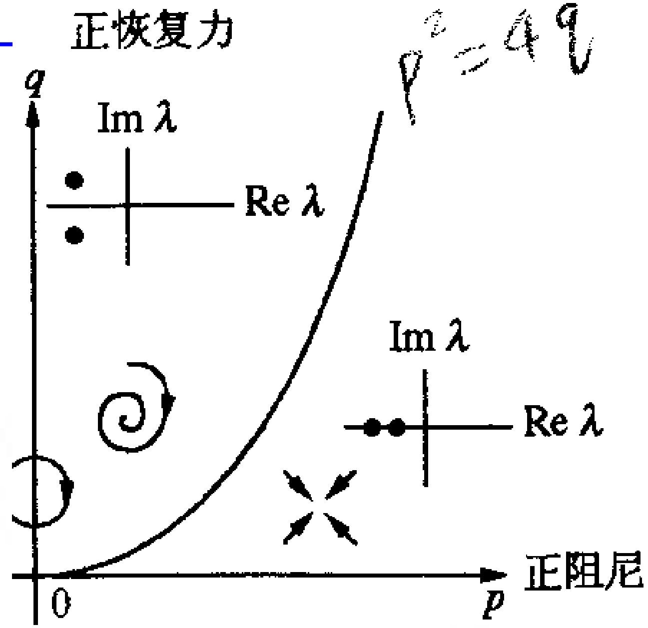
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

- 定常态的稳定性决定于特征根的实部正负。参数相空间不但分成四个象限，也被 $p^2=4q$ 分界。

- 参数相空间的稳定性轨迹如下图：

非线性物理：基础知识——相空间





- 参数平面(*p*, *q*)第一象限。正阻尼+正恢复力，分成阻尼系数*p*较大和较小两部分，被$p^2=4q$分割。λ是共轭复根，实部为负：

$$\delta x=\delta x_0 e^{\lambda t}=\delta x_0 e^{(Re\,\lambda+i\,Im\,\lambda)t}$$

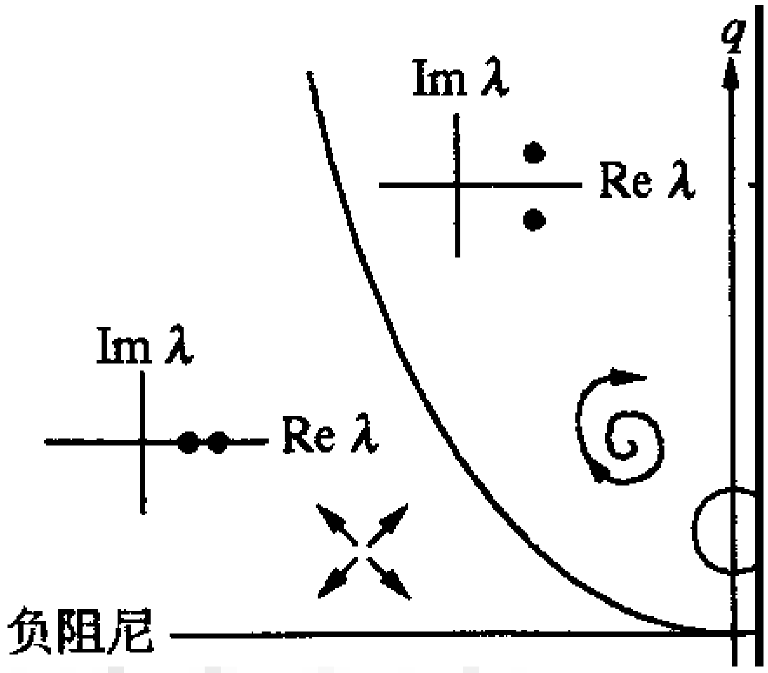
$$=\delta x_0 e^{(Re\,\lambda)t}\left[cos(Im\,\lambda)t+i\,sin(Im\,\lambda)t\right]$$

