第四章 恒稳电流

静电学不高明但很有实用价值的应用！

- 静电学的核心：库仑定律
  - 环路定理
  - 高斯定理
  - 导体是等势体
  - 极化强度/极化电荷/极化电场

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1\cdot dq_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\vec{F}}{dq_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

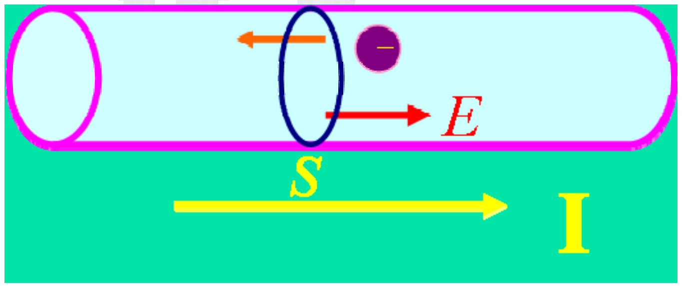
$$dA=dq\cdot\vec{E}\cdot d\vec{l}\Rightarrow\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\oiint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$$

$$d\vec{E}\Big|_{conductor}=0$$

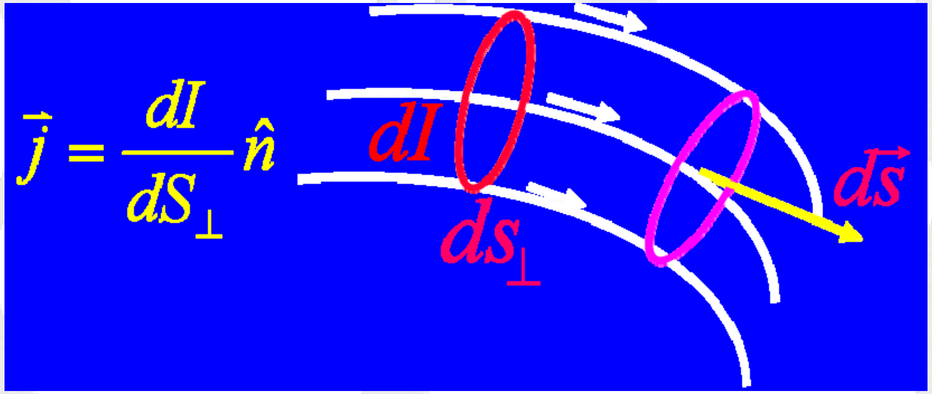
$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

- 电流：电荷的集体定向运动；
- 电流强度 **I** 大小：单位时间内通过导体某一横截面的电量；
- 方向：正电荷运动的方向；
- 单位：安培(**A**)；
- 定向运动速度：漂移速度。



$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}$$

- 电流密度 j：某点的电流密度数值上等于和该点正电荷定性移动方向垂直的单位面积上的电流强度；
- 方向：该点正电荷定向移动的方向，即电场的方向。



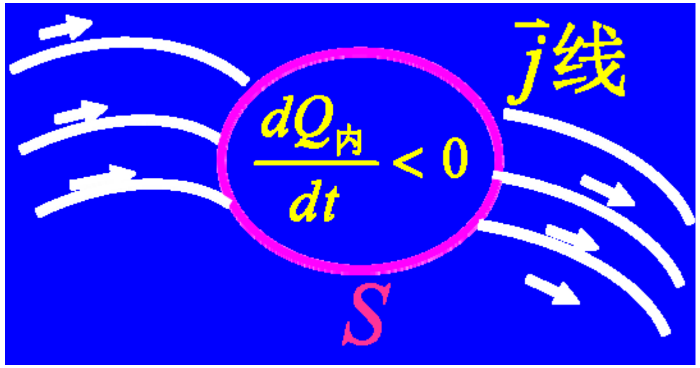
- 电流密度 j 与电流强度 I 的关系：矢量与通量的关系！

$$dI = j dS_\perp = j\cos\theta dS = \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

- 电流线：类比于电场线、电感应线；
- 规定电流线上任一点的切线方向与该点的电流密度方向相同。电流线的根数，则作以下规定：取一面元与电流线正交，通过此面元的电流线的根数等于面元处的电流密度的大小与该面元面积的乘积。电流线发出于正电荷减少的地方，终止于正电荷增加的地方。
- 电流线是虚构的，仅用来帮助我们设想电流密度的分布情况，建立物理图象。

电磁学04-02：电流连续性方程



有限空间被闭合曲面包络⇒电荷守恒：

$$I=\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \Rightarrow Q(t)=Q(t+dt)+Idt$$

$$\because Q=\int_V \rho d\tau,\quad \therefore \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{d}{dt}\oint_V \rho d\tau \Leftrightarrow div\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

电流的连续性方程

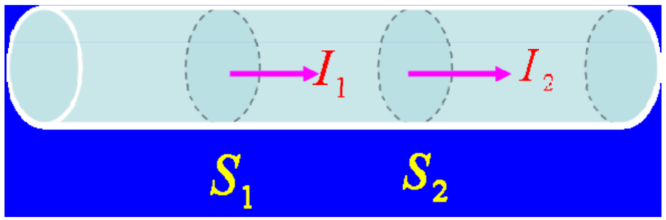
恒稳电流：

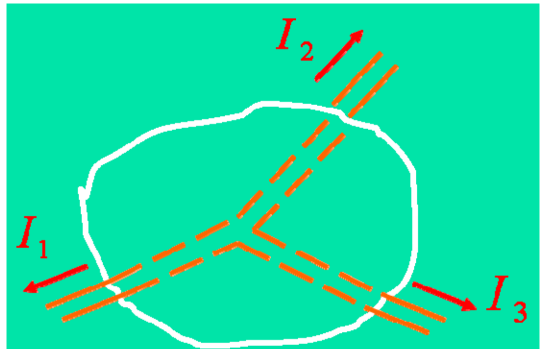
$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau=0 \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$d\rho/dt = 0$ 表明一闭合曲面流入的电荷量等于流出的电荷量，即导体内各处的电荷分布不变，但电荷仍有运动。

基尔霍夫第一定理：

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$





- 对于稳恒电流电场，静电场的两个基本方程式仍然成立。但与静电场的性质并不完全相同；
- 对于稳恒电路，导体内存在电场，稳恒电场由不随时间改变的电荷分布而产生，因此仍然可以看成是稳态的、准静态的；
- 环路定理与高斯定理：

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \\ U_1 - U_2 = \int_{1\to 2} \vec{E}\cdot d\vec{l} \Leftrightarrow \vec{E} = -\nabla U \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} Q_0 \\ \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}(Q_0 + Q') \end{cases}$$

静电场	稳恒电场
产生电场的电荷始终固定不动	电荷分布不随时间改变但伴随着电荷的定向移动
静电平衡时，导体内电场为零，导体是等势体	导体内电场不为零，导体内任意两点不是等势
电场有保守性，它是保守场，或有势场	电场有保守性，它是保守场，或有势场
维持静电场不需要能量的转换	稳恒电场的存在总要伴随着能量的转换

电磁学04-04: 欧姆定律

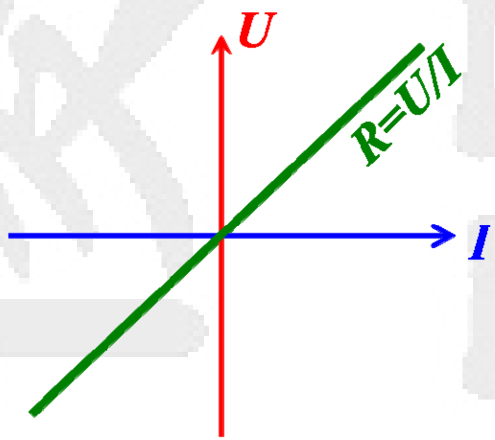
- 欧姆定律：I 与 U 成正比
- 电阻、电导的定义
- 电阻率 ρ

$$I \propto U$$

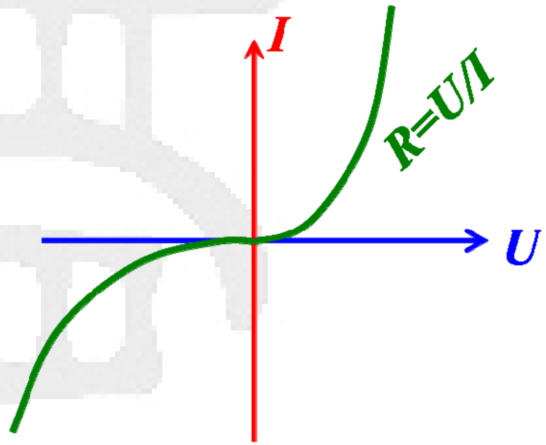
$$R = \frac{U}{I} \Rightarrow \frac{dU}{dI} \qquad G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \Rightarrow \frac{dI}{dU}$$

$$R = \rho \frac{l}{S} \Leftrightarrow \sigma = 1/\rho$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha T) \Leftrightarrow R = R_0 (1 + \alpha' T)$$

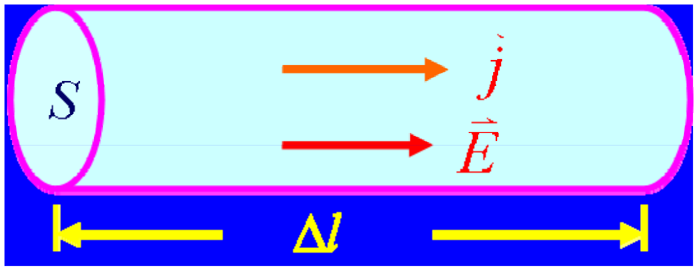


线性电阻



非线性电阻

- 欧姆定律的微分形式



$$E\Delta l = \Delta U = IR = jSR = jS(\rho \frac{\Delta l}{S}) = j\rho\Delta l$$

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \Leftrightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

