

形态多样性：以平方映射为例

- 最简单动力学系统可以表示为(μ 为控制参数):

$$y = f(\mu, x) \quad x_{n+1} = f(\mu, x_n)$$

- 1838年, 生物学家 Verhulst 在研究生物种群演化时提出平方映射演化方程, 也即logistic map:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

- 数学物理学家 R. May 于1971年发现了这一单参量方程竟然具有不同寻常的行为。微分形式(与迭代方程稍有不同):

$$\frac{dx}{dt} = \mu x(1 - x)$$

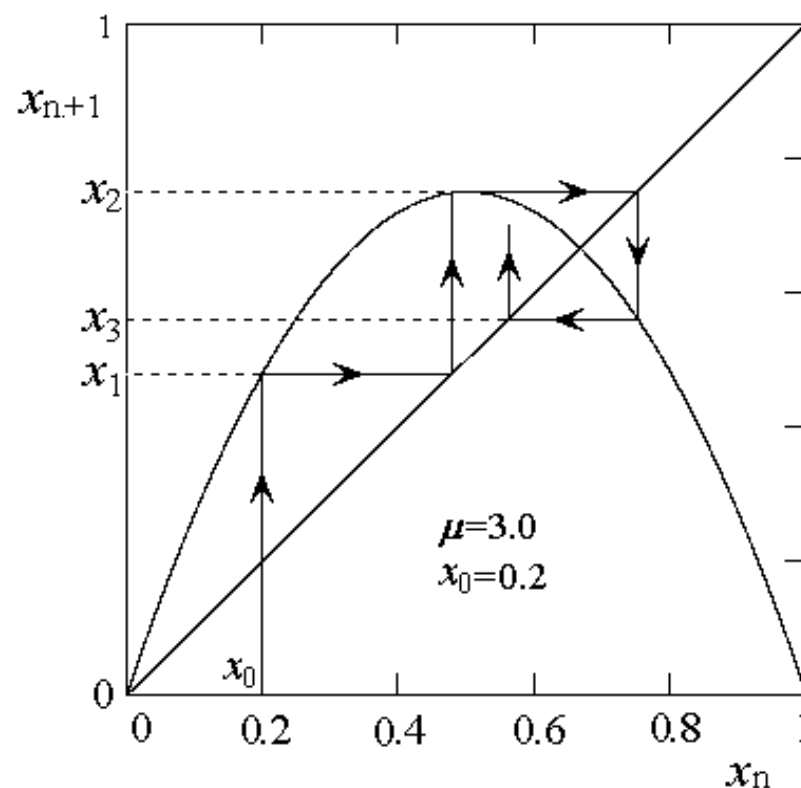


非线性物理：混沌物理

- 该微分方程的解为：

$$x(t) = x_0 e^{\mu t} / [1 - x_0 (1 - e^{\mu t})]$$

- 此解只是一个平凡解，而映射过程却非常复杂，它能表达出一个动力学系统是如何从规则运动步入混沌运动的。
- 上述映射的迭代轨迹如右。根据不同初始值 x_0 其规律可以很不相同。



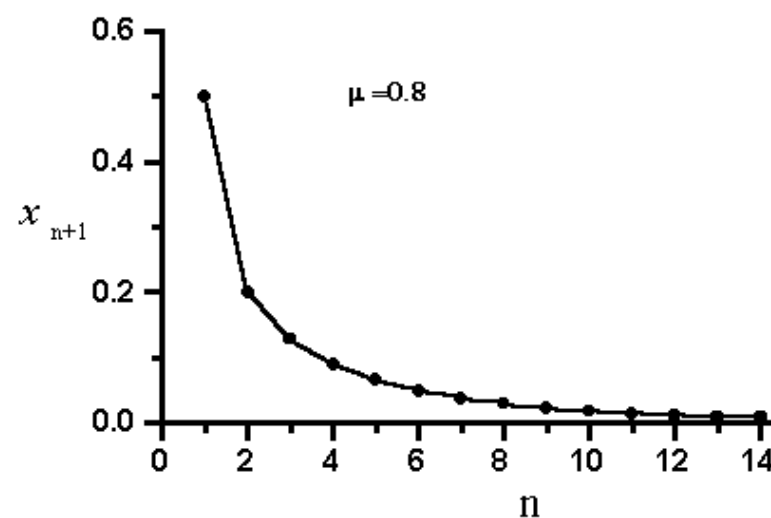
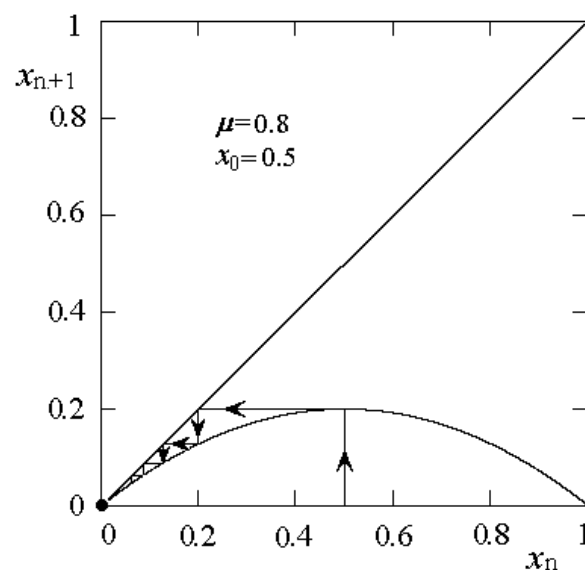
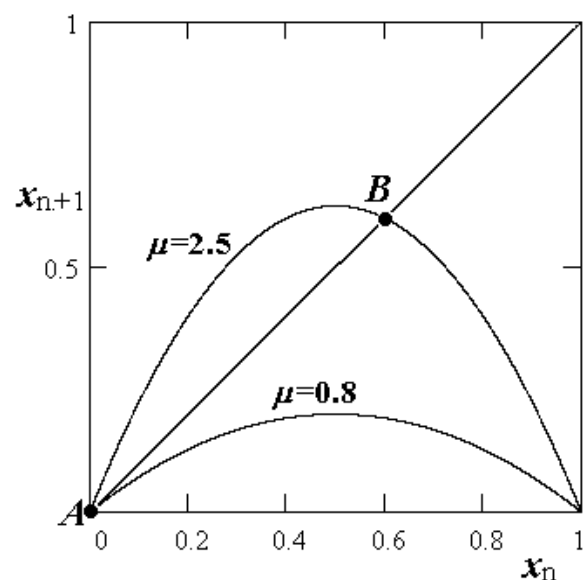
非线性物理：混沌物理

- 定常态与稳定性：

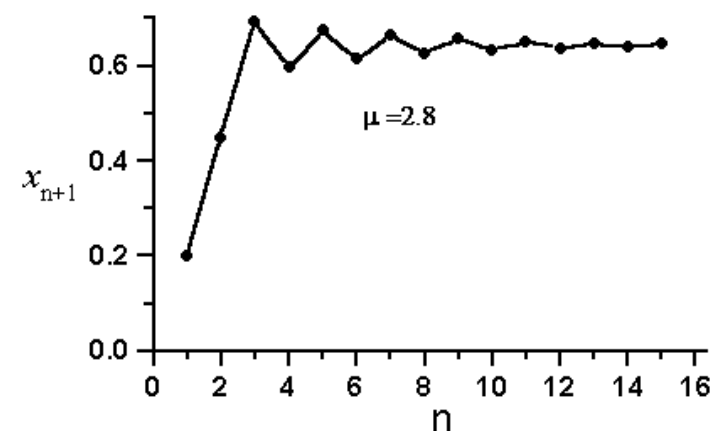
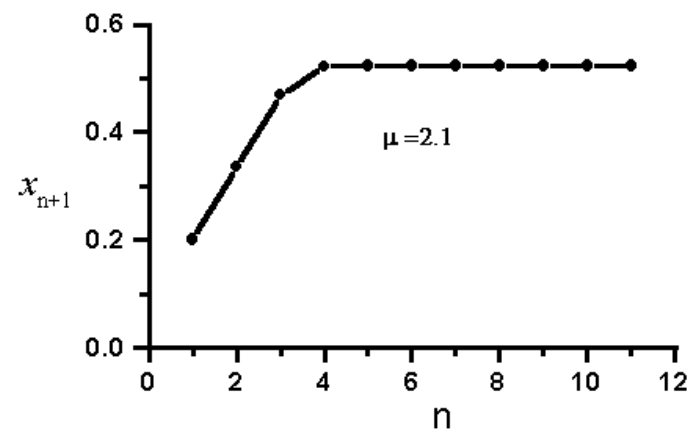
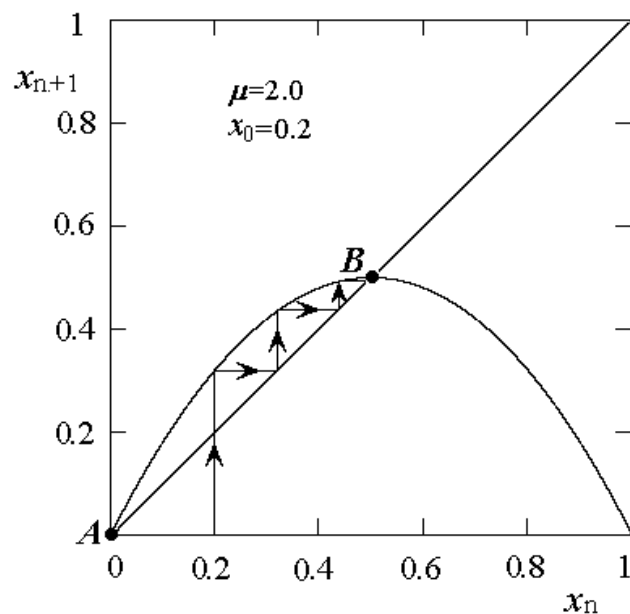
- 根据定常态定义，有：

$$x_i = \mu x_i (1 - x_i) \quad x_i = \begin{cases} 0 \\ \frac{\mu - 1}{\mu} \end{cases}$$

- 定常态的图解轨迹为：



非线性物理：混沌物理



- 当 μ 值增大时，迭代先出现振荡起伏，然后逐步稳定在某个数值。



非线性物理：混沌物理

- 在定常态附近进行稳定性分析：

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) \quad x^* = f(\mu, x^*)$$

- 在定常态 x^* 处施加微扰 ε_n ，则：

$$x^* + \varepsilon_{n+1} = f(\mu, x^* + \varepsilon_n)$$

$$x^* + \varepsilon_{n+1} = f(\mu, x^*) + \left. \frac{\partial f(\mu, x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \varepsilon_n + \dots$$

$$m = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \left| \frac{\partial f(\mu, x)}{\partial x} \right|_{x=x^*}$$

- 稳定不动点应该满足： $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n| \quad m \leq 1$



- $0 < m < 1$: 迭代单调的趋近 x^* , $m > 1$ 表示迭代指数增长发散。
- $-1 < m < 0$: 迭代经过几次上下起伏趋近于 x^* , $m < -1$ 表示迭代指数振荡增长发散。
- 周期解:
 - 按照上述稳定性分析, 从初值 x_0 出发, 迭代过程要么发散, 要么收敛到两个定常态之一。然而, 在合适的 μ 值情况下, 迭代过程表现为: $x_2 = f(x_1)$, $x_1 = f(x_2)$, 循环往复, 出现倍周期解。
 - 周期2解应该满足: $x = f(f(x)) \Rightarrow f^2(x)$, 周期4解满足 $x = f(f(f(f(x)))) \Rightarrow f^4(x)$ 。



- 以 $x=f^2(x)$ 为例，方程变为：

$$x = f(f(x)) = \mu[\mu x(1-x)][1-\mu x(1-x)]$$

$$x - \mu[\mu x(1-x)][1-\mu x(1-x)] = 0$$

- 方程 $x=f(x)$ 的两个定常解依然是上述方程的两个根，从而求得另外两个根：

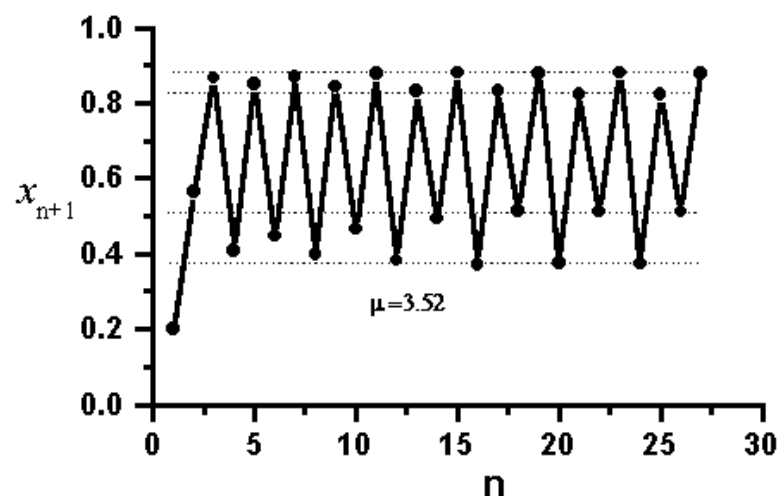
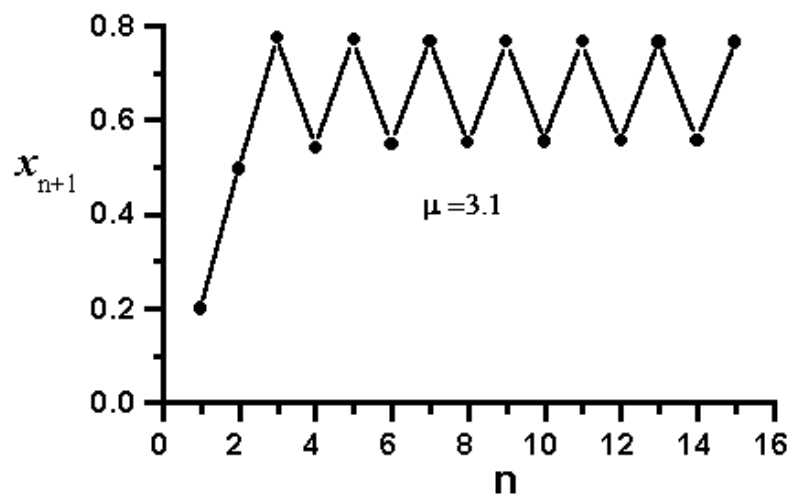
$$(x-0)\left[x-\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right]\{\mu^2 x^2 - (\mu^2 + \mu)x + (\mu + 1)\} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(\mu + 1) \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$