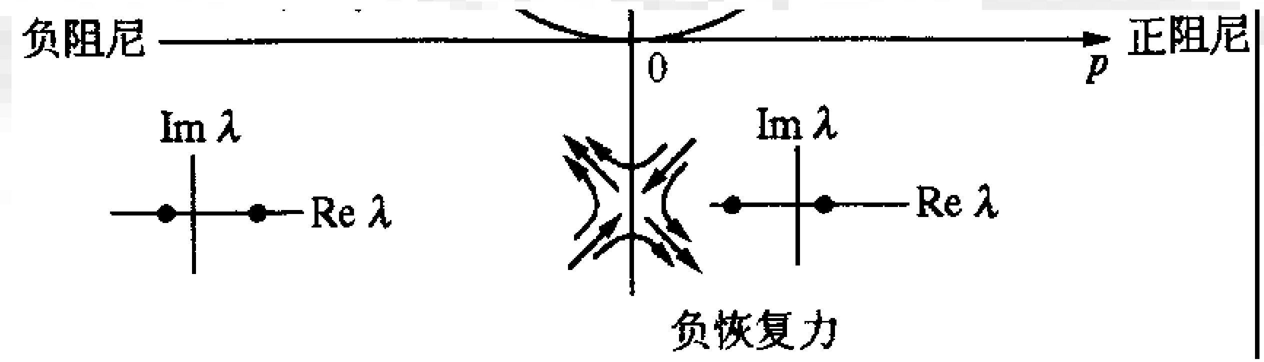
- **Reλ<0**，定常态**(0, 0)**是稳定吸引子。$p^2<4q$时，附近轨道螺旋振荡趋于定常态，称为稳定的焦点**(focus)**。

- 如果$p^2>4q$， λ是两个负实根，**(0, 0)**为稳定的结点**(node)**。

非线性物理：基础知识——相空间

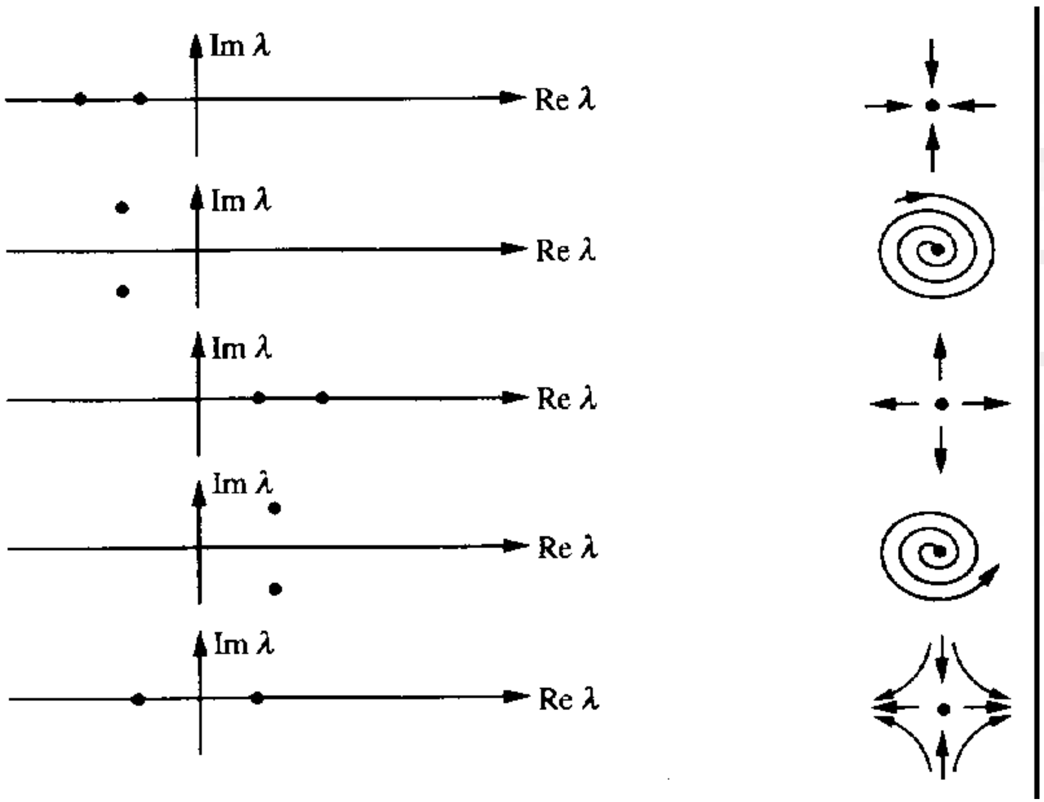
- (p, q)第二象限。负阻尼+正恢复力，被$p^2=4q$分割：(1) λ是共轭复根且实部为正($|p|$较小)，(2) λ为两个正实数($|p|$较大)。(0, 0)为不稳定排斥子，称为不稳定焦点和不稳定结点。

