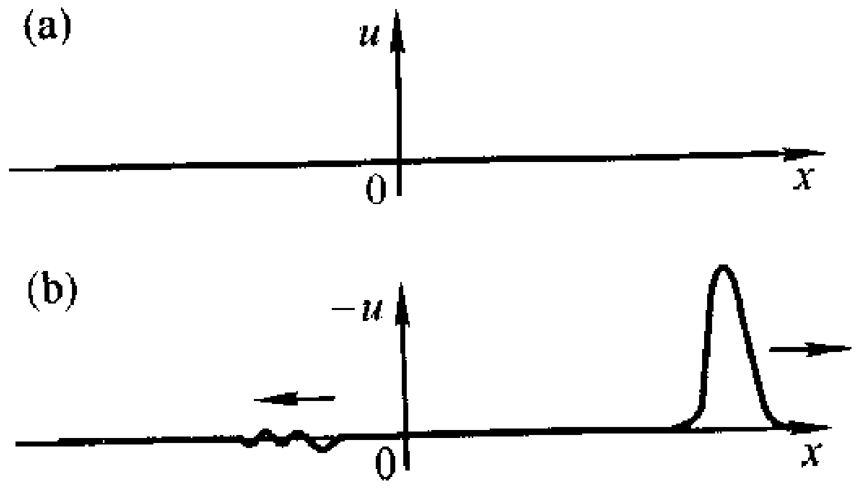
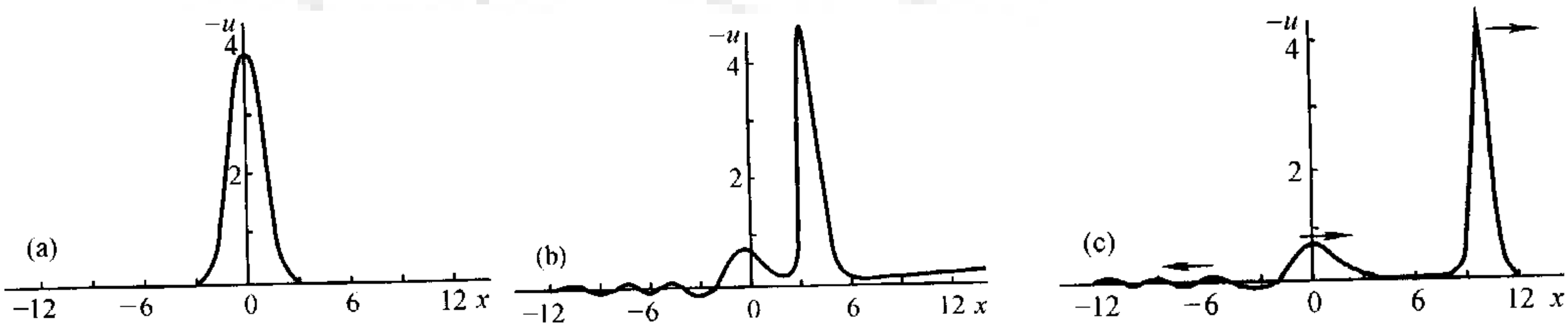
反射势存在时：

- $b(k, 0)$非零时GLM方程求解就很困难了，解析方法很少，多数用数值方法和渐近分析方法。这里只是举例说明一些过程。
- (1) $u(x, 0)=-u_0\delta(x)$，$u_0>0$是常数， $\delta(x)$ 是狄拉克函数。
- 对应$u(x, 0)$的薛定谔方程有分立本征值$\lambda=-k_1^2$ $(k_1=u_0/2)$，对应孤波；还有$\lambda>0$的连续谱，$b(k, 0)=-u_0/(u_0+2ik)$，对应色散波。
- 最后的解包含两部分：沿x方向传播的孤波和沿-x方向传播的色散波。孤波对应 $B(x+y,t)$ 的求和项，色散波对应于积分项。