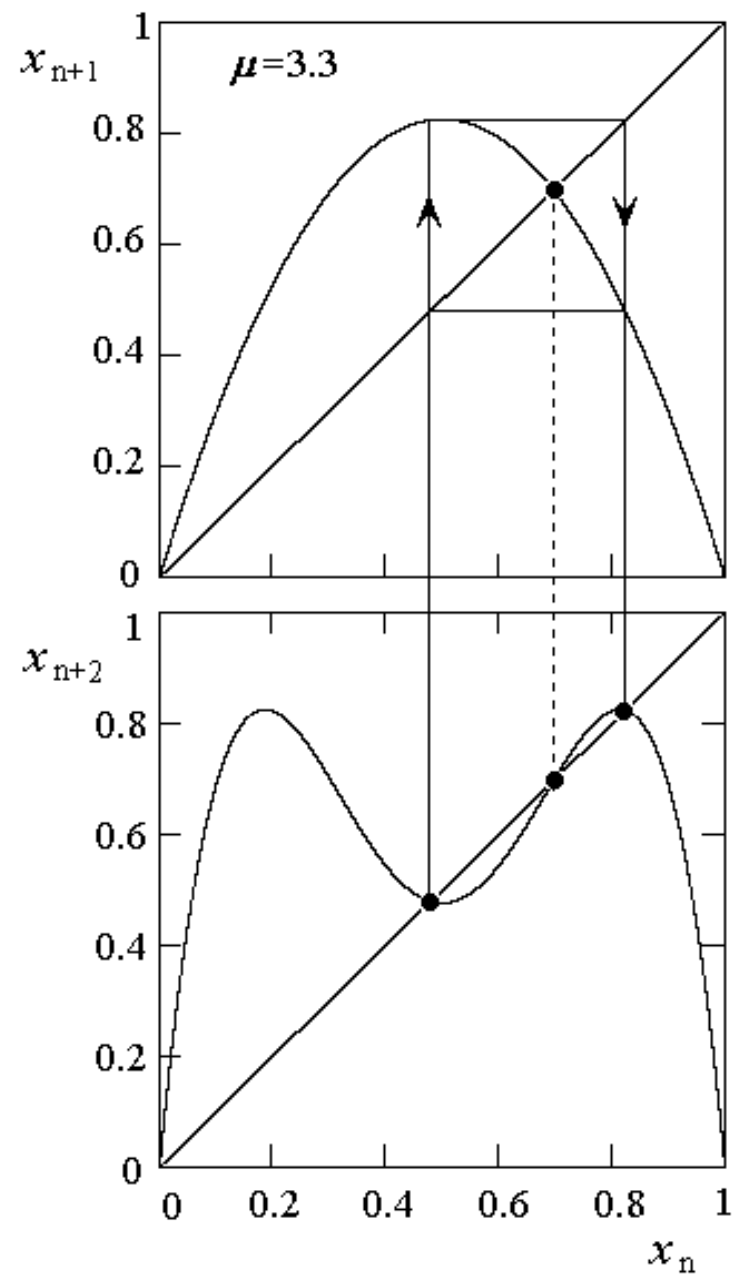
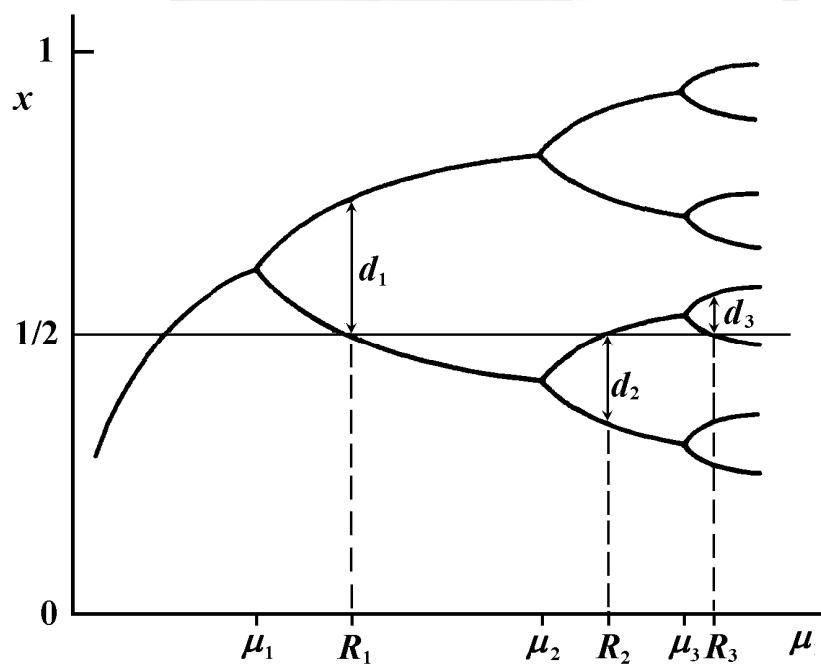
非线性物理：混沌物理

- 实根 $x_{1,2}$ 要求 $\mu > 3$ ，也就是说，只要满足此条件，周期2解一定存在。如 $\mu = 3.2$ ，有 $x_1 = 0.513$ ， $x_2 = 0.799$ 。
- 周期4、周期8、及至周期 2^n 的根可以依此类推求解出来，剔除掉低倍周期的全部根，剩余的实根数目就是 2^n ，对应于周期 2^n 解。
- 在 $\mu = 3.57$ 时， n 趋向无穷，即混沌解！



非线性物理：混沌物理

- 倍周期的图形解：
- 再演示一下倍周期分叉过程。



驱动与耗散的竞争：

- 从物理本质上看，分岔是非线性系统驱动力和耗散力竞争达到临界状态而对应的演化行为转变。再以平方映射为例：

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

- 显然， μx_n 是驱动力， $-\mu x_n^2$ 是耗散力，两者之间竞争导致状态的丰富多样。在定常态附近判断两力相对大小依赖于：

$$\delta x_{n+1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} \delta x_n$$



- 如果：

$$|\lambda| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} < 1$$

- 驱动力小于耗散力，定常态稳定；反之则定常态失稳，驱动力大于耗散力，系统转变到另一状态。 $|\lambda|=1$ 是相持临界状态。
- 对定常态 $x^*=0$ ，有：

$$|\lambda| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = (\mu - 2\mu x) \Big|_{x=0} = \mu$$

- 一旦 $\mu > 1$ ，系统离开 $x^*=0$ 而选择其它状态。



- 对于另一个定常态 $x^*=1-1/\mu$, 有:

$$|\lambda| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=1-\frac{1}{\mu}} = |2 - \mu| < 1 \quad 1 < \mu < 3$$

- 一旦 $\mu > 1$, 系统离开 $x^*=0$ 而转向 $x^*=1-1/\mu$ 。很显然, $x^*=1-1/\mu$ 在 $\mu > 3$ 时也出现驱动力大于耗散力, 会转向其它定常态, 我们知道就是周期2的状态。
- 这一判据适合于高维体系:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = f(x^*, y^*) \\ y^* = g(x^*, y^*) \end{cases}$$



- 映射的变化写成：

$$\begin{cases} \delta x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} \delta x_n + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \delta y_n \\ \delta y_{n+1} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} \delta x_n + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \delta y_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}$$



- 依据标准线性代数，设 $\delta x_n = A\lambda^n$ ， $\delta y_n = B\lambda^n$ ，得到：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix}_{(x^*, y^*)} = 0$$



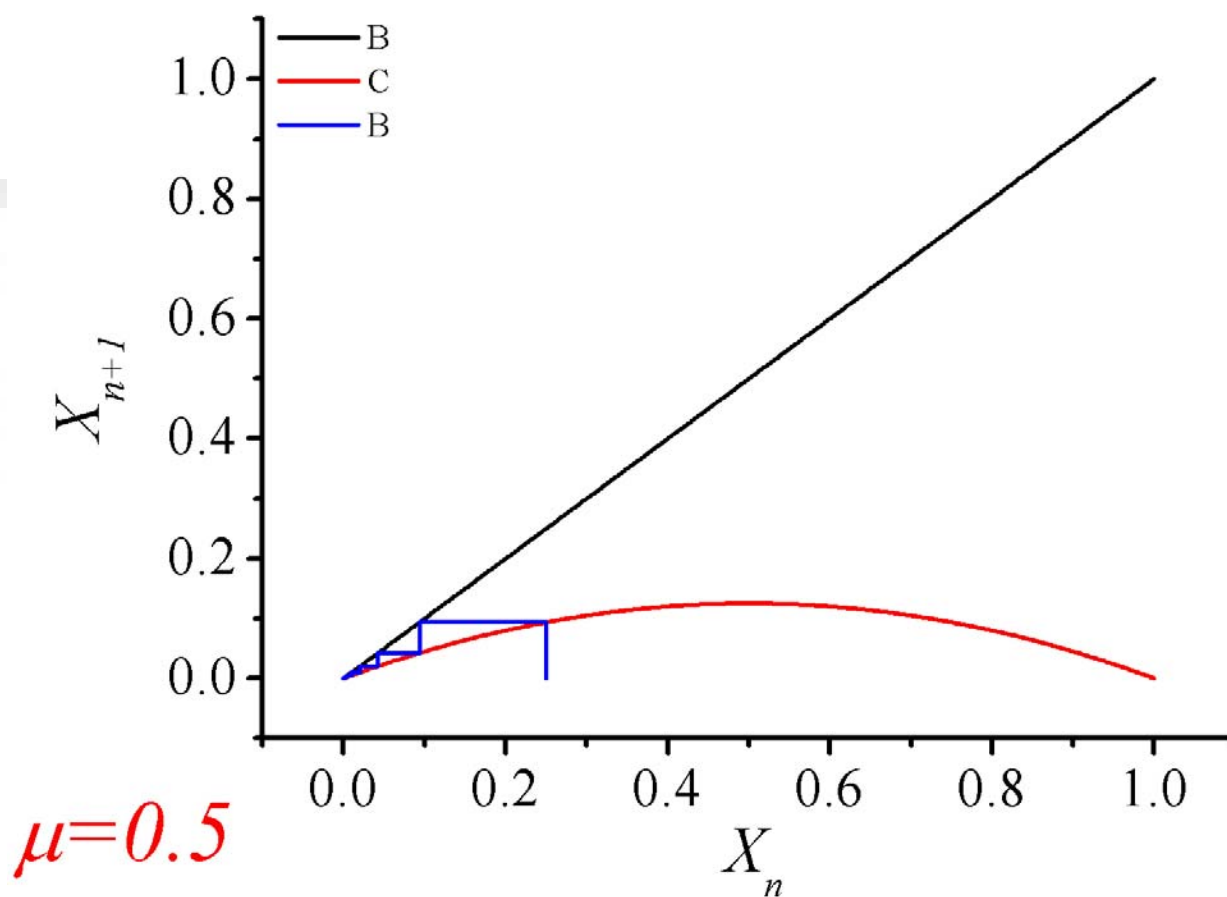
非线性物理：混沌物理

- 特征值 $|\lambda| < 1$ ，耗散力大于驱动力；反之驱动力大于耗散力。导致分叉。
- 注意到，上述处理只是针对每个定常态附近，不是广域的，因此演化特征也是局域的。
- 混沌要求局域失温，广域稳定。