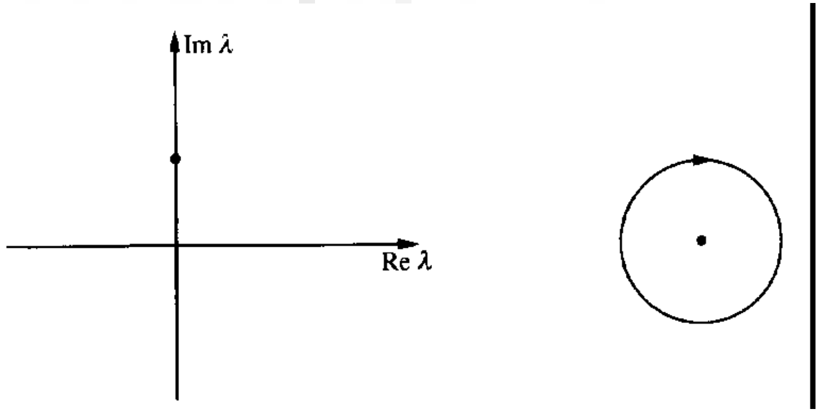




- 第三、第四象限，$q<0$表示负恢复力，λ为实数，一正一负。附近轨道一个向外发散，一个向内收敛。(0, 0)不稳，鞍点(saddle)。

- (p, q)第一和第二象限交界处$p=0$，即无阻尼，λ是纯虚根，(0, 0)附近的轨线是闭合的，不会趋向原点，(0, 0)称为中心点。
- 特征根与轨迹线的对应关系如图：





- 对于三维自治动力系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = f(x,y,z) \\ \dot{y} = v_y = g(x,y,z) \\ \dot{z} = v_z = h(x,y,z) \end{cases}$$

- 其定常态的雅可比矩阵特征值满足三次方程：

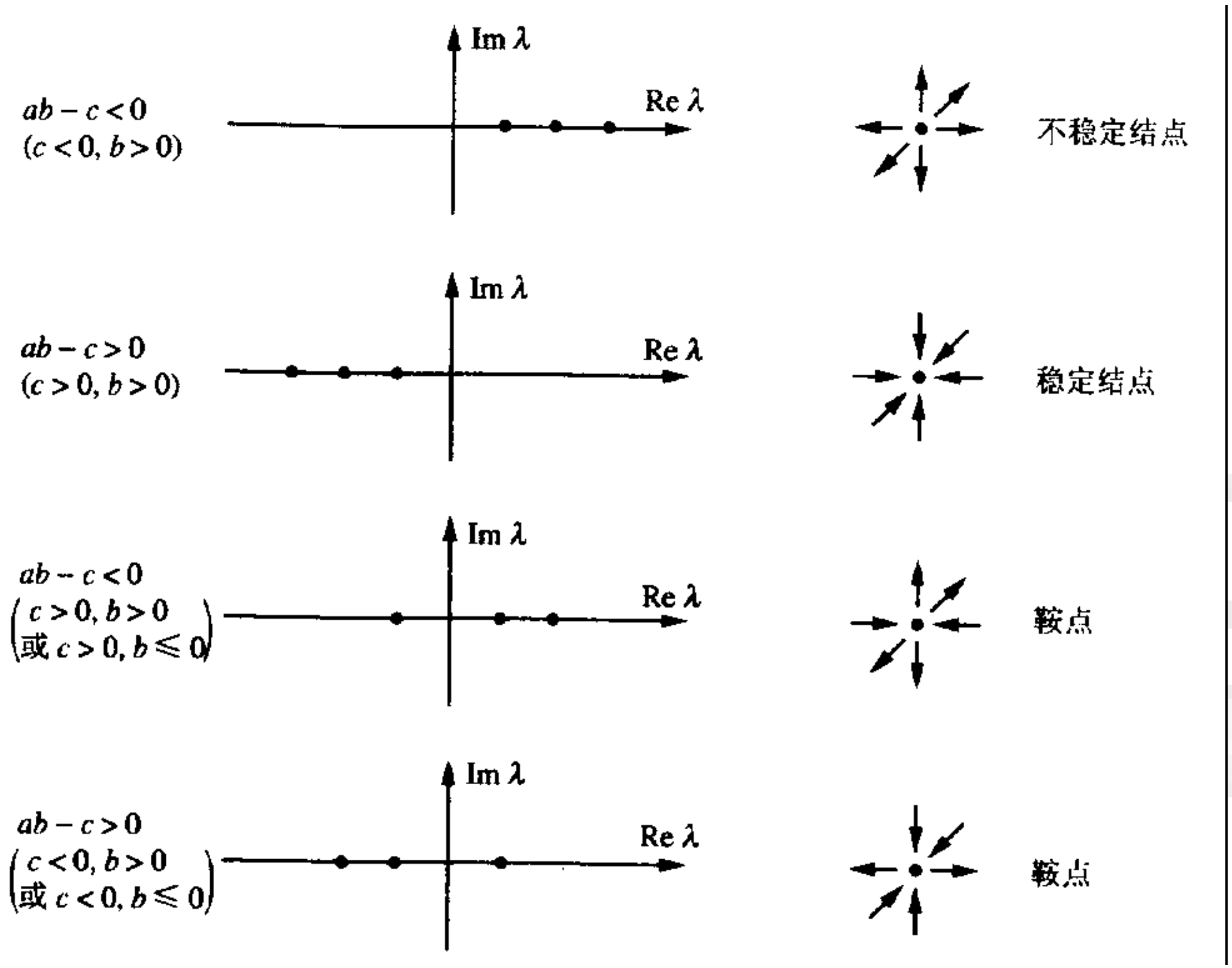
$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

