第九章 麦克斯韦方程与电磁波

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦 **(James Clerk Maxwell 1831--1879)**

电磁场规律：

两个闭合面积分

两个闭合线积分

两个梯度点乘

两个梯度叉乘

$$\begin{cases}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 d\tau \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

存在介质时，须有介质方程：

$$\begin{cases}\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{j}_0 = \sigma(\vec{E}+\vec{E}^*) \begin{cases}\vec{j}_0 = \sigma\vec{E} \\ \vec{j}_0 = \sigma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\end{cases} \\ \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}\end{cases}$$

洛伦兹力(微观)：

$$\boxed{\vec{f} = Q\vec{E} + Q(\vec{v}\times\vec{B})}$$

方程组的物理意义：

- 通过任意闭合面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷的代数和。
- 电场强度沿任意闭曲线的线积分等于以该曲线为边界的任意曲面的磁通量对时间变化量的负值。
- 通过任意闭合面的磁通量恒等于零。
- 稳恒磁场沿任意闭合曲线的线积分等于穿过以该曲线为边界的曲面的全电流。

- 方程组+介质性质方程：电磁场规律！
  - 方程组加上边界条件的解是唯一的——这种客观条件下所发生的真实的电磁场；
  - 对电磁场，方程组中电荷、电流应看作是外来已知量，它们的分布加上电磁场内介质的分布确定了电磁场的外部条件；
  - **Maxwell**方程组、洛伦兹力公式以及电荷守恒定律——组成电动力学的基本方程式，与力学定律结合。

- 可解决：
  - 运动带电体与电磁场所组成的力学体系的运动规律；
  - **Maxwell** 方程组在洛伦兹变换下具有不变性(电动力学)。

- 边界条件问题：
  - 界面上介质的性质有一突变，将导致静电场也会有突变；
  - 积分形式的**Maxwell** 方程在边界上依然成立，可以把不同介质的场量用积分方程联系起来；
  - 微分形式只适用于非边界区域，对于边界突变处，微分形式已失去意义；
  - 通常用积分方程不能直接求得空间各点场量的分布，要将方程的积分形式变换成微分形式。
  - 必须考虑用新的形式来给出边界上各物理量的关系，亦即给出边界条件。
  - 边界条件就是把积分方程放到边界突变处得到的结果。

多类边界条件

- 电介质边界条件

$$\vec{D}_{n1}=\vec{D}_{n2},\quad \vec{E}_{t1}=\vec{E}_{t2}$$
$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=0,\quad \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$$

- 磁介质边界条件

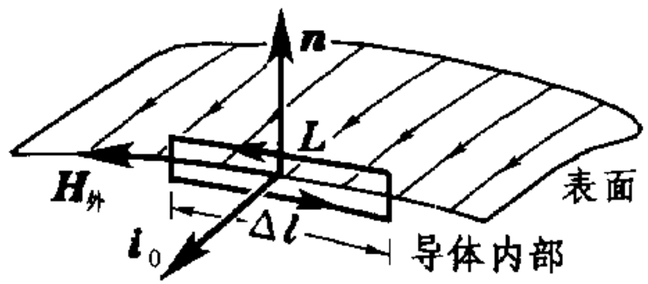
$$\vec{B}_{n1}=\vec{B}_{n2},\quad \vec{H}_{t1}=\vec{H}_{t2}$$
$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0,\quad \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$$

- 导体界面电荷条件

$$\vec{n}\cdot(\vec{j}_{02}-\vec{j}_{01})=-\frac{\partial\sigma_0}{\partial t}$$

- 高频情况下真空界面条件

$$\vec{i}=\vec{k}_m=\vec{n}\times\vec{H}_{外}$$



	产生原因		实验定律	规律	性质	推广	总结
电场	$E_{位}$	电荷	$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}$	$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho_0 d\tau$ $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	有源 无旋	库仑定律推广 **D=D**$_{位}$ **+D**$_{旋}$ **E=E**$_{位}$ **+E**$_{旋}$	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$ $=\int_V \rho_0 d\tau$ $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$ $=-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$
	$E_{旋}$	变化的磁场	假定	$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=0$ $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	无源 有旋(左)		
磁场	B_1	传导电流	$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$	$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S}$	无源 有旋(右)	似稳问题	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=$ $\int_S (\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$
	B_2	位移电流	假定	$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	无源 有旋(右)	取消似稳条件	

- 一些物理基础实验现象：
- Dipole Antenna
- Microwave Interference
- Microwave Polarization
- Telegraph Transmitter

- 波动方程：无自由电荷、无传导电流、各向同性

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}\xrightarrow[\vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}\quad \vec{j}_0=0]{\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\quad \rho_0=0}\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\mu_0\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

- 绝好的相似性、对称性、关联性！

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

➢ 激动人心的变换之一：电场波动

$$\because \nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E} \xrightarrow{\nabla\cdot\vec{E}=0} = -\nabla^2\vec{E}$$

$$\because \nabla\times\vec{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla\times\left(-\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore -\nabla^2\vec{E} = \nabla\times\left(-\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})$$

$$\because \nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \therefore -\nabla^2\vec{E} = -(\mu_0\mu)(\varepsilon_0\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \nabla^2\vec{E} = (\mu_0\mu)(\varepsilon_0\varepsilon)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \xleftrightarrow{1/v^2=(\mu_0\mu)(\varepsilon_0\varepsilon)} \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\vec{E} \xrightarrow{\mu=1,\ \varepsilon=1 \text{ in vacuum}} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\vec{E}$$

如果初始电场或磁场取空间波的形式，则其一定会自发在空间传播！

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\mu_0\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

➢ 激动人心的变换之二：磁场波动

$$\because \nabla\times(\nabla\times\vec{H}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H} \xrightarrow{\nabla\cdot\vec{H}=0} = -\nabla^2\vec{H}$$

$$\because \nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{H}) = \nabla\times\left(\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore -\nabla^2\vec{H} = \nabla\times\left(\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E})$$

$$\because \nabla\times\vec{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \therefore \nabla^2\vec{H} = (\mu_0\mu)(\varepsilon_0\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \nabla^2\vec{H} = (\mu_0\mu)(\varepsilon_0\varepsilon)\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \xleftrightarrow{1/v^2=(\mu_0\mu)(\varepsilon_0\varepsilon)} \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\vec{H} \xrightarrow{\mu=1,\ \varepsilon=1 \text{ in vacuum}} \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\vec{H}$$

如果初始电场或磁场取空间波的形式，则其一定会自发在空间传播！

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\mu_0\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

电磁波作为波动(平面波)行为的性质:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=v^2\nabla^2\vec{E}\\ \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=v^2\nabla^2\vec{H}\end{aligned}\right\}\xrightarrow[\vec{H}=\vec{H}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)]{\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} k^2=\frac{\omega^2}{v^2}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\ \omega=2\pi f\Rightarrow v=\lambda f$$

$$1/v^2=(\mu_0\mu)(\varepsilon_0\varepsilon)\Rightarrow c_{em}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

- 计算所得 c_{em} “碰巧”与光束相同 $\Rightarrow$ 光是电磁波的第一个证据。
- 介质中电磁波速率与 (ε, μ) 相关。

电磁波是横波：

$$\frac{\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}{\vec{H}=\vec{H}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)} \rightarrow \begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(k_xE_{0x}+k_yE_{0y}+k_zE_{0z})\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})=0\\ (k_xH_{0x}+k_yH_{0y}+k_zH_{0z})\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0\\ \vec{k}\cdot\vec{H}_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{k}\perp\vec{E}_0\\ \vec{k}\perp\vec{H}_0\end{cases}$$

电场与磁场垂直：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\vec{E}&=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})\\ \vec{H}&=\vec{H}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\nabla\times\vec{E}=-\mu_0\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \vec{k}\times\vec{E}_0\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})=\mu_0\mu\omega\vec{H}_0\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)\Rightarrow\therefore\\ \begin{cases}\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi\\ \vec{k}\times\vec{E}_0=\mu_0\mu\omega\vec{H}_0\end{cases},\quad\because\begin{cases}\vec{k}\perp\vec{E}_0\\ \vec{k}\perp\vec{H}_0\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{k}\perp\vec{E}_0\\ \vec{k}\perp\vec{H}_0\\ \vec{E}_0\perp\vec{H}_0\\ \varphi=0\end{cases}$$

电场与磁场关联：同相位、振幅同比例、相互垂直

$$E_0 = \frac{\mu_0 \mu \omega}{k} H_0 = \frac{2\pi \mu_0 \mu f}{2\pi / \lambda} H_0 = \mu_0 \mu \lambda f H_0 = \mu_0 \mu v H_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} H_0$$

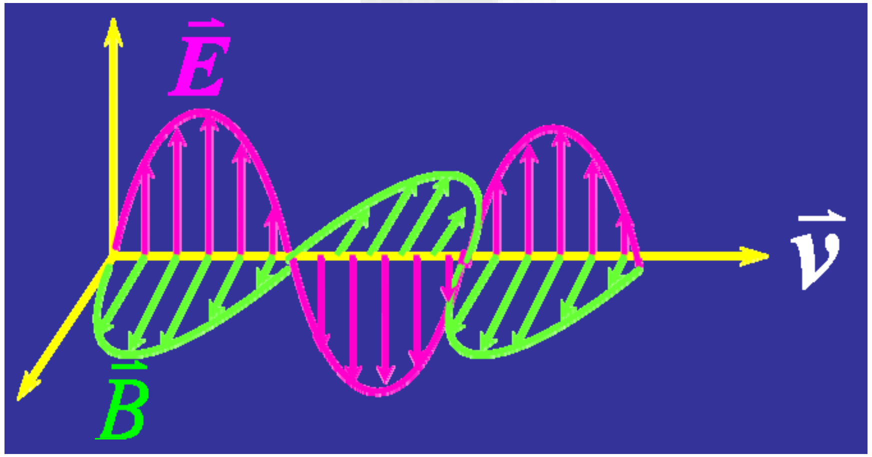
$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$$

注意，这些是自由空间下的结果，没有考虑边界条件！

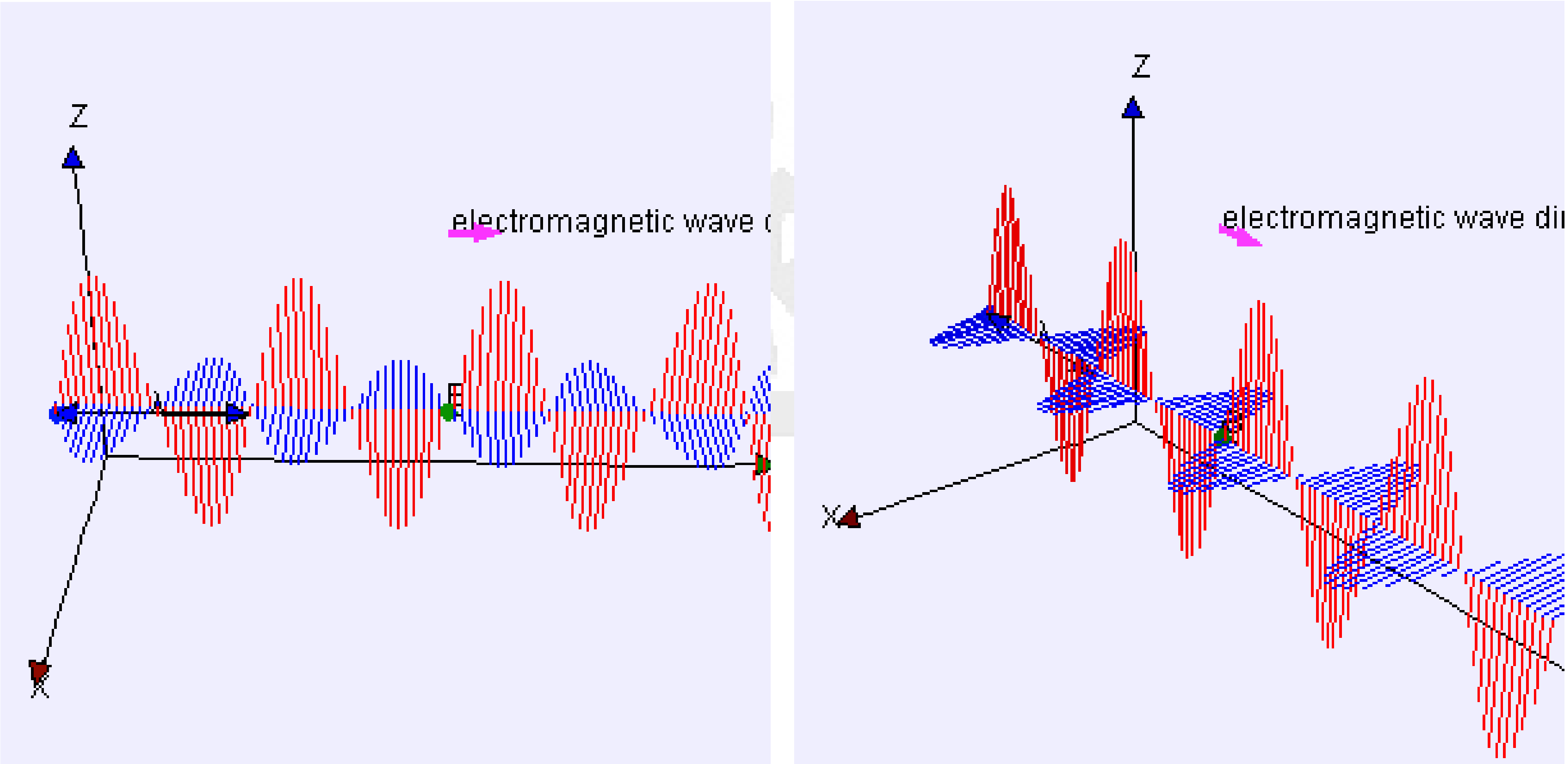
光与电磁波：

$$1/v^2 = (\mu_0 \mu)(\varepsilon_0 \varepsilon) \Rightarrow c_{em} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon \mu}$$



电磁波卡通



- 定态波动方程--电磁波在介质中传播时，介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与磁导率 $\boldsymbol{\mu}$ 都是电磁波频率ω的函数，称之为色散。线性介质中：

$$\boxed{D(\omega)=\varepsilon(\omega)E(\omega) \qquad B(\omega)=\mu(\omega)H(\omega)}$$

- 只考虑简谐振动这种特定情况，即电磁场激发源与辐射都作简谐振动，称为定态电磁波或单色波，由此：

$$E(r,t)=E(r)\exp(-j\omega t) \qquad B(r,t)=B(r)\exp(-j\omega t)$$

$$\xrightarrow[\text{at fixed }\omega]{\varepsilon=const,\mu=const} D=\varepsilon E \quad B=\mu H$$

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\mu_0\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

- 代入麦克斯韦方程组，消去 **exp(-jωt)**，得到：

$$\begin{cases}\nabla\times E=j\omega\mu H\\ \nabla\times H=-j\omega\varepsilon E\\ \nabla\cdot E=0\\ \nabla\cdot H=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\nabla\times(\nabla\times E)=\\ =j\omega\mu\nabla\times H=\\ =\omega^2\varepsilon\mu E\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla\times(\nabla\times E)=\\ =j\omega\mu\nabla\times H=\\ =\omega^2\varepsilon\mu E\end{cases}$$

