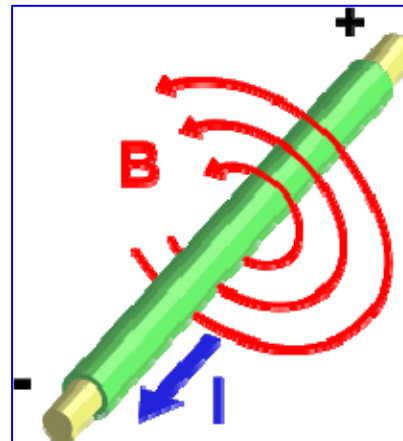


第五章 真空中恒稳电流的磁场



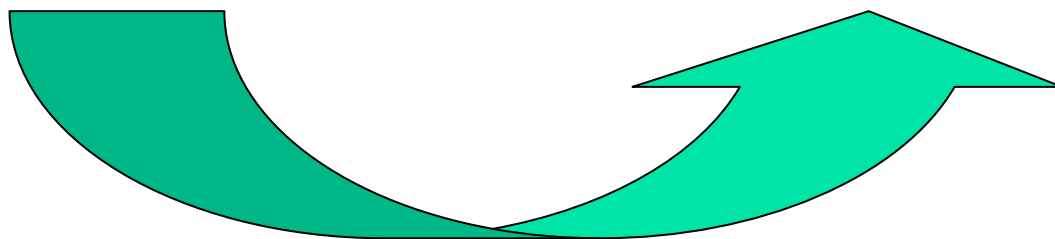


□ 静电场梗概:

- ① 库仑定律(静止、点电荷>面电荷>偶极子)
- ② 高斯定理(积分、微分)
- ③ 电场强度和电势(场)
- ④ 导体(自由电荷、等势体、电容器)
- ⑤ 介质(束缚电荷、极化、宏观场)
- ⑥ 静电场的能量和功能原理
- ⑦ 稳恒电流(闭环回路关系)

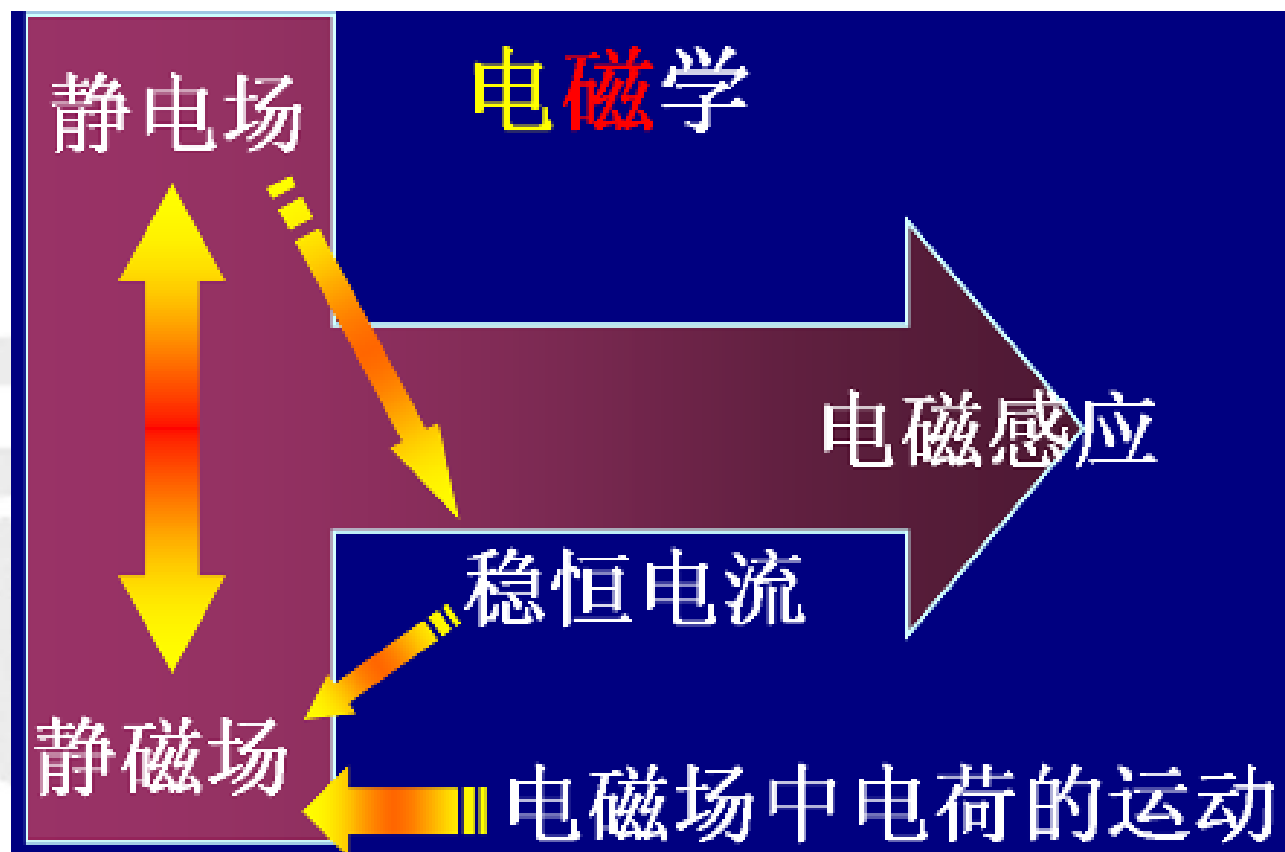
□ 静磁场梗概:

- ① 奥斯特实验 安培定律
- ② 毕奥—萨伐尔定律
- ③ 安培环路定理
- ④ 磁场“高斯定理”磁矢势
- ⑤ 磁场对载流导线的作用
- ⑥ 带电粒子在磁场中的运动





电磁学05-01: 静电学的启发



- 静磁场与静电场的唯像对应性：形式相似
- 电磁场之间的关联与耦合性：物理关联性



电荷	
静电场	稳恒磁场
静止电荷 (库仑定律、叠加原理)	稳恒电流 (毕-萨-拉定律、叠加原理)
电场有保守性，它是 保守场，或有势场 (环路定理)	磁场没有保守性，它是 非保守场，或无势场 (安培环路定理)
电力线起于正电荷 止于负电荷 静电场是有源场 (高斯定理)	磁场线闭合 无自由磁荷 磁场是无源场 (高斯定理)

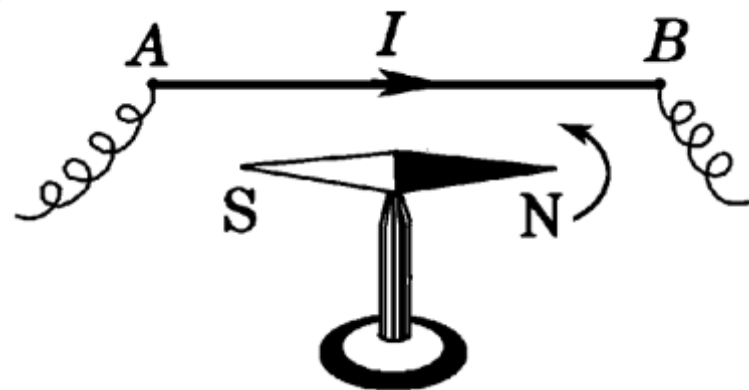


□ 基本实验事实：奥斯特实验



Hans Christian Oersted (1777–1851). Besides his work in electricity and magnetism, Oersted was the first to prepare pure metallic aluminum (1825).

- 19世纪20年代前，磁和电是独立发展的；
- 奥斯特，丹麦物理学家 *Hans Christian Oersted* 深受康德哲学关于“自然力”统一观点的影响，试图找出电、磁之间的关系；
- 1820年7月





电磁学05-02: 磁相互作用

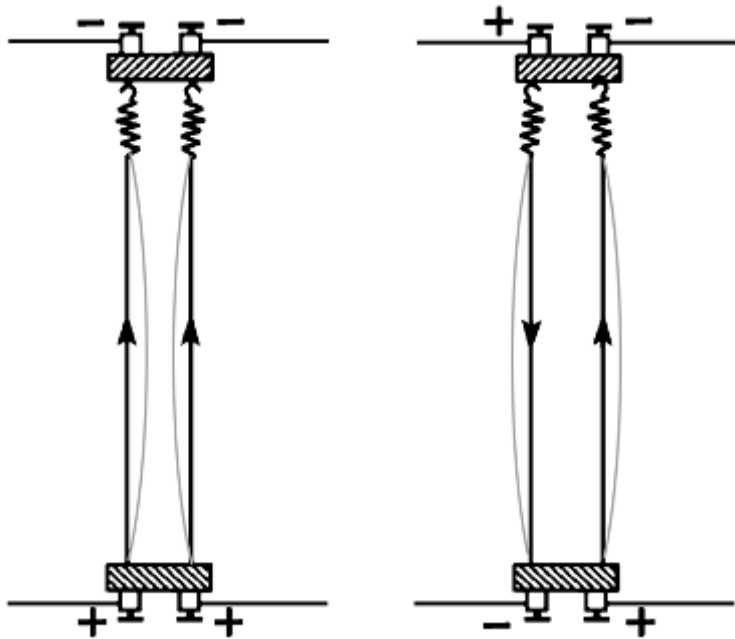
- ❑ 基本实验事实：奥斯特实验长直载流导线与之平行放置的磁针受力偏转——电流的磁效应
 - ❑ 磁针是在水平面内偏转的 ——横向力
 - ❑ 突破了非接触物体之间只存在有心力的观念——拓宽作用力类型
- ❑ 揭示了电现象与磁现象的联系；
 - ❑ 宣告电磁学作为一个统一学科诞生；
 - ❑ 历史性的突破；
 - ❑ 此后迎来了电磁学蓬勃发展的高潮。
- ❑ **Ampere**写道：“**Oerster**先生.....已经永远把他的名字和一个新纪元联系在一起了”；
 - ❑ **Faraday**评论说：“它突然打开了科学中一个一直是黑暗的领域的大门，使其充满光明”。



- 基本实验事实:
- Forces on a Current-Carrying Wire
- Jumping Wire
- Magnetic Field of a Line Current (1)

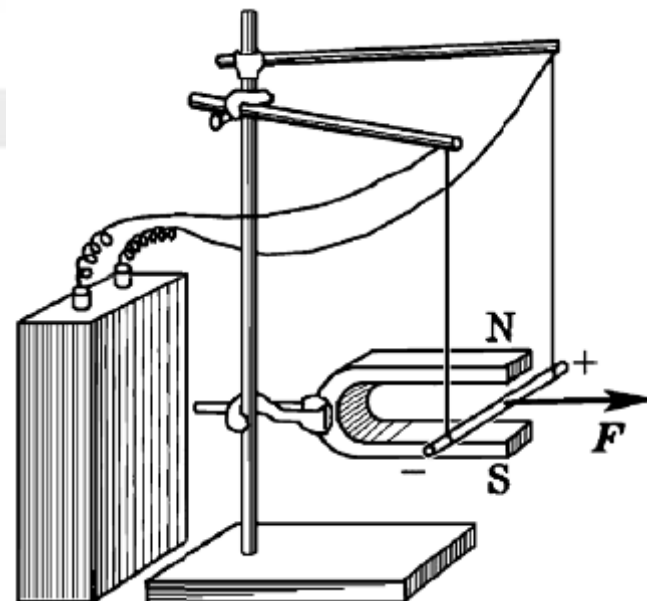


□ 基本实验事实：安培实验



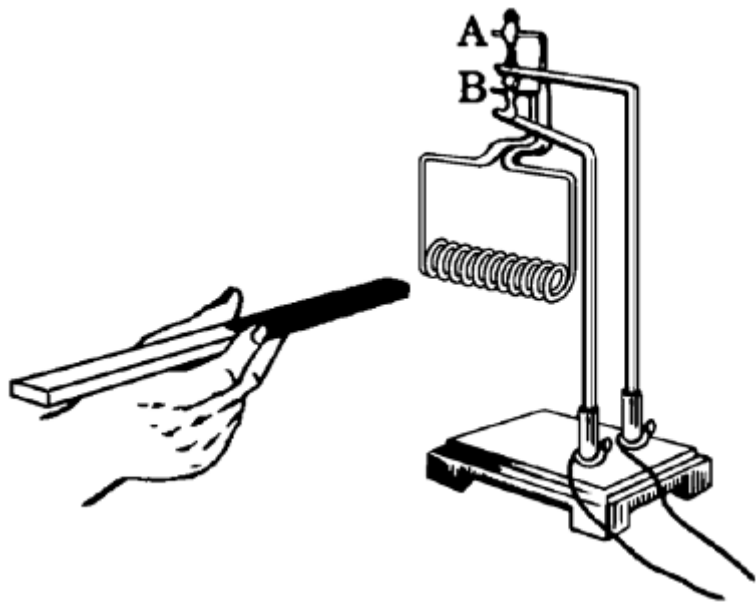
- Ampere 圆电流对磁针作用
- Ampere 平行电流对磁针作用
- Arago 钢片被电流磁化

- 磁铁对电流的作用
- Ampere 通电导线受马蹄形磁铁作用而运动



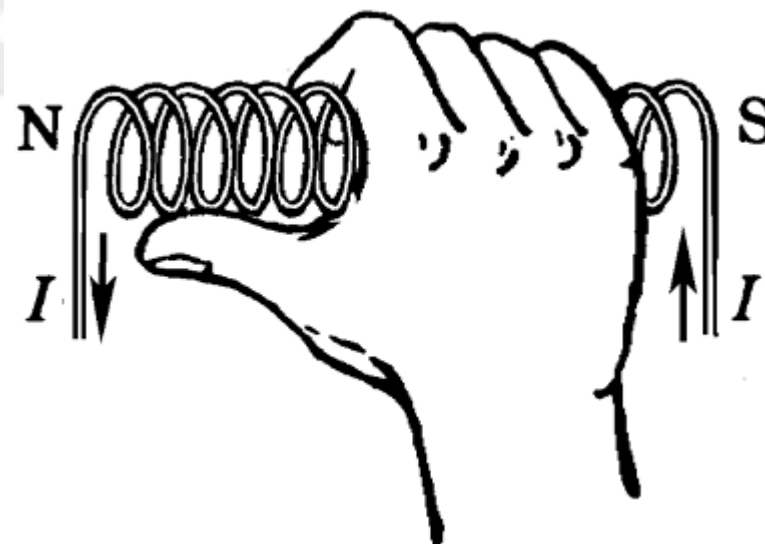


□ 基本实验事实：安培实验



□ Ampere 螺线管与磁铁相互作用时显示出N极和S极

- 确定载流螺线管极性
- 实验表明载流螺线管相当于磁棒，螺线管的极性与电流成右手螺旋关系





电磁学05-02: 磁相互作用

□ 总结基本实验事实:

- ① 天然磁体周围有磁场;
- ② 通电导线周围有磁场;
- ③ **电子束周围有磁场;**
- ④ 通电导线能使小磁针偏转;
- ⑤ 磁体的磁场能给通电导线以力的作用;
- ⑥ 通电导线之间有力的作用;
- ⑦ 磁体的磁场能给通电线圈以力矩作用;
- ⑧ 通电线圈之间有力的作用;
- ⑨ 天然磁体能使电子束偏转。

表现为:
使小磁针偏转

电荷的运动---天啊!

表现为:
相互吸引排斥
偏转等

磁体
电流



磁体
电流

- 天然磁体和运动电荷周围的磁场有互作用
- 不同的运动电荷周围的磁场之间也有互作用



□ 磁相互作用的本质与规律?

- 毕奥—萨伐尔的研究课题
- 安培的研究课题
- 电流产生磁的逆效应
- 电、磁相互作用的传递问题

□ 比照点电荷的库仑定律定义磁荷:

□ Q_{m1} 、 Q_{m2} , 有:

$$F = k \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{r^2} \Leftarrow k = \frac{1}{4\pi\mu_0}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{r^2} \Leftrightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}$$

□ 磁荷的库仑定律要求磁荷存在, 目前为止尚无确凿证据;

□ 但最近在一些自旋冰体系和自旋液体体系中观测到有效磁单极子

□ 自1821安培的分子电流学说, 目前电磁学理论以“一切磁现象都是电流引起的, 不存在磁荷”这一学说为基础的!

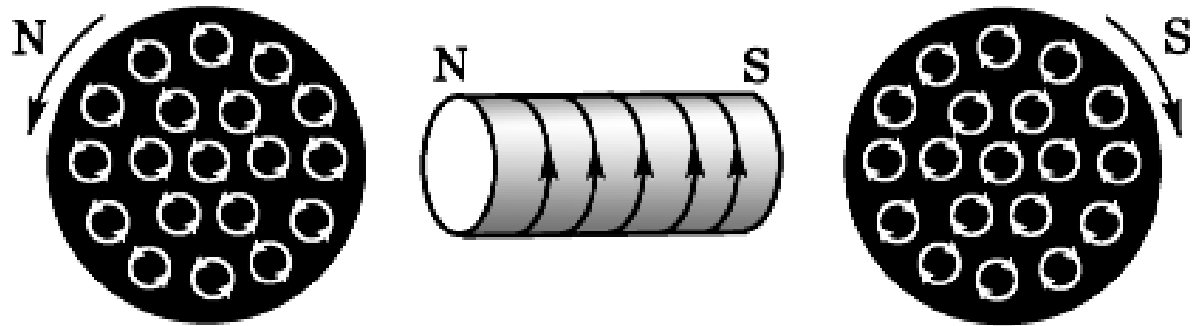
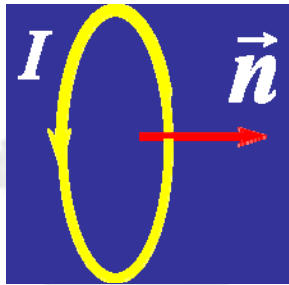


电磁学05-04: 安培的分子电流图像

- ❑ 毕奥—萨伐尔(**Biot-Savart**)的研究: 寻找电流元对磁极作用力的定量规律
 - ❑ 认为电流对磁极的作用力是自然界的基本力
 - ❑ 受 **Oester** 横向力的影响, 认为每一个电流元对磁极的作用力也垂直于导线与磁极构成的平面
 - ❑ 困难是无孤立的电流元
-
- ❑ 安培的研究: 寻找电流产生磁场的规律
 - ❑ 几乎在同样背景下, 安培提出的问题更深入, 显示出大师风范
 - ❑ 安培认为: 磁现象本质是电流、物质的磁性来源于“分子”电流
 - ❑ 这是安培根据实验的种种表现作出的重要的抽象



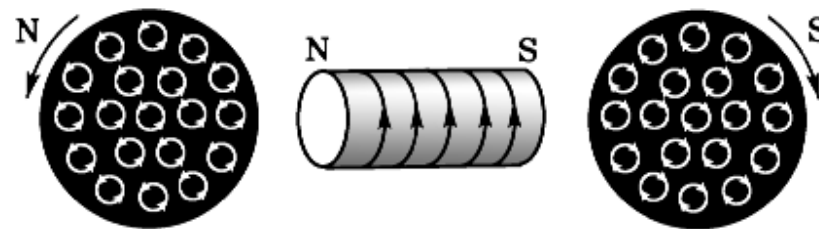
□ “分子”电流



- 所谓“分子”，是指构成物质的基元，当时对物质结构和分子、原子的认识还很肤浅
- 每个分子都有电流环绕着，当分子排列整齐时，它们的电流合起来就可以满足磁棒的磁性所需要的电流
- 磁化可视为使物质中的分子电流排列整齐显示出总体效果



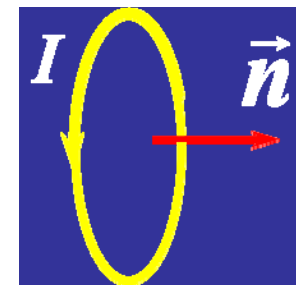
□ “分子”电流



- 以“分子电流”取代磁荷
——能解释磁棒与载流螺线管的等效性
- 可将种种磁相互作用归结为电流之间的相互作用
- 提出寻找任意两个电流元之间作用力的定量规律
——即可解决磁相互作用的问题



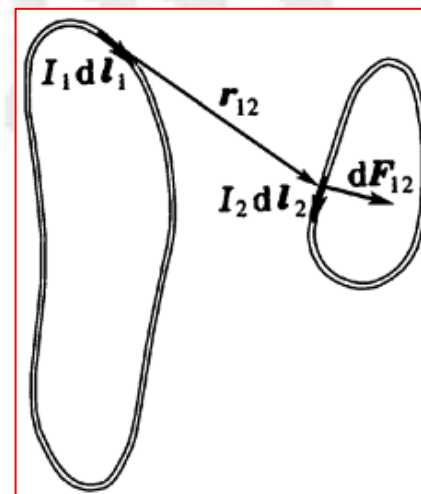
电磁学05-04: 安培的分子电流图像



- ❑ 电荷的运动是一切磁现象的起源:
- ❑ 运动的电荷 \Rightarrow 磁场 磁场 \Rightarrow 对运动电荷有磁力作用

运动电荷 \longleftrightarrow 磁场 \longleftrightarrow 运动电荷

- ❑ 存在的困难:
 - 同样地: 无孤立的电流元;
 - 两电流元及两者连线三者不共面;
 - 涉及的几何因素更多, 难度增大;
 - 安培精心设计了四个示零实验来解决这些困难。
 - (后面会回到这个精彩的问题上来)





电磁学05-05: 磁场与磁感应强度

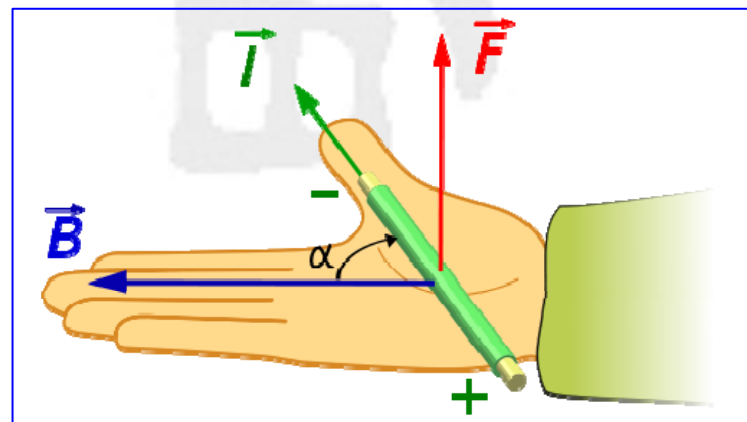
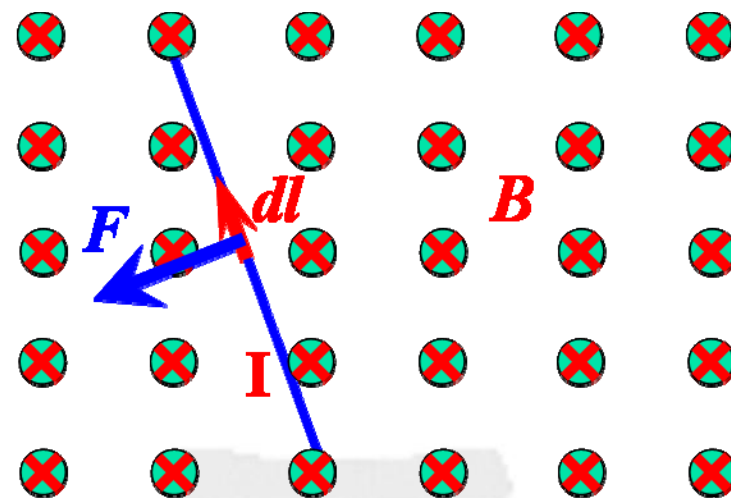
- 均匀磁场对电流元的作用力
- 在假定的“磁场 \mathbf{B} ”大小与取向固定后，有：

$$dF = f(I dl, \alpha) \Rightarrow dF = dF_{\max} \sin \alpha$$

- 无论 α 如何变化， F 总是与 $I dl$ 垂直，虽然大小变化 $\rightarrow \rightarrow$ 所谓横向力！
- 在假定的“磁场 \mathbf{B} ”中， F 的大小与 α 有上述关系，因此可以定义：

$$B = \frac{dF_{\max}}{I dl} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

- 安培力公式； B 的单位是 $\text{N}/(\text{A m})=\text{Tesla}$ (特斯拉)。



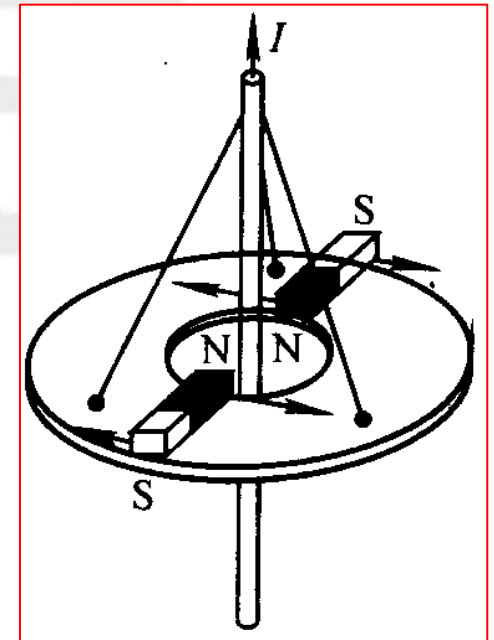
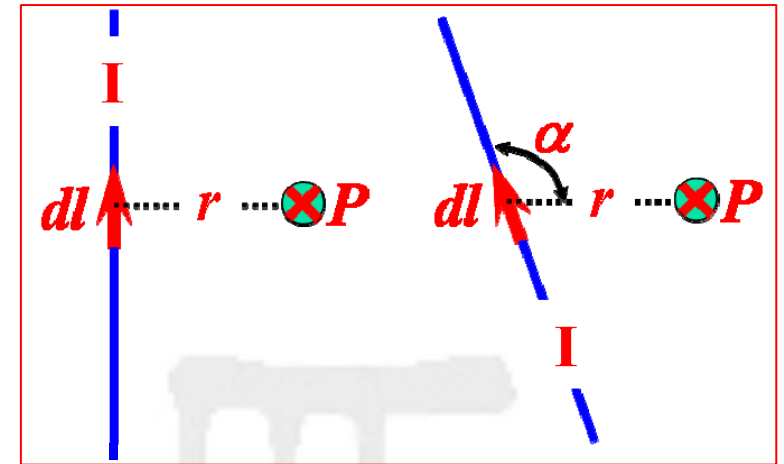


电磁学05-06: 毕奥-萨伐尔定律

- 有了磁场(磁感应强度)的定义, 可以开始讨论电流元产生的磁场 B 了。
- **Biot**和**Savart**通过设计实验研究电流对磁极的作用力;
- 在数学家**Laplace**帮助下, 得出**B-S**定律(早于安培)。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

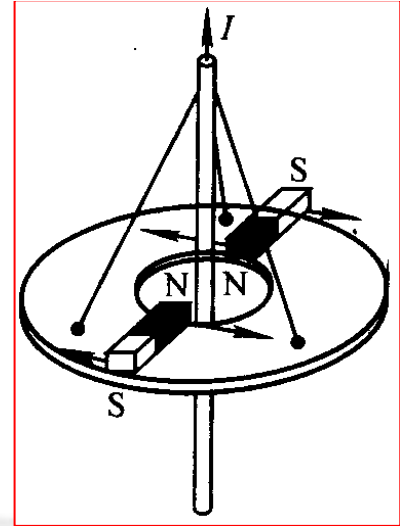
- **Biot**首先重复**Oester**的实验(实验一):
- 测量长直载流导线对单位磁极的作用力;
- 装置: 如图, 沿圆盘径向对称放置一对相同的磁棒;
- 看看是如何分析实验的。





电磁学05-06: 毕奥-萨伐尔定律

□ 逻辑创意:



$$\text{if } \vec{H} \propto \frac{1}{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{H} \Rightarrow \begin{cases} \text{N pole: } H_1 r_1 \propto r_1 / r_1 = C \\ \text{S pole: } H_2 r_2 \propto r_2 / r_2 = C \end{cases} \Rightarrow \sum_i \vec{L}_i = 0$$

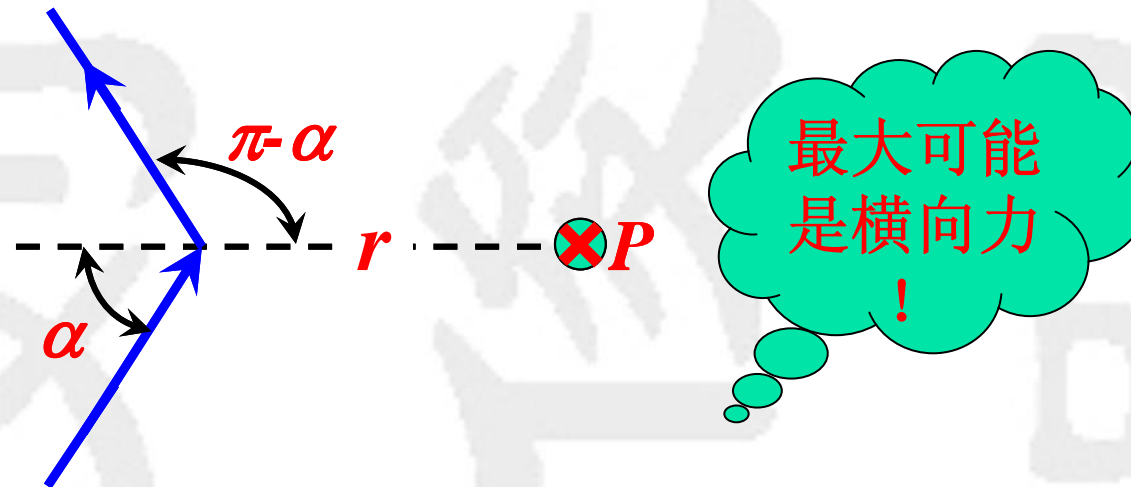
$$\text{if } \vec{H} \neq \sim \frac{1}{r} \Rightarrow H_1 r_1 \neq H_2 r_2 \Rightarrow \sum_i \vec{L}_i \neq 0$$

$$\therefore \vec{H} \propto \frac{1}{r}$$



- B-S设计了实验二：电流折线实验
- 磁极所受作用力方向垂直于折线与磁极构成的平面。

这个实验里，夹角 α 不能接近 π !!