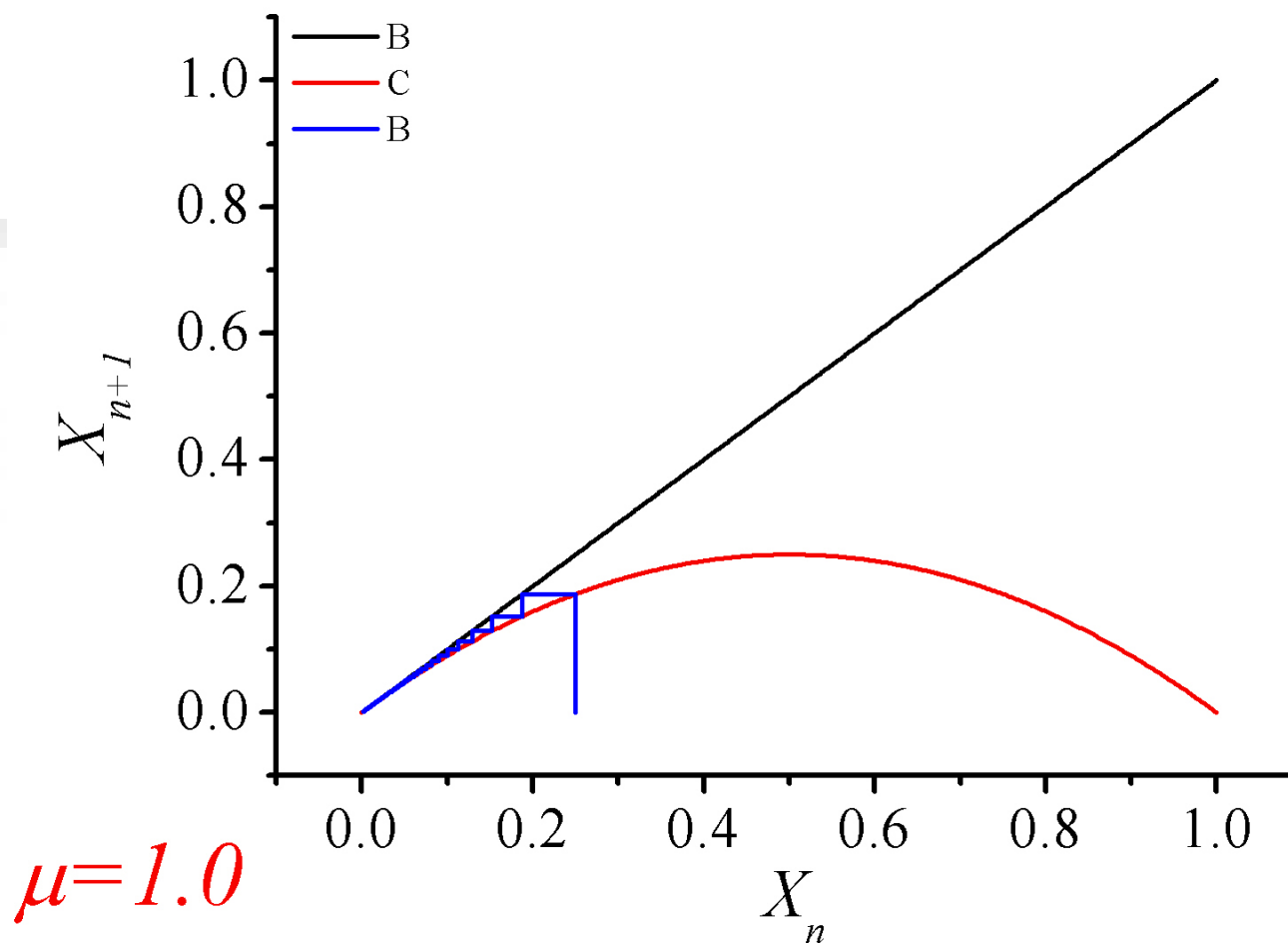
非线性物理：混沌物理

$$x_0=0.25, \mu=0.5: \quad x_f=0.0$$



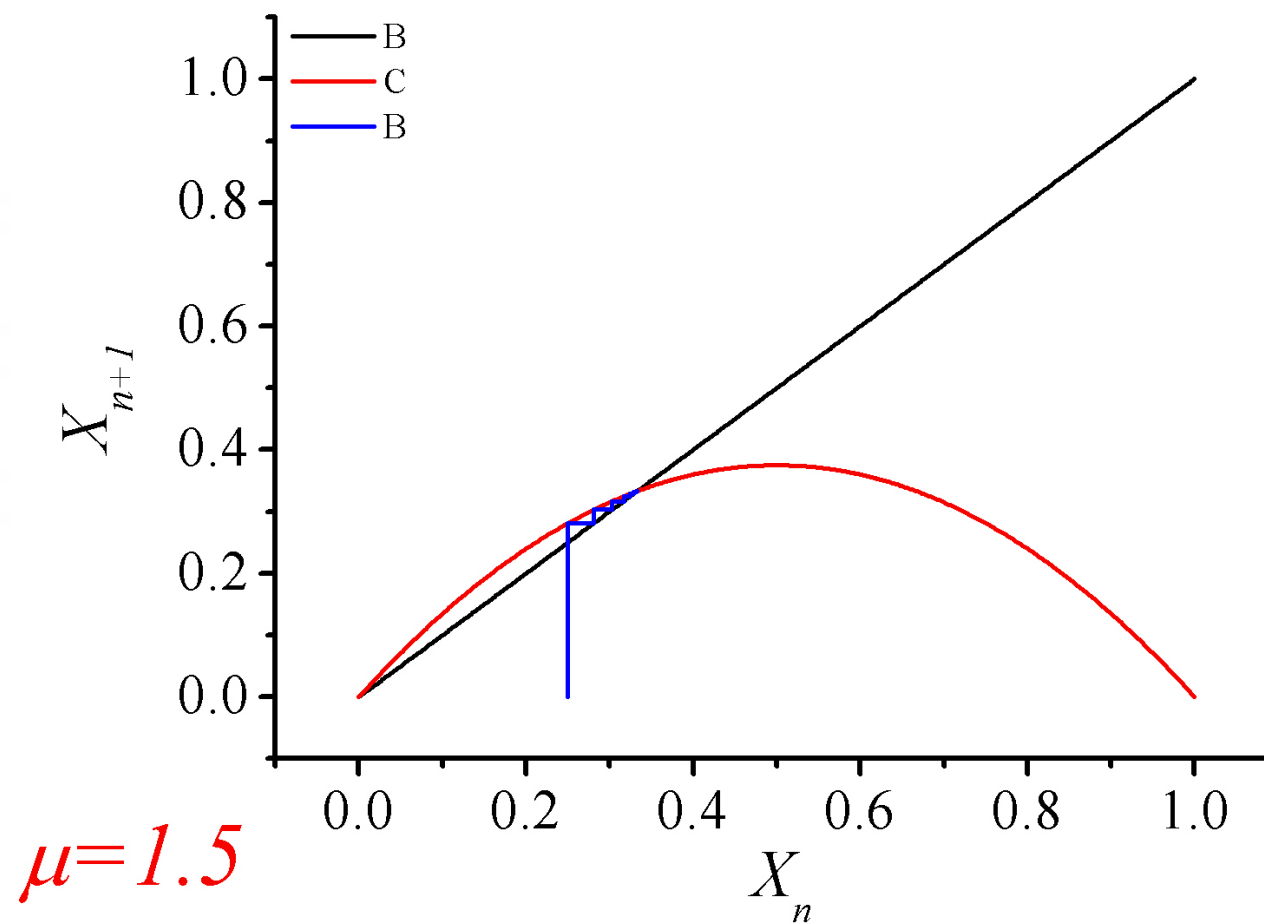
非线性物理：混沌物理

$$x_0=0.25, \mu=1.0: \quad x_f=0.0$$



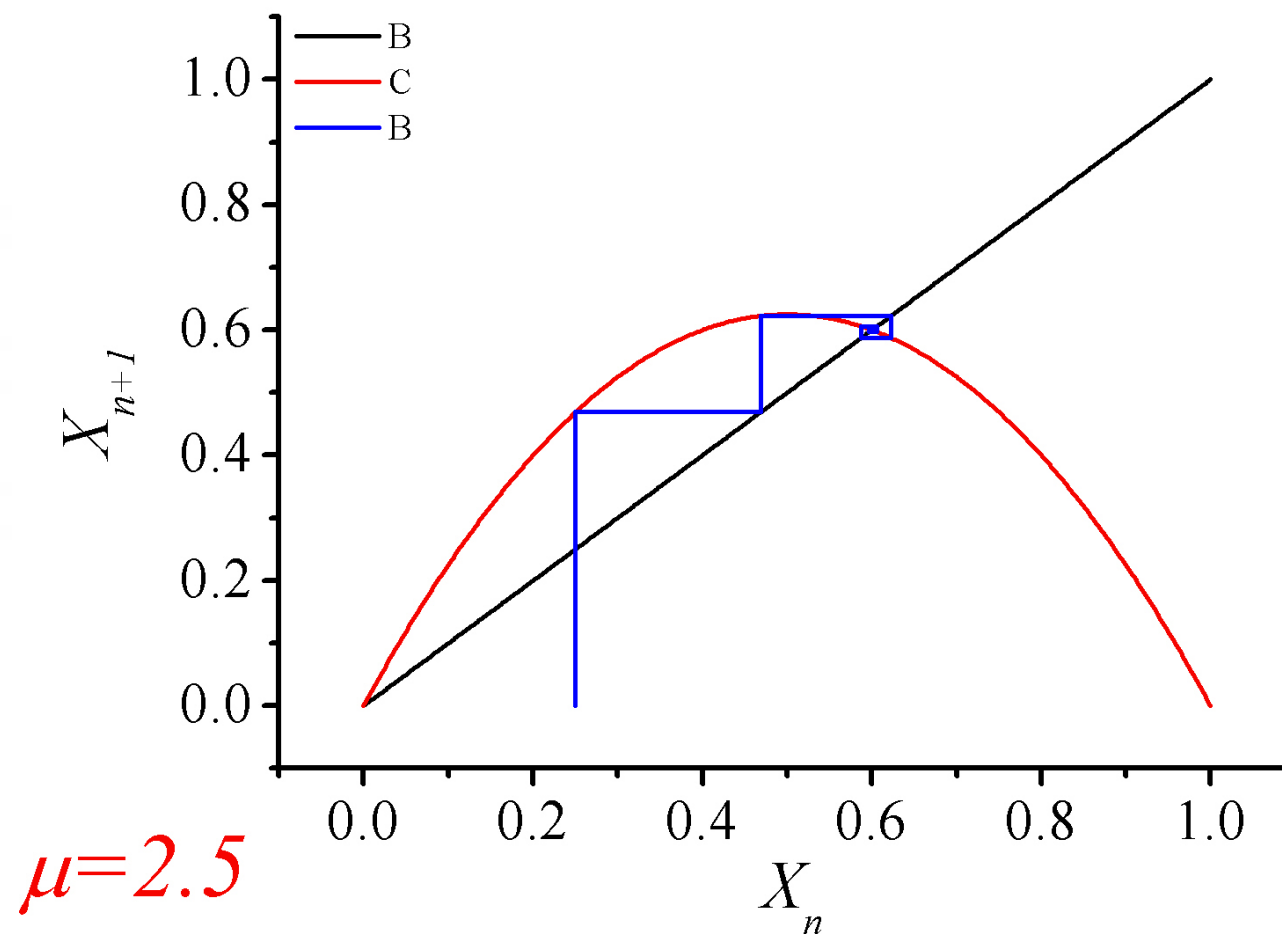
非线性物理：混沌物理

$$x_0=0.25, \mu=1.5: \quad x_f=0.3555$$



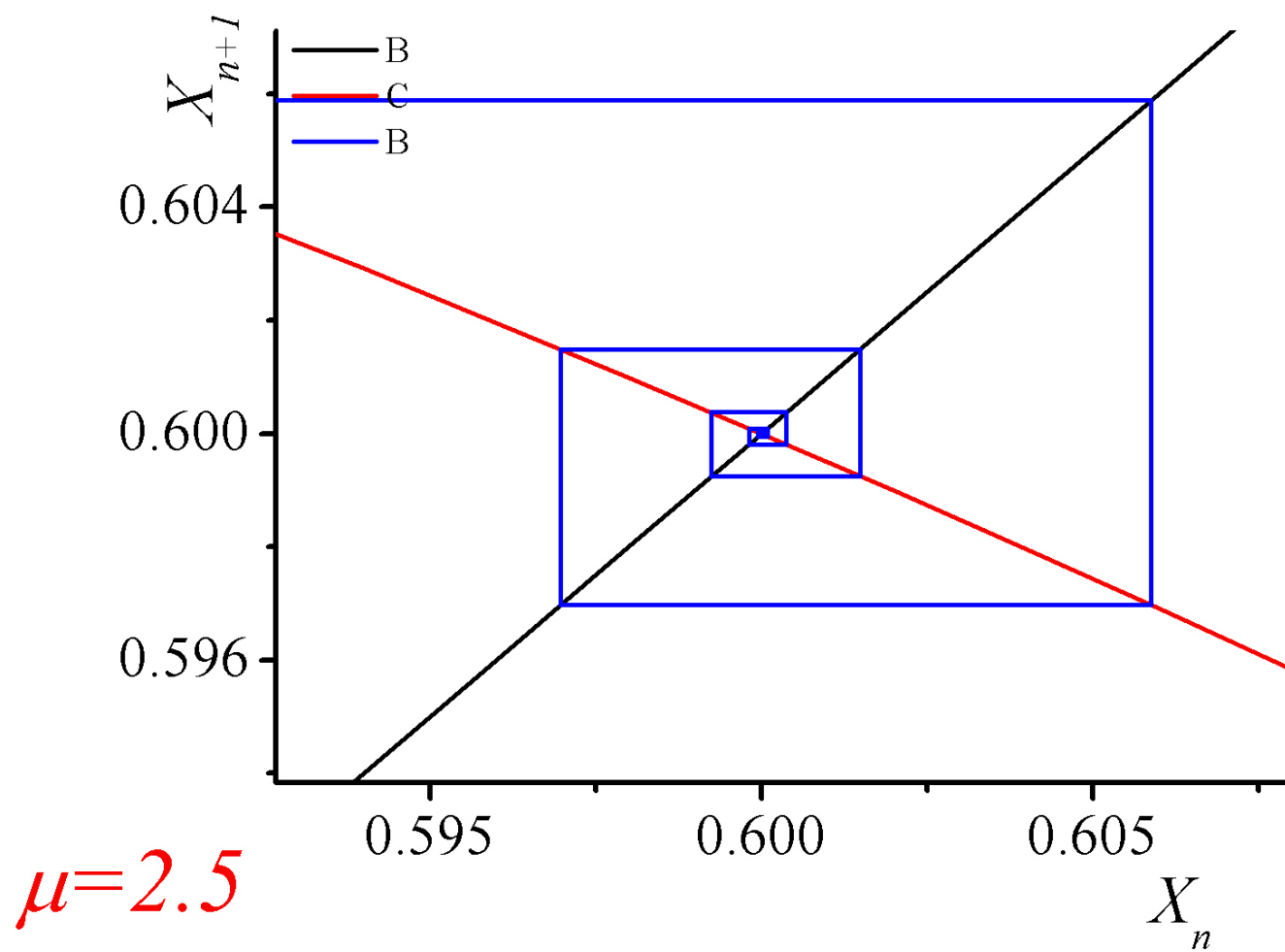
非线性物理：混沌物理

$$x_0=0.25, \mu=2.5: x_f=0.62963$$



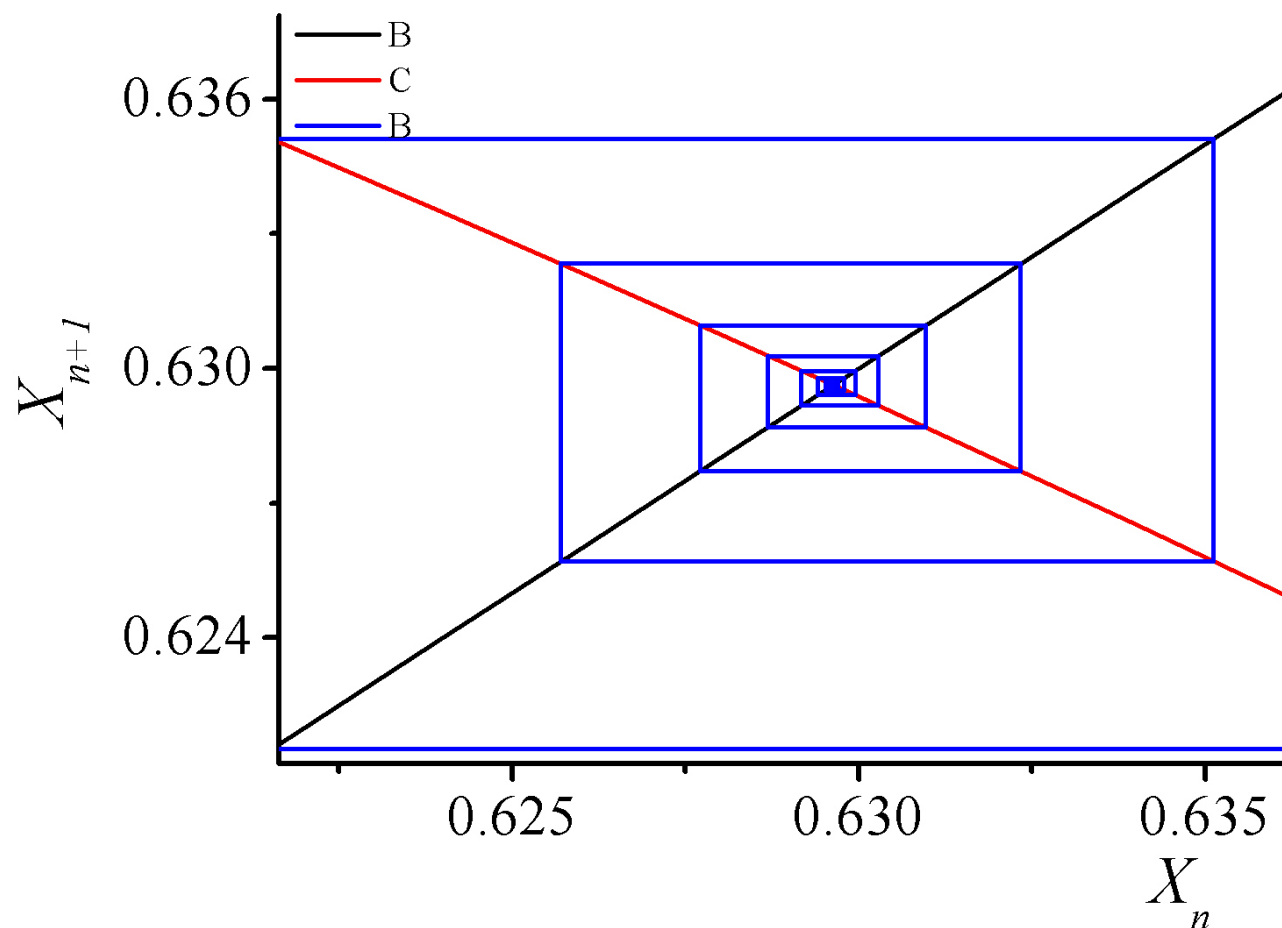
非线性物理：混沌物理

$$x_0=0.25, \mu=2.5: x_f=0.6$$



