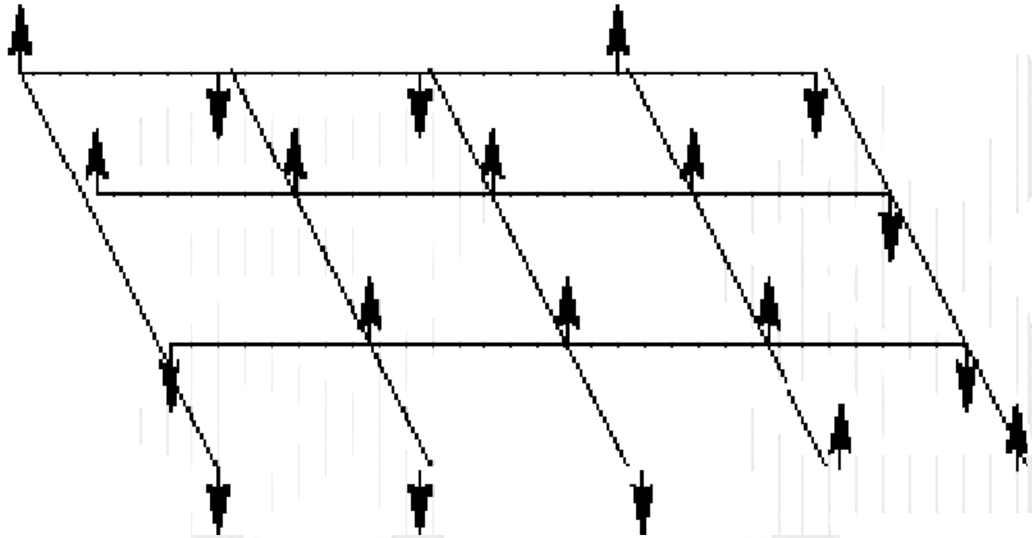
- 我们将磁的一切归于电流：自由电流、分子电流、电子电流
- 自然界中一切跟磁性有关的物质我们就置若罔闻？
- 更丰富的物理在于这些到目前为止置若罔闻的地方！

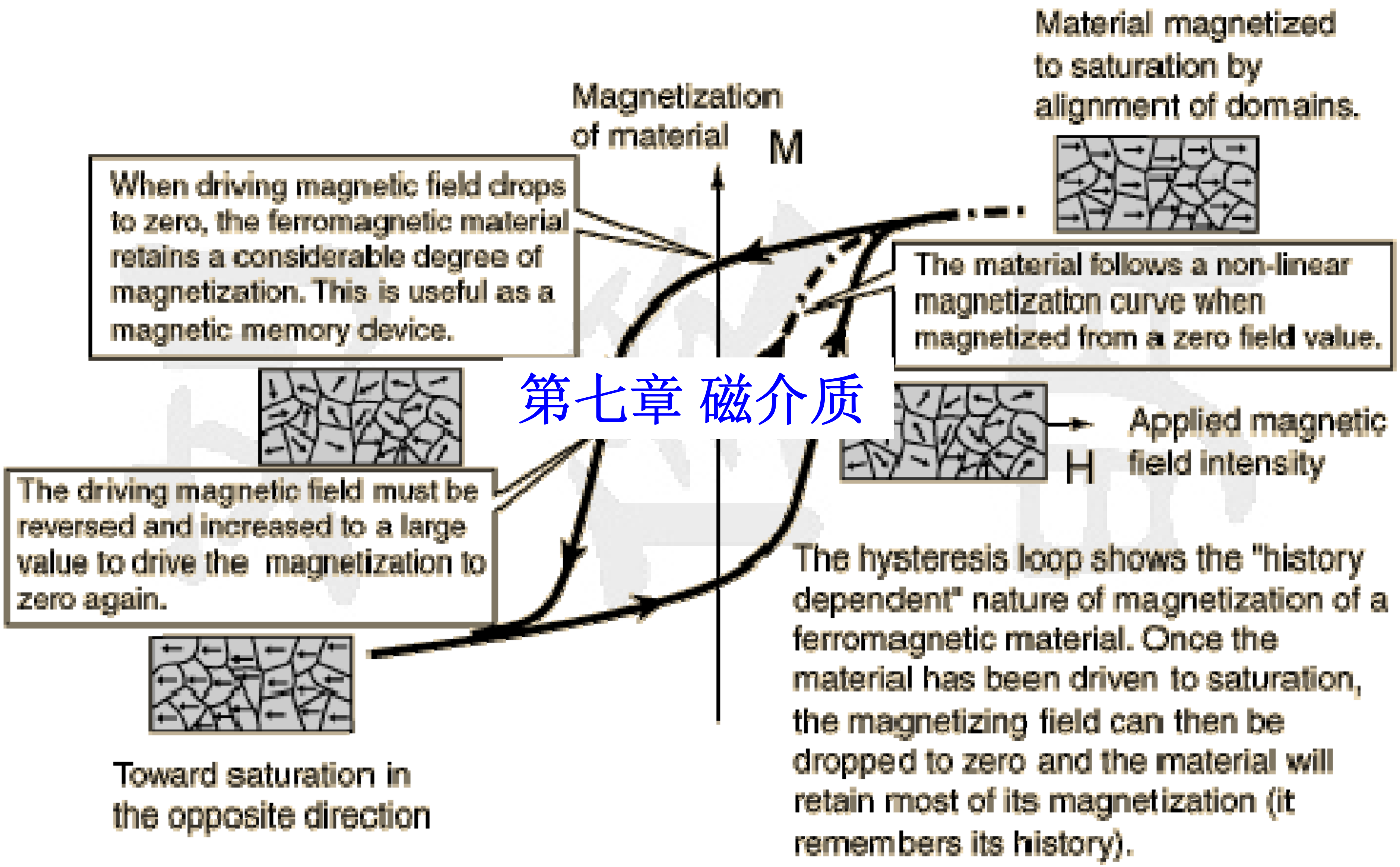
- 量子力学：自旋！
- 统计物理与相变：自旋模型！
- 铁磁学：量子力学+固体物理！
- 自旋电子学：自旋作为信息载体！
- 。。。。。。。。

Ising model

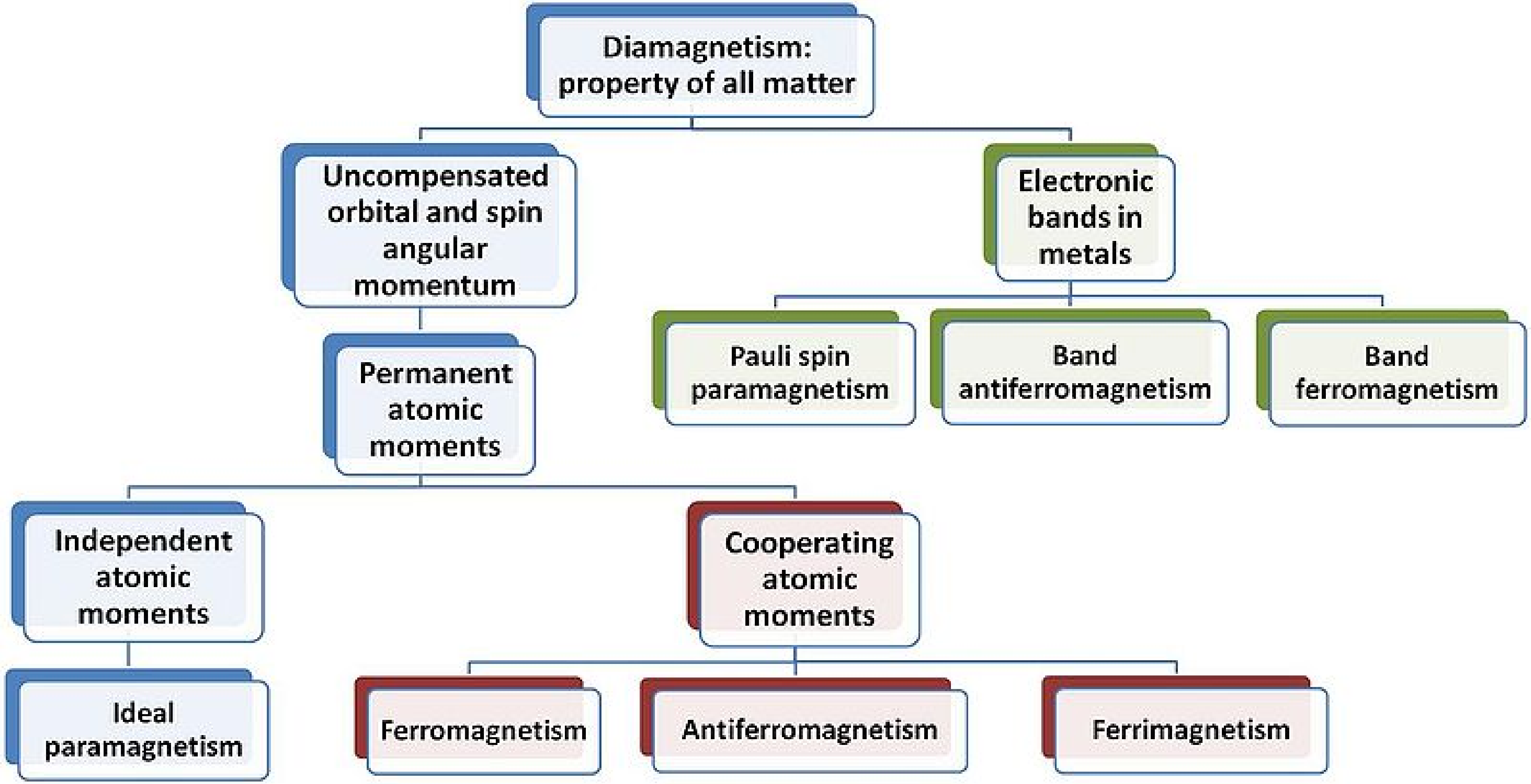


$$k_B T_c / J = \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \approx 2.269$$

$$H = -\frac{1}{2} J \cdot \sum_{<i,j>} S_i \cdot S_j - h \cdot \sum_{<i>} S_i , \quad S_i = \pm 1$$

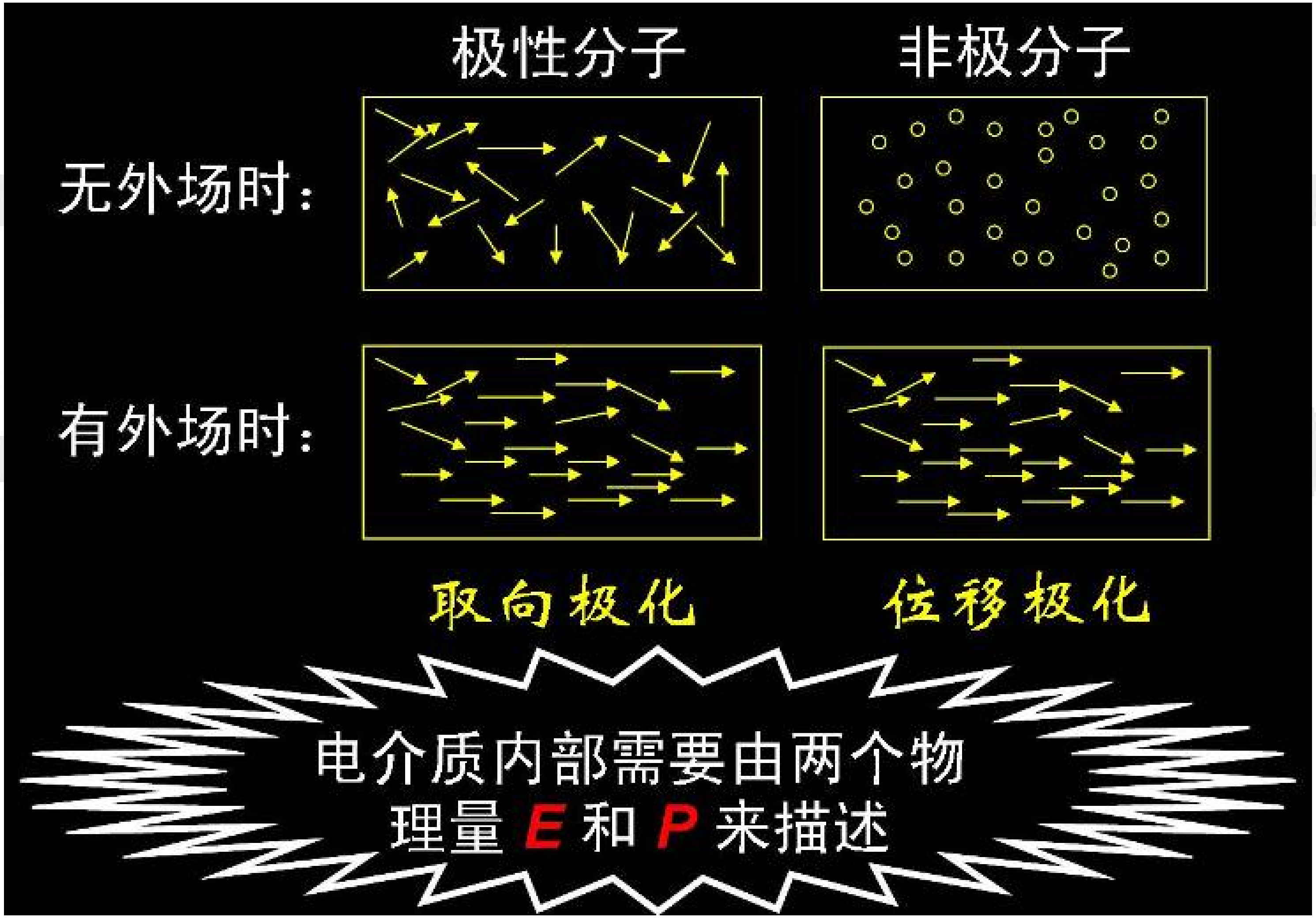

Material magnetized to saturation by alignment of domains.
Magnetization of material
M
When driving magnetic field drops to zero, the ferromagnetic material retains a considerable degree of magnetization. This is useful as a magnetic memory device.
The material follows a non-linear magnetization curve when magnetized from a zero field value.
Applied magnetic field intensity
H
The driving magnetic field must be reversed and increased to a large value to drive the magnetization to zero again.
The hysteresis loop shows the "history dependent" nature of magnetization of a ferromagnetic material. Once the material has been driven to saturation, the magnetizing field can then be dropped to zero and the material will retain most of its magnetization (it remembers its history).
Toward saturation in the opposite direction

第七章 磁介质

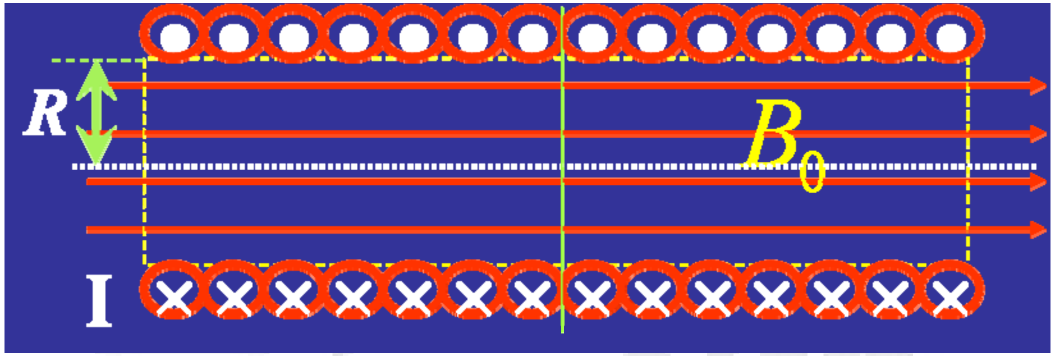


Diamagnetism: property of all matter
Uncompensated orbital and spin angular momentum
Electronic bands in metals
Permanent atomic moments
Pauli spin paramagnetism
Band antiferromagnetism
Band ferromagnetism
Independent atomic moments
Cooperating atomic moments
Ideal paramagnetism
Ferromagnetism
Antiferromagnetism
Ferrimagnetism