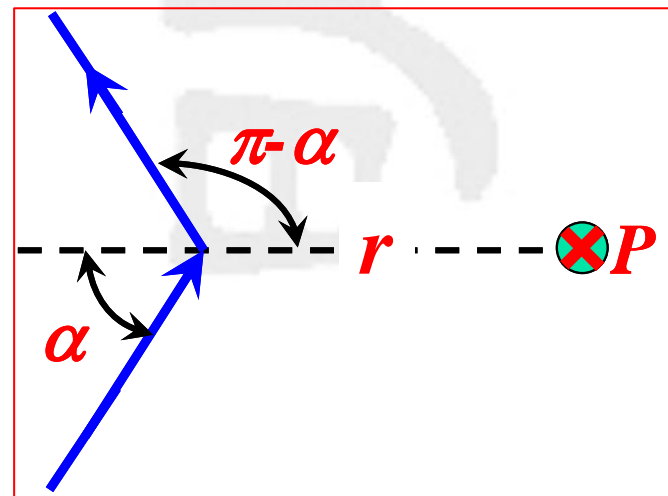
$$\left. \begin{array}{l} \text{if } \alpha = 0, \text{ then } H = 0 \\ \text{if } \alpha = \pi/2, \text{ then } H = H_{\max} \\ \text{if } \alpha = \pi/4, \text{ then } H = 0.414H_{\max} \end{array} \right\} \Rightarrow H_{\text{折}} = k_{\text{折}} \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$$



电磁学05-06: 毕奥-萨伐尔定律

- 由实验证实电流元对磁极的作用力是横向力；
- 整个电流对磁极的作用是这些电流元对磁极横向力的叠加；
- 由对称性，上述折线实验结果中，折线的一支对磁极的作用力的贡献是 $H_{\text{折}}$ 的一半。

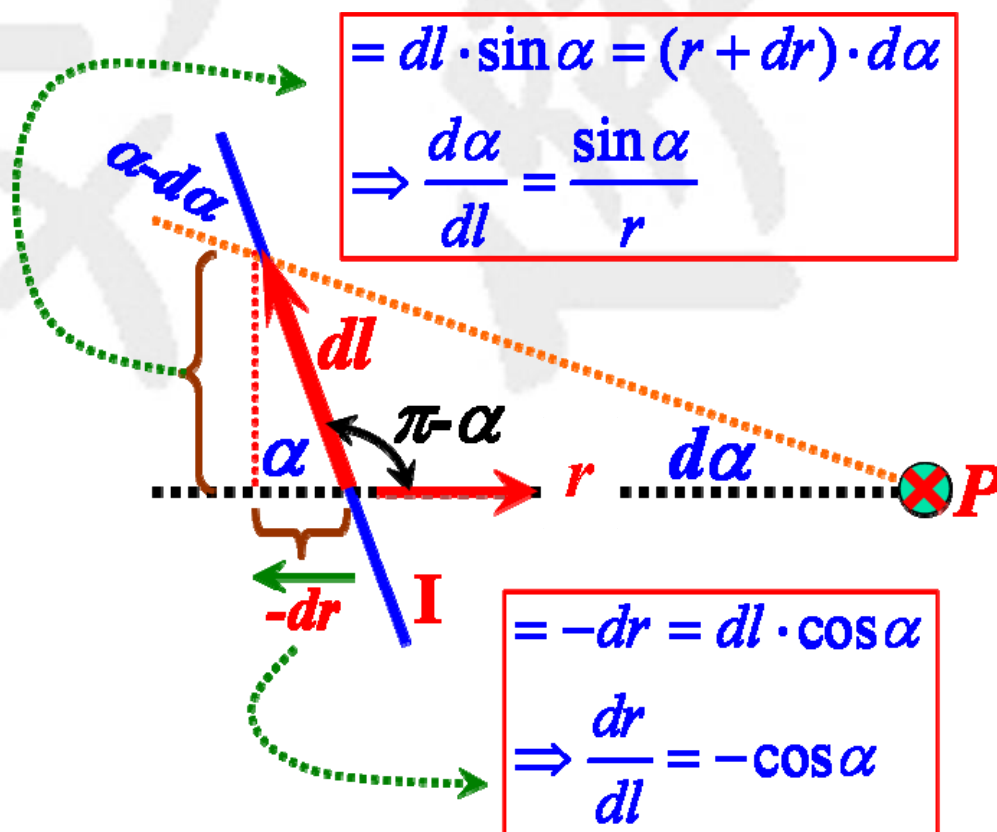
$$H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}, \quad k = \frac{1}{2} k_{\text{折}}$$





□ Laplace参与分析电流元 Idl 对空间 P 点磁极的作用力 dH :

$$dH = \frac{dH}{dl} \cdot dl = \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dl} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dl} \right) dl$$



这里的 r 是任意的，与
前一张slide中的 r 有所
不同。



□ Laplace继续卖萌求 dH :

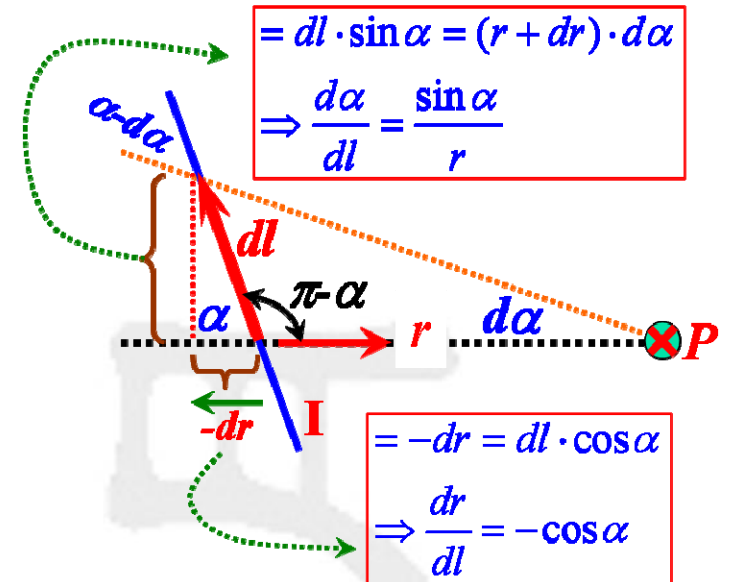
$$dH = \frac{dH}{dl} \cdot dl = \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dl} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dl} \right) dl$$

$$\because H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \frac{\partial H}{\partial \alpha} = k \frac{I}{r} \frac{1}{2 \cos^2 \alpha / 2}, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = -k \frac{I}{r^2} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{again} \because \frac{d\alpha}{dl} = \frac{\sin \alpha}{r}, \quad \frac{dr}{dl} = -\cos \alpha$$

$$\therefore dH = k \frac{I dl}{r^2} \tan \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha) = k \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha$$



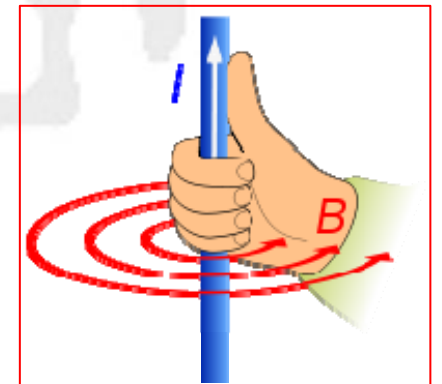
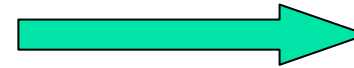


电磁学05-06: 毕奥-萨伐尔定律

- 对磁极的力写成矢量式:
- 考虑到是对磁极的作用力, N极和S极类比于磁荷, 因此, $d\vec{H}$ 实际上就是磁场 $d\vec{B}$, 只是在量纲上做一些统一定义:

$$d\vec{H} = k \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{B} = k \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$





电磁学05-06: 毕奥-萨伐尔定律

□ 磁场叠加原理:

□ 所有电流元激发的 $d\vec{B}$ 的矢量和! \rightarrow

$$\vec{B}_p = \sum \vec{B}_i$$

□ 闭合电流在空间所产生的磁场为: \rightarrow

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

□ 闭合电流在磁场中受到的力: \rightarrow

$$\vec{F} = \oint Id\vec{l} \times \vec{B}$$

□ 若电流散发在广延的导体中:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} d\tau$$

$$\vec{F} = \int (\vec{j} \times \vec{B}) d\tau$$



电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

- 计算简单电路的磁场：基本方法
- (1) 选取电流元 Idl 或选取典型载流导线元，写出其 $d\mathbf{B}$;
- (2) 建立坐标系，对 $d\mathbf{B}$ 求矢量和或分量求和，注意磁场的分布;
- (3) 对某些载流导体的组合体，直接应用叠加原理计算。



电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

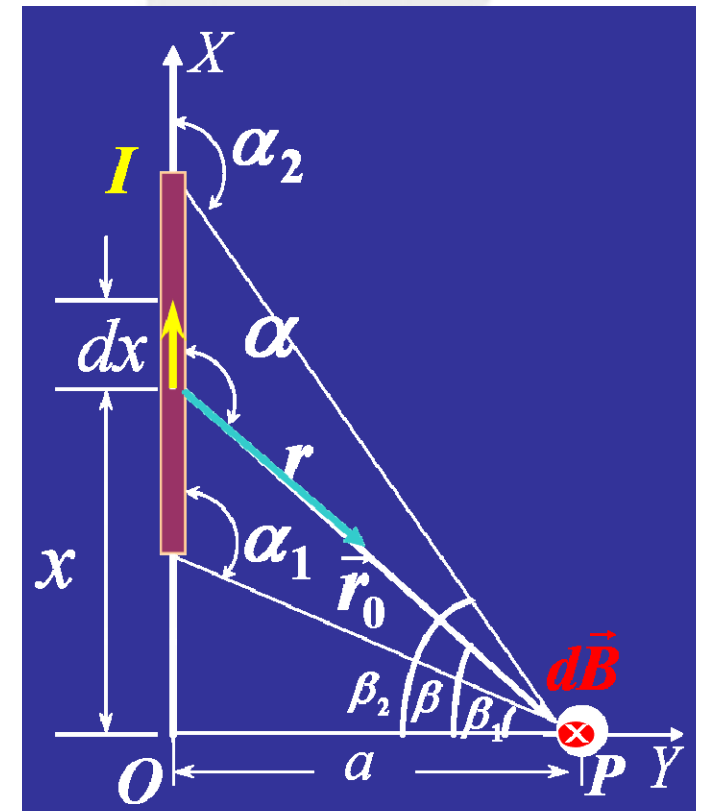
- 【例1】载流直导线产生的磁场
- 真空中，坐标系 XOY ，参量 I, α_1, α_2, a ;
- 任取电流元 $I dx$ ，建立磁场 $d\vec{B}$ (大小及方向)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \alpha}{r^2} \Rightarrow$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \alpha}{r^2}$$

- Magnetic Field of a Line Current (2)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$





电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

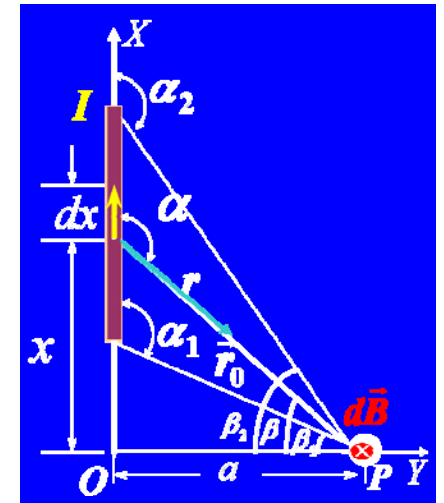
□ 统一积分变量:

$$x = a \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -a \operatorname{ctg} \alpha \begin{cases} dx = a \csc^2 \alpha d\alpha \\ r = a / \sin \alpha \end{cases}$$

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha dx}{r^2} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} I \sin \alpha \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0}{4\pi a} I \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$



□ 推广与推论:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

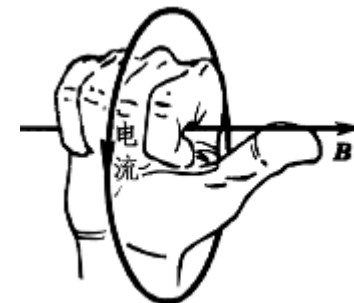
$$\alpha_1 = \pi/2, \alpha_2 = \pi \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$



电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

□ 【例2】载流圆线圈轴线上的磁场

□ 已知 I, R, r_0 , 由对称性, 只有轴线上分量非零



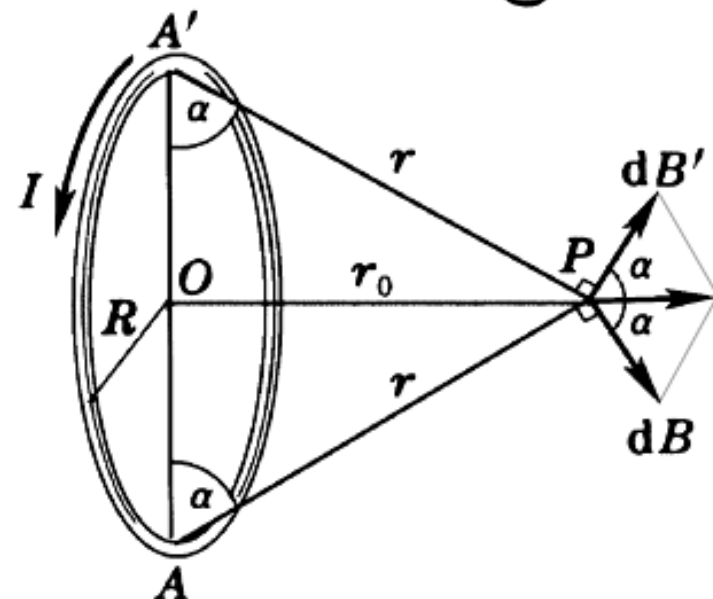
$$B_r = \int dB_r = \int dB \cos \alpha \Rightarrow$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \theta \leftarrow \theta = \pi/2, \quad r \sin \alpha = r_0$$

$$B_r = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \alpha = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r_0^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \oint dl = \frac{\mu_0 IR \cdot 2\pi R}{4\pi (R^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}$$

$$r_0 \rightarrow 0, \quad B_r = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi R^3}$$

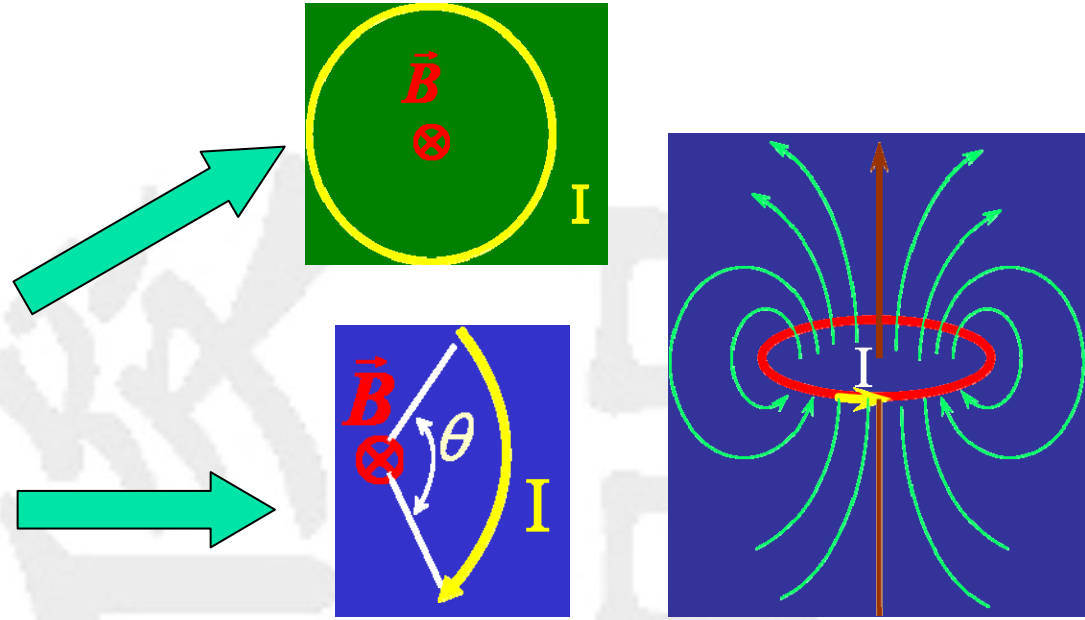




电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

□ 推广与推论:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \Leftrightarrow \theta = 2\pi$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R}$$



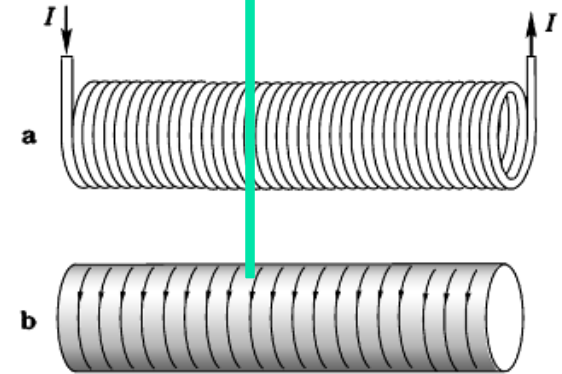
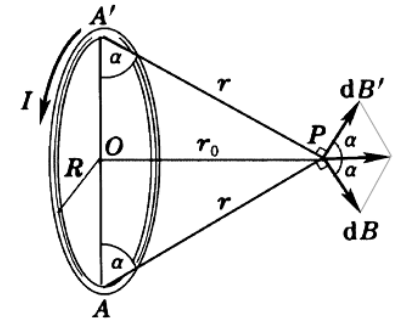


电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

□ 【例3】载流螺线管中的磁场

- 长为 L 、匝数为 N 密绕螺线管，忽略螺距，半径为 R ；一匝线圈轴线上的场可用圆电流结果；
- 针对轴线上的 P 点(线圈匝密度 n)。

$$B_r = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$$

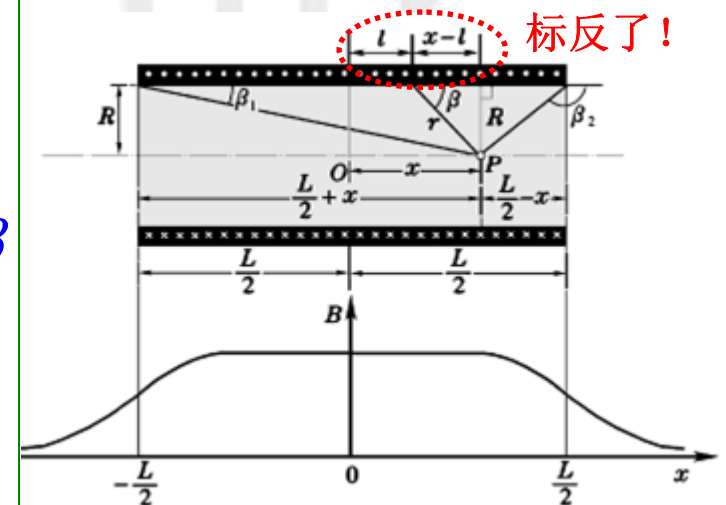


$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2 n dl}{r^3} \Rightarrow B = \int dB = \frac{\mu_0}{2} \int \frac{IR^2 n dl}{r^3}$$

$$\because l = R \cot \beta, \quad \therefore dl = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \quad \& \quad \frac{R}{r} = \sin \beta$$

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 n I R^2}{2r^3} \left(-\frac{R}{\sin^2 \beta}\right) d\beta = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \beta d\beta$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$





电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

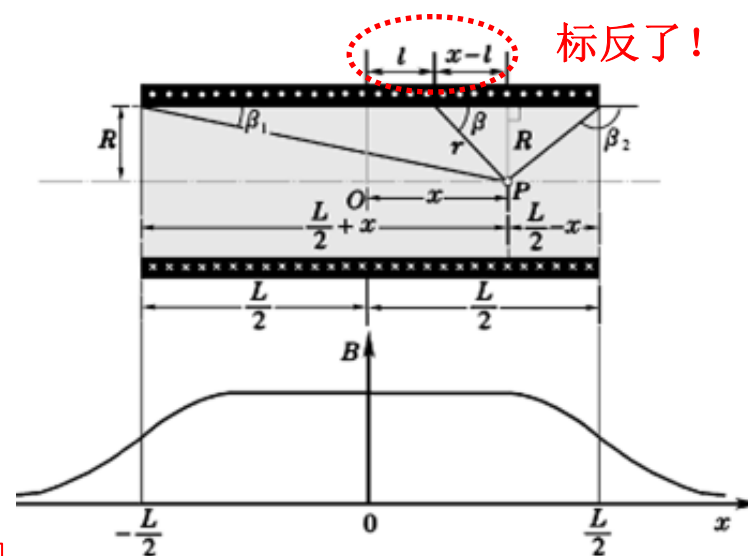
- 推论:
- 无限长或者半无限长螺线管有:

均匀磁场

$$L \Rightarrow \infty, \beta_1 = \pi, \beta_2 = 0 \Rightarrow B = \mu_0 n I$$

$$\beta_1 = \pi, \beta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \& \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$

- 请证明事实上螺线管内处处磁场均匀!
- 看一段录像: Field of a Circular Cylindrical Solenoid





电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

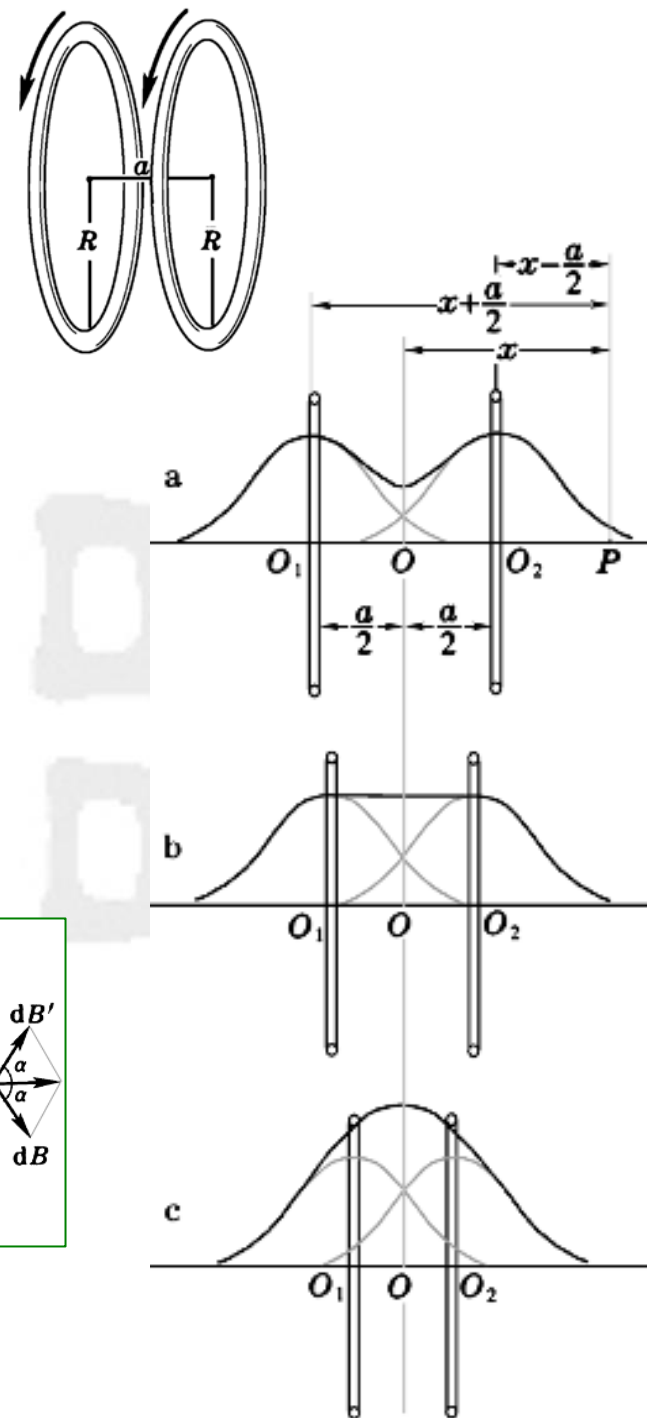
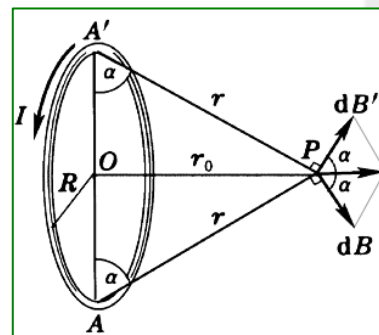
□ 【例4】亥姆霍兹线圈