非线性物理：孤波物理



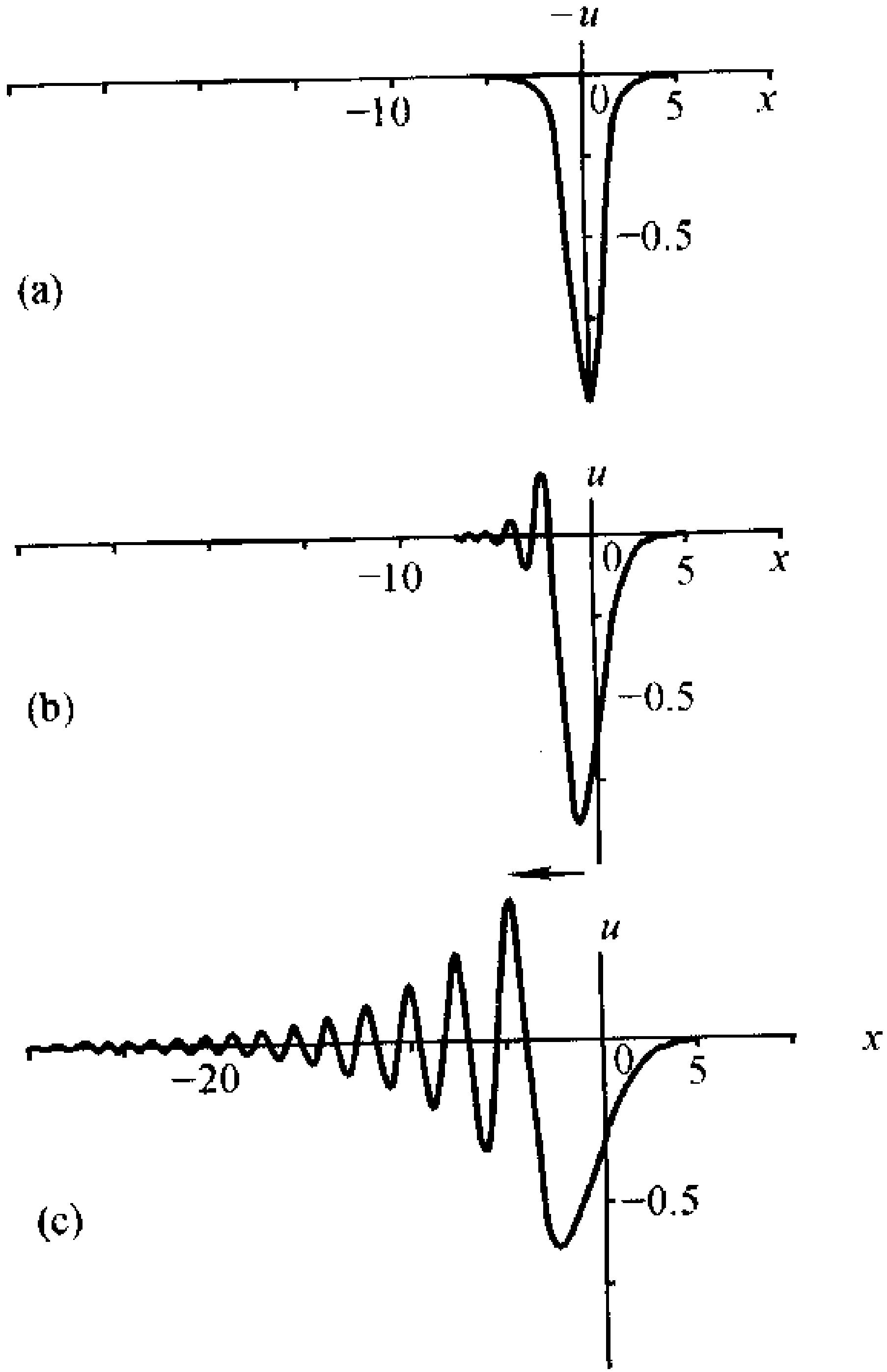
- (2) $u(x, 0)=-4\,\mathrm{sech}^2 x$；数值结果如图示。



非线性物理：孤波物理

- (3) $u(x, 0)=sech^2x$；数值结果如图示。

- 重要结论：孤波是非线性演化方程解的一部分，它只依赖于相关散射问题的分立本征值。



逆散射方法推广：

- **Lax**方法：**1968**年**Lax**将**GGKM**方法加以推广和标准化，称为**Lax**方法。
- **Zakharov**和**Shabat**的推广矩阵方法。
- **AKNS**独立的推广矩阵方法。
- 下面还要介绍一些方法，包括**Backlund**变换，**Backlund**变换与逆散射方法的关系。

Backlund变换：

- 考虑如下sine-Gordon方程：

$$u_{\xi\eta} = \sin u$$

- 如果*u*和*v*都是方程的解，则有下面联立的一阶微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \dfrac{\partial v}{\partial \xi} + 2\lambda \sin \dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = -\dfrac{\partial v}{\partial \eta} + \dfrac{2}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases}; \qquad \lambda \neq 0, real\ const.$$

- 我们称其为sine-Gordon方程的B变换。

- 再考虑 ***u*** 和 ***v*** 分别是下面的**Burgers**方程和热传导方程的解：

$$u_t + uu_x = \beta v_{xx}; \qquad v_t = \beta v_{xx}$$

- β为正的常数，则下面的一阶微分方程组为**B**变换：

$$\begin{cases} v_x = -uv/2\beta \\ v_t = (u^2 - 2\beta u_x)v/4\beta \end{cases}$$

- 所以**B**变换是联系方程两个解的微分方程。功利一些说，如果知道一个方程的一个解及其**B**变换，我们可以搞定另外一个解。

- 这种变换在能够轻易看出一个平庸解的情况下非常有用，因为这样就可以利用**B**变换求解另外一个可能很难得到的解。

- 当然，这种捷径不是那么好看到的，因为对一个方程而言**B**变换也不是容易得到的宝贝。**Sine-Gordon**方程：

$$u_{\xi\eta} = \sin u$$

- 显而易见，一个平庸解是***v*=0**，利用其**B**变换得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 2\lambda \sin\dfrac{u}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{u}{2} \end{cases}; \qquad \lambda \neq 0, real\ const.$$

- 各自积分得到：

$$\ln[\tan(u/4)] = \lambda\xi + f(\eta)$$

$$\ln[\tan(u/4)] = \eta/\lambda + g(\xi)$$

- ***f(η)***和***g(ξ)***分别为针对 *ξ* 和 ***η*** 的积分常数。为了自洽，可以猜出 ***tan(u/4)***的一般形式：

$$\tan(u/4) = \exp(\lambda\xi + \eta/\lambda + c)$$

$$u(\xi,\eta) = 4\tan^{-1}\left[\exp(\lambda\xi + \eta/\lambda + c)\right]$$

- 这个可了不得，它就是**sine-Gordon**方程的孤子解，真是得来全不费工夫。

- 关于孤波方程的求解还有微扰方法和数值差分计算方法，限于时间不再一一介绍，但这些工作依然是目前孤波理论研究的前沿，同学们可以阅读相关文献。

KdV方程的守恒律：

- 我们已经折腾了足够的数学，现在希望稍微物理一点。
- 讨论了这么多**KdV**方程，她有什么值得物理学家爱慕的呢？
- 有的，因为守恒规律存在于**KdV**方程之中！看到这，物理学家应该会发疯或者发愤的，虽然只是一字之差。
- 其实就是将孤波看成准粒子啊！
- 假定***ρ(x,t)***是流体密度，***v(x,t)***是沿 ***x***方向的速度，质量演化满足：

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0 \_\_\_\_\_\_ \rho v \Rightarrow const. \quad if \ |x| \rightarrow \infty \_\_\_\_$$