回顾电介质物理：



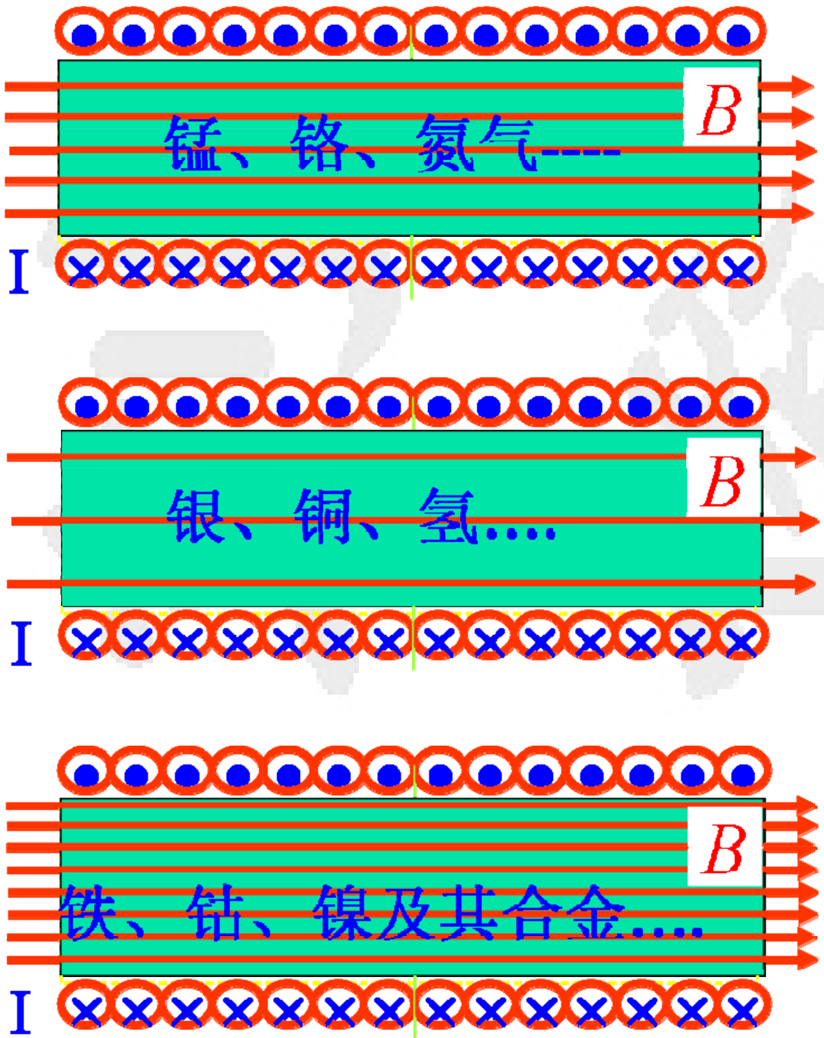
- 介质磁化：



$$B_0 = \mu_0 nI$$

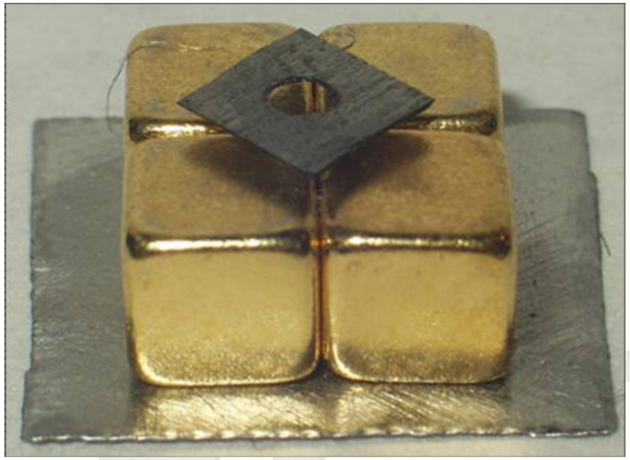
- 主要实验问题：
  - 磁场中的物质统称磁介质；
  - 介质在磁场中的磁化行为；
  - 磁介质中的磁场有何规律？
  - 磁场中的磁介质对磁场有何影响？

- 三种行为：

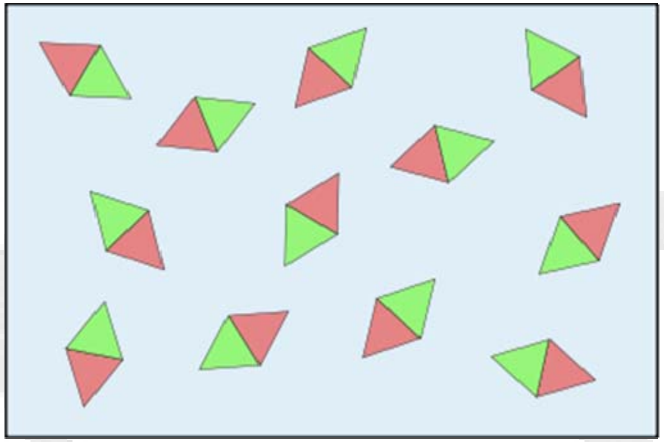


- $B>B_0$，顺磁介质
- $B<B_0$，抗磁介质
- $B>>B_0$，铁磁介质

- 抗磁性：



- 顺磁性：

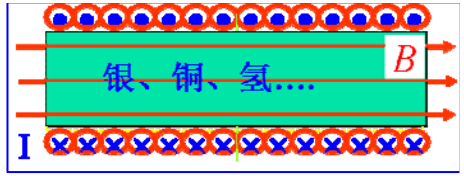


- 铁磁性：

这样的划分是很有问题的，很不全面！

反铁磁、亚铁磁、、

电磁学07-01: 磁介质实验现象



- 基于电流或运动电荷产生磁场的理论，磁介质在磁场中被激励起某种隐藏的电流或者运动电荷效应，从而产生附加磁场 ***B′***:

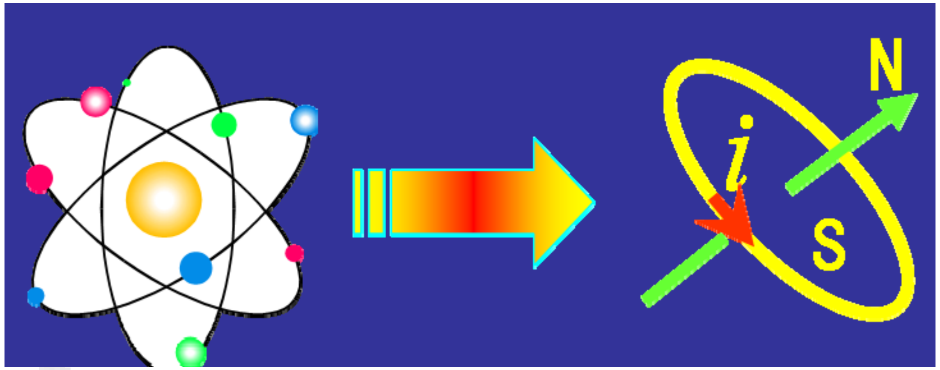
$$\text{In paramagnetics, } \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' > B_0 \Rightarrow \vec{B}' \nearrow\nearrow \vec{B}_0$$

$$\text{In diamagnetics, } \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' < B_0 \Rightarrow \vec{B}' \swarrow\nearrow \vec{B}_0$$

$$\text{In ferromagnetics, } \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' >> B_0 \Rightarrow \text{negligible } \vec{B}_0$$

- 现代磁学有严谨的量子理论，例如海森堡、**Ising**、**Onsager**、**Weiss**等做出重大贡献；
- 本章只在经典电磁学范围内讨论磁介质问题。

电磁学07-02: 电子磁矩



- 电子围绕原子核外轨道运动，具有轨道磁矩与自旋磁矩；

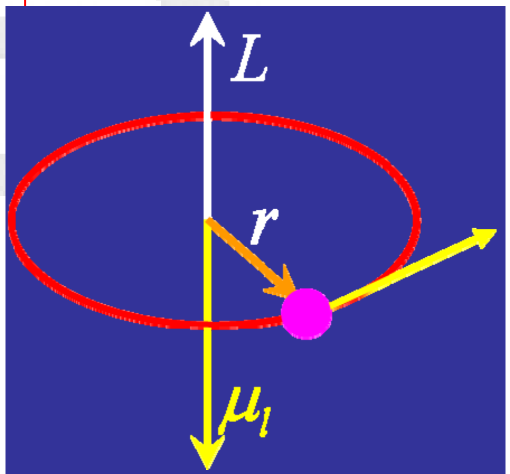
- 轨道磁矩 μ_l:

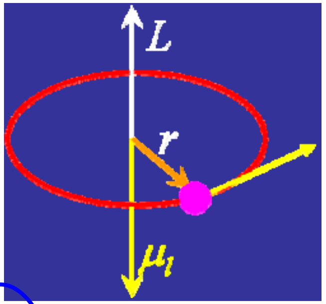
Coulomb force as driving force for the oribital motion:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}$$

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\sqrt{\frac{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}{e^2}}\Rightarrow I=\frac{e}{T}=\frac{e^2}{4\pi r\sqrt{\pi\varepsilon_0 mr}}$$

$$\therefore \mu_l=IS=\frac{e^2}{4\pi r\sqrt{\pi\varepsilon_0 mr}}(\pi r^2)=\frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}}$$





- 转动力学可以定义轨道角动量 ***L***:

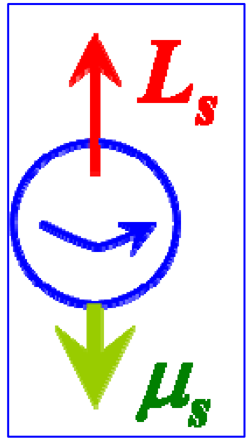
$$\vec{L}=\vec{r}\times(m\vec{v})\Rightarrow L=rmv=\frac{e}{2}\sqrt{\frac{mr}{\pi\varepsilon_0}}\Rightarrow\vec{\mu}_l=-\frac{e}{2m}\vec{L}\Leftarrow\gamma_l=\frac{e}{2m}$$

轨道磁机比

为什么要将 ***r*** 和 ***v*** 都消掉？因为角动量是量子的，动量守恒

- 电子的轨道磁矩与轨道角动量成正比。
- 对氢原子:

$$\mu_l=\frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}}=\frac{(1.6\times10^{-19}C)^2}{4}\times\sqrt{\frac{5.3\times10^{-11}m}{\pi(8.9\times10^{-12}C^2/(N\cdot m^2))(9.1\times10^{-31}kg)}}$$
$$=9.2\times10^{-24}A\cdot m^2$$



- 电子自旋磁矩 μ_s 源于量子力学，可想象为自转：

$$L_S = \frac{h}{4\pi} = 0.52723\times10^{-34}\,J\cdot s$$

$$\mu_s = \frac{h}{4\pi}\frac{e}{m} = 9.2734\times10^{-24}\,A\cdot m^2$$

$$\gamma_s = \frac{e}{m} \Rightarrow \mu_s = \gamma_s\frac{h}{4\pi} \Rightarrow \gamma_s/\gamma_l = g \quad \text{factor=2.0023}$$

自旋磁机比

g因子
Lande因子

- 电子轨道磁矩+自旋磁矩成为所有物质的本征性质；
- 电子轨道磁矩是物质抗磁性的根源，因此抗磁性是普遍性质。

- 原子核中质子与中子也有磁矩：

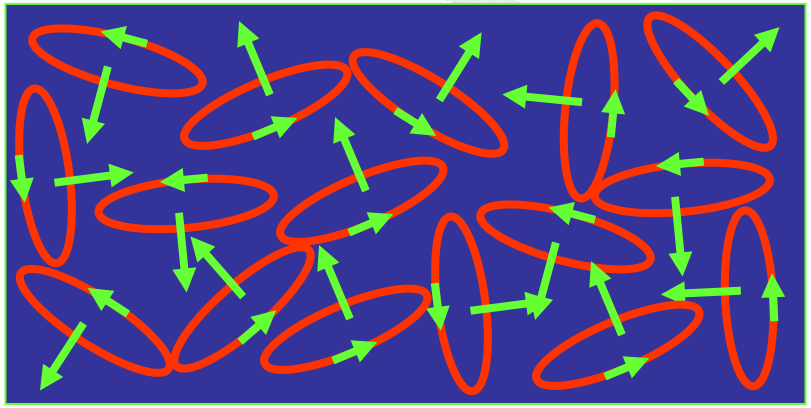
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{For proton: } \mu_p = 1.41\times 10^{-26} A\cdot m^2 << \mu_l \\ \text{For neutron: no charge, } \mu_{nl} = 0,\ \mu_{ns} > 0\end{array}}$$

- 核磁矩的两态能级效应是核磁共振的根源。

$$\boxed{h\cdot f = 2\mu_p \cdot B}$$

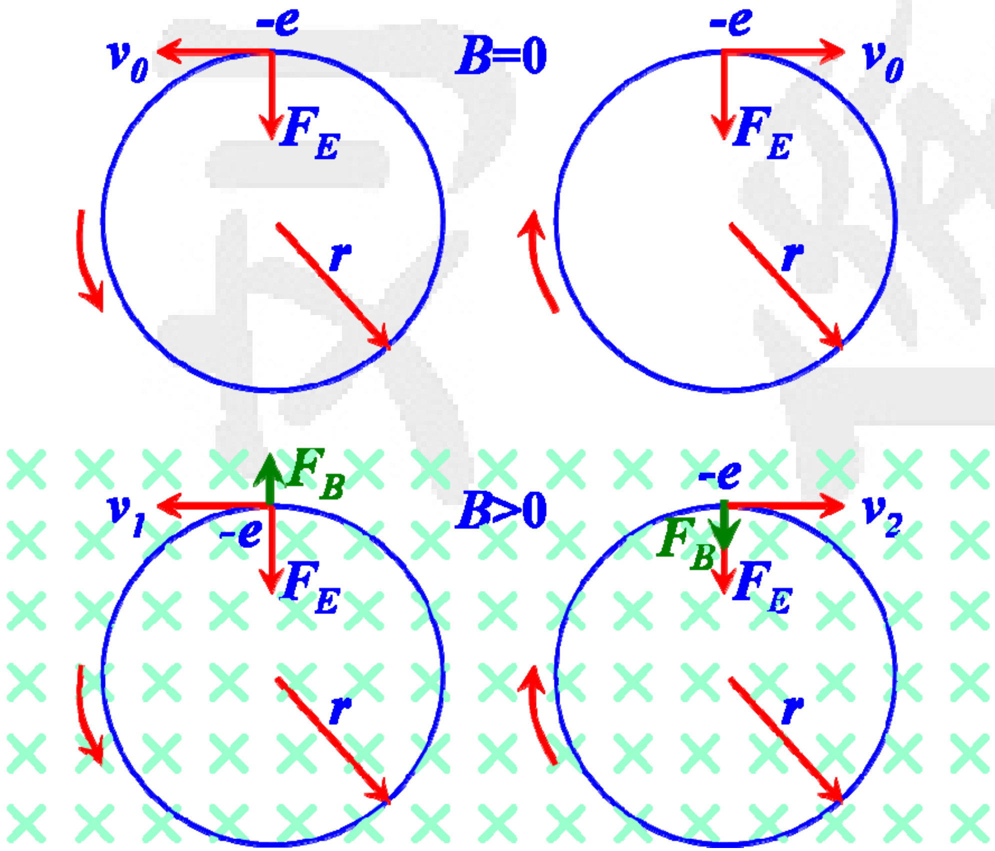
- 两大类磁介质：
  - 一类是无极磁介质，每个原子的固有磁矩为零，$\sum m=0$。
  - 二类是有极磁介质，每个原子的固有磁矩不为零，$\sum m\neq 0$。