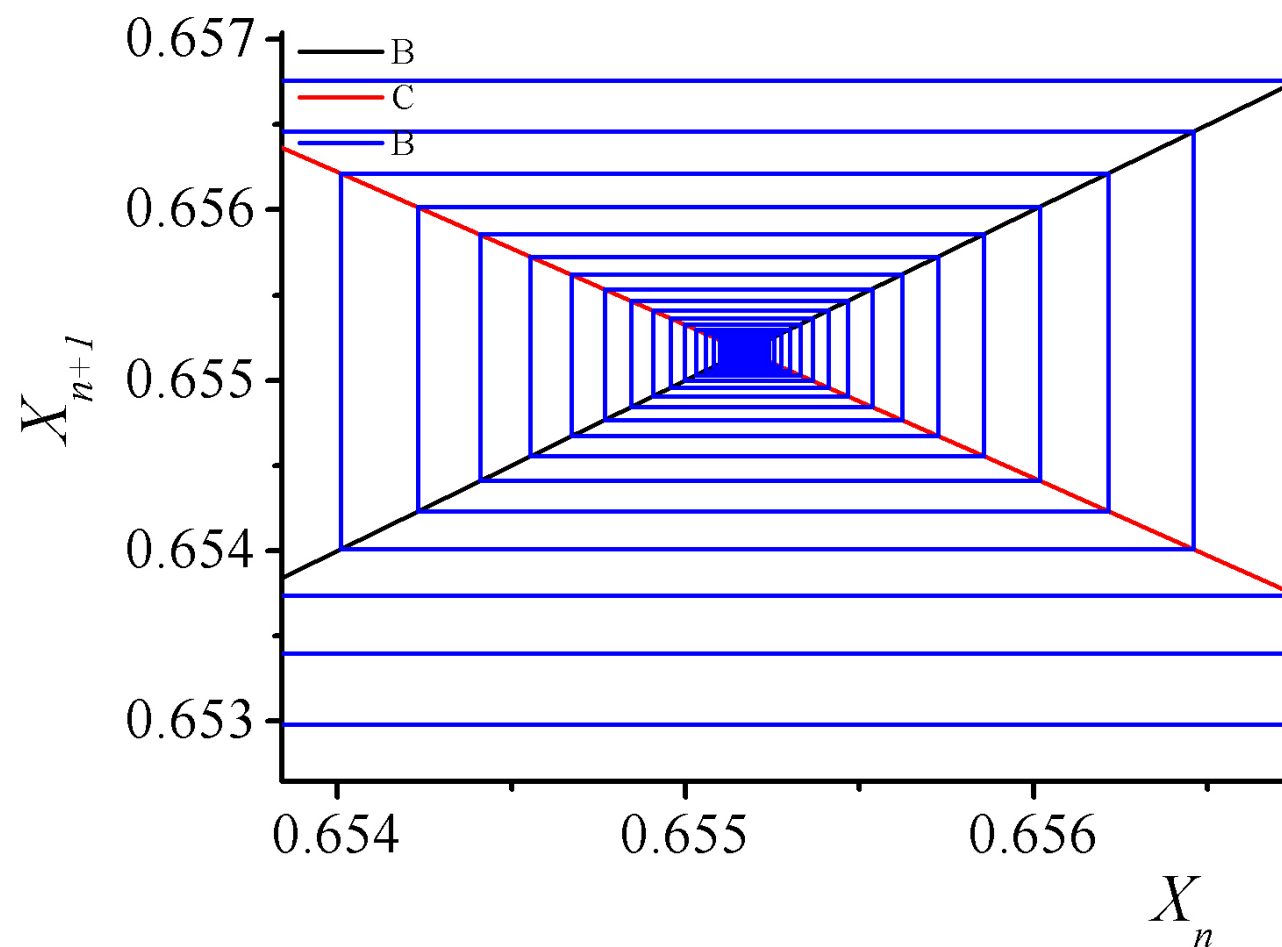
非线性物理：混沌物理

$$x_0=0.25, \mu=2.7: x_f=0.62963$$



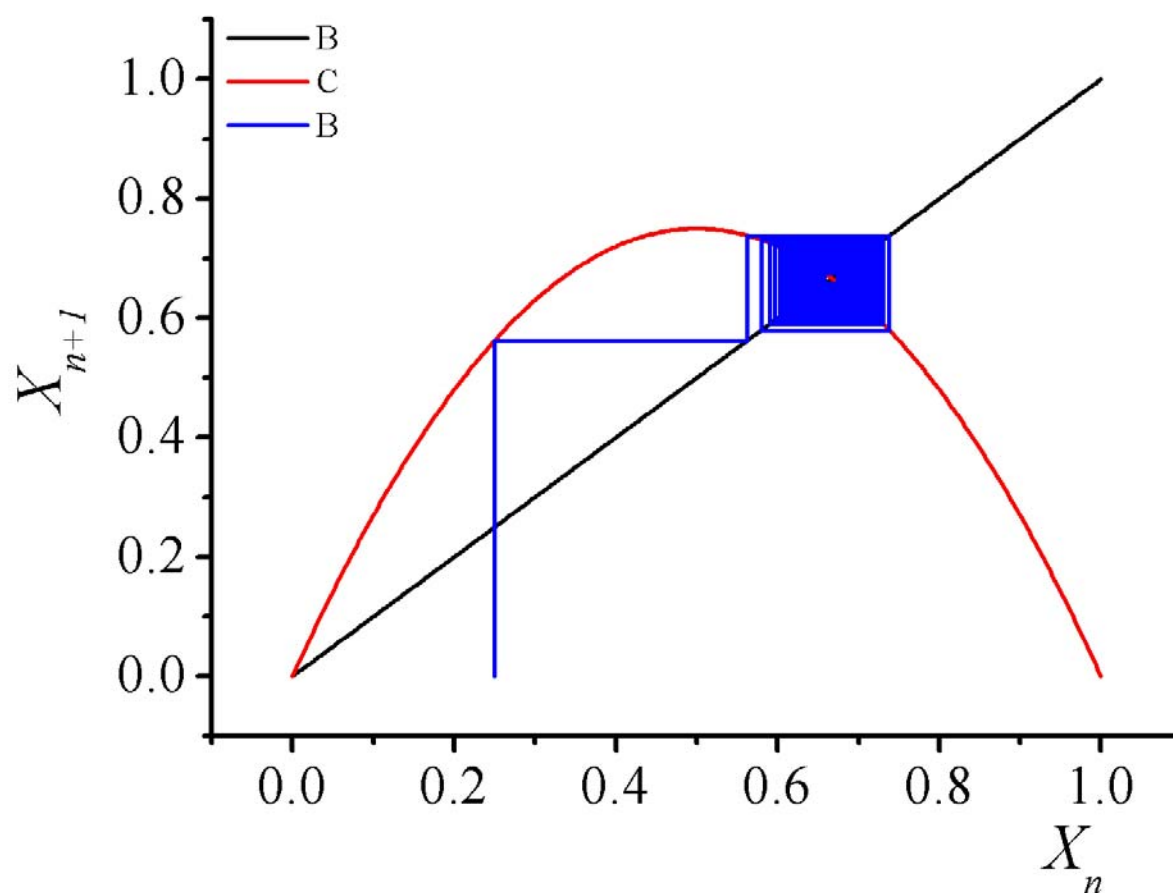
非线性物理：混沌物理

$$x_0=0.25, \mu=2.9: x_f=0.65517$$



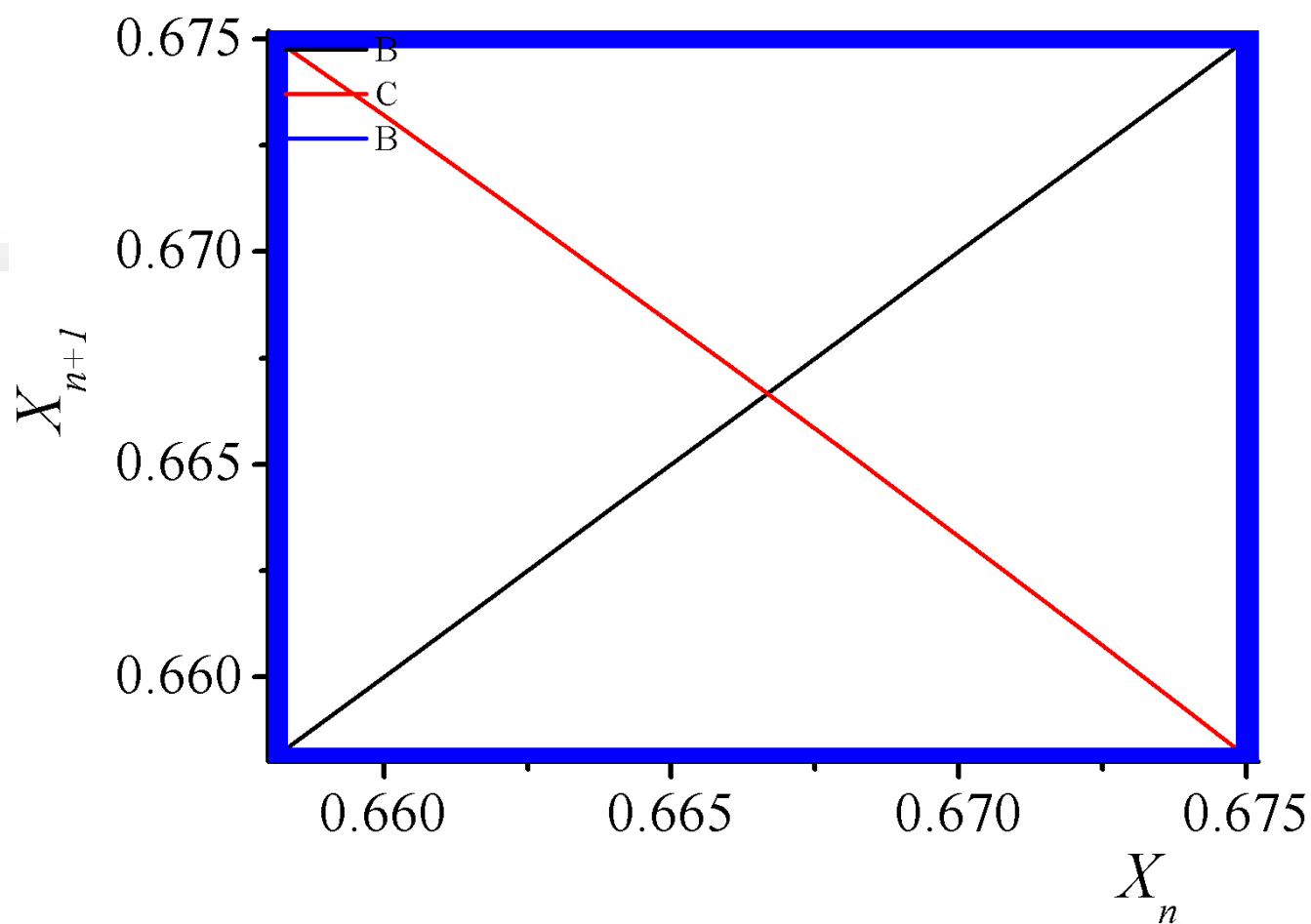
非线性物理：混沌物理

$x_0=0.25, \mu=3.0$: $x_f=0.6582902878, 0.6748325544$



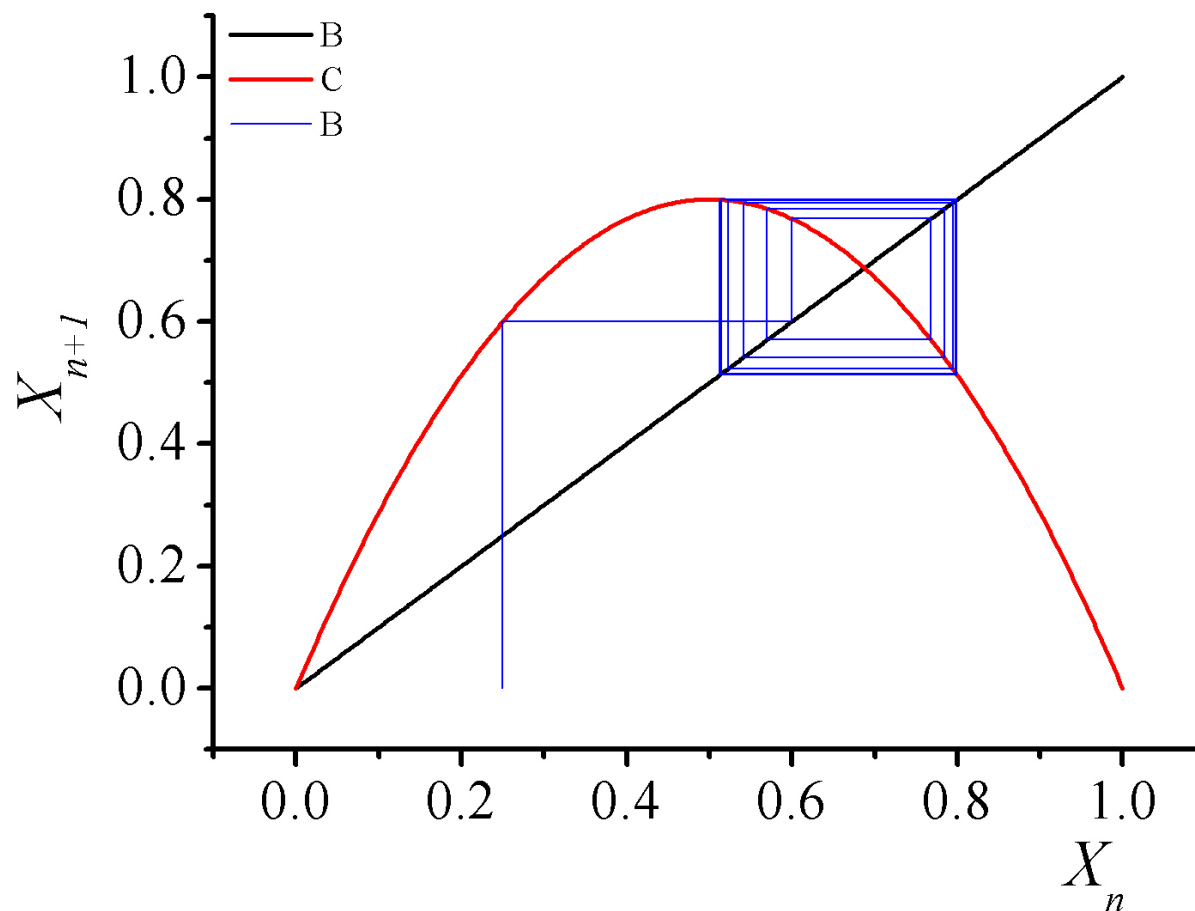
非线性物理：混沌物理

$x_0=0.25, \mu=3.0: x_f=0.6582902878, 0.6748325544$



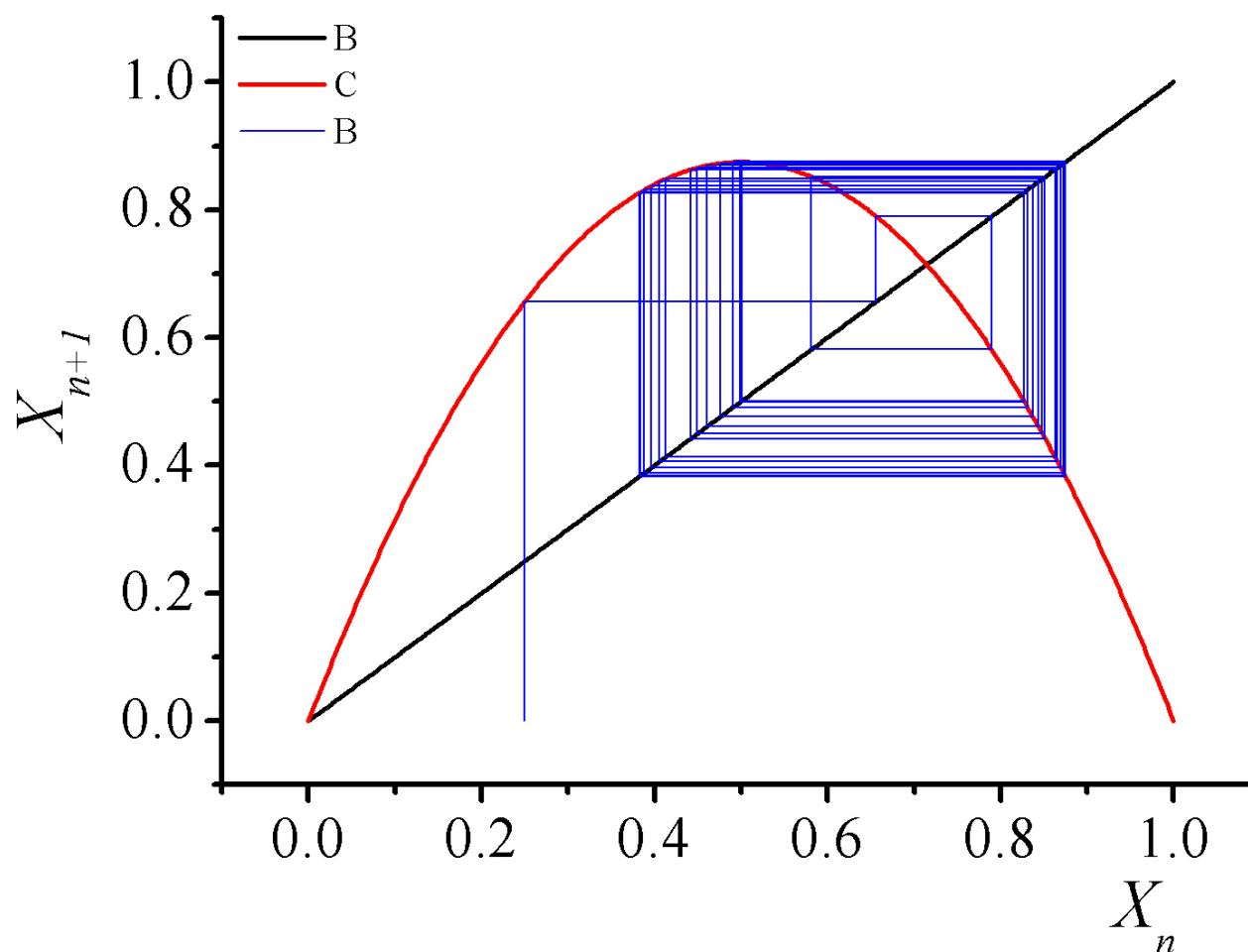
非线性物理：混沌物理