- 利用矢量分析，得到：

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla^2E=-\nabla^2E$$
$$\Rightarrow\nabla^2E+(\omega\sqrt{\varepsilon\mu})^2E=\nabla^2E+k^2E=0$$

- 上式中的下部为**Helmboltz**方程，乃一定频率下电磁波基本方程。介质中的单色电磁波满足的麦克斯韦方程组可以写为：

$$\begin{cases}\nabla^2E+k^2E=0\\ B=-\dfrac{j}{\omega}\nabla\times E\\ \nabla\cdot E=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla^2B+k^2B=0\\ E=\dfrac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times B\\ \nabla\cdot B=0\end{cases}$$

电磁波传播携带能量:

- 定义能流密度矢量：单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的电磁能量，也叫辐射强度。
- 对各向同性线性介质，简单推理。

$$\left.\begin{array}{l}\text{静电能密度}: w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 \\ \text{静磁能密度}: w_m = \dfrac{1}{2}\mu_0\mu H^2\end{array}\right\} \Rightarrow w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \mu_0\mu H^2\right)$$

$$\because dW = w\cdot dV = w\cdot dA\cdot dl = w\cdot dA\cdot vdt = wv\cdot dAdt$$

$$\therefore \text{能流密度} \xrightarrow[\text{单位时间}]{\text{单位面积}} S = \frac{dW}{dAdt} = wv = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \mu_0\mu H^2\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$$

➤ 继续推演，定义坡印亭(Poynting)矢量：

$$S=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\varepsilon E^2+\mu_0\mu H^2\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$$

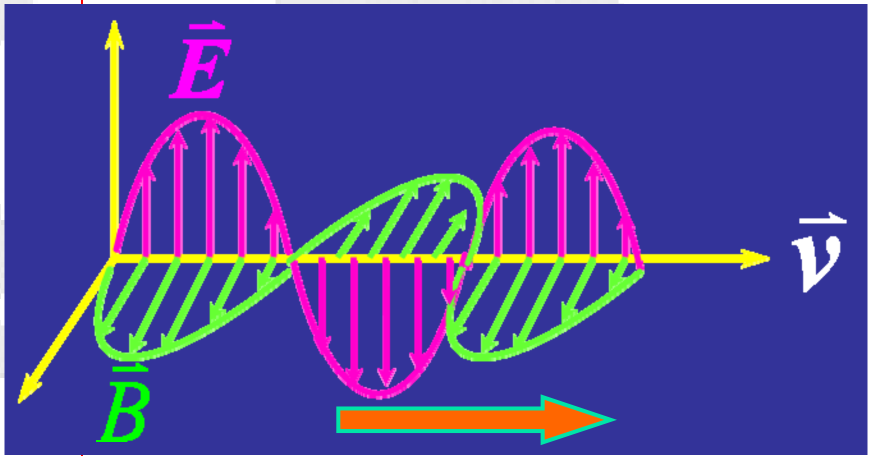
$$\because \frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}},\quad \therefore \frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}(EH+EH)=EH$$

$$Set\ \begin{cases} E=E_0\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{v}\right)\right] \\ H=H_0\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{v}\right)\right] \end{cases}$$

$$\therefore \bar{S}=\frac{1}{T}\int_0^T S dt=\frac{1}{2}E_0H_0\sim E_0^2\sim H_0^2$$

$$\because \vec{E}\perp\vec{H},\quad \therefore \vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\ \text{(why not } \vec{H}\times\vec{E}\text{ ??)}$$



$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

严格推导电磁波能量问题：

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2}\iiint_V (\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H})dV$$

考虑电磁波：$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint_V (\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H})dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H})dV$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}) = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E}) + \mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{H}) = 2\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + 2\mu_0\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$= 2\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + 2\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\because \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}) = 2(\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H} - \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E} - \vec{j}_0\cdot\vec{E})$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

➢ 继续：

$$\because \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B},\quad \therefore \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})=-2\left[\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{j}_0\cdot\vec{E}\right]$$

$$\therefore \frac{dW}{dt}=-\iiint_V\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})dV-\iiint_V\vec{j}_0\cdot\vec{E}dV$$

Set A as the closed surface of volume V :

$$\iiint_V\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})dV=\oiint_A(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{A}\xrightarrow{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}}\oiint_A\vec{S}\cdot d\vec{A}$$

$$\iiint_V\vec{j}_0\cdot\vec{E}dV\xrightarrow[\text{微元内焦耳热 微元内电源功}]{P=\vec{j}_0\cdot\vec{E}=\vec{j}_0\cdot(\rho\vec{j}_0-\vec{\Sigma})}\iiint_V PdV=I_0^2R-I_0\Sigma$$

微元内焦耳热
微元内电源功

- 继续:

$$\frac{dW}{dt}=I_0\Sigma-I_0^2R-\oiint_A\vec{S}\cdot d\vec{A}$$

全是在单位时间内！

体积元内能量的增加

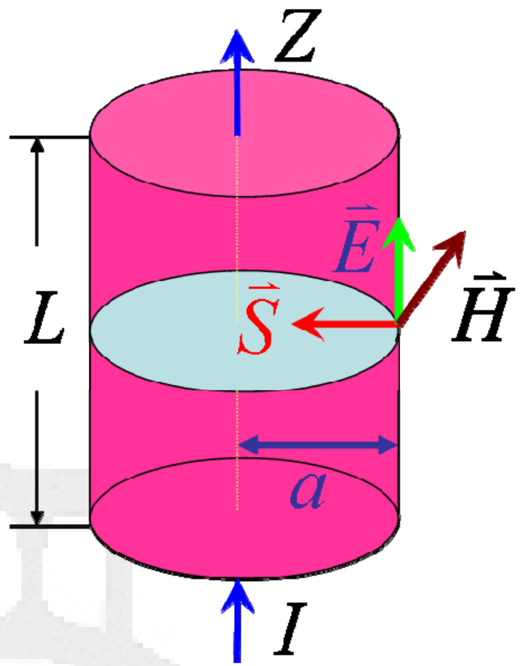
体积元内包含的电源提供的功率

体积元内电阻消耗的焦耳热

从体积元内流出来的电磁波能流(穿过体积元表面流出的“坡印亭”)

电磁波传播能量大观园

- 一个例子：一根导线，有限长度 **L** 内电阻为 **R**，流过电流 I，讨论其中能量问题。



$$\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = \oiint_A (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{A}$$

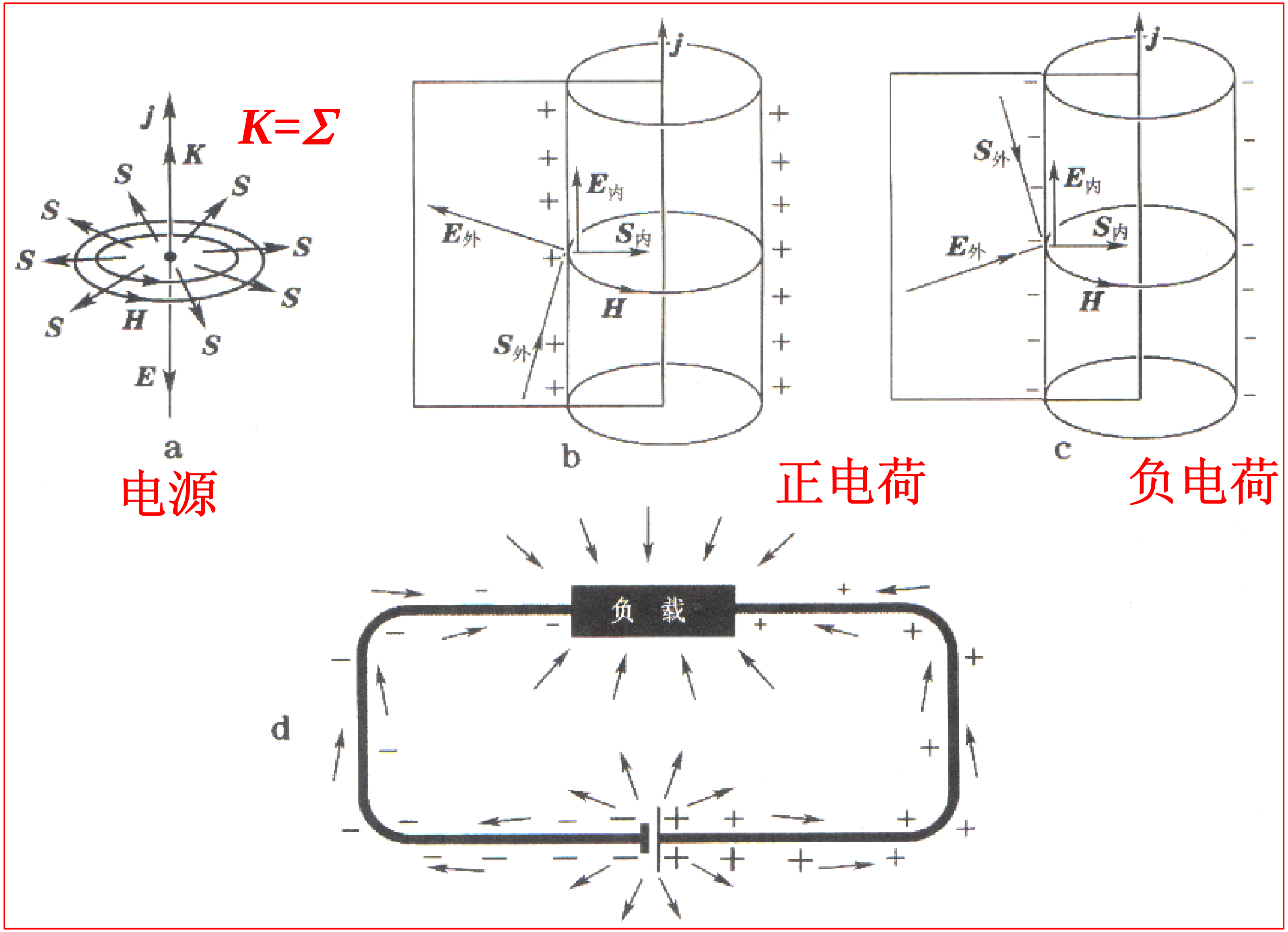
$$\because \vec{H} = \frac{I}{2\pi a}\vec{e}_\theta,\quad \vec{E} = \frac{IR}{L}\vec{z}_0,\quad \therefore \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{I^2R}{2\pi aL}(-\vec{n})$$

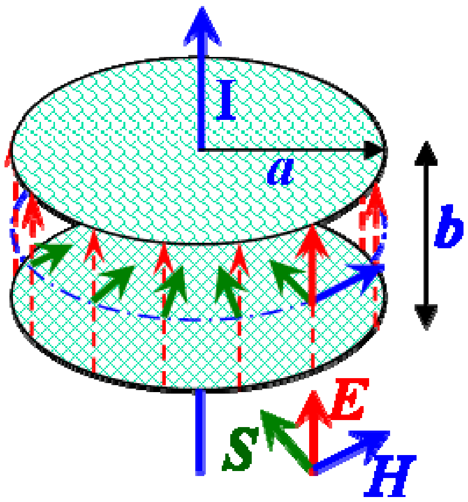
$$\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = \frac{I^2R}{2\pi aL}2\pi aL = I^2R$$

注意，导线内部“没有”电场！

- 看起来，导线输运的能量损耗(至少部分)是通过坡印亭矢量从导线外表面传播进入到导线里面的。这是一个奇怪的结果，预示着电磁波的性质----物质性。

导线传输能量的坡印亭图像(赵凯华p412):





- 【例】计算电容器充电过程中的能流密度与能量变化：

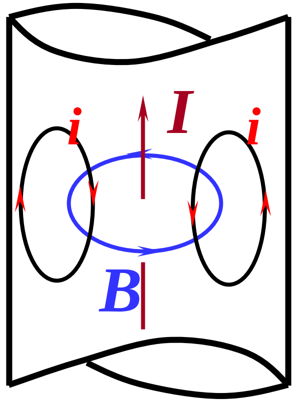
$$W_E(t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E(t)^2\left(\pi a^2 b\right)\Rightarrow\frac{dW_E}{dt}=\pi a^2 b\varepsilon_0 E\frac{dE}{dt}$$

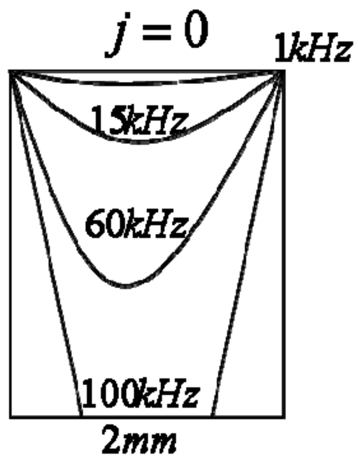
$$B=\mu_0 H=\mu_0\frac{I_D}{2\pi a}=\frac{\mu_0}{2\pi a}I_D=\frac{\mu_0}{2\pi a}\pi a^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}=\frac{\varepsilon_0\mu_0 a}{2}\frac{dE}{dt}$$

$$S=EH=\frac{EB}{\mu_0}=\frac{\varepsilon_0}{2}aE\frac{dE}{dt}$$

$$dW_{EM}=ASdt=(2\pi ab)\left(\frac{\varepsilon_0}{2}aE\frac{dE}{dt}\right)dt\Rightarrow\frac{dW_{EM}}{dt}=\pi a^2 b\varepsilon_0 E\frac{dE}{dt}$$

- 充电过程中，能量不是通过导线与极板传输到电容器内的，而是通过电容器周边的空隙(高度为 **$b \ll a$**)传输入电容器。



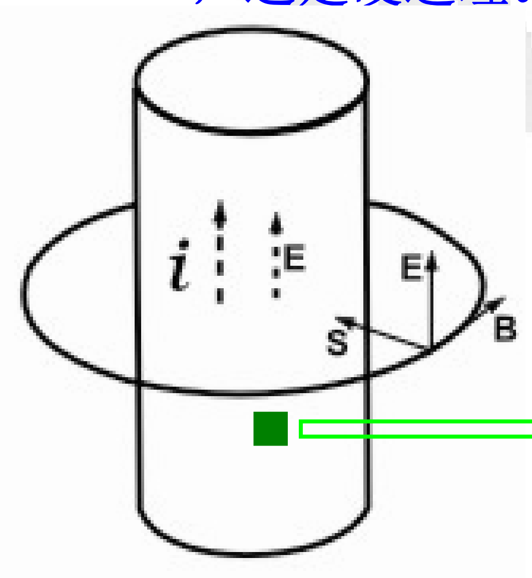


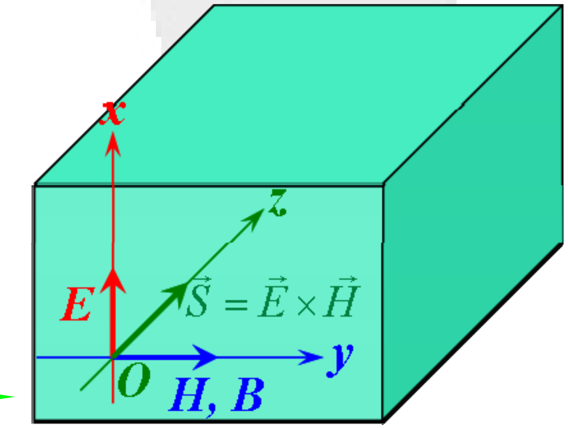
交流趋肤效应：

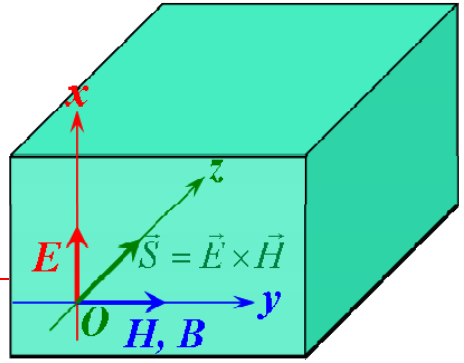
- 对于一电流导线，能量是从外部空间从侧面向导线内部注入，如**Poynting**矢量所示那样。如果将导线表面局部微元放大，则得到导线表面处的电磁场分布。
- 显然，对局域坐标，***E*** 只有 ***x*** 分量，***H*** 只有***y***分量。
- 无论电流正负交变变化，***S*** 总是指向导线内部，这是硬道理。

$$\because \vec{j}_0 >> \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \because \vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$