- 注意：
  - 固有磁矩为零，并不意味着电子不自旋，电子不绕原子核运动。
  - 不管哪种介质，在无外场时，对外不显磁性。



$$\boxed{\sum \vec{m} = 0}$$

- 绝大多数物理原子核外层固定半径的轨道上电子成对占据，相对运动，这是产生抗磁性的基本物理：



$$B = 0 \Rightarrow F_E = m_e \frac{v_0^2}{r}$$

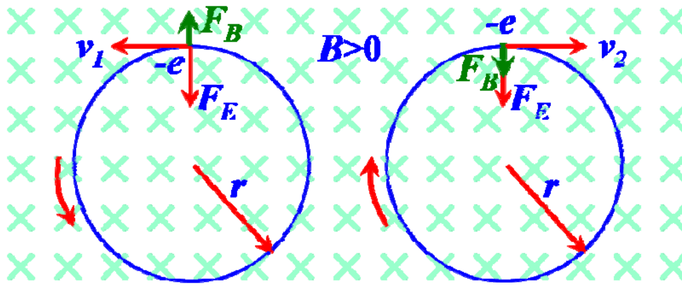
$$B > 0 \Rightarrow F_B = evB$$

$$\therefore F_E \mp F_B = m_e \frac{v^2}{r}$$

$$\therefore m_e \frac{v_0^2}{r} \mp evB = m_e \frac{v^2}{r}$$

$$v = v_0 + \Delta v, \quad \text{note: } \Delta v << v_0$$

$$\Delta v \cong \mp \frac{eBr}{2m_e}$$



- 具有一对相反运动电子的原子/分子获得了与外加磁场方向相反的净磁矩

- 与轨道磁矩联系起来：

$$\Delta\mu = \frac{e}{2m_e}\Delta L = \frac{er}{2}\Delta v = \frac{e^2 r^2}{4m_e} B$$

轨道磁矩变化

$$< m > = -\frac{e^2}{6m_e} z r_0^2 B$$

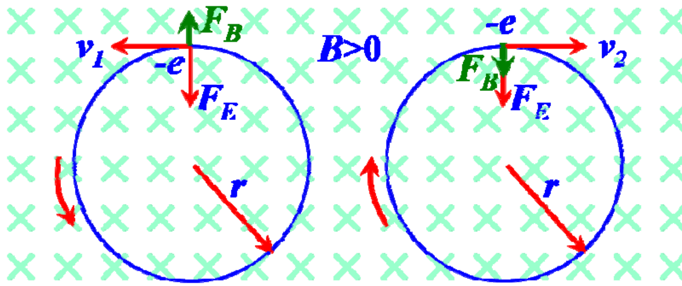
有效感应磁矩

- 如何理解外加磁场对速度的影响？

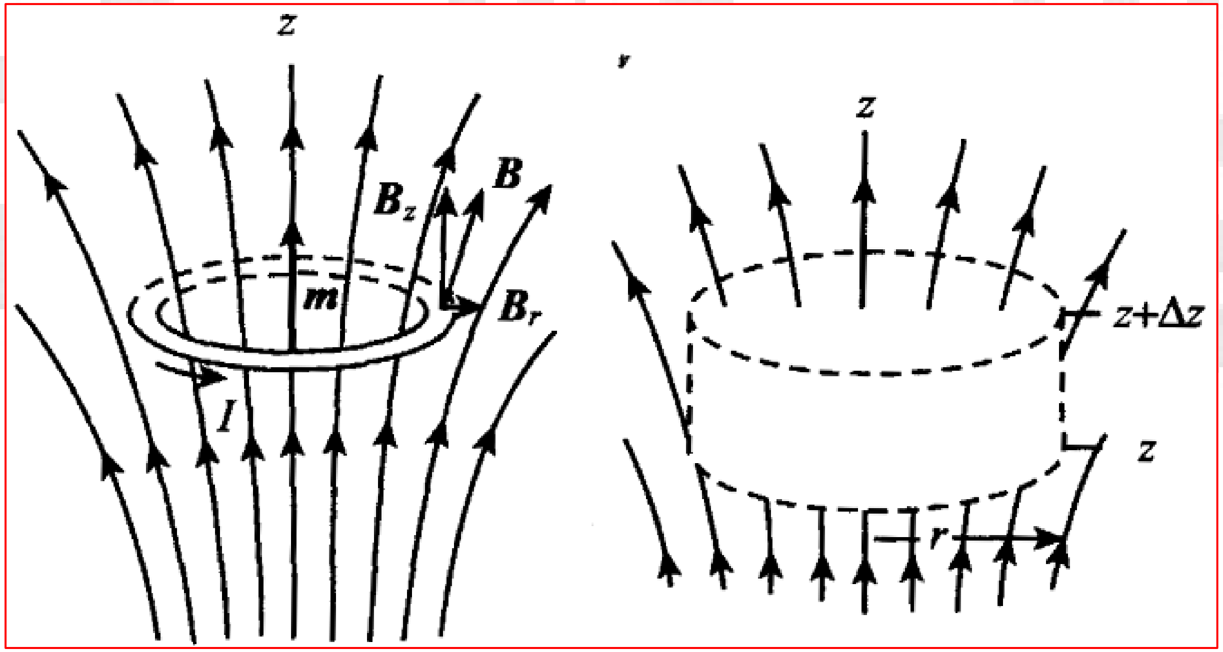
- 抗磁性是一切磁介质固有特性，也存在于顺磁介质，但此时磁化产生的磁矩>>电子附加磁矩，顺磁效应>>抗磁效应【p.226】。

- 抗磁介质中电子附加磁矩起主要作用，显抗磁性。

- 抗磁介质与无极分子电介质相似，但感生场方向迥然不同。

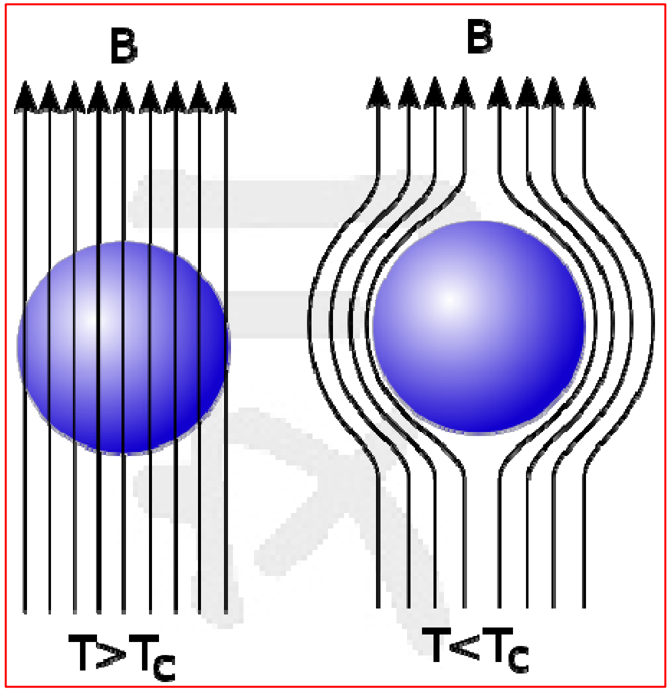


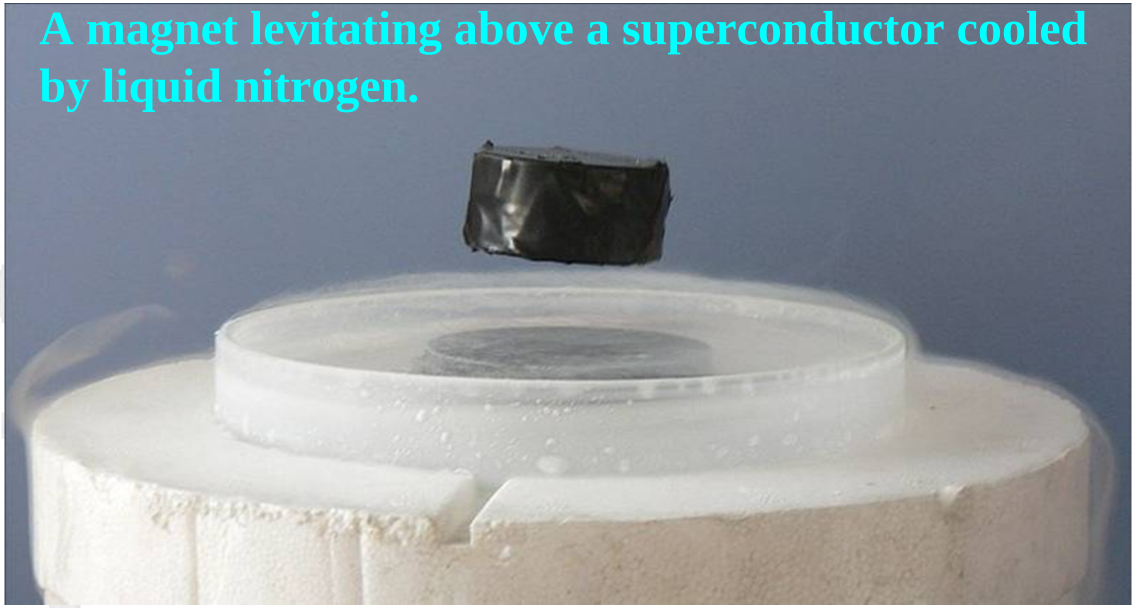
- 一个抗磁物质靠近磁场 ***B***，将引起附加的与 ***B*** 反向磁矩，即分子电流与下图相反，原子 ***m*** 与 ***B*** 方向，所以抗磁物质受到沿 ***B*** 减小方向的排斥力



- 参照【例3, p.226】不均匀磁场中线圈的受力问题

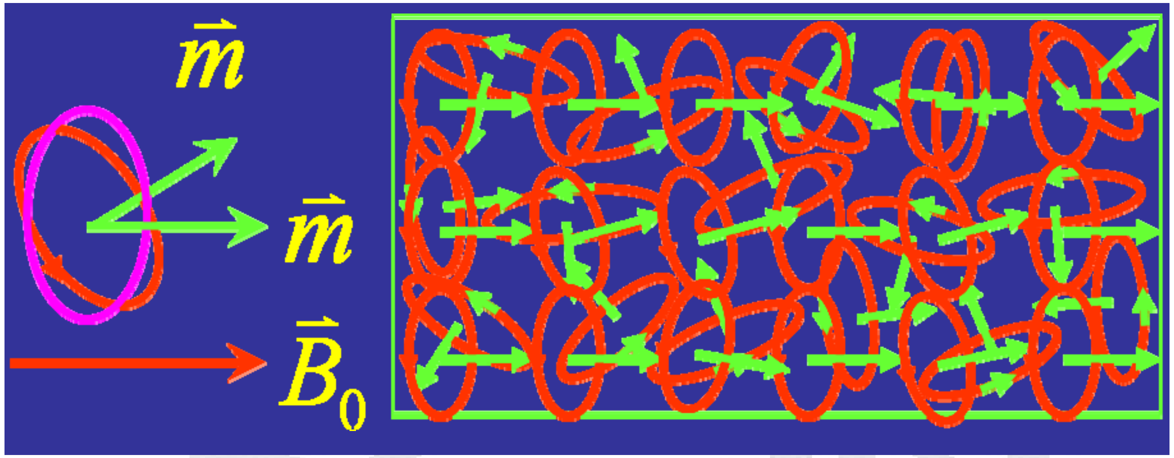
- 反常的抗磁性：超导体的Meissner效应：





- 对于处于正常态的样品，加上磁场后磁场能进入样品的内部；
- 但当温度降低到 T_c 以下时，磁场立即被排斥在样品外，样品内部的磁感应强度为零。

- 多数过渡金属离子具有净磁矩，比电子抗磁矩大很多



$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

在外磁场作用下，原子/离子磁矩趋向与外磁场平行

- 热涨落与外磁场效应对抗，导致无法形成有序磁矩。

- 能量估算：

$$\Delta E \sim 2mB \approx 2\times(10^{-23} Am^2)(10T) = 2\times10^{-22} J$$

$$(3/2)kT \sim 6\times10^{-21} J > \Delta E$$

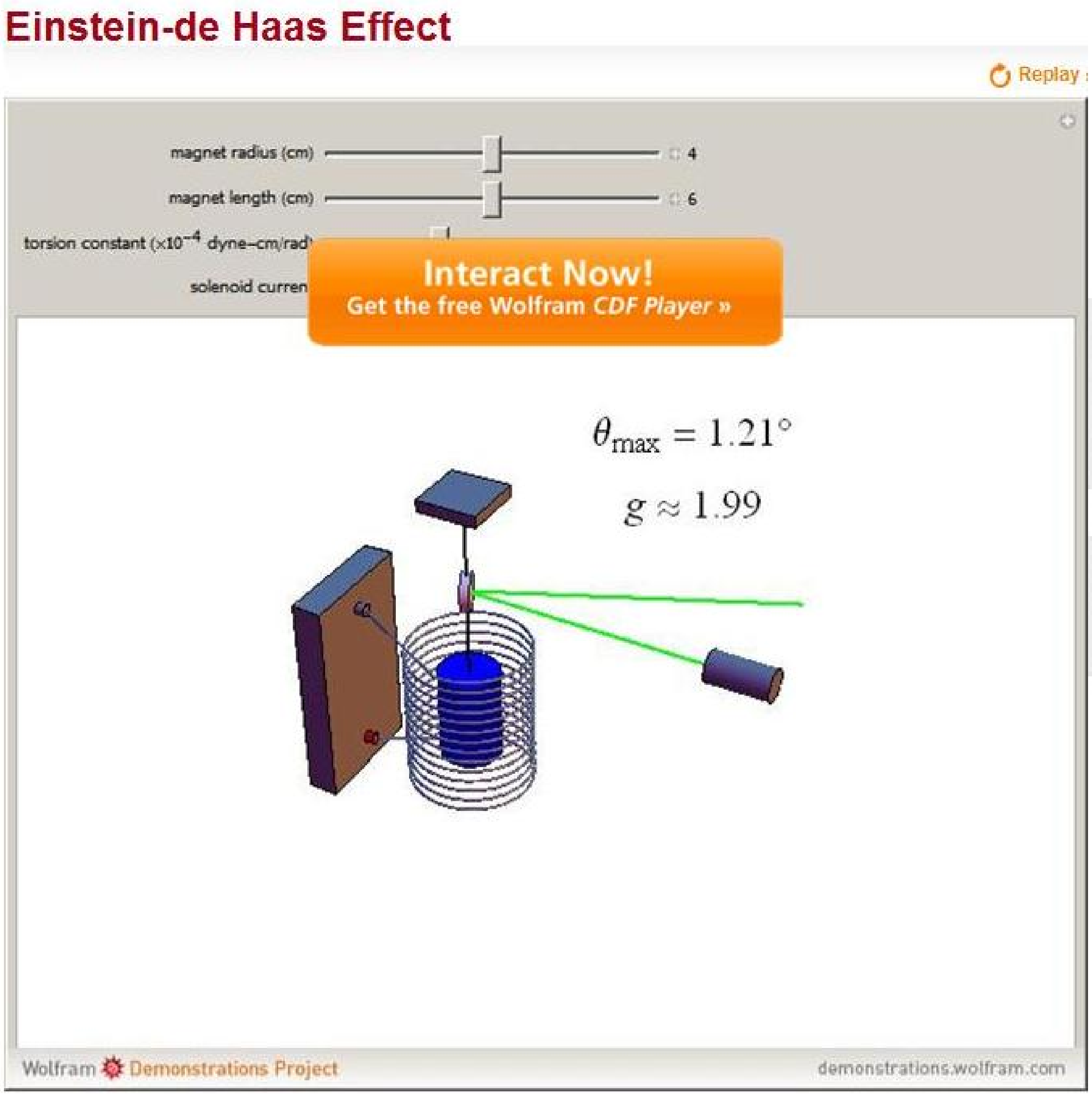
- 铁磁介质与顺磁介质类似，但因为磁矩之间有很强的量子交互作用，因此现象更丰富。

- 磁介质比较：

顺磁效应	抗磁效应
$m \neq 0$	$m = 0$
在外场中 $m >> \Delta\mu$	在外场中 $\Delta\mu \neq 0$
m取向与B_0一致	$\Delta\mu$取向与B_0相反
$B = B_0 + B' > B_0$	$B = B_0 + B' < B_0$