- 如果：

$$\Delta = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 < 0$$

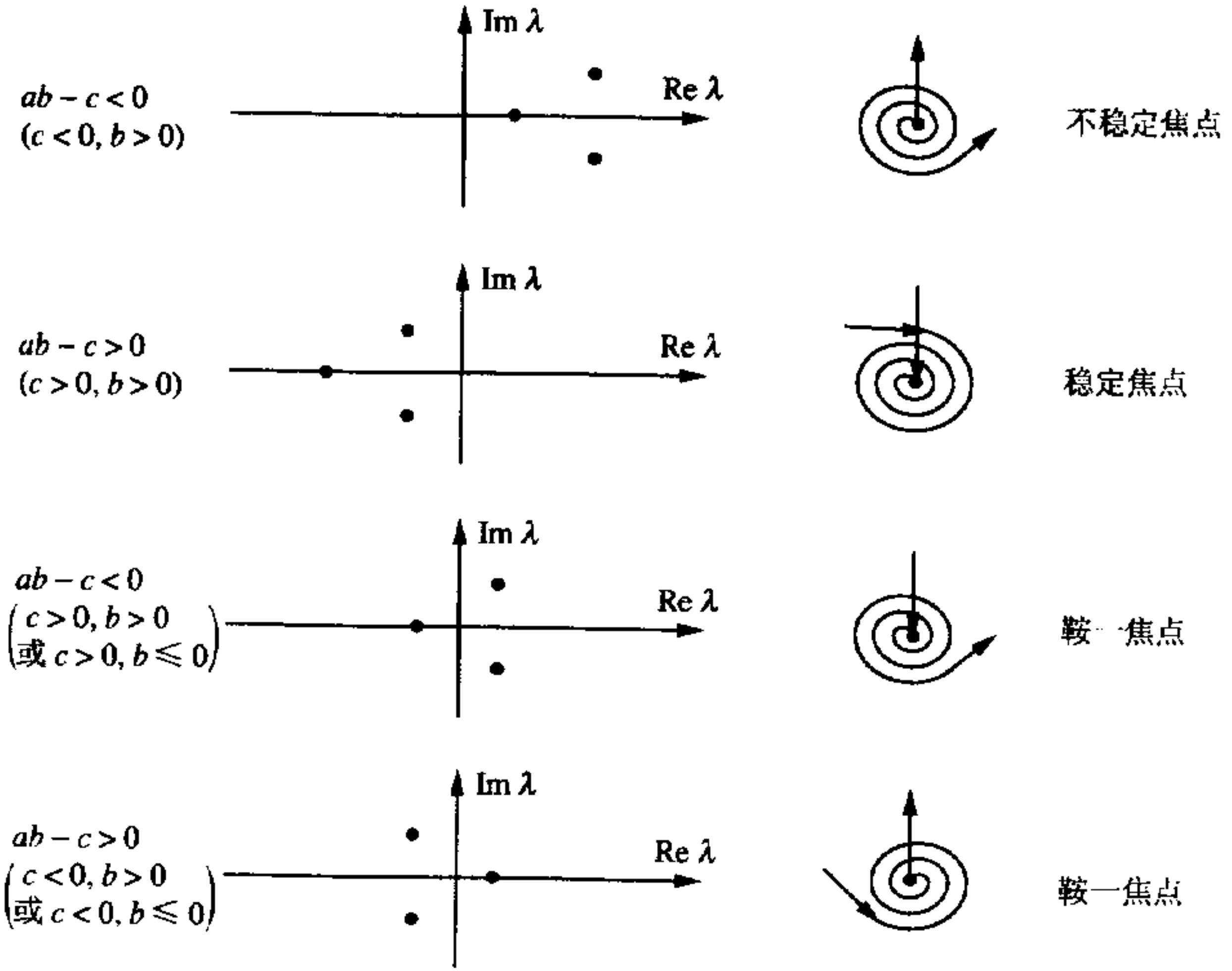
- 则三根为实根，定常态附近轨迹为：

非线性物理：基础知识——相空间



- 如果$\Delta>0$，则有一实根、两个共轭复根，轨迹线如下图：

非线性物理：基础知识——相空间



- 对于三维自治动力系统：

- 三维自治动力系统对应的微分方程为：

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -az - by - cx \end{cases}$$

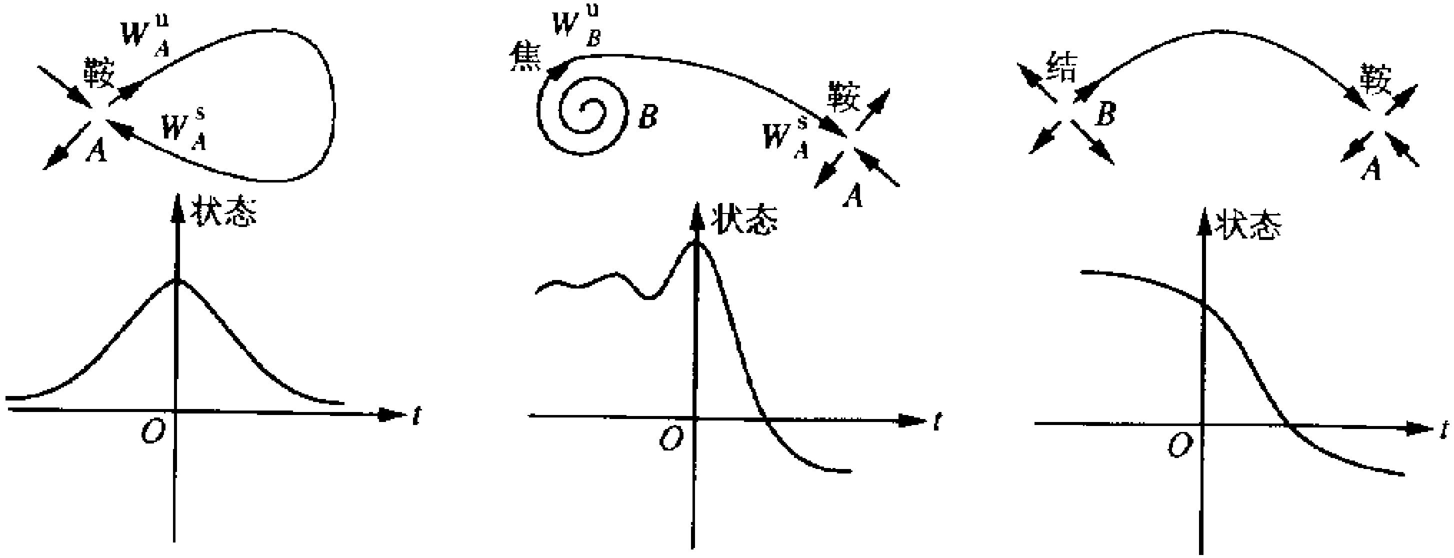
- 其速度散度为 ***div v=-a=***$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$。如果***a*=0**，则如果 $\Delta=4b^3+27c^2>0$，也会出现鞍-焦点。

- 这一结果证明无论保守系统还是耗散系统都可能出现鞍-焦点。

同(异)宿轨道：

- 定常态及其相应的轨迹只是局域性质的，而一个动力系统广域上可能存在多个定常态。
- 多个定常态及其周围轨迹相互关联构成动力系统整体流场的斑图**(pattern)**。定常态之间存在相互转化轨道，分为同宿/异宿轨道。
- 同宿轨道**(homoclinic orbit)**指 $t\to\pm\infty$ 时趋于同一状态的轨道。
- $t\to+\infty$时为同宿轨道的 α 极限集， $t\to-\infty$时为 ω 极限集。
- $t\to+\infty$和$t\to-\infty$时分别趋向不同定常态为异宿轨道**(heteroclinic)**。