$x_0=0.25, \mu=3.2$: $x_f=0.5130445095, 0.7994554905$



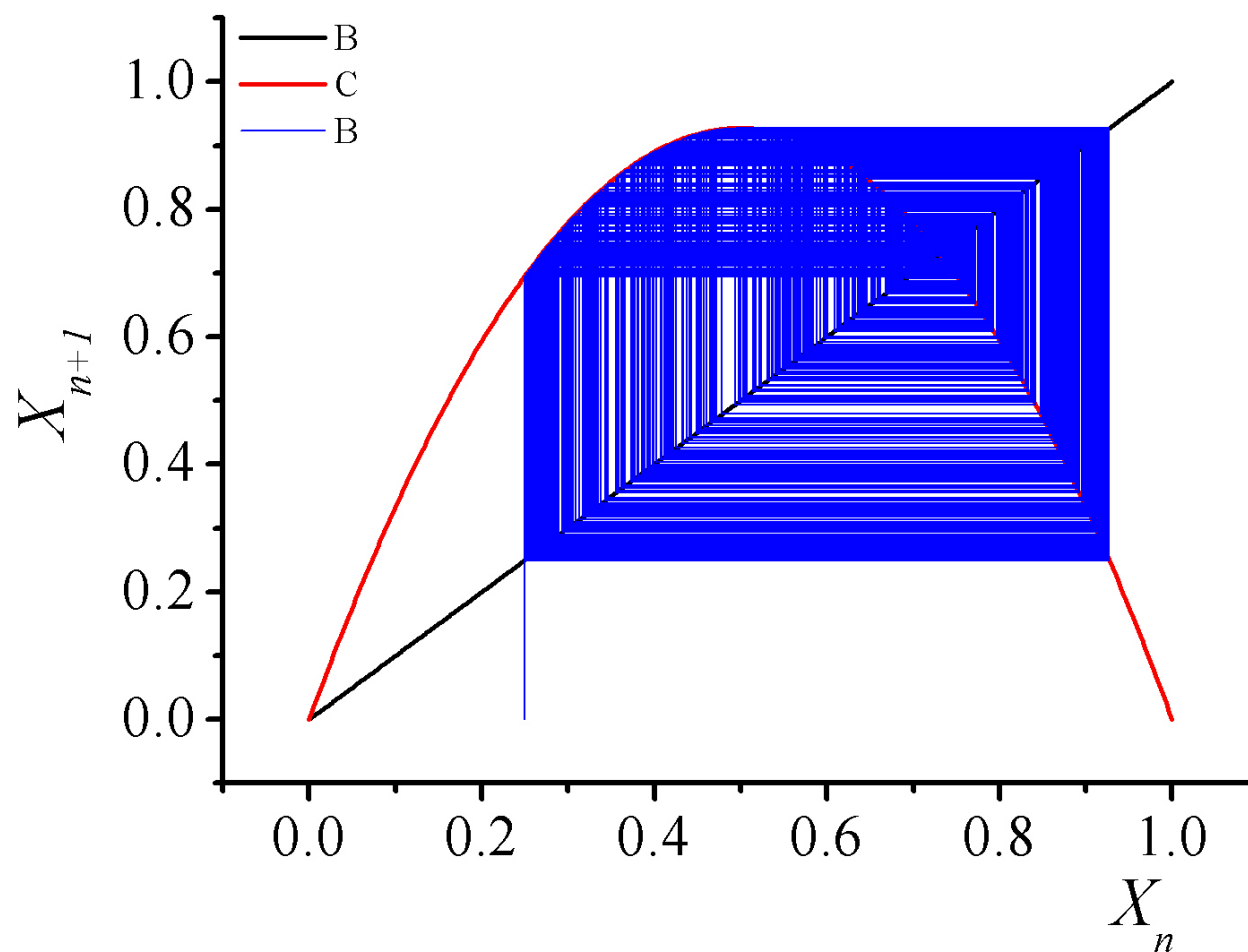
非线性物理：混沌物理

$x_0=0.25, \mu=3.5$: $x_f=0.382, 0.500, 0.826, 0.8749$



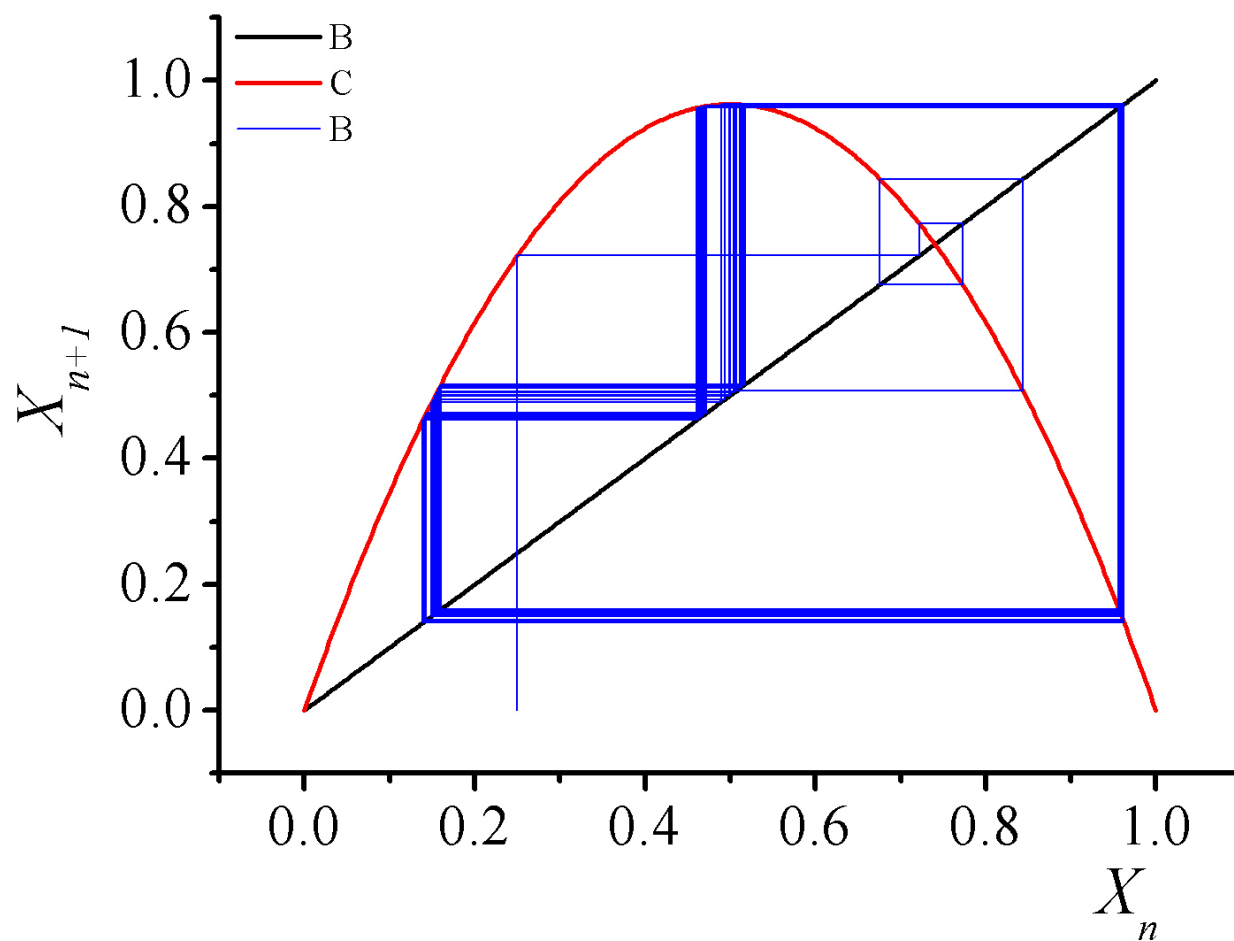
非线性物理：混沌物理

$x_0=0.25, \mu=3.75$: 所谓的 x_f =很多值



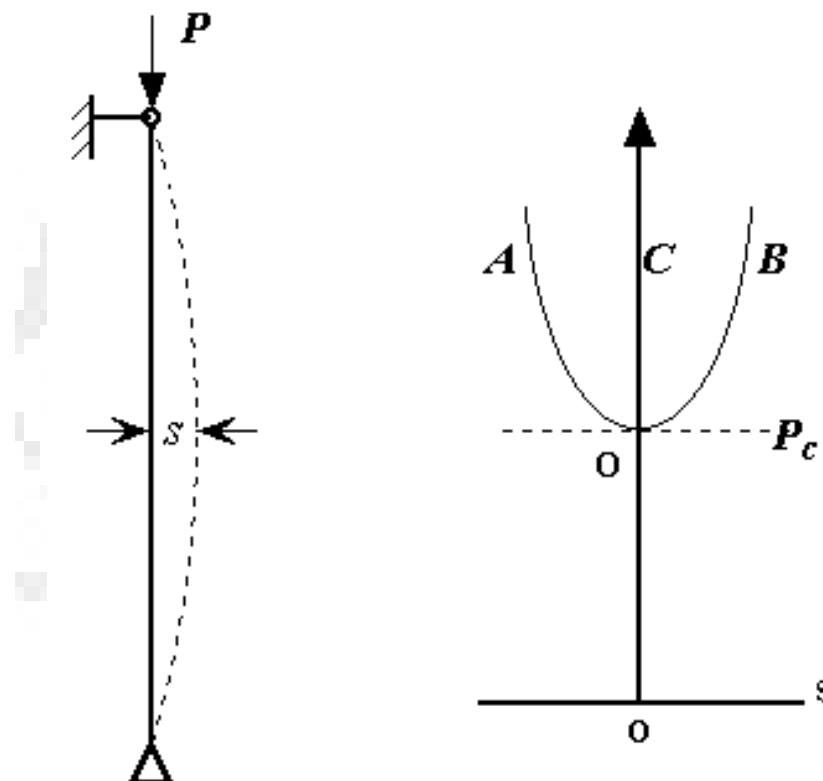
非线性物理：混沌物理

$x_0=0.25, \mu=3.85$: $x_f=0.1431, 0.4723, 0.9613$



分岔的概念：

- 分岔的本义是一种力学状态在临界点处发生的转变。
- 数学上，分岔就是研究非线性微分方程当某一参数变化时，其解发生突变的临界点附近的行为。
- 数学分岔在分析复杂的非线性动力学中具有重要意义。