- 结构：一对间距等于半径的同轴载流圆线圈；
- 用处：所需磁场不太强时，用来产生均匀磁场；
- 命题：证明线圈在轴线中心附近的磁场最为均匀；
- 将两单匝线圈轴线上磁场叠加。

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{3/2}}$$

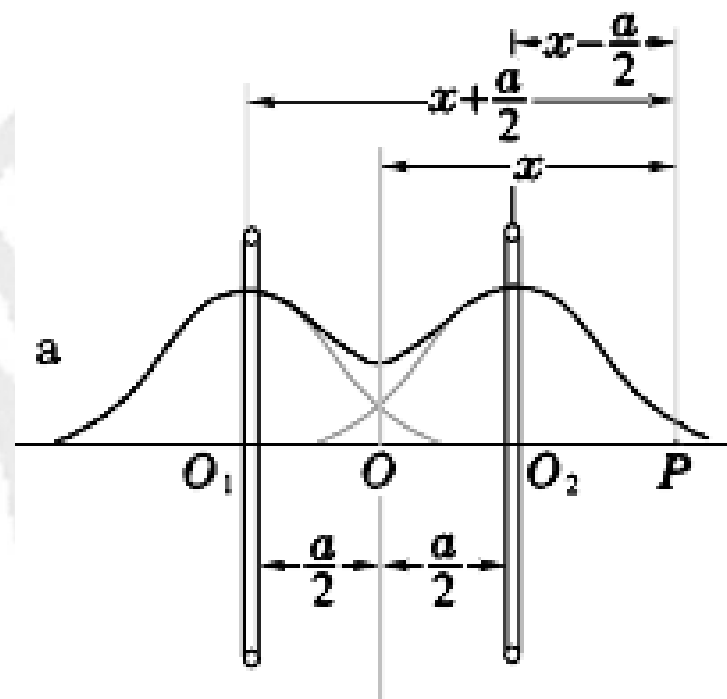
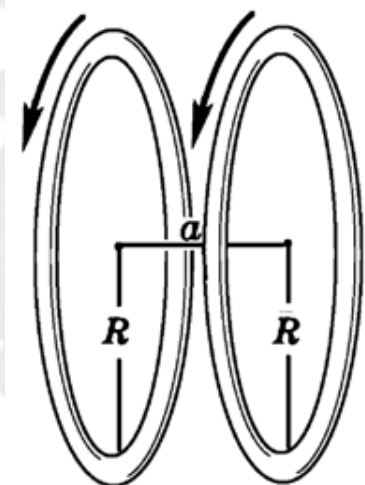
$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$B = B_1 + B_2$$





□ Field of Square Pair of Coils





电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

□ 求一阶和二阶导数:

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{x + \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{5/2}} + \frac{x - \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{5/2}} \right\}$$
$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{4 \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{7/2}} + \frac{4 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{7/2}} \right\}$$

□ 在 $x=0$ 处二阶导数为零时轴线中心点磁场最均匀的条件:

$$\left. \frac{d^2 B}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \frac{2a^2 - 2R^2}{2 \left[R^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{7/2}} = 0 \Rightarrow a^2 = R^2 \Rightarrow a = R$$



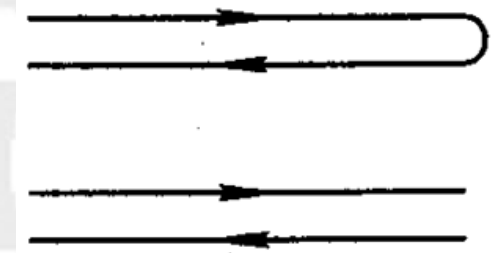
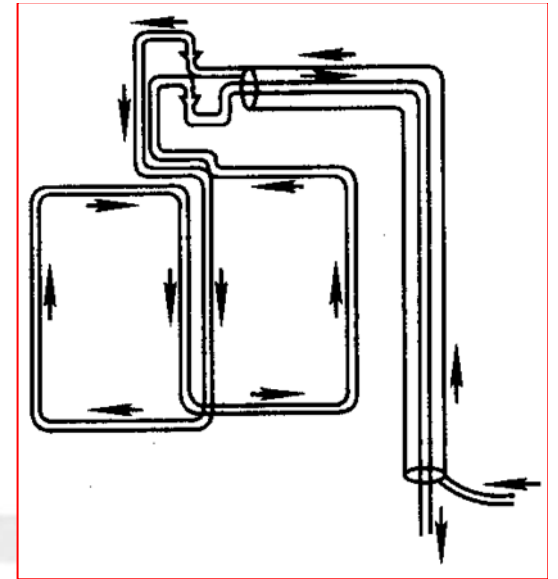
电磁学05-07: 毕奥-萨伐尔定律的应用

- 注意点:
- 原则上, **B-S 定理**加上**叠加原理**可求任何载流导线在空间的 B ;
- 实际上, 只在电流分布具有一定对称性, 能够判断其磁场方向, 并可简化为标量积分时, 才易于求解;
- 为完成积分, 需要利用几何关系, 统一积分变量;
- 一些重要的结果应牢记备用;
- 如果对称性有所削弱, 求解将困难得多
 - 如圆线圈非轴线上一点的磁场, 需要借助特殊函数才能求解
 - 又如在螺距不可忽略时, 螺线管的电流既有环向分量又有轴向分量, 若除去密绕条件, 就更为复杂。



电磁学05-08: 安培定律

- 针对电流元之间磁相互作用，安培通过四个“精致”实验及前人观测总结出安培定律。
- 无定向秤的使用，它对均匀磁场无响应；但对非均匀磁场有响应(为什么?)。
- 实验一：
 - 用对折导线，在其中通以大小相等、方向相反的电流，把它移近无定向秤附近的的不同部位，观察无定向秤的反应；
 - 结果：无定向秤不动；说明当电流反向时，它产生的作用力也反向；
 - 数学表达：

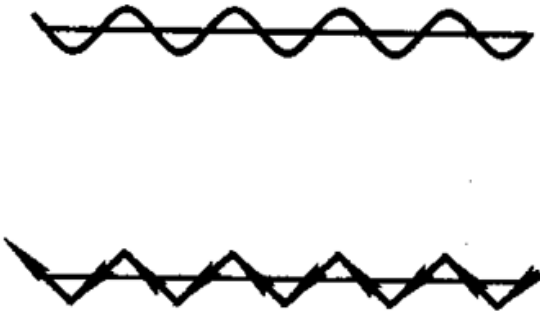


$$\begin{aligned} dF_{12} &\propto I_1 dl_1 \\ dF_{12} &\propto I_2 dl_2 \end{aligned}$$



□ 实验二:

- 用载流曲折线对无定向秤无作用;
- 电流元具有矢量性。



$$I_1 d\vec{l}_1$$

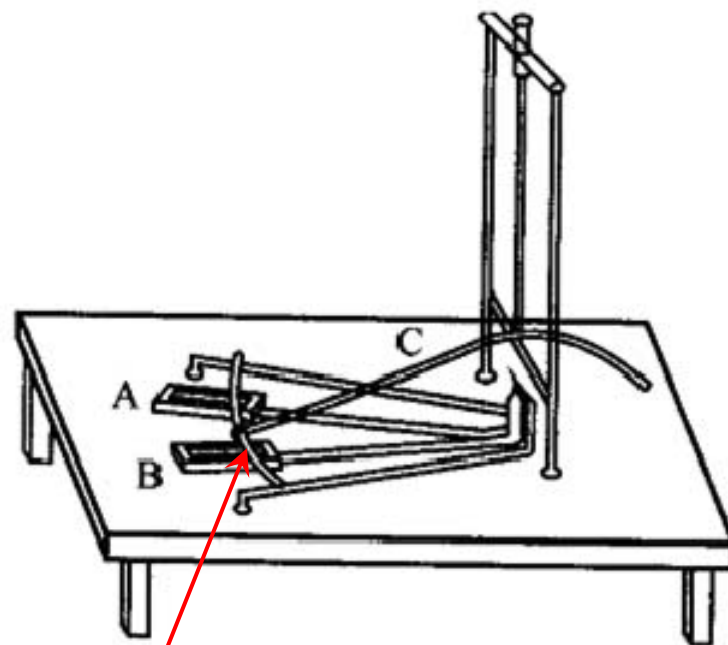
$$I_2 d\vec{l}_2$$



□ 实验三：装置如图

- 只允许圆弧形导体沿其切线方向运动而不允许圆弧形导体沿着与其垂直的方向运动；
- 结果：圆弧导体不动；
- 说明：作用在电流元上的力是与它垂直的——横向力。

$$d\vec{F}_{12} \perp d\vec{l}_2$$
$$\oint_{l_1} d\vec{F}_{12} \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

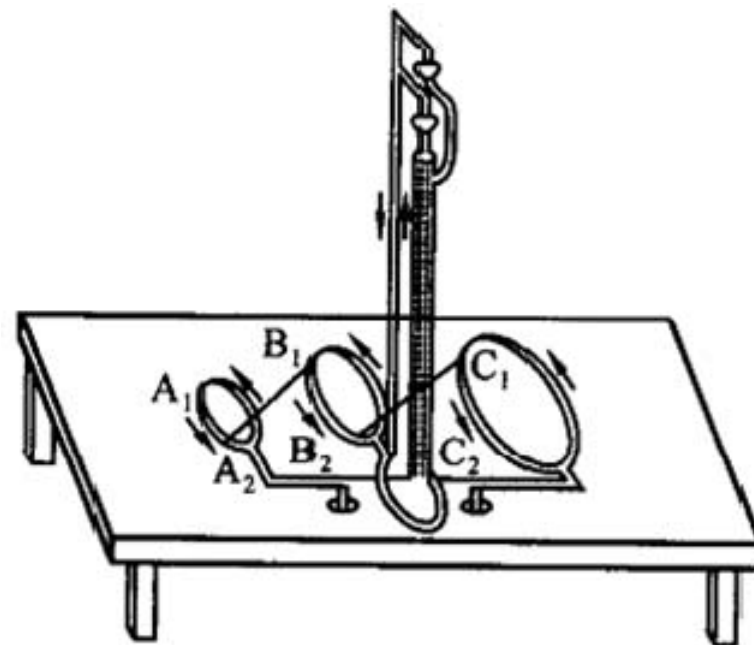


A和B为磁铁或者线圈，产生向上的磁场。箭头指的弧线可以在支撑架上沿圆弧切线滑动，但固定钩C勾住圆弧使之不能沿圆弧矢径方向运动。



□ 实验四:

- 圆线圈A/B/C线度之比为1/n:1:n，A与B距离以及B与C距离比为1:n，A与C固定并串联，电流相同；线圈B可以活动，通以另一电流；
- 结果：B不动；
- 结论：所有几何线度增加同一倍数，作用力不变。



$$dF_{12} \propto \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2}$$



- 根据安培的假设：两个电流元之间的相互作用沿它们的连线，相当于承认：

$$d\vec{F}_{12} = -\vec{r}_{12} [***** \text{多个标量项} \dots\dots]$$

- 假设的目的是期望电流元之间作用力满足牛顿第三定律，由此推出公式：

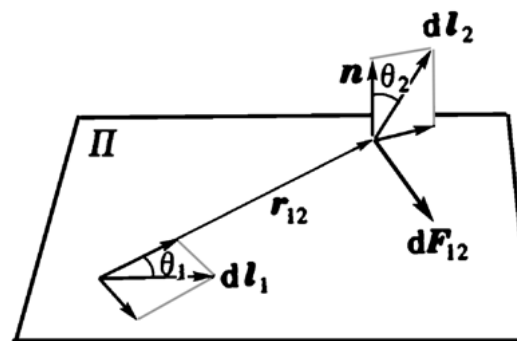
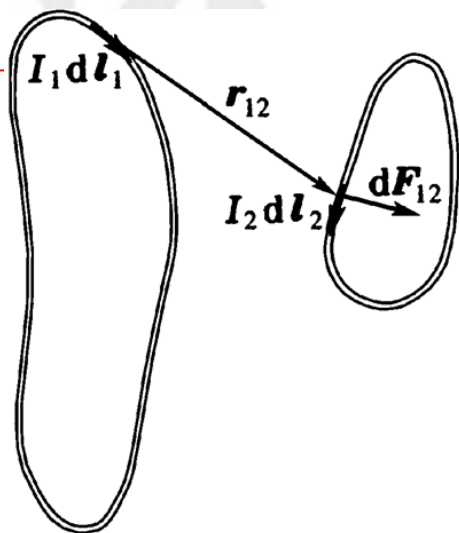
$$d\vec{F}_{12} = -kI_1I_2\vec{r}_{12} \left[\frac{2}{r_{12}^3} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - \frac{3}{r_{12}^5} (d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12})(d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}) \right]$$



电磁学05-08: 安培定律

- 实际没有孤立的电流元，两个孤立电流元不一定满足牛顿第三定律，横向力并不一定沿连线，此条件应该去掉。
- 后人重新整理为：

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \\ = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}$$





□ 被Maxwell誉为“科学中最光辉的成就之一”；Ampere本人则被誉为“电学中的Newton”；

□ 实际上原始安培公式很不好使用。

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

□ 启示：

- 安培从错综复杂的现象与联系中，提炼出磁现象的本质——独具慧眼
- 提出寻找电流、电流之间的相互作用的定量规律问题——问题的深度、广度和重要性高于其他同代人提出的问题，显示出大师风范，也反映了正确抽象、洞察本质的重要性；
- 在解决问题上，面对难以测量的困难，巧妙地设计示零实验，设计与理论猜测相结合，揭示出电流元相互作用应具有的特点，采用矢量点乘、叉乘来表示 $d\vec{l}_1$ 、 $d\vec{l}_2$ 、 \vec{r}_{12} 之间的关系。



□ 提出的课题:

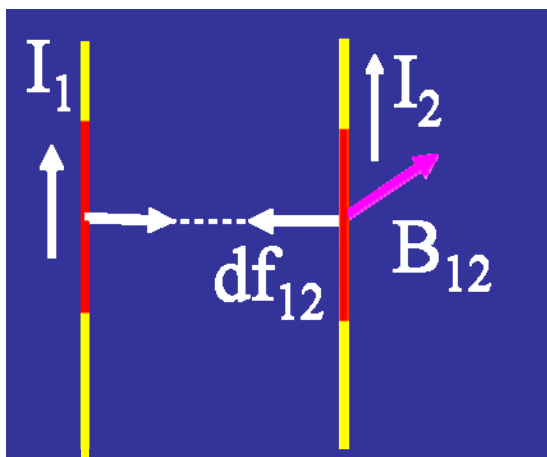
- 电流产生磁的逆效应的问题: 将导致电磁感应现象的发现。
- 电、磁相互作用的传递问题: 超距作用和近距作用的论争再次激化, 将导致电磁场理论的建立。

□ 探测磁场: Voltmeter Reading Induced by Magnetic Induction

□ 探测磁场: Field of Square Pair of Coils



□ 平行电流线之间通过磁场传递的相互作用力:



$$d\vec{f} = I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = \int d\vec{f}$$

$$df_{12} = B_{12} I_2 dl_2 \sin(I_2 d\vec{l}_2, \vec{B}_{12})$$

$$\because B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}, \quad \therefore df_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$

$$\frac{df_{12}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \Leftrightarrow \frac{df_{21}}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

□ 电流单位“安培”的定义: 放在真空中的两条无限长平行导线, 通有相等的稳恒电流, 若两导线相距1m, 而每一导线每米长度上所受另一导线对它的作用力为 $2 \times 10^{-7} \text{N}$, 则导线上的电流定义为1A。

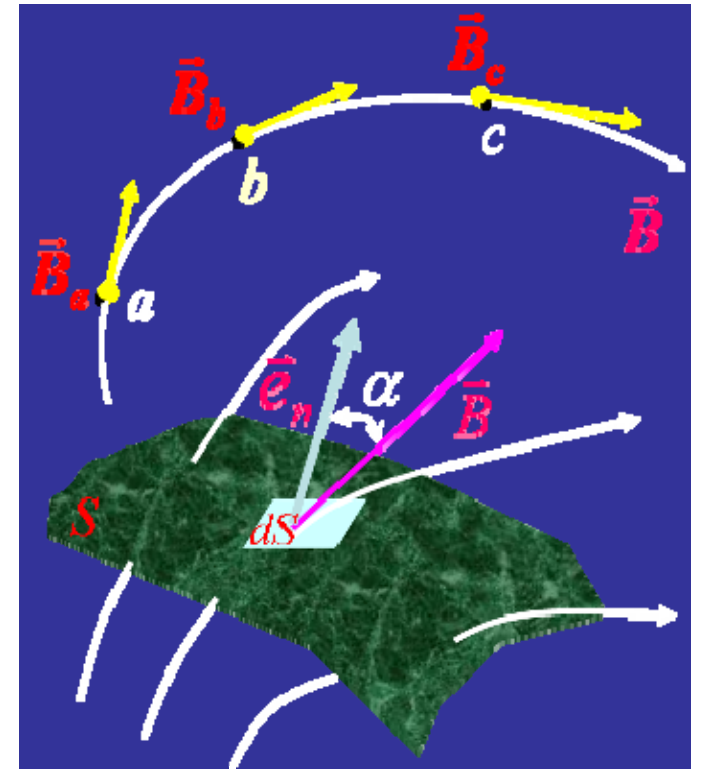
□ 电流天平实验。



电磁学05-09: 磁场的“高斯定理”

□ 磁通量：任意磁场，磁通量定义为

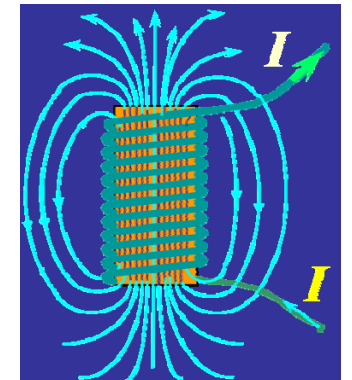
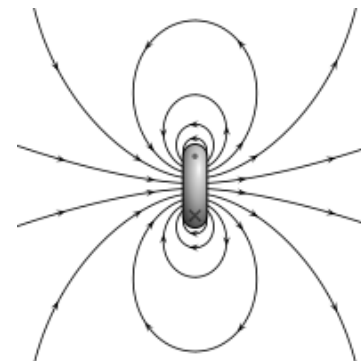
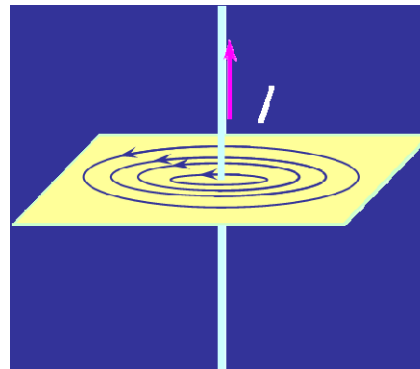
$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



□ 磁感应线：与电场线类似，定性表述大小方向。

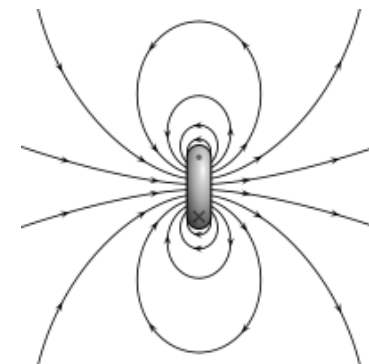
□ 方向沿切线，密度遵循

$$B = \frac{d\Phi_m}{dS_{\perp}}$$





电磁学05-09: 磁场的“高斯定理”

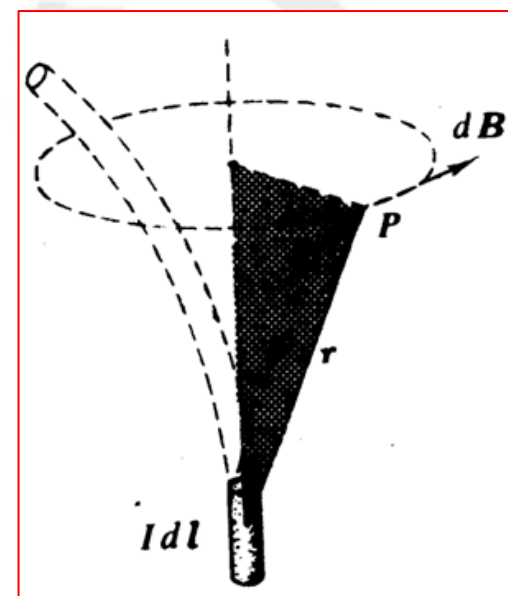


- 磁感应线的特点：环绕电流的无头无尾的闭合线或伸向无穷远。

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

磁高斯定理，无源场

- 磁高斯定理：通过磁场中任一闭合曲面 S 的总磁通量为零。
- 单个电流元 $I dl$ 的磁感应线：以 dl 方向为轴线的一系列同心圆，圆周上 B 处处相等；





电磁学05-09: 磁场的“高斯定理”

- 考察任一磁感应管(正截面为 dS), 取任意闭合曲面 S , 磁感应管穿入 S 一次, 穿出一次;

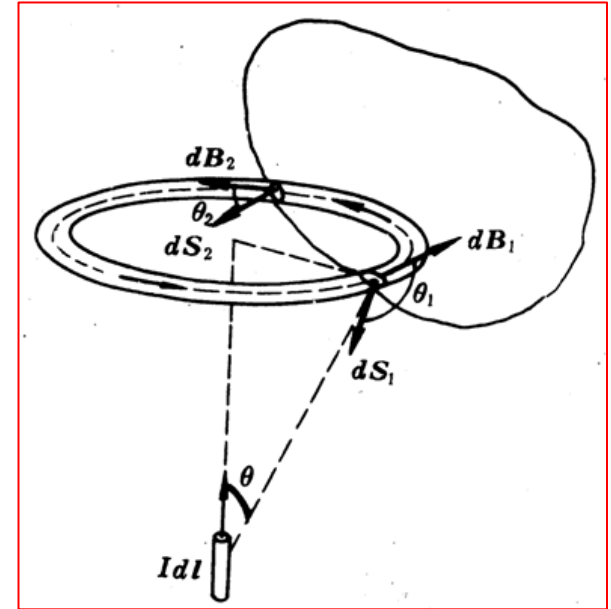
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

$$\therefore -dS_1 \cos \theta_1 = dS_2 \cos \theta_2 = dS$$

$$d\Phi_{B_1} = d\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS_1 \cos \theta_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS$$

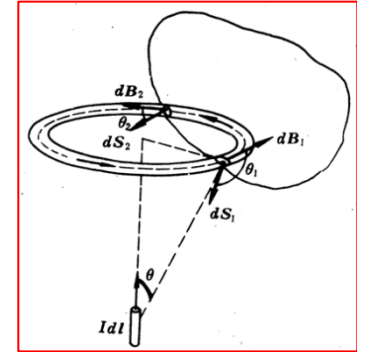
$$d\Phi_{B_2} = d\vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS_2 \cos \theta_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS$$

$$d\Phi_B = d\Phi_{B_1} + d\Phi_{B_2} = 0$$





电磁学05-09: 磁场的“高斯定理”



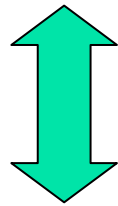
- 结论：任一磁感应管经闭合曲面 S 的磁通量为零；
- 一个电流元产生的磁场可看成由许多磁感应管组成；
- 有的穿入又穿出，有上述结论；
- 有的没穿过 S ，磁通量为零；
- 任意载流回路——由许多电流元串联而成，由叠加原理得；
- 结论：通过磁场中任一闭合曲面 S 的总磁通量恒等于零。



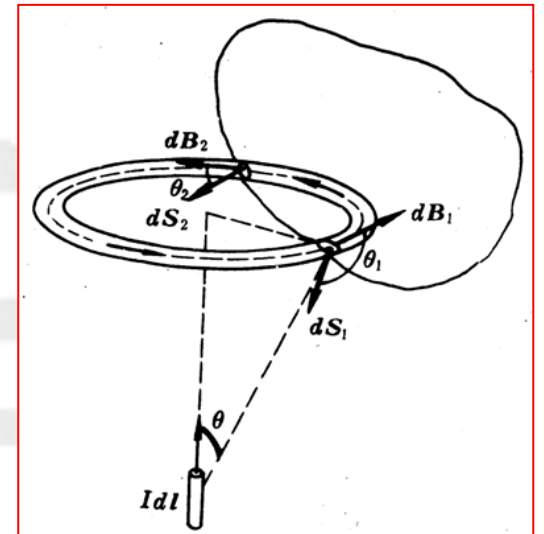
电磁学05-09: 磁场的“高斯定理”

□ 微分形式：说明恒磁场的散度为零——无源场

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$
$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0$$



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{s \text{ 内}} Q$$

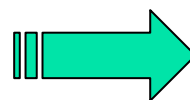




电磁学05-10: 安培环路定理

□ 从简单类比开始:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$$

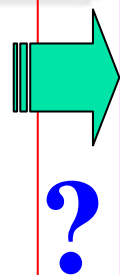
□ 以无限长载流导线为例:

$$(1) B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$(2) \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{a \rightarrow b} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{b \rightarrow c} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{c \rightarrow d} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{d \rightarrow a} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_a} \overline{ab} + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \overline{cd} + 0$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_a} (r_a \varphi) - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} (r_c \varphi) = 0$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 围}} I$$

