

DBM生长:

- 通过设置很小的空间距离对气态、液态或者固态的绝缘体施加强电场，会出现放电从而产生非常美丽的击穿放电。毫无疑问，闪电是最有名的例子了。表面放电(Lichtenberg figures)和聚合物中看到的放电树也是很有名的。
- 虽然如此，这些不同领域观测到的现象在结构形态上很相像，但是对这些结构的基本认识看来非常粗浅！^_^
- 自从DLA模型提出后，对介电击穿的研究水到渠成：完全是一个随机击穿过程。



- 有一个非常有名的表面放电击穿实验，即所谓 **Lichtenberg figure**，如图。

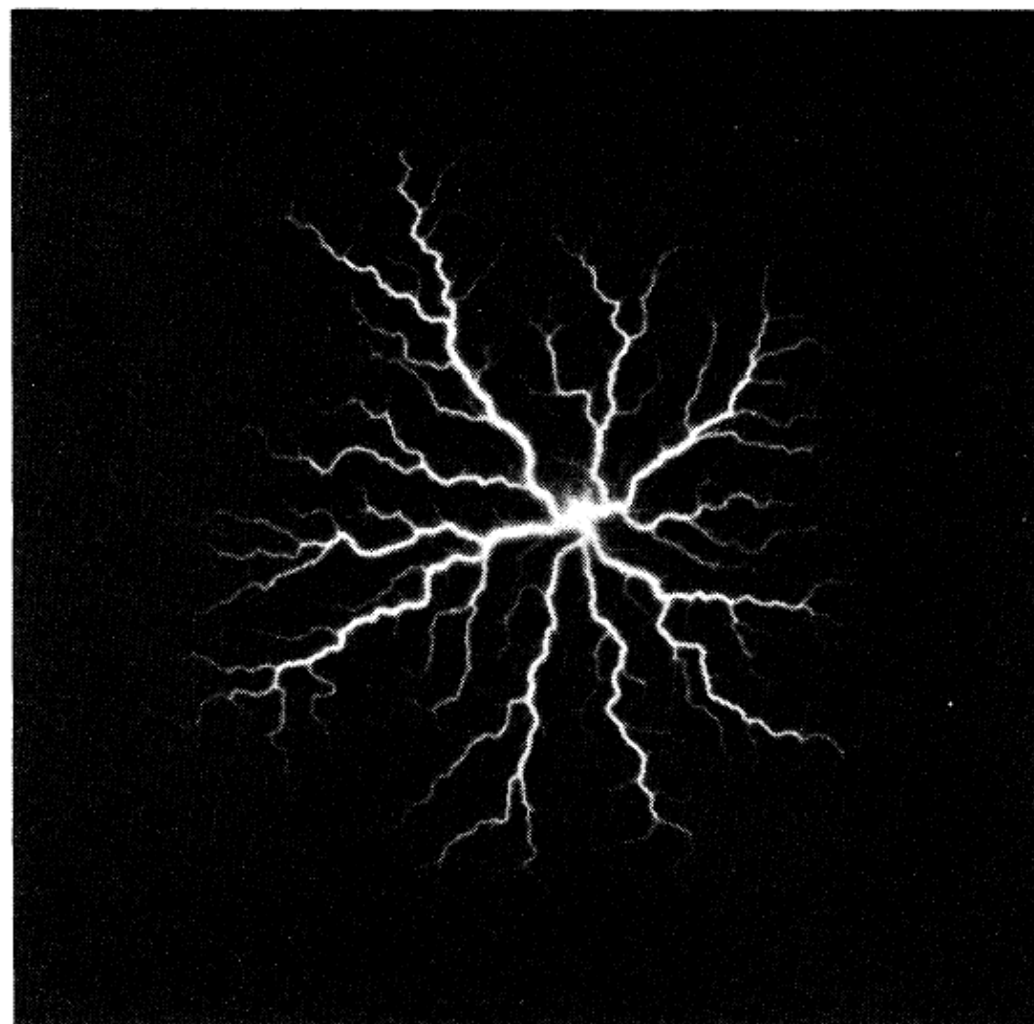


FIG. 1. Time-integrated photograph of a surface leader discharge (Lichtenberg figure) on a 2-mm glass plate in 0.3-MPa SF_6 . Applied voltage pulse: $30 \text{ kV} \times 1 \mu\text{s}$ (Ref. 5). This experiment corresponds to an equipotential channel system growing in a plane with radial electrode.

- **随机模型：**这一随机模型基本目标是能够模拟上述的介电击穿过程。
- 考虑一个二维正方点阵，模拟的规则如下：
- 图中黑点表示已经放电的格点，而 open dot 表示下一步可能被击穿位置。已击穿格点的电位 $\phi=0$ 而周边电极为 $\phi=1$ 。每个格点下一步被击穿概率按离散 Laplace 方程计算。

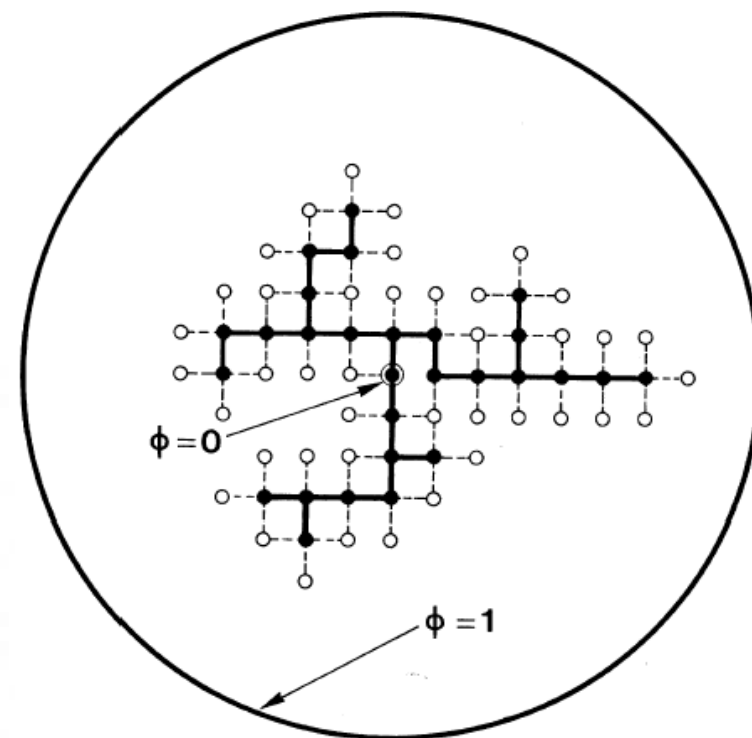


FIG. 2. Illustration of the stochastic model we introduce to simulate dielectric breakdown on a lattice. The central point represents one of the electrodes while the other electrode is modeled as a circle at large enough distance. The discharge pattern is indicated by the black dots connected with thick lines and it is considered equipotential ($\phi=0$). The dashed bonds indicate all the possible growth processes. The probability for each of these processes is proportional to the local electric field (see text).