- 爱因斯坦和德-哈斯等实验：磁介质的磁性起源于电子的轨道磁矩和自旋磁矩

- http://demonstrations.wolfram.com/EinsteinDeHaasEffect/


Einstein-de Haas Effect
Replay
magnet radius (cm)
4
magnet length (cm)
6
torsion constant (×10⁻⁴ dyne–cm/rad
solenoid curren
Interact Now!
Get the free Wolfram CDF Player »
$\theta_{max} = 1.21°$
$g \approx 1.99$
Wolfram Demonstrations Project
demonstrations.wolfram.com

回顾电介质物理：

$$\boxed{\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}_i}{d\tau}=\frac{\sum Q_i\vec{l}_i}{d\tau}}$$

微观量

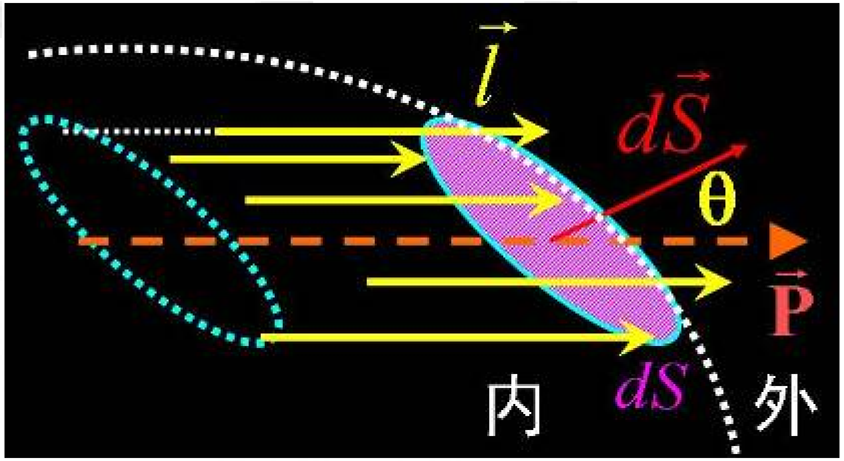
介质中一点的
P(宏观量)

介质的体积，宏观小微观大(包含大量分子)

- 极化强度 **P** 沿闭合曲面的积分是极化电荷的负数：

$$Q' = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \rho' = \lim_{\Delta V\to\infty}\left[-\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}\Big/\Delta V\right] = -div\vec{P} = -\nabla\cdot\vec{P}$$

- 极化电荷面密度 σ'：在均匀介质表面取一面元如图，则因极化而穿过面元 **dS** 的极化电荷数量为：

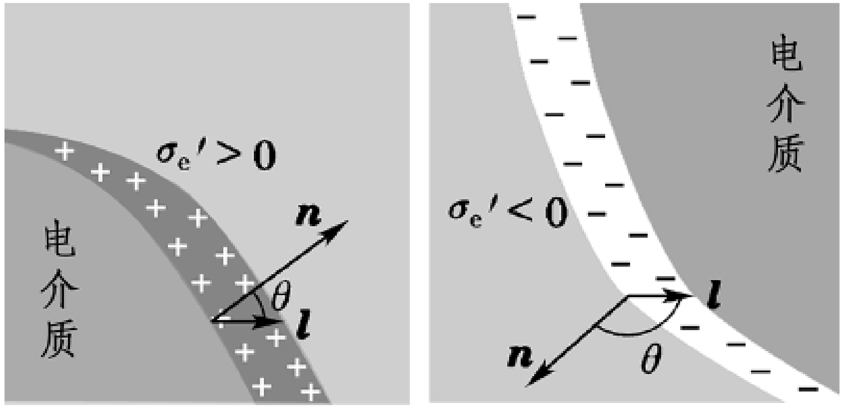


$$|dQ'| = |\vec{P}\cdot d\vec{S}| = P_n dS$$

$$|dQ'| = \sigma'_e\, dS = nqd\tau$$

$$= nq(ldS\cos\theta) = nq\vec{l}\cdot d\vec{S} = \vec{P}\cdot\vec{n}dS$$

$$\sigma' = \frac{dQ'}{dS} = P_n = \vec{P}\cdot\hat{n}$$



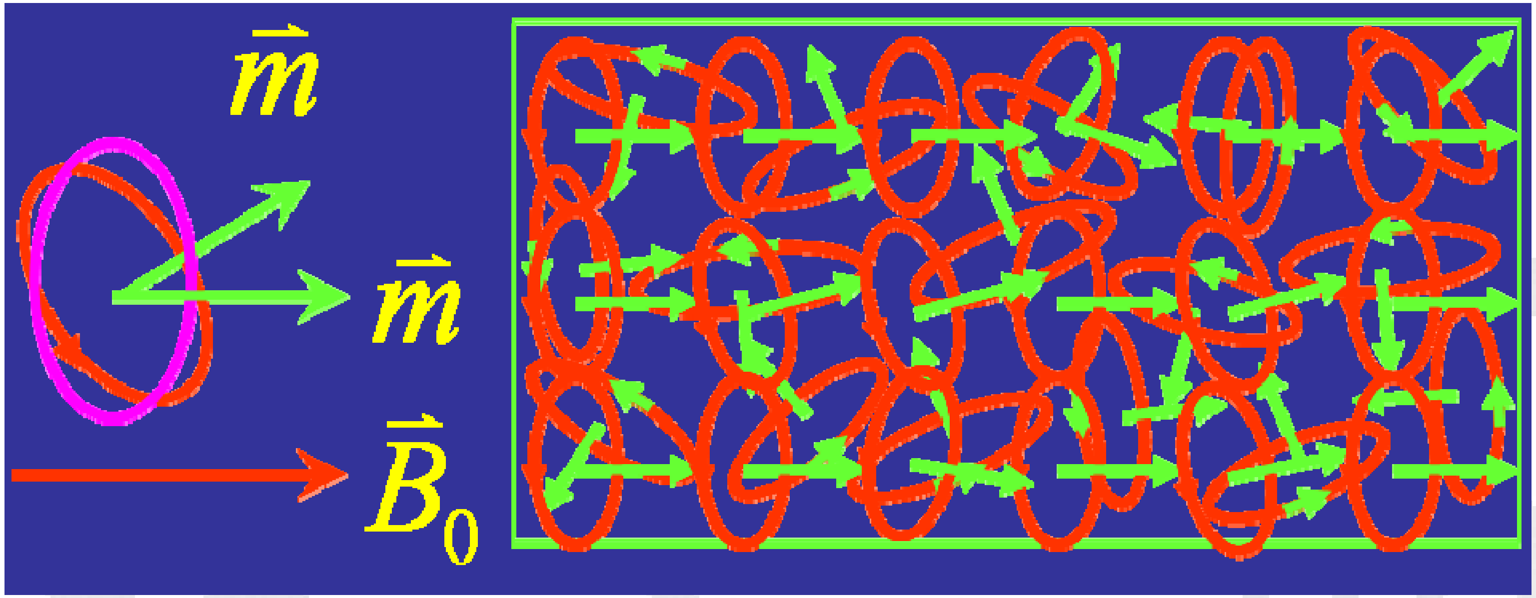
- 磁化强度，单位为A/m:

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{d\tau}$$

介质中一点的 **P(宏观量)**

微观量

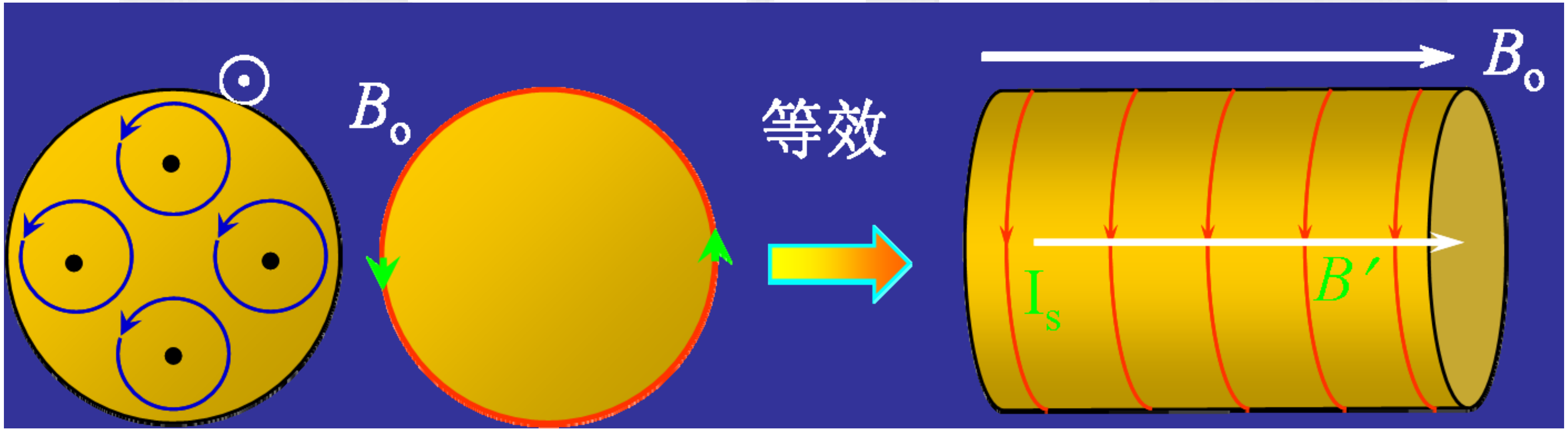
介质的体积，宏观小微观大(包含大量分子)



- 磁化强度：这一团乱麻，怎么办呢？
- 从简单的情况入手——均匀体系，构建某种物理关系。
- 然后，再大的化小——微积分！

- 磁化电流：束缚电流、平均分子电流

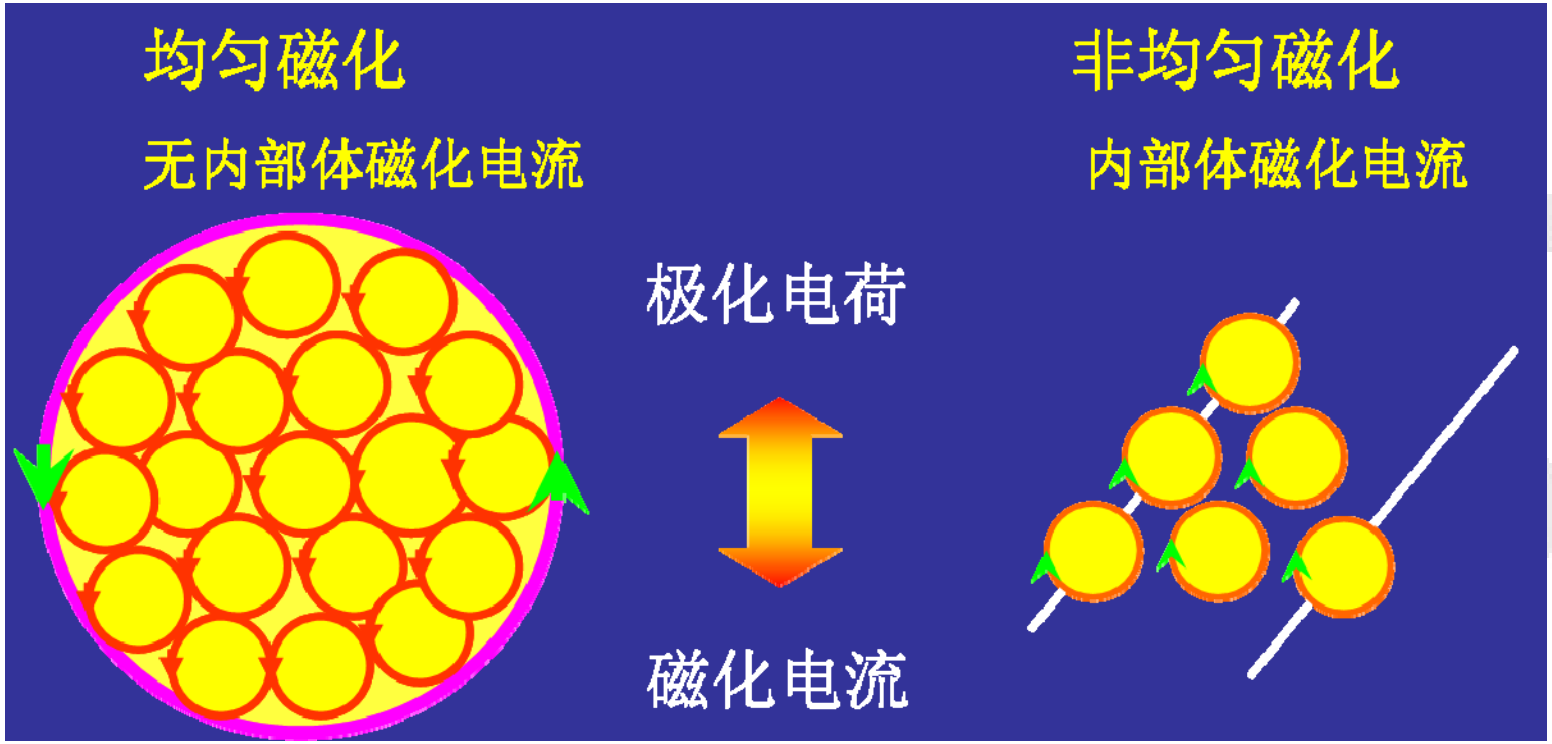
- 对各向同性(均匀)磁介质，从导体横截面看，导体内部分子电流两两反向，相互抵消。导体边缘分子电流同向。



- 分子电流可等效成磁介质表面磁化电流 I_s，产生附加磁场 $\boldsymbol{B}'$。

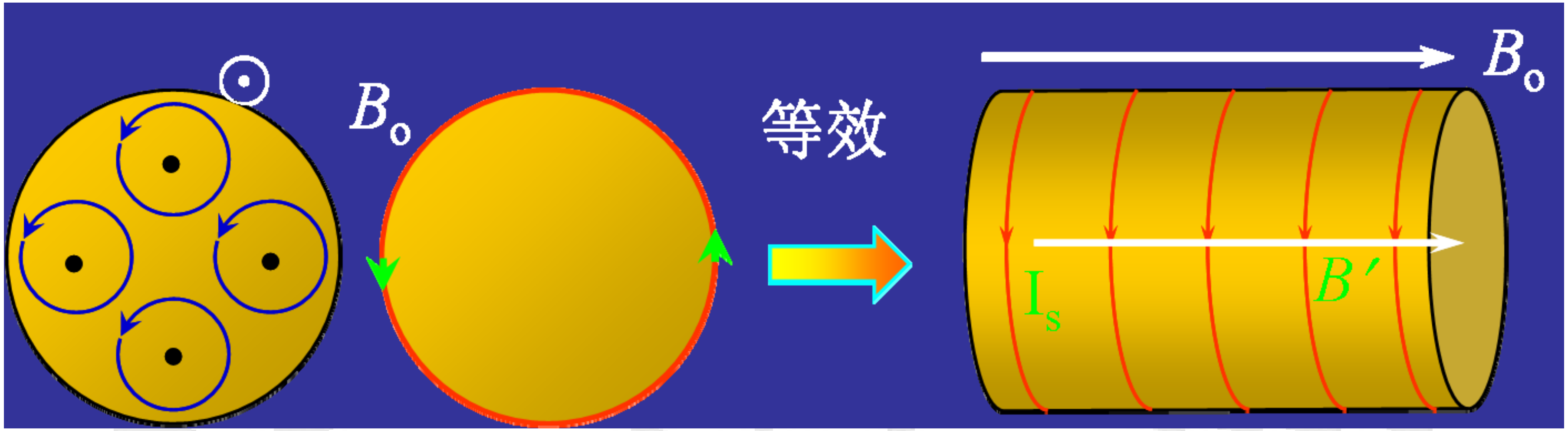
- 磁化电流实为介质中所有分子电流的等效电流，磁化电流的磁矩实为所有分子磁矩的矢量和。