- 如果 ρ 和 $(\rho v)_x$是可积的，则对空间 x 积分上式得到：

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\rho dx\right)=-\rho v\Big|_{-\infty}^{\infty}=0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\rho dx=const.$$

- 上述推理可以一般化：函数 T 是密度，X 是通量，它们不含对 t 的导数项，则有下面的守恒律存在：

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0$$

- 应用到 $u(x,t)$ 的演化，T 和 X 可以是x, t, u, u_x, u_{xx}, …的函数，但必须与 u_t无关，只要：

$$X\Rightarrow const.\quad if\ |x|\to\infty$$

非线性物理：孤波物理

- 就有下式和对应的运动常数：

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} T dx\right) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} T dx = const.$$

- 对 **KdV**方程，作如下代换，就可以得到第一个守恒律：

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \Rightarrow T = u, \quad X = u_{xx} - 3u^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} u dx = const. = mass$$

- 因为**u**与浅水波幅度正比，所以上式就是质量守恒。

- 将**KdV**方程两端乘以 ***2u***，得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^2)+\frac{\partial}{\partial x}(2uu_{xx}-u_x^2-4u^3)=0$$

- 如果作下面的代换，并再次拥到守恒律：

$$T=u^2,\quad X=2uu_{xx}-u_x^2-4u^3 \qquad \frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0$$

- 因为 **u** 与水波幅度(质量)正比，而幅度又与速度正比，自然得到动量守恒：

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^2dx=const.=momentum$$

- 再对KdV方程施加运算：**3u^2×(KdV)+u_x×∂(KdV)/∂x**，得到：

$$3u^2(u_t-6uu_x+u_{xxx})+u_x\frac{\partial}{\partial x}(u_t-6uu_x+u_{xxx})=0$$

- 变换一下，运算一下：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u^{3}+\frac{1}{2}u_{x}^{2}\right)+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{9}{2}u^{4}+3u^{2}u_{xx}-6uu_{x}^{2}+u_{x}u_{xxx}-\frac{1}{2}u_{x}^{2}\right)=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left(u^{3}+\frac{1}{2}u_{x}^{2}\right)dx=const.=energy$$

- 这是能量守恒！对于一个准粒子系统，全了！
- 已经证明，**KdV**方程有无穷个守恒律，但物理意义就不清了！

- 下面要干什么？既然是准粒子，既然质量、动量、能量守恒，就一定是哈密顿系统！

- 一个动力学系统，如果其广义坐标 ***q(x,t)***，广义动量 ***p(x,t)***，其哈密顿为 ***H(p,q,t)***，则运动方程满足下式的就是哈密顿系统：

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta p},\quad \frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta q}$$

- 这里假定 ***H*** 是 ***p, q***及其导数的泛函，***(p, q)***是共轭变量。一个系统的哈密顿是：

$$H(p,q,t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(p,q,t)dx$$

- 由此可以定义泛函导数：

$$\frac{\delta H}{\delta p}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^2\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial h}{\partial p_{nx}}\right),\qquad p_{nx}=\partial^n p/\partial x^n,$$

$$\frac{\delta H}{\delta q}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^2\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial h}{\partial q_{nx}}\right)\qquad q_{nx}=\partial^n q/\partial x^n$$

- 现在来看**KdV**方程，其哈密顿量前人已经求出：

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\left(pq_x^2+p^2q_x+p_nq_{xx}\right)dx$$

- 由此可以求出对应的动力学方程：

$$q_t = \frac{\delta H}{\delta p} = q_x^2 + 2pq_x - q_{xxx}$$

$$p_t = -\frac{\delta H}{\delta q} = (p^2)_x + (2pq_x)_x - p_{xxx}$$

- 这个哈密顿给出的是关于广义动量 ***p*** 的**KdV**方程，且 ***p=q***

- 这个哈密顿给出的是关于广义动量 $\boldsymbol{p}$ 的**KdV**方程，且 $\boldsymbol{p=q_x}$一定为这两个动力学方程所满足。对第一个方程，代入$\boldsymbol{p=q_x}$并求导：

$$q_t = 3q_x^2 - q_{xxx}$$

$$p_t - 6pp_x + p_{xxx} = 0$$

- 对第二个方程，同样运算得到：

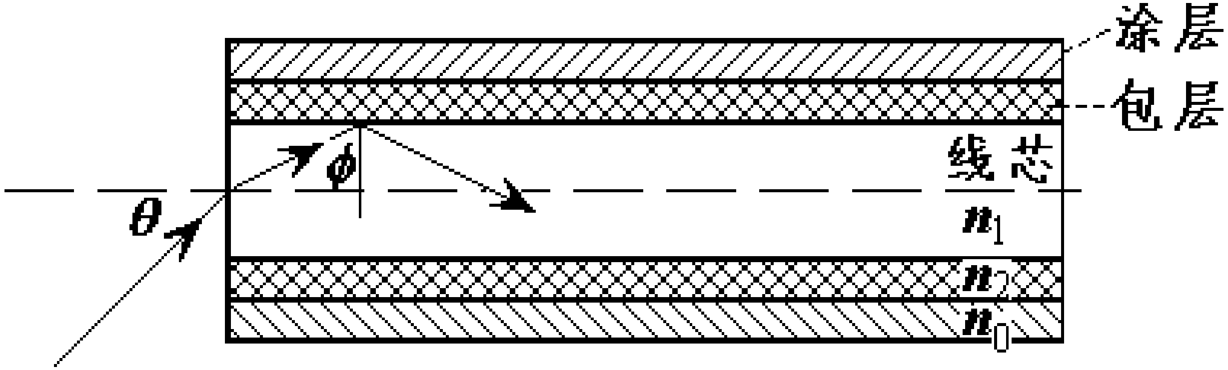
$$p_t - 6pp_x + p_{xxx} = 0$$

- 目前研究前沿还有关于二维KdV方程的很多研究，在此就不再一一涉及了。

光学孤立子：光纤中的光脉冲压缩

1. 与KdV方程描述的孤立子相类似，由非线性薛定谔方程描述的光纤中的光学孤立子是光波在传播过程中色散效应与非线性压缩效应相平衡的结果。

2. 强激光在光纤中的传播可以由下图表示：



1. 入射的激光可以看成是准单色光。中心频率为ω_0的准单色光在光纤中的传播表达式为：

$$\boldsymbol{E}(x,\mathrm{t}) = \overline{\boldsymbol{E}}(x,\mathrm{t})\ \exp[\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)]$$