非线性物理：基础知识——相空间

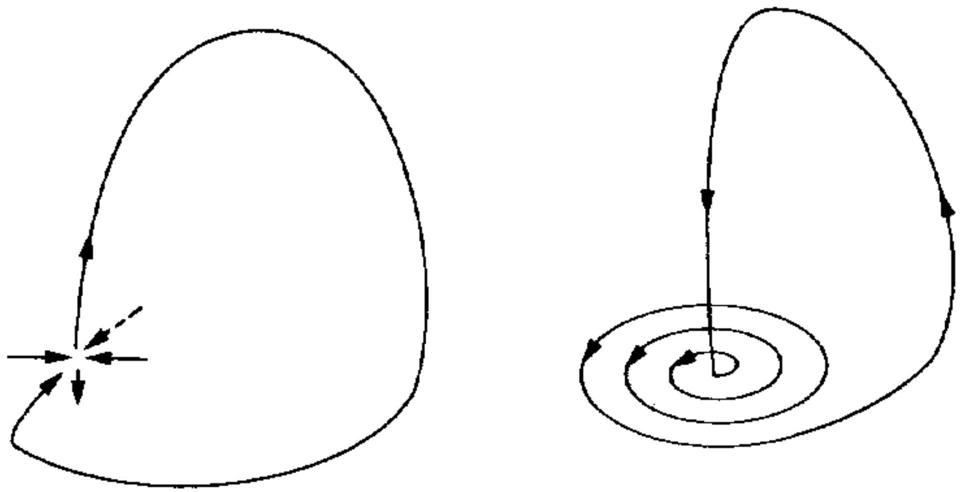


(a) 鞍点同宿轨道及对应的孤立波

(b) 鞍—焦异宿轨道及对应的冲击波

(c) 鞍—结异宿轨道及对应的振荡冲击波

- 在三维相空间也存在类似的同宿/异宿轨道演化：



(a) 鞍点同宿轨道

(b) 鞍—焦同宿轨道

混沌轨道：

- 在一维和二维动力系统不可能形成混沌轨道，只有三维才可能。
- 混沌轨道是有界轨道，不能趋于无穷，且相邻轨道会按指数相互分离。
- 以**Lorentz**方程为例分析：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = -Pr\,x + Pr\,y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = Rax + -y - xz \\ \dfrac{dz}{d\tau} = -bz + xy \end{cases}$$

- ***Pr***、***Ra***和***b***是**Prantdl**数、**Rayleigh**数和正常数。
- **(*x*, *y*, *z*)**代表三维相空间。

- 速度散度为：$div\vec{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = -Pr - 1 - b < 0$
- 所以-***Prx***, -***y***, -***bz***项是耗散力；***Rax***是负恢复力(驱动力)，因为：

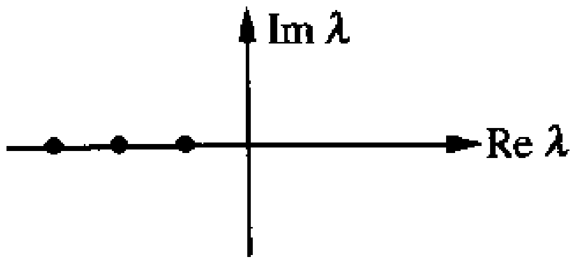
$$\ddot{x} = -Pr\,\dot{x} + Pr\,Rax \Rightarrow \ddot{x} + Pr\,\dot{x} - Pr\,Rax = 0$$

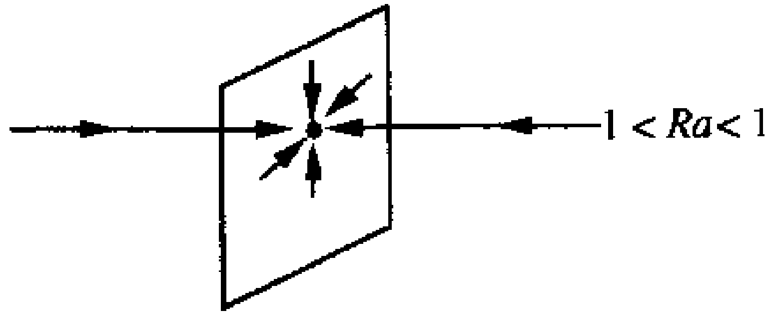
- ***xy***和***xz***就是非线性项了，因此**Lorentz**方程含有驱动力、耗散力和非线性作用。随着**Ra**增加，驱动力增大，将导致分叉和混沌。
- 三个定常态：