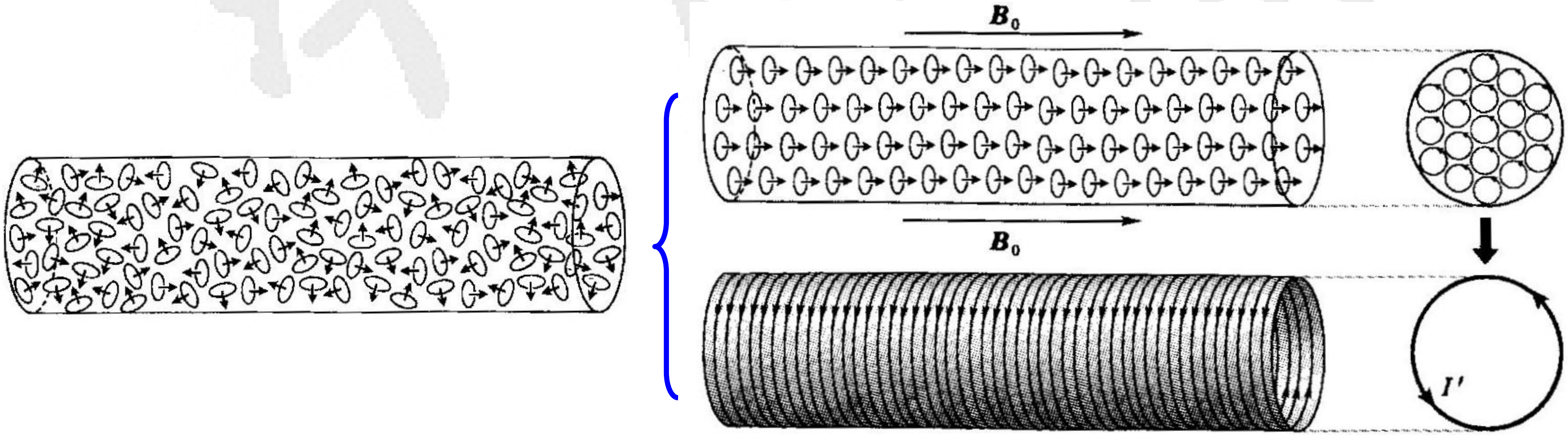
- 均匀与非均匀磁化电流：



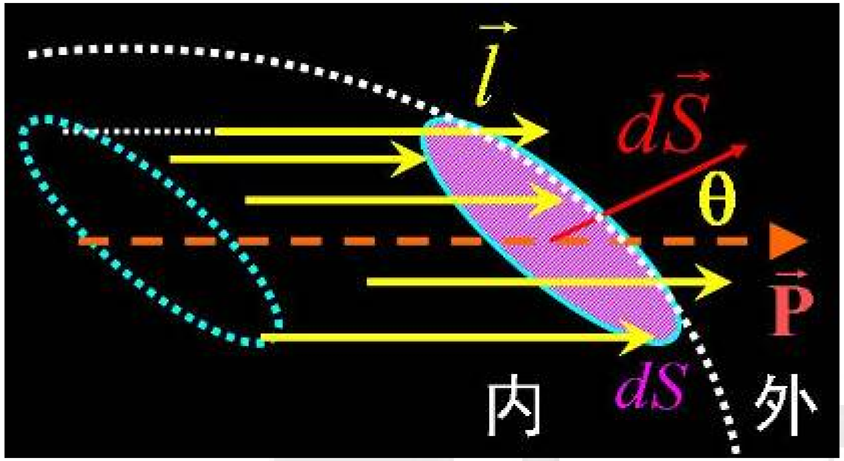
- 一磁介质的净磁矩与每个单元本身的轨道或者自旋磁矩是不同的，后者是前者的平均场或者矢量和均值。

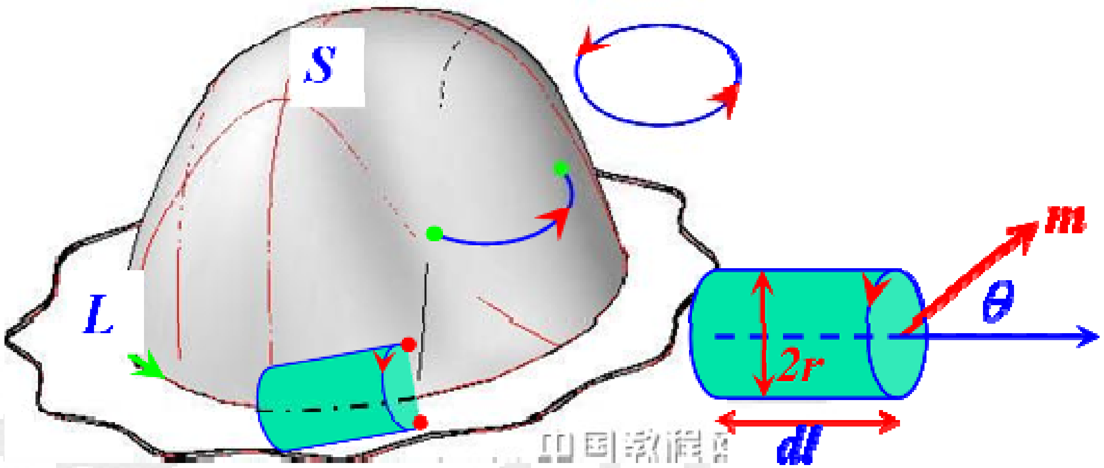
OK，我们来建立一磁体中磁矩与磁化电流的空间关联

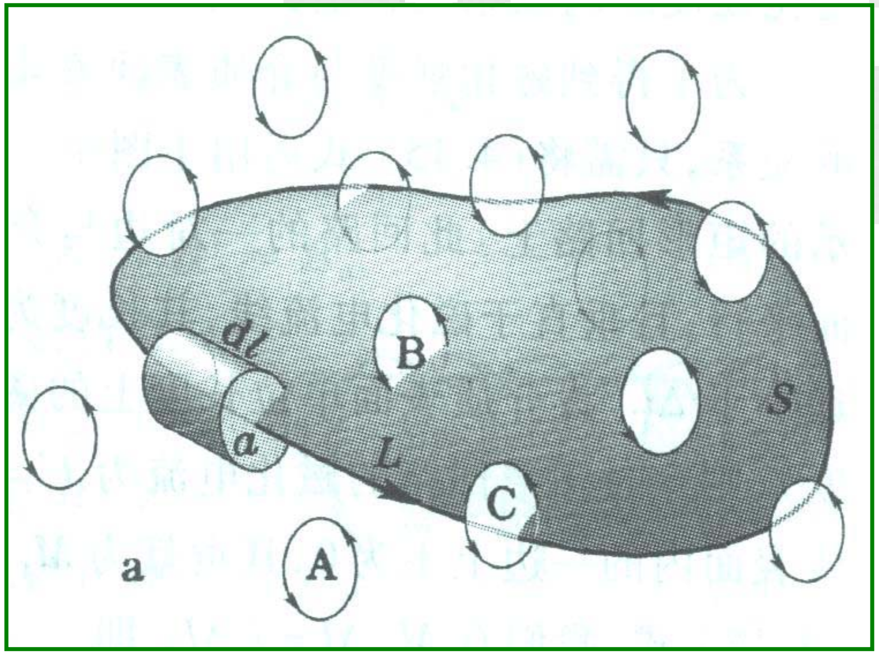


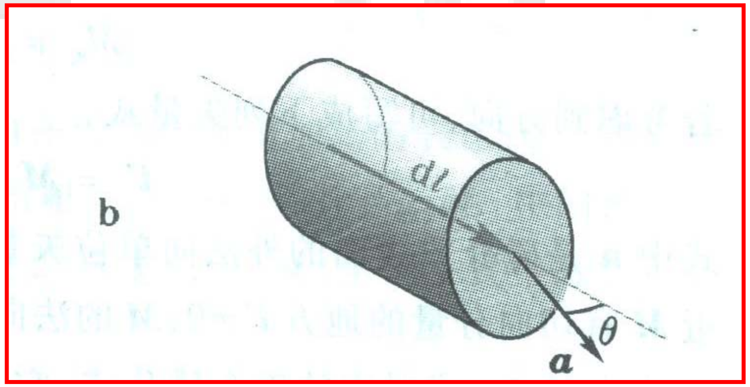


电磁学07-07: 磁化强度与磁化电流密度

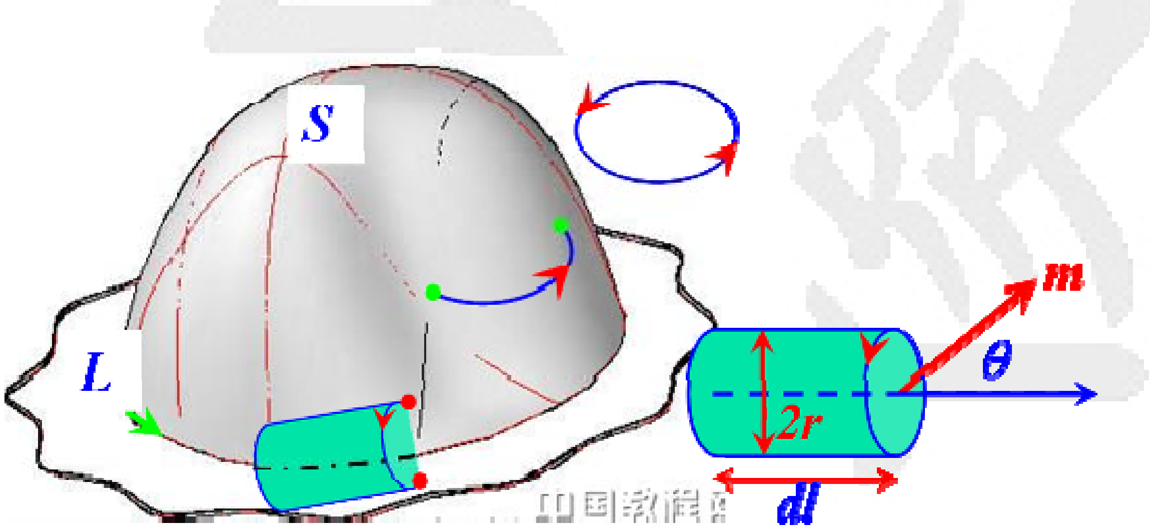








- 磁化电流体密度：一磁介质体积元的磁化电流等价于这个体积元的表面净电流(体密度等于单位面积的电流)。
- 取包围介质元的曲面 S，其线边界 L，则：



$$dI' = I \cdot n \cdot \pi r^2 \cos\theta dl$$
$$= I \frac{N}{\Delta V} \pi r^2 \cos\theta dl$$
$$= \frac{I\pi r^2 \cdot N}{\Delta V} \cos\theta dl \xrightarrow{m=IS=I\pi r^2}$$
$$= \frac{\sum m_i}{\Delta V} \cos\theta dl = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$I' = \oint_L dI' = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

磁化强度环路定理

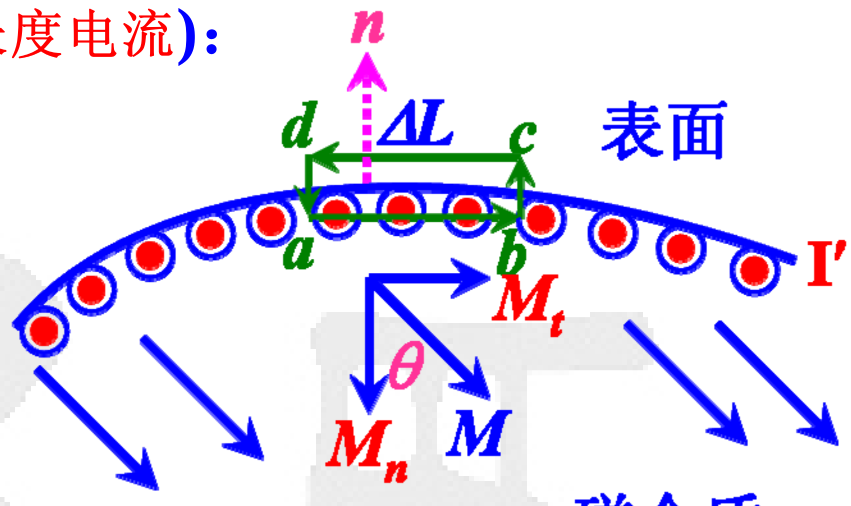
$$\because I'_S = \sum_L I' = \iint_S \vec{j}' \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \vec{j}' \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{j}' = rot\vec{M}$$

- 比较电介质与磁介质：

Polarized charges	Magnetization currents
$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum_{S内} Q'$	$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I'$
$\nabla\cdot\vec{P} = div\vec{P} = -\rho'$	$\nabla\times\vec{M} = rot\vec{M} = \vec{j}\,'$
标量—散度	矢量—旋度

- 对任意闭合回路 ***L***，磁化强度 ***M*** 沿 ***L*** 的线积分等于穿过此回路的磁化电流 **I′** 的代数和；
- 对于均匀磁化介质，内部任意区域 **I′ =0**。
- ***M*** 的方向与 **I′** 的方向满足右手螺旋法则。

- **磁化电流面密度(面密度等于单位长度电流):**
  针对两介质界面而言



定义磁化电流面密度:

$$\boxed{\vec{i}' = \Delta I' / \Delta L}$$

取表面附近微元路径 ***abcd***:

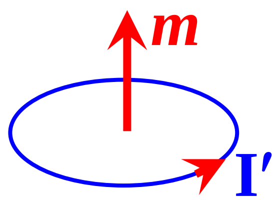
For cycle path *abcd*:

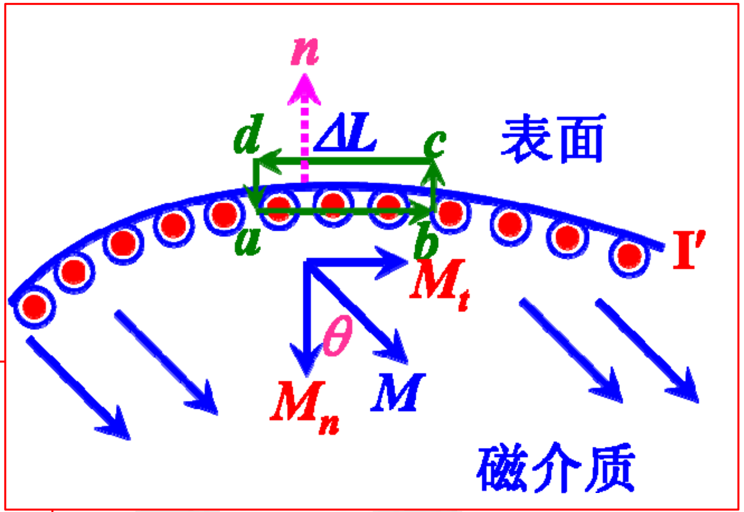
$$\oint_{abcd} \vec{M}\cdot d\vec{l} = M_{ab}\Delta L + M_{bc}l_{bc} + M_{cd}(-\Delta L) + M_{da}l_{da}$$

$$\because l_{bc}\sim l_{da}\sim 0,\quad \because M_{cd}=0,\quad \because M_{ab}=M_t,\quad \because \vec{m}=I'\vec{S}\perp M_n$$

$$\therefore \oint_{abcd} \vec{M}\cdot d\vec{l} = M_t\Delta L \Leftarrow \sum\nolimits_{abcd} I' = \Delta I'$$

$$\therefore \vec{i}' = \vec{k}_m = M_t\vec{e}_{ab} = \vec{M}\times\vec{n}$$





更简单的理解:

$$\sum_L I' = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

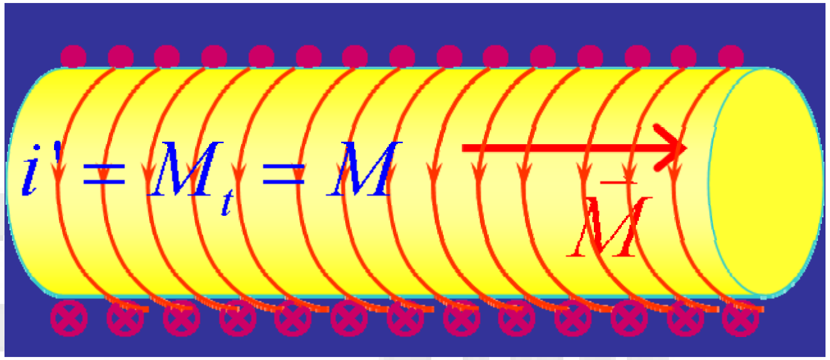
$$\sum_L I' \xrightarrow[\text{取环路电流之一段，假定其为}\Delta I'_L]{\text{内部不管，只考虑表面电流部分}} \Delta I'_L = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I'_L}{\Delta l} \Delta l = i' dl$$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \oint_L (M_t \vec{e}_t + M_n \vec{e}_n) \cdot d\vec{l} = \oint_L M_t dl$$

$$\oint_L M_t dl \xrightarrow[\text{取表面环路电流之一段，假定其为}dl]{M_n\text{不管，由内部环流产生}} M_t dl$$

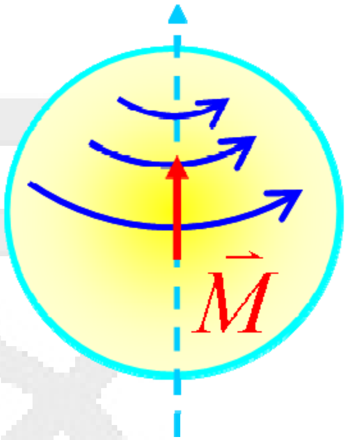
$$i' = M_t \Rightarrow \vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$$

【例1 p.273】均匀磁化的圆柱体的磁化电流分布?