- 电流的功可转化为机械能，化学能，热能等，电子动能的变化可忽略
- 功 ***A***
- 功率***P***
- 量纲问题
- 热量纲与功量纲的转换

$$A = QU = ItU = \frac{U^2}{R}t$$

$$P = \frac{A}{t} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2R$$

$$P = I^2R = (jS)^2(\frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{S}) = \frac{1}{\sigma}j^2\Delta l \cdot S$$

$$p = \frac{P}{\Delta V} = \frac{1}{\sigma}j^2 = \sigma E^2 = jE$$

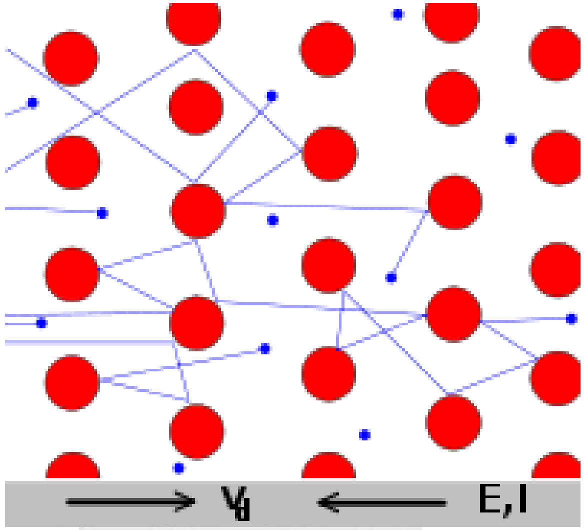
热功率密度

焦耳定律微分形式

- 德罗特(Paul Karl Ludwig Drude)和洛伦兹(Hendrik Antoon Lorentz);

Paul Drude

Paul Karl Ludwig Drude	
Born	July 12, 1863 Braunschweig, Duchy of Brunswick
Died	July 5, 1906 (aged 42) Berlin Suicide
Residence	Germany
Nationality	German
Fields	Physicist
Institutions	Humboldt University of Berlin University of Giessen
Alma mater	University of Göttingen
Doctoral advisor	Woldemar Voigt
Doctoral students	Paul Cermak Markus Lange
Known for	The Drude model

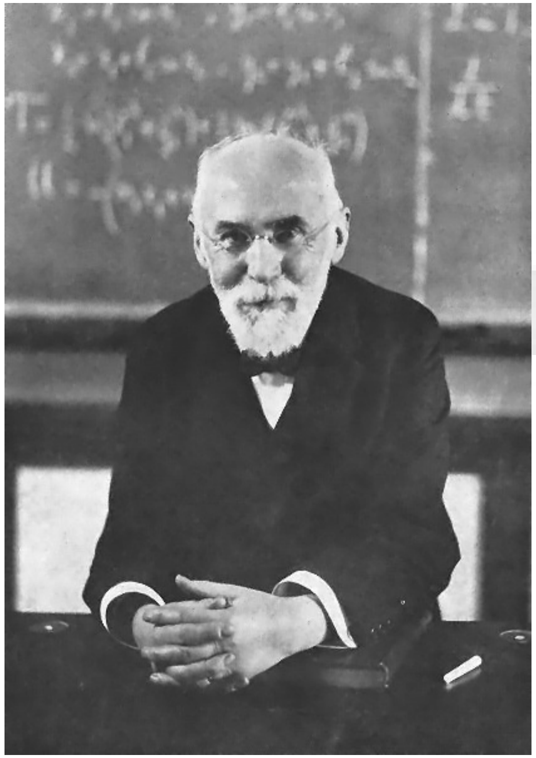


- Two most significant results of the Drude model: (1) an electronic equation of motion, (2) a linear relationship between current density *J* and electric field *E*,
- *t* is the time and *p*, *q*, *n* and *m*, and *τ* are respectively an electron's momentum, charge, number density, mass, and mean free time between ionic collisions.
- *J*-*E* relation is particularly important because it explains in semi-quantitative terms why Ohm's Law should be true.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = q\mathbf{E} - \frac{\mathbf{p}(t)}{\tau},$$

$$\mathbf{J} = \left(\frac{nq^2\tau}{m}\right)\mathbf{E}.$$

- 德罗特(Paul Karl Ludwig Drude)和洛伦兹(Hendrik Antoon Lorentz);



Born	18 July 1853 Arnhem, Netherlands
Died	4 February 1928 (aged 74) Haarlem, Netherlands
Nationality	Netherlands
Fields	Physics
Alma mater	University of Leiden
Doctoral advisor	Pieter Rijke
Doctoral students	Geertruida L. de Haas-Lorentz Adriaan Fokker Leonard Ornstein
Known for	Theory of EM radiation Lorentz force Lorentz contraction
Notable awards	Nobel Prize for Physics (1902) Franklin Medal (1917)

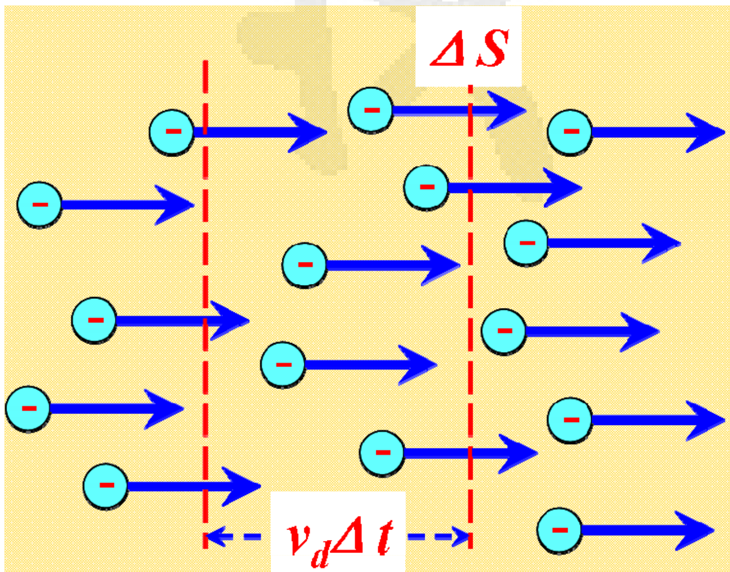
Right: Albert Einstein and Hendrik Antoon Lorentz, photographed by Ehrenfest in front of his home in Leiden in 1921.

Hendrik Antoon Lorentz (18 July 1853 – 4 February 1928) was a Dutch physicist who shared the 1902 Nobel Prize in Physics with Pieter Zeeman for the discovery and theoretical explanation of the Zeeman effect. He also derived the transformation equations subsequently used by Albert Einstein to describe space and time.

- 载流子：很多实验证实是自由电子 **Richard Chace Tolman experiment**
- 导电的电子气理论：

$$\frac{1}{2}m\bar{u}^2=\frac{3}{2}kT\Rightarrow\sqrt{\bar{u}^2}=\bar{u}=6.74\times10^3\sqrt{T}\,m/s=110km/s\ @\ T=300K$$

- 欧姆(ohm)定律：从Δt时间通过面元ΔS的电子数目开始推导；



$$\vec{f}=e\vec{E}\Rightarrow\vec{a}=e\vec{E}/m\Rightarrow drift\ speed\ v_d$$

$$\because\Delta Q=nev_d\Delta t\Delta S,\quad\therefore I=\Delta Q/\Delta t=nev_d\Delta S$$

$$\therefore\vec{j}=-\left|I/\Delta S\right|=-ne\vec{v}_d=\rho\vec{v}_d\quad(drift\ velocity)$$

$$v_1=a\tau=\frac{eE}{m}\tau\Rightarrow v_d=\frac{0+v_1}{2}=\frac{eE}{2m}\tau$$

$$\vec{j}=\frac{e^2n\tau}{2m}\vec{E}\Rightarrow\sigma=\frac{e^2n\tau}{2m}$$

- 我们从假想的“极高的”均方根速率出发，通过引入一个“极短的”碰撞时间间隔来获得这个电场 *E* 定向驱动下的“极低的”漂移速度⇒物理学的“猫腻”有时就是真理！

- 定义电子运动的平均自由程

$$\bar{\lambda} = \bar{u}\tau \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2}\frac{e^2 n\bar{\lambda}}{m\bar{u}} \Rightarrow \sigma \propto \bar{u}^{-1} \propto 1/\sqrt{T}\,(???)$$

- 做一些数量级的估算：室温下纯铜的数据

$$\bar{u} = 110 km/s @ T = 300K$$

$$v_d = j/ne = 0.15 mm/s @ n = 8.4\times10^{22} cm^{-3} \;\&\; j = 200 A/cm^2$$

$$\tau = 2m\sigma/e^2 n = 0.53\times10^{-13} s = 53 fs @ \sigma = 0.633\times10^{8} S/m$$

$$\bar{\lambda} = \bar{u}\tau = 5.8 nm @ 10 \text{ lattice constant}$$

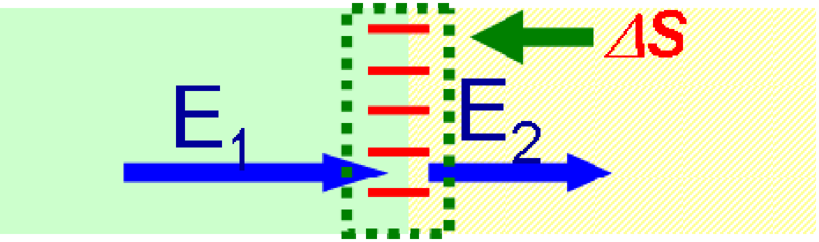
- 恒稳电流过程已经touched的一些性质：

$$\begin{cases} I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \dfrac{d\rho(x,y,z)}{dt} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} Q_0 \ \& \ Q' = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S内} Q_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{j} = \sigma \vec{E} \\ \vec{E} = \rho \vec{j} \end{cases}$$