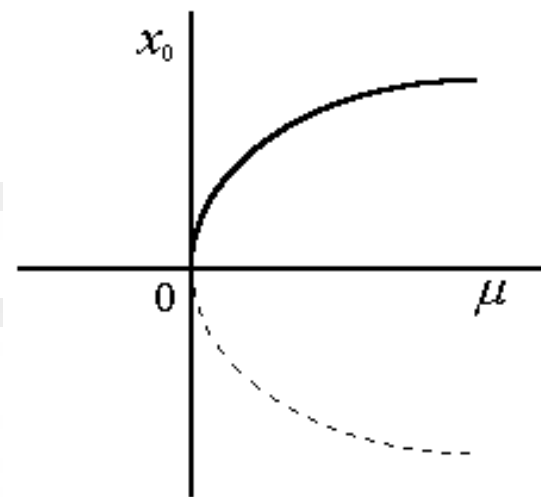


非线性物理：混沌物理

- 切分叉：
- 切分叉的最简单数学形式是

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu$$

- 其定常态是 $x_0 = \pm\mu^{1/2}$ ， $\mu < 0$ 时不存在定常态， $\mu > 0$ 时有两个定常态，但是其稳定性不同。



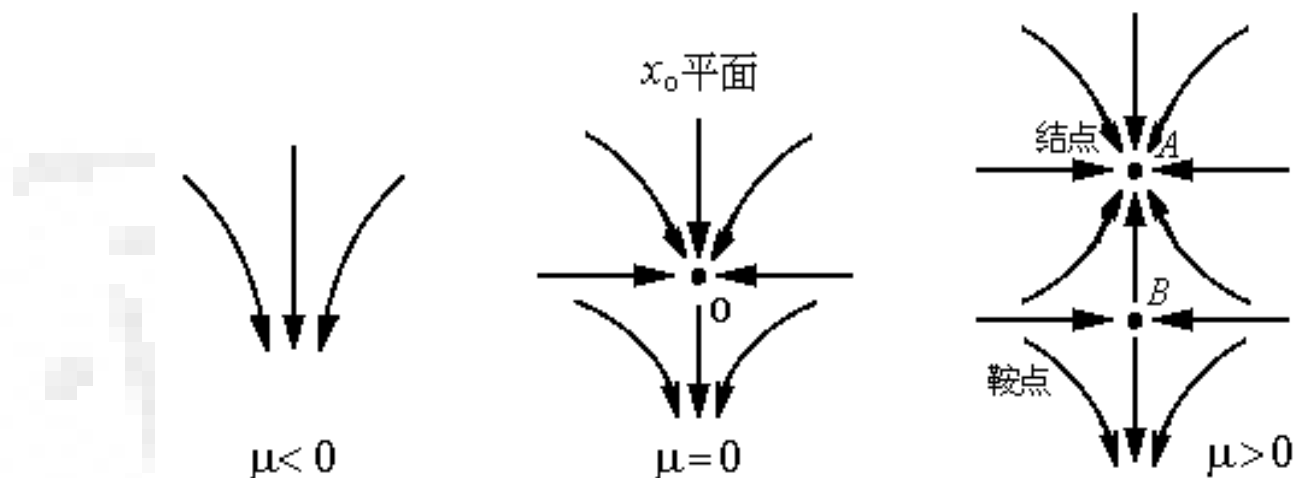
- 看看 $\mu > 0$ 时两个定常态的稳定性。 $\xi = x - x_0$ 为小量，则得到：

$$\frac{d\xi}{dt} = -(\xi + x_0)^2 + \mu \quad \frac{d\xi}{dt} = -2\xi x_0 \quad \xi(t) = \xi_0 \exp(-2x_0 t)$$



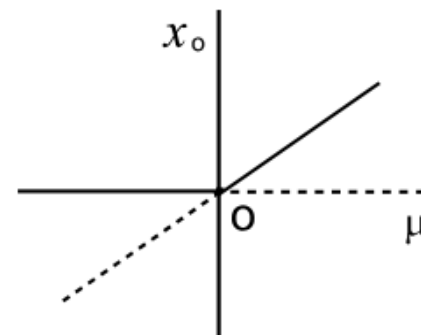
非线性物理：混沌物理

- $x_0 = \mu^{1/2}$ 是定常态是稳定的结点，而 $x_0 = -\mu^{1/2}$ 是不稳定的鞍点。
- 这种切分叉对应的相空间稳定性图是

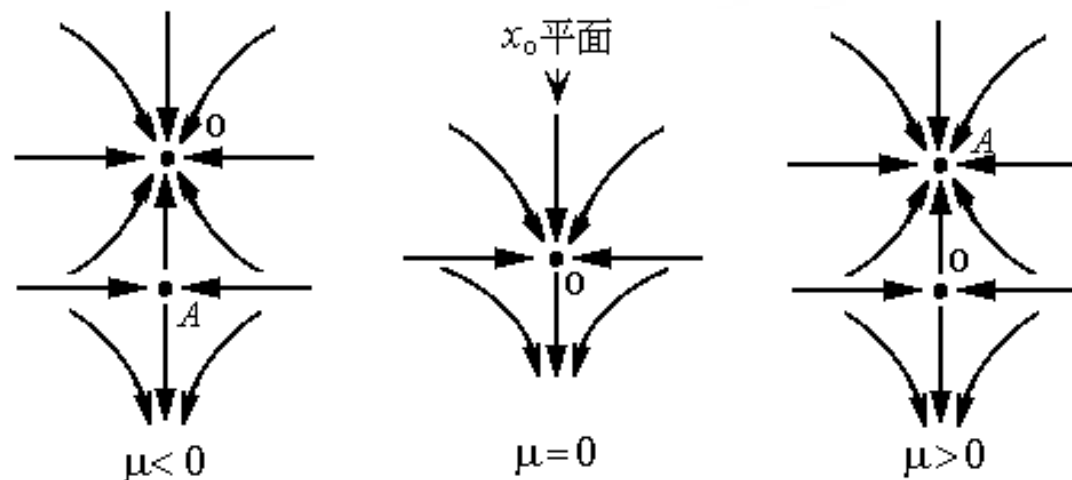


- 转换键分叉:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x \pm x^2 \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm \mu \end{cases}$$



- $x_0 = \pm\mu$ 和 $x_0 = 0$ 是定常态，在上式右边取负值时的稳定性图如下所示：稳定的结点和不稳定的鞍点。

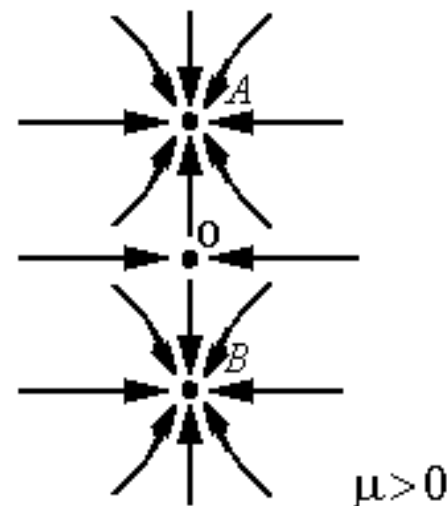
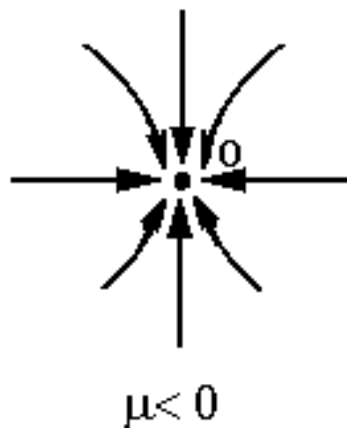
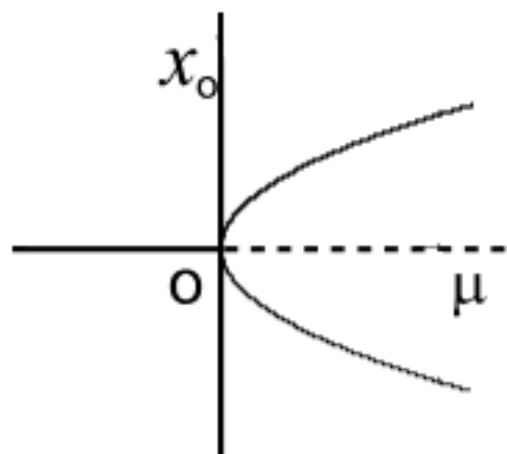


- 叉式分叉：

$$\frac{dx}{dt} = -\mu x + x^3 \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{\mu} \end{cases}$$

非线性物理：混沌物理

- 当 $\mu < 0$ 时，一个定常态 $x_0 = 0$ ，稳定结点。当 $\mu > 0$ 时，有三个定常态， $x_0 = 0$ 是不稳定的， $x = \pm\mu^{1/2}$ 是稳定的。



- Hopf分叉:**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \frac{dy}{dt} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases}$$

- 经过极坐标变换，方程可以写成：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cos \varphi - \dot{\varphi} \cdot \rho \sin \varphi \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cdot \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \rho = \rho(\mu - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

- 积分后得到方程的解：

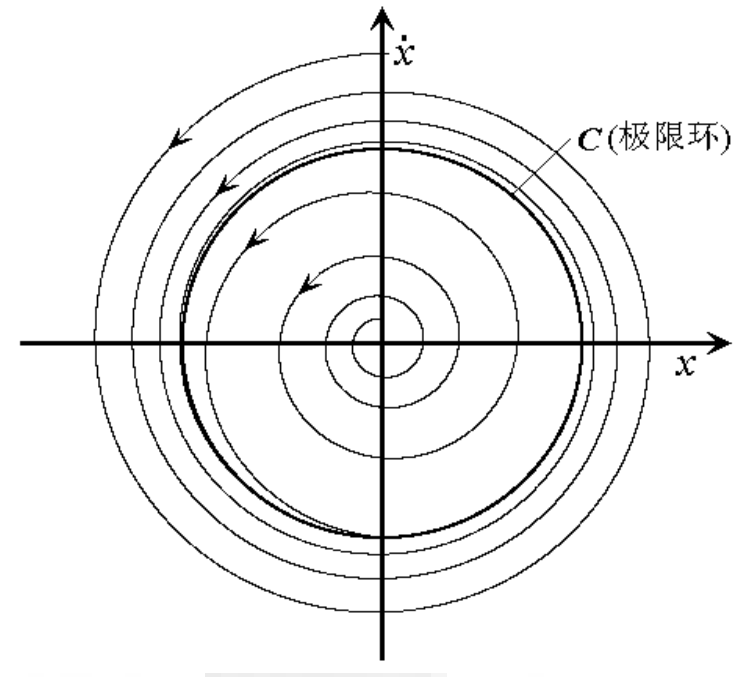
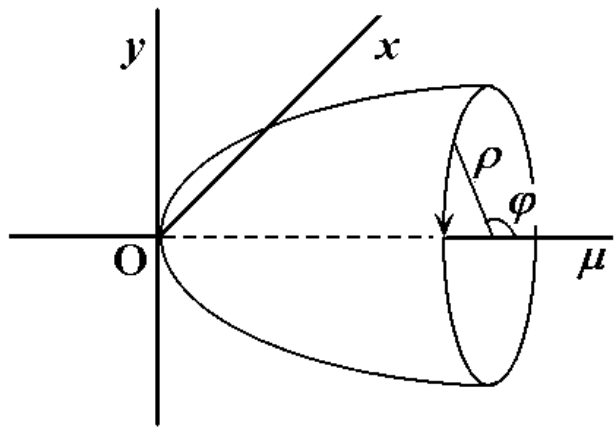
$$\rho = \sqrt{(2t + C)^{-1}} \quad \mu \leq 0 \qquad \rho = \sqrt{\mu(1 + Ce^{-2\mu t})^{-1}} \quad \mu > 0$$

$$\varphi = t - t_0$$

- 当 $\mu < 0$ 时，相空间各点都趋向于 $(x, y) = (0, 0)$ ；当 $\mu > 0$ ，相空间各点都趋向于 $\rho = \mu^{1/2}$ ，形成极限环，称为C极限环。即Hopf分叉。

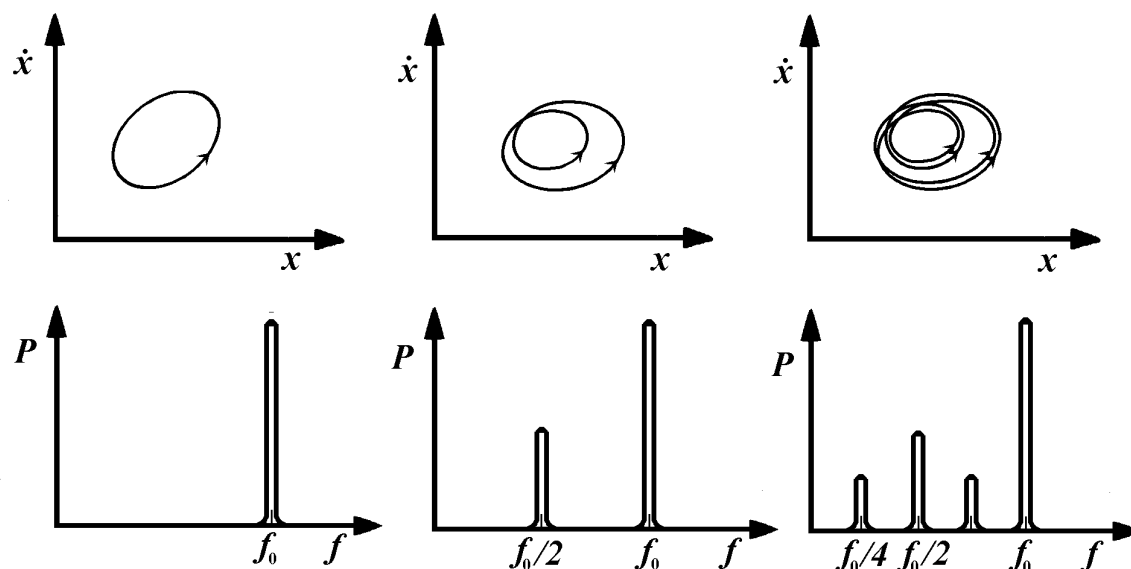


非线性物理：混沌物理



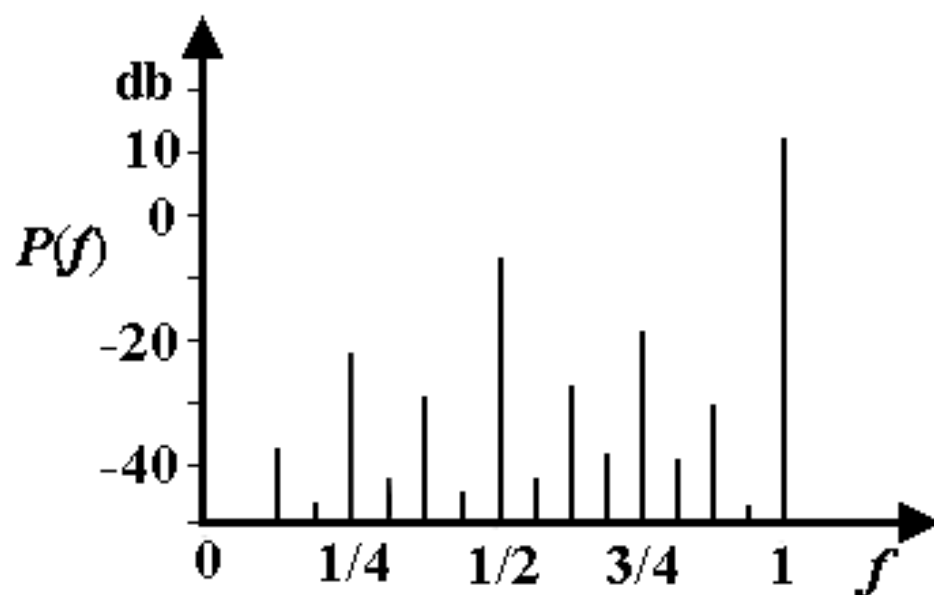
倍周期分岔的功率谱：

- 为表示非线性系统运动状态，除时域和相图表示外，频域表示也是常用方法。随着参数值增加，平方映射出现了轨道周期成倍加长的倍周期分岔现象。频谱表示每一次分岔在频谱图中出现一批对应的新的频率分量。