数学演算:

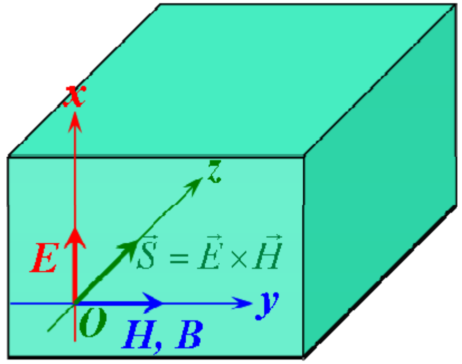
$$\text{set } \vec{E} = (E_x, 0, 0),\ \vec{H} = (0, H_y, 0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \mu \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = -\sigma E_x \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\because E_x = E_0 \exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right] \Rightarrow k^2 = -i\mu_0 \mu \sigma \omega \Rightarrow k = \sqrt{-i\mu_0 \mu \sigma \omega}$$

$$\because \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},\quad \therefore k = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0 \mu \sigma \omega}{2}} \Leftarrow \text{set } \delta_s \equiv \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}}$$

$$\therefore k = (1-i)/\delta_s \Rightarrow E_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_s}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta_s}\right)\right]$$



- 关键在于：趋肤深度 δ_s

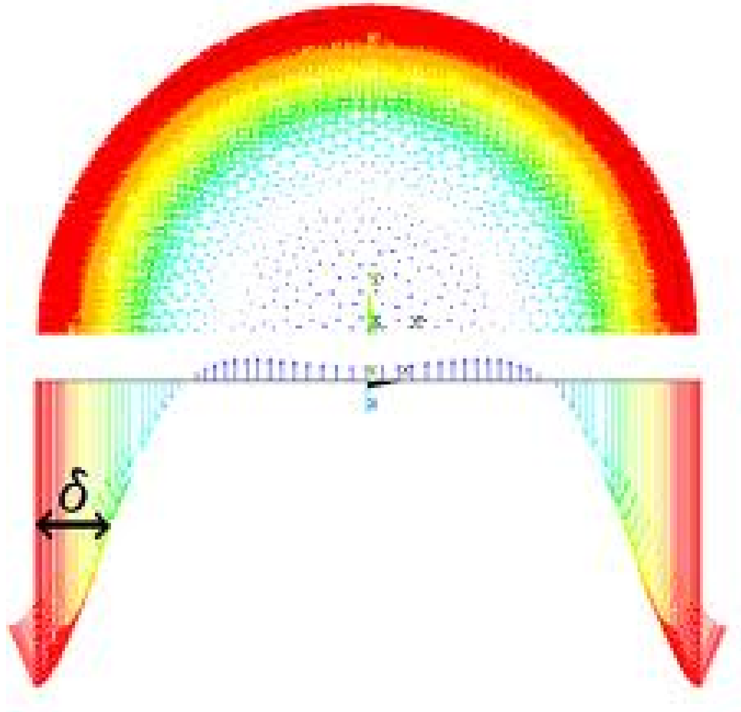
$$E_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_s}\right), \quad \delta_s \equiv \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}}$$

- 实际估算：中高频时趋肤效应明显！

> **Cu: σ=6×10^{7}S/m, μ~1.0, f=1kHz, δ_s=0.21cm>导线直径**

> **Cu: σ=6×10^{7}S/m, μ~1.0, f=100kHz, δ_s=0.021cm<导线直径**

> **Fe: σ=1×10^{7}S/m(?), μ~100-1000(?), δ_s ~0.01cm or smaller**



- 在狭义相对论框架下，能量与动量相联系。
  - 电磁波以光速传播，因此有单位体积的动量----动量密度：

$$\text{Relativity: } E(\text{energy}) = c \cdot p(\text{momentum}) \Rightarrow p = \frac{E}{c}$$

$$\text{define momentum of EM wave: } g = \frac{w}{v}$$

$$\because S = wv = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}$$

$$\therefore g = \frac{w}{v} = \frac{S}{v^2} \xrightarrow{v=c} \frac{S}{c^2} = \frac{\left|\vec{E} \times \vec{H}\right|}{c^2}$$

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \frac{1}{c^2}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{D} \times \vec{B}$$

***g*为单位体积的动量！**

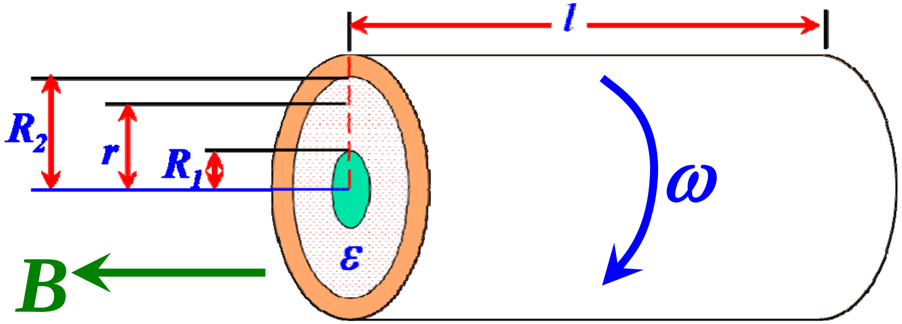
- 电磁场角动量：既然电磁场与电磁波带动量，则围绕某一对称轴也可以有角动量。简单情况下单位体积角动量 ***dL*** 可以写为：

$$\vec{g}=\vec{D}\times\vec{B}\Rightarrow dL=\vec{r}\times\vec{g}=\vec{r}\times(\vec{D}\times\vec{B})=$$

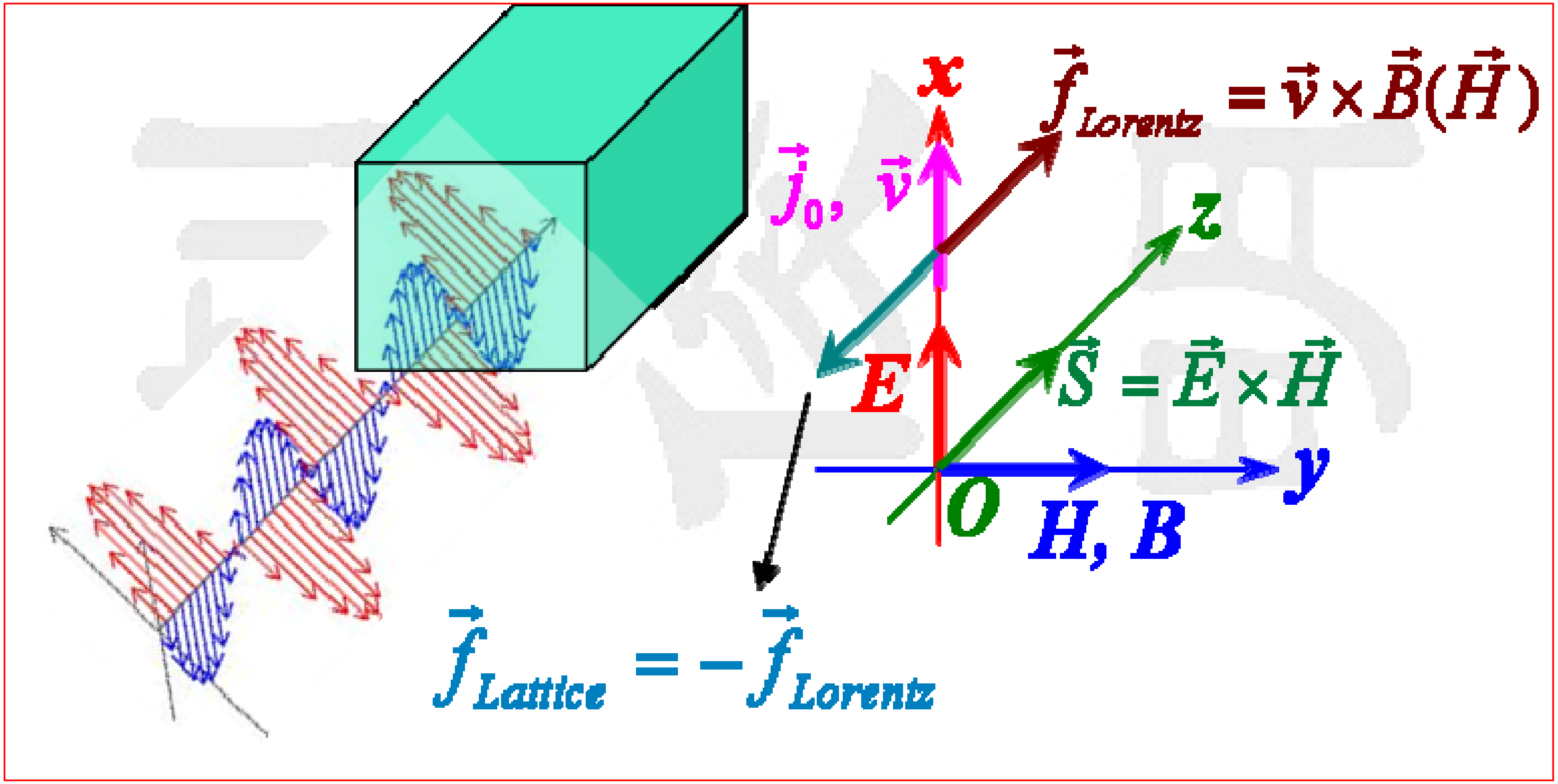
$$\because\ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$\therefore\ dL=\vec{r}\times(\vec{D}\times\vec{B})=(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{D}-(\vec{r}\cdot\vec{D})\vec{B}$$

- 【补充练习】一圆柱体电容器绕轴可以无摩擦转动，转动惯量为 **I**，置于沿轴向的均匀磁场 ***B*** 中。对电容器充电或者放电，电容器会不会转动？

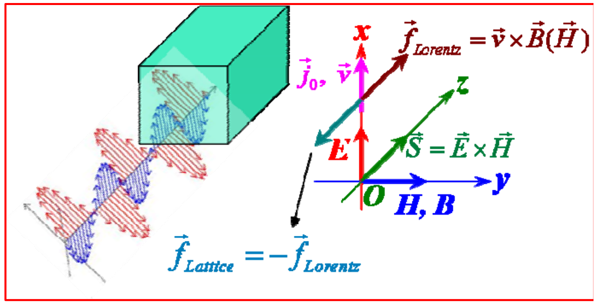


□ 光压机制：洛伦兹力产生压力，施加于晶格！



通过光压效应来说明动量！

- 继续：g 为动量密度。设电磁波入射到表面并被反射，分别从冲量和能量角度求光压：



冲量定理：$\vec{F}dt=\Delta\vec{p}=\Delta\vec{g}\cdot dV=\Delta\vec{g}(\Delta\vec{A}\cdot d\vec{l})=\Delta\vec{g}(\Delta A\cos\theta\cdot dl)$

$$\because \vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S},\quad \therefore \Delta\vec{g}=\frac{1}{c^2}(\vec{S}_{入}-\vec{S}_{反})$$

$$\therefore \vec{P}=\frac{\vec{F}}{\Delta A\cos\theta}=\frac{1}{c^2}(\vec{S}_{入}-\vec{S}_{反})\frac{dl}{dt}=\frac{1}{c^2}(\vec{S}_{入}-\vec{S}_{反})c=\frac{1}{c}(\vec{S}_{入}-\vec{S}_{反})$$

功能原理：$\because w=S/v$, 面积为dA的截面光压正压力：

$$\vec{F}\cdot d\vec{l}=Fdl=\Delta wdV=w(\Delta A\cos\theta dl)$$

$$\therefore \vec{P}=\frac{\vec{F}}{\Delta A\cos\theta}=\Delta(\frac{\vec{S}}{v})\xrightarrow{v=c}\vec{P}=\frac{1}{c}\Delta\vec{S}=\frac{1}{c}\Delta(\vec{E}\times\vec{H})$$

如果存在反射：$\vec{P}=\frac{1}{c}(\vec{S}_{入}-\vec{S}_{反})\xrightarrow{\vec{S}_{入}=-\vec{S}_{反}}\vec{P}=\frac{2}{c}\vec{S}_{入}$