- 在此基础上再延伸一些性质
- **(1)** 如果闭合面 **S** 上各点 $\boldsymbol{\sigma}$ 不变，则：

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} Q = 0$$

均匀导体内部任一物理无限小体元中电荷量的代数和为零。



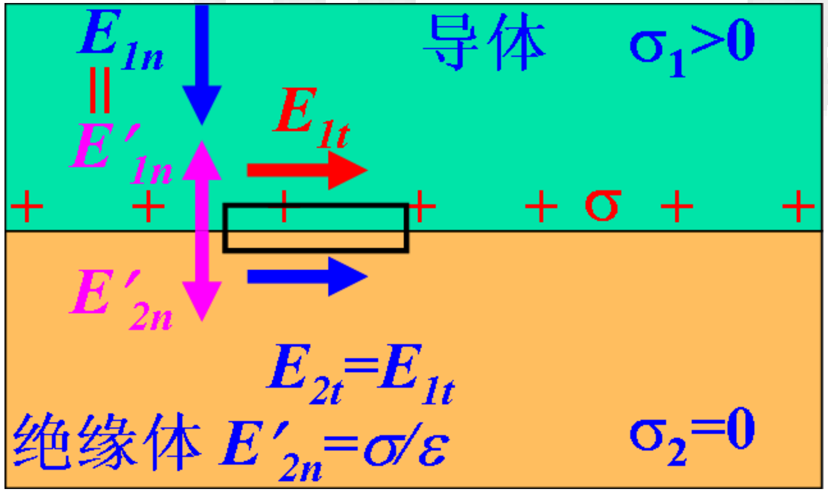
(2) 两种导体的分界面处积累电荷：

$$\because j_{1n}=j_{2n},\quad \therefore E_{1n}\neq E_{2n}\quad \text{if}\quad \sigma_1\neq\sigma_2$$

$$\therefore \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=(E_{2n}-E_{1n})\Delta S\neq 0,\quad \therefore \sum_{S内} Q_0\neq 0$$

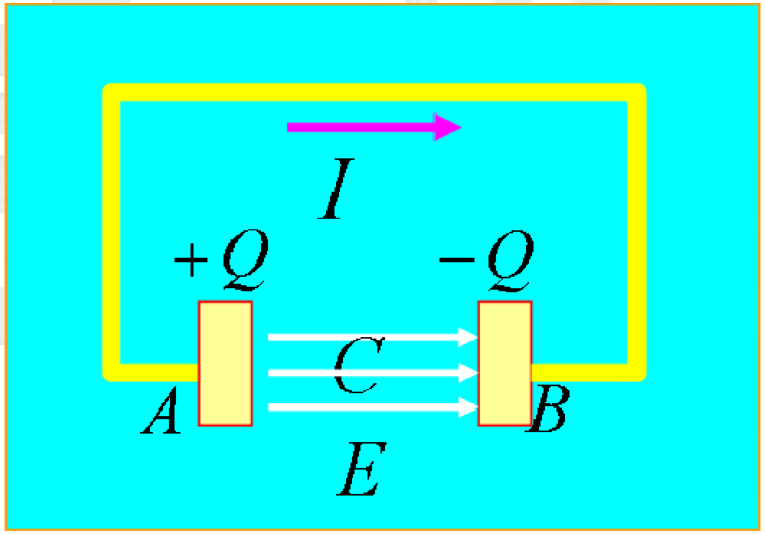
如果 $\sigma_1>\sigma_2$，则 $E_{1n}<E_{2n}$，界面聚集正电荷；反之亦然

(3) 绝缘体与导体界面处也积累电荷：



- 分界面导体一侧的场强恒与分界面平行
- 在界面上形成一层面电荷将场强的法向分量抵消
- 表面外侧场强的切向分量等于导体内侧的电场强度
- 通电的导线不论如何弯曲,内部的电场始终顺着导线的方向。

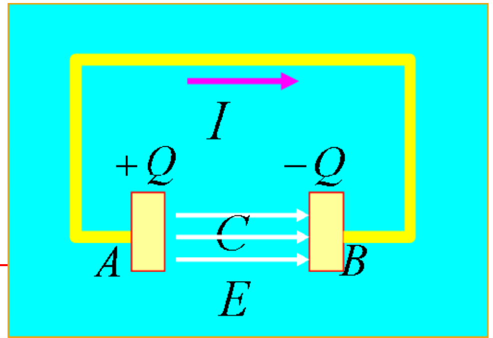
- 电源为外界负载提供动力，本身需要非静电力做功维持电势差
- 电源提供的非静电外加力能够使正电荷从低电势处逆着静电力经过内电路移到高电势处。
- 各种形式的外加力都可以：



- 外加力效应：

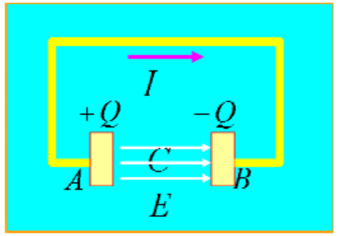
$$\boxed{\vec{E}^* = \vec{F}^*/Q \Rightarrow \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*) \Rightarrow \rho\vec{j} = (\vec{E} + \vec{E}^*)}$$

- 为了描述外加力效应，引入电动势 Σ 的概念：



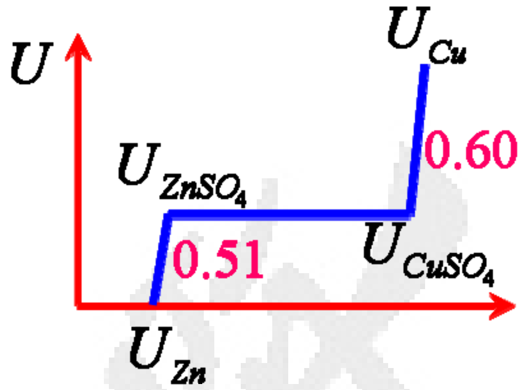
$$\Sigma = -\int_A^B E_{ext} \cdot dl = \int_C E_{\text{int}} \cdot dl' = \oint_C \left(E + v \times B\right) \cdot dl +$$
$$+ \frac{1}{q} \oint_C \left(\text{effective chemical force}\right) \cdot dl +$$
$$+ \frac{1}{q} \oint_C \left(\text{effective thermal force}\right) \cdot dl$$

- **ext**为静电场，**int**为内场，包括所有外加力场。

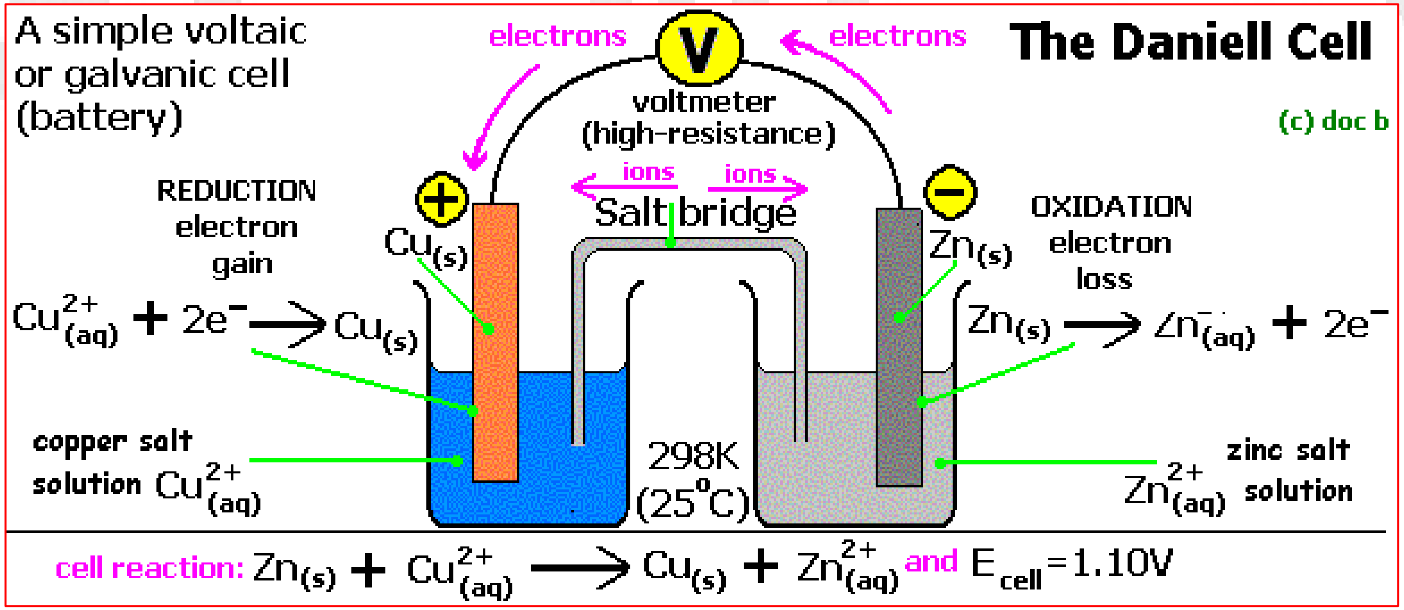


I
+Q
−Q
A
C
B
E

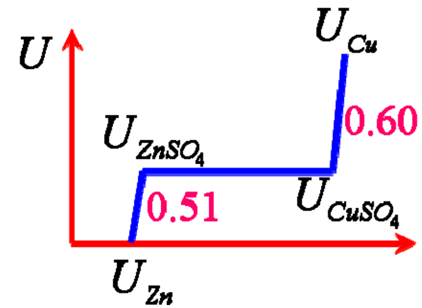
□ 以丹尼尔电池为例说明



U
U_Cu
0.60
U_ZnSO4
0.51
U_CuSO4
U_Zn



A simple voltaic or galvanic cell (battery)
electrons
electrons
The Daniell Cell
voltmeter (high-resistance)
(c) doc b
ions
ions
Salt bridge
REDUCTION electron gain
Cu(s)
Zn(s)
OXIDATION electron loss
Cu2+(aq) + 2e− → Cu(s)
Zn(s) → Zn2+(aq) + 2e−
copper salt solution Cu2+(aq)
298K (25°C)
zinc salt solution Zn2+(aq)
cell reaction: Zn(s) + Cu2+(aq) → Cu(s) + Zn2+(aq) and Ecell=1.10V