$$O:\ (x,y,z) = (0,0,0)$$

$$C_{1,2}:\ (x,y,z) = (\pm\sqrt{b(Ra-1)},\ \pm\sqrt{b(Ra-1)},\ Ra-1)$$

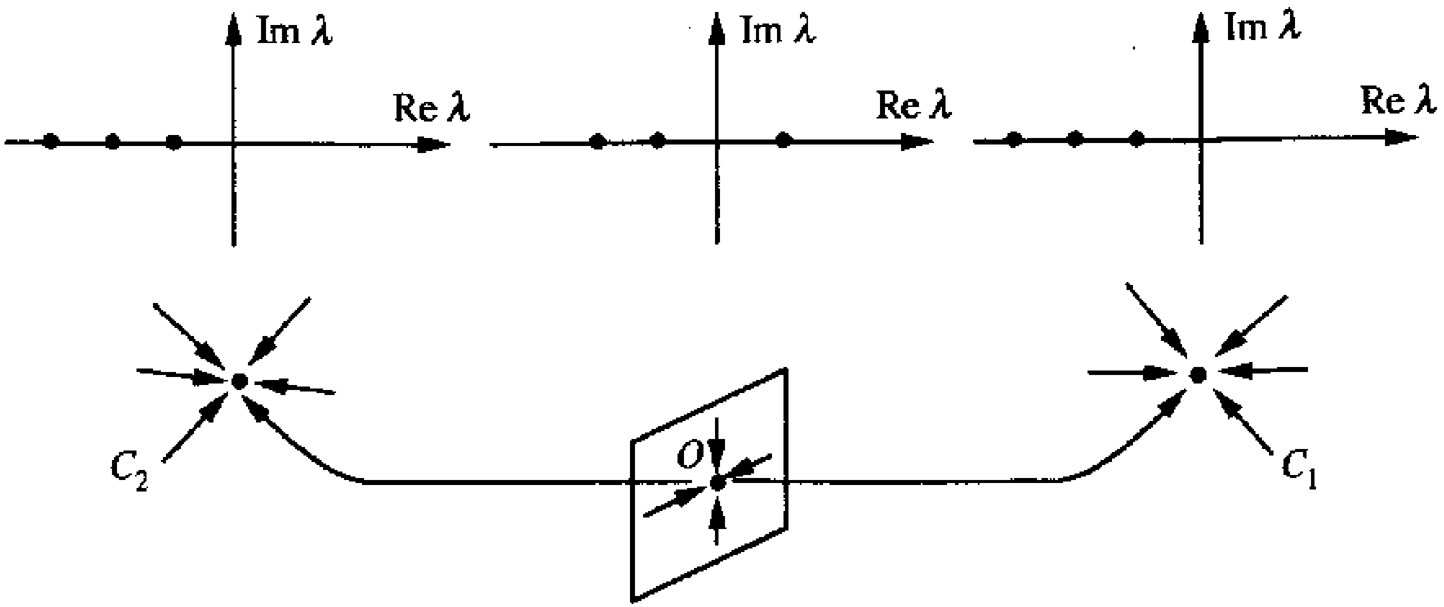
- 取b=8/3，Pr=10为例，当0≤Ra<1时，定常态O是稳定结点，$C_{1,2}$不存在于实空间：