- 实际上可以更简单理解这个问题:
  - ✓ 足够长(L)圆柱体，磁矩 $\sum m=\sum I' \cdot S=N \cdot I' \cdot \pi R^2$
  - ✓ $M=\sum m/V= \sum m/(\pi R^2 L)=NI'/L=i'$

【例2 p.274】均匀磁化介质圆球的磁化电流分布?



$$i' = M_t = M\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{i}' = \vec{k}_m = \vec{M} \times \vec{n}}$$

- 自由电流、磁化电流，怎么办？回到 **B** 的定义
- 微观场与宏观场：磁感应强度 **B**

宏观场

$$\vec{B} = < \vec{B}_m >$$

微观场

$$\because \vec{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_m \times \vec{r}}{r^3} d\tau \Leftarrow \vec{j}_m = \vec{j}_0 + \vec{j}'$$

$$\therefore \vec{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_0 \times \vec{r}}{r^3} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}' \times \vec{r}}{r^3} d\tau = B_{0m} + B'_m$$

$$\therefore < \vec{B}_m > = < B_{0m} > + < B'_m > \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

自由电流激发的磁场微观场

磁化介质的分子电流集体所激发的磁场微观场

总的磁场宏观场

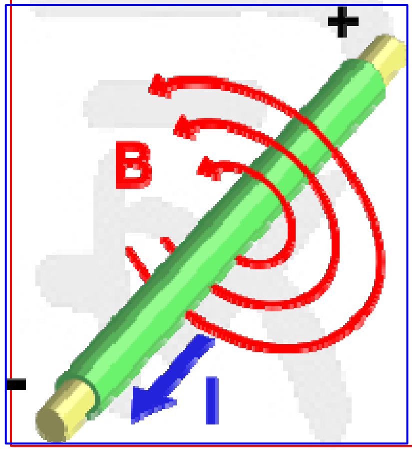
自由电流激发的磁场宏观场

磁化介质的分子电流集体所激发的磁场宏观场

- 介质磁场基本方程:

Gauss theorem: $\oint \vec{B}_m \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Ampere circuital theorem: $\oint_L \vec{B}_m \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$



$$\therefore \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{j}_0 + \vec{j}') \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} (I_0 + I')$$

It is tough to obtain this magnetization current

- 磁介质中的静磁场指不随时间变化的磁场。

磁介质中磁场强度：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内}(I_0 + I') = \mu_0 \int_S (\vec{j}_0 + \vec{j}')\cdot d\vec{S}$$

$$\because I' = \oint_L dI' = \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_0 + \mu_0 \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint_L \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_0$$

Define: $\vec{H} \equiv \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ (unit: A/m)

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_0 = \int_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$$

- 介质中的安培环路定理：磁场中，磁场强度矢量 ***H*** 沿任一闭合路径 ***L*** 的线积分(***H*** 的环流)等于穿出此闭合路径传导电流的代数和。(**I** 与 ***H*** 右旋取正值)。

- 磁介质中磁场强度：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_0 = \int_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$$

j_0=0 不等于H =0

积分微分形式:

$$\begin{cases} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 & \text{(Gauss theorem)} \\ \begin{cases} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} (I_0 + I') = \mu_0 \int_S (\vec{j}_0 + \vec{j}\,') \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_0 = \int_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} \end{cases} & \text{(circuital theorem)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = div\vec{B} = 0 & \text{(Gauss theorem)} \\ \begin{cases} \nabla \times \vec{B} = rot\vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_0 + \vec{j}\,') \\ \nabla \times \vec{H} = rot\vec{H} = \vec{j}_0 \end{cases} & \text{(circuital theorem)} \end{cases}$$

静电场与静磁场比较：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_L (I_0 + I')$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S (q_0 + q')$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_L I_0 + \mu_0 \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = \sum_L I_0$$

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I_0$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$

磁介质环路定理 ⟷ 电介质高斯定理

- B 和 H 的意义与区别：

磁化强度 M

磁感应强度 B

磁场强度 H

- H 是一辅助物理量，描述磁场的基本物理量仍是 B；
- H 的重要性：
  - 容易控制与测量的是自由电流
  - 等效磁荷方法

- 基于这一唯像理论，应用到不同磁介质中，归纳其基本实验规律。

- 顺磁与抗磁：在外场不是很大时，有基本实验事实

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1+\chi_m)\vec{H}$$

$$\xrightarrow{\mu_r = 1+\chi_m} \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$$

磁化率

(相对)磁导率

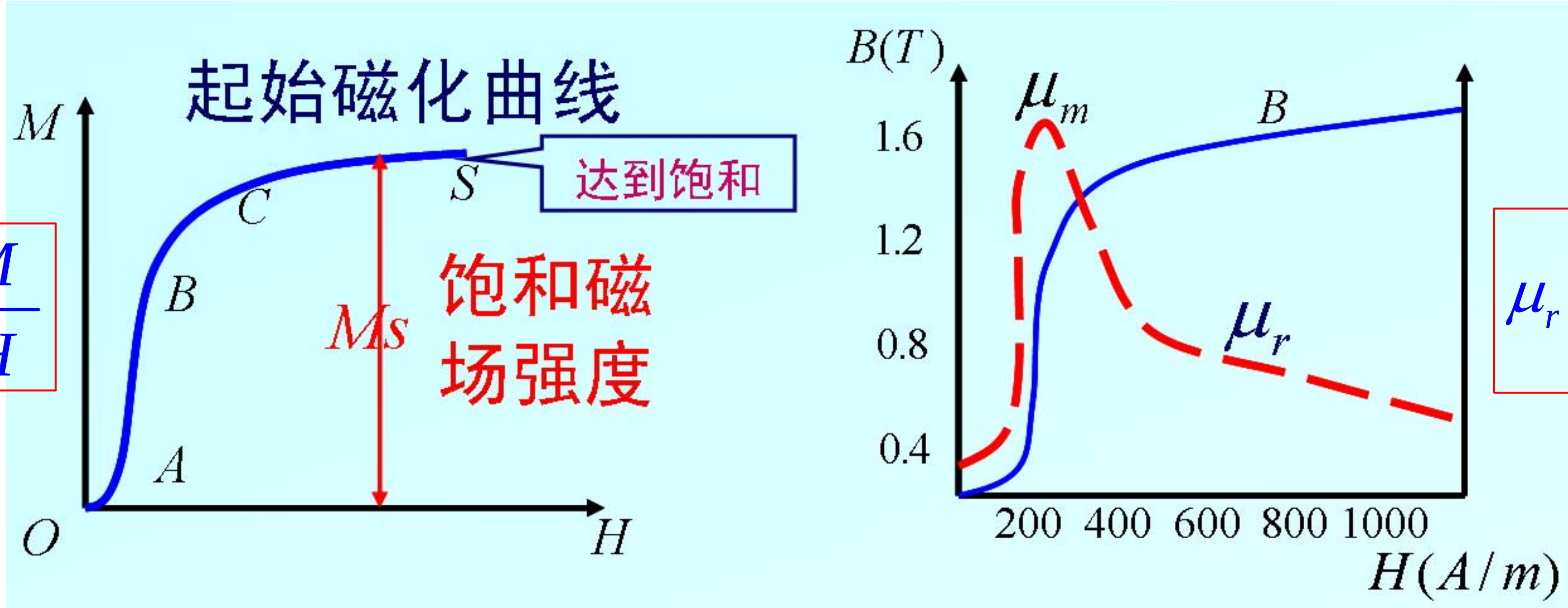
(绝对)磁导率

- 顺磁质与逆磁质的磁化都是很弱的，χ_m的绝对值很小；
- 对顺磁介质，χ_m>0，$|\chi_m|$<<1；
- 对抗磁介质，χ_m<0，$|\chi_m|$<<1。

$$\text{Curie Law: } \chi_m = C\frac{\rho}{T}$$

- 铁磁介质： $\chi_m>0$， $|\chi_m|>>1 \Rightarrow 10\sim10^6$， $\chi_m=f(H, M, T)$；

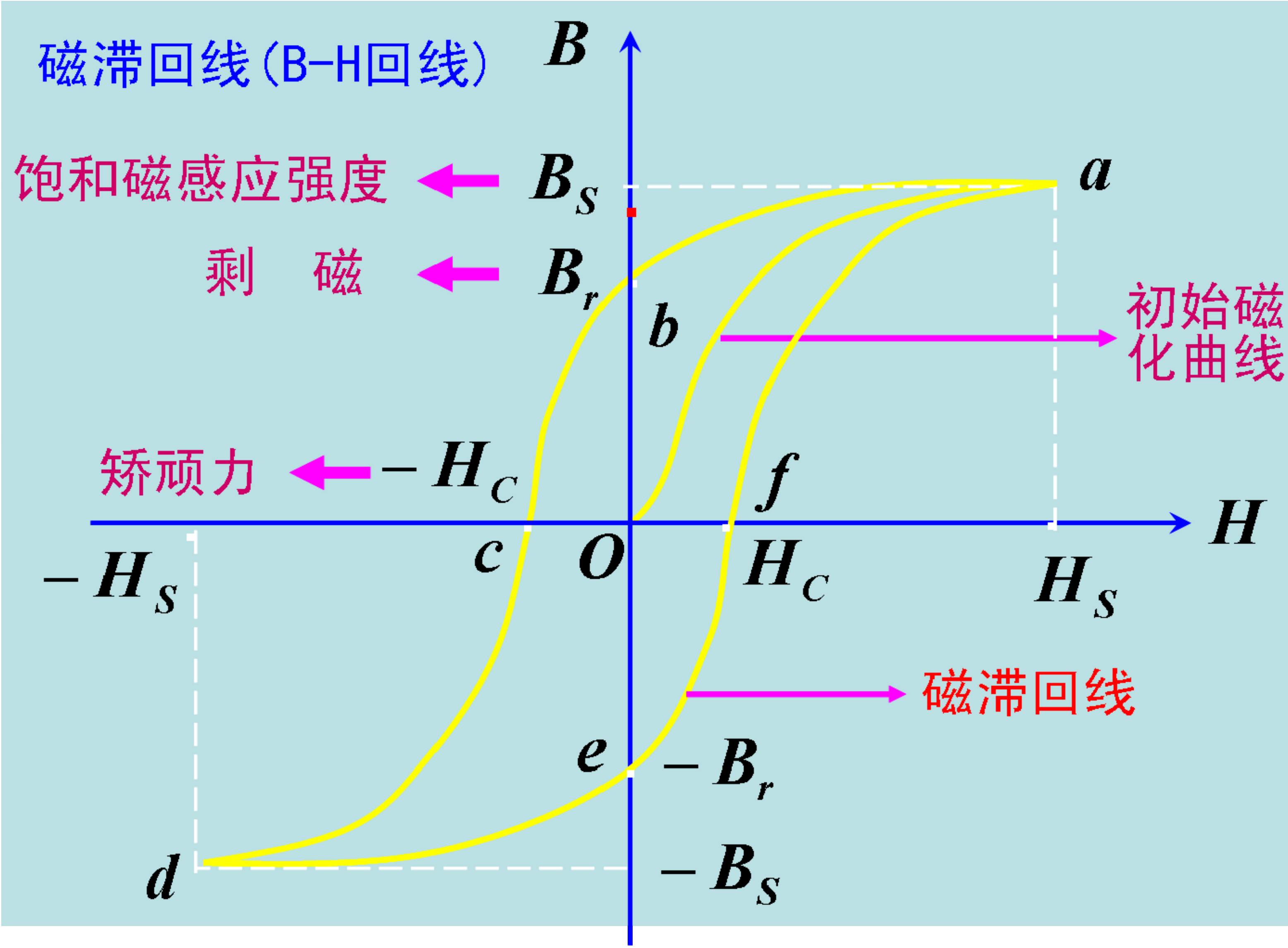
$$\chi_m = \frac{M}{H}$$



$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$$

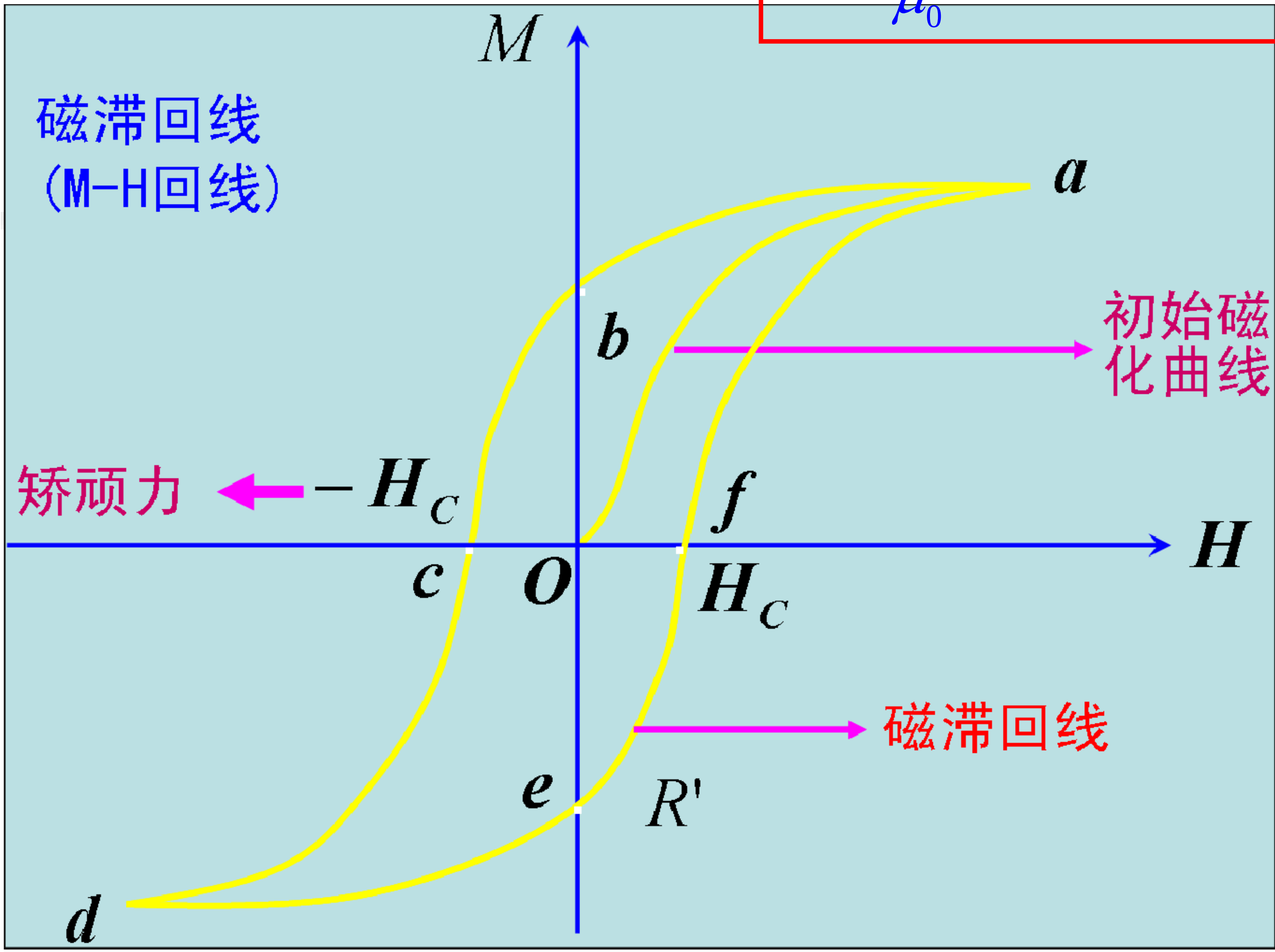
- 磁导率 μ 非常量，不仅决定于原线圈中电流，还决定于铁磁质磁化历史。
- ***B*** 和 ***H*** 不是线性关系，有很大的磁导率。
- 有剩磁、磁饱和及磁滞现象。
- 温度超过居里点时，铁磁质转变为顺磁质。