非线性物理：分形物理

- 每一步随机选择一个位于边界的击穿点，将此点与周边近邻点格点用虚线连接起来，构成联级键，如图所示。
- 对每一个键都有一个被击穿的概率，其大小按照此键所处的电势差大小决定，可以是线性或者非线性的形式。
- 对于坐标为 (i, k) 的黑点(被击穿点, $\phi_{ik}=0$)和坐标为 (i', k') 的未击穿近邻点，相应的击穿概率就可以写成为：

$$p(i, k \rightarrow i', k') = \frac{(\phi_{i', k'})^\eta}{\sum (\phi_{i', k'})^\eta}$$



非线性物理：分形物理

- 这里使用了一个幂指数律的概率函数，幂指数为 η ，表示击穿概率与局域电势的依赖关系。分母表示所有图中用虚线链接的键。
- 按照这个概率分布，随机挑取一个键，这个键就被认定为击穿。然后整个点阵被重新更新，为下一步模拟作准备。
- 按照这个循环，一直进行下去，最后获得的就是所谓的随机模型给出的**DBM**形态。
- 这个随机模型的实质是击穿概率决定于局域场强大小。因为边界是随机自由变化的，所以即使是等势面的**Laplace**问题，问题的非线性行为也将变得十分复杂。其本质与**DLA**是一样的。



- Laplace等势方程可以写为

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

- 其离散的形式可以写成：

$$\phi_{i,k} = \frac{1}{4} (\phi_{i+1,k} + \phi_{i-1,k} + \phi_{i,k+1} + \phi_{i,k-1})$$

- 只要边界条件能够给定，将上面的方程迭代自然就可以求解了。
而实际系统中边界条件难于给定，而且电击穿过程具有明显的随机性。
- 模拟表明上面的迭代具有好的收敛性的迭代次数在**50**次以内。那么**50**次以后就应该重新启动初始化条件，防止发散导致误差。



非线性物理：分形物理

- 结果分析：模拟结果如图示。
- 前面的模型告诉我们电击穿过程与边界形状的密切关系。例如，上面离散点阵的右端那个键就具有很高的击穿概率，因为那里的局域电场已经很强了，而所谓“笼子”里面的键击穿概率就小很多。这就是所谓的“tip effect”和“Faraday screening”效应了。

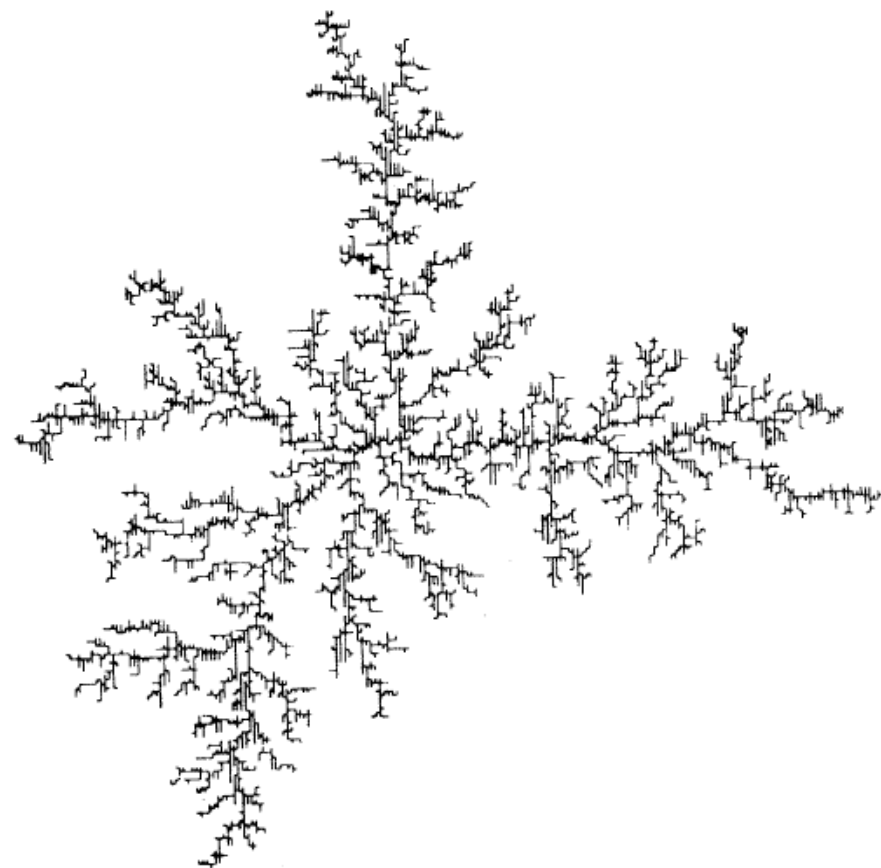


FIG. 3. Example of computer-generated discharge pattern of about 5000 steps. The Hausdorff dimension for these structures turns out to be $D = 1.75 \pm 0.02$.

非线性物理：分形物理

- 模拟结果已是所能得到的最好结果，与实际击穿形态有较大差别。主要的一点就是分叉程度比实际要高。
- 局域各向异性因素可能起作用，局域电场屏蔽是不是有作用也未可知。另外，时间积分效应很重要。
- 分形行为：对多个模拟结果的分析，表明分形维是 $D=1.75\pm0.02$ 。而实验测量表明分析维是1.70。
- 考虑 η 的影响。 $\eta=0$ 对应于Eden模型，随着 η 增大，模拟发现模拟形态变得越开放，从而出现 D 明显减小的情形。 $D(\eta=0)=2$, $D(0.5)=1.89$, $D(1.0)=1.75$, $D(2)=1.6$ 。



- 另外我们可以考察所谓的**Debye Screening**效应。也就是说存在一个载流子的有限运动对击穿形态的影响。
- 对这个效应，可以将**Laplace**方程中的 ∇^2 算符用 $\nabla^2 - k^2$ 来代替，这就在系统中引入了一个特征尺度 $l \sim k^{-1}$ ，自相似性就不再存在。但是模拟揭示在尺度大于 l 时，系统是非均匀的，即分形，而尺度小于 l 时，出现 $D=2$ 。
- 这个模型本身与**DLA**实在是没有太大区别，因为模型本身就是从**Laplace**方程出发来决定概率的。因此，**DLA**模型相关的结果对于**DBM**是一样适用的。



DLA理论:

- 通过前面对**DLA**和**DBM**模型的分析，我们知道开放的**DLA**系统生长主要发生在尖端区域，这一过程主要由于尖端生长是扩散限制的环节。
- 类似的问题还出现在过饱和体系中第二相析出和凝固过程中枝晶的生长。这样的过程形成的形态非常复杂，原因就在于扩散总是导致尖端生长出现不稳定性。那么第一个问题是什么出现所谓的尖端不稳定性？



非线性物理：分形物理

- **DLA**理论主要研究几个问题：
- (1) 从Mullins-Sekerka线性不稳定性理论角度分析为什么**DLA**随机生长会出现分叉和开放结构
- (2) 利用数值计算来验证所谓的标度不变性；而且通过假定颗粒生长不一定一粘即定来验证标度不变性假设的普适性。
- (3) **DLA**理论还会关注一些**DLA**生长过程各因素的相关依赖关系，即所谓的动力学效应的影响。
- (4) 有兴趣的同学可以从**RMP 51, 1 (1980)**这篇文章看起。这是一个曾经令人激动的领域！！



- **稳定性分析：**随机扩散在**DLA**过程中对保持自相似性十分重要。这一点通过对比**Eden**模型已可以看出。**Eden**生长周边每一个位置有等同概率继续生长，因此不可能形成分叉结构，其维度与空间维数相同。而**DLA**则因为外伸尖端易于获得生长机会，易于形成分叉结构。
- 为解释这种**DLA**分叉结构，我们考虑输运方程。前面已提到，设 $u(x, k)$ 为随机行走在第 k 步达到位置 x 的概率，则有：

$$u(\vec{x}, k+1) = \frac{1}{c} \sum_{\vec{l}} u(\vec{x} + \vec{l}, k),$$

其中 l 遍历位置 x 周围的 c 个近邻。



- 已经证明上述方程是连续扩散方程Laplace方程的离散形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \nabla^2 u ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