包罗函数：

$$\overline{\boldsymbol{E}}(x,\mathrm{t}) = \int A(\omega)\exp[i(k-k_0)x-(\omega-\omega_0)t]d\omega$$

2. 在强激光作用下，光纤介质会出现非线性极化。这时的极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 与光场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系为：

$$\boldsymbol{P} = \chi^{(1)}\boldsymbol{E} + \chi^{(2)}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} + \chi^{(3)}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} + \cdots$$

式中$\chi^{(1)}$，$\chi^{(2)}$和$\chi^{(3)}$分别称为线性的与二次、三次非线性极化率。通常光纤的二次非线性极化率为零。

- 介质的电感应矢量 ***D*** 与极化矢量 ***P*** 的关系为***D=εE+P***，忽略高次非线性效应，***D***可写为：

$$\boldsymbol{D} = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\boldsymbol{E} \qquad \varepsilon_0 = 1 + \chi^{(1)} \qquad \varepsilon_1 = \chi^{(3)}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

- 非线性介质的折射率为：

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \approx \sqrt{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0}\mathrm{E}^2\right) = n_0 + n_1\mathrm{E}^2$$

- 式中n_0为介质通常的线性折射率，n_1非线性折射系数。可见非线性介质的折射率与光波的场强有关。

- 因为激光光强***I(t)***与***E***²成正比，我们可以说因为非零n_1导致强激光在光纤中传播时出现相移：

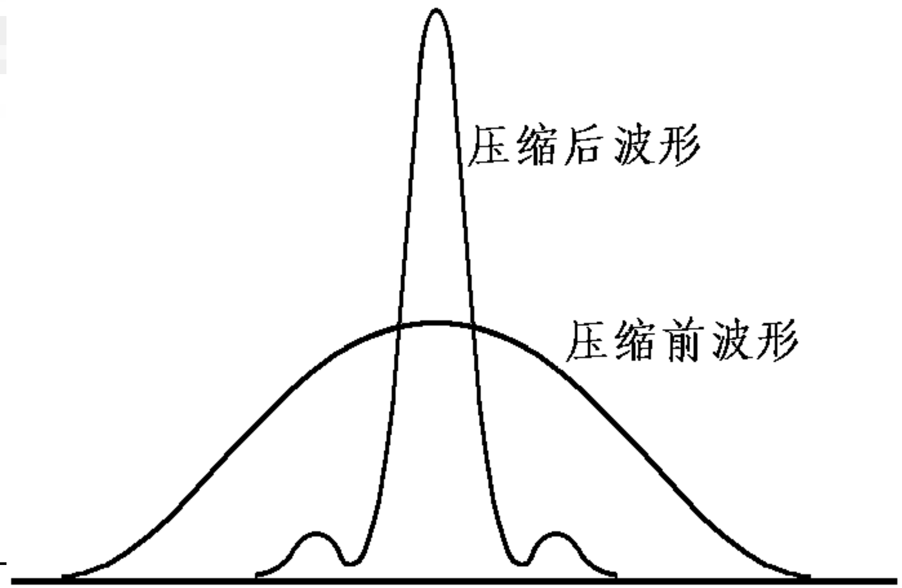
$$\Delta\phi(t)=\frac{2\pi}{\lambda}n_1 LI(t)$$

- 它导致光脉冲的不同部位有不同的相移，称为自相位调制(**Self-phase modulation－SPM)**。相应地就有频率移动：

$$\Delta\omega=-\frac{\partial\Delta\phi}{\partial t}=-\frac{2\pi}{\lambda_0}n_1 L\frac{\partial I}{\partial t}$$

非线性物理：孤波物理

- 如果将光脉冲光强随时间的变化分成前沿与后沿等不同部分，则可以发现，脉冲前、后沿产生的频率变化是不同的。对脉冲前沿来说，$\partial I/\partial t>0$，$\Delta\omega<0$；对脉冲后沿，$\partial I/\partial t<0$，$\Delta\omega>0$。因为频率不同，由于色散，波包群速度不同，正是非线性效应，造成光脉冲在光纤中传输时产生压缩。下图是光脉冲的自相位调制压缩：



非线性薛定谔方程与孤立波解：

- 在线性情况下，光波的传播常数(波数) *k*只是频率的函数，与光强无关。将准单色光的传播常数按中心频率ω_0处展开，有：

$$k(\omega)=k_0+\frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega-\omega_0)^2+\cdots$$

省去高次项有：

$$k(\omega)-k_0=k'(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}k''(\omega-\omega_0)^2$$

- 注意到ω_0处的群速和色散常数：

$$\frac{1}{v_g}=\left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_0} \qquad k''=\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}$$

- 若考虑到非线性的影响，在k的表达式中需要加进与光强相关的项，于是有：

$$k(\omega)-k_0=k'(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}k''(\omega-\omega_0)^2+\alpha\cdot \mathrm{E}^2$$

式中$\alpha=\omega\cdot n_1/c$，c为真空中的光速，上式右边第二项为色散，第三项为非线性压缩项。利用波动方程与色散之间的对应关系：

$$\frac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow -i(\omega-\omega_0) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\longleftrightarrow i(k-k_0)$$