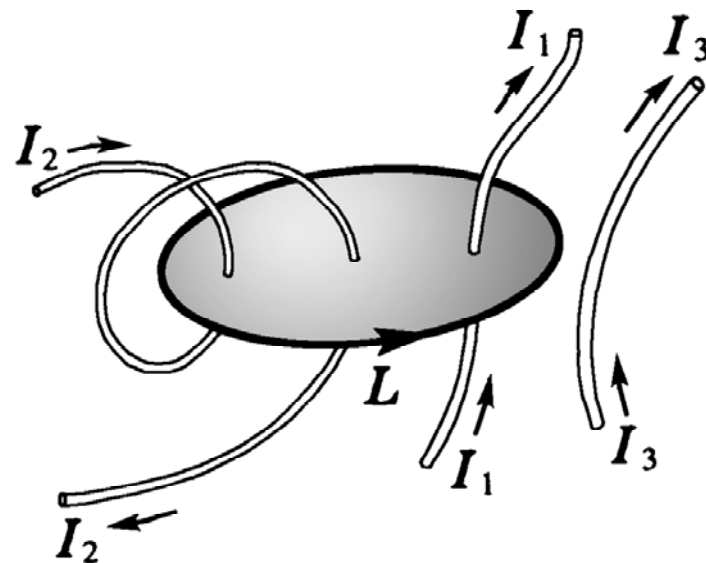




电磁学05-10: 安培环路定理

- 以闭合导线为例：虽然微积分证明比较复杂，但结果是一样的；
- 各种严格的证明在电动和网络上可以找到，后面提供一种证明。
- 对于任何闭合电路所产生的磁场：

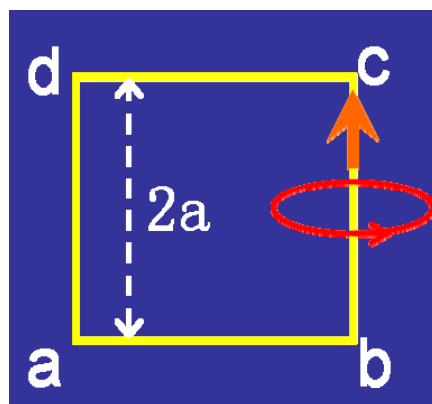
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I \Leftrightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$





电磁学05-10: 安培环路定理

- 不闭合的稳恒电流激发的分磁场，安培环路定理并不成立（无限长直载流导线在无穷远处闭合的）。

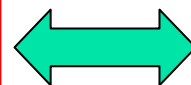


$$B_{bc} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi(a^2 + r^2)^{1/2}}$$
$$\oint \vec{B}_{bc} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I a}{(a^2 + r^2)^{1/2}} \neq \mu_0 I$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- 广延电流形式和微分形式：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$
$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$



说明 \vec{B} 的旋度不为零——有旋场



□ 严格证明安培环路定理

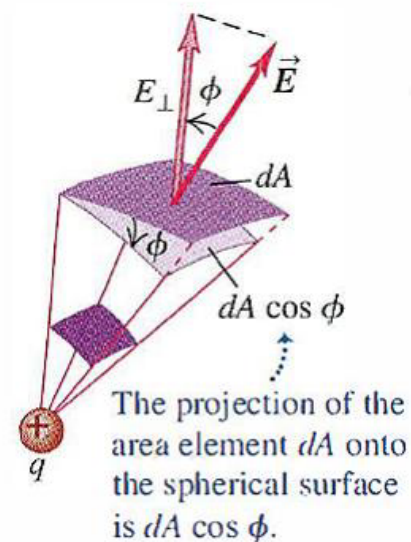
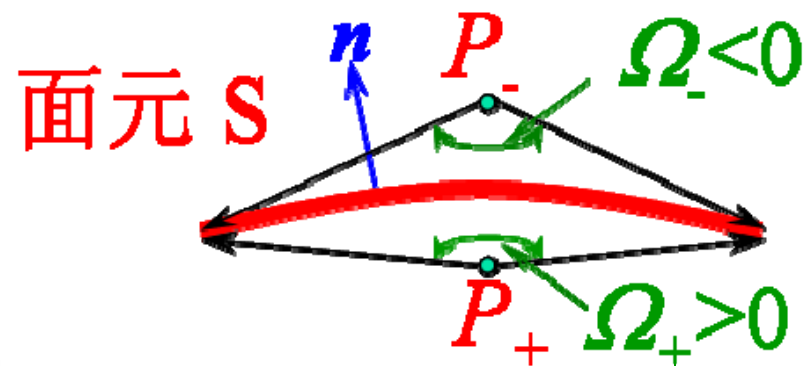
□ 预备知识: 对于曲面元 S , 其外法向 n 。其内外两侧各有场点 P_+ 和 P_- 。

□ 面元 S 对 P_+ 所张的球面角 $\Omega_+ > 0$, 而对 P_- 所张的球面角 $\Omega_- < 0$ 。

□ 当 P_+ 和 P_- 都无限靠近球面内外侧时, 这两个球面角的绝对值之和正好无限接近一个完整球面对球心所张的球面角 4π :

$$\Omega_+ - \Omega_- = |\Omega_+| + |\Omega_-| = 4\pi$$

□ 也就是说, 通过一个路径(此路径不穿过面元 S) 从 P_- 到达 P_+ 时, 对应的球面角刚好变化 4π 。





电磁学05-10: 安培环路定理

- 考虑一电流环 L_1 在 P 点产生的磁场，满足：

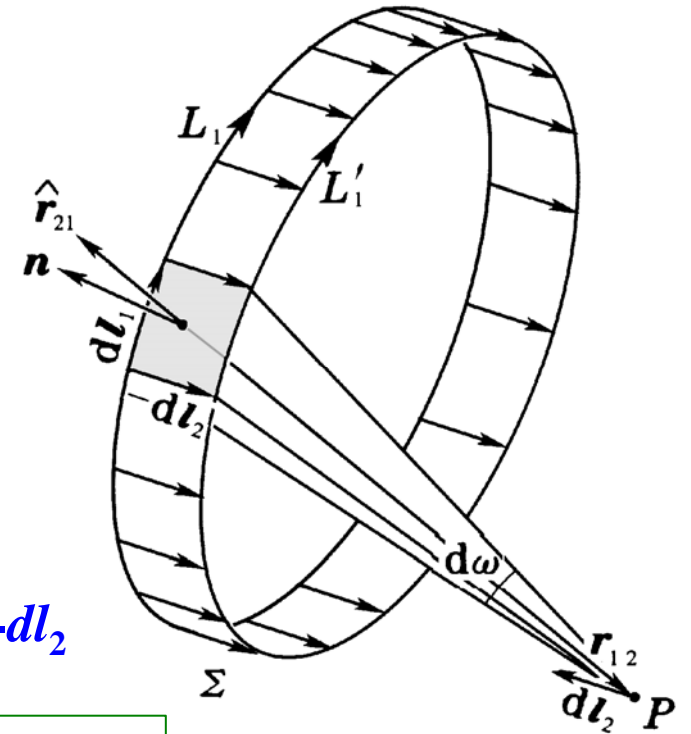
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(L_1)} \frac{d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2}$$

- 考虑将 P 点移动位移 $d\mathbf{l}_2$ ，相当于电流环 L_1 位移 $-d\mathbf{l}_2$ ，到达新位置 L'_1 。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?? \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = ??$$

- 计算如下点乘积：

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} \xrightarrow{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} \frac{(-d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{l}_1) \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} d\vec{\Sigma} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} d\vec{\Sigma} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} \end{aligned}$$

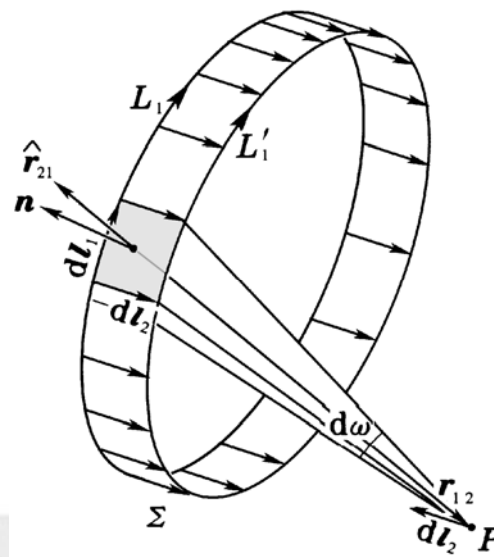




电磁学05-10: 安培环路定理

- 积分号里面的点乘项正是阴影面积元对 P 点所张开的球面角，用 $d\omega$ 表示：

$$-\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} d\vec{\Sigma} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} d\omega$$

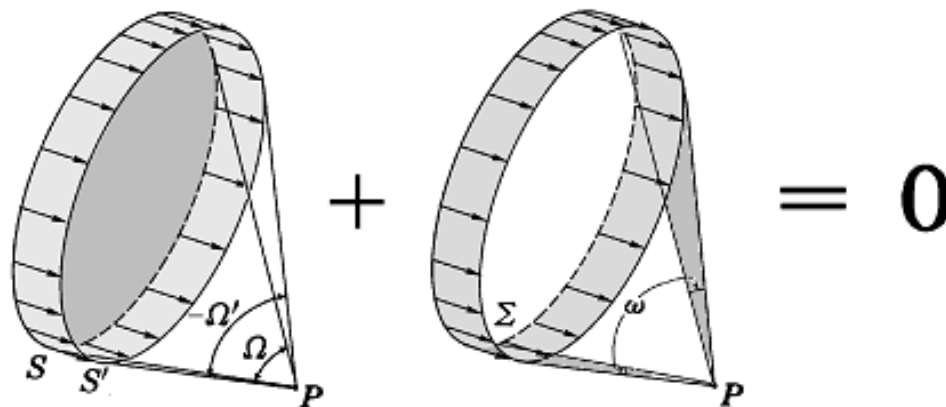


- 对回路 L_1 积分，得到的是整个环带 Σ 对 P 点张开的球面角 ω ：

$$-\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \omega$$

也可理解为场点 P 作平移 $d\mathbf{l}_2$ 引起立体角变化

- 考虑一闭合曲面，由 S 曲面和 S' 曲面和 Σ 共同组成。对 P 点而言， S 曲面对应的球面角 Ω ， S' 曲面对应的球面角 Ω' 。





电磁学05-10: 安培环路定理

□ 从球面角几何关系有:

$$\Omega'(r) = \Omega(r) + \omega(r) \Rightarrow$$

$$\omega(r) = \Omega'(r) - \Omega(r)$$

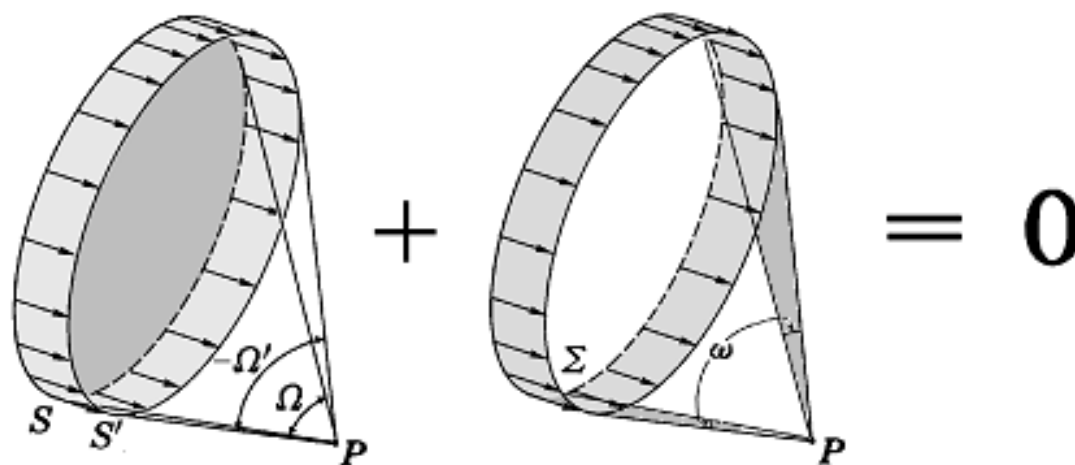
$$\because \Omega' \approx \Omega + dl_2 \cdot \nabla \Omega, \quad \therefore \Omega' - \Omega = \omega = dl_2 \cdot \nabla \Omega$$

$$\therefore -\mathbf{B}(r) \cdot dl_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \omega = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} dl_2 \cdot \nabla \Omega$$

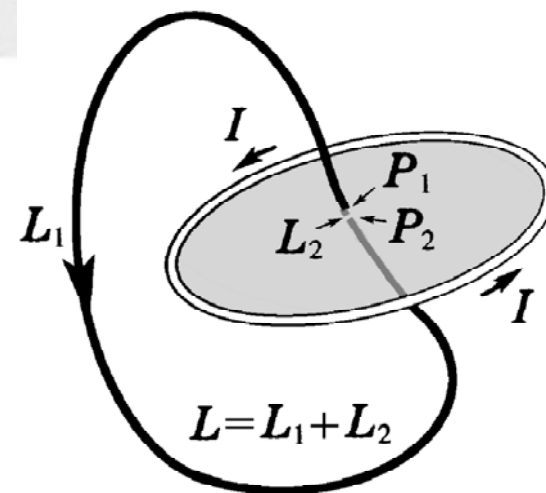
$$\therefore \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega$$

所以, 闭合电流环对空间任一场点 P 处产生的磁场与环对 P 点所张球面角 Ω 的梯度成正比。

□ 下面来看 P 点划过空间形成一个回路 L , L 与一个电流环套在一起: L 被分为两段 L_1 和 L_2 。



Ω' 实际上就是 P 点移动 dl_2 后的球面角, 比移动之前球面角 Ω 增大 ω 。





电磁学05-10: 安培环路定理

□ 对回路 L 计算安培回路积分:

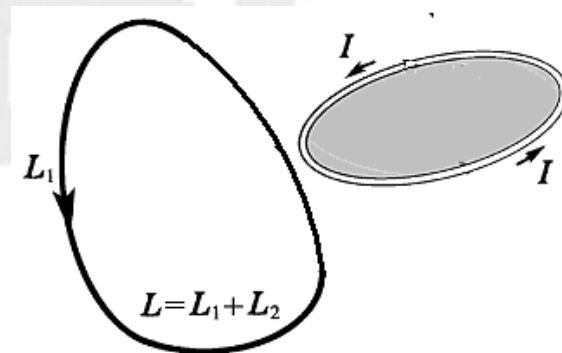
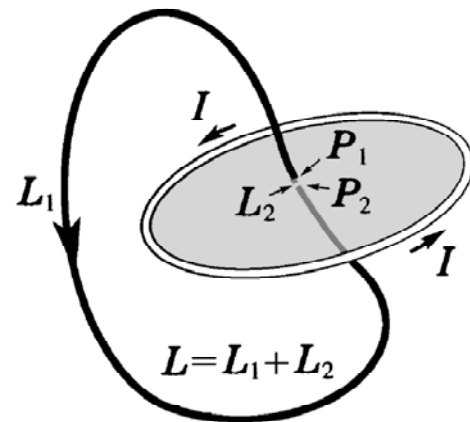
$$\oint_{(L)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1(L_1)}^{P_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_2}^{P_1(L_2)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1(L_1)}^{P_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} =$$

$$\int_{P_1(L_1)}^{P_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_1(L_1)}^{P_2} \nabla \Omega \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\Omega|_{P_2} - \Omega|_{P_1} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 4\pi = \mu_0 I$$

□ 如果电流环路与回路 L 分离, 则 P_1 和 P_2 重合, 环路积分为零。

□ 对多个电流环与回路 L 套在一起, 则应用叠加原理如法炮制, 得到:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_L I$$

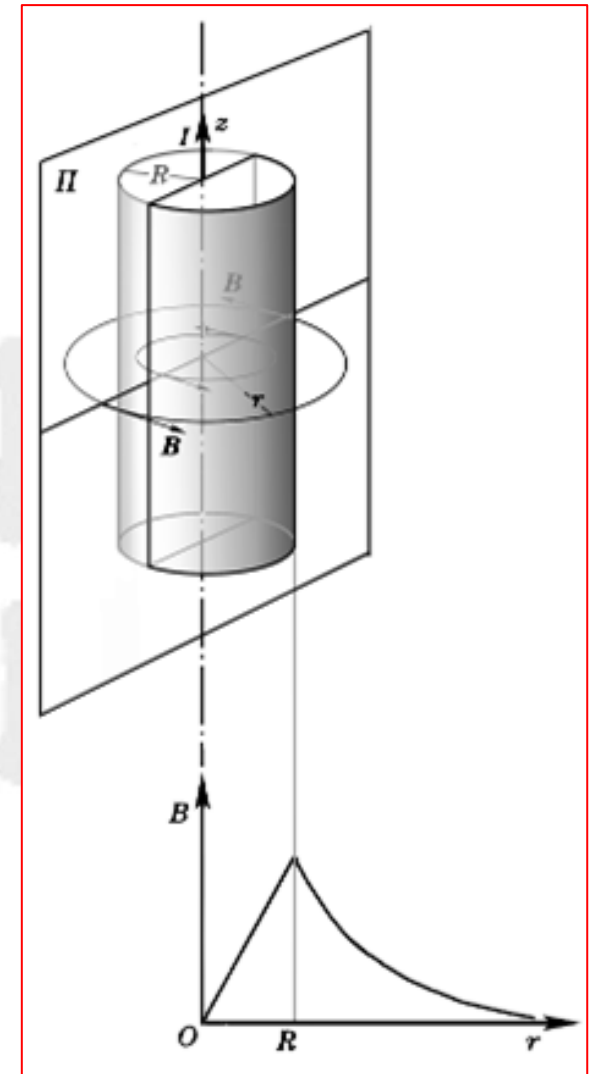
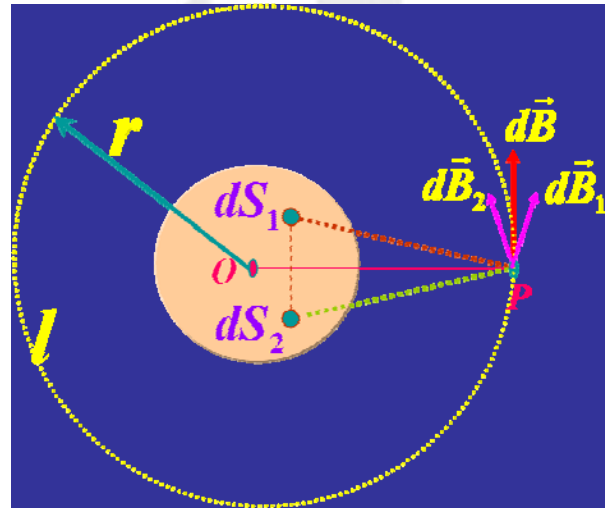
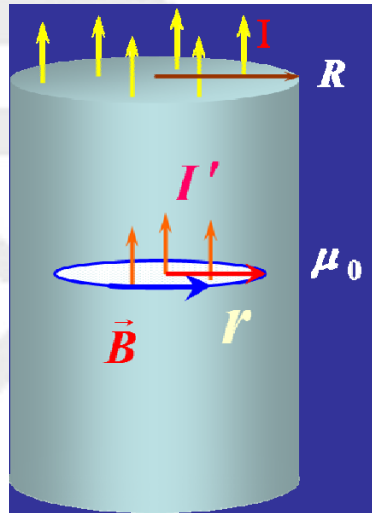
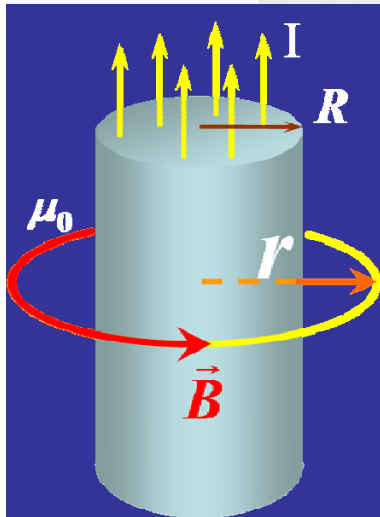


这种证明思路是很变态的, 也说明电磁学很Fantasy和优美至极!



电磁学05-11: 安培环路定理的应用

- 【例1】无限长圆柱形载流导体磁场;
- 导线半径为 R , 电流 I 均匀地通过横截面;
- 轴对称(利用 B 是轴矢量分析), 取环路: 分两种情况。



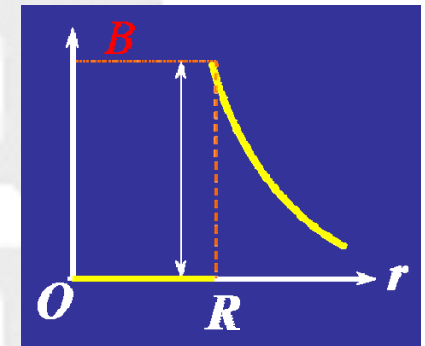
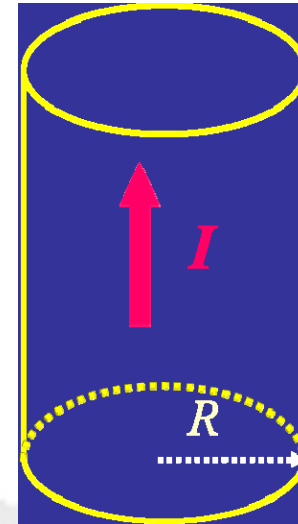
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } r > R, \text{ then } \sum_s I_{\text{内}} = I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ \text{if } r < R, \text{ then } \sum_s I_{\text{内}} = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \end{array} \right.$$



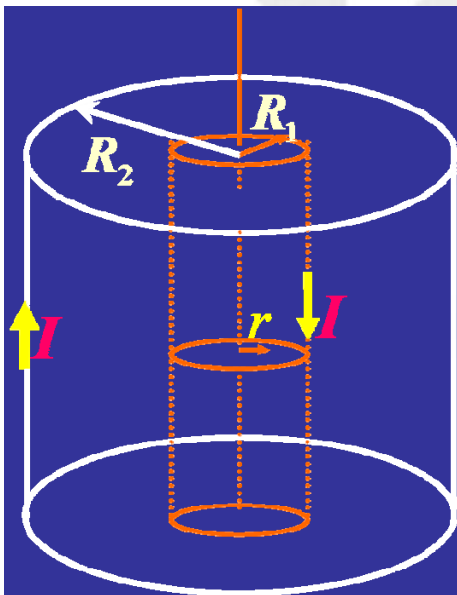
电磁学05-11: 安培环路定理的应用

□ 讨论: 长直载流圆柱面, 已知 I 、 R

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = 2\pi r B \Rightarrow B = \begin{cases} \text{if } r < R, & 0 \\ \text{if } r > R, & \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ \text{if } r = R, & ?? \end{cases}$$



□ 讨论: 同轴的两筒状导线通有等值反向的电流 I



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = 2\pi r B \Rightarrow B = \begin{cases} (1) & r > R_2, B = 0 \\ (2) & R_1 < r < R_2, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ (3) & r < R_1, B = 0 \end{cases}$$



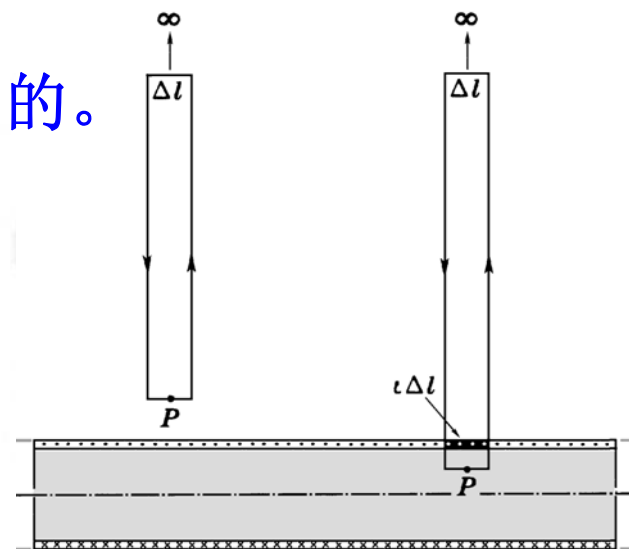
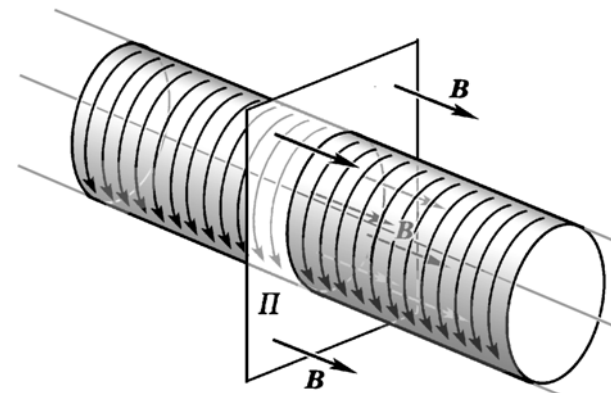
电磁学05-11: 安培环路定理的应用

- ❑ 【例2】载流长直螺线管内的磁场
- ❑ 密绕, $L \gg R$, 忽略螺距;
- ❑ B 是轴矢量, 垂直于镜面 Π ;
- ❑ 论证管外 $B=0$, 管外即使有磁场也是沿轴向的。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{S_{\text{内}}} I_i$$

- ❑ (1) 无穷远处 $B=0$, 所以 $B_P=0$;
- ❑ (2) 管内一点 P :

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_P \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\perp} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\perp} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\infty} \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= B_P \Delta l = \mu_0 n \Delta l I \Rightarrow B_P = \mu_0 n I \end{aligned}$$



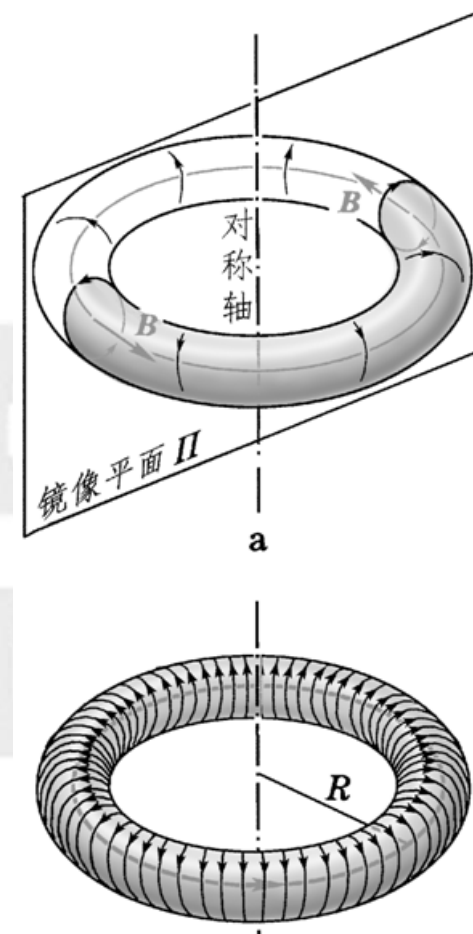


电磁学05-11: 安培环路定理的应用

- 【例3】载流螺绕环的磁场
- 密绕, 匝数: N , 电流: I
- 利用 B 是轴矢量的特征分析场的对称性:
 - 磁感应线与环共轴

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum_{S \text{ 内}} I_i = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