- 其中 η 为扩散系数。这个方程在二维极坐标下的形式如上。
- 因为DLA中颗粒一旦粘上就不再变化，所以那些位于边缘位置的颗粒及集团内部都满足 $u=0$ 的条件。对于一个边缘空位置在第 $k+1$ 步接受一个颗粒的概率为：



非线性物理：分形物理

$$v(\vec{x}, k+1) = \frac{1}{c} \sum_{\vec{l}} u(\vec{x} + \vec{l}, k)$$

- 在光滑表面的近似下，如果法向单位矢量为 \mathbf{n} ，则法向生长速度 V_n 可以写成：

$$V_n = \eta \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u \big|_s .$$

- 上面的方程和Laplace方程构成了枝晶生长标准方程，用来分析DLA集团生长。因为此方程左边是含时项，考虑DLA集团保持不动，没有生长没有融化，那么统计意义上 u 与时间没有关系，只是存在一个从点阵外延向中心区域的稳定扩散。而DLA模拟只是一个颗粒一个颗粒进行，可以认为 $\partial u / \partial t$ 很小，忽略不计。



非线性物理：分形物理

- 由此，**DLA**生长变成求解稳态**Laplace**方程。集团表面 $u=0$ ，而表面生长速度与近邻未生长处梯度项 ∇u 成正比。如一个表面位置具有大的曲率半径，这个位置的生长就比较慢，稳定性较高。
- 为了分析这个问题，以右图说明。对于球塔生长，如果生长是线性均匀的，如**Eden**模型，则球塔外形不会变化，但在扩散聚集过程，生长速度与局域曲率半径的倒数成正比，发展下去，球塔会变得越来越尖。

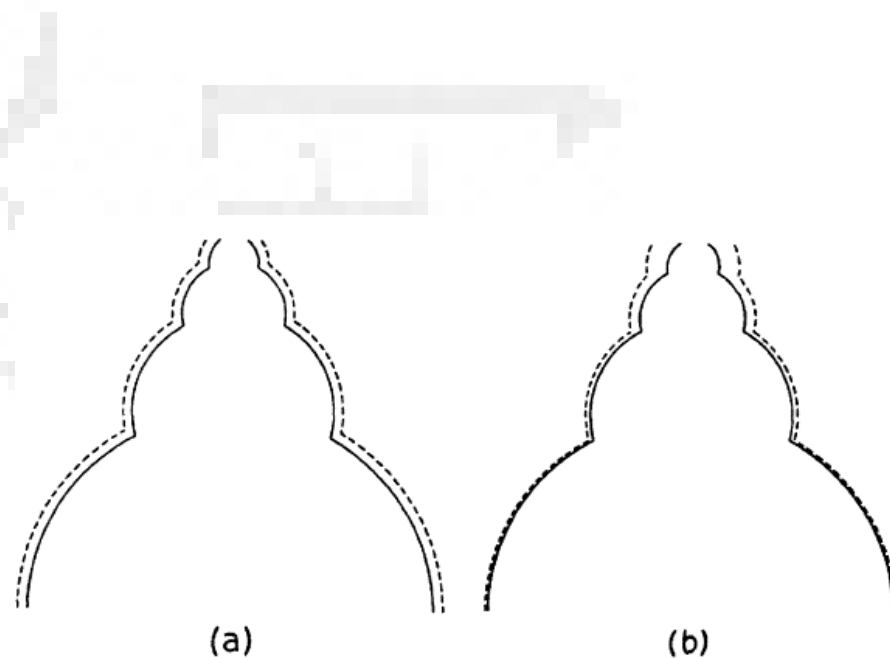


FIG. 2. Growth of a tower of spheres according to (a) the Eden model and (b) DLA.

- Mullins和Sekerka利用线性稳定性方法处理了这一问题。考虑一个二维圆盘，其半径加上余弦微扰后可以写成：

$$r = R + \delta_m \cos(m\theta)$$

- 上述解满足准静态Laplace方程： $\partial u / \partial \bar{z} = 0$ 。利用 $u(r)=0$ 和法向生长速度方程，可以得到与时间相关的线性化解，其中 $V_n = dr/dt$ 。

$$u(r) = 0 \Rightarrow A \ln(r) + B + C_m \cos(m\theta) / r^m = 0$$

$$r = R + \delta_m \cos(m\theta)$$

$$V_n = \eta \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u \big|_s .$$



$$dR/dt = A/R ,$$

$$d\delta_m/dt = (m-1)\delta_m A/R^2$$

$$(\dot{\delta}/\delta)/(\dot{R}/R) = m-1 .$$

- 所有 $m>1$ 的微扰都不稳定，随着时间而放大；所有 $m>2$ 的微扰放大速度比半径本身放大得快，因此局域原始形状不能得到保持而继续生长，从而形成**DLA**一样不规则不密实的生长形态。
- 由扩散限制生长的过程，如果没有其它因素参与制约，总是得到分支结构，出现类似**DLA**的形态。但在枝晶生长问题中，存在**各向异性毛细张力**的抑制效应，所以枝晶分支是规则的。



非线性物理：分形物理

- 如果毛细张力是各向同性的，仍然形成随机分叉结构，只是分叉程度被大大抑制。
- 但是如果某个尖端引入一点点各向异性涨落(气泡)，生长行为就完全不一样了。标准的枝晶结构就显示出来。
- 关于**DLA**中表面张力的影响，后面我们将讨论。