铁磁介质：磁滞回线的故事！

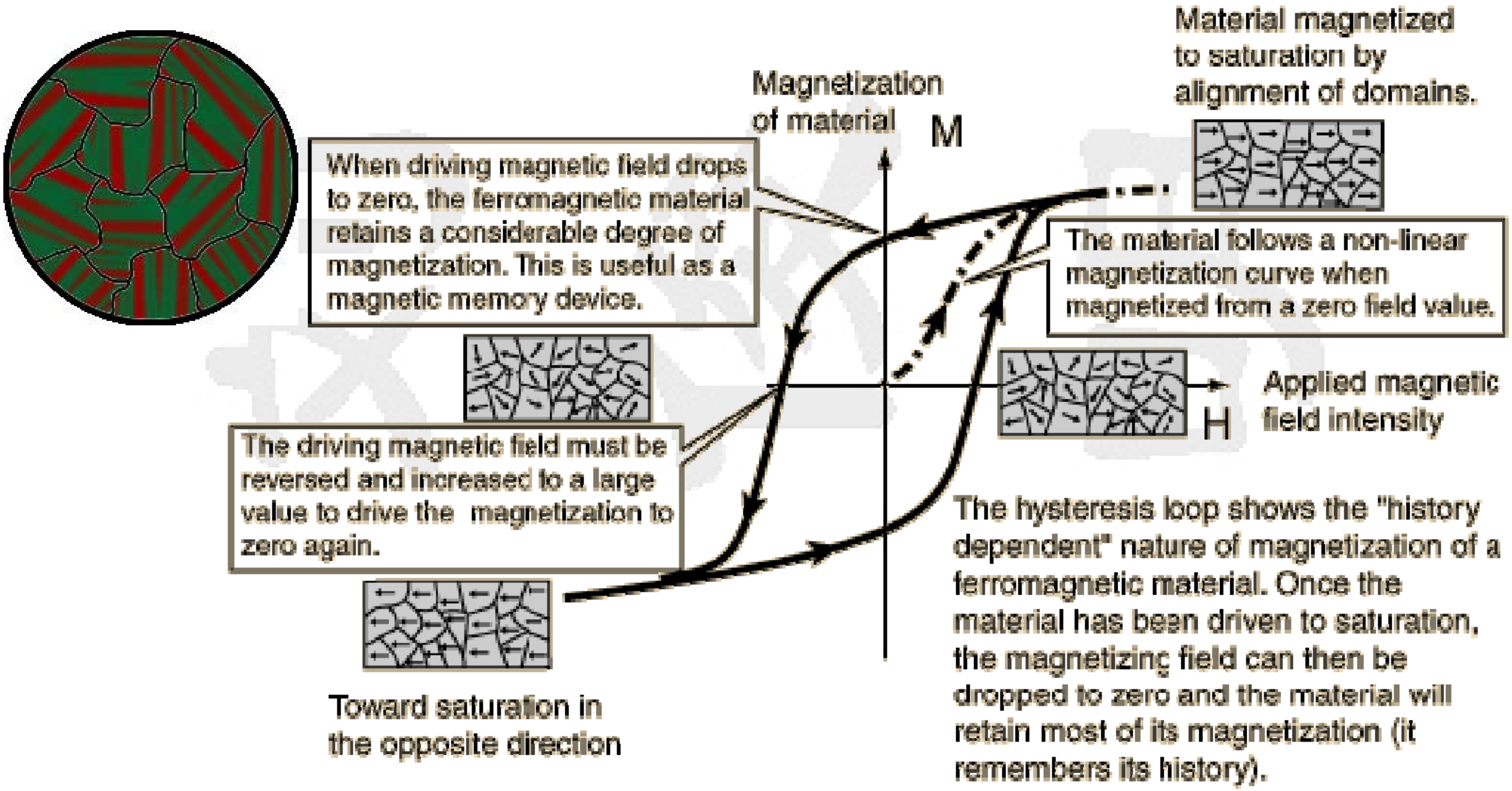


- 铁磁介质：磁滞回线的故事！

$$\vec{M} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad \text{(unit: A/m)}$$

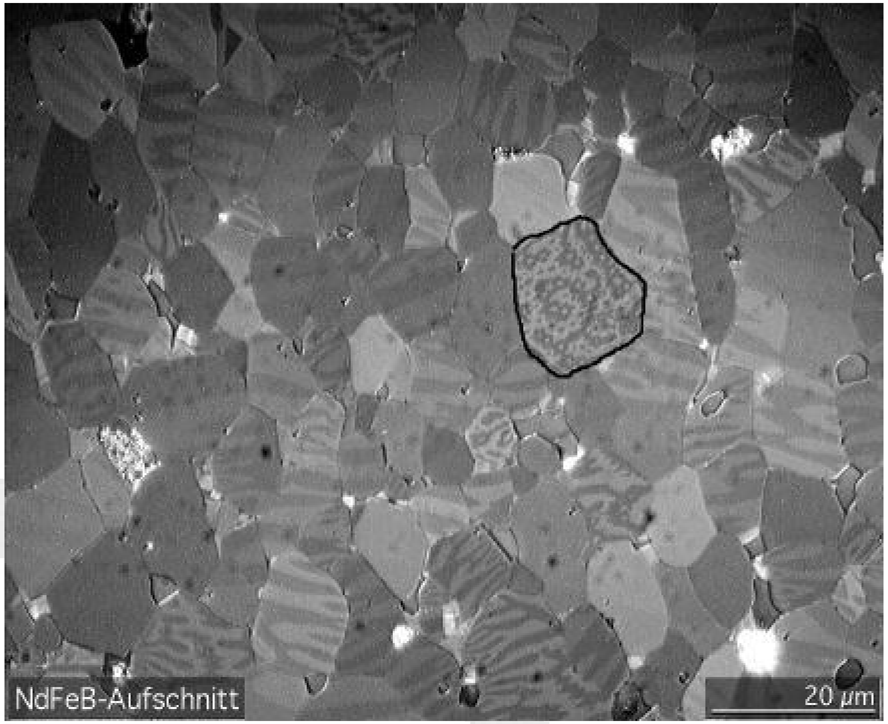


铁磁介质：硬磁材料、软磁材料

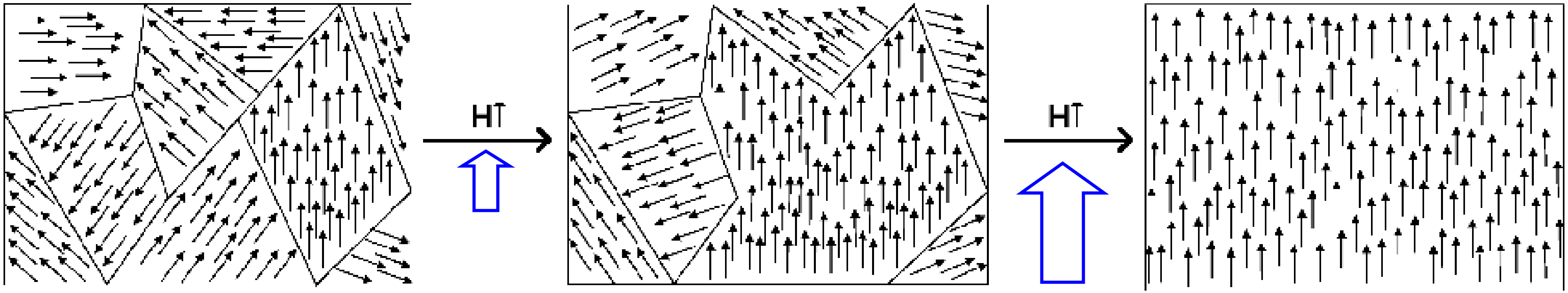


- 铁磁介质：**NdFeB**的晶粒与磁畴
- 磁畴在垂直外磁场作用下的转动与合并长大。
- 铁磁哈密顿：

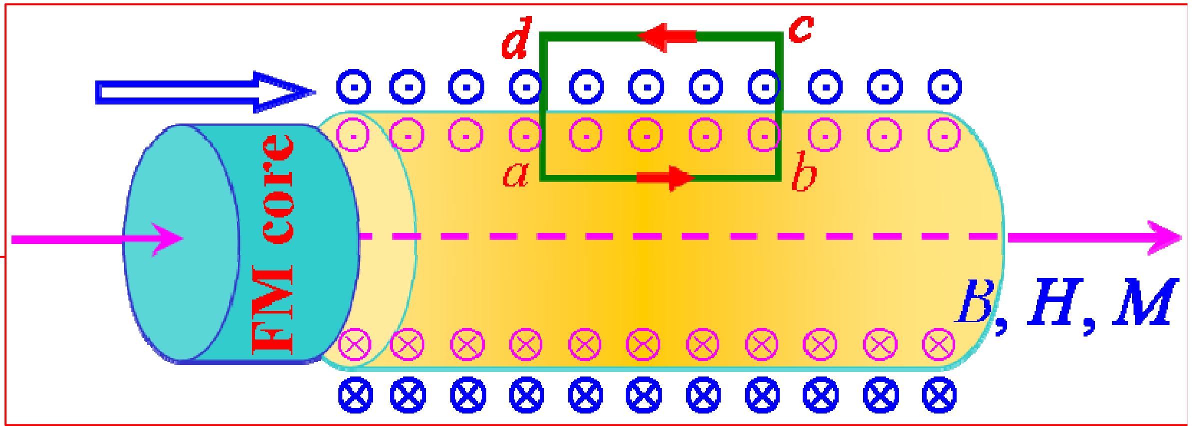
$$\tilde{H} = H_{ex} + H_k + H_\lambda + H_D + H_H$$



E_{ex} is the exchange energy, E_k is the magnetocrystalline anisotropy energy, E_λ is the magnetoelastic energy, E_D is the magneto-static energy, and E_H is the Zeeman energy.



- 有质芯螺线管的磁场:



Cycle *abcda*:

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I_0$$

the left term: $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \overline{ab}\cdot H$ the right term: $\sum_L I = n\cdot\overline{ab}\cdot I_0$

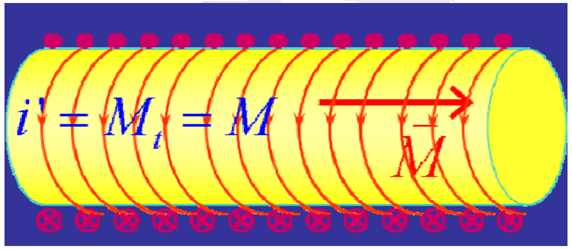
$$\therefore H = nI_0 \Rightarrow \begin{cases} B = \mu_r\mu_0 H = \mu_r\mu_0 nI_0 \\ M = (\mu_r - 1)H = (\mu_r - 1)nI_0 \end{cases}$$

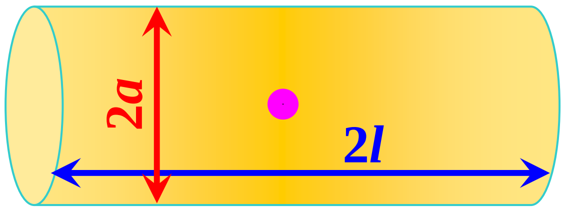
- 螺线管内 **B** 包括两项：(1) 线圈电流产生的 B_0，(2) 被磁化的铁芯之表面磁化电流所产生的 B'。

$$B = \left\{ \begin{matrix} I_0 \Rightarrow B_0 = \mu_0 nI_0 \\ i' = M_t = M \Rightarrow B' = \mu_0 i' = \mu_0 M \end{matrix} \right\} = B_0 + B' = \mu_0\mu_r nI_0$$

稀土永磁体

- 永久磁铁的磁场纯系由永久磁铁的分子电流激发。以沿轴均匀磁化圆柱形永久磁铁的磁场为例说明；
- 分子电流是分布在侧面上的面电流，可以套用螺线管激发磁场的公式计算空间的磁感应强度 **B**、磁场强度 **H**；
- 在磁铁外部 **M=0**，在磁铁内部 **M**，磁铁表面磁化电流 **i′=M**。针对磁棒中心一点：



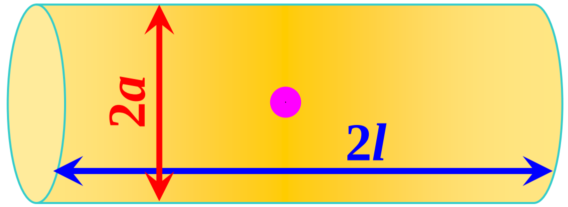


$$B = \frac{\mu_0 n i'}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1) \Rightarrow$$

$$B = \mu_0 M \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \Rightarrow B \nearrow\nearrow M$$

$$H = M\frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}} - M = -M\left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right)$$

$$\Rightarrow H \nearrow\swarrow M$$

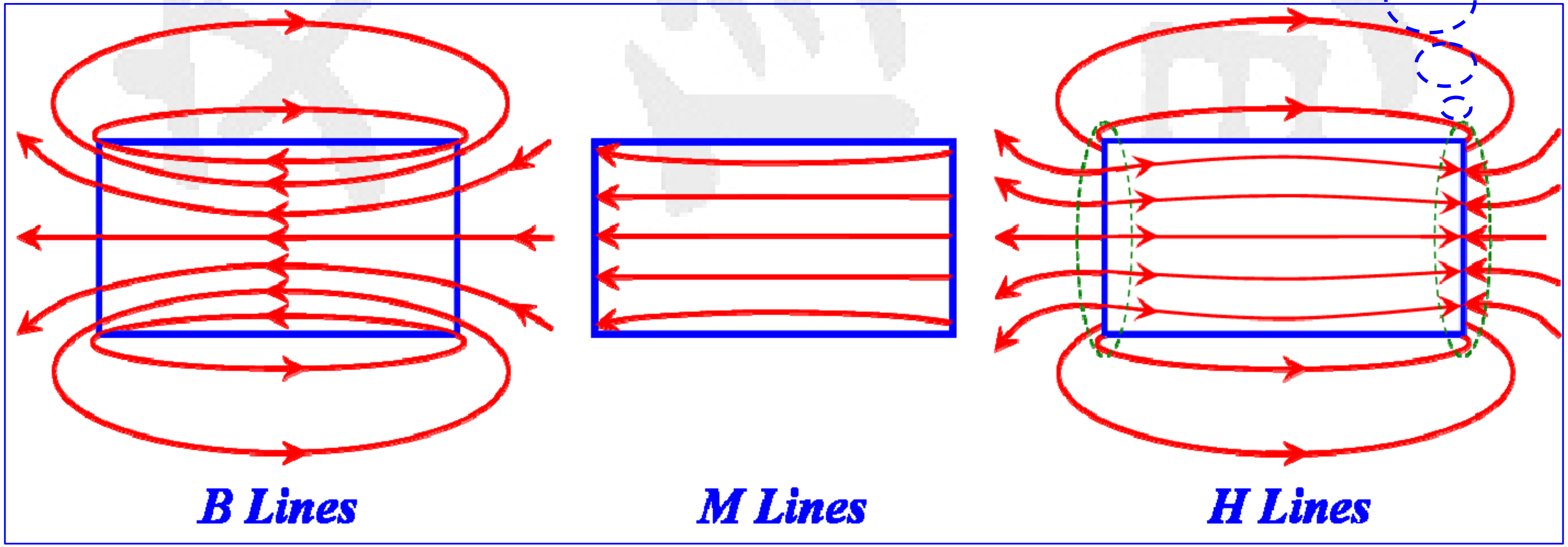


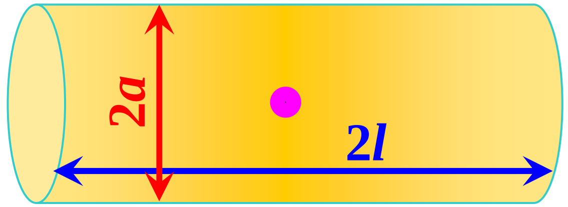
- 讨论：退磁化场

$$\vec{B}=\mu_0\vec{M},\ \vec{H}=0 \ \text{ if } \ l>>a \text{ bar}$$
$$\vec{B}=0,\ \vec{H}=-\vec{M} \ \text{ if } l<<a \text{ disk}$$