- 电磁波动量密度的大小正比于能流密度，其方向沿电磁波的传播方向。

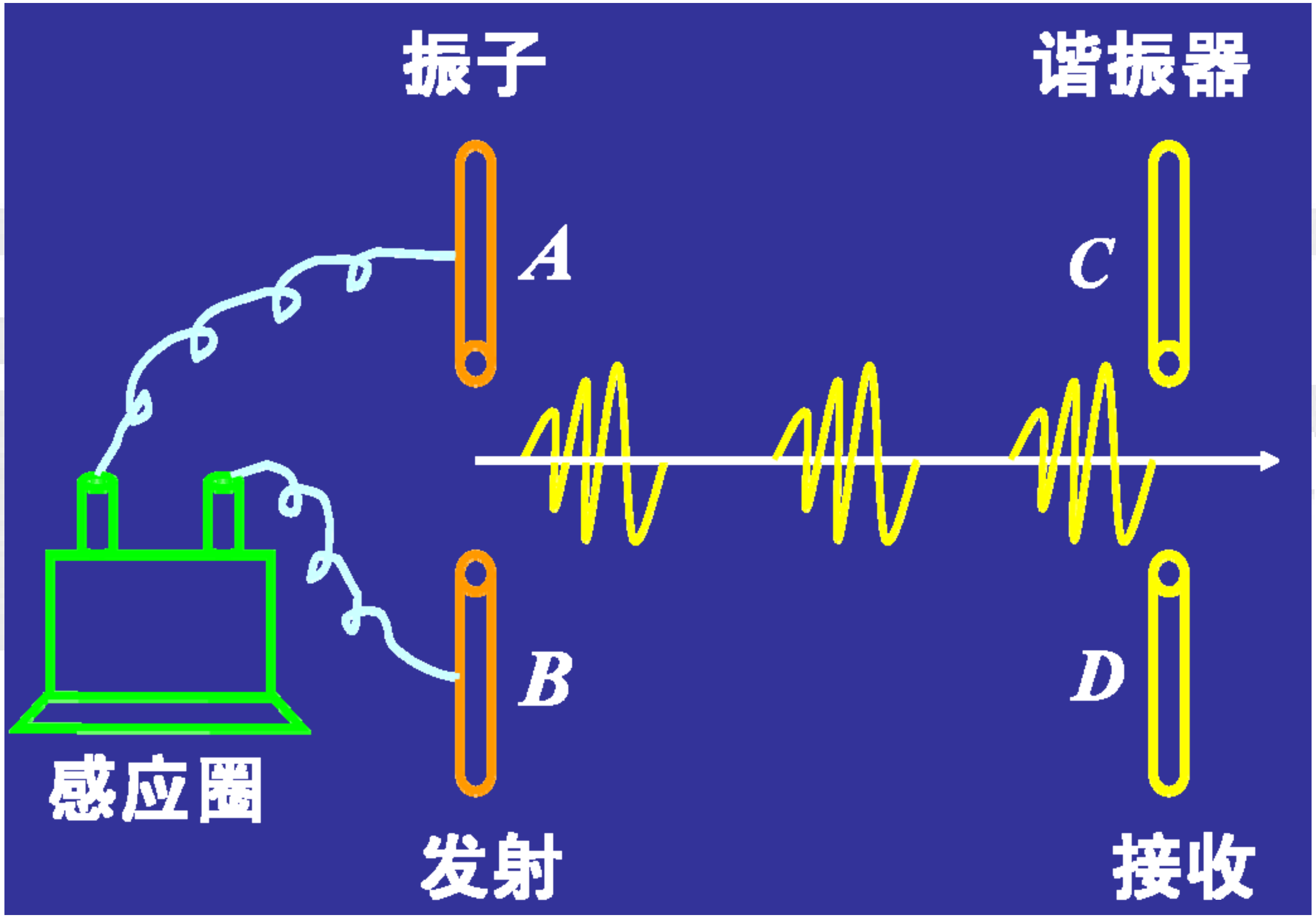
$$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}=\frac{1}{c^2}(\vec{E}\times\vec{H})$$

- 由于电磁波带有动量，所以在它被物体表面反射或吸收时，必定产生压强，称为辐射压强。
- 光是一种电磁波，它产生的辐射压强称为光压。

- 在两个从尺度上看是截然相反的领域中，光压却起了重要的作用：
  - 在原子物理学中，最著名的现象是光在电子上散射时与电子交换动量的过程，即康普顿效应(康普顿-吴有训实验)。
  - 在天体物理学中，星体外层受到其核心部分的引力，相当大一部分靠核心部分的辐射产生的光压来平衡。彗星尾由大量尘埃组成，当彗星运行到太阳附近时，由于这些尘埃微粒受到来自太阳的光压比引力大，所以它被太阳光推向远离太阳的方向，形成很长的彗星尾。彗星尾被太阳光照得很亮，有时能被人用肉眼看到，彗星也叫做扫帚星。
- 总之，电磁场不仅具有能量，而且具有动量。

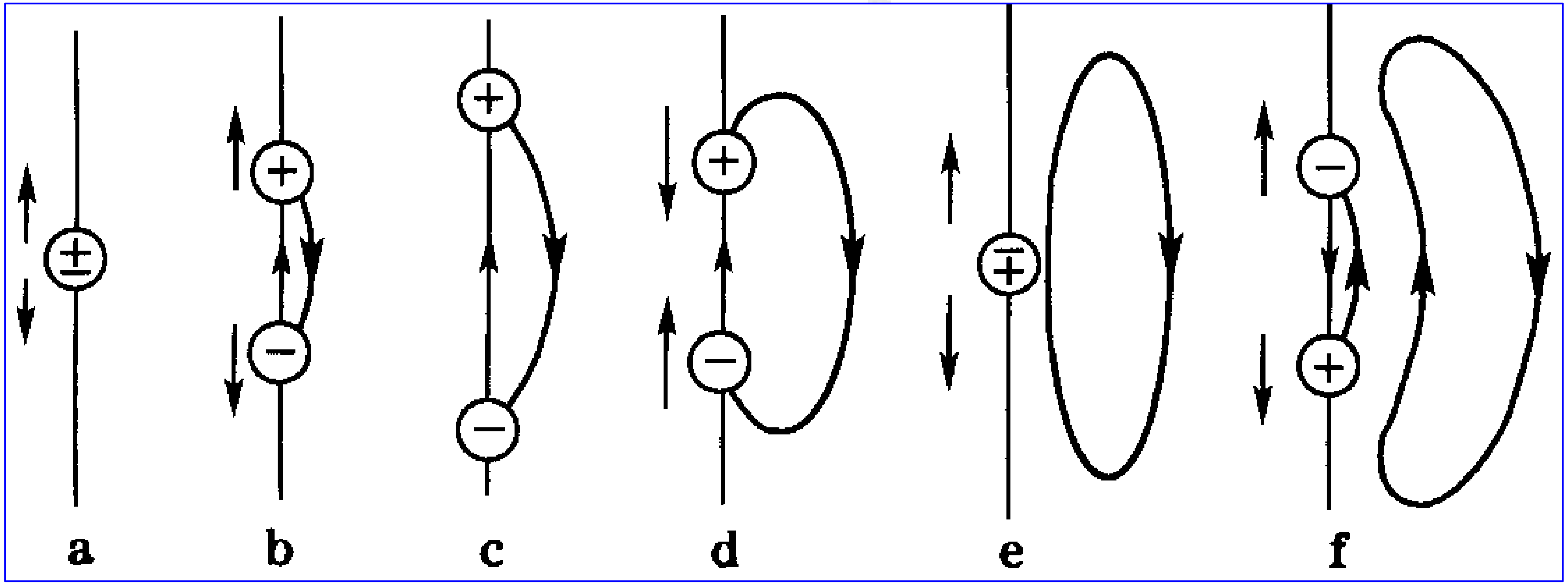
- 电磁场是物质的一种形态。
  - 能量和动量是物质运动的量度，运动是物质的存在形式，运动和物质不可分割。
  - 电磁场具有能量和动量，它是物质的一种形态。
  - “场”和“实物”之间的界限日益消失。对黑体辐射和光电效应等一系列现象的研究发现，光也具有不连续的微观结构，或者说，光在某些方面也具有微粒性；
  - 电子衍射现象发现，一向被认为是实物微粒的电子同时也具有波动性。特别是，1932 年发现，一对正负电子结合后可以转化为 γ 射线，即静质量为零的 γ 光子。
  - 这些事实表明，电磁场和实物一样，也是客观存在的物质，只是电磁场和实物各具有一些不同的属性，而这些属性还会在一定的条件下相互转化。

Hertz实验:

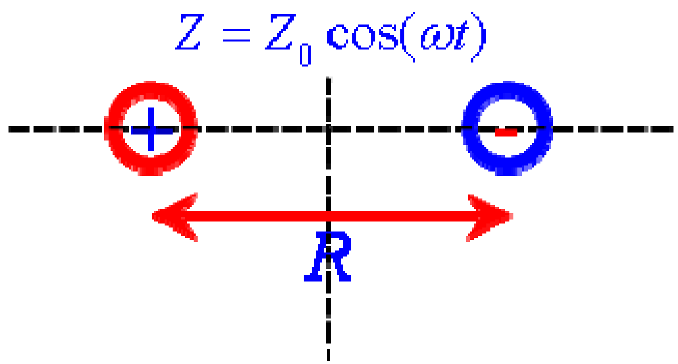


发射、接受、反射、折射、衍射、干涉、光电效应(???)，等等

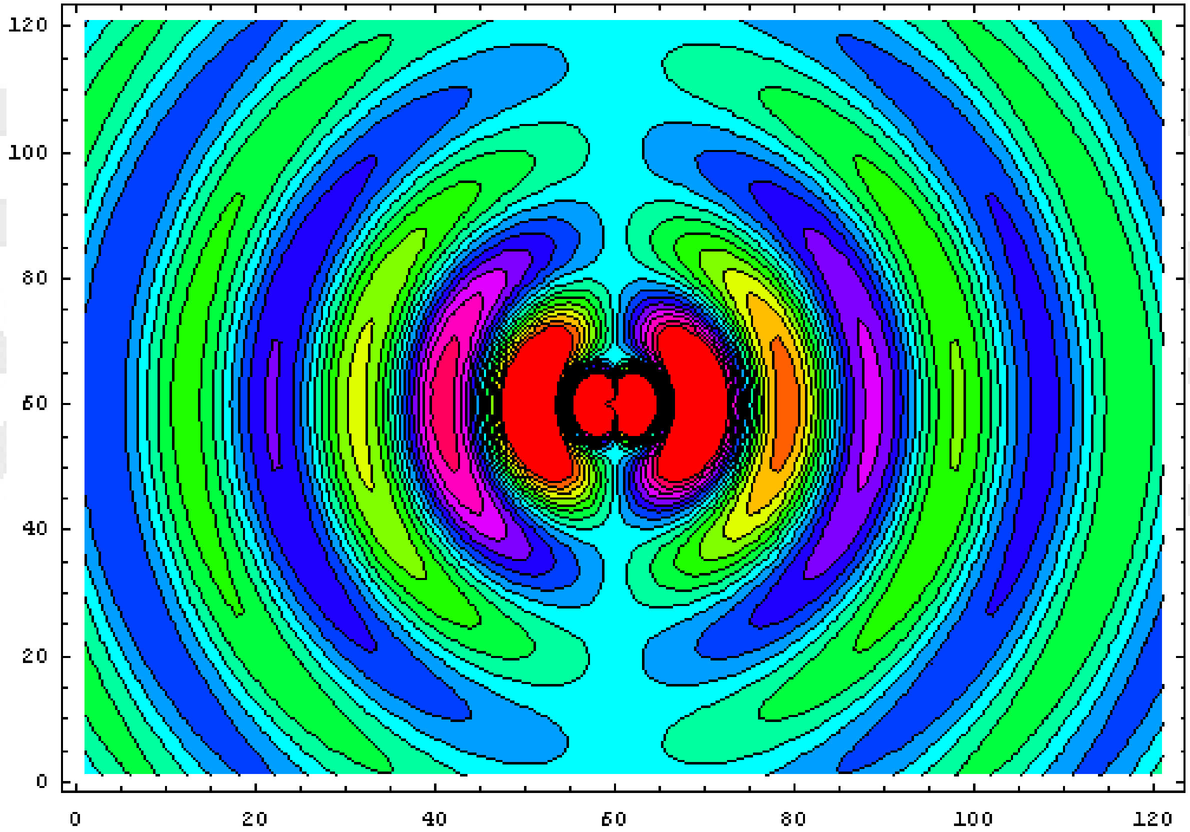
□ 电偶极子电磁波辐射：



$$\boxed{\vec{p}_e = \vec{p}_{e0}\cos(\omega t)}$$

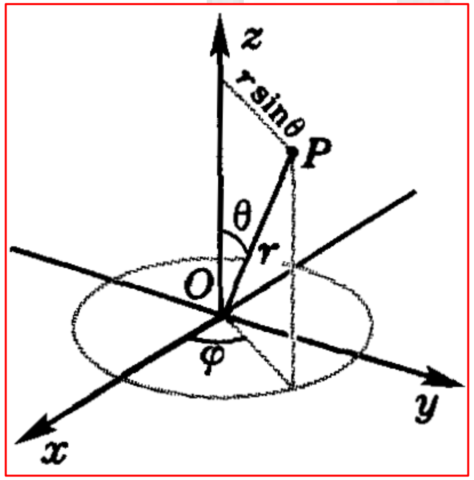


- 以振荡电偶极子辐射电磁场为例



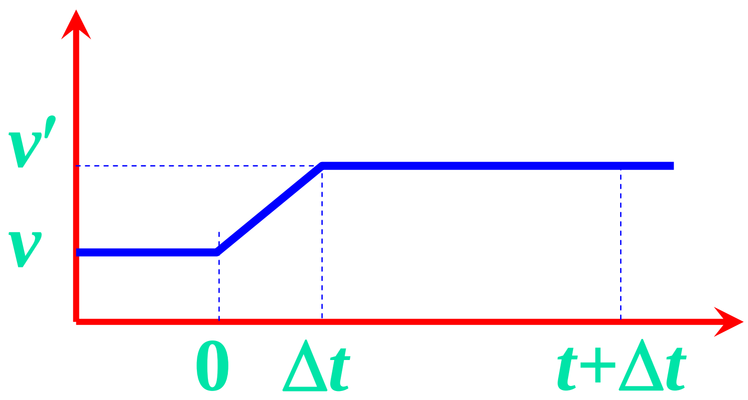
- **(1)** 从一极端情况出发。
  - 考虑真空中带电粒子匀速运动，速度为 v，空间坐标为 r
  - 稳态电磁场 E^0_r, B^0_φ

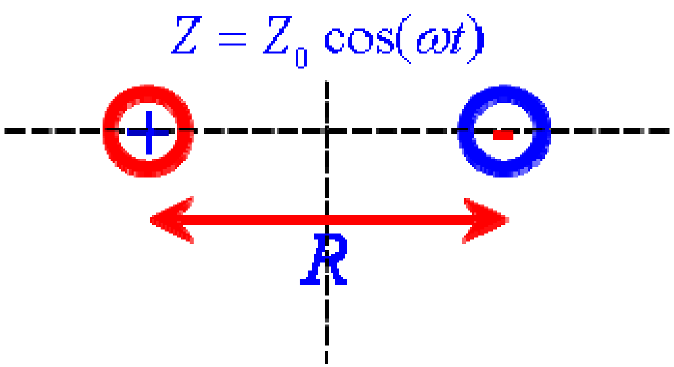
$$\text{if } v << c,\quad \text{then}\quad O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow 0 \quad \therefore \begin{cases} \vec{E}_r^0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}\vec{r} \\ \vec{B}_\varphi^0 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \end{cases}$$



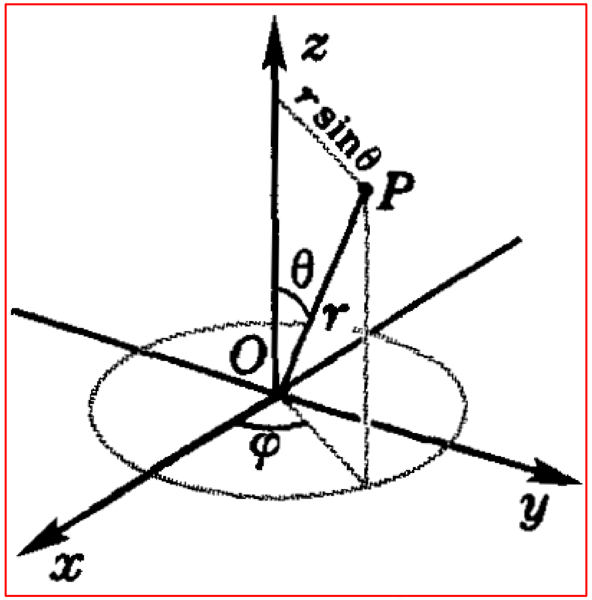
$$\text{set Gauss Unit System} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_r^0 = \dfrac{q}{r^3}\vec{r} \\ \vec{B}_\varphi^0 = \dfrac{1}{c}\dfrac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \end{cases}$$