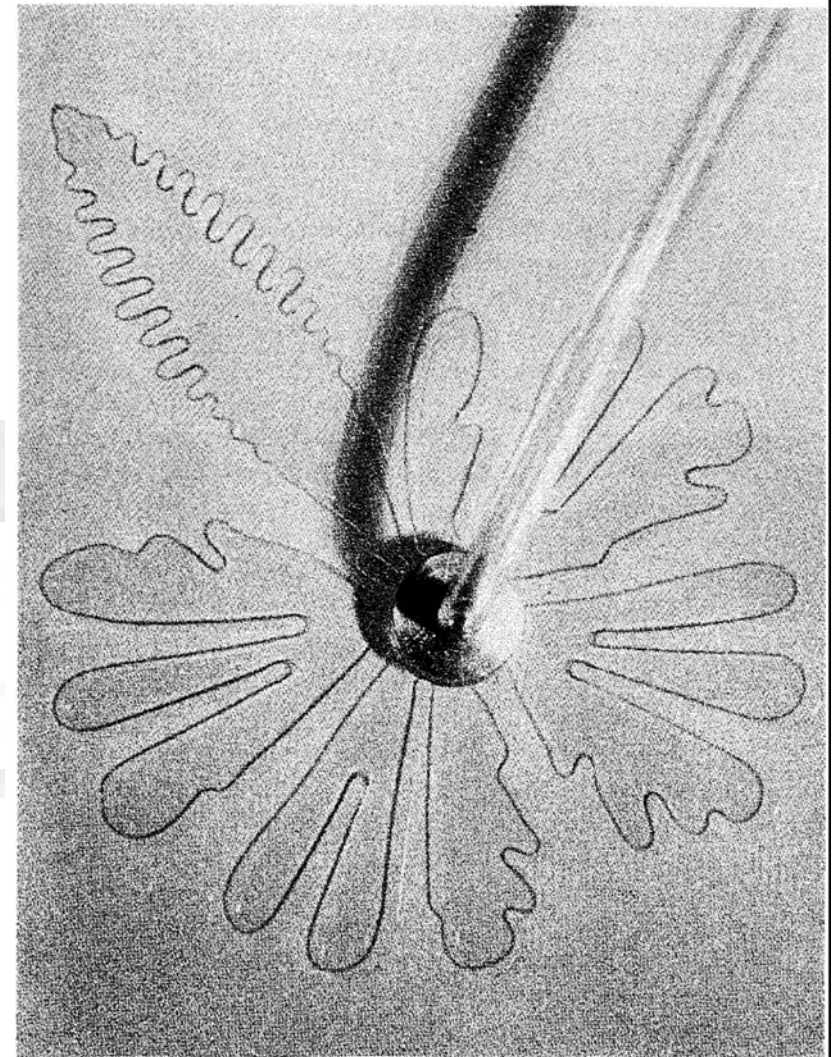
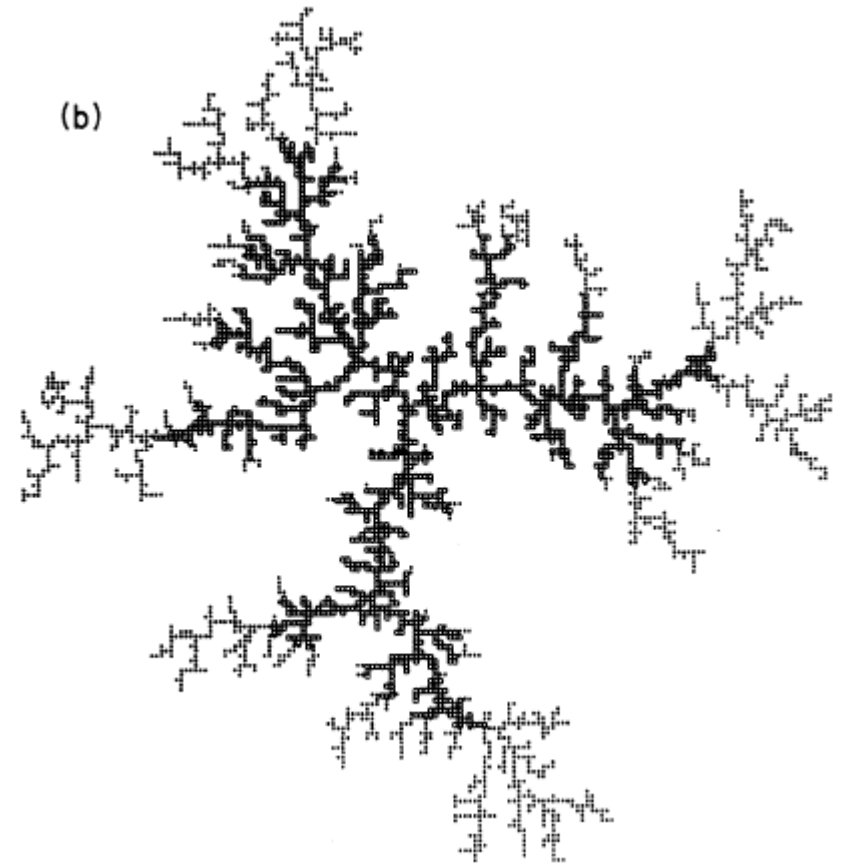


Fig. 3. Hele-Shaw experiment in which the inviscid fluid enters through a central orifice and forms fingers that move radially outward. One of these fingers has trapped a small bubble at its tip. As a result, it is growing stably at constant speed and is emitting sidebranches. (Photograph courtesy of Y. Couder.)

非线性物理：分形物理

- 数值模拟：
- (1) 屏蔽效应。
- (2) 随意截取几个生长尖端可以看到集团局部之间是均匀和各向同性的，可以假定密度的空间相关具有平移和旋转不变性，从这个意义上，这里的集团密度与临界现象中序参量的作用是相似的。而标度不变性我们前面已经检验过。



- 普适性问题：
- 普适性在相变临界现象中占有中心地位：标度指数与微观过程没有关联。这一性质在空间相关尺度比微观特征尺度大很多时理所当然。
- **DLA**的分形维是一个普适参量，由密度空间相关满足幂指数关系而得来，如果分形维普适，那么空间相关数学形式也是普适的。
- **DLA**集团的普适性质与点阵类型无关，在三角点阵和正方点阵甚至是无点阵随机粘贴模拟结果都证明**Hausdorff**维数与点阵类型没有关联。这是普适性的第一个证据。



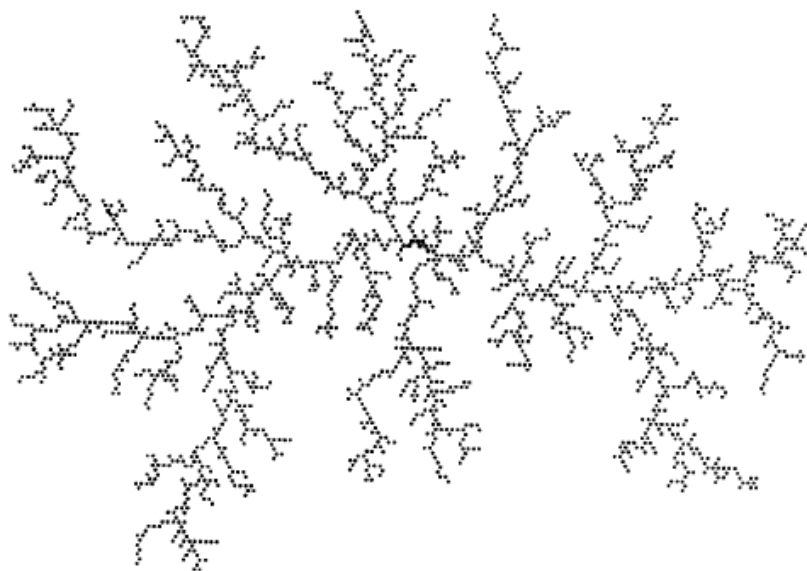


FIG. 4. Aggregate of 2500 particles on a triangular lattice.

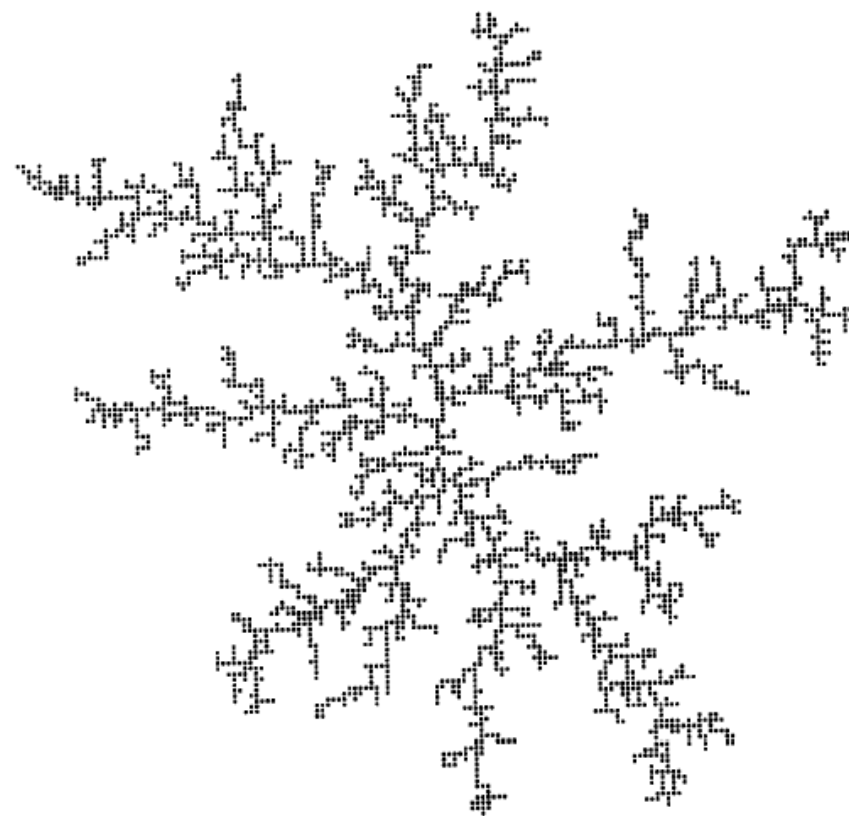


FIG. 5. Aggregate of 3000 particles with $s=0.5$. Note the thickening of the “branches.”