(1) 开路状态平衡电动势:

$$U_{ZnSO_4} - U_{Zn} = \int_{ZnSO_4}^{Zn} \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\int_{ZnSO_4}^{Zn} \vec{E}^{*\prime} \cdot d\vec{l} = \int_{Zn}^{ZnSO_4} \vec{E}^{*\prime} \cdot d\vec{l}$$

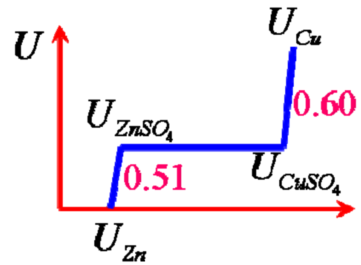
$$U_{Cu} - U_{CuSO_4} = \int_{Cu}^{CuSO_4} \vec{E}'' \cdot d\vec{l} = -\int_{Cu}^{CuSO_4} \vec{E}^{*\prime\prime} \cdot d\vec{l} = \int_{CuSO_4}^{Cu} \vec{E}'' \cdot d\vec{l}$$

$$U_{ZnSO_4} \approx U_{CuSO_4}$$

开路时电解质内电势准平衡

电偶平衡后形成的静电场

电偶层内电化学力电势



- 电动势 Σ 满足：

$$\Sigma=\int_{Zn}^{Cu}E^{*}\cdot d\vec{l}$$

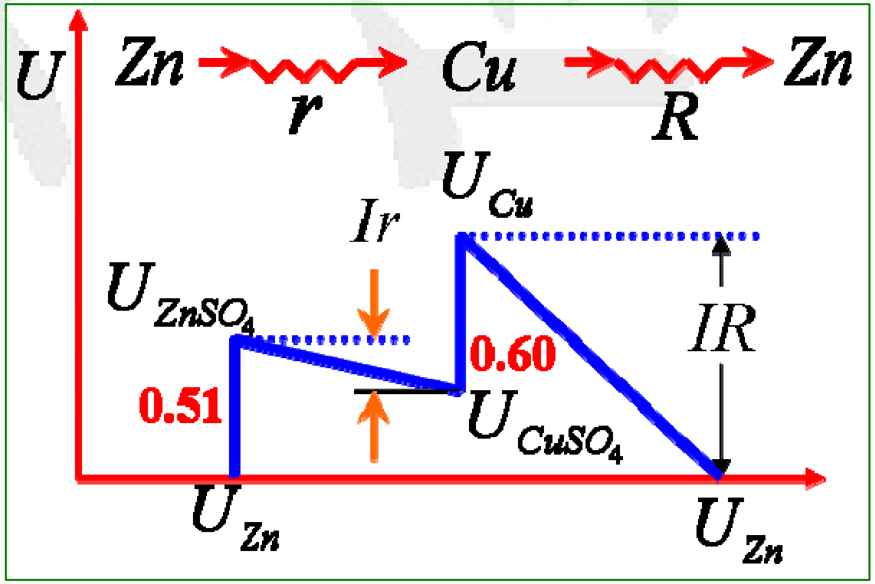
$$=\int_{Zn\to ZnSO_4}\vec{E}^{*\prime}\cdot d\vec{l}+\int_{ZnSO_4\to CnSO_4}\vec{E}^{*}\cdot d\vec{l}+\int_{CnSO_4\to Cn}\vec{E}^{*\prime\prime}\cdot d\vec{l}$$

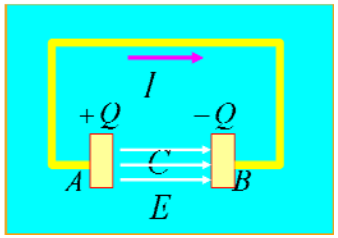
$$=(U_{ZnSO_4}-U_{Zn})+\int_{Zn/ZnSO_4}^{Cu/CuSO_4}dU+(U_{Cu}-U_{CuSO_4})=U_{Cu}-U_{Zn}$$

- 自电源的负极经电源内电路到电源的正极的线积分为电源的电动势，其在数值上等于电源开路时电源正极与负极间的电势差

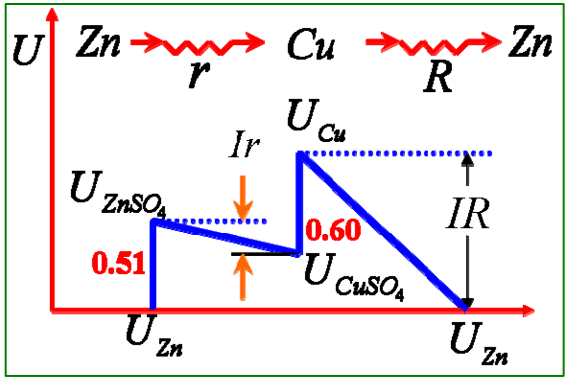
- (2) 电动势接上负载，在电路中形成回路，有电流流动。
- 考虑恒稳电流情况：因为有 ***I*** 从电池的负极 **Zn** 经过电池内部电解质向正极 **Cu** 流动，这种流动需要一个内部附加电压 ***ΔU=Ir*** 来驱动 ***I*** 从$ZnSO_4$侧流到$CuSO_4$侧，所以

$$U_{ZnSO_4} - U_{CuSO_4} = Ir \quad (r\text{: inner resistance})$$





- 电池内部电势变化如图:



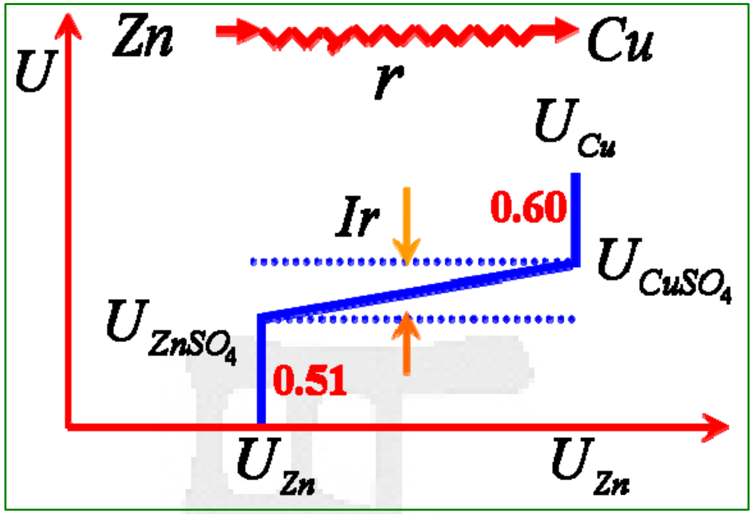
$$U_{Cu}-U_{Zn}=(U_{Cu}-U_{CuSO_4})-(U_{ZnSO_4}-U_{CuSO_4})+$$
$$+(U_{ZnSO_4}-U_{Zn})$$

Ir

Σ

$$U_{Cu}-U_{Zn}=V=IR=\Sigma-Ir\Rightarrow\Sigma=IR+Ir=I(R+r)$$

- **(3) 电源接上对其充电的外电源：$V=U_{Cu}-U_{Zn}$**
- **外部电流通过电源，从正极 Cu 经电解质流到负极 Zn，引起内部压降 Ir，所以**



$$U_{Cu}-U_{Zn}=\underbrace{(U_{Cu}-U_{CuSO_4})+(U_{ZnSO_4}-U_{Zn})}_{\Sigma}+\underbrace{(U_{CuSO_4}-U_{ZnSO_4})}_{Ir}$$

$$\boxed{U_{Cu}-U_{Zn}=V=\Sigma+Ir}$$

- **电源的能量关系：**

$$\int_{\text{负极径内电路到正极}} I\vec{E}^* \cdot d\vec{l} = \Sigma I$$

$$\text{charging: } UI = \Sigma I + I^2 r$$

$$\text{dischanrging: } UI = \Sigma I - I^2 r$$

- **【例2】p.165**

- 设有一电动势为 Σ 电源，内电阻为 r，求输出功率及其效率(等于输出功率与总功率之比)与外电阻R的关系。

$$P_a = U_{AB} I = RI^2 = \Sigma^2 \frac{R}{(R+r)^2}$$

$$\text{at } r = R,\ (P_a)_{\max} = \Sigma^2 / 4r$$

$$\eta = \frac{P_a}{P} = \frac{U_{AB} I}{\Sigma I} = \frac{U_{AB}}{\Sigma} = \frac{\Sigma - Ir}{\Sigma} = 1 - \frac{r}{R+r}$$