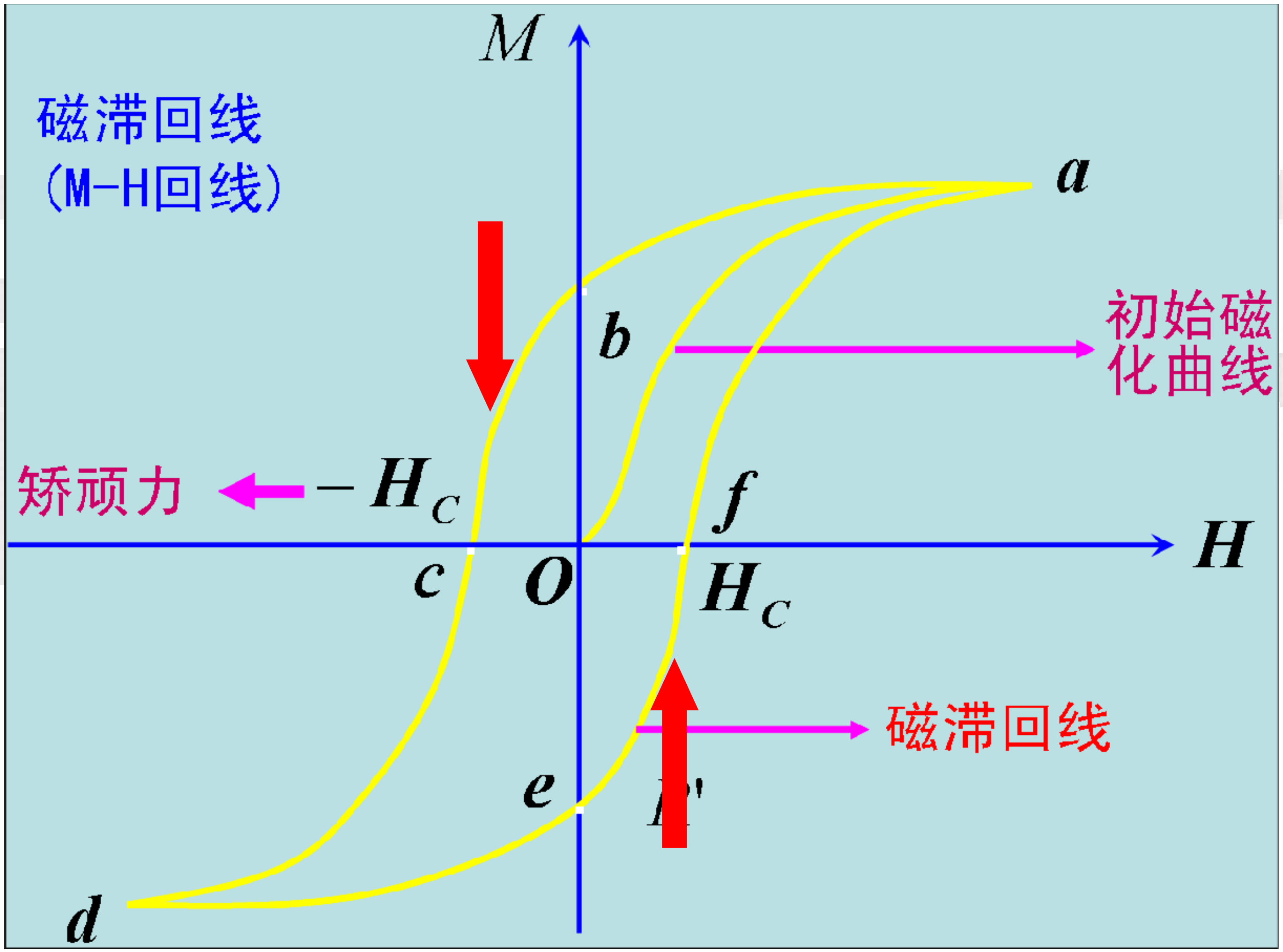
What is it at the two ends for the *H*-lines?

- 永久磁棒周围的 ***B***、***M*** 和 ***H*** 线分布示意：





◻ 讨论：退磁化场(特别注意外加磁场为零时)



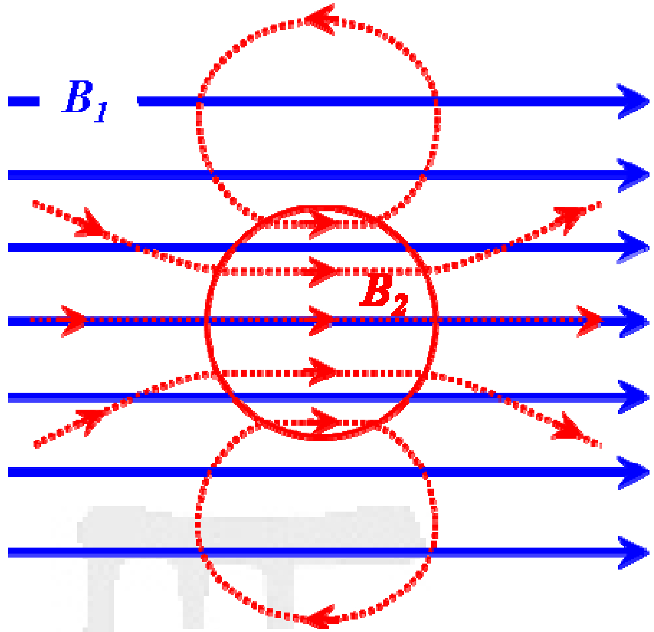
- 嵌入磁介质导致磁感应线的空间涨落：

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

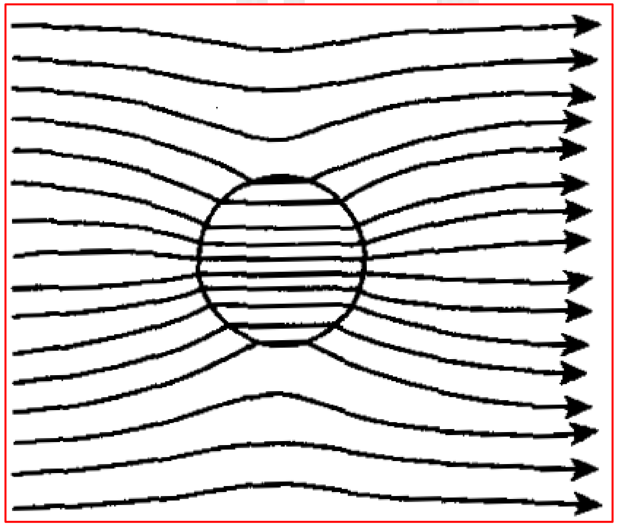
合磁场

外磁场

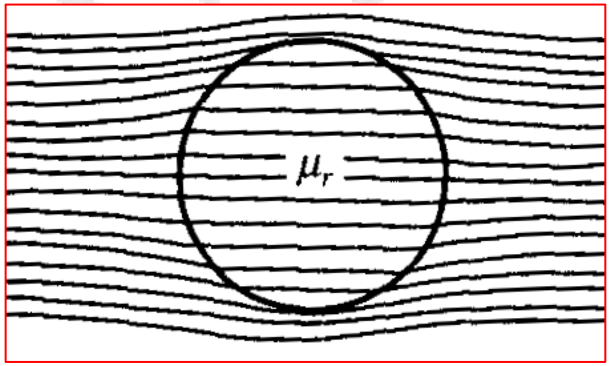
介质磁化附加磁场



$B = B_1 + B_2$

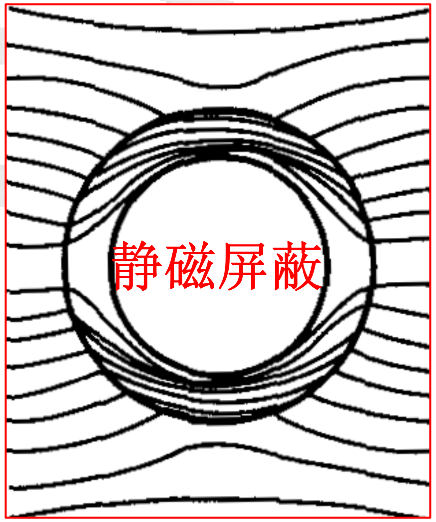


嵌入顺磁/铁磁介质



嵌入抗磁介质

超导抗磁

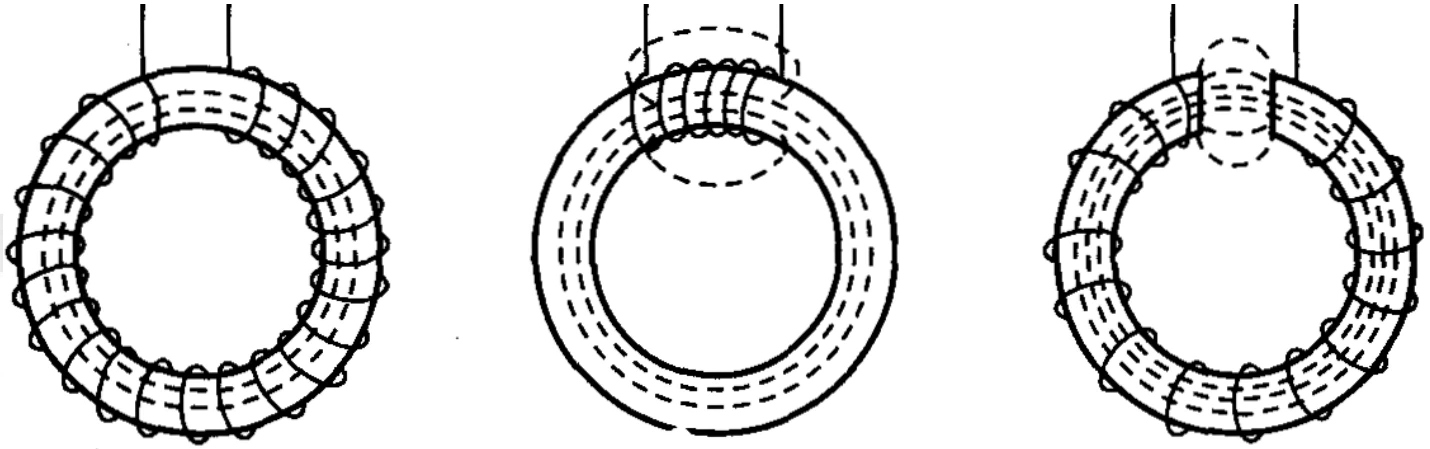


嵌入空腔强磁介质

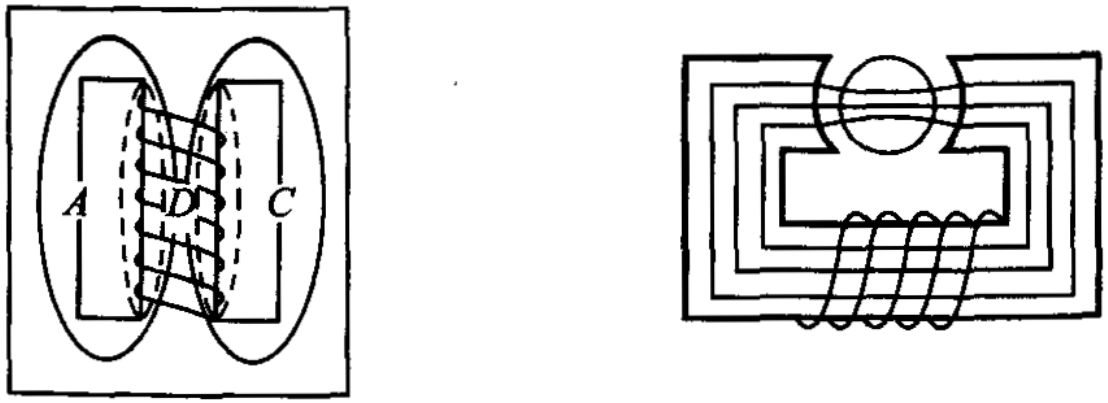
电磁学07-11: 磁路问题

- 磁感应线闭合、通道为磁路

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

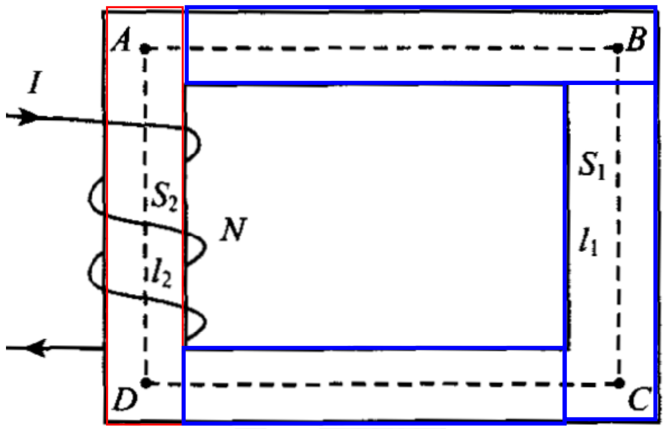


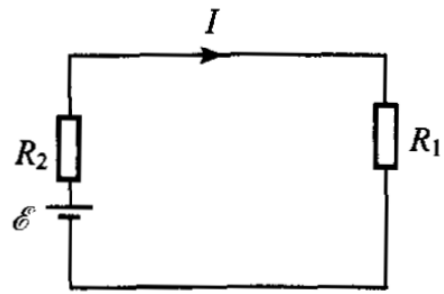
(a) 螺绕环全部绕线　　(b) 螺绕环局部绕线，有漏磁通量　　(c) 空气隙内的散隧作用

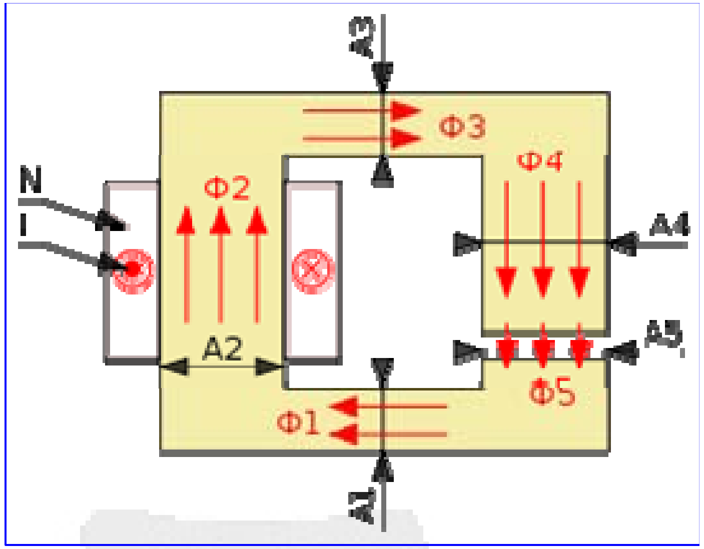


(a) 变压器铁芯的磁路　　(b) 电动机或发电机铁芯中的磁路

- 如果不考虑微弱漏磁问题，可以构建磁学输运定律。以不分支磁路为例：







$$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_{r1}} l_1 + \frac{B_2}{\mu_0\mu_{r2}} l_2 = NI \Rightarrow \Phi\frac{l_1}{S_1\mu_{r1}\mu_0} + \Phi\frac{l_2}{S_2\mu_{r2}\mu_0} = NI$$