- 第二个需要考虑的因素是其它相互作用与随机扩散一起参与**DLA**形态的控制。在前面**DLA**稳定性理论处理中，我们一直假定在集团表面位置有 $u=0$ 。这一假定的背后是集团没有表面张力或者界面张力(如果外部是一个相)，显然是不合理的。
- 在**DLA**中完全粘贴概率对应于零表面张力，因此表面位置各处扩散场是一样的。对于集团表面局域曲率为 K 的区域，如果毛细长度为 Γ ，那么由**Gibbs-Thomson**效应可以得到：

$$u|_s = \Gamma K ,$$



- 这里我们假定粘贴不是完全的，存在一个概率 s ，每次粘贴只有 s 的可能性颗粒能够稳定粘贴在集团上不再扩散。完全粘贴对应于 $s=1$ 。这种部分粘贴向系统扩散方程里面引入了一个长度参数 $l(\sim a/s)$ ，一个颗粒平均说来只有行走了 l 的距离才可能粘上。
- 从平均连续的观点看，对一个一维长链系统，如果集团表面位置为 O ，则距离 O 为 l 处扩散区域的浓度场为：

$$u(l, k+1) = (1-s)u(O, k) + \frac{1}{2}u(2l, k),$$

$$u(O, k+1) = \frac{1}{2}u(l, k).$$



- 如果我们不计步数 k 和 $k+1$ ，也就是假定扩散过程缓慢， u 对时间的变化忽略不计，那么从上两式得到(右式为连续数学形式，步长为 l):

$$su(l) = u(2l) - u(l) \quad su|_s = l \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u|_s$$

- 上两式相当于引入一个新的特征尺度 $\lambda = l/s$ ，可以根据需要任意调整，其作用相当于毛细长度。事实上，如果我们利用连续扩散稳态方程求解一球面的颗粒浓度，可以得到(稳定性分析中有解):

$$\text{if } \lambda \ll R, \quad \vec{\nabla} u|_s \sim u_\infty / R$$



- 我们马上得到Gibbs-Thomson方程：

$$u|_s = u_\infty \lambda / R ;$$

- 在上面的毛细张力存在时，重新对 $d=2$ 下Laplace方程在微扰边界条件下求解：

$$d\delta_m/dt = (m-1)\delta_m A / R (R + m\lambda) ,$$

$$(\dot{\delta}/\delta)/(\dot{R}/R) = (m-1)R / (R + m\lambda) .$$

- 如果 $\lambda \gg R/m$ 时， $d\delta/dt \sim 0$ ，集团表面任何微扰都不可能放大，毛细长度的作用是保持集团在小于 λ 范围内只有稳定的光滑密实结构。而当 $\lambda > R$ 时， $d\delta/dt$ 与 dR/dt 可比，预示着一种临界稳定状态。



非线性物理：分形物理

- 对于**DLA**，在小于 λ 的尺度范围内，局域生长保持稳定，而在大于 λ 的范围内，生长将不再稳定。
- 取 $s=0.5$ ，模拟空间相关函数显示图中。 r 很小时局域有明显的加厚效应，而且相关函数 $c(r)$ 在 r 很小时基本上是平的，与纯的**DLA**相关函数明显不同。当然，当 r 比较大时，相关函数与 r 的幂指数关系再次成立，而且幂指数也是**-0.34**。

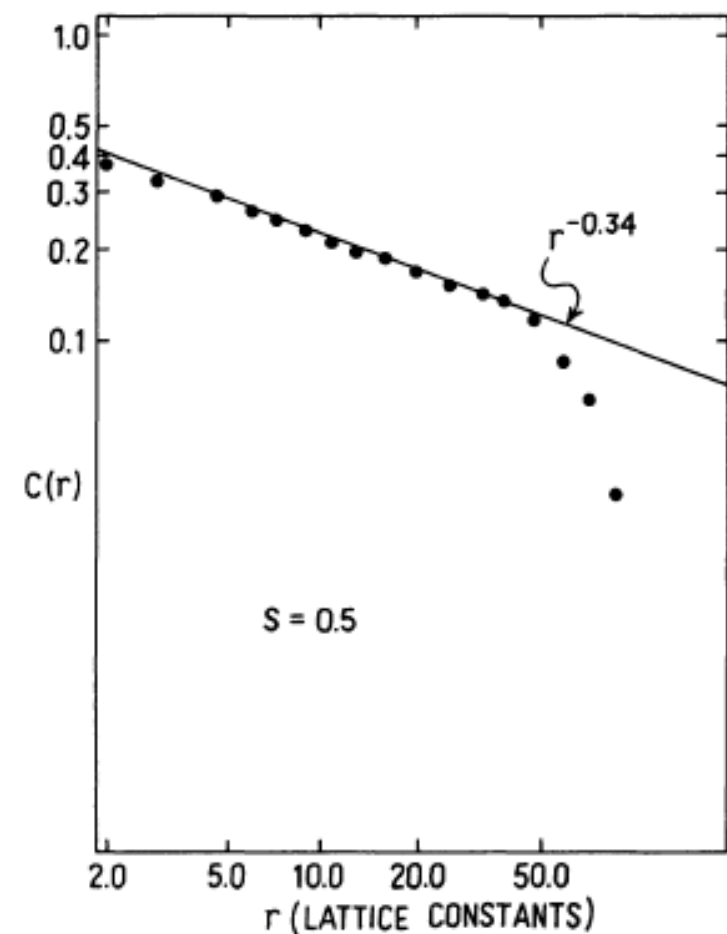


FIG. 6. Correlation function for the aggregate of Fig.

- 由此可以说明：**DLA**分析维在 $R>\lambda$ 范围内仍然是具有普适性的。
- 将上面的问题更进一步推广，假定粘贴几率 s 与所考虑位置周围的空键数目 B 按如下规律相关，这里 t 为一个小于1的数：

$$s = t^{3-B}$$

- 对于一个空洞位置 $B=3$ ，而对一个填满位置 $B=1$ 。模拟结果显示是 $t=0.5$ 的结果，而不同 t 值下的空间相关函数结果则示于下页的另外一张图中。

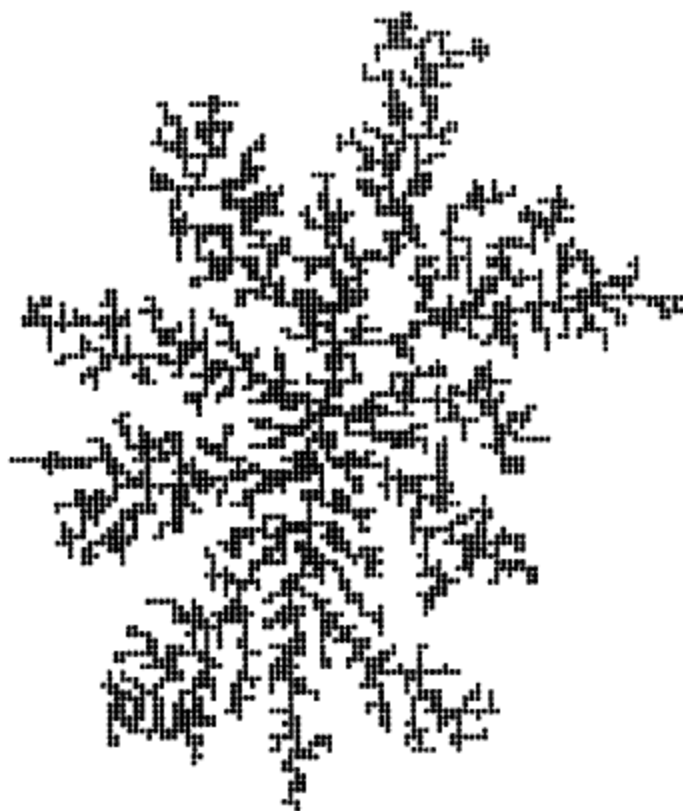


FIG. 7. Aggregate of 3000 particles with $t=0.5$.