电磁学04-09: 基尔霍夫定律

- 有了恒稳电流的规律、有了电源的认识，可以接触电路了。
- 几个概念：

  (1) 具有两个端面而由多个元件串联而成的组合称为支路；

  (2) 几个支路的联接点称为节点；

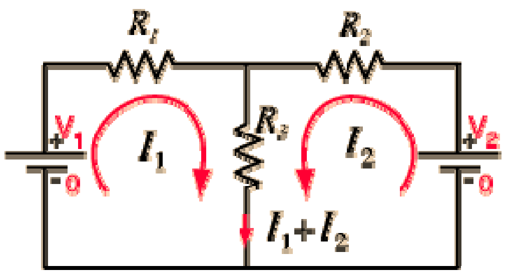
  (3) 电路中的任一闭合路径叫做回路；

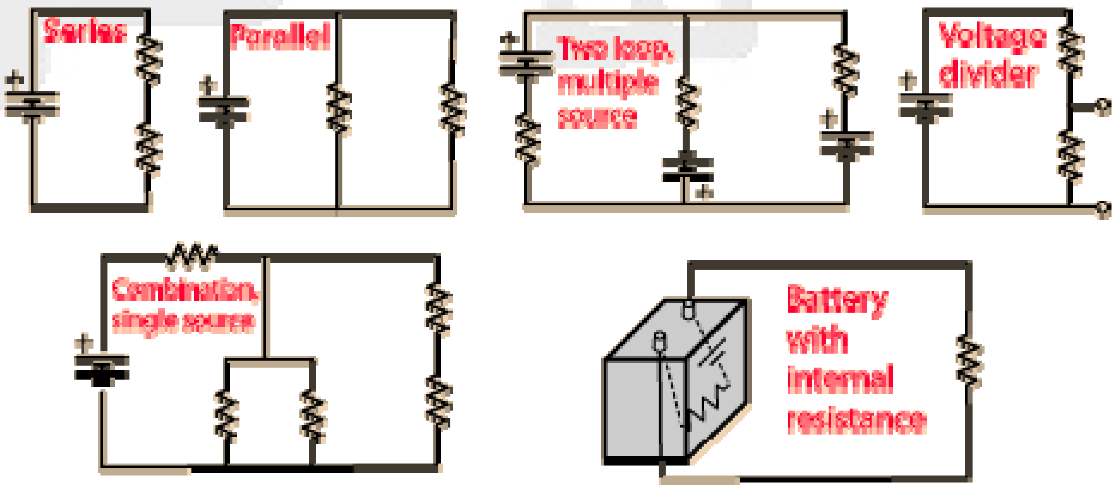
  (4) 一般把含元件较多的电路称为网络。

- 一些方法考虑：

  (1) 电压和电流的参考方向

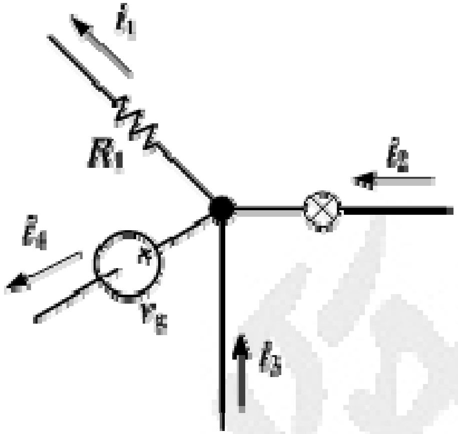
  (2) 关联的参考方向





基尔霍夫第一定律：节点电流

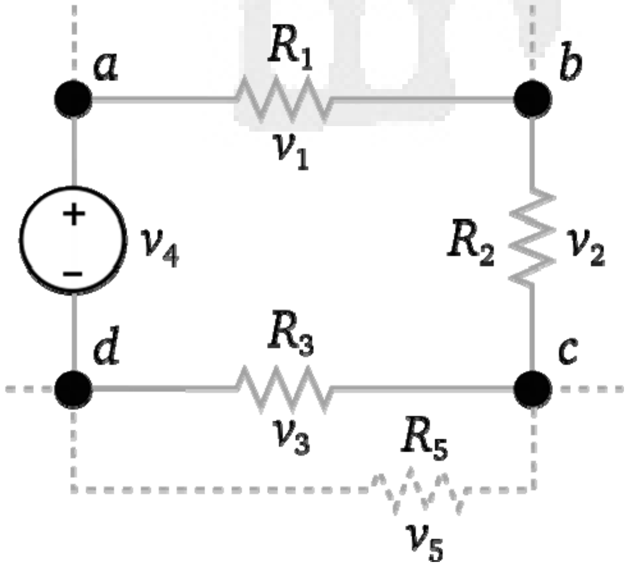
$$\sum_i I_i = 0$$



The current entering any junction is equal to the current leaving that junction. $i_1 + i_4 = i_2 + i_3$

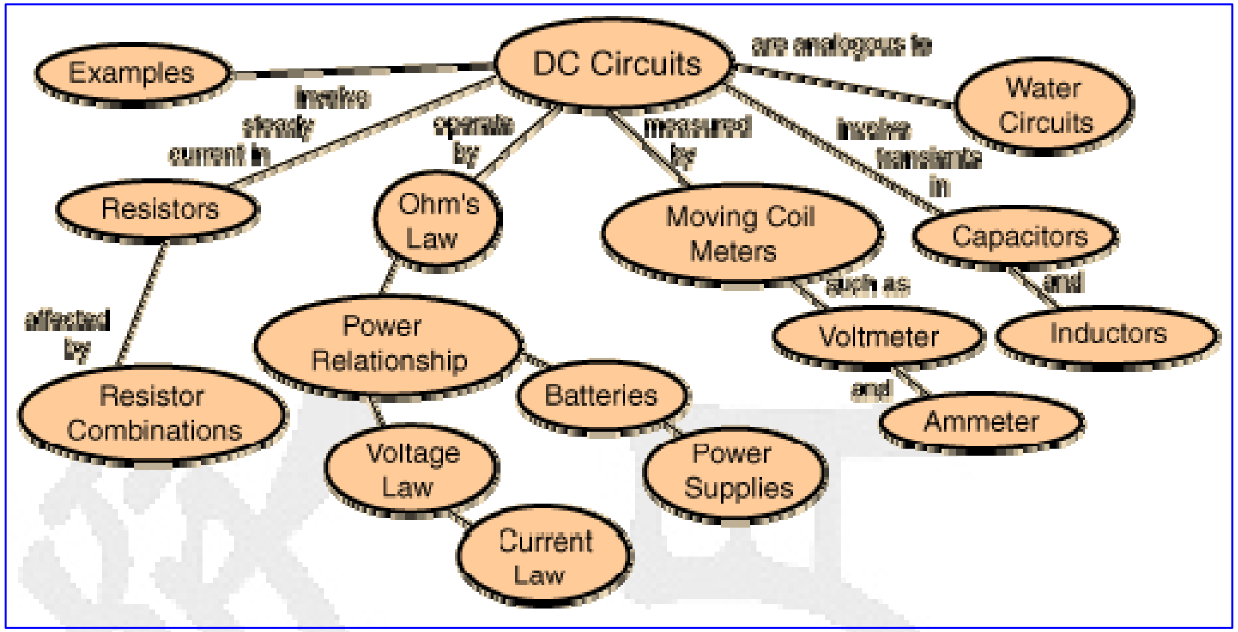
基尔霍夫第二定律：回路电压

$$\sum_i U_i = 0$$



The sum of all the voltages around the loop is equal to zero. $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$

- 复杂的网路电路计算涉及众多内容，简介如图。



- 支路电流法：

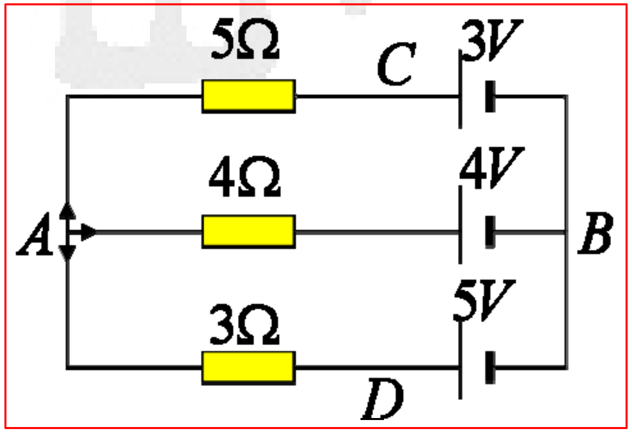
(1) 确定电路所包含的支路与节点数(m,n)；

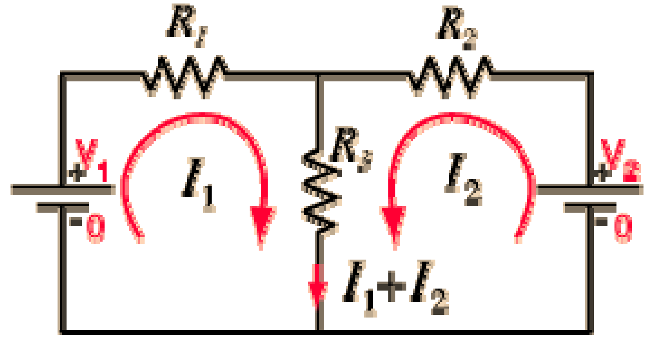
(2) 假定每一支路的电流(包括大小和参考方向)；

(3) 任选(n-1)个节点，应用基尔霍夫第一定律；

(4) 选取[m-(n-1)]个独立回路，应用基尔霍夫第二定律；

(5) m个联立方程式，解出所需m个电流值。





回路电流法：

(1) 确定电路所包含的支路与节点数(m,n)；

(2) 选择[m-(n-1)]个独立回路；

(3) 给每个回路假定一个电流(包括大小和参考方向)；

(4) 应用基尔霍夫第二定律(省去了(n-1)个方程)。

网络叠加定理：

在线性电路中，任一支路的电流(或电压)可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

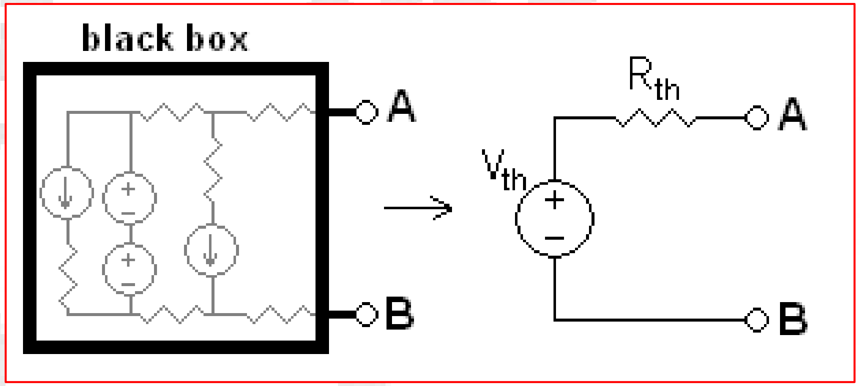
(1) 只能用于计算线性电路(即元件均为线性元件)的支路电流或电压(不能直接进行功率的叠加计算)；