- 我们得到光强所满足的薛定锷方程：

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_g\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{E}+\beta\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2}-\alpha\left|\boldsymbol{E}\right|^2\boldsymbol{E}=0 \qquad \beta=\frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}$$

非线性物理：孤波物理

- 变换一下坐标系$x'=x-v_g t$，并将 E 用光场表示，得到：

$$E=\psi(x-v_g t,t)\equiv\psi(x',t)$$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\alpha|\psi|^2\psi=0$$

- 这是最后的非线性薛定谔方程的形式。
- 考虑其解为如下形式，$\xi=x-v_0 t$：

$$\psi=u(x-v_0 t)e^{i(k\cdot x-\omega\cdot t)}=u(\xi)e^{i(k\cdot x-\omega\cdot t)}$$

- 将上述解的形式代入到薛定谔方程之中，注意到下面的关系后，可以得到最后的方程形式：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(- v_{\mathrm{g}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - i\omega u \right) e^{\mathrm{i}(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}-\omega\cdot\mathrm{t})} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + iku \right) e^{\mathrm{i}(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}-\omega\cdot\mathrm{t})}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + ik\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) e^{\mathrm{i}(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}-\omega\cdot\mathrm{t})} + ik\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + iku \right) e^{\mathrm{i}(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}-\omega\cdot\mathrm{t})}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ik\frac{\partial u}{\partial \xi} - k^2 u \right) e^{\mathrm{i}(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}-\omega\cdot\mathrm{t})}$$

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + i(2k\beta - v_0)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\omega - k^2 \beta\right)u - \alpha u^3 = 0$$

- 用简化的微分符号表示就是：

$$\beta u''+i(2k\beta-v_0)u'+(\omega-k^2\beta)u-\alpha u^3=0$$

- 选择参数**k**使得**u′**的系数为零，得到$k=v_0/2\beta$，$\gamma=-(\omega-k^2\beta)=(\omega-v_0^2/4\beta)$，最后得到如下关于实数**u**的方程：

$$u''+\frac{\gamma}{\beta}u-\frac{\alpha}{\beta}u^3=0$$

- 对上式两边乘以**u′**后进行一次积分，得到：

$$\frac{1}{2}u'^2-\frac{\gamma}{2\beta}u^2-\frac{\alpha}{4\beta}u^4=H$$

式中积分常数**H**代表体系哈密顿，取**H=0**，我们得到：

$$u'^2=\frac{\gamma}{\beta}u^2+\frac{\alpha}{2\beta}u^4=\frac{\alpha}{2\beta}\left(\frac{2\gamma}{\alpha}+u^2\right)u^2$$

$$u' = \pm u\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}} \cdot \sqrt{(\frac{2\gamma}{\alpha} + u^2)} \qquad \frac{du}{u \cdot \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\alpha} + u^2\right)}} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}} \cdot d\xi$$

- 利用椭圆函数积分公式并取积分常数**c=0**就得到：

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^2 + x^2)}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a} + c$$

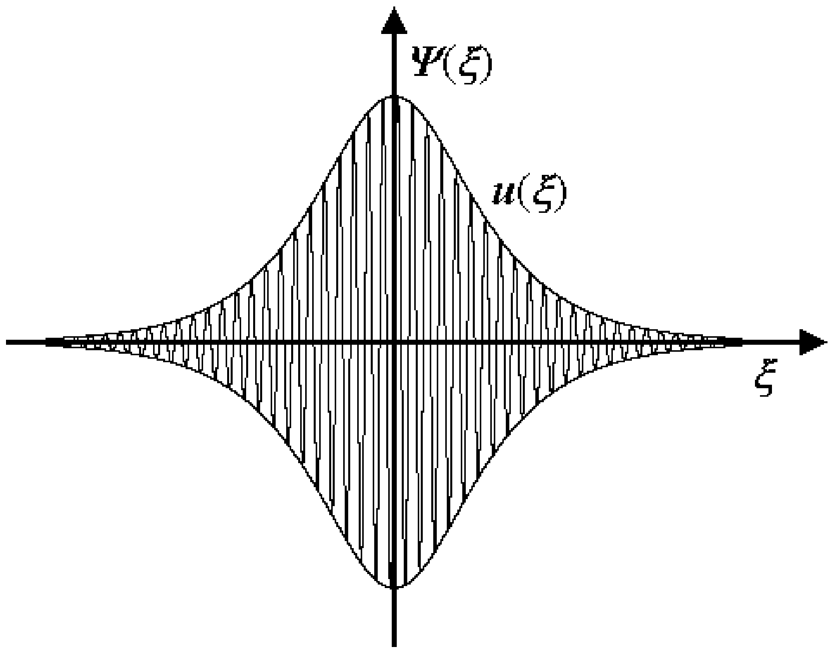
$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha}}}\operatorname{sech}^{-1}\frac{u}{\sqrt{\frac{2\gamma}{a}}} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}\xi \qquad u(\xi) = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}}\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\xi$$

这就是我们熟悉的孤立波波形。

- 结合非线性薛定谔方程的解：

$$\psi = u(x - v_0 t)e^{i(k\cdot x-\omega\cdot t)} = u(\xi)e^{i(k\cdot x-\omega\cdot t)}$$