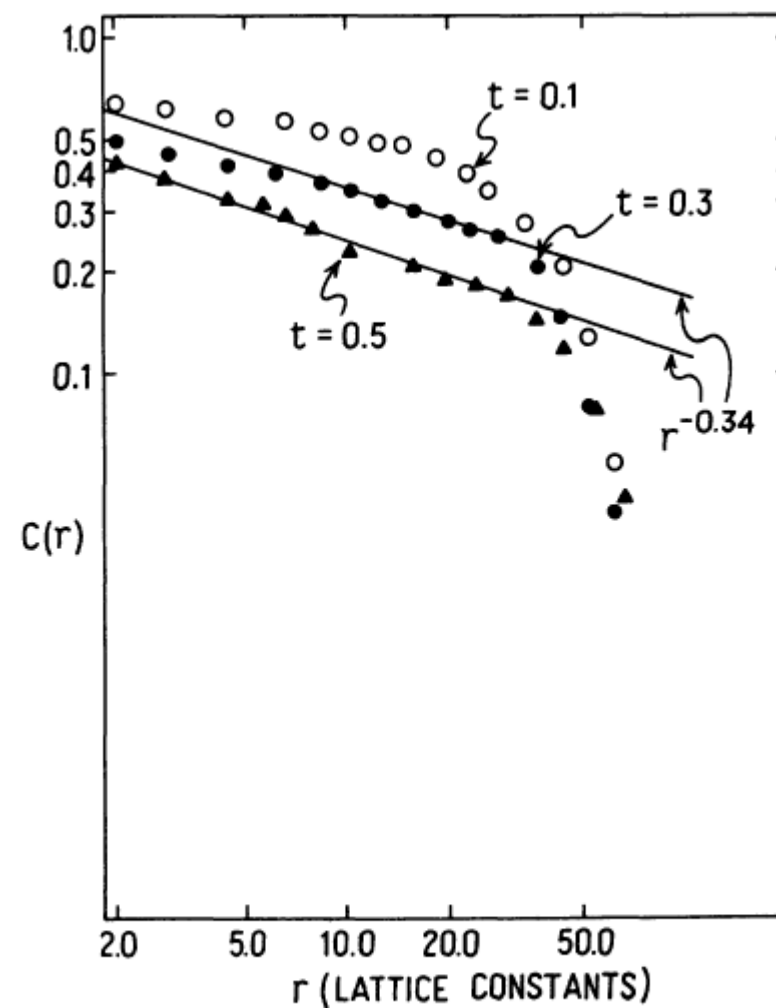


FIG. 8. Correlation functions for three aggregates with $t < 1$.

- 可以看到一个比较小的 t 值对应于一个小的 s 值，也就是一个比较大的毛细作用长度，因此空间相关函数偏离普适幂指数标度的特征距离就越大，正如模拟结果所示。
- 这些工作的一个重要结论是实际DLA集团形成过程中随机扩散具有使集团极度分叉从而具有标度不变性，而其它任何引入一个特征长度的交互作用将破坏这个特征尺度以内结构的标度不变性，但是大于这个尺度标度不变性仍然是普适的。



复分形的概念：

- **DLA**之类的分形体具有开放结构，生长过程具有屏蔽特征。由此产生一个问题：对一个分形体，当探测其表面性质，例如表面积大小时，该怎样进行？
- 实际探测时，特别是利用光学和粒子方法探测，一般利用探测“器”与分形表面发生作用，得到分形表面信息。如果这个探测“器”因为屏蔽效应只能探测到分形表面一部分，探测结果就不准确。
- 水力学上，由于这种屏蔽效应，回转半径为 R 的分形体对外界的屏蔽作用与一个半径为 R 的实心球类似。



非线性物理：分形物理

- 研究如何表征分形体的这种屏蔽效应是应用的需要，也是产生复分形概率的客观要求。
- 研究这个问题，需要将分形表面分成两部分：一部分可以被探测到，而另外一部分因为屏蔽效应不能被探测到。这里一个重要的几何推理问题是：当一个分形体表面总面积加倍，那么是不是那些未被屏蔽的表面部分也加倍？
- 可以预料，问题与两个因素相关：分形体本身结构和探测介质的运动结构。



非线性物理：分形物理

平均场模型：

- 对于渗流体系，统计物理证明表面积与体积成正比。但此结论对于实际表面探测没有帮助，因为有屏蔽问题。
- 设一分形体表面非屏蔽位置数目为 M_u 。如果分形体外形尺度为 L ，应有幂指数关系，其中 d_u 为表面维度指数。

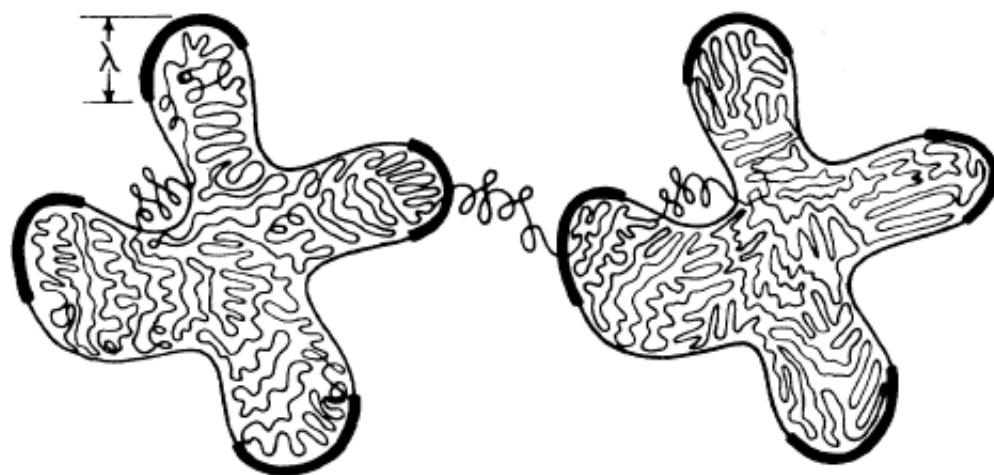


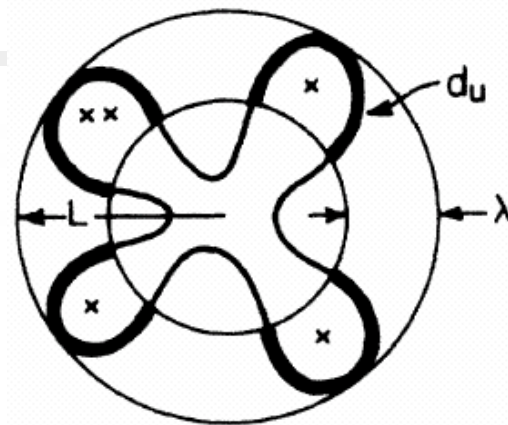
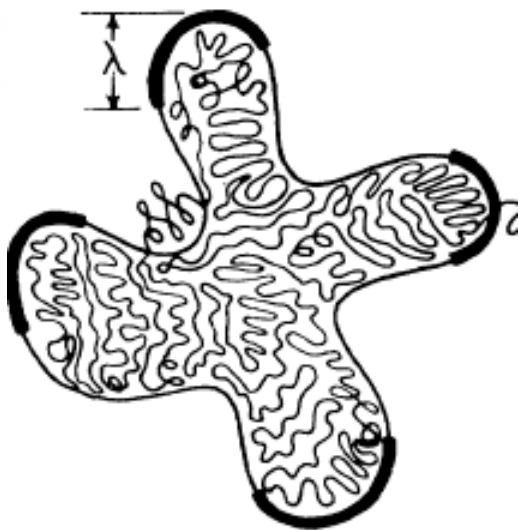
FIG. 1. Concept of the screening length λ for a cluster of arbitrary fractal dimension d_f , defined as the distance that a projectile of fractal dimension d_p will penetrate. A particle *leaving* the unscreened perimeter, indicated by a heavy line, escapes and may be captured by the unscreened perimeter of another cluster.