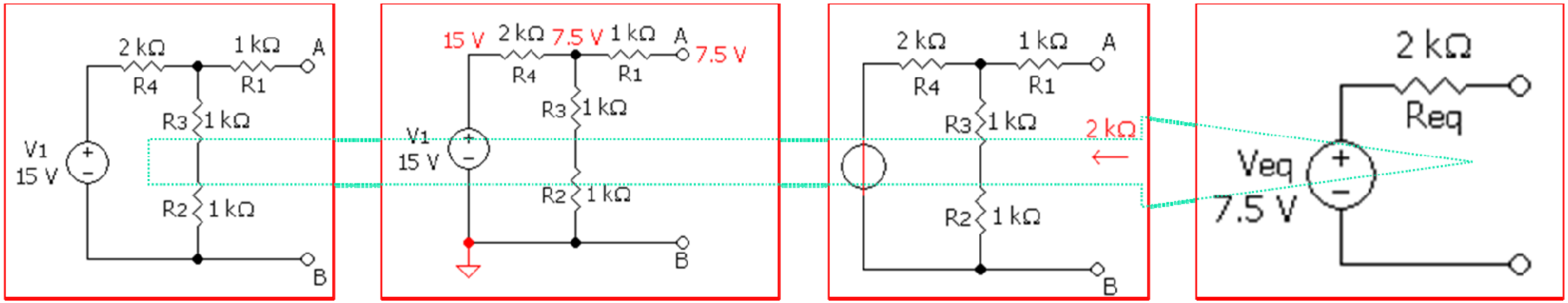
(2) 电压源不作用时应视为短路，电流源不作用时应视为开路；

(3) 注意电流或电压的参考方向，线性的正弦稳态电路也满足叠加定理。

等效电压源定理(Thevenin's theorem):

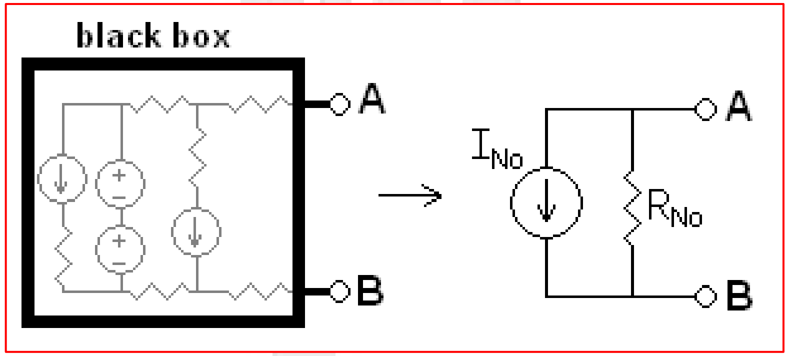
任意含独立源、线性电阻和线性受控源的单口网络(二端网络)，都可用一电压源与电阻相串联的单口网络来等效。电压源的电压就是此单口网络的开路电压，电阻就是从此单口网络两端看进去，当网络内部所有独立源均置零以后的等效电阻。

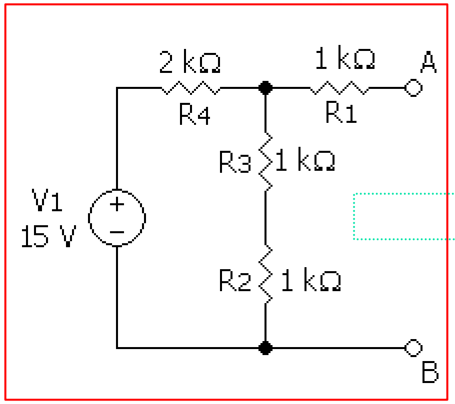


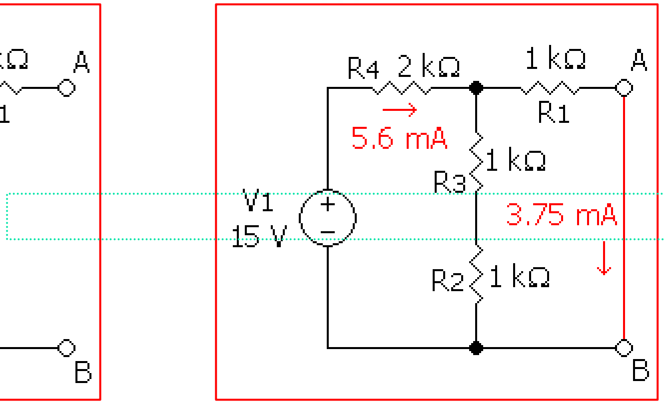


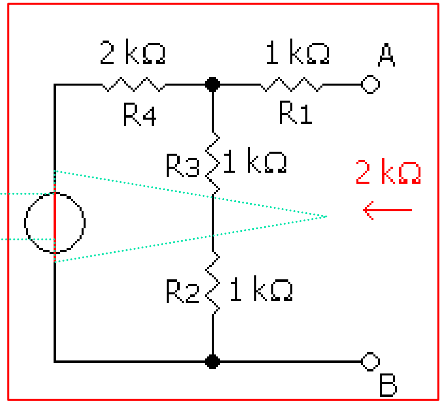
等效电流源定理(Norton theorem):

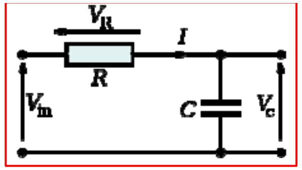
一个含独立电源、线性电阻和受控源的二端电路N，对两个端子来说都可等效为一个理想电流源并联内阻的模型。 理想电流源数值为有源二端电路N的两个端子短路时其上的电流，并联内阻等于N内部所有独立源为零时电路两端子间的等效电阻。











□ 简单RC电路

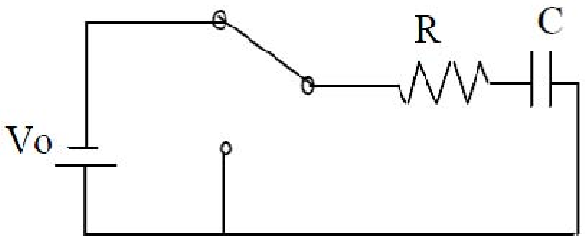


Figure 2. (a) Charging

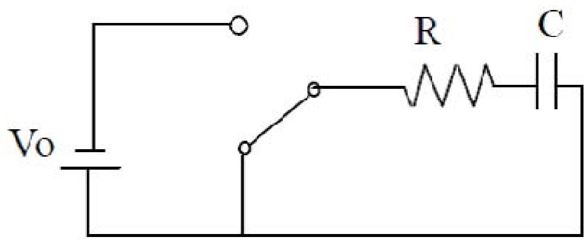


Figure 2. (b) Discharging

□ 充电时满足：

$$V_0 = \frac{q(t)}{C} + i(t)R$$

□ 初始条件为t=0时，q=0

$$\because i = \frac{dq}{dt}, \quad \therefore V_0 = \frac{q(t)}{C} + R\frac{dq}{dt}$$

□ 放电时满足：

$$\frac{q(t)}{C} + i(t)R = 0$$

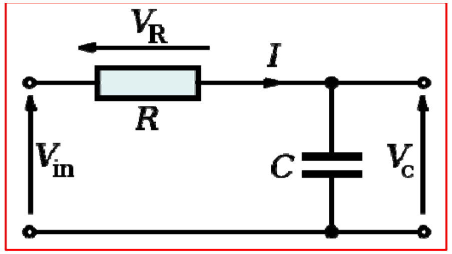
□ 初始条件为t=0时，$q=Q_0=V_0C$

$$\because i = \frac{dq}{dt}, \quad \therefore \frac{q(t)}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

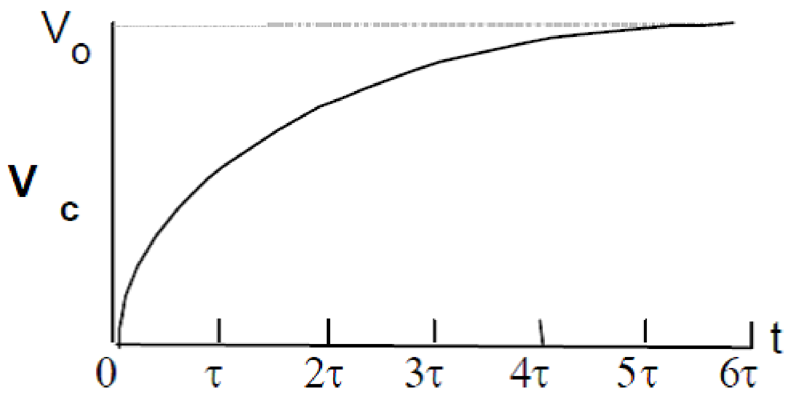
□ 含时瞬态过程：

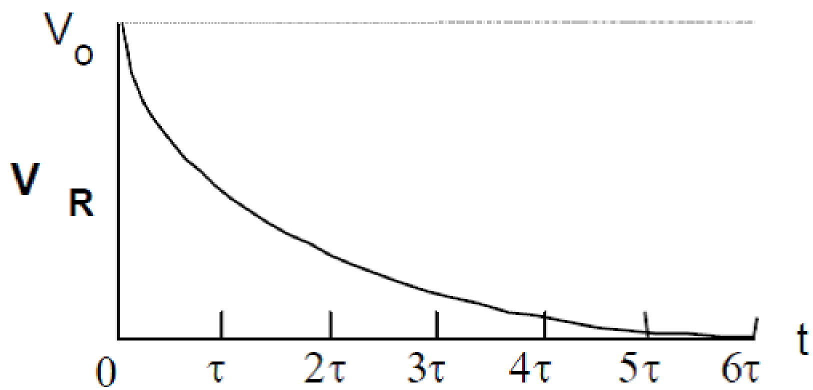
$$q(t) = CV_0\left[1 - \exp(-t/RC)\right] \Leftarrow \text{charging}$$
$$q(t) = CV_0 \exp(-t/RC) \Leftarrow \text{discharging}$$