可知非线性薛锷方程的解是受孤立波脉冲$u(\xi)$调制的光波，如图所示，即包络为孤立波的光脉冲波。



相空间特性：

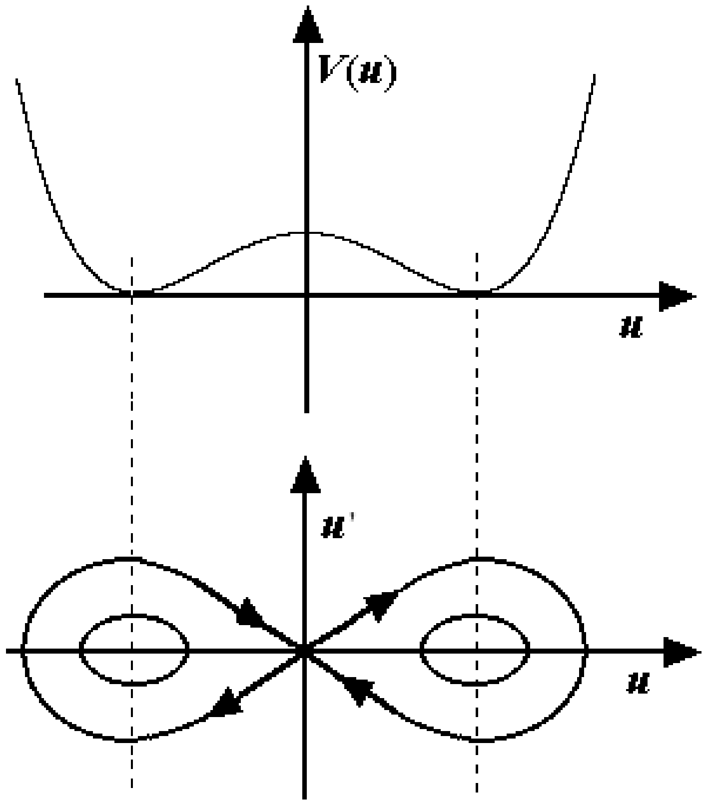
1. 前面提到非线性薛定谔方程描述的体系具有如下所示的哈密顿：

$$H=\frac{1}{2}u'^2-\frac{\gamma}{2\beta}u^2-\frac{\alpha}{4\beta}u^4=\frac{1}{2}u'^2+V(u)$$

2. 体系势能**V(u)**为：

$$\mathrm{V}(u)=\frac{-1}{2\beta}\left(\gamma u^2+\frac{1}{2}\alpha u^4\right)$$

- $V(u)$是u的四次曲线，有三个奇点：两个极小点和之间的一个极大点。在$[u,u']$平面相图上，与极小点对应的是中心点，其邻域是椭圆轨线。与极大点对应的是鞍点，有四条轨线流过鞍点，其中两条趋向鞍点，另两条离开鞍点。当我们沿任一条离开鞍点的轨线出发，则在绕了一圈之后又会回到了鞍点，因此这个鞍点是同宿点，相应的轨线为同宿线。非线性薛定谔方程的孤立波解正是与这样的同宿线相对应。



光学孤立子的传播特性：

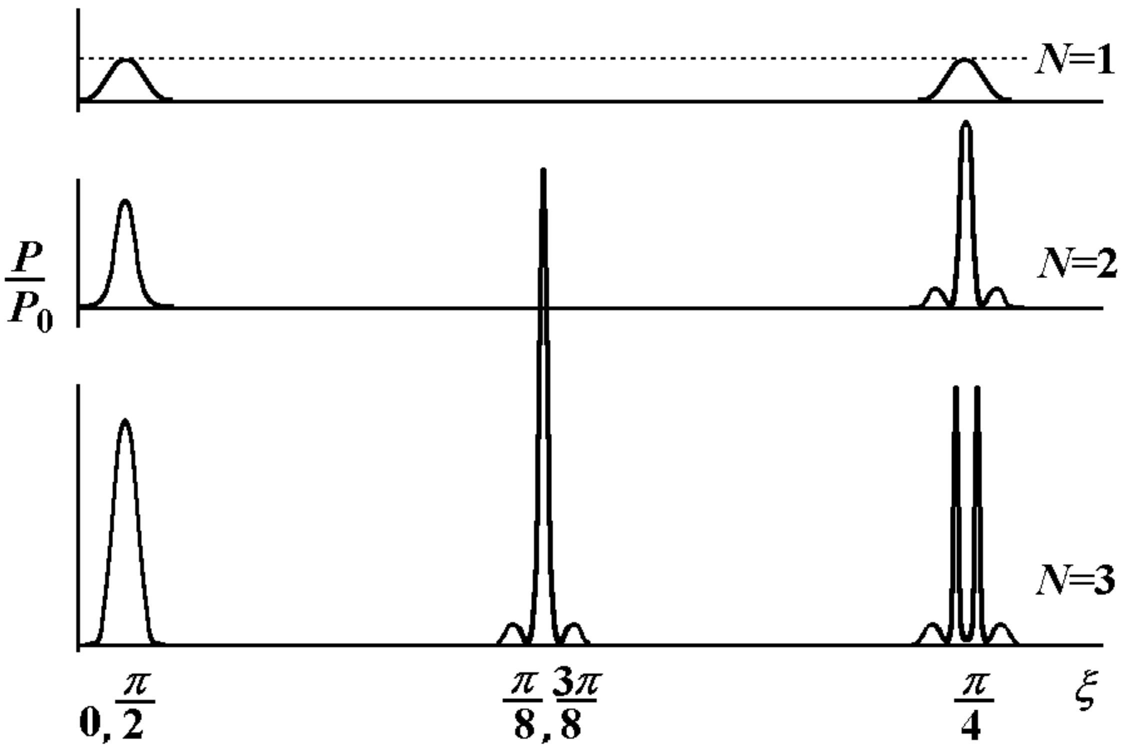
1. 为了将光学孤立波应用于通信，需要考察孤立波光脉冲在光纤中传播的特点。设在ξ=0(*x*=0)处对光纤输入一双曲正割型脉冲波：

$$u(0,\tau)=A\mathrm{sech}(\tau)$$

2. 当系数*A*为整数N时，具有稳定的孤立子解。N＝1称基本孤立子它在传播中保持着稳定不变的波形。当输入光脉冲幅度超过稳定的基本孤立子要求的幅度，这时光脉冲在传输中非线性压缩超过色散，于是光脉冲会进一步压缩，形成N≥2的高阶孤立子。高阶孤立子在传播中波形要发生周期的变化，例如，对于N＝2的二阶孤立子解，其形式为：