$$M_u \sim L^{d_u}$$

非线性物理：分形物理

- 对欧几里德物体， $d_u = d - 1$ ；对分形维 d_f 的分形体， d_u 如何计算？
假定上述幂指数关系成立，但是将外形尺度 L 写成 ξ ，与屏蔽效应应有关系：

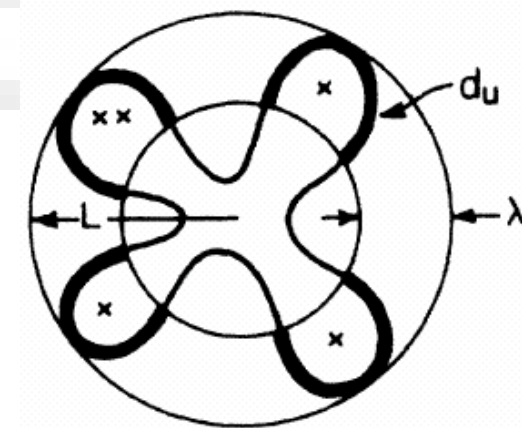
$$M_u \sim L^{d_u} \sim \xi^{d_u} \sim \lambda \cdot \xi^{d_f - 1}$$



非线性物理：分形物理

- λ 为某种穿透深度，在此范围内 M_u 与 ξ 关系都一样， M_u 等于边长 ξ^{df-1} 乘以宽度 λ ，如示意图。将分形体表面划分为屏蔽和非屏蔽区域，表面存在平均穿透深度 λ 。考虑一颗粒随机行走，其轨迹叠加是维数为 d_p 的分形结构，此颗粒在 λ 范围内 被粘贴之前行走的步数为：

$$N_w^* \sim \lambda^{d_p}$$



非线性物理：分形物理

- 这个步数也可以表示为与分形体数目密度 ρ 的倒数成正比，其中 M_{tot} 是分形体的总数目，密度是数目与实空间体积之比。由此可以得到平均穿透深度 λ 与分形体尺度的关系为：

$$N_w^* \sim 1/\rho \quad M_{tot} \sim \xi^{d_f}$$

$$\rho = M_{tot}/\xi^d \sim \xi^{d_f - d}$$

$$N_w^* \sim \lambda^{d_p}$$

$$\lambda \sim \xi^{(d - d_f)/d_p}$$



非线性物理：分形物理

- 与前页的关系式结合起来，即表面存在两个维数相加，得到：

$$M_u \sim \xi^{d_u} \sim \lambda \cdot \xi^{d_f-1} = \xi^{(d_f-1)+(d-d_f)/d_p}$$

$$d_u = (d_f - 1) + (d - d_f)/d_p$$



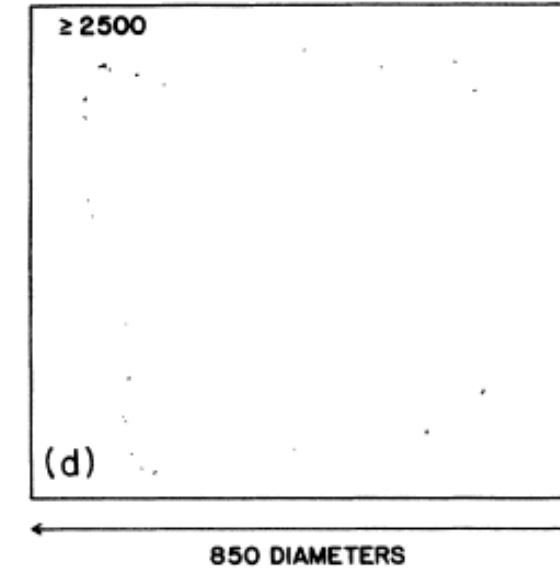
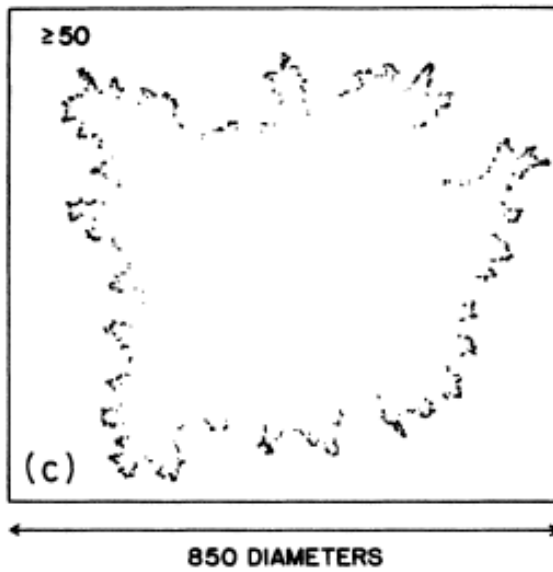
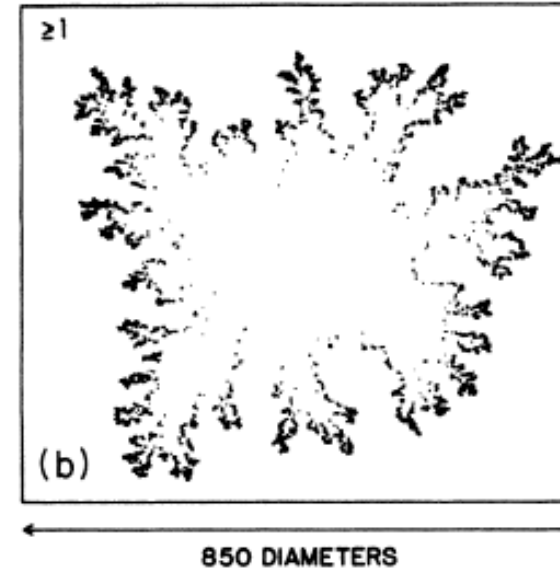
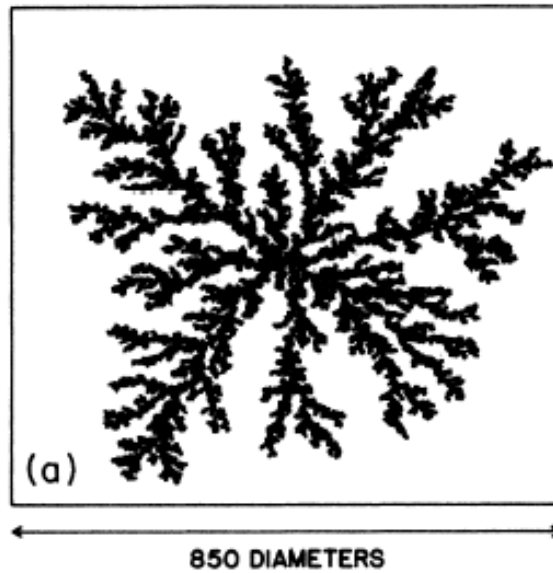
非线性物理：分形物理