电磁学04-11: 电容器充放电

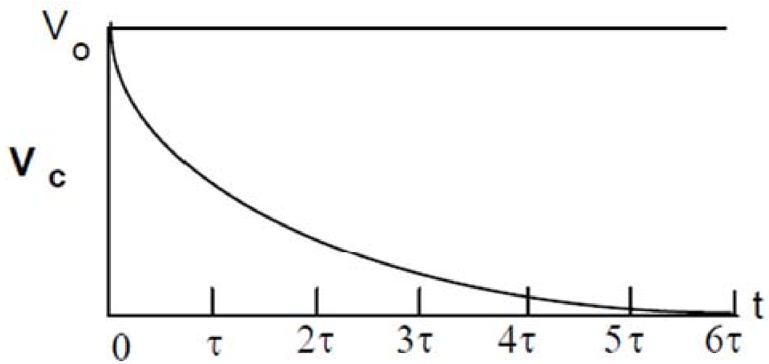


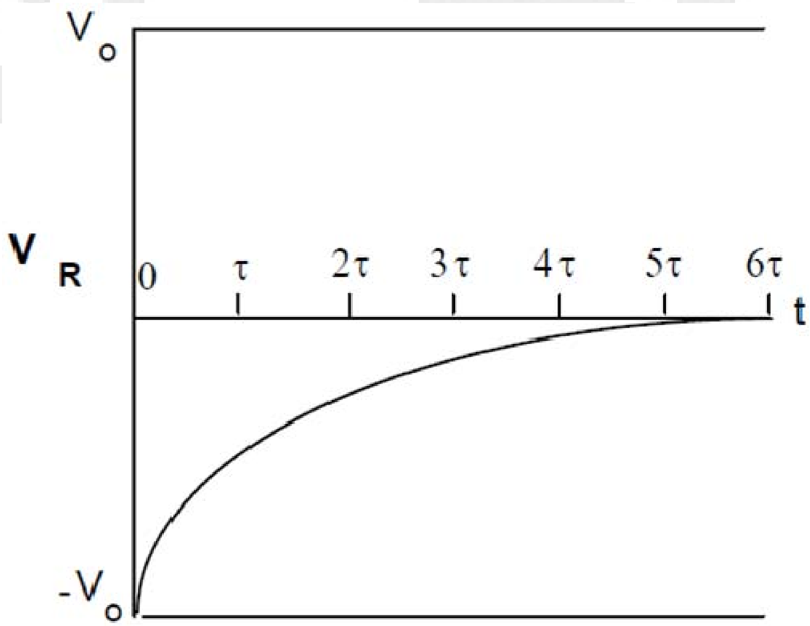
- 充电时满足：



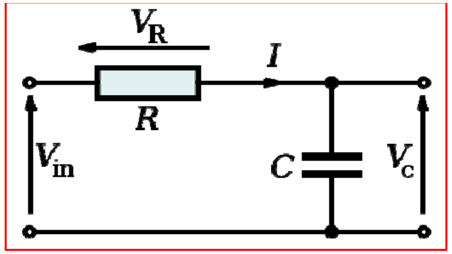


- 放电时满足：

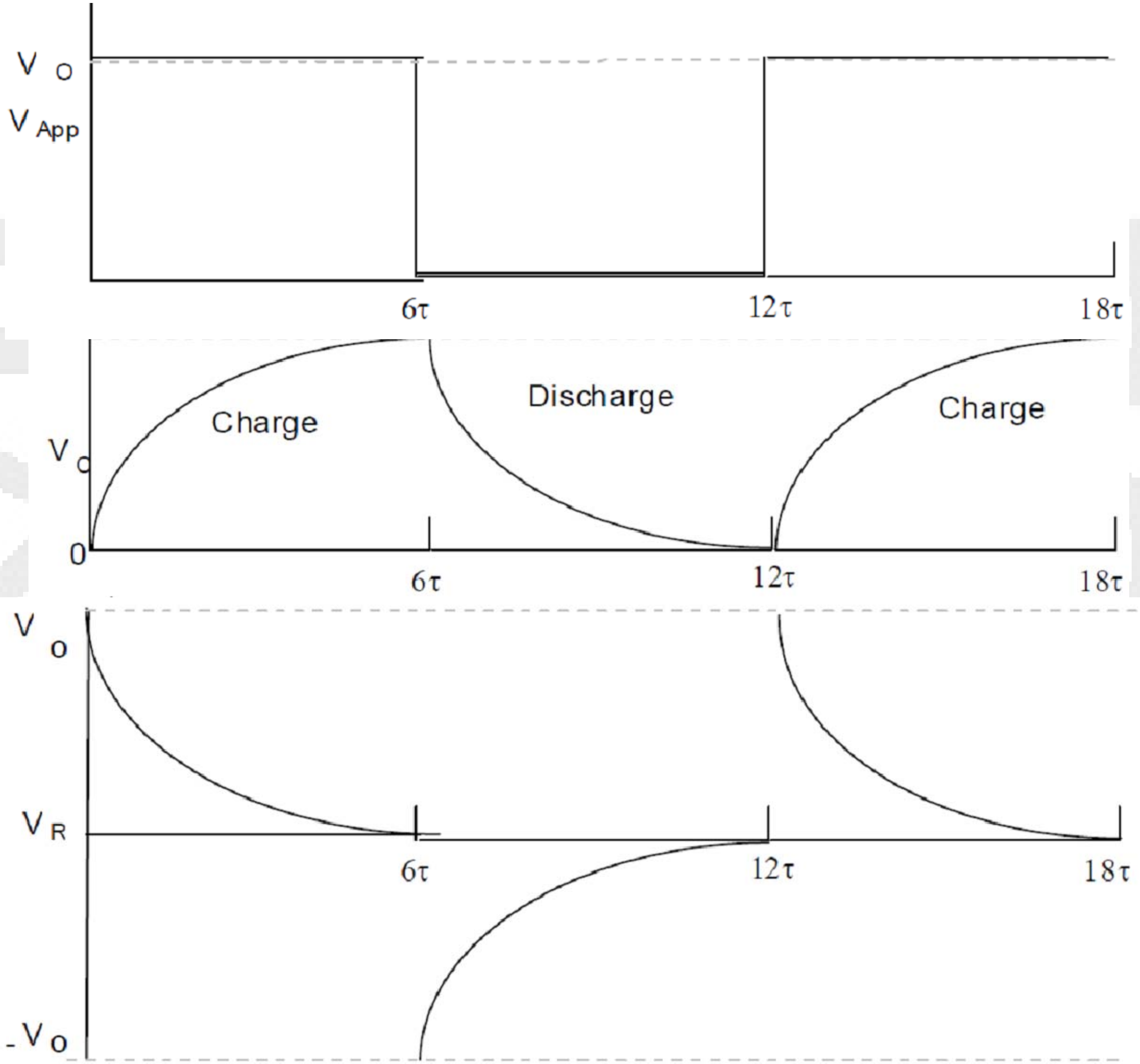




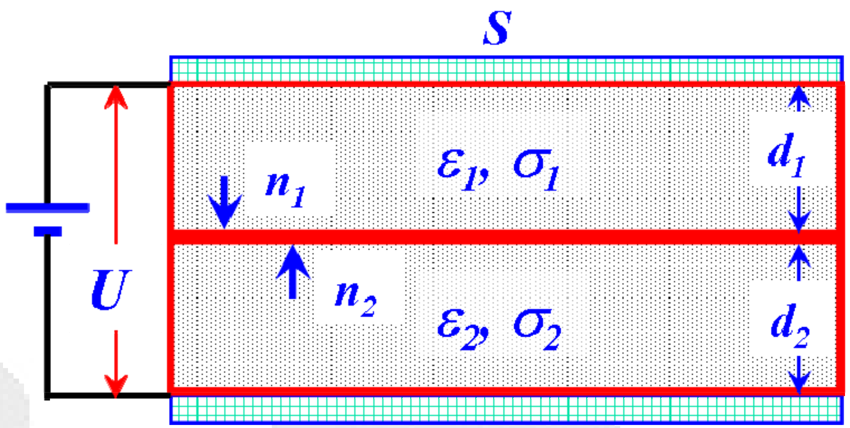
电磁学04-11: 电容器充放电



- 充放电:



- 【例4.2.41】平板电容器，电容率电导率如图标注，忽略边缘效应，求(1)两介质中的电场强度与电感应强度；(2)两介质交界面上电荷面密度；(3)通过电容器的电流；(4)如果 $\sigma_1=0$，如何？



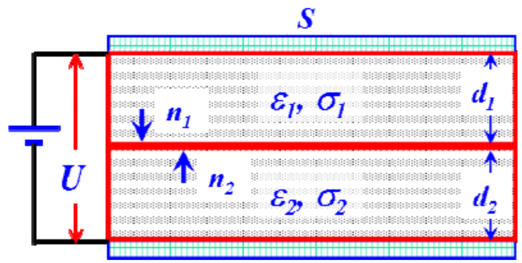
Resistance R: $R=\dfrac{d_1}{\sigma_1 S}+\dfrac{d_2}{\sigma_2 S}=\dfrac{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}{\sigma_1\sigma_2 S}$

Current density j: $j=I/S=U/SR=\dfrac{\sigma_1\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$

$$\because\ j=\sigma E,\quad \therefore \vec{E}_1=\frac{\vec{j}}{\sigma_1}=\frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\vec{n}_1,\quad \vec{E}_2=\frac{\vec{j}}{\sigma_2}=-\frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\vec{n}_2$$

$$\therefore \vec{D}_1=\varepsilon_1\vec{E}_1=\frac{\varepsilon_1\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\vec{n}_1,\quad \vec{D}_2=\varepsilon_2\vec{E}_2=-\frac{\varepsilon_2\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\vec{n}_2$$