非线性物理：混沌物理

- 对平方映射 $1P$ 不动点，功率谱中只有基频 f ，以及可能出现的倍频峰： $2f$ ， $3f$ ，...；当 $1P \rightarrow 2P$ 分岔后，会出现 $1/2f$ 分频，以及可能出现 $1/2f$ 分频的倍频峰： $3/2$ ， $5/2$ ，...；而在 $2P \rightarrow 4P$ 的分岔中，应出现的是 $1/4f$ 和 $3/4f$ 的分频以及它们的谐波。下图是平方映射在 $4P \rightarrow 8P$ 分岔后的各分频峰的功率谱。



- 随着 μ 逼近混沌临界值 μ_c ，功率谱从分立谱过渡到不可分的连续谱。因此从功率谱角度来看，如考虑到可能存在的噪声，混沌运动的特征是具有噪声背景的宽谱带。
- 为了在实验上获得功率谱，通常对轨道上的点作大量取样，然后作快速傅立叶分析。设我们按等时间间隔 τ 得到时间序列：

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$$

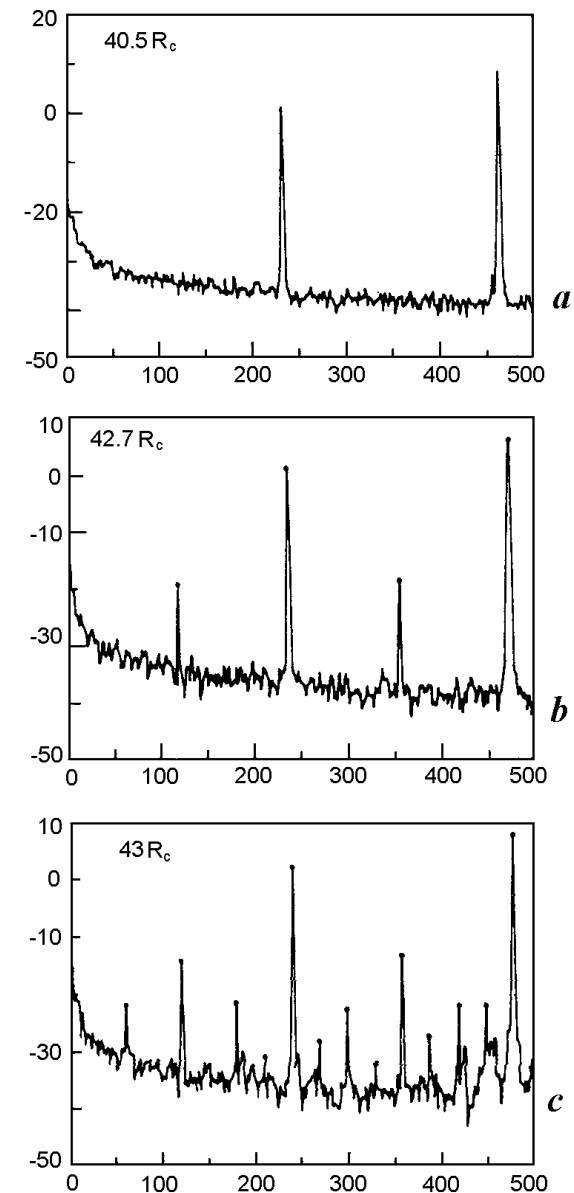
$$x_{N+j} = x_j$$

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x_{i+j}$$

$$p_k = \sum_{j=1}^N c_j \exp\left(\frac{2\pi k j \sqrt{-1}}{N}\right)$$

非线性物理：混沌物理

- 右图为Libchaber研究组对于液氮的Rayleigh-Bernard对流实验的分叉功率谱， R_c 为雷诺数。
- 十分漂亮的结果。



李雅普洛夫指数：

- 非线性系统能量耗散导致状态最后演化到定常态而不再与时间相关，这种定常态称为正常吸引子。
- 奇怪吸引子是相对于正常吸引子而言的，它们的特点之一是终态值与初始值密切相关，或者说对初始值具有极端敏感性。
- 初始取值的细微差别可能会导致完全不同的结果，这时的吸引子毫无周期可言，转变成所谓的奇怪吸引子。
- 稍微从数学上分析一下这一问题。



非线性物理：混沌物理

- 考虑一非线性系统的两个不同初值演化：

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ y_{n+1} = f(y_n) \end{cases}$$

- 其初始值有微小差别 $|x_0 - y_0|$ ，经过一次迭代有：

$$|x_1 - y_1| = |f(x_0) - f(y_0)| = \frac{|f(x_0) - f(y_0)|}{|x_0 - y_0|} |x_0 - y_0| \approx \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} |x_0 - y_0|$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow y_0} \frac{|f(x_0) - f(y_0)|}{|x_0 - y_0|}$$

- 经过n次迭代有：

$$|x_n - y_n| \approx \left| \prod_{n=0}^{n-1} \frac{df(x_n, \mu)}{dx} \right|_{x_n} |x_0 - y_0|$$



- 我们对于多重导数相乘定义一个几何均值和指数：李雅普洛夫指数来表征其大小和符号：

$$\left(\prod_{n=0}^{n-1} \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_n} \right)^{1/n} \quad \lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{n=0}^{n-1} \left| \frac{df(x_n, \mu)}{dx} \right|_{x_n} \right)$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_n, \mu)}{dx} \right|$$

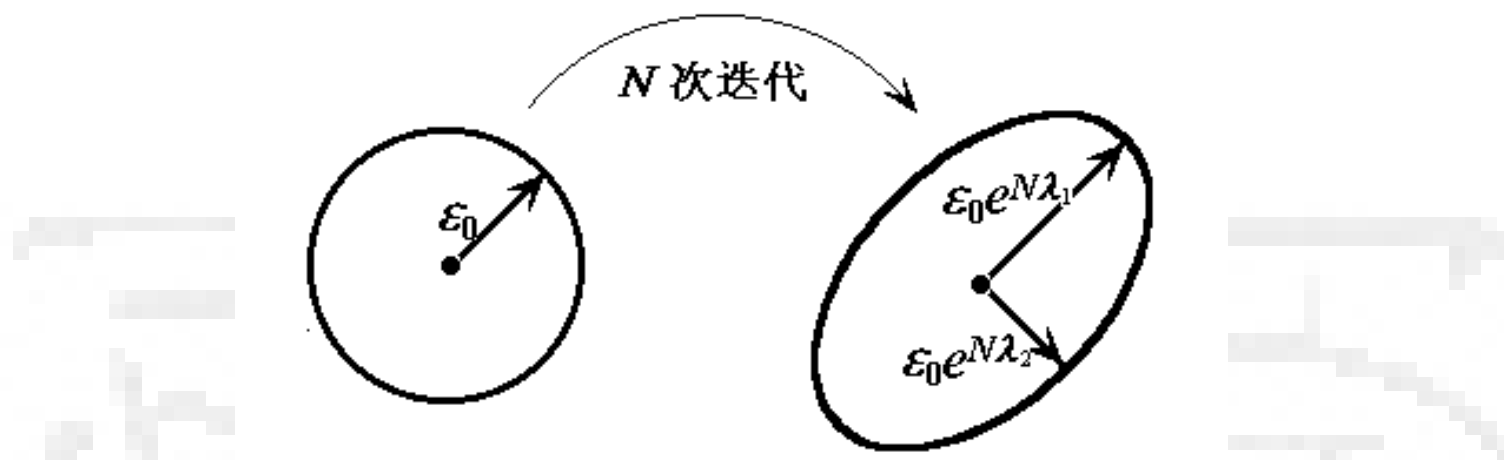
- 利用李雅普诺夫指数，相空间内初始时刻的两点距离 $|x_0 - y_0|$ 将随时间(迭代次数)作指数分离：

$$|x_n - y_n| \approx |x_0 - y_0| \cdot \exp(n \cdot \lambda)$$



非线性物理：混沌物理

- 对于多维迭代，则有多多个李雅普洛夫指数 λ_i ，沿不同方向标度体系的局域发散程度：



- 稳定体系的相轨线相应于趋向某个定常态，如果越来越远离定常态，则体系是不稳定的。正的 λ_i 正是描述了这种不稳定性。研究表明一个系统只要有一个正的 λ_i 就可出现混沌运动，从而出现奇异吸引子。

- 对于三维系统，两个轨迹的初始点差别为 $\delta x(0)$, $\delta y(0)$, $\delta z(0)$ ，则 t 时刻有：
- $\delta x(t) = \delta x(0) \exp(\lambda_1 t)$ $\delta y(t) = \delta y(0) \exp(\lambda_2 t)$ $\delta z(t) = \delta z(0) \exp(\lambda_3 t)$
- $\delta v(t) = \delta v(0) \exp[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) t]$
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = t^{-1} \ln[\delta v(t) / \delta v(0)]$ 。
- 因为 $\text{div}(v) = V^{-1} dV/dt$ ，所以 $\ln[V(t)/V(0)] = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{div}(v)$ 。
- 可以看到长时间的李雅普洛夫指数和与定常态局域涨落的特征根和是相等的，但是其物理意义却不同。



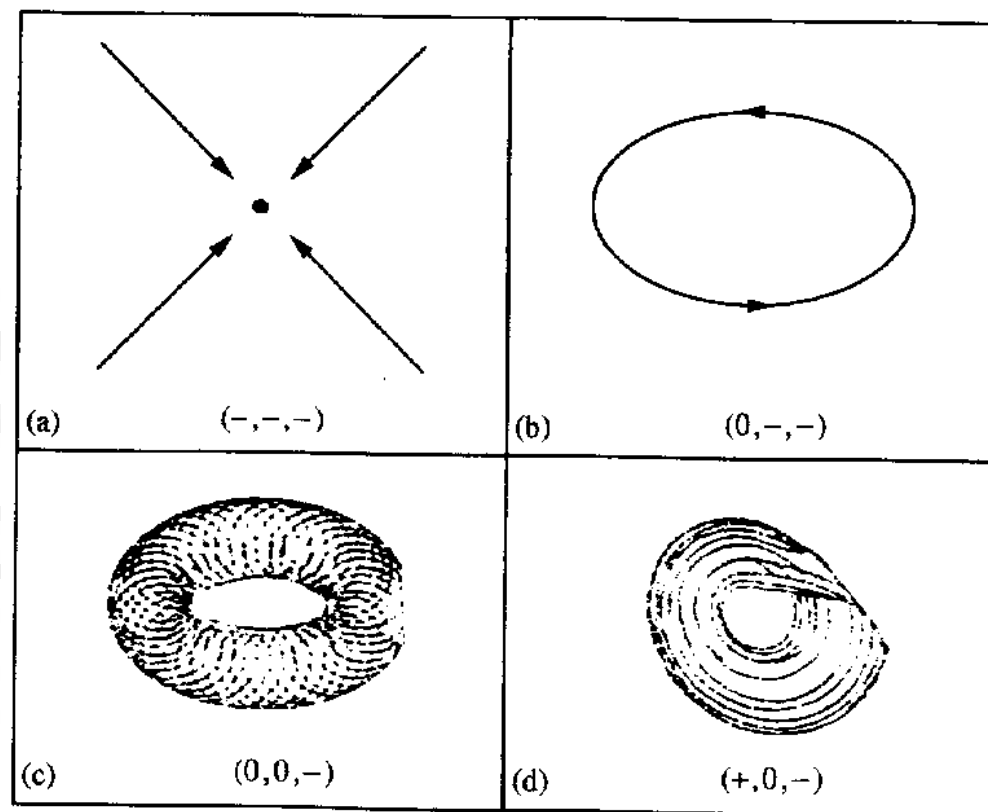
非线性物理：混沌物理

- 对耗散系统而言，定常态附近的特征根只是反映局域定常态的稳定性，可以为正可以为负，可以是实数也可以是虚数。
- 李雅普洛夫指数反映的是两个轨道长时间演化的平均关联特征，一般都是实数，表示整体上耗散使轨道收缩到一个有限区域。由此产生不同的吸引子种类：
 - (1)当 $\lambda_{1,2,3}$ 均为负值，相点收缩到一点，即不动点。
 - (2)当 $\lambda_{1,2,3}$ 有一个为零另外两个为负值，收缩在一个极限环。
 - (3)三个指数中两个为零一个为负值，相点收缩在一个二维的环面上，这是二维环面吸引子。



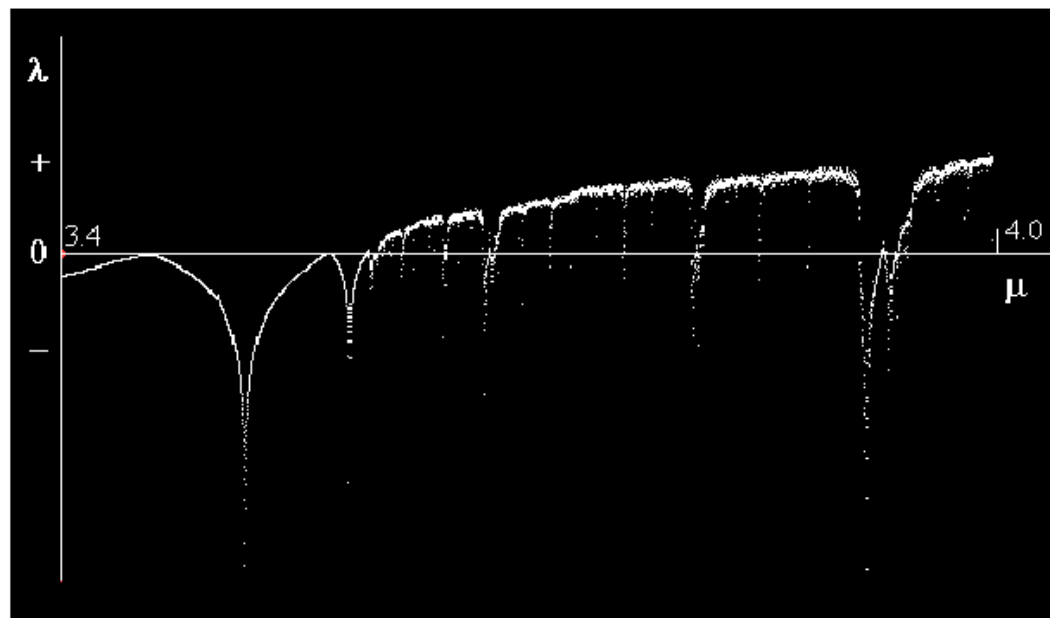
非线性物理：混沌物理

- (4)三个指数中有一个为正值，另外对于三维相流要求相应于相流方向的指数为零，于是最后那个指数必定为负，而且 $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) < 0$ 必须满足，这是系统出现奇异吸引子的情形。
- 不可以出现两个以上指数为正的情况，这时就没有局域吸引子，系统很快发散。