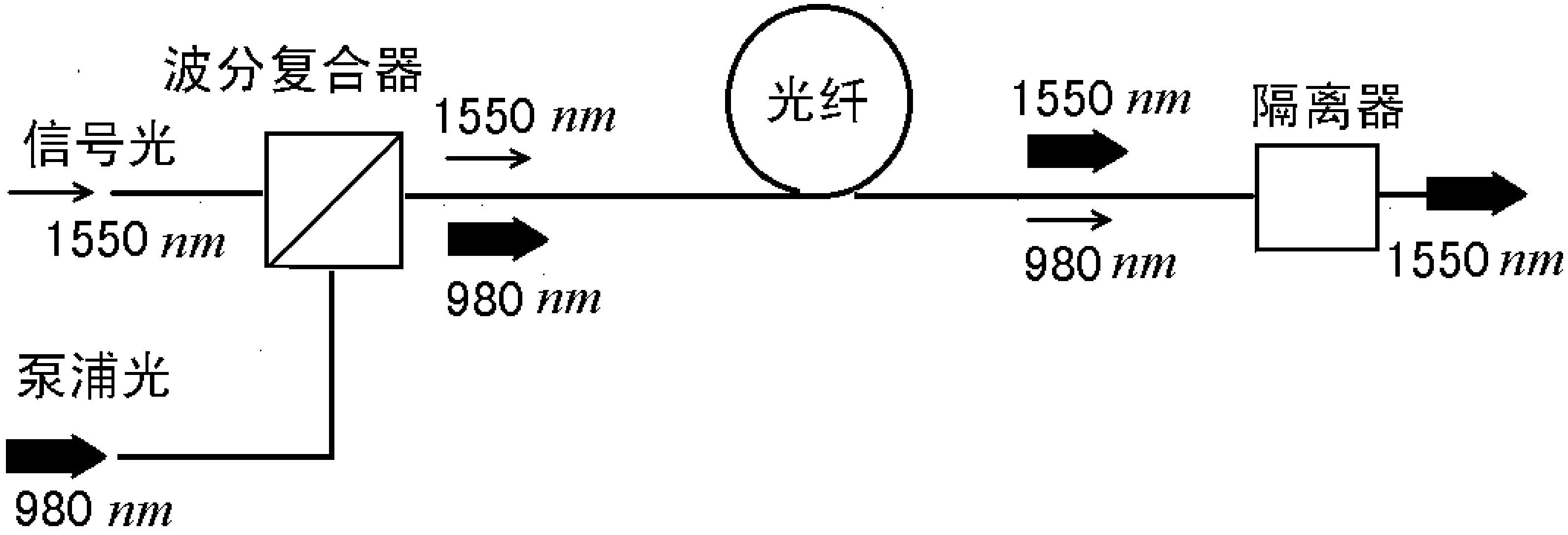
$$u(\xi,\tau)=\frac{4e^{i\xi/2}(\mathrm{ch}3\tau+4e^{i\xi/2})\mathrm{ch}\,\tau}{\mathrm{ch}4\tau+4\mathrm{ch}2\tau+3\cos 4\xi}$$

1. 二阶孤立子要发生以$\xi=\pi/2$周期的周期性波形变化。在半周期$\xi=\pi/4$处，在孤立子主峰的两侧，各出现有一个小峰。而N＝3时的三阶孤立子在传播中的形状变化更为复杂。它在1/4与3/8周期处，变成一个两侧各有一个小峰的高大尖峰，而在半周期处，那个高大尖峰又进一步分裂为两个峰。下图给出了N=1,2,3时三种孤立子在传播中的形状变化：



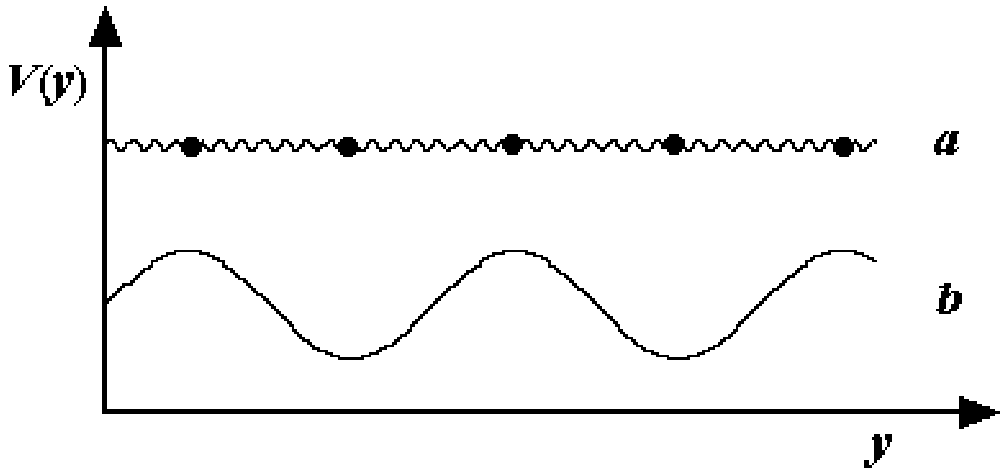
光学孤立子通讯：

1. 拉曼泵浦技术中采用了特殊的掺铒光纤，如下图所示为传播示意图：



正弦—高登方程：一维原子链振动问题

1. 正弦—高登方程处理外场中的一维原子链模型，即一串周期地束缚在长长的弹簧上的原子：



2. 在外场**V(y)**下，原子链的哈密顿可以写成下式，***m***为原子质量，$\mathbf{y_k}$为第***k***个原子的坐标，***φ(y)***为原子作用势。