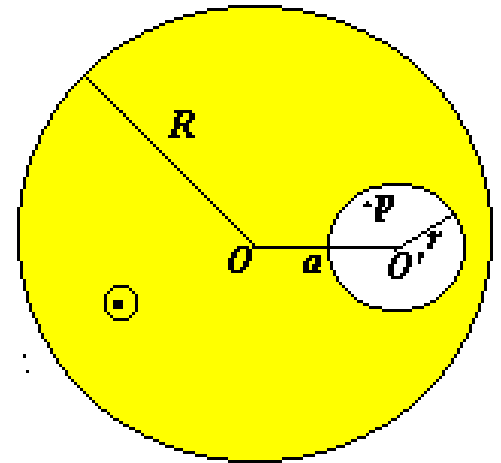
$$\text{if } R \gg d, \text{ then } n = \frac{N}{2\pi R} \Rightarrow B = \mu_0 n I$$





电磁学05-11: 安培环路定理的应用

- 【例4】半径为 R 的无限长圆柱形导体管，管内空心部分半径为 r ，轴与圆柱的轴平行，两轴间距为 a ，且 $a \gg r$ 。有电流 I 沿导体管流动，电流均匀分布，求：(1) 洞内的 B ；(2) 洞中心 O' 及大圆柱内一点的 B ；



- 在哪些情况下可以用安培环路定理求 B ？
- 本章最后，我们还会回到这些问题上来！



电磁学05-12: 磁矢势问题

□ 再回首，云遮断归途；再回首，你还不放逐：

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I \Leftrightarrow \nabla \times \vec{B} = \vec{j} \end{array} \right.$$

- 无源场
- 有旋场----非保守场一般不引入标势

□ 然而磁场的主要特征：无源 (无散)—— 磁高斯定理

□ 其更根本的意义：使我们可能引入磁矢势



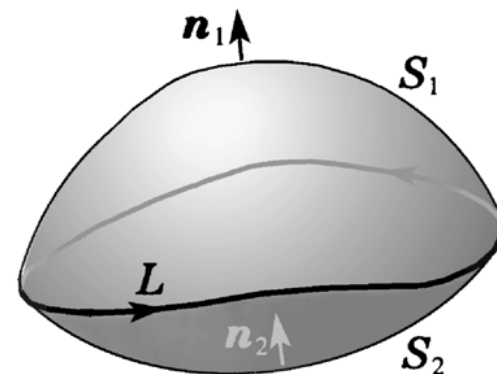
电磁学05-12: 磁矢势问题

□ 磁“高斯定理”表明，对任意闭合曲面：

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

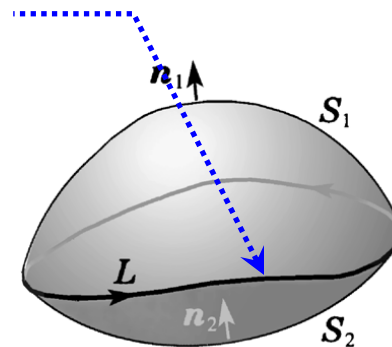
磁通量仅由的共同边界线所决定



□ 数学上可以证明，这样的矢量 A 的确存在，对于磁感应强度 B ， A 叫做磁矢势， A 在空间的分布也构成矢量场，简称矢势。

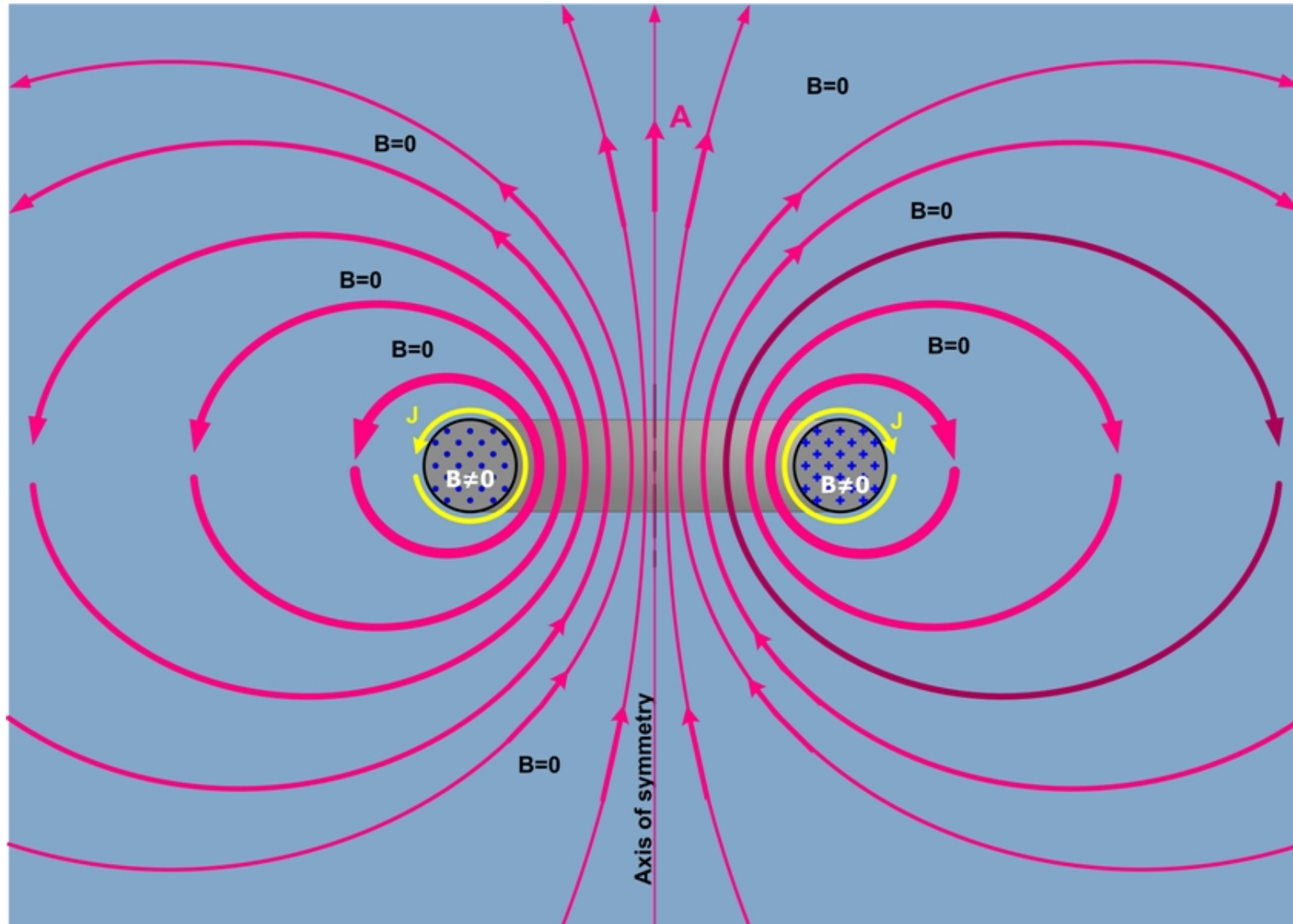
$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

可能找到一个矢量 A ，它沿 L 作线积分等于通过 S 的通量





□ 磁矢势的一个例子:





电磁学05-12: 磁矢势问题

Stokes' theorem

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

□ 磁矢势的矢量解释

□ 对任意矢量 \vec{A} , 可以定义: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \xrightarrow{\text{definition}} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

□ 满足这一定义的磁矢势不唯一, 类似于电场对应的电势不唯一, 零点可以随意取。为证明这一点, 从任意标量场 ϕ 出发:

$$\because \nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\because \nabla \times (\vec{A} + \nabla \phi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \cdot \phi = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\because \vec{B} = \begin{cases} \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \times (\vec{A} + \nabla \phi) \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauge transformation}} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \phi$$

□ 因此矢量 \vec{A} 和 $\vec{A} + \nabla \phi$ 都是 \vec{B} 的矢量势, 不唯一。通常取库仑规范势 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 。电动力学求解基于方程:

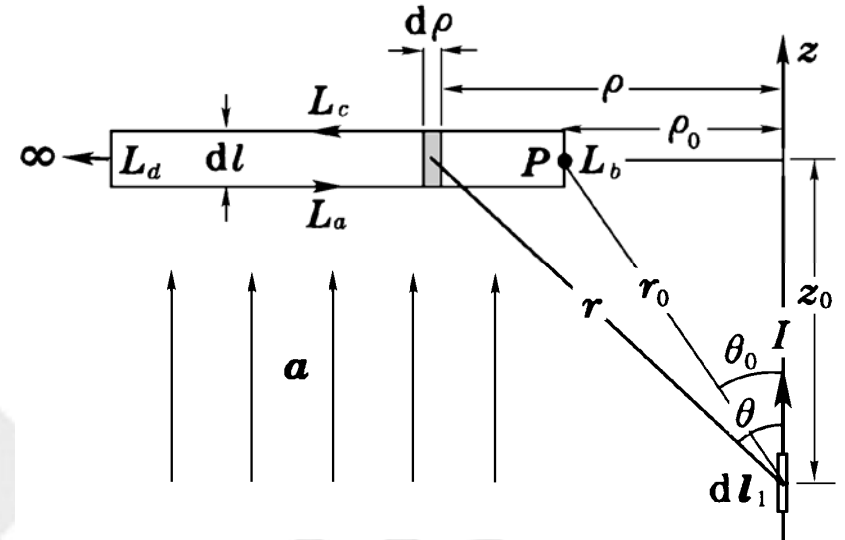
$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{A}$$



电磁学05-12: 磁矢势问题

□ 计算磁矢势的大学物理方法:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

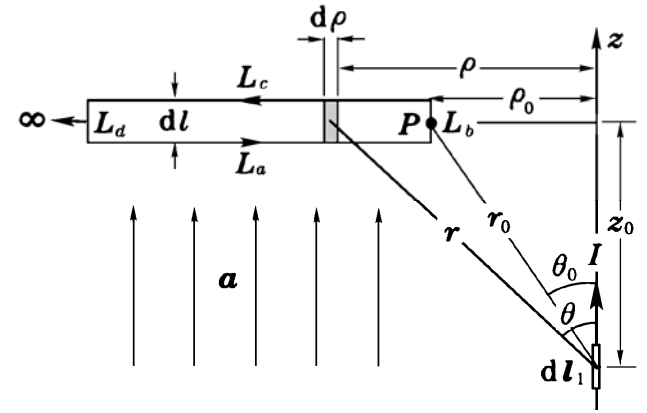


□ 计算任意电流元 dl 所产生的磁矢势 a : 总可以先假定其沿 z 方向 $a=a_z$ 。取空间任一闭合回路 $L=L_a+L_b+L_c+L_d$, 无穷远 L_d 处的 $a=0$:

$$\begin{aligned} \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{L_a} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_c} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{a} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(r_0)dl \end{aligned}$$



电磁学05-12: 磁矢势问题



□ 闭合回路 L 的磁通量:

$$\Phi_B = \iint_{S_L} d\Phi(r)_B = \iint_{S_L} \vec{B}(r) \cdot d\vec{S}(r) = \iint_{S_L} dB(r) d\rho dl$$

$$\therefore dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl_1 \sin \theta}{r^2}$$

$$\therefore r = z_0 / \cos \theta, \rho = z_0 \tan \theta, d\rho = z_0 d\theta / \cos^2 \theta$$

$$\therefore \Phi_B = \frac{\mu_0 Idl_1 dl}{4\pi} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\sin \theta d\rho}{r^2} = \frac{\mu_0 Idl_1 dl}{4\pi z_0} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 Idl_1 dl}{4\pi r_0}$$

$$\therefore \frac{\mu_0 Idl_1 dl}{4\pi r_0} = a_z(r_0) dl \Rightarrow a_z(r_0) = \frac{\mu_0 Idl_1}{4\pi r_0} \Rightarrow \vec{a}(r_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} d\vec{l}_1$$

$$\int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_z(r_0) dl$$

□ 对任一个电流回路 L_I , 我们有:

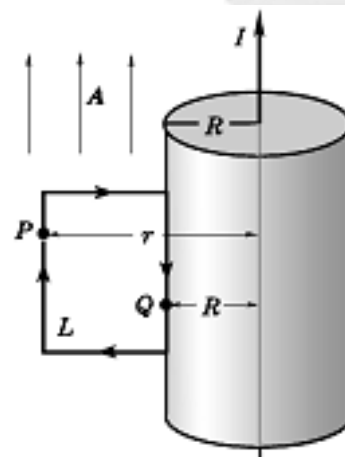
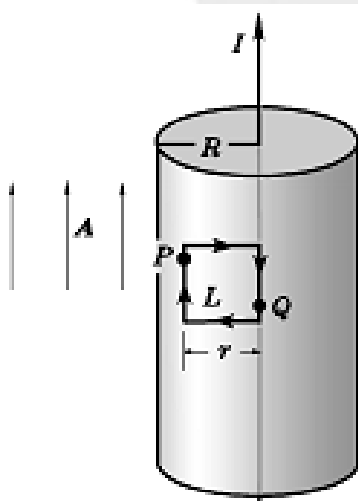
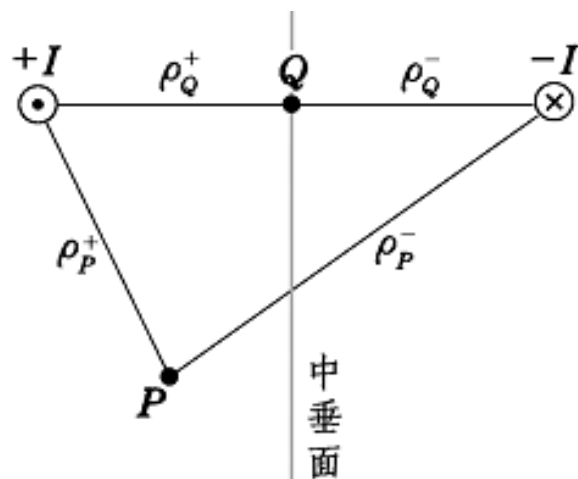
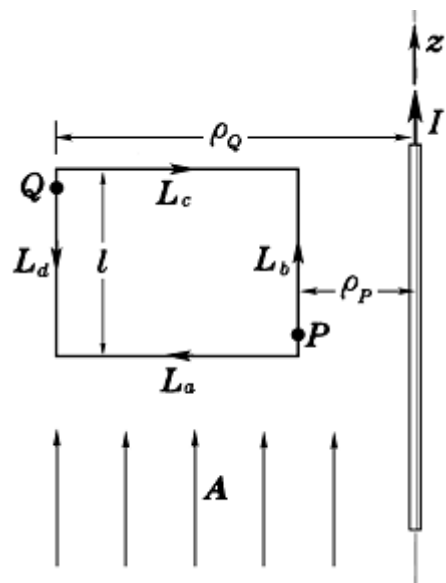
$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_I} \frac{d\vec{l}_1}{r}$$

只是众多磁
矢势之一



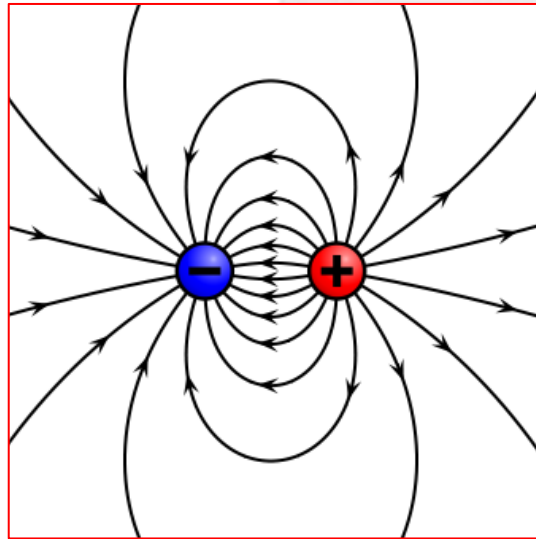
电磁学05-12: 磁矢势问题

□ 其它情况也可以做类似求解:

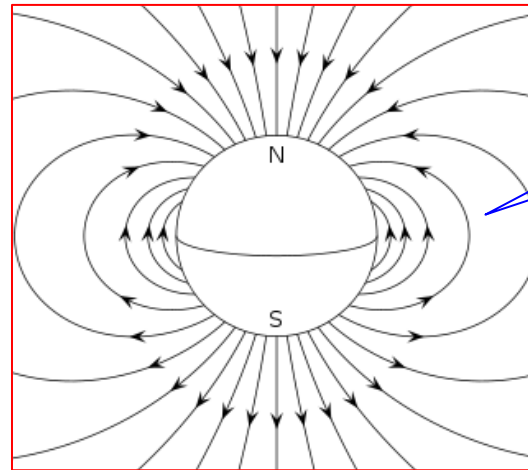
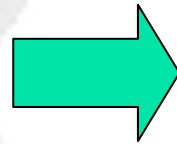




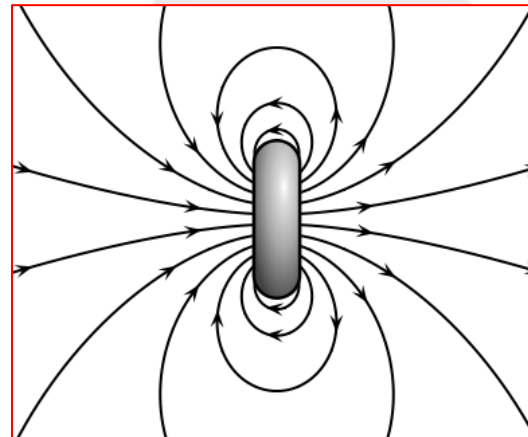
□ 磁偶极子定义类比于电偶极子



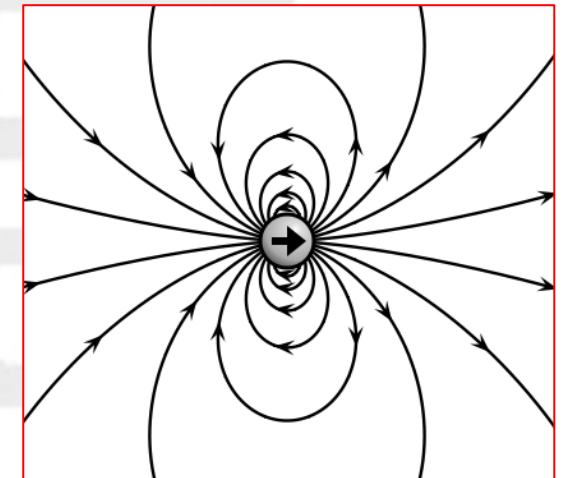
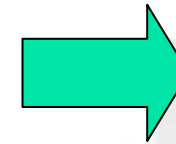
电偶极子



磁偶极子



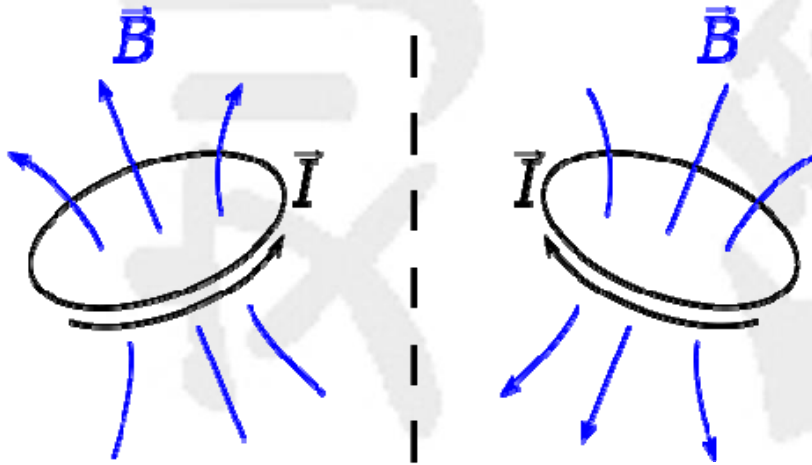
这是地球磁场的标注，与实际磁极的磁感应线相反



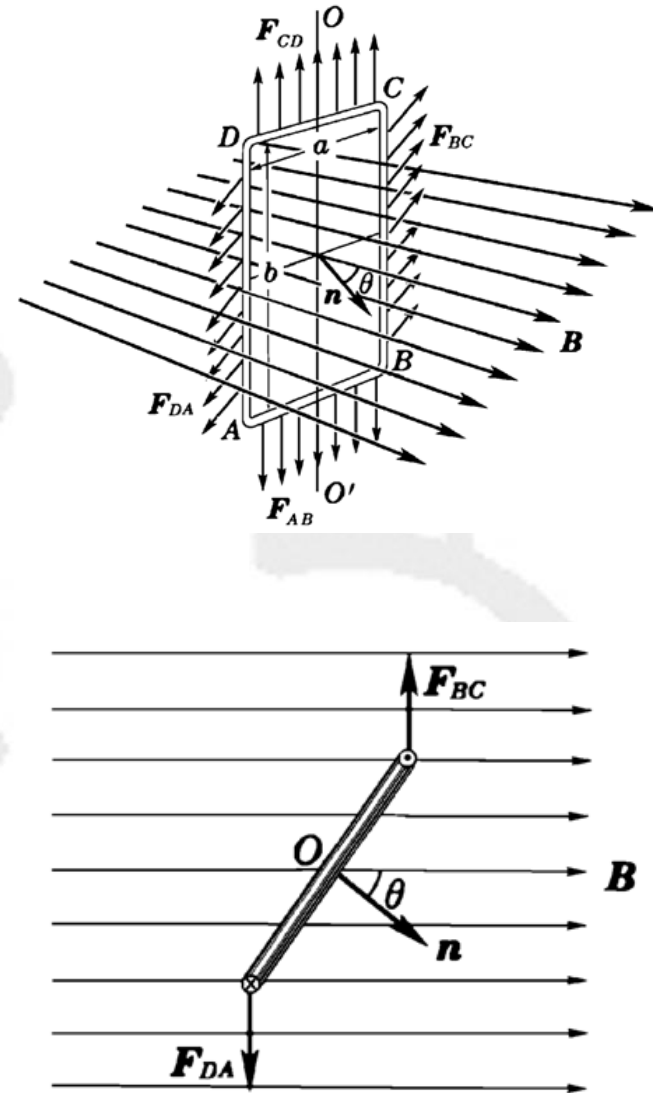
任意偶极子
(电、磁、声、光)



□ 两种效应



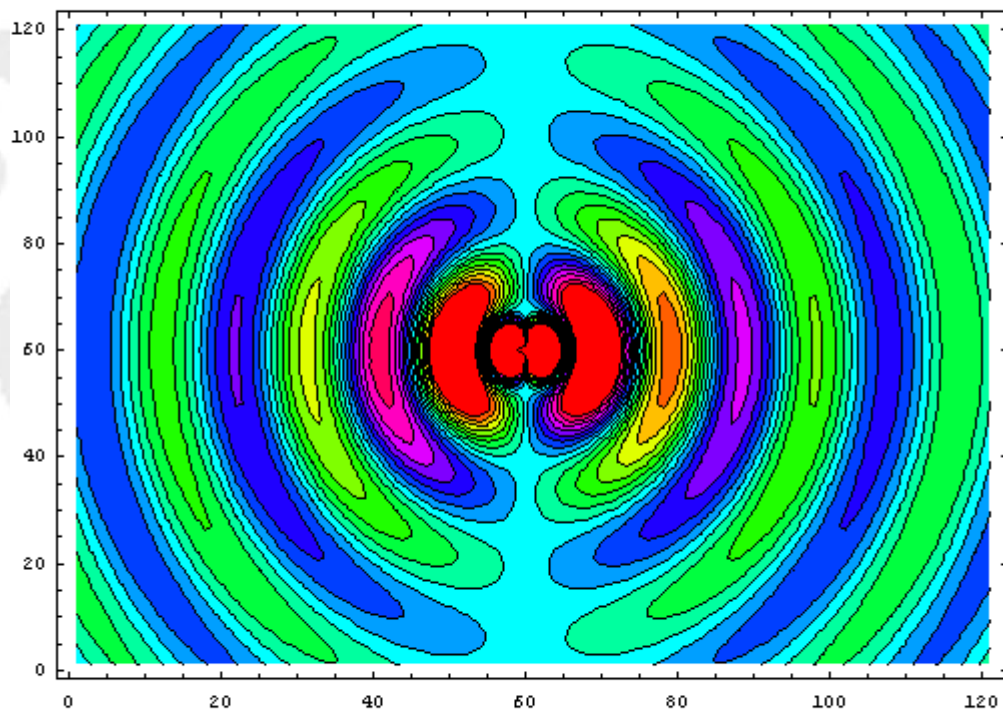
闭合电流产生磁场



闭合电流在外磁场中受力



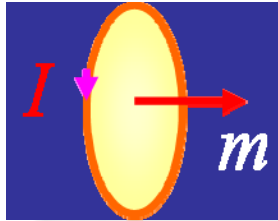
□ 振荡电偶极子产生的磁场



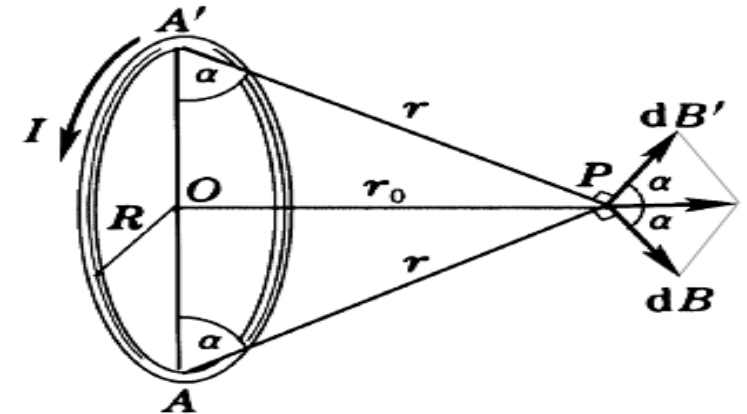


电磁学05-14: 回路电流磁偶极子

□ 闭合电流产生的磁矩：轴线上



$$\vec{m} = I\vec{S}$$



$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \oint dl = \frac{\mu_0 IR \cdot 2\pi R}{4\pi(R^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I(\pi R^2)}{2\pi(R^2 + r_0^2)^{3/2}}$$