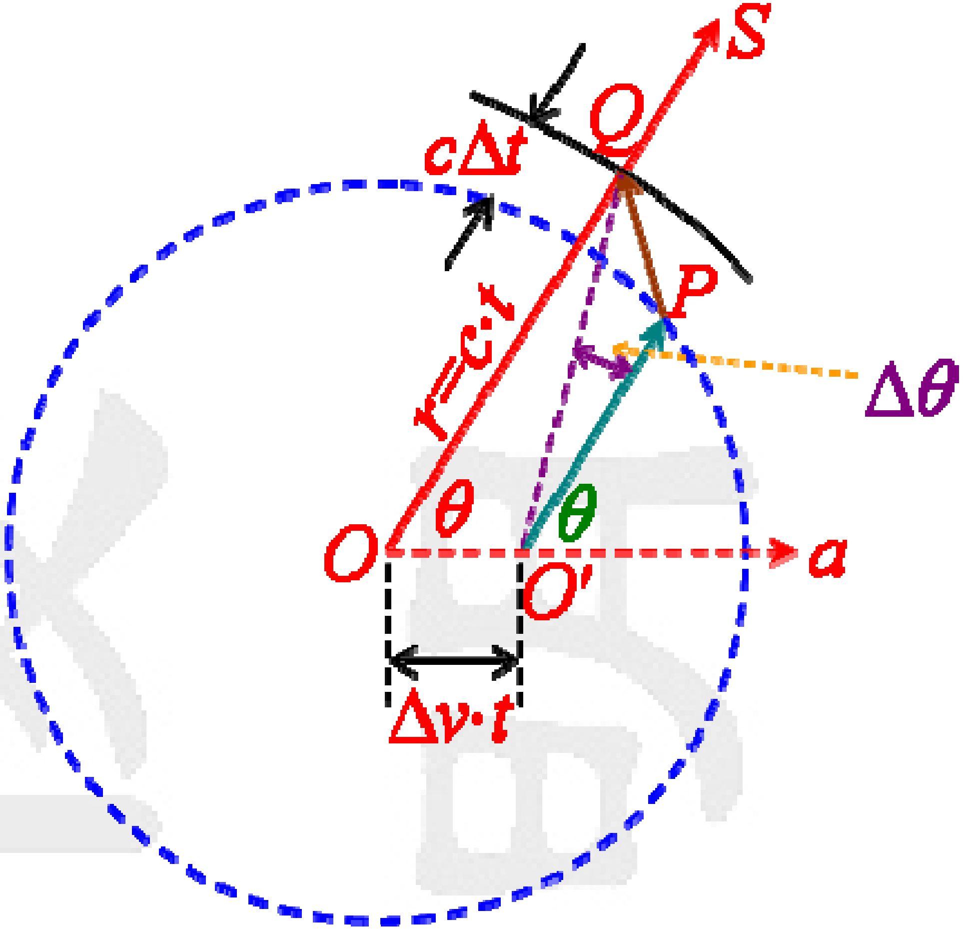
- 带电粒子形成一个加速度脉冲(Δt, $a=\Delta v/\Delta t$):
  - $t<0$时匀速直线运动，速度为v
  - $t=0$开始，获得 a 脉冲，$v'=v+\Delta v$
  - $\Delta t\rightarrow 0$, $\Delta v\rightarrow 0$, $(\Delta v/\Delta t)=a$
  - 匀速运动时电磁场由库仑与毕-萨定律计算
- $t<0$时，匀速运动坐标系随粒子一起运动，原点为O，即粒子静止；$t=0$时刻开始粒子加速运动，Δt 加速之后再运动 t 时刻。因为相对坐标系，电荷将以速度 Δv 运动到 O'；





- 建立如下球坐标系：

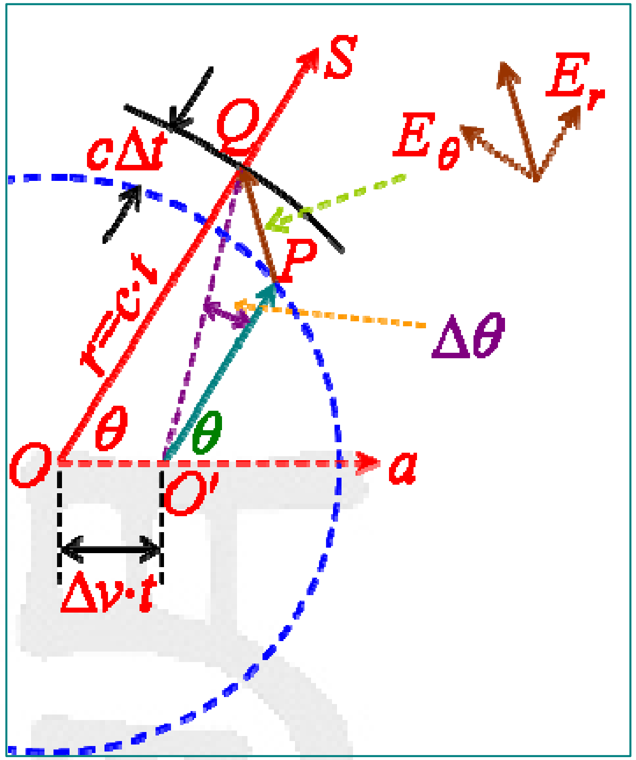




注意：匀速运动的电荷发出的电磁场也是在匀速运动的。

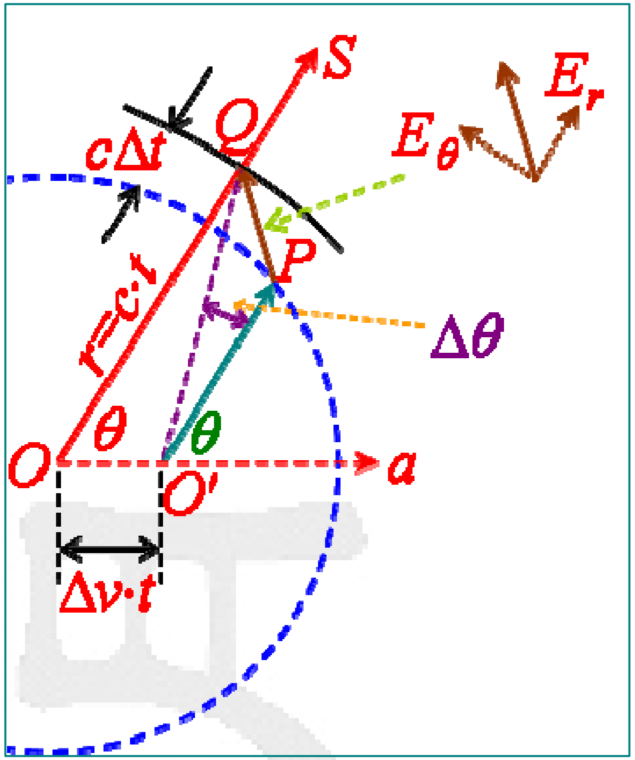
- 圆圈范围外电磁场是加速之前发出的；圆圈内电磁场是加速之后再匀速运动后所发出的；薄层内电磁场是加速阶段发出的。

- 考虑沿与 ***OO'*** 成夹角 ***θ*** 的方向传播电场(电场线即电场方向):
  - 加速之前电场线是 ***QS***;
  - 加速之后是 ***O'P*//*OS***，加速段是 ***PQ***;
  - 整个过程的电场线是 ***O'PQS***。
- 因此薄层内(对应加速区段)电场不再是径向电场 E^0_r，还形成了切向电场 E_θ:



$$\because \frac{E_\theta}{E_r^0}=\frac{|\Delta v|\cdot t\sin\theta}{c\cdot\Delta t}=\frac{1}{c}\frac{c\cdot t}{c}\frac{|\Delta v|}{\Delta t}\sin\theta=\frac{1}{c^2}a\cdot r\sin\theta$$

$$\because E_r^0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},\quad \therefore E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{qa\sin\theta}{r}$$



- 注意，电场 E^0_r 跟电荷变速运动无关，只要(*v*<<*c*)，其为稳态场，不能产生磁场。
- 而电场 E_θ 是加速阶段产生的，是时间相关过程，因此会诱发磁场。
- 因为是真空，必须考虑位移电流：

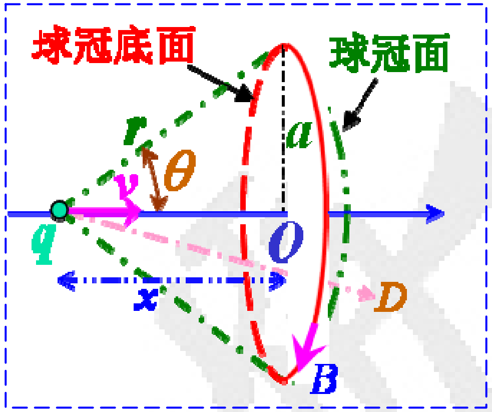
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$$

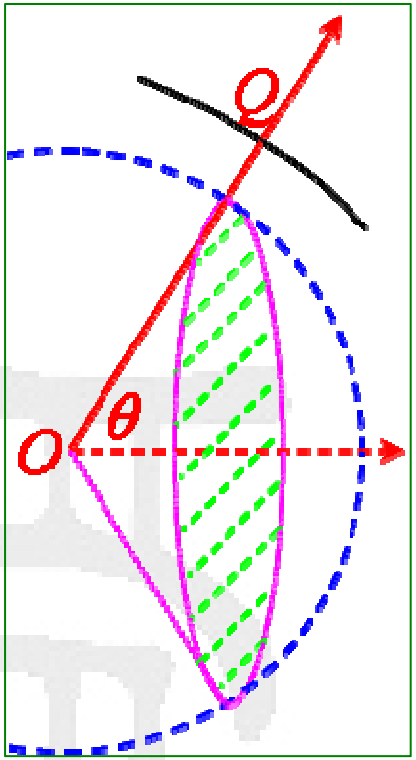
$$\Phi_D = \iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_0 E_r^0 \vec{e}_r & \text{as } t = t,\ r \sim c(t+\Delta t) \\ \varepsilon_0 E_r^0 \vec{e}_r + \varepsilon_0 E_\theta \vec{e}_\theta & \text{as } t = t+\Delta t,\ r \sim c(t+\Delta t) \end{cases}$$

- 下面分别求 *t*<0和 *t*>*t* 时的两个*D*。我们转化为求电通量 Φ_D

➢ 匀速运动情况下，穿过如图所示的圆锥面底面的电通量：





$$\Phi_D(t)=\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iint_S \varepsilon_0\vec{E}_r^0\cdot d\vec{S}$$

$$=\int_0^{\theta}\frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\cdot(2\pi r\sin\alpha)rd\alpha=\frac{q}{2}(1-\cos\theta)$$

$$d\Phi_D(t)=\frac{q}{2}\sin\theta d\theta \qquad \text{then } d\theta=?$$

电磁学09-07: 电磁波辐射与传播

➢ 考虑$\Delta OO'Q$:

$$r\Delta\theta = |\Delta v| t\sin\theta \Rightarrow d\theta = \frac{|\Delta v|}{c}\sin\theta$$

$$\therefore d\Phi_D(t) = \frac{q}{2}\sin\theta d\theta = \frac{q}{2}\frac{|\Delta v|}{c}\sin^2\theta$$

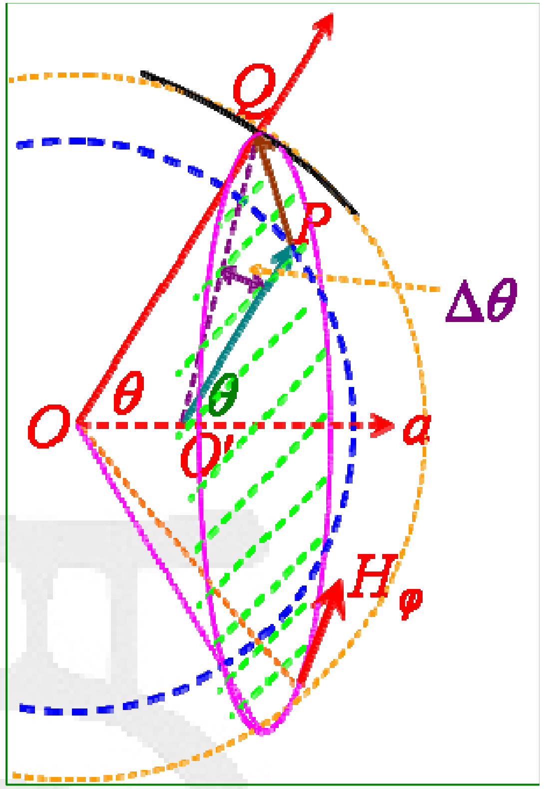
➢ 应用安培环路定理:

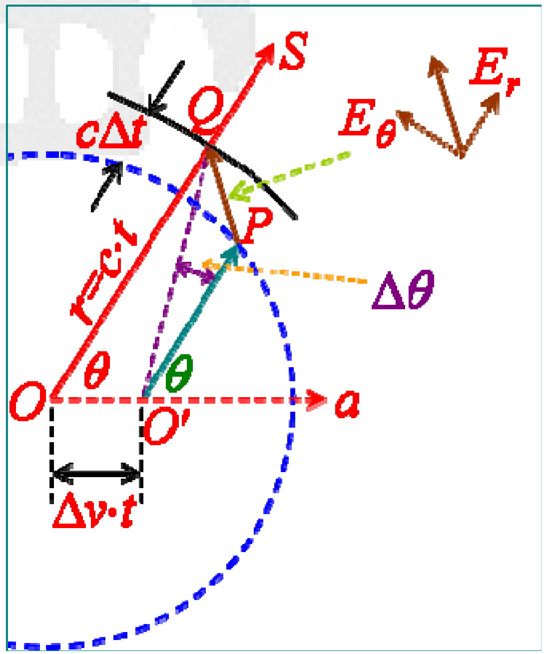
注意：$\Delta\Phi_D=0$ if $\Delta v=0$

$$\oint_L \vec{H}_\varphi \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \Rightarrow$$