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}\sum_{k}\dot{y}_{k}^{2}+\frac{1}{2}\sum_{k}[\varphi(y_{k+1}-y_{k})-\varphi(y_{k}-y_{k-1})]+\sum_{k}V(y_{k})$$

1. 考虑周期势： $\mathrm{V}(y_{\mathrm{k}}+\mathrm{a}_0)=\mathrm{V}(y_{\mathrm{k}})$

2. 设m=1， $\varphi(y)$作用势为： $\varphi(\xi)=\xi^2$

3. 这样，第*k*个原子的运动方程可以写为：

$$\ddot{y}_{\mathrm{k}}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y_{\mathrm{k}}}=(y_{\mathrm{k+1}}-y_{\mathrm{k}})-(y_{\mathrm{k}}-y_{\mathrm{k-1}})-\mathrm{V}(y_{\mathrm{k}})$$

4. 将上式由分离变量过渡到连续变量并设*V(y)=cos(y)*，并考虑一般变形：*m*=1和v_0=1：

$$y_{\mathrm{k}}\to y(x,t)\qquad (y_{\mathrm{k}}-y_{\mathrm{k-1}})\to\frac{\partial y}{\partial x}\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\sin y=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-v_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m^2\sin u=0$$

孤立波解

1. 假定正弦-高登方程具有行波解，代入正弦-高登方程得常微分方程，可得解析解 ：

$$u = u(x - vt) = u(\xi) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \chi^2 \sin u = 0 \qquad \chi^2 = \frac{m^2}{v^2 - v_0^2} > 0$$

$$\sin\frac{u}{2} = \pm\zeta \cdot \mathrm{sn}\frac{m}{\sqrt{v^2 - v_0^2}}\xi \qquad \zeta = \sqrt{\frac{C}{2m^2}}$$

ζ为椭圆函数的模数，C为积分常数 。

2. $C \rightarrow 2m^2$，则$snx \rightarrow thx$，

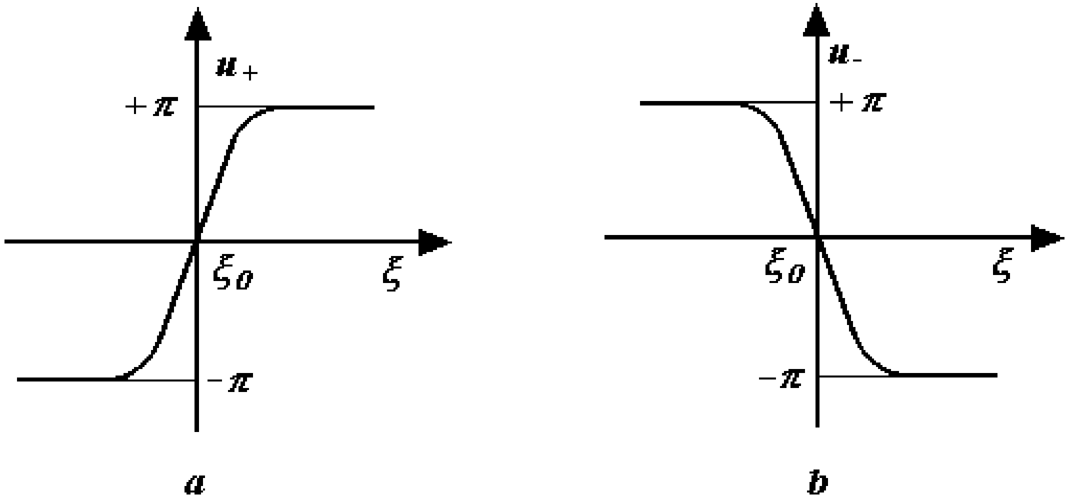
$$\sin\frac{u}{2} = \pm\mathrm{th}(\chi \cdot \xi) \qquad \sin\frac{u}{2} = \mathrm{th}(\pm\chi \cdot \xi) = \frac{e^{\pm\chi\xi} - e^{\mp\chi\xi}}{e^{\pm\chi\xi} + e^{\mp\chi\xi}}$$

$$e^{\pm\chi\xi} - e^{\mp\chi\xi} = e^{\pm\chi\xi} + e^{\mp\chi\xi}\sin\frac{u}{2} \qquad e^{\pm\chi\xi}(1-\sin\frac{u}{2}) = e^{\mp\chi\xi}(1+\sin\frac{u}{2})$$

$$e^{\pm 2\chi\xi} = \frac{(1+\sin\frac{u}{2})}{(1-\sin\frac{u}{2})} \qquad e^{\pm\chi\xi} = \sqrt{\frac{(1+\sin\frac{u}{2})}{(1-\sin\frac{u}{2})}} = \frac{1+\mathrm{tg}\frac{u}{4}}{1-\mathrm{tg}\frac{u}{4}} = \mathrm{tg}(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4})$$

1. **最后得到正弦-高登方程的两个解：u_+和u_-，它们分别称为扭折解(kink)与反扭折解(anti-kink)，它们的图象是一种冲击波(impulse wave)的形式：**

$$u_{\pm} = -\pi + 4\mathrm{tg}^{-1}(e^{\pm\chi\xi})$$



1. 正弦—高登(sine—Gordon)方程的解可以解释许多物理学现象。例如可以用以描述表示晶格位错传播、磁体中畴壁运动、超导约瑟夫逊结的列阵构成的传输线，电荷密度波、基本粒于模型。

稳定性分析：

- 正弦高登方程具有与单摆方程类似的形式，因此我们可以采用与单摆相图类似的方法来讨论其解。
- 写成如下相空间的形式：
- 相空间轨迹如右图所示：

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\chi^2 \sin u \end{cases}$$