非线性物理：混沌物理

- 几个例子
- 一维平方映射的情况：



- 二维Henon映射的情况：

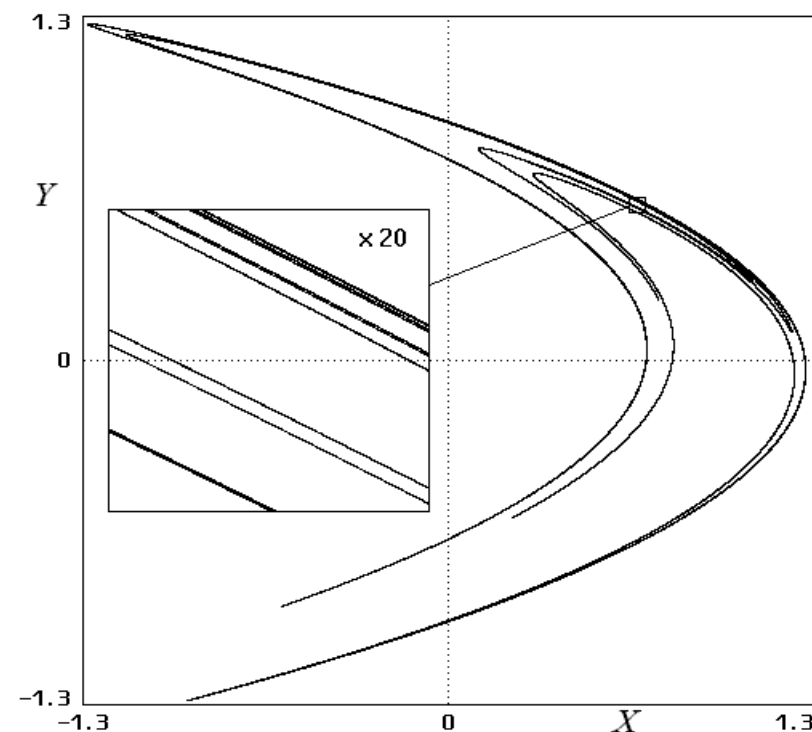
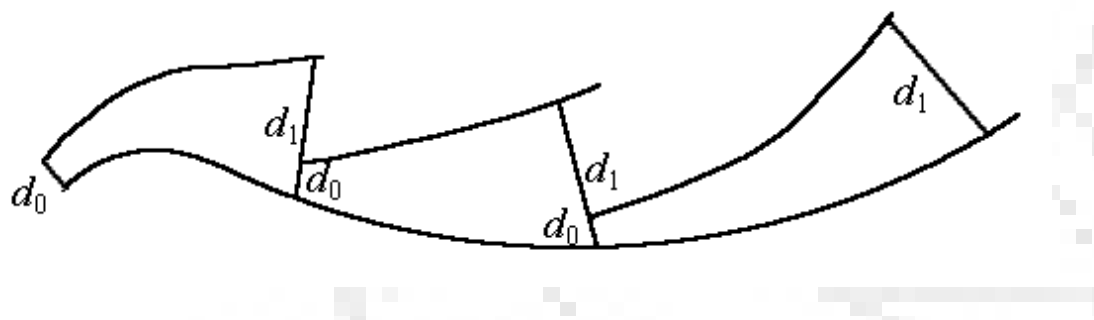
$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases}$$

- $b=1$ 时是保守系统， $b<1$ 时是耗散系统。



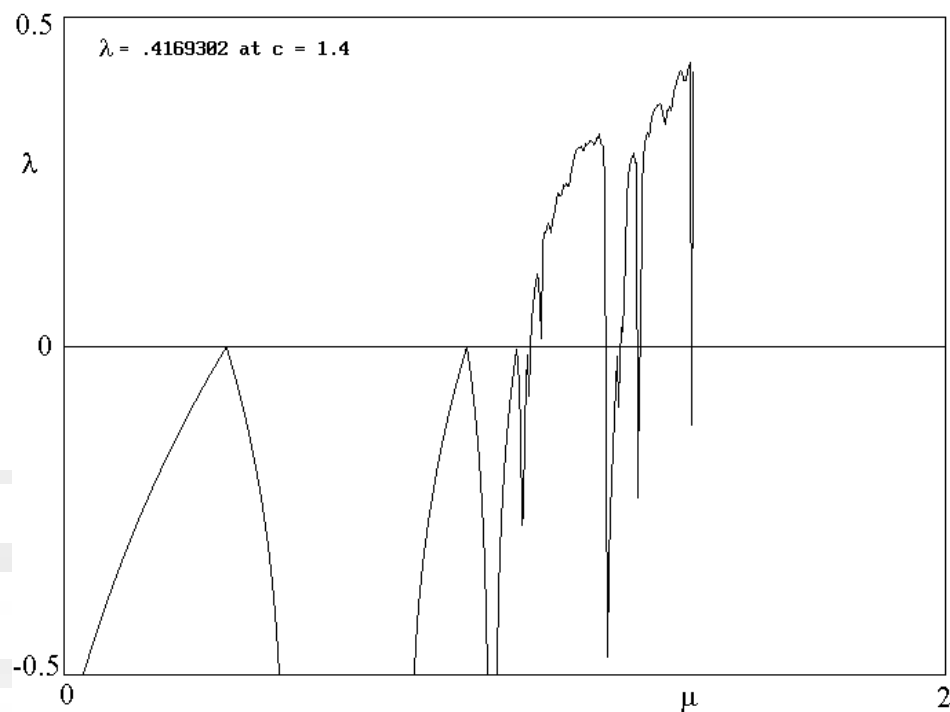
非线性物理：混沌物理

- 右图对应于 $\mu=1.4, b=0.3$ 。
- 计算其两个李雅普洛夫指数：必须有一个为正才能混沌。



- $d_1 = d_0 \exp(\lambda_1 t)$, 在整个空间进行不同初始值但是相同 d_0 的计算，得到一系列 $\lambda_{x,y}$ ，然后求平均值，得到最后的结果。
- 比较大的那个指数与参数 μ 的依赖关系如下图 ($b=0.3$):

非线性物理：混沌物理



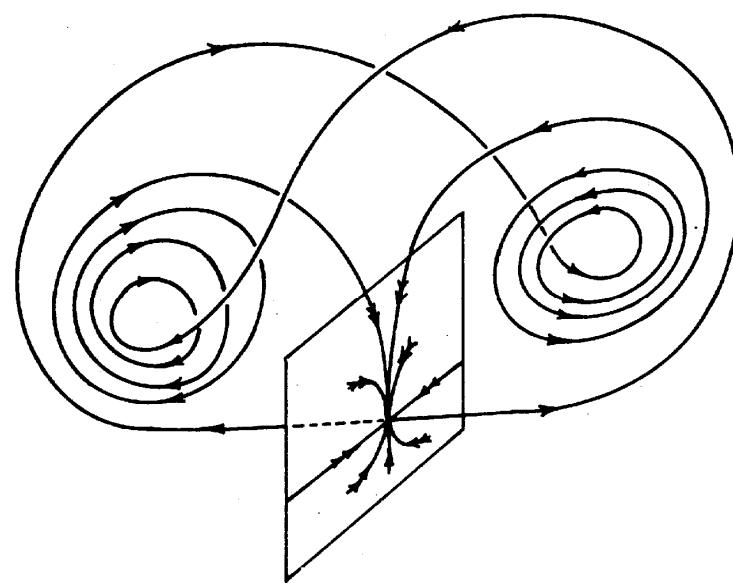
- 三维Lorentz映射：取 $Pr=10$, $b=8/3$,
当 $Ra=24.74$ 时, $C_{1,2}$ 变成鞍-焦点, 出
现Hopf分岔, O 与 C_1 和 O 与 C_2 间形成
同宿轨道, 混沌出现。

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -Pr x + Pr y \\ \frac{dy}{d\tau} = Rax + -y - xz \\ \frac{dz}{d\tau} = -bz + xy \end{cases}$$



非线性物理：混沌物理

- 一方面 C_1 与 C_2 是不稳定焦点，当相轨线接近其中一个中心时会被其排斥，以发散的螺旋线由内向外扩展；另一方面系统整体上是耗散系统，相空间要收缩。于是相轨线扩展到一定程度时会因相空间收缩而返回到其中的一个平衡点附近，并围绕该中心由内向外扩展，等到扩展到一定程度时又突然随机地进入到其中的一个平衡点附近。结果相点在两个中心之间永无休止地行走着。



非线性物理：混沌物理

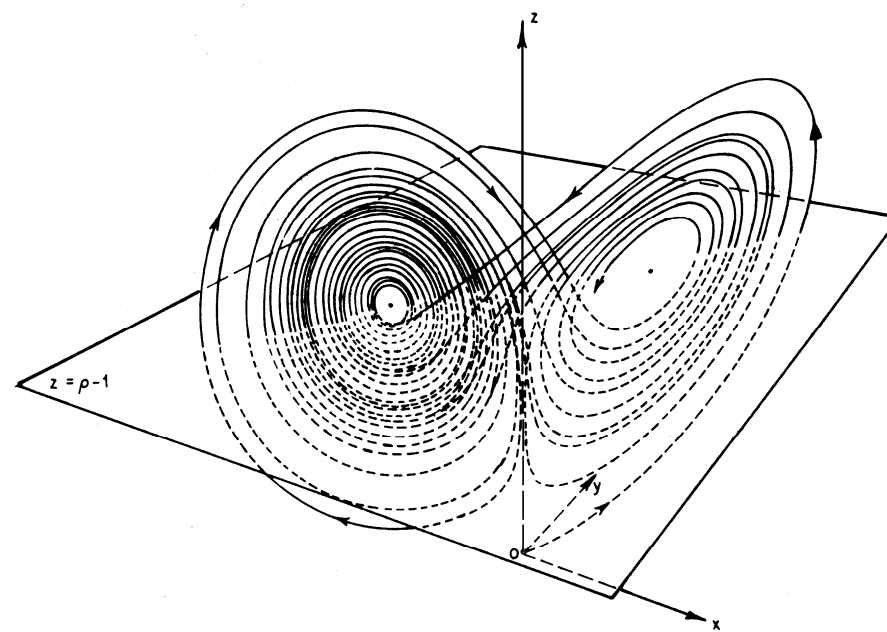
- 计算一下李雅普洛夫指数： $\text{Pr}=\sigma=10, b=8/3, \text{Ra}=28$ 时，

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -13.667$$

- 三个指数之和为负说明相体积收缩，系统是耗散系统。然而吸引子要成为奇异吸引子，它的最大李雅普诺夫指数必为正值，在奇异吸引子沿正指数描述的方向上相邻轨线应指数地分离。

- 计算结果为：

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.906, 0, -14.572)$$

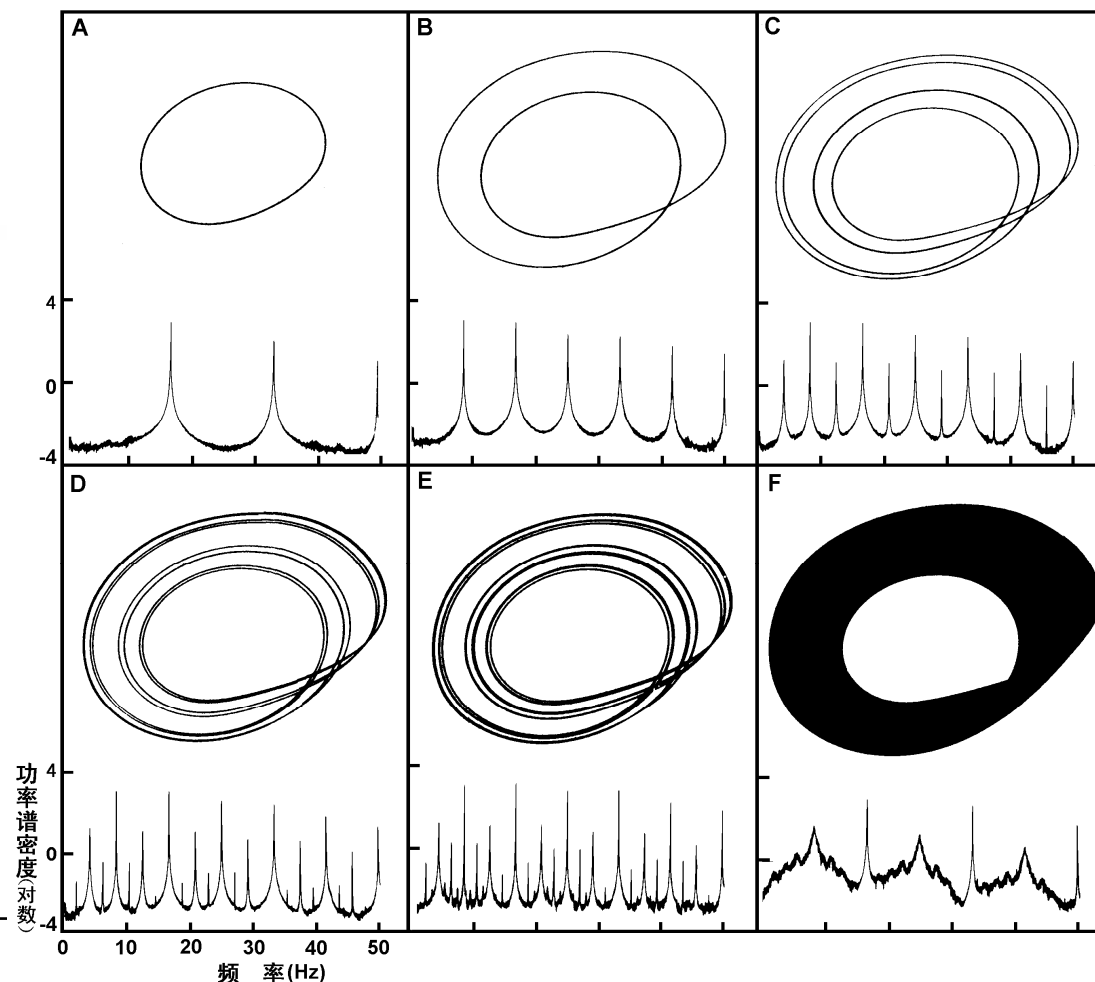


- 罗斯勒吸引子：

$$z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4ab}}{2a}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + (x - c)z \end{cases}$$

- 罗斯勒系统是三维的，罗斯勒系统有一个不稳定的平衡点，即不稳定焦点。
- 考察相轨线在平面投影。



非线性物理：混沌物理

- 罗斯勒吸引子：