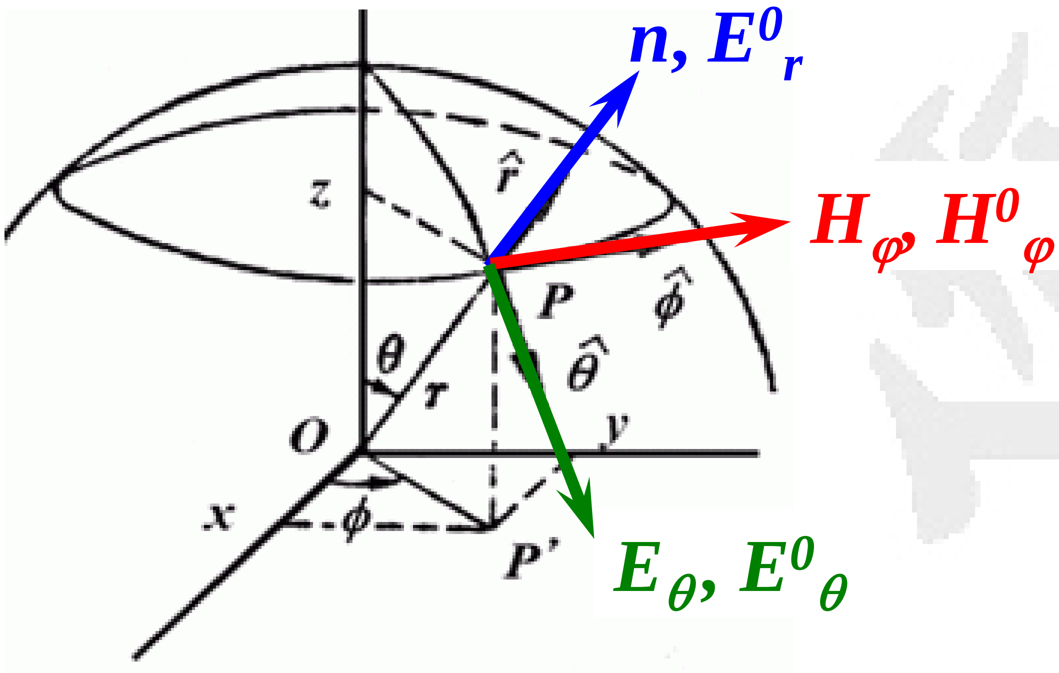
$$2\pi r\sin\theta H_\varphi = \frac{q}{2c}\frac{|\Delta v|}{\Delta t}\sin^2\theta = \frac{qa\sin^2\theta}{2c}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{4\pi c}\frac{qa\sin\theta}{r} \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{qa\sin\theta}{r}$$



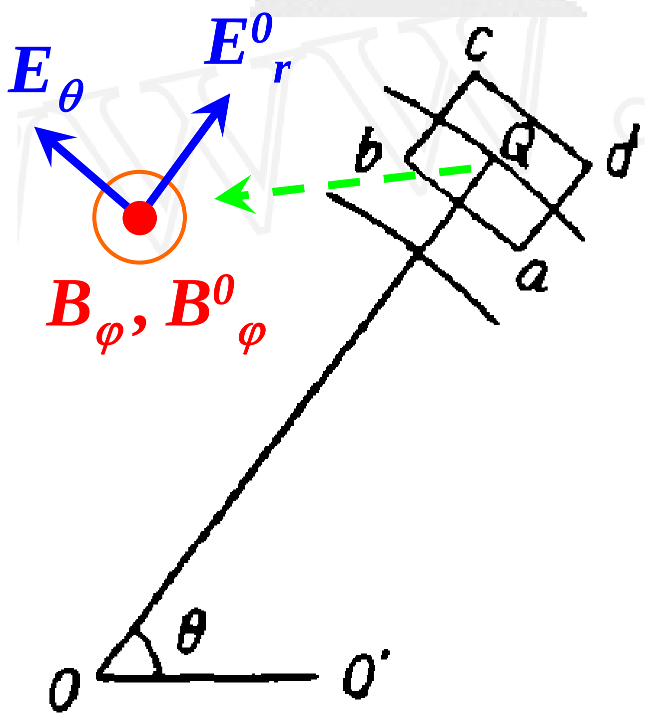


- 即变速运动的带电粒子会辐射电磁波：



- 几个性质：
  - 球面电磁波，波中任一点之传播矢量 (n, $E^0{}_r$)、E_θ、(H_φ, $H^0{}_\varphi$)互为垂直；
  - 电磁波内任一点：$E_\theta/H_\varphi = 1/\varepsilon_0 c$；
  - 与加速度 a 垂直方向辐射场最强，平行方向无辐射。

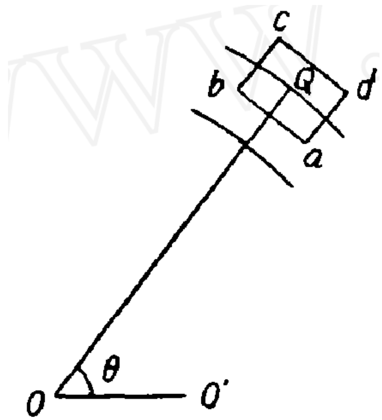
- **(2) 验证辐射场满足法拉第感应定律：**
  - 在变速运动薄层内的电磁场是否满足麦克斯韦理论？



- 电场只需要针对 E_θ 分量，磁场只需要针对 H_φ 分量(其它分量在变速区内均保持不变)；
- 构建一个矩形回路，边 ***ab*** 长度为 ***l***；
- 边 ***ab*** 在 $\Delta\tau$ 内沿***OQ***位移 $c\Delta\tau$，即边 ***bc***长度；
- 计算穿越矩元 ***abcd*** 的磁通量

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\oint_{abcda} \vec{E}_\theta \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{abcd} \vec{B}_\varphi \cdot d\vec{S} = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta\tau}\bigg|_{abcd}$$



- 星光大道：出结果！

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{qa\sin\theta}{r}$$

$$E_\theta l = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta\tau}\bigg|_{abcd} = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{qa\sin\theta}{r}\frac{l\cdot c\cdot\Delta\tau}{\Delta\tau} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qa\sin\theta}{r}l$$

$$\therefore E_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qa\sin\theta}{r} \xrightarrow{c^2=\mu_0\varepsilon_0} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{qa\sin\theta}{r}$$

±?

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{qa\sin\theta}{r}$$

- 通过法拉第定律也可以实现 $\boldsymbol{E_\theta}$ 与 $\boldsymbol{B_\varphi}$ 的互证；
- 注意，处理问题时是按照右手螺旋法则来规定方向的，所以 $\boldsymbol{E_\theta}$ 是负值；如果按 $\boldsymbol{\theta}$ 坐标来定义 $\boldsymbol{e_\theta}$ 单位矢量，$\boldsymbol{E_\theta}$ 就是正的！

- (3) 变速运动带电粒子的电磁场：
  - 任意变速运动总可看成是前述特例的叠加！前述结果可以进行推广：

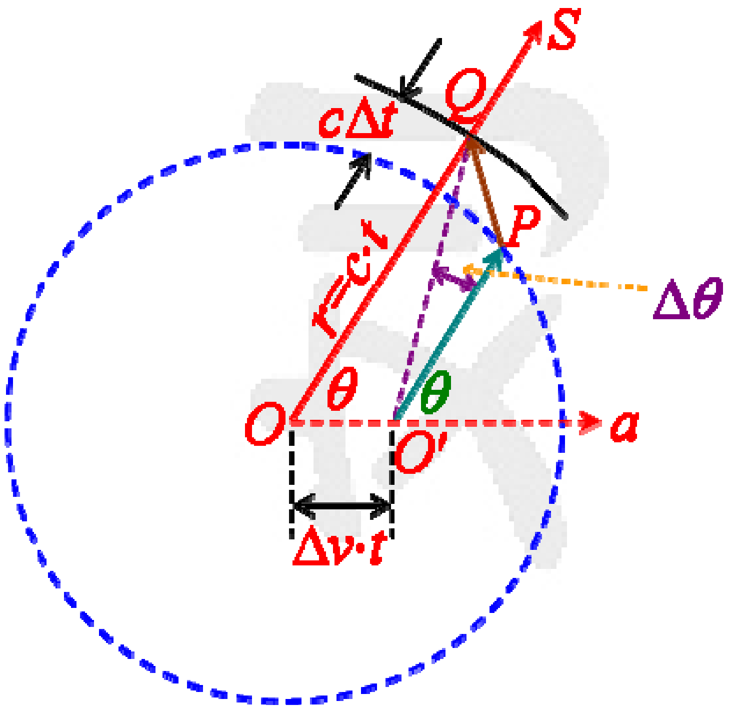
$$\boxed{a(t)=\int a(t')\delta(t-t')dt'}$$

  - 因此在 **(t-r/c)** 时刻位于 **O** 处开始变速运动的电荷，其在 **t** 时刻位于空间位置 **r** 处的电磁场表达式为：

$$\left\{\begin{aligned} \vec{E}_r^0 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} \\ \vec{B}_\varphi^0 &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}(t)\times\vec{r}}{r^3} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \vec{E}_\theta &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{qa(t)\sin\theta}{r}\vec{e}_\theta \\ \vec{B}_\varphi &= -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{qa(t)\sin\theta}{r}\vec{e}_\varphi \end{aligned}\right.$$

- 延时时间差问题：

$$\begin{cases}\vec{E}_r^0=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}\vec{r}\\[2ex]\vec{B}_\varphi^0=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v}(t)\times\vec{r}}{r^3}\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec{E}_\theta=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\dfrac{qa(t)\sin\theta}{r}\vec{e}_\theta\\[2ex]\vec{B}_\varphi=-\dfrac{\mu_0}{4\pi c}\dfrac{qa(t)\sin\theta}{r}\vec{e}_\varphi\end{cases}$$

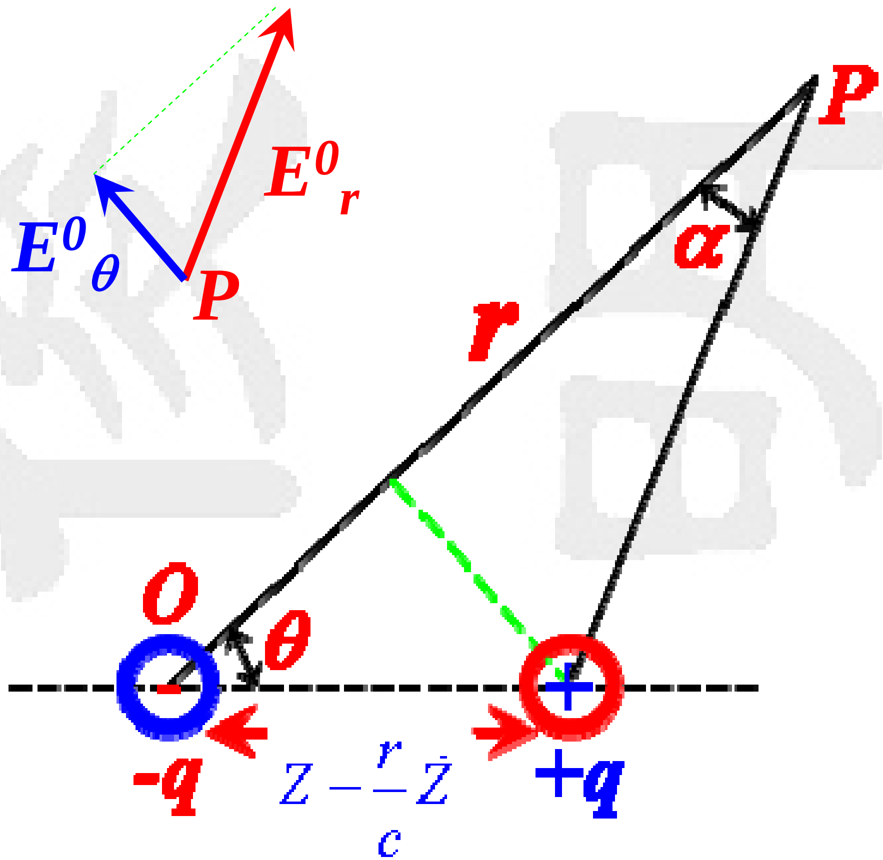


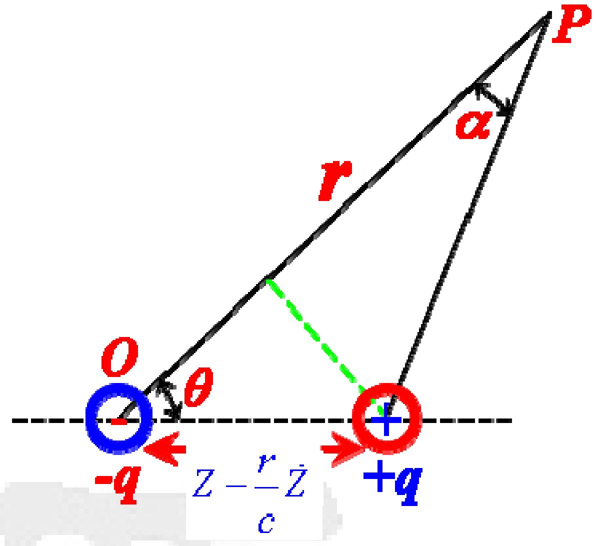
$$a(t)=\int a(t')\delta(t-t')dt'$$

- 上述表达式中 **t** 时刻的结果实际上是 **(t-r/c)** 时刻从**O**点处电荷传播出来的电磁场(包括辐射场)；
- 在前述推导中，我们将 ***r/c*** 表示为 ***t*** 了，这里要注意其差别；
- 下面的推导中将使用这一变换。

- **(4) 振荡电偶极子在 *P* 点处的电磁场**
  - 电偶极子振荡方程:

$$\boxed{\begin{aligned} Z &= Z_0 \cos\omega t \\ p &= p_0 \cos\omega t \\ p_0 &\equiv qZ_0 \end{aligned}}$$





- 注意，本坐标系负电荷不动，不激发电磁场，只有稳态电磁场。
- 正电荷相对负电荷变速运动激发电磁场。不过，除开 $E^0{}_r$ 外，正电荷还有 e_θ 方向的稳态电场分量 $E^0{}_\theta$。
- 考虑时间延迟问题：

$$p = p_0 \cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

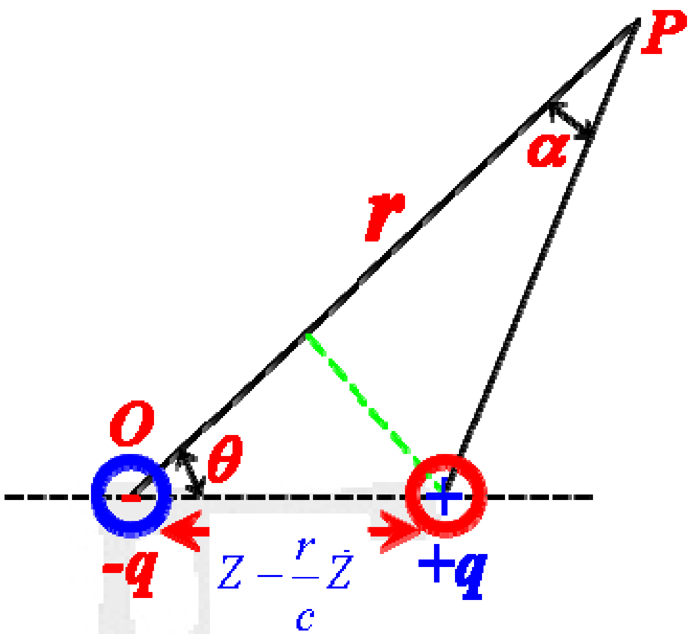
$$Z = Z_0 \cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\dot{Z} = v = -Z_0\omega\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) = -\frac{p_0}{q}\omega\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) \Rightarrow$$

$$a = -Z_0\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) = -\frac{p_0}{q}\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

➤ 激发的电磁波分量(仅仅为正电荷激发):

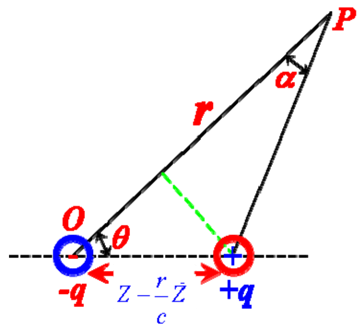
$$\boxed{\begin{cases} E_\theta = \dfrac{p_0\omega^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \dfrac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \\ B_\varphi = -\dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi c} \dfrac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \end{cases}}$$