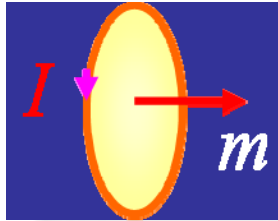
$$r_0 \rightarrow 0, B_r = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{m}}{r^3} + 3\frac{(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$$

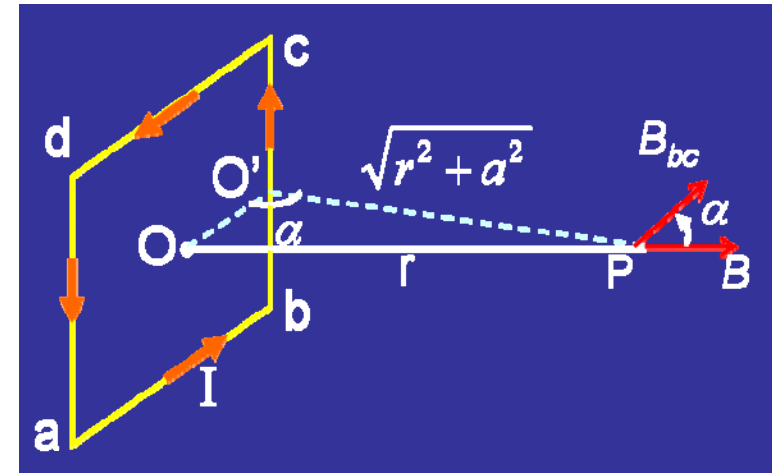


电磁学05-14: 回路电流磁偶极子

□ 闭合电流产生的磁矩：轴线上



$$\vec{m} = I\vec{S}$$



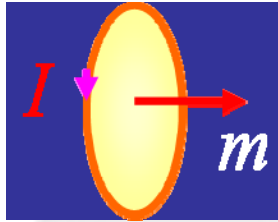
$$\begin{aligned}
 B_{bc} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{r^2 + a^2}} \left(\frac{a}{[a^2 + (r^2 + a^2)]^{1/2}} + \frac{a}{[a^2 + (r^2 + a^2)]^{1/2}} \right) \\
 &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi\sqrt{r^2 + a^2}} \frac{1}{(2a^2 + r^2)^{1/2}} \\
 B_{bc//} &= B_{bc} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I a}{2\pi\sqrt{r^2 + a^2}} \frac{1}{(2a^2 + r^2)^{1/2}} \times \frac{a}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \\
 B &= 4B_{bc//} \xrightarrow{r \gg a} B = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi r^3} \xrightarrow[\vec{m}=I\vec{S}]{S=4a^2} \vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{S}}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}
 \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{m}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$$

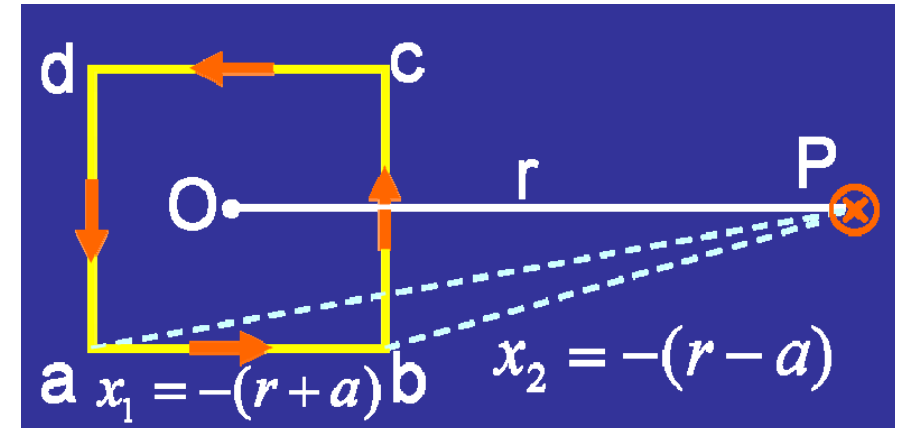


电磁学05-14: 回路电流磁偶极子

□ 闭合电流产生的磁矩：平面外



$$\vec{m} = I\vec{S}$$



$$B_{ab} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{-(r-a)}{[(r-a)^2 + a^2]^{1/2}} + \frac{(r+a)}{[(r+a)^2 + a^2]^{1/2}} \right)$$

$$B_{bc} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r-a)} \left(\frac{a}{[a^2 + (r-a)^2]^{1/2}} + \frac{a}{[a^2 + (r-a)^2]^{1/2}} \right)$$

$$B_{cd} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{r+a}{[(r+a)^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{r-a}{[(r-a)^2 + a^2]^{1/2}} \right)$$

$$B_{da} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r+a)} \left(\frac{a}{[a^2 + (r-a)^2]^{1/2}} + \frac{a}{[a^2 + (r-a)^2]^{1/2}} \right)$$

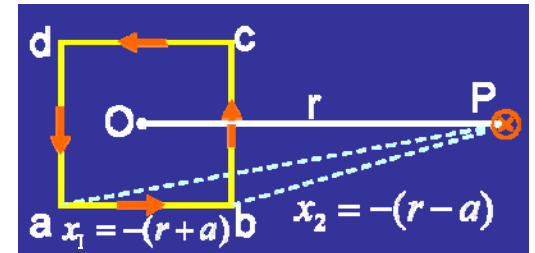
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{m}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$$



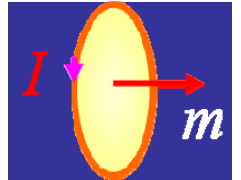
电磁学05-14: 回路电流磁偶极子

$$B = B_{ab} + B_{cd} + B_{da} - B_{bc}$$

$$\xrightarrow{r \gg a} B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(-\frac{4a^2}{r^3} \right) = -\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}$$



$$\vec{m} = I\vec{S}$$

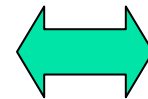


□ 闭合电流在很远处激发的磁场，以及它在外磁场中所受作用力与力矩，都决定于其磁矩！

□ 任意一点磁场的一般形式 (与电偶极矩对比):

验证！

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{m}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)$$

$$\vec{m} = I\vec{S}$$



$$\vec{p} = q\vec{l}$$



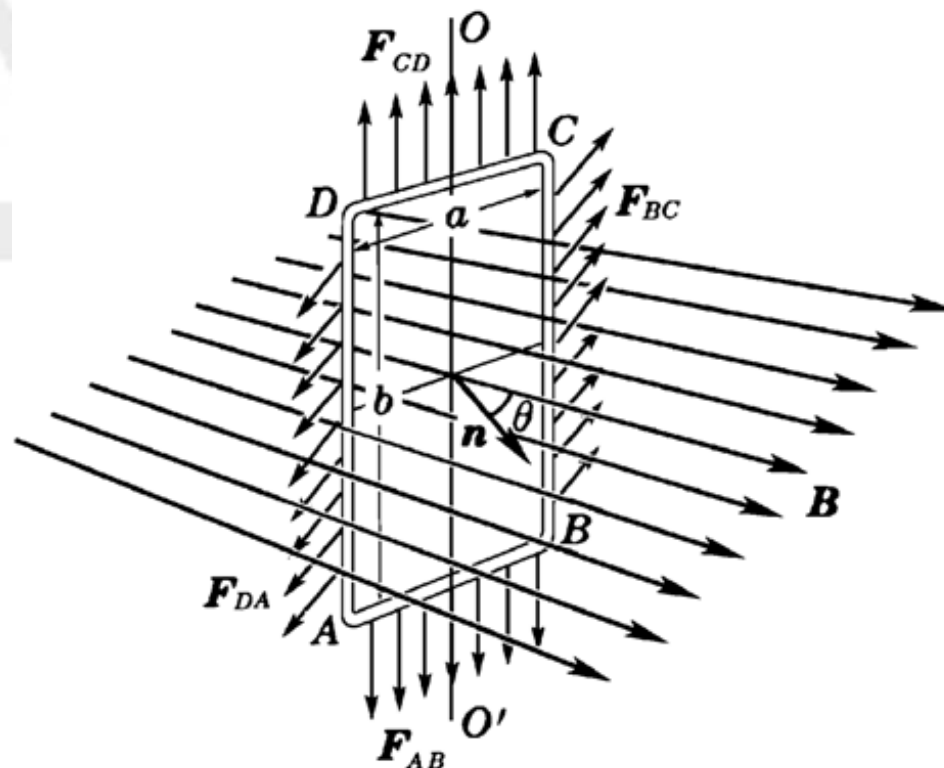
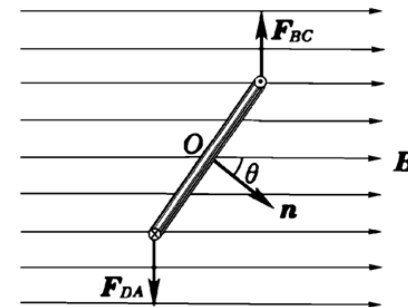
电磁学05-15: 磁力矩问题

□ 根据磁感应强度的定义:

$$B = \frac{dF_{\max}}{Idl} \Rightarrow d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

□ 应用到矩形刚性闭合线圈: 合力与合力矩

$$\begin{aligned} L &= F_{BC} \frac{a}{2} \sin \theta + F_{DA} \frac{a}{2} \sin \theta \\ &= IabB \sin \theta = ISB \sin \theta \\ \vec{L} &= IS\vec{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \end{aligned}$$





□ 应用到任意闭合回路:

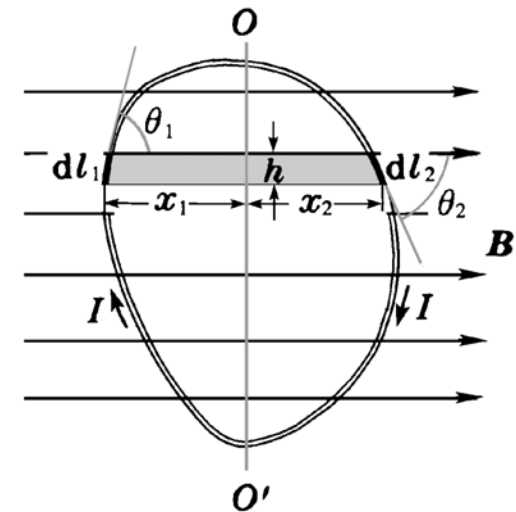
- 将线圈分割成若干个小窄条, 小线圈所受力矩 dL
- 若线圈平面与磁场成任意角度, 则可将 B 分解成平行与垂直分量

$$dL = IBdh(x_1 + x_2) = IdSB \neq Id \text{ } SB$$

$$L = \sum dL = \sum BIdS = ISB$$

$$\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel \Rightarrow \vec{L} = IS(\vec{n} \times \vec{B}) = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$dl_1 \sin \theta_1 = dl_2 \sin \theta_2 = dh$$



$$dF_1 = dF_2 = IBdh$$

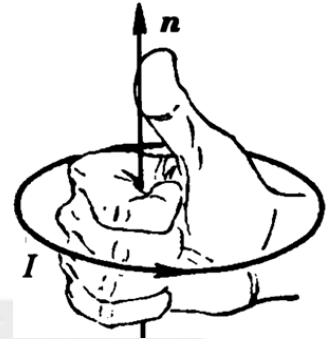
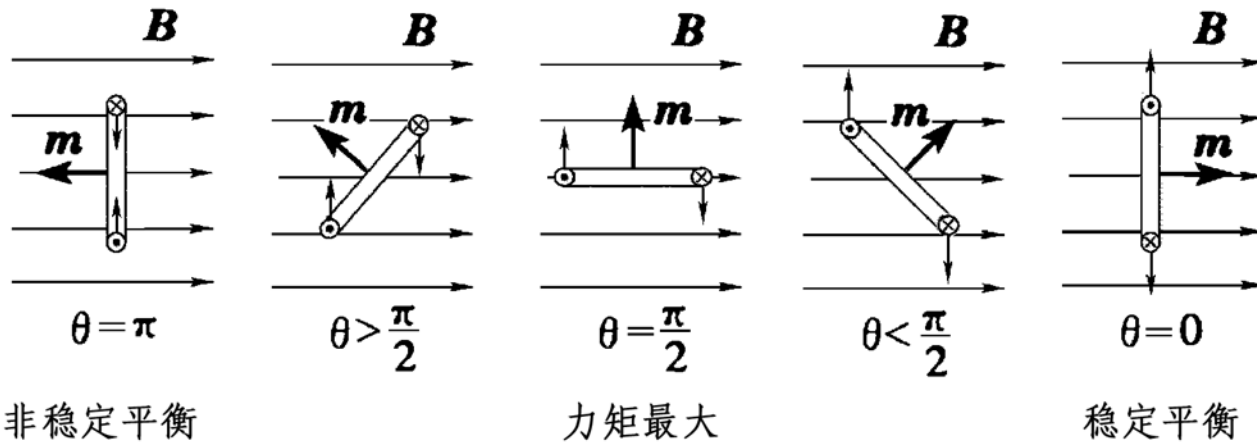
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$



□ 力矩的形式:

a

磁矩

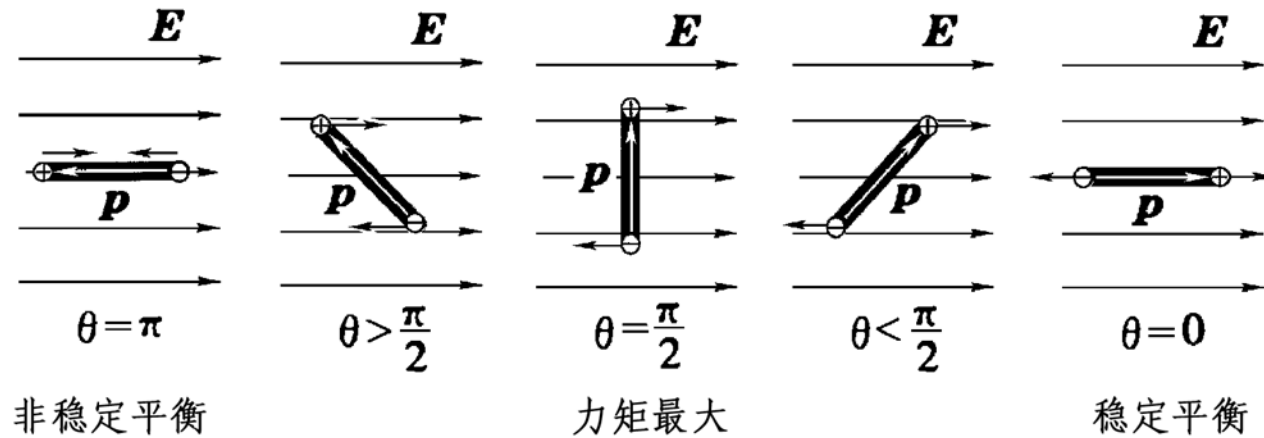


$$\vec{m} = IS\vec{n}$$

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

b

电偶极矩



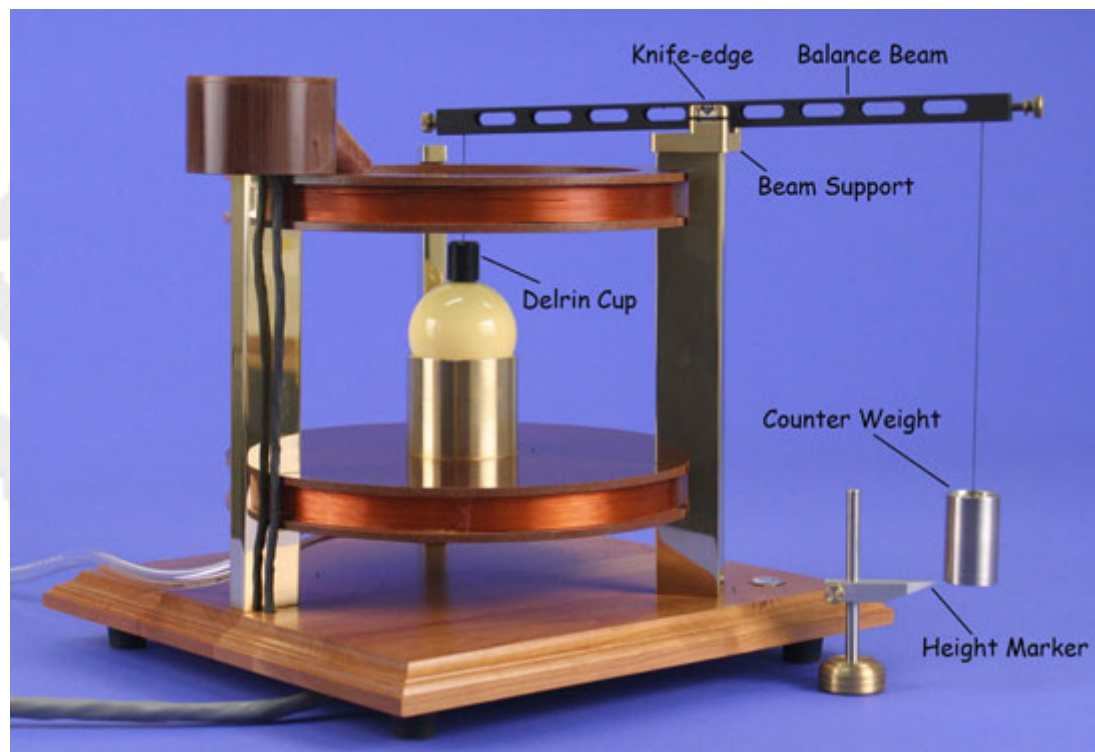
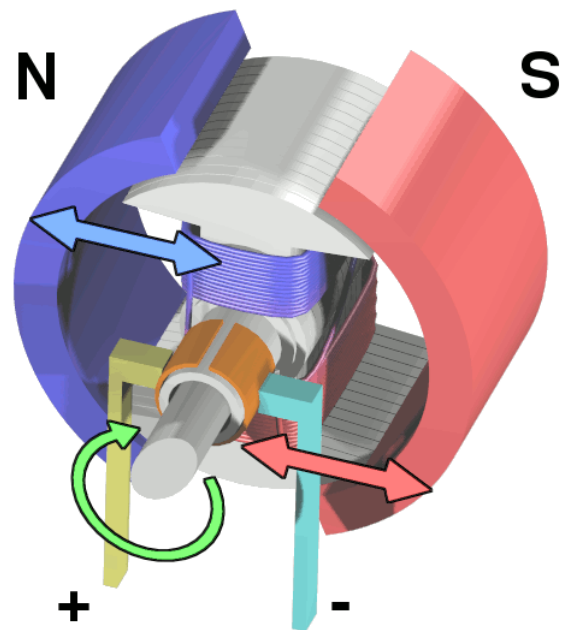
$$\vec{p} = ql\vec{l}$$

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}$$



电磁学05-15: 磁力矩问题

□ 磁力矩的应用:



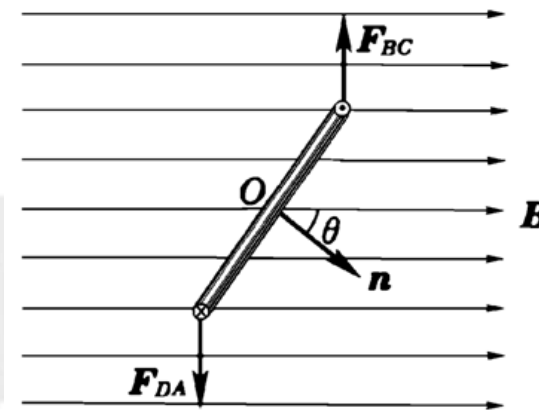


电磁学05-16: 磁势能

- 我们规定： m 与 B 相互垂直时磁势能为零。则 m 与 B 成 θ 时的磁势能为：

$$U_m = \int_{\theta}^{90} L d\theta = \int_{\theta}^{90} -mB \sin \theta d\theta = -mB \cos \theta$$

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$



$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} \xleftrightarrow{\text{one-to-one correspondence}} U_m = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

- 根据磁势能的定义：

$$\vec{F} = -\nabla(-\vec{m}_i \cdot \vec{B}_i) = -\nabla U_{mi}$$



- 上述公式对任意形状线圈都适用，因为任意线圈都可以用一个电流网络来等效处理；
- 反抗磁力矩的外力：

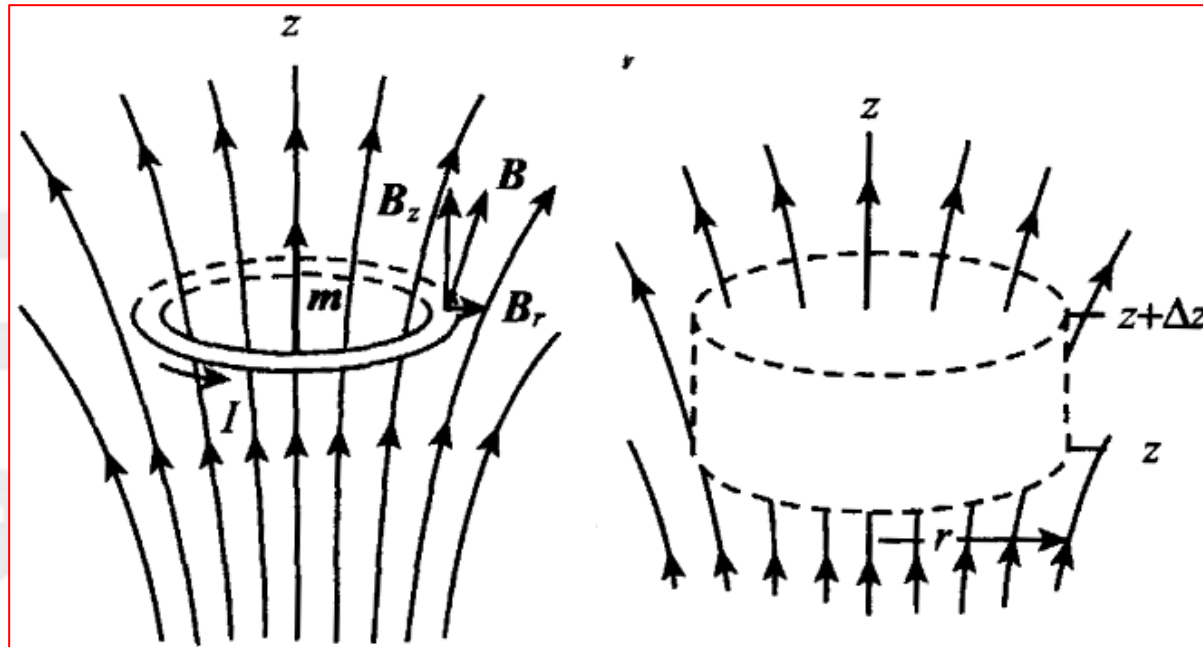
$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= -\nabla(-\vec{m}_i \cdot \vec{B}_i) = -\nabla U_{mi} \\ U_{mi} &= -\vec{m}_i \cdot \vec{B}_i = -I \Delta \vec{S}_i \cdot \vec{B}_i = -I \Delta \Phi_i \\ \vec{F} &= \sum_i \vec{F}_i = -\nabla \left(\sum_i -I \Delta \Phi_i \right) = -\nabla(-I \Phi) = -\nabla U_m\end{aligned}$$

- 磁通量的雏形：

$$\Phi = \sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{B}_i$$



□ 【例3, p.226】 不均匀磁场中线圈的受力问题，以螺线管为例



□ 磁场分为轴向 B_z 与径向 B_r 两分量，由对称性， B_z 对线圈合力为 0， B_r 对线圈施加与轴向相反的力 F ，无力矩作用：

$$F_{\text{向下}} = 2\pi r I B_r$$



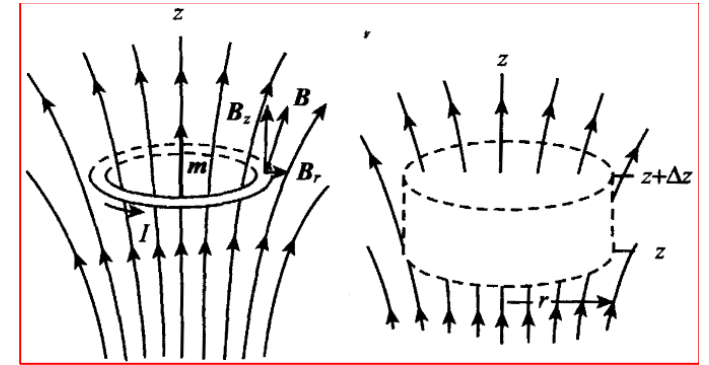
电磁学05-17: 磁力、磁力矩、磁势能问题

□ 则可以作圆鼓形高斯面，侧面通量：

$$2\pi r(\Delta z)B_r$$

□ 端面通量： $\pi r^2[-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)]$

□ 磁高斯定理： $2\pi r(\Delta z)B_r + \pi r^2[-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)] = 0$



$$\because B_z(z + \Delta z) = B_z(z) + \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \Delta z, \quad \therefore 2\pi r(\Delta z)B_r + \pi r^2 \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \Delta z = 0$$

$$\therefore B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow \vec{F} = \vec{m} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

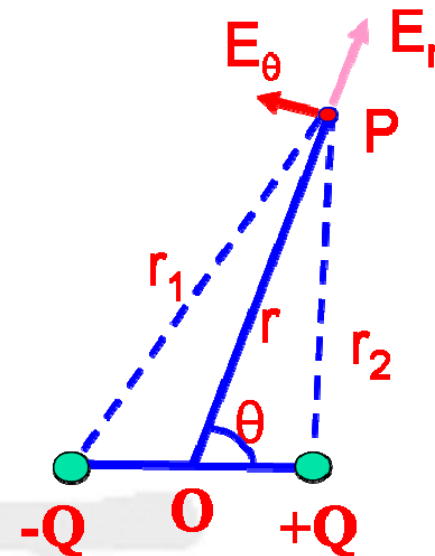


电磁学05-18: 非均匀场中电/磁偶极矩问题

□ 回顾电偶极子问题：注意电势 U 与电势能 U

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + 3\frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right) \Leftrightarrow U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



□ 均匀电场中偶极子承受力矩。非均匀电场中电偶极子除受力矩外，还要受合力作用。

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \end{aligned} \right\} \vec{F} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{p} \cdot \vec{E}) = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}) = -\nabla U$$



电磁学05-18: 非均匀场中电/磁偶极矩问题

□ 非均匀磁场中的线圈。不均匀磁场中通有稳恒电流 I 的小线圈所受合力:

$$F_x = \oint (Id\vec{l} \times \vec{B})_x = \oint I(dl_y B_z - dl_z B_y)$$

$$F_y = \oint (Id\vec{l} \times \vec{B})_y = \oint I(dl_z B_x - dl_x B_z)$$

$$F_z = \oint (Id\vec{l} \times \vec{B})_z = \oint I(dl_x B_y - dl_y B_x)$$

$$B_x(x, y, z) = B_x(0, 0, 0) + x\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)_0$$

$$B_y(x, y, z) = B_y(0, 0, 0) + x\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial B_y}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)_0$$

$$B_z(x, y, z) = B_z(0, 0, 0) + x\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)_0$$