电磁学04-12: 一些练习



- 在接电源充电状态，两介质界面处有自由电荷

$$\because \sigma_0 = \vec{n}\cdot\vec{D}$$

$$\therefore \sigma_0 = \sigma_{01} + \sigma_{02} = \vec{n}_1\cdot\vec{D}_1 + \vec{n}_2\cdot\vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_1\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} - \frac{\varepsilon_2\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} = -\frac{(\sigma_2\varepsilon_1 - \sigma_1\varepsilon_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$\because \sigma' = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\sigma_0$$

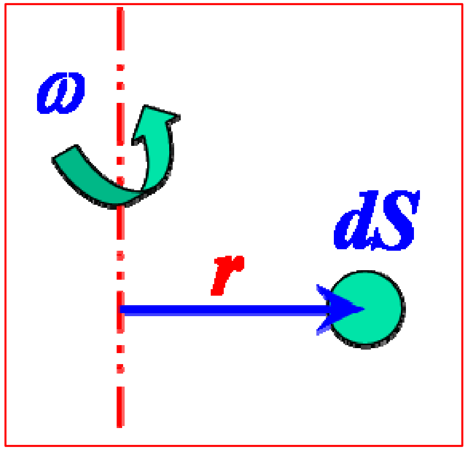
$$\therefore \sigma' = \sigma_1' + \sigma_2' = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right)\sigma_{01} + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1\right)\sigma_{02} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{n}_1\cdot\vec{D}_1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1\right)\vec{n}_2\cdot\vec{D}_2 =$$

$$= -\frac{[(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\sigma_2 - (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\sigma_1)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$I = U/R = \frac{\sigma_1\sigma_2 SU}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

- **How about it if σ_1=0?**

- 【例4.2.46】电荷量 **Q** 均匀分布在半径为 **R** 的球体内，球体以角速度 ***ω*** 绕任一过球心的固定转轴转动，求离转轴距离 ***r*** 处的电流密度 ***j***。



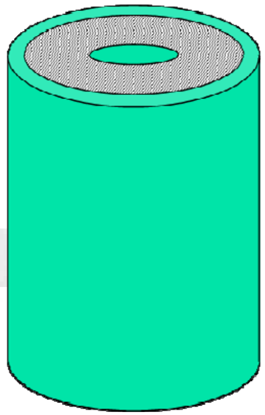
$$dQ = \rho \cdot 2\pi r dS = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot 2\pi r dS$$

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dQ = \frac{3Q\omega}{4\pi R^3} r dS \Rightarrow j = \frac{3Q\omega}{4\pi R^3} r \Rightarrow \vec{j} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- 【例4.2.54】电流在导电物体流过时，单位体积内产生的焦耳热为 $\boldsymbol{j \cdot E}$。

- 【例4.2.55】两个电阻 $\boldsymbol{R_1}$ 和 $\boldsymbol{R_2}$ 并联的电路，流过总电流 **I**，证明电流分配总是使焦耳热最小。

- 【例4.1.2】一导线截面为圆形，其截面积 A 和电导率 σ 都是距离一端距离 x 的函数，如何求导线电阻？
- 【例4.1.3】圆柱形电阻，长为 L，内电极柱半径为 a，外圆筒内径为 b，填充物电阻率为 ρ，求电阻。



- 【例4.2.1】在两层楼道之间安装一电灯，设计一个电路，是的楼上楼下都可以开关这电灯。
- 【例4.2.39】平行板电容器中填满电阻率为 ρ、电容率为 ε 的介质，证明 RC 和放电动力学行为与电容器尺寸无关。
- 【例4.2.40】丹尼尔电池由两个同轴圆筒构成，长为 l，外筒为Cu，内半径为 b；内筒为锌，外半径为 a；中间为电容率 ε、电阻率为 ρ 的 $CuSO_4$ 溶液。求电池内阻 R、电容 C、以及 R 与 C 的关系。

- 【例4.2.56】系统复习一下静电学中的各物理量之量纲。四个基本物理量量纲为长度 ***L***、质量 ***M***、时间 ***T***、电流 ***I***：

$$[q]=TI$$

$$[\vec{E}]=\left[\frac{\vec{F}}{q}\right]=\left[\frac{ma}{q}\right]$$

$$[U]=\left[\vec{E}\cdot\vec{l}\right]$$

$$[\varepsilon_0]=\frac{[q]}{[r^2][\vec{E}]}$$

$$[\vec{D}]=\left[\varepsilon_0\vec{E}\right]$$

$$[\vec{p}]=\left[q\vec{l}\right]$$

$$[\vec{P}]=\left[\frac{\sum\vec{p}}{\Delta V}\right]$$

$$[C]=\left[\frac{q}{U}\right]$$

$$[R]=\left[\frac{U}{I}\right]$$

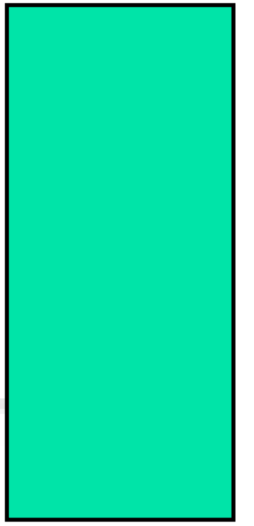
电磁学04-12: 一些练习

- 作业：4.3、4.6、4.8、4.14、4.31

- 电磁学期中考试放在4月26日(周五)　8:00-10:00，
- 地点是仙I-207和仙I-320

电磁学04-12: 一些练习

- 【四题1】如右长方形导体块。从 t=0 开始外加与导体表面垂直的均匀电场 E_0，导体中开始有电流，其左右端面有电荷积累。如果 E_0 不太强，导体中自由电子密度足够高，即其电导率近似为常数。导体左右表面足够大使得边缘效应可以忽略。求导体中电流密度 j 随时间关系。

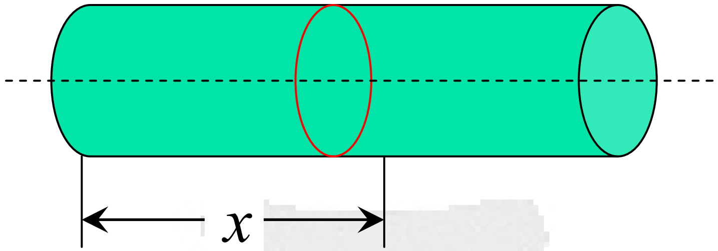


$$\sigma_e = \pm\varepsilon_0 E_0\left(1-\exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t\right)\right)$$

$$j(t) = \sigma E_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t\right)$$

- 【四题2】长圆柱型电阻器截面积为 S，长为 $2L$，电导率为 σ:

$$\sigma=\begin{cases}\sigma_0\left(1+x/L\right), & 0<x<L\\ \sigma_0\left(1+2x/L\right), & L<x<2L\end{cases}$$

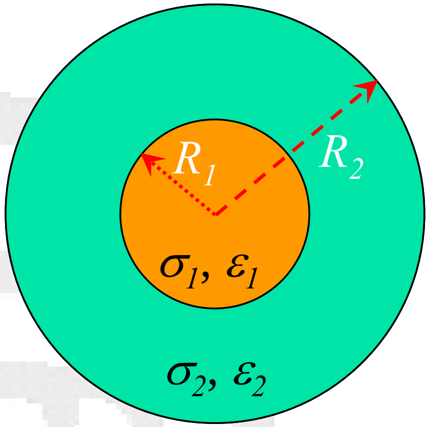


在电阻器两端面之间加电压 ΔU，电流恒定均匀地从一端流入从另一端流出。求：1、电阻器电阻，2、电阻器体电荷密度分布($x=L$ 处除外)，3、电阻器 $x=L$ 处的面电荷密度。

$$1:\ R=\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{L}{\sigma_0 S};\quad 2:\ \rho_e=\begin{cases}-\dfrac{\varepsilon_0\Delta U}{L^2\left(1+x/L\right)^2\ln 2\sqrt{\dfrac{5}{3}}}, & 0<x<L\\ -\dfrac{2\varepsilon_0\Delta U}{L^2\left(1+2x/L\right)^2\ln 2\sqrt{\dfrac{5}{3}}}, & L<x<2L\end{cases};\quad 3:\ \sigma_e=-\frac{\varepsilon_0}{6}\frac{\Delta U}{L\ln 2\sqrt{\dfrac{5}{3}}}$$

- 【四题4】在如图所示的两个球体区域内充斥了两种不同的电介质，它们也部分导电。在球外是真空。在时刻 t=0时，两球面 R_1和 R_2 处都没有自由电荷，而球体内部的自由电荷体密度如下式分布，其中 r 为矢径。求时刻 t 时这两个球面上自由电荷密度，并讨论极限情况。

$$\rho_e(t=0)=\begin{cases}\rho_{e0}, & 0\le r<R_1\\ 0, & R_1<r<R_2\end{cases}$$



$$\sigma_{e1}(t)=\frac{1}{3}R_1\cdot\rho_{e0}\left(\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_2/\sigma_2}\right)-\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_1/\sigma_1}\right)\right)$$

$$\sigma_{e2}(t)=\frac{R_1^3}{3R_2^2}\rho_{e0}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_2/\sigma_2}\right)\right)$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_e\\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{j}=\sigma\vec{E}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\dfrac{\partial\rho_e}{\partial t}=0\end{cases}$$

- 【五题17】一电路有电容 ***C*** 和电阻 ***R*** 串联接在一交流电源上，电容器上无电荷。***t*=0** 时电路接通，但电源电动势满足下式。求电路中电流-时间 ***t*** 的关系

$$\Sigma = \Sigma_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} i(t) &= \frac{\Sigma_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left[\cos(\omega t + \varphi_i) + \frac{1}{\omega RC}\sin\varphi_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] \\ \varphi_i &= \varphi_0 - \varphi' + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi' \Leftarrow \left\{\cos\varphi' = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \sin\varphi' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\right. \end{aligned}}$$