➤ 下面看稳态分量 $E^0{}_r$、$E^0{}_\theta$ 和 $H^0{}_\varphi$：作为极限情况，我们实际上处理的是远比偶极子间距 Z_0 大很多的空间电磁场。

➤ 因此，对 Z 取极限，省略 Z 及其导数之高阶项为零，即对稳态分量施加下述条件：

$$\boxed{Z_0 \to 0, \quad p_0 \equiv qZ_0}$$



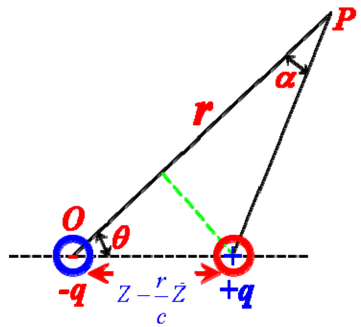
➢ 稳态电场分量 E^0_r：

$$\vec{E}_r^0 \sim \vec{E}_r^0(+q)-\vec{E}_r^0(-q) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r-(Z-\frac{r}{c}\dot{Z})\cos\theta\right)^2}-\frac{q}{r^2}\right]$$

$$E_r^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\substack{Z_0\to 0\\ p_0\equiv qZ_0}}\left[\frac{q}{\left(r-(Z-\frac{r}{c}\dot{Z})\cos\theta\right)^2}-\frac{q}{r^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\substack{Z_0\to 0\\ p_0\equiv qZ_0}}\left[\frac{q}{r^4}2\left(Z-\frac{r}{c}\dot{Z}\right)\cos\theta\cdot r\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2qZ}{r^3}-\frac{2q\dot{Z}}{cr^2}\right)\cos\theta$$

$$=\frac{p_0\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\omega\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)$$



➤ 稳态电场分量 E^0_θ:

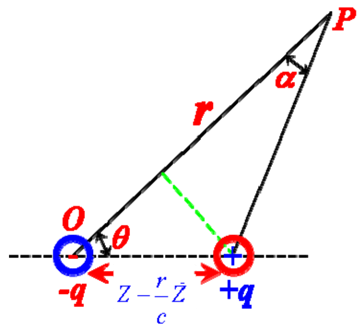
$$\vec{E}^0_\theta = \vec{E}^0_\theta(+q) \sim \vec{E}^0_r(+q)\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\substack{Z_0\to 0\\ p_0\equiv qZ_0}}\left[\frac{q\sin\alpha}{\left(r-(Z-\frac{r}{c}\dot{Z})\cos\theta\right)^2}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\substack{Z_0\to 0\\ p_0\equiv qZ_0}}\frac{q}{r^2}\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\substack{Z_0\to 0\\ p_0\equiv qZ_0}}\left[\frac{q}{r^2}\frac{(Z-\frac{r}{c}\dot{Z})\sin\theta}{r}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qZ}{r^3}-\frac{q\dot{Z}}{cr^2}\right]\sin\theta$$

$$= \frac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\omega\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)$$

➤ 稳态磁场分量 B^0_φ：

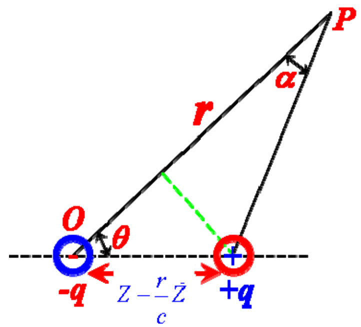


$$\vec{B}^0_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}(t-\frac{r}{c})\times\vec{r}}{r^3}$$

$$B^0_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}(t-\frac{r}{c})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\dot{Z}\sin\theta}{r^2} = -\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta$$

$$B^0_\varphi = -\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta$$

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2\sin\theta}{4\pi c}\frac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

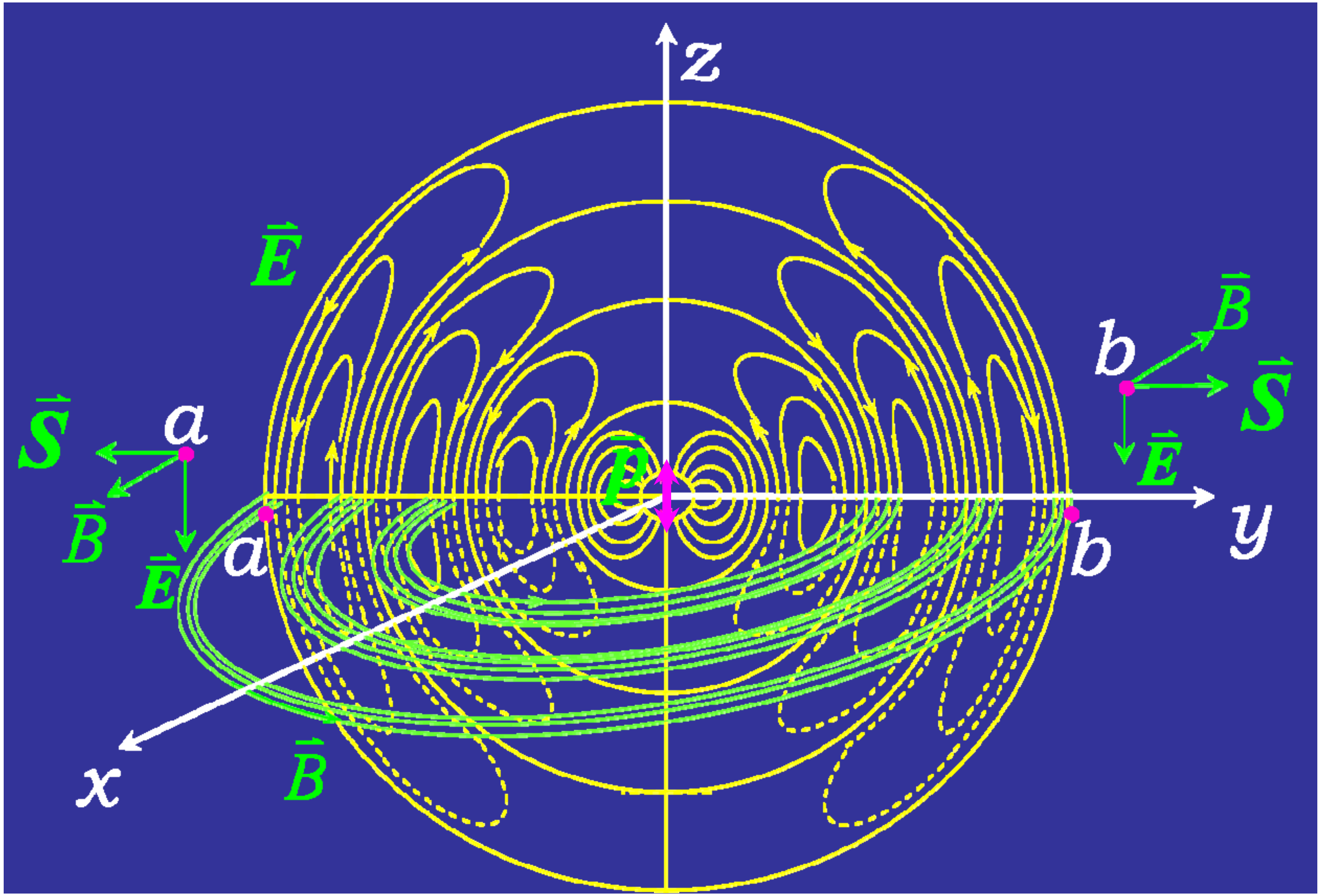


- 全部电磁场:

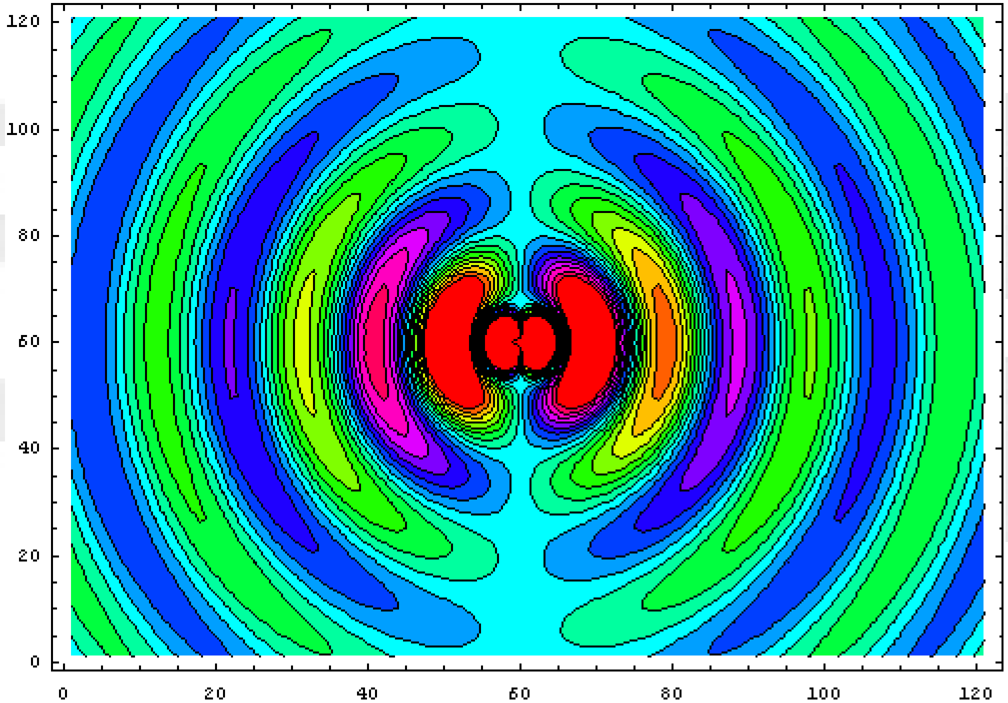
$$\begin{cases} E_r^0 = \dfrac{p_0\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\dfrac{\omega\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right) \\ E_\theta^0 = \dfrac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\dfrac{\omega\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right) \\ E_\theta = \dfrac{p_0\omega^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\dfrac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \end{cases}$$

$$B_\varphi^{tot} = B_\varphi^0 + B_\varphi$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0\omega\sin\theta}{4\pi r^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\mu_0 p_0\omega^2\sin\theta}{4\pi c}\frac{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

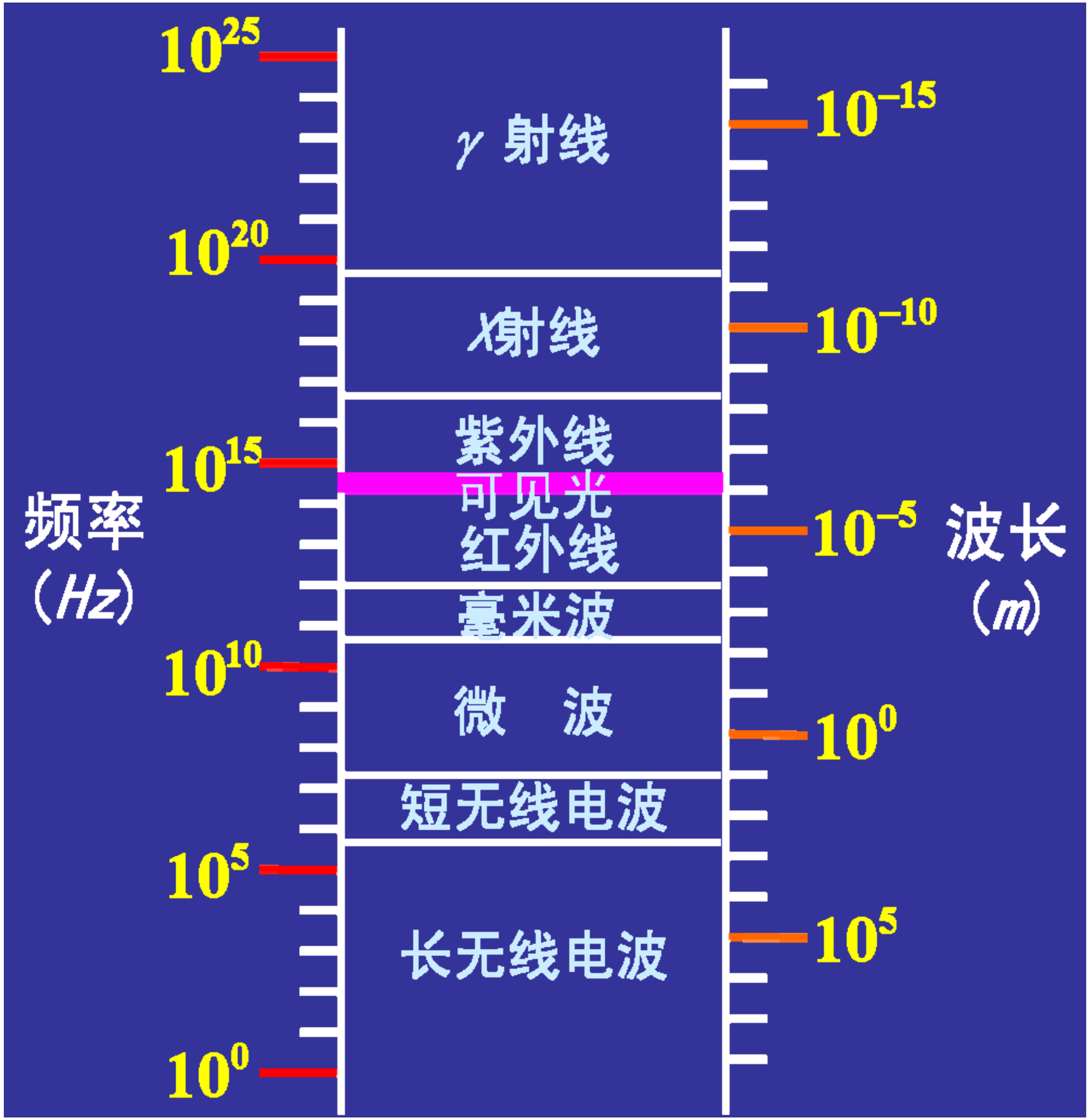

z
$\vec{E}$
b
$\vec{B}$
$\vec{S}$
$\vec{E}$
$\vec{S}$
a
$\vec{B}$
$\vec{E}$
a
$\vec{p}$
b
y
x
$\vec{B}$