电磁学05-18: 非均匀场中电/磁偶极矩问题

□ 对照电偶极矩在非均匀电场中受力:

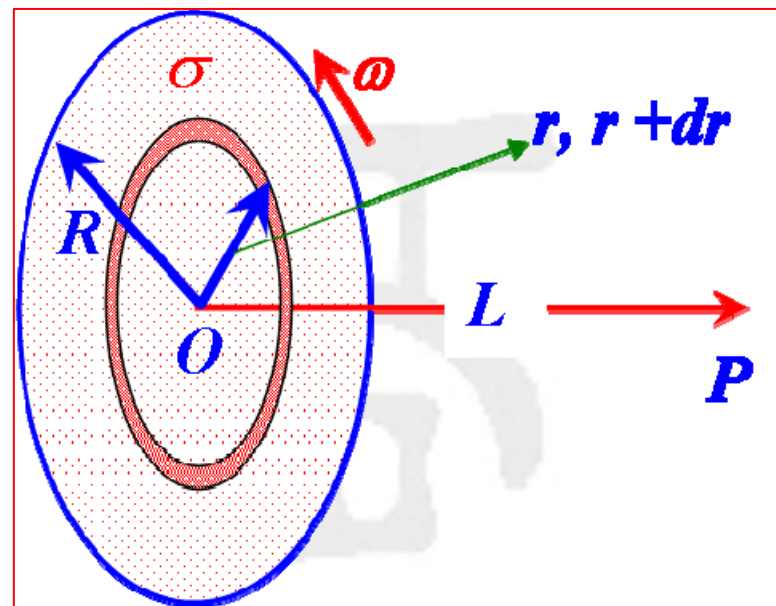
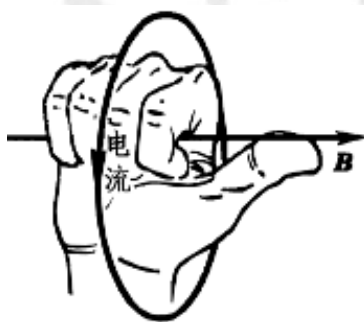
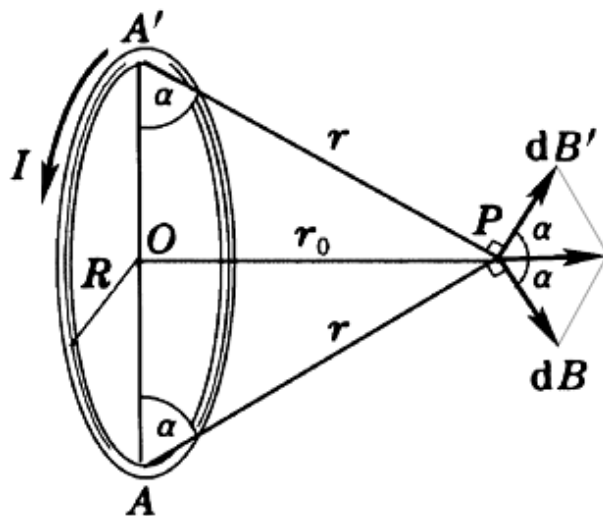
$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{m} \cdot \bar{B}) \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\bar{m} \cdot \bar{B}) \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\bar{m} \cdot \bar{B}) \end{aligned} \right\} \bar{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = \nabla (\bar{m} \cdot \bar{B}) = -\nabla U_m$$

- 在不均匀外磁场中,
- 磁场总是将磁偶极子从磁场小处移向大处!
- 同时力矩将磁矩转向与磁场平行的方向。



□ 【例5.1.47】半径为 R 的圆片上均匀带电，以角速度 ω 绕其几何轴旋转，电荷面密度 σ 。略去片厚度，求(1)轴线上离圆心 L 处的磁感应强度 B 和(2)磁矩 m ：

➤ (1) 环带上电荷量/环带电流/磁场



$$\vec{B}_{\text{圆环}} = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + L^2)^{3/2}}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ (1) 环带上电荷量/环带电流/磁场

$$dq_{r \rightarrow r+dr} = \sigma \cdot 2\pi r dr \Rightarrow I_{r \rightarrow r+dr} = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq = r\sigma dr \cdot \omega$$

$$\because \vec{B}_{\text{圆环}} = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + L^2)^{3/2}}, \quad \therefore d\vec{B}_{r \rightarrow r+dr} = \frac{\mu_0 r^3 \sigma dr \cdot \vec{\omega}}{2(r^2 + L^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \frac{r^3 dr}{(r^2 + L^2)^{3/2}} \vec{\omega}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \vec{\omega} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2 + L^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \left[\frac{2L^2 + R^2}{\sqrt{L^2 + R^2}} - 2L \right] \vec{\omega}$$

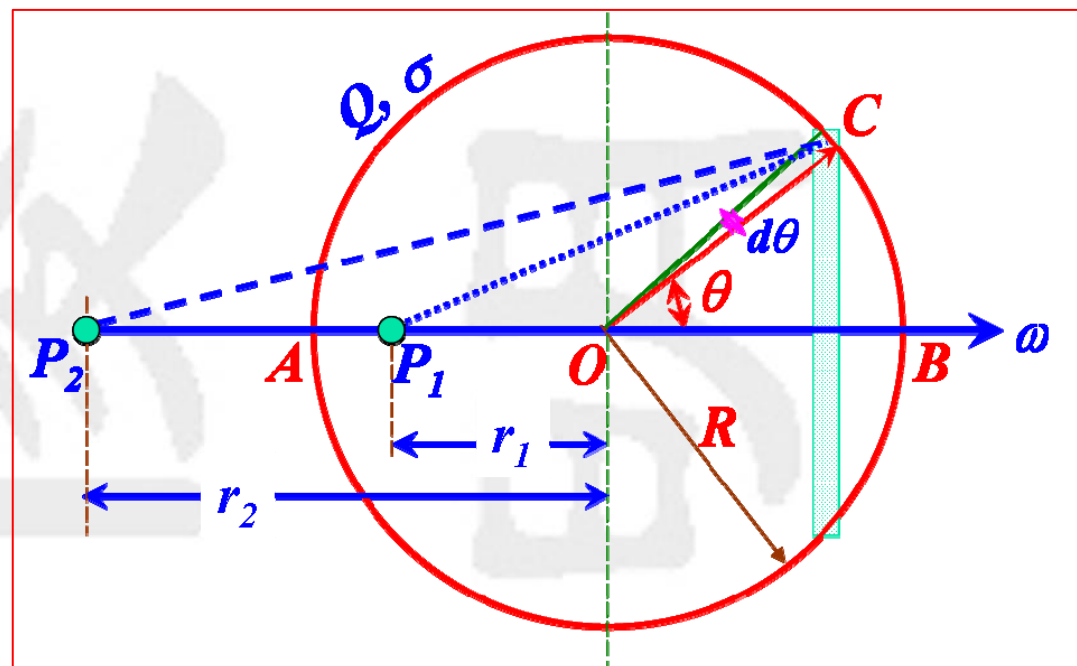
➤ (2) 磁矩 m

$$\vec{m} = \int \vec{S} dI = \int_0^R \pi r^2 \frac{2\pi \sigma r dr}{T} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{1}{4} \pi \sigma R^4 \vec{\omega}$$



□ 【例5.1.48】电荷量 Q 均匀分布在半径为 R 的球面上，球面与匀角速度 ω 绕其一固定直径旋转。求轴线上离球心为 r 处的磁感应强度 B 与磁矩 m 。

- (1) 旋转轴 AB 、球面上一点 C 处圆环带、环带电荷旋转产生电流带、电流带在 P_1 和 P_2 点处产生磁场 dB 、积分求得 B ;



$$\sigma = Q / 4\pi R^2 \Rightarrow dQ = \sigma \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = 2\pi \sigma R^2 \sin \theta d\theta$$

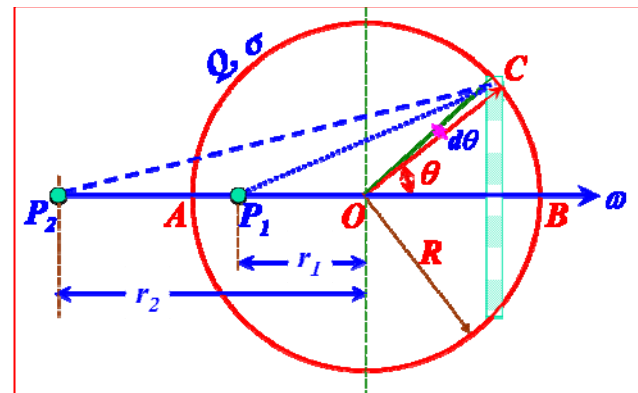
$$dI = dQ / T = \frac{\omega}{2\pi} dQ = \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 求球内 $d\vec{B}$ 和 \vec{B}

$$\vec{B}_{\text{圆环}} = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + L^2)^{3/2}}$$



$$\begin{aligned} d\vec{B}_{P_1} &= \frac{\mu_0 (R \sin \theta)^2 dI}{2 \left[(r_1 + R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 \right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 (R \sin \theta)^2 \cdot \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta}{2 \left[r_1^2 + R^2 + 2r_1 R \cos \theta \right]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{2} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\left[r_1^2 + R^2 + 2r_1 R \cos \theta \right]^{3/2}} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\left[r_1^2 + R^2 + 2r_1 R \cos \theta \right]^{3/2}} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \vec{\omega} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \vec{\omega} \end{aligned}$$

➤ 球内旋转轴线上 \vec{B} 与位置无关，即均匀磁感应强度分布，为何？



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

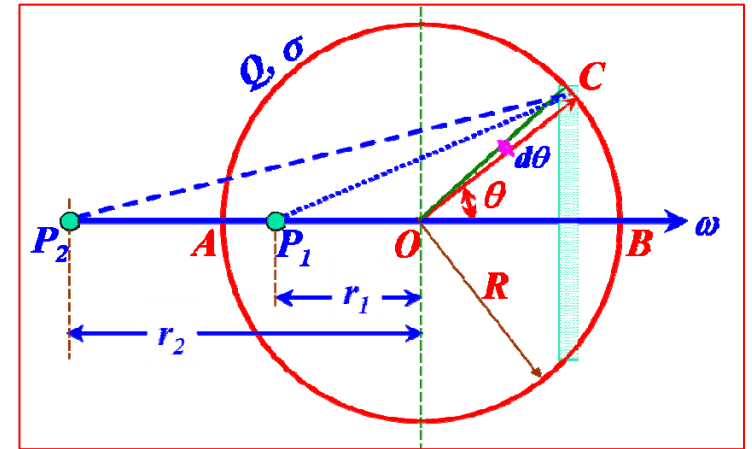
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2} \sqrt{a+bx}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2 - 4abx - 3b^2 x^2)}{15b^3} \sqrt{a+bx}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 求球外 $d\vec{B}$ 和 \vec{B}

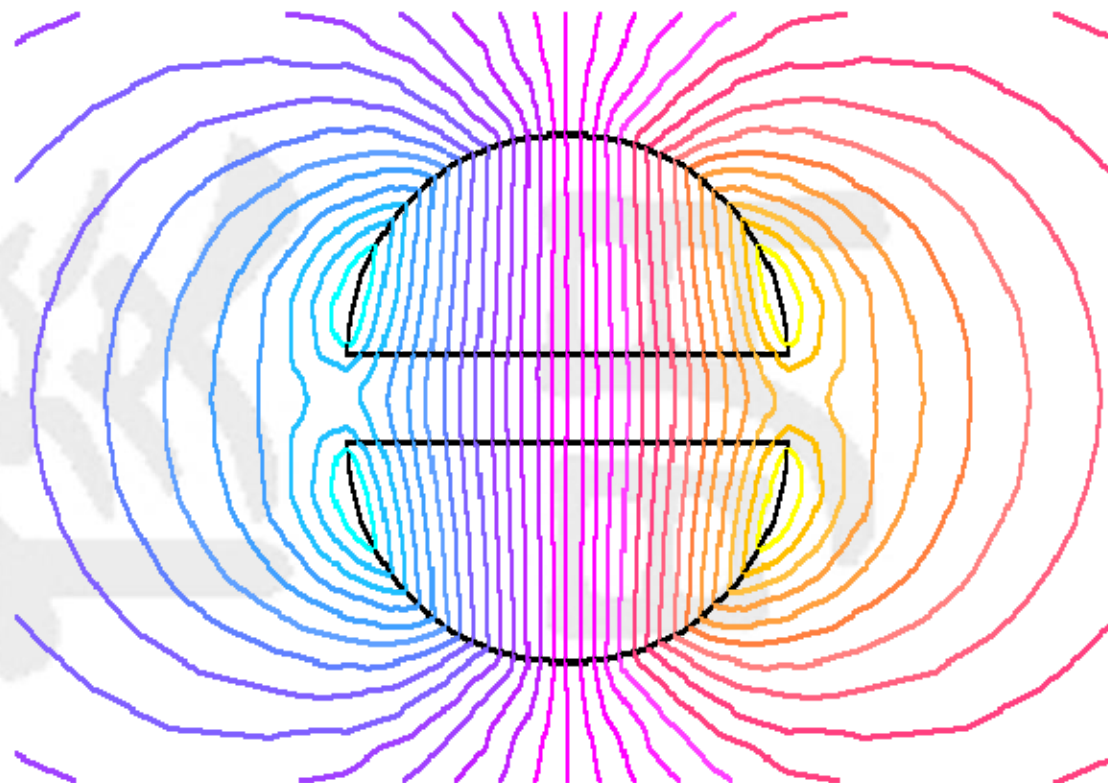
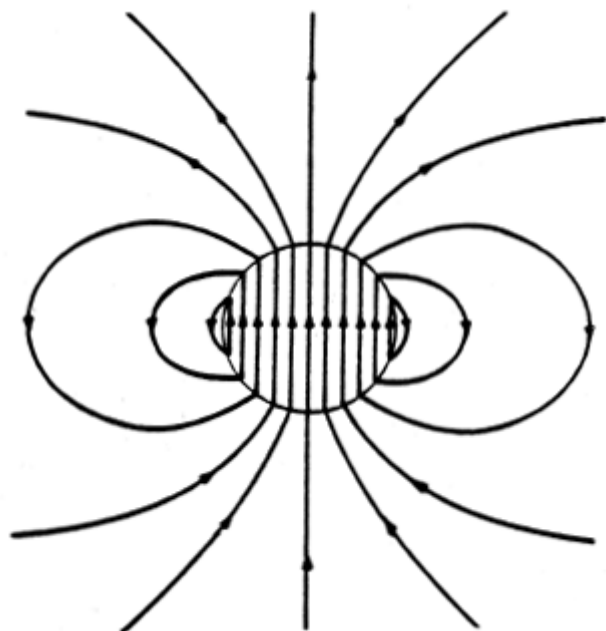
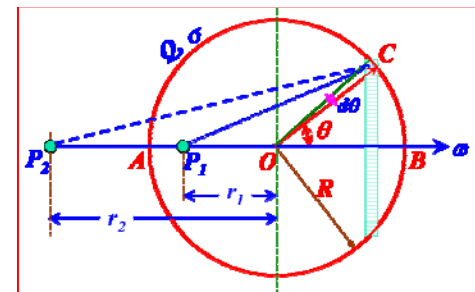


$$\begin{aligned} \because \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} &= \begin{cases} \sqrt{(R-r)^2} \\ \sqrt{(r-R)^2} \end{cases} = \begin{cases} R-r_1 \\ r_2-R \end{cases} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\left[r_2^2 + R^2 + 2r_2 R \cos \theta \right]^{3/2}} \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \left(\frac{R}{r_2} \right)^3 \vec{\omega} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \left(\frac{R}{r_2} \right)^3 \vec{\omega} \end{aligned}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 球类球外的 B 分布



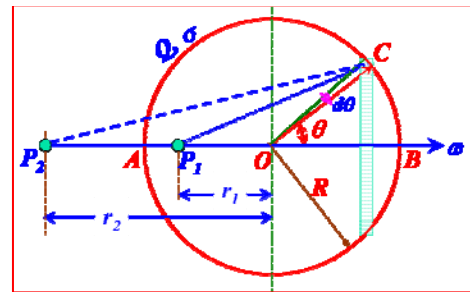
➤ Field and Inductance of a Spherical Coil

➤ 球外旋转轴线上 B 与位置有关，为何？



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 求 m



$$\therefore dI = \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta$$

$$\therefore d\vec{m} = (dI)\vec{S} = (\omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta)(\pi R^2 \sin^2 \theta) \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{1}{4} Q R^2 \sin^3 \theta d\theta \cdot \vec{\omega}$$

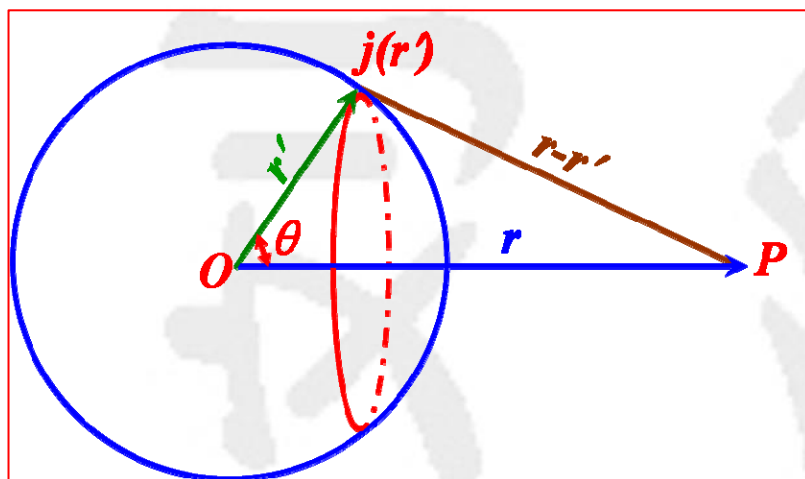
$$\therefore \vec{m} = \frac{1}{4} Q R^2 \vec{\omega} \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} Q R^2 \vec{\omega}$$

➤ (3) 这个问题给出了一个均匀电荷分布的球壳在球内和球外轴线上产生的 B ；那么，对于一个均匀分布电荷的球体，类似问题如何求解？(5.1.49)



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

□ 【例5.1.50】一个球形的铀块(^{238}U)均匀向四面八方发射带正电 α 粒子。发射速率为每秒 N 个，每个粒子电荷量 $2e$ 。求解离球心为 r 处的 P 点之电流密度 $j(r)$ 与磁感应强度 $B(r)$ 。



- (1) 按照球对称的图像，我们知道 $B(r)=0$
- (2) 如何严格证明？

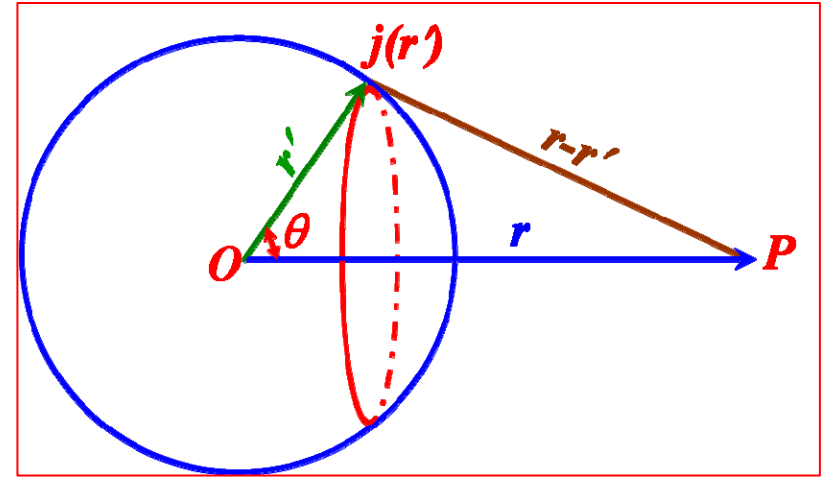


电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

□ (2) 求 $\vec{j}(\vec{r})$ 和 $\vec{B}(\vec{r})$ 。按照定义:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I(r)}{S(r)} \vec{e}_r = \frac{2Ne}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \frac{Ne}{2\pi r^3} \vec{r}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$



$$\because Id\vec{l} = \vec{j}(\vec{r}')dV', \quad \therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}')dV'] \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \leftarrow \vec{j}(\vec{r}) = \frac{Ne}{2\pi r^3} \vec{r}$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Ne}{8\pi^2} \iiint_V \frac{\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{r'^3 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \xleftarrow{\vec{r}' \times \vec{r}' = 0} \frac{\mu_0 Ne}{8\pi^2} \iiint_V \frac{\vec{r}' dV' \times \vec{r}}{r'^3 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

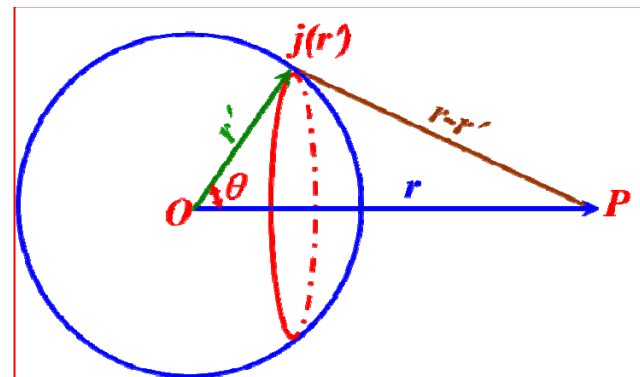
➤ 分析这个三重积分:

$$\iiint_V \frac{\vec{r}' \times \vec{r}}{r'^3 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

➤ 围绕红色的圆环管状的微元, $r'^3 |\vec{r} \times \vec{r}'|^3$ 是不变量, $\vec{r}' \times \vec{r}$ (或者说 $\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$) 的指向位于与OP垂直的面内, 因此沿红色圆环微元一周的矢量和为零;

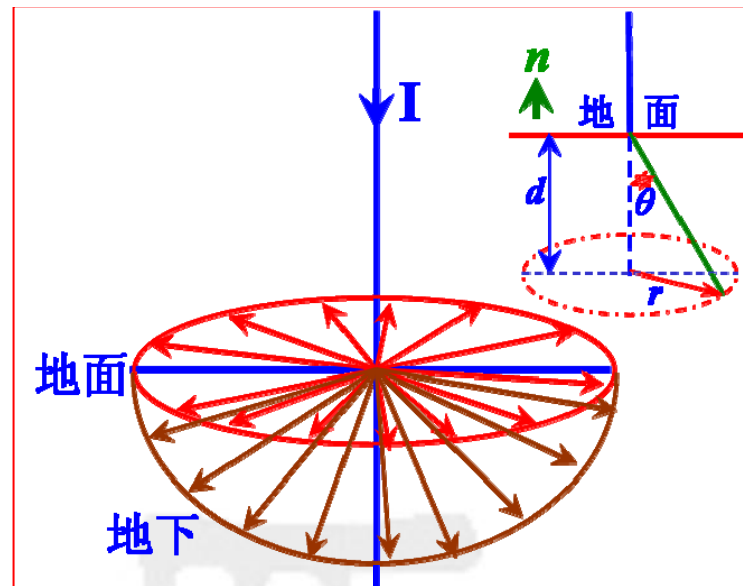
$$\therefore \iiint_V \vec{r}' dV' \times \vec{r} = 0 \Rightarrow \iiint_V \frac{\vec{r}' dV' \times \vec{r}}{r'^3 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$$

$$\therefore \vec{B}(r) = 0$$





- 【例5.2.8】一载有电流 I 的无穷长直导线垂直到地面， I 到达地面后便沿大地均匀分散开来。将大地看作无限大平面，其磁导率为 μ_0 ，求地面以上和以下各处磁感应强度。



- 在地面以上，因为是无限长导线，因为是闭合电流(无限长看作大地、又流向大地)，所以安培环路定理满足。围绕垂直导线的环路积分：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{r} \times \vec{n}$$

- 地面以下电流沿半球面均匀散开，取如图坐标，安培环路定理依然满足。红色虚线圆环所包围的电流为(注意 dS 为半径为 $(r^2 + d^2)$ 的半球面之微球面面积)：

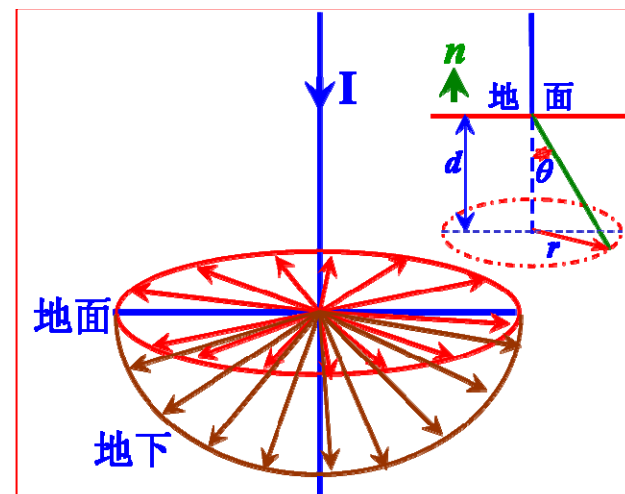
$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow j = \frac{I}{2\pi(r^2 + d^2)},$$

$$dS = (rd\phi) \cdot (\sqrt{r^2 + d^2} d\theta) \xleftarrow{r = \sqrt{r^2 + d^2} \sin \theta} (r^2 + d^2) \sin \theta d\theta d\phi$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 继续:



$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^\theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi(r^2 + d^2)} (r^2 + d^2) \sin \theta d\phi$$