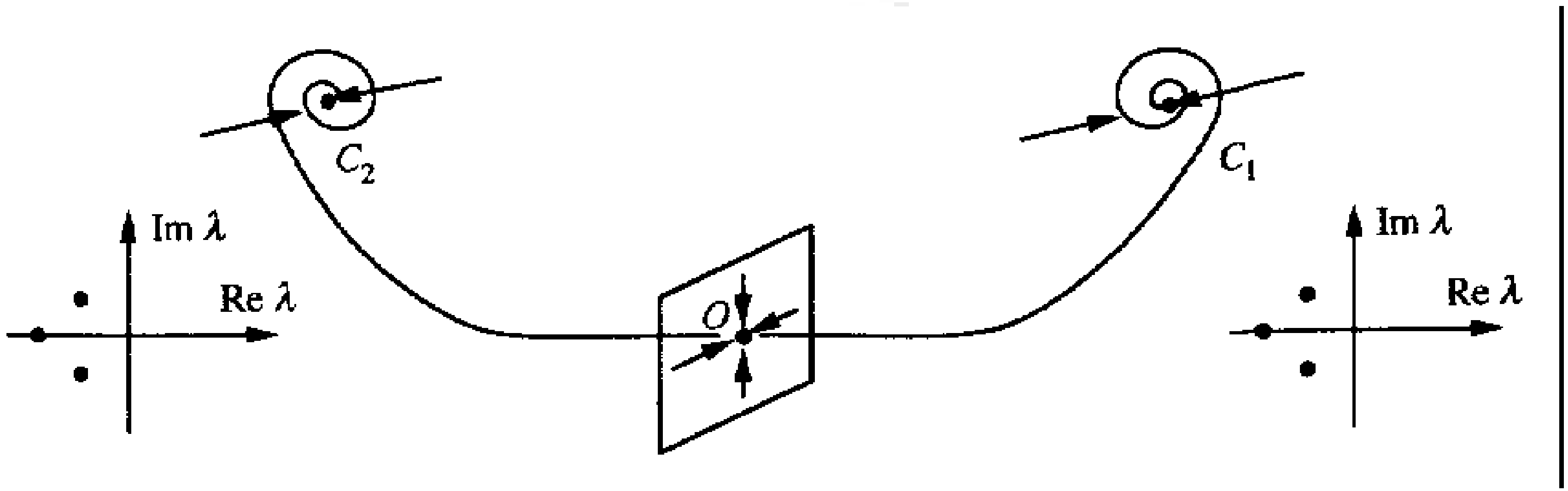


非线性物理：基础知识——相空间

- 在1<*Ra*<1.346区间，O点失稳，$C_{1,2}$出现并是稳定结点，O与C_1和O与C_2之间形成鞍-结异宿轨道：

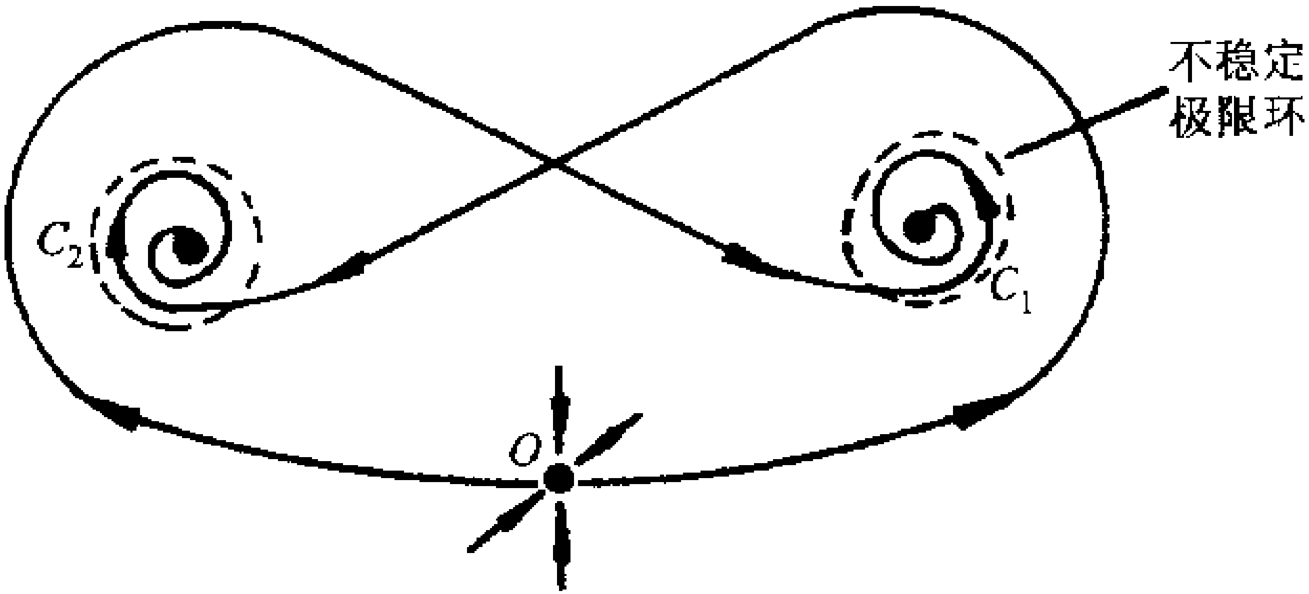


- 在1.346<*Ra*<13.926区间，$C_{1,2}$变成稳定焦点，O与C_1和O与C_2之间形成鞍-焦异宿轨道。此时C_1和C_2代表对流状态，但是对流没有回环：



非线性物理：基础知识——相空间

- 在13.926<*Ra*<24.74区间，$C_{1,2}$变成不稳定的极限环，O与C_1和O与C_2之间形成异宿轨道，呈现对流状态：



- *Ra*>24.74时，耗散力与驱动力竞争使得$C_{1,2}$变成鞍-焦点，O与C_1和O与C_2之间形成同宿轨道，空间轨道出现伸长与折叠，混沌出现：