电偶极子电磁波辐射：



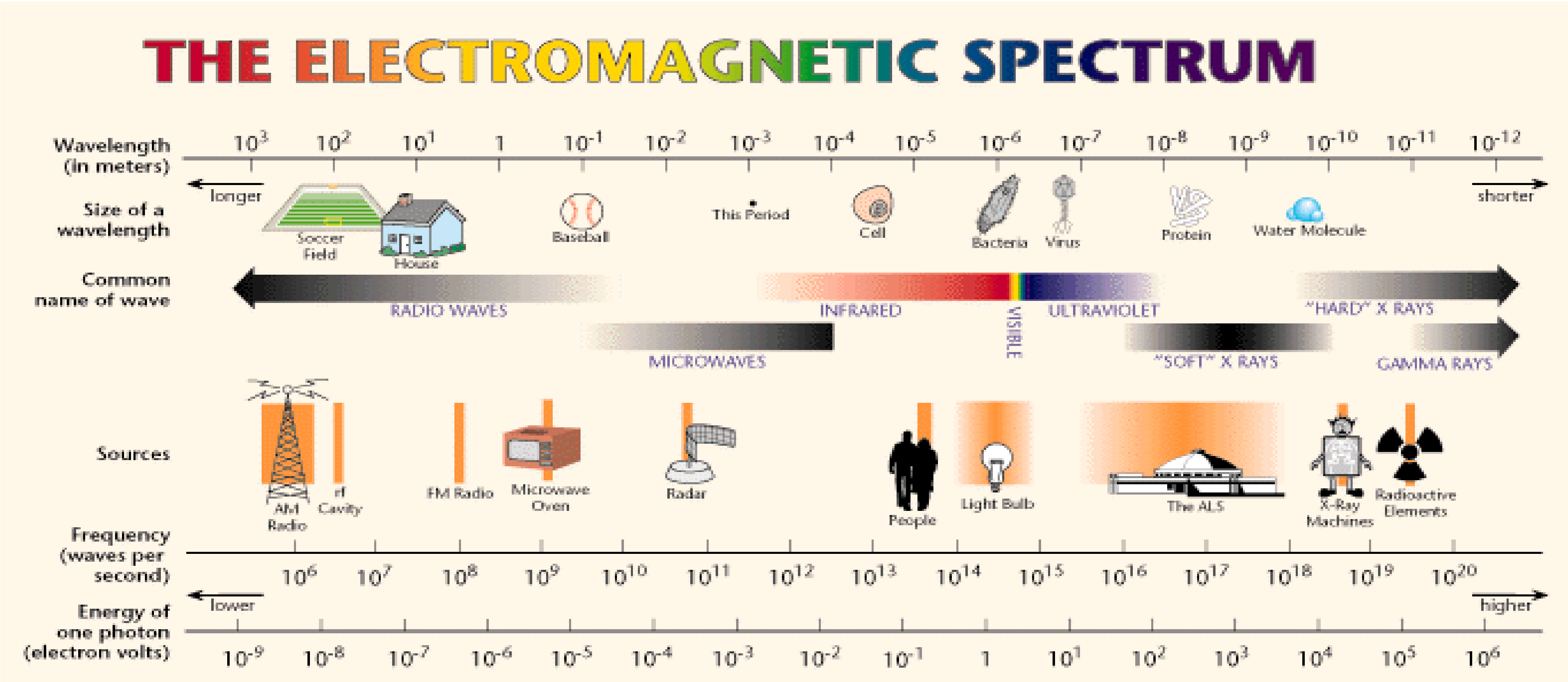
详细推导可见：余守宪，《物理》1965年，第8期，349-354页。

- 电磁波分布

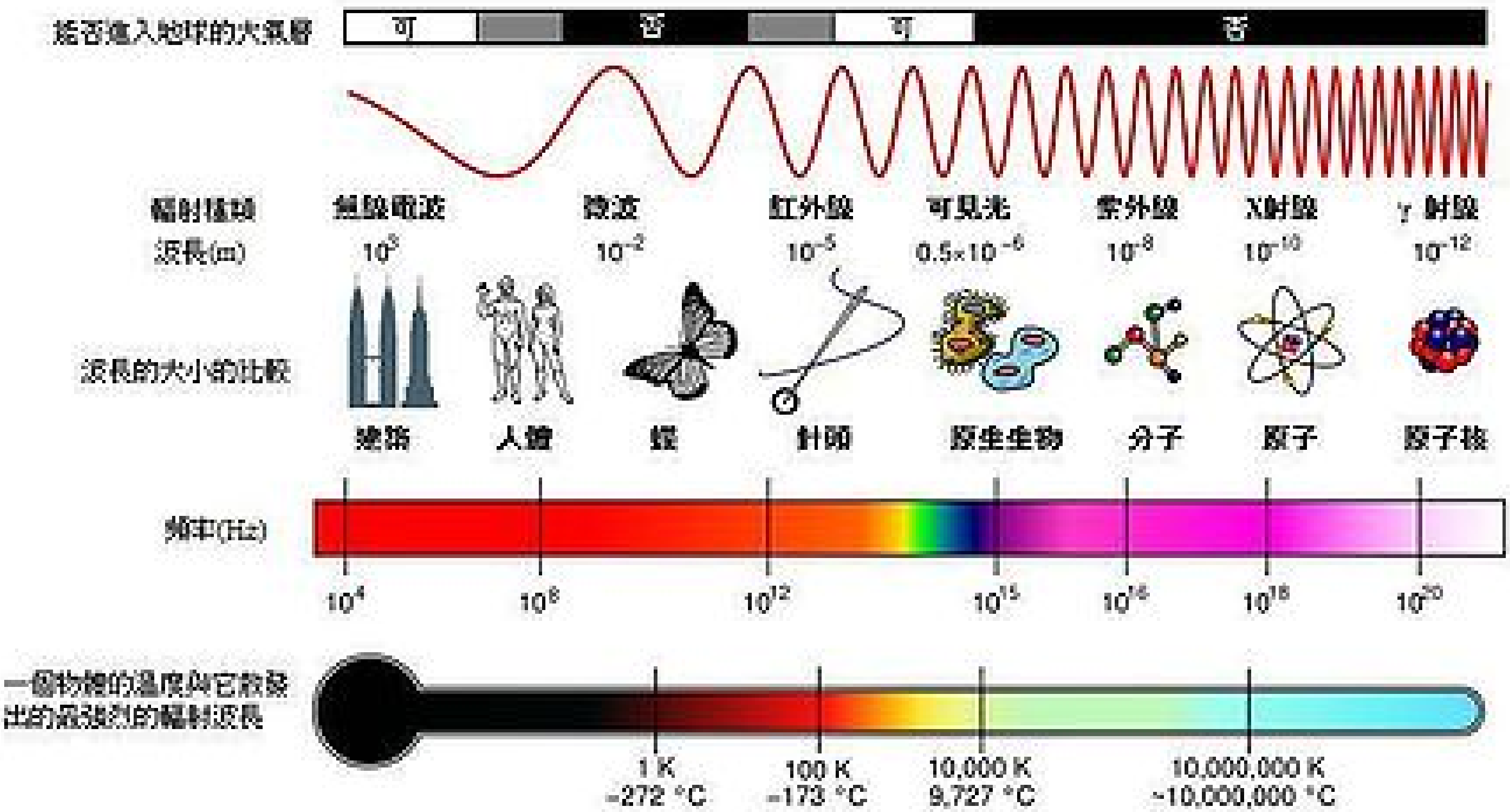


频率
(Hz)
10^25
10^20
10^15
10^10
10^5
10^0
γ 射线
X射线
紫外线
可见光
红外线
毫米波
微 波
短无线电波
长无线电波
10^-15
10^-10
10^-5
10^0
10^5
波长
(m)

电磁波波谱


THE ELECTROMAGNETIC SPECTRUM
Wavelength (in meters)
10^3 10^2 10^1 1 10^{-1} 10^{-2} 10^{-3} 10^{-4} 10^{-5} 10^{-6} 10^{-7} 10^{-8} 10^{-9} 10^{-10} 10^{-11} 10^{-12}
longer
shorter
Size of a wavelength
Soccer Field
House
Baseball
This Period
Cell
Bacteria
Virus
Protein
Water Molecule
Common name of wave
RADIO WAVES
INFRARED
VISIBLE
ULTRAVIOLET
"HARD" X RAYS
MICROWAVES
"SOFT" X RAYS
GAMMA RAYS
Sources
AM Radio
rf Cavity
FM Radio
Microwave Oven
Radar
People
Light Bulb
The ALS
X-Ray Machines
Radioactive Elements
Frequency (waves per second)
10^6 10^7 10^8 10^9 10^{10} 10^{11} 10^{12} 10^{13} 10^{14} 10^{15} 10^{16} 10^{17} 10^{18} 10^{19} 10^{20}
lower
higher
Energy of one photon (electron volts)
10^{-9} 10^{-8} 10^{-7} 10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 1 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6

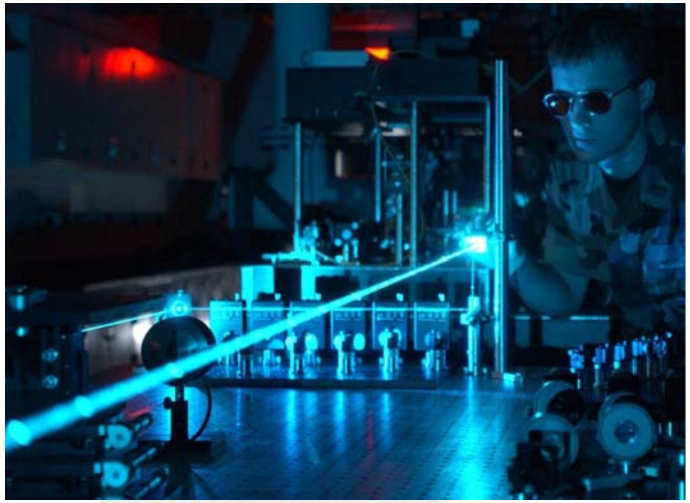
电磁波波谱

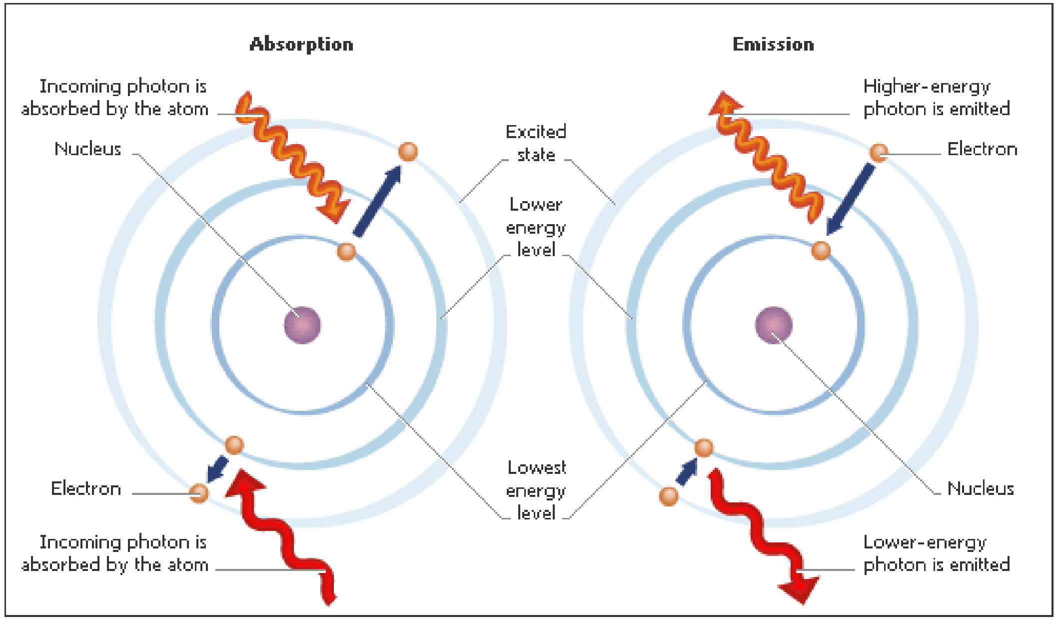

能否進入地球的大氣層
可
否
可
否
輻射種類
波長(m)
無線電波
10^3
微波
10^{-2}
紅外線
10^{-5}
可見光
0.5×10^{-6}
紫外線
10^{-8}
X射線
10^{-10}
γ射線
10^{-12}
波長的大小的比較
建築
人類
蝶
針頭
原生生物
分子
原子
原子核
頻率(Hz)
10^4
10^8
10^{12}
10^{15}
10^{16}
10^{18}
10^{20}
一個物體的溫度與它散發出的最強烈的輻射波長
1 K
-272 °C
100 K
-173 °C
10,000 K
9,727 °C
10,000,000 K
~10,000,000 °C

电磁波波谱

电磁学09-09: 库伦定律与光子静止质量 (取自童国平)

- 库仑定律
- 光子静止质量的计算
- 重电磁场理论 (Proca 方程组)
- 光子静止质量最新实验检验
- 结束语





Composition	Elementary particle
Statistics	Bosonic
Interactions	Electromagnetic
Symbol	γ, $h\nu$, or $\hbar\omega$
Theorized	Albert Einstein
Mass	0 $<1\times10^{-18}$ [[eV/c^2]][1]
Mean lifetime	Stable[1]
Electric charge	0 $<1\times10^{-35}$ e[1]
Spin	1
Parity	−1[1]
C parity	−1[1]
Condensed	$I(J^{PC})=0,1(1^{--})$[1]

库仑定律

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum q_i/\varepsilon_0 \quad \text{if} \quad F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \neq \sum q_i/\varepsilon_0 \quad \text{if} \quad F = k\frac{q_1q_2}{r^{2\pm\delta}}$$

库仑定律检验

实验者	Date	δ Values
Cavendish	1773	$<2\times10^{-2}$
Maxwell	1873	$<5\times10^{-5}$
Plinpton & Lawton	1936	$<2\times10^{-9}$
Barlett, Goldhagen & Phillips	1970	$<1.3\times10^{-16}$
Williams, Faller & Hill	1971	$<1\times10^{-16}$

光子相对静止质量

- 按照爱因斯坦的狭义相对论，光子的相对静止质量等于零。
- 否则，爱因斯坦的质能关系式将会导出光子具有无穷大相对静止能量的理论结果。
- 现有物理实验没有发现光子具有任何相对静止的质量。
- 但是，从哲学观念上来说，既然光子也是物质，它就应当具有物质的共性(普遍性)。
- 既然在物质的共性之中包括着静止质量和能量两个部分，光子也就没有任何理由是一个例外。
- 关于这一观点，在广义时空相对论中，可以介绍一个证明。

- 相对静止质量计算
  - 广义时空相对论质能关系：

$$E = m_0 c\sqrt{c^2 + v^2} \xrightarrow{v=c} E = \sqrt{2}m_0 c^2$$

$$\because E = \hbar\omega \Rightarrow \therefore m_0 = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}c^2} = \eta\omega$$

$$\text{with} \quad \eta = 5.2123\times 10^{-48}\, g\cdot s$$

Frequency of photon	m_0
Visible light 10^{14}-10^{15} Hz	10^{-34}-10^{-33} g
Yellow light 5.0812×10^{-14} Hz	2.6485×10^{-33} g
Electron	9.1085×10^{-28} g

- 本章习题:

P372: 9.1, 9.3, 9.4

- 电磁学是大学物理学最优美的环节之一！
- 在信息时代，电磁学显得非常重要！
- 在这个量子横行的世界，有一些经典电磁学的角落！

- 谢谢一直都来这里上课的各位同学！
- 你们在这里给了我无奈生活中激情两小时的理由！
- 为我给你们留下的痛苦和花费你们的时光道歉！
- 为我给你们留下的一点点知识自豪！
- 复习是很难过的，但没有办法，不复习不行！
- 考试后别指望很快有成绩出来，我们老师该休息几天了！
- 别以为我不记得你们，我记得的，哪怕是一些支离破碎的细节！

相见时难别亦难，不说再见就不难！