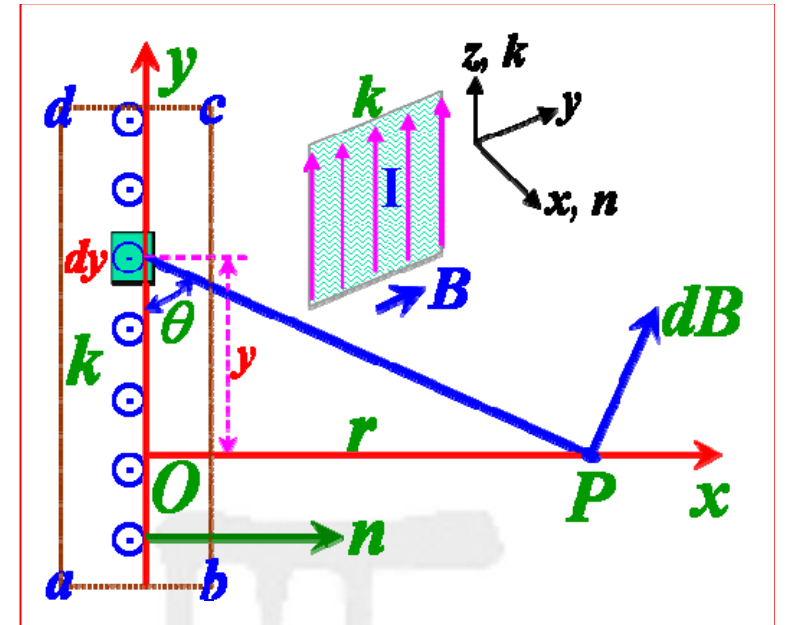
$$= I \int_0^\theta \sin \theta d\theta = I(1 - \cos \theta) = I \left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right)$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \vec{r} \times \vec{n}$$

$$d \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{r} \times \vec{n}$$



- 【例5.2.9】一无穷大平面上有均匀分布的电流，面电流密度为 k ， k 的方向为电流流动方向，其大小为通过该面上垂直于 k 的单位长度的电流。求离开电流面距离为 r 处的磁感应强度。



$$\because dI_y = k \cdot dy, \text{ 安培环路定理} \Rightarrow d\vec{B}_P = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\sqrt{r^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 k dy}{2\pi\sqrt{r^2 + y^2}} \vec{e}_B$$

$$dB_{P,x} = (dB_P) \cos \theta = \frac{\mu_0 k dy}{2\pi\sqrt{r^2 + y^2}} \cos \theta$$

$$dB_{P,y} = (dB_P) \sin \theta = \frac{\mu_0 k dy}{2\pi\sqrt{r^2 + y^2}} \sin \theta$$

$$dB_{P,x} = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \frac{y dy}{r^2 + y^2}, \quad dB_{P,y} = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \frac{r dy}{r^2 + y^2}$$

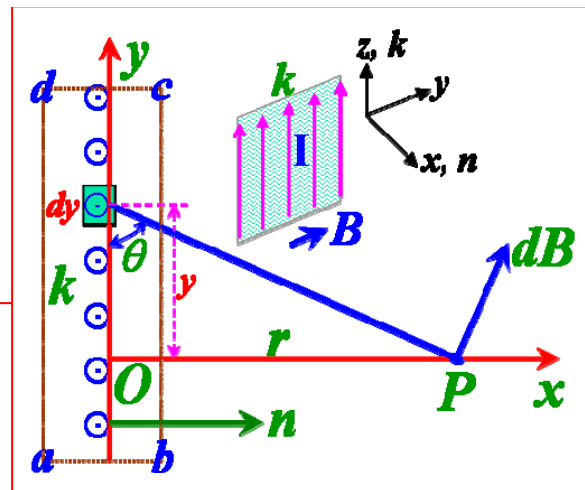


电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

□ 继续

$$B_{P,x} = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dy}{r^2 + y^2} = 0$$

$$B_{P,y} = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{r^2 + y^2} = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{r} \right) \bigg|_{y \rightarrow -\infty}^{y \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 k}{2} \Rightarrow \vec{B}_P = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{k} \times \vec{n}$$



□ 其实，如果熟练对称性分析，可以更简单求解。构造图中橙色虚线环路 $L=abcd$ ，直接应用环路定理：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 k l_{bc} \Rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B}_{ab} \cdot \vec{l}_{ab} + \vec{B}_{bc} \cdot \vec{l}_{bc} + \vec{B}_{cd} \cdot \vec{l}_{cd} + \vec{B}_{da} \cdot \vec{l}_{da}$$

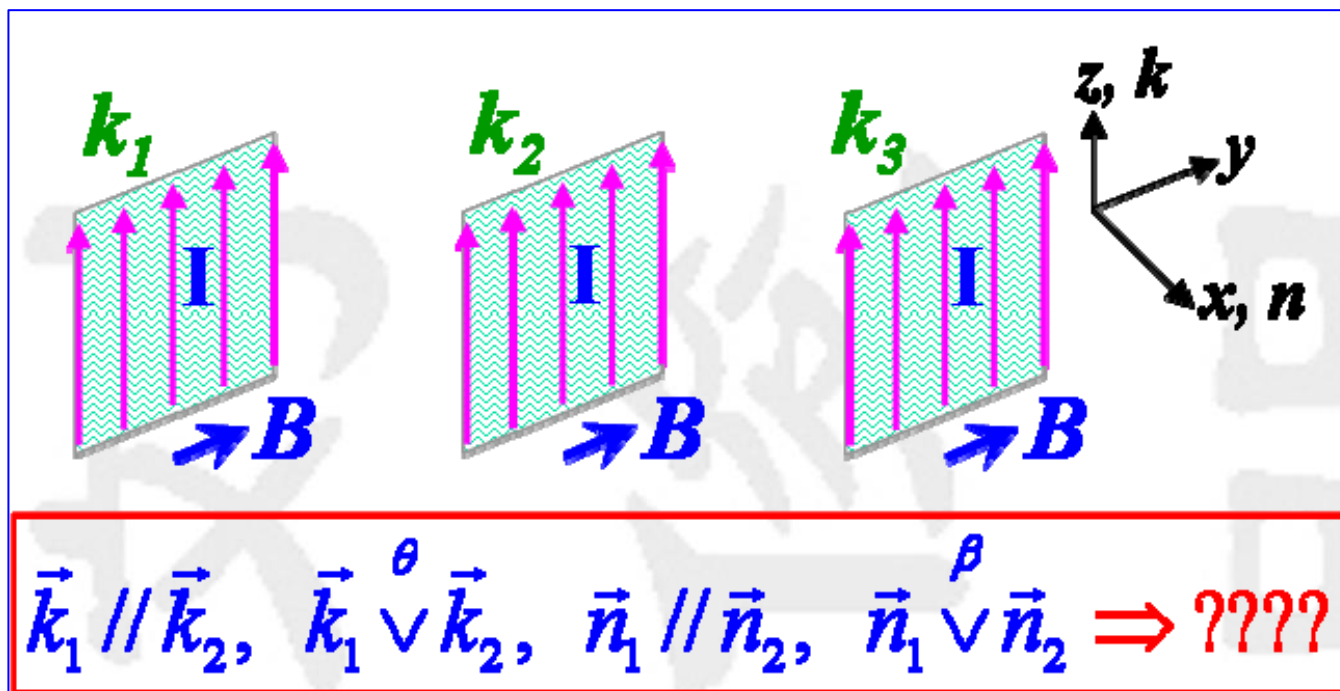
$$= \vec{B}_{bc} \cdot \vec{l}_{bc} + \vec{B}_{da} \cdot \vec{l}_{da}$$

$$\because \vec{B}_{da} = -\vec{B}_{bc}, \quad \vec{l}_{da} = -\vec{l}_{bc}, \quad \therefore \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\vec{B}_{bc} \cdot \vec{l}_{bc} = 2B l_{bc} \Rightarrow \vec{B}_P = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{k} \times \vec{n}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

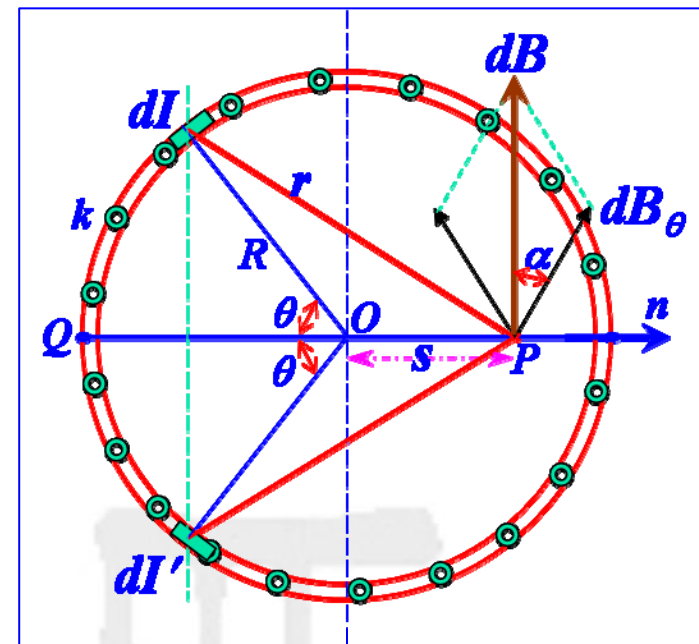
□ 再继续。考虑几个排列的无限大电流面，可以问：





- 【例5.1.41】半径为 R 的圆柱面上载有电流 I , I 在圆柱面上均匀分布, 平行于轴线流动(电流矢量 k)。求距圆柱面轴线为 s 的任一点 P 处磁感应强度。

- 在圆柱面上去微元 dI , 等效于无限长载流导线:



$$d\vec{B}_\theta = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \vec{e}_\theta \Leftarrow r = \sqrt{R^2 + s^2 - 2sR \cos(\pi - \theta)} = \sqrt{R^2 + s^2 + 2sR \cos \theta}$$

- 圆柱截面围绕直径线 QP 有对称载流元 dI' , 其在 P 点处产生的 B 大小同 dB_θ , 但在柱面法向 n 方向分量抵消, 矢量叠加为 dB 。

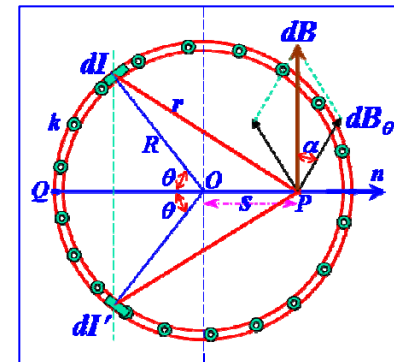
$$dB = 2 \cdot dB_\theta \cos \alpha \Leftarrow R^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \alpha, \quad r^2 = R^2 + s^2 + 2sR \cos \theta$$

$$\therefore dB = \frac{2(s + R \cos \theta)}{\sqrt{R^2 + s^2 + 2sR \cos \theta}} dB_\theta = \frac{\mu_0 dI}{2\pi} \frac{2(s + R \cos \theta)}{R^2 + s^2 + 2sR \cos \theta}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 继续



$$\because dI = kRd\theta, \quad k = I / 2\pi R, \quad \therefore dB = \frac{\mu_0 k R d\theta}{\pi} \frac{(s + R \cos \theta)}{R^2 + s^2 + 2sR \cos \theta}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 k R}{\pi} \int_0^\pi \frac{(s + R \cos \theta)}{R^2 + s^2 + 2sR \cos \theta} d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 k \Rightarrow \frac{1}{2} \mu_0 \vec{k} \times \vec{n} & \text{if } s = R \\ 0 & \text{if } s < R \\ \frac{\mu_0 R}{s} \vec{k} \times \vec{n} & \text{if } s > R \end{cases}$$

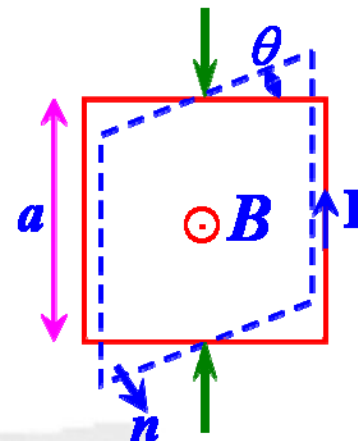
➤ 可以看到，圆柱面处的 B 是圆柱面 **内** 和 **外** 各自趋近圆柱面时说得的 B 之平均值，与静电学完全一样。

$$\vec{B}_{s=R} = \frac{1}{2} \left(\vec{B}_{s \rightarrow R-} + \vec{B}_{s \rightarrow R+} \right)$$



□ 【例6.2.14】 如图线圈在磁场中运动。转动惯量 J ，求线圈围绕平衡位置作微小振动的周期 T 。

只考虑微小简谐振动



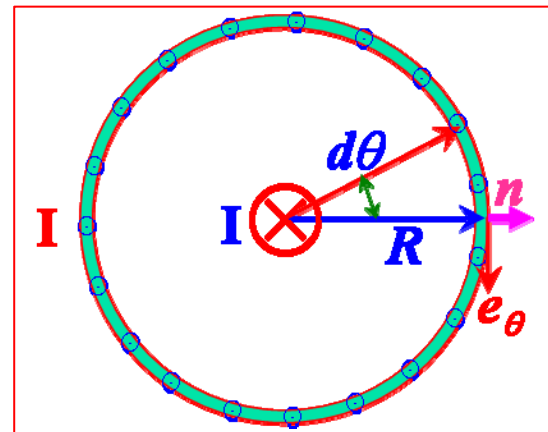
$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} = Ia^2 \vec{n} \times \vec{B}$$

$$\because L = Ia^2 B \sin \theta \approx L = Ia^2 B \cdot \theta$$

$$\therefore J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -L = -Ia^2 B \cdot \theta \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Ia^2 B}}$$



□ 【例6.2.35】同轴电缆：内圆柱、外圆筒(很薄)，电流沿内圆柱流进、沿圆筒流出，截面电流分布均匀。求圆筒单位面积上的受力。



➤ (1) 圆柱电流在圆筒处产生的磁感应强度

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\theta$$

➤ (2) 在圆筒上取面积元： $Rd\theta, dl$

$$dS = Rd\theta dl \Rightarrow dI = \frac{I}{2\pi R} Rd\theta = \frac{I}{2\pi} d\theta$$

$$d\vec{F} = (dI d\vec{l}) \times \vec{B} = \left(\frac{I}{2\pi} d\theta \right) d\vec{l} \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \right) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R} d\theta d\vec{l} \times \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2} dS \vec{n}$$

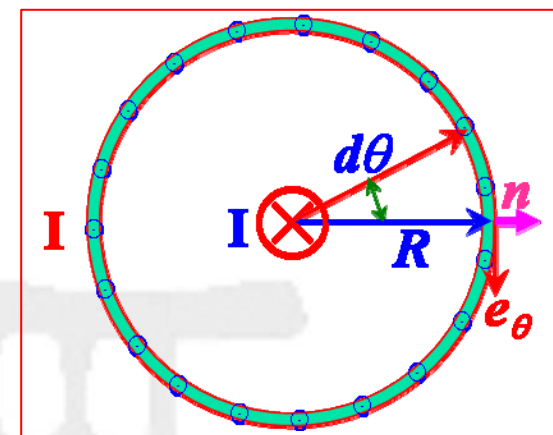
$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2} \vec{n}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ (3) 圆筒电流也会产生磁感应强度！！

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\theta, \quad \vec{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{k} \times \vec{n} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e}_\theta$$
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e}_\theta$$



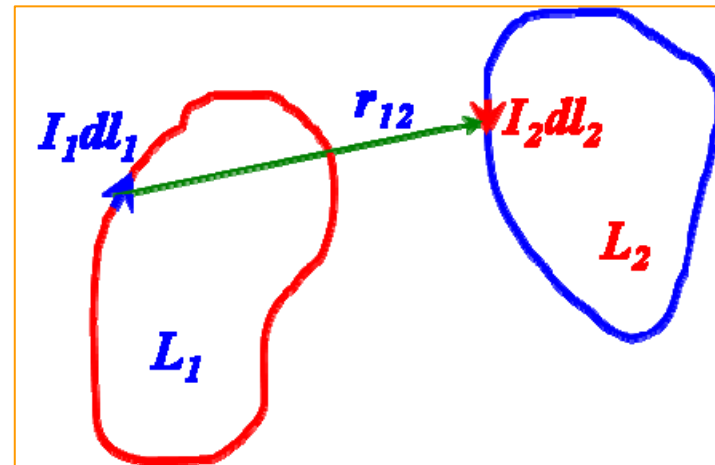
➤ (4) 在圆筒上取面积元: $Rd\theta, dl$

$$d\vec{F} = (dI d\vec{l}) \times \vec{B} = \left(\frac{I}{2\pi} d\theta \right) d\vec{l} \times \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \vec{e}_\theta$$
$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R} d\theta d\vec{l} \times \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} dS \vec{n}$$
$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \vec{n}$$



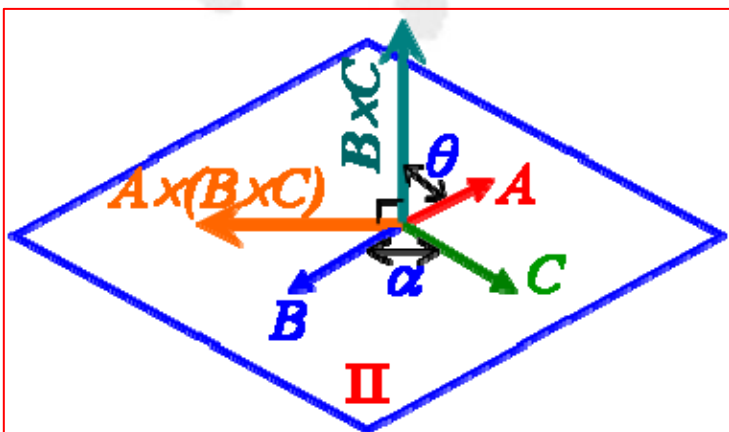
电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

□ 【例6.2.37/6.2.38】任意两个闭合的电流回路之间的磁相互作用满足牛顿第三定律。先看两个电流微元：



$$(1): I_1 d\vec{l}_1 \Rightarrow I_2 d\vec{l}_2 \quad d\vec{f}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0 I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})$$



$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = a\vec{B} + b\vec{C}$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= a\vec{B} + b\vec{C} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}\end{aligned}$$

➤ 继续

$$d\vec{f}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} \left[(\vec{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{12} \right]$$

$$(2): I_2 d\vec{l}_2 \Rightarrow I_1 d\vec{l}_1 \quad d\vec{f}_{21} = I_1 d\vec{l}_1 \times \left(\frac{\mu_0 I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21}}{4\pi r_{21}^3} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{21}^3} d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{21}^3} \left[(\vec{r}_{21} \cdot d\vec{l}_1) d\vec{l}_2 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{21} \right]$$

$$\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$$

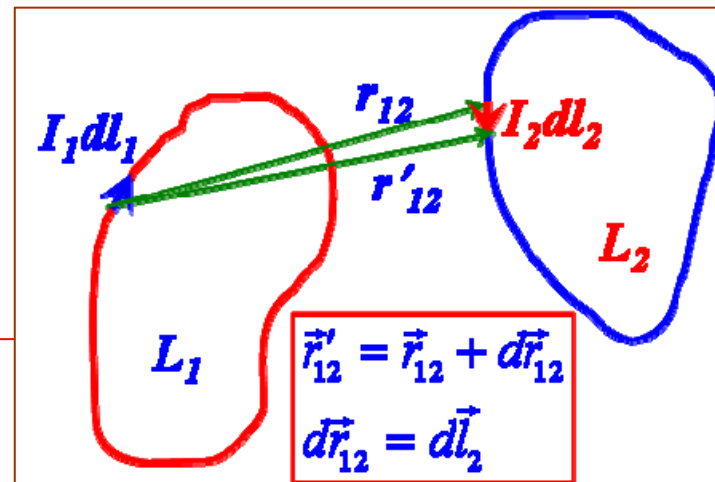
\therefore and if $d\vec{l}_1 \neq d\vec{l}_2$

\therefore and then $d\vec{f}_{12} \neq d\vec{f}_{21}$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 再看两个电流回路:



$$(3): d\vec{f}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} \left[(\vec{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{12} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left\{ \left[\left(-\nabla \frac{1}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{l}_2 \right] d\vec{l}_1 - \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right\}$$

integrating $d\vec{l}_2$ over L_2 yields the force of $I_1 d\vec{l}_1$ on L_2 :

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left\{ - \left[\oint_{L_2} \left(\nabla \frac{1}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{l}_2 \right] d\vec{l}_1 - \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right\}$$

$$(4): \because d\vec{l}_2 = d\vec{r}_{12}, \quad \therefore \oint_{L_2} \left(\nabla \frac{1}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{l}_2 = \oint_{L_2} \left(\nabla \frac{1}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{r}_{12} = \oint_{L_2} d \left(\frac{1}{r_{12}} \right) = 0$$

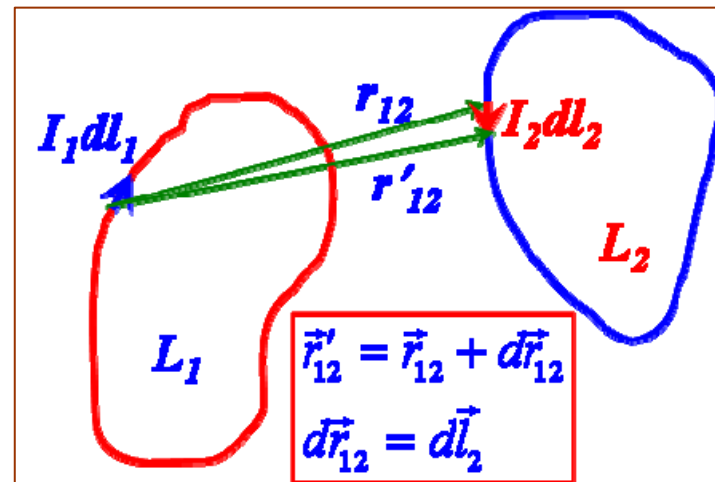


电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

➤ 继续:

$$(5): \therefore d\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left\{ \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right\}$$

$$\therefore \vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left\{ \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right\}$$



➤ 类似的推导可以推广到回路 L_2 作用在回路 L_1 上的力:

$$(6): d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left\{ - \left[\oint_{L_1} \left(\nabla \frac{1}{r_{21}} \right) \cdot d\vec{l}_1 \right] d\vec{l}_2 - \oint_{L_1} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left\{ \oint_{L_1} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \right\}, \quad \therefore \vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left\{ \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \right\}$$

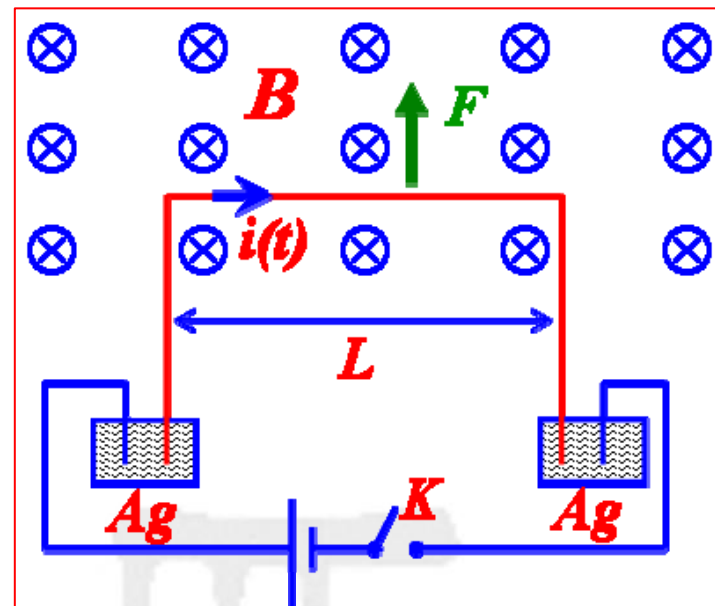
$$\therefore \vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}, \quad \therefore \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



电磁学05-19: 静磁场问题的疯狂

□ 【例6.2.7】质量 m 的折导线与水银槽电路接通，处在磁场 B 中。合上开关 K 后导线跳起导致电路断开，跳起高度为 h ，求通过折导线的电荷量 q 。

➤ 分析运动过程?????



$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow F = iLB \Rightarrow m d\vec{v} = \vec{F} dt$$

$$\Rightarrow m dv = F dt = iLB dt$$

$$\Rightarrow m \int_0^{v_0} dv = mv_0 = BL \int_0^t i dt = BL \int_0^q dq = BLq$$

$$\because v_0 = \sqrt{2gh} \Rightarrow q = \frac{m}{BL} \sqrt{2gh}$$



□ 本章习题:

- P230: 5.2
- P231: 5.9, 5.12
- P233: 5.22, 5.24
- P234: 5.27, 5.29



- 【二题2】抛物线形状的无穷长导线载有电流 I ，焦点到顶点距离为 a ，试求焦点处的磁感应强度 B 。(k 为抛物线垂面矢量)

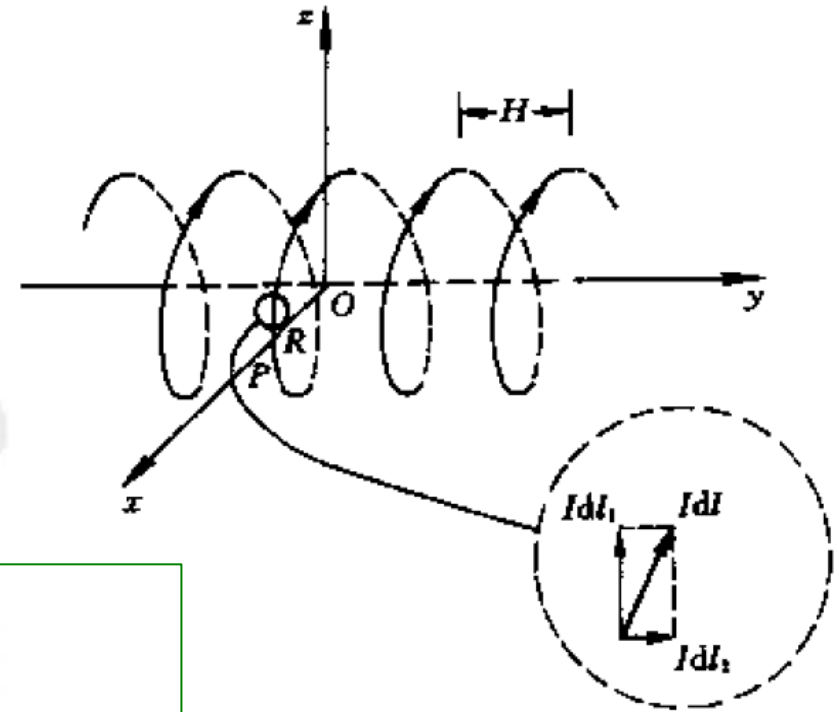
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4a} \vec{k}$$

- 【二题3】均匀带电球面绕其一直径轴旋转，求此直径上格点处的磁感应强度。

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 R \sigma \omega \vec{i}$$



- 【二题4】 在一半径为 R 的无限长圆柱面表面绕有螺距为 H 的载流导线，导线可看做很细。设空间相对磁导率为1，求圆柱轴线上一点的磁感应强度。



$$B_x = 0$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{H}$$

$$B_z = \frac{2\pi\mu_0 IR}{H^2} \int_0^\infty \frac{\phi \sin \phi + \cos \phi}{\left[\left(2\pi \frac{R}{H} \right)^2 + \phi^2 \right]^{3/2}} d\phi$$



□ 忆秦娥@磁感应

涡旋浪，源出流势时空上。

时空上，标无首尾，矢无方向。

从来因果描张量，正则划定拓扑相。

拓扑相，年轮美奂，破缺勿忘。