模拟结果：

- 对于上面的平均场结果，进行了广泛的计算机模拟检验，其中MSCW理论最为著名(Meakin, Stanley, Coniglio和Witten)。
- 设分形体表面某一个位置 i 在下一次被颗粒粘贴上的概率为 p_i 。为了计算 p_i ，设计一个模拟代数如下：
- 给定一个很大的DLA分形体，再向其周围随机发射 10^6 个随机行走颗粒，统计分形体表面各个位置被粘贴过的数目，从而得到每一个表面位置下一次被粘贴的概率为 $p_i = N_i / N$ ，这里 N_i 是表面位置 i 被粘贴次数， N 是总次数。
- 下页图告诉了分形体表面被粘贴不同次数的各位置分布情况。



非线性物理：分形物理



非线性物理：分形物理

- 为了对上图显示现象进行定量分析，我们可以分析粘贴概率分布通量：

$$Z_q \equiv \sum_{i=1}^M p_i^q$$

这里 M 是所有表面位置数目。按照平均场理论的基本假定，我们有：

$$p_i = \begin{cases} \bar{p} , & i = 1, 2, \dots, M_u \\ 0 , & \text{otherwise} . \end{cases}$$

- 因此第 q 级通量可以写成：

$$Z_q = [(\bar{p})^q M_u]$$



非线性物理：分形物理

其中平均概率满足下列归一化条件：

$$\sum_{i=1}^M p_i = \sum_{i=1}^{M_u} \bar{p} = 1 \quad \bar{p} = 1/M_u$$

所以我们有：

$$Z_q = M_u^{-(q-1)} \sim L^{-(q-1)d_u} \quad M_u \sim L^{d_u}$$

- 计算机模拟可以用来证明上面的平均场理论是不是正确。证明方法如下：通过对分形体表面各个位置的被粘贴概率进行统计，然后按原始定义求出 Z_q ，再根据平均场理论的结果来计算 Z_q ，如果两者吻合，平均场理论得到证实。



非线性物理：分形物理

8. 模拟结果显示，当 q 值很小时，模拟与理论是充分吻合的，说明平均场理论对于描述只依赖低通量的那些物理现象是成功的。一个例子是随机超导网络的电导行为，我们可以认为电导只是这些随机网络线度的线性函数，所以 $q=1$ 。
9. 但是，模拟发现，当 q 值变得比较大时，模拟结果与平均场理论之间的差别就很大了。其中的原因可以这样理解：当 q 很大时， Z_q 变得主要只依赖分形体表面那些最靠近外部的尖端区域了，因为那里 p_i 最大，而那些 p_i 较小的区域就变得不重要了。
10. 为了继续使用平均场理论的基本形式，我们必须将 Z_q 表示为：

$$Z_q \sim L^{-(q-1)D(q)}$$

11. 因此， $d_u=D(q)$ 就变得与 q 相关了。也就是说，当 q 由小到大时， $D(q)$ 变得不同，出现了无限多个维数 $D(q)$ 才能描述分形体的表面，虽然这里 d_u 名义上是探测颗粒随机轨迹的分形维。



非线性物理：分形物理

12. 上面的描述告诉我们：为了描述一个分形体表面性质，必须根据所需表征的物理量(与 Z_q 相关)来确定探测颗粒的随机行走轨迹，而这也是一种幻想而已。反过来说，要描述一个分形体表面的性质，需要不同的分形维才能进行，即所谓复分形的概念。^_^
13. 我们可以将分形体表面位置被粘贴的概率排成一个分布 $N(p)$ ，使得 $N(p)$ 表示落在 $(p, p+\Delta p)$ 范围内的 p 大小，这样我们有：

$$Z_q = \sum_p N(p) p^q \qquad Z_q = \sum_{\ln p} n(p) p^q$$

14. 由于分布 $N(p)$ 实在是太宽，跨过很多数量级，所以，使用对数标度也许更好。所以从分布 $N(p)$ 转换出另外一个分布 $n(p)$ ，其表示落在区间 $(\ln p, \ln p + \Delta \ln p)$ 内的 $\ln p$ 的大小。



非线性物理：分形物理

12. 因为 $\Delta p = N(p)/\Sigma N(p) = N(p)$, $\Delta \ln p = n(p)/\Sigma n(p) = n(p)$, Δ 用微分代替, 就有 $d \ln p / dp = n(p)/N(p)$, 故而有 $n(p) = p N(p)$ 。

13. 在 q 很大时, 不等式

$$Z_q \geq [(p_{\max})^q n(p_{\max})]$$

总是成立的, 其中 p_{\max} 是 p 的最大值, 而 $n(p_{\max})$ 则应该是分形体表面位置的一个子分形集合。模拟显示有:

$$p_{\max} \sim L^{-\alpha_{\max}} \quad n(p_{\max}) \sim L^{f_{\max}}$$

14. 在 q 趋向无穷时, 上述不等式中的等号应该成立, 因此一定有:

$$(q-1)D(q) = q\alpha_{\max} - f_{\max}$$



非线性物理：分形物理

12. 显然，上式在 $f_{max}=\alpha_{max}=d_u$ 时回复到平均场理论的结果，这一关系具有一定程度的普遍性：

$$Z_q = M_u^{-(q-1)} \sim L^{-(q-1)d_u}$$

13. 如果 q 值不是特别大，上述推理就不再成立，必须重来。这时

$$Z_q \equiv \sum_{i=1}^M p_i^q$$

中占主导作用的不再是 p_{max} 而是另一个 $p^*=p^*(q)$ ，这个 p^* 应该使得 Z_q 取最大值，这显然是一种近似。因为对应于 p^* 的 $n(p^*)p^{*q}$ 在 Z_q 中占主导这样，故要求极值条件为： $dn/dp=-nq/p$ ，所以

$$\frac{d \ln n(p)}{d \ln p} = -q$$



12. 现在我们定义另外的两个幂指数 $\alpha(q)$ 和 $f(q)$ ，使得

$$p^*(q) \sim A(q)L^{-\alpha(q)} \quad n(p^*) \sim B(q)L^{f(q)}$$

13. $A(q)$ 和 $B(q)$ 其实可以和 q 无关，考虑到 $Z_q \sim L^{-(q-1)D(q)}$ ，所以我们有：

$$(q-1)D(q) = q\alpha(q) - f(q)$$

14. 按照上面的定义，我们知道 $\ln n(p) \sim [-\alpha(q)]$ ， $\ln p \sim f(q)$ ，所以 $d\ln n(p)/d\ln p = -d\alpha(q)/df(q)$ ，而上面我们得到 $d\ln n(p)/d\ln p = -q$ ，所以 $d\alpha(q)/df(q) = q$ 。由此我们得到 $d[(q-1)D(q)]/dq = \alpha(q)$ 。

13. 有了上式，只要求出 $D(q)$ ，就可以得到 $\alpha(q)$ ，从而得到 $f(q)$ 。



12. 最后我们就得到了所谓的分形体表面通量 Z_q 与分形尺度 L 的标度指数关系如下：

$$Z_q \sim L^{-(q-1)D(q)} \sim L^{-\tau(q)}, \quad \tau(q) = q\alpha(q) - f(q)$$

13. 这里 Z_q 与热力学中的配分函数相似， q 类似于温度的倒数， $\tau(q)$ 类似于自由能， α 类似于内能， f 类似于熵。这样，我们可以象分析一个热力学系统那样来分析所谓的分形体表面性质。注意这里 q 相当于温度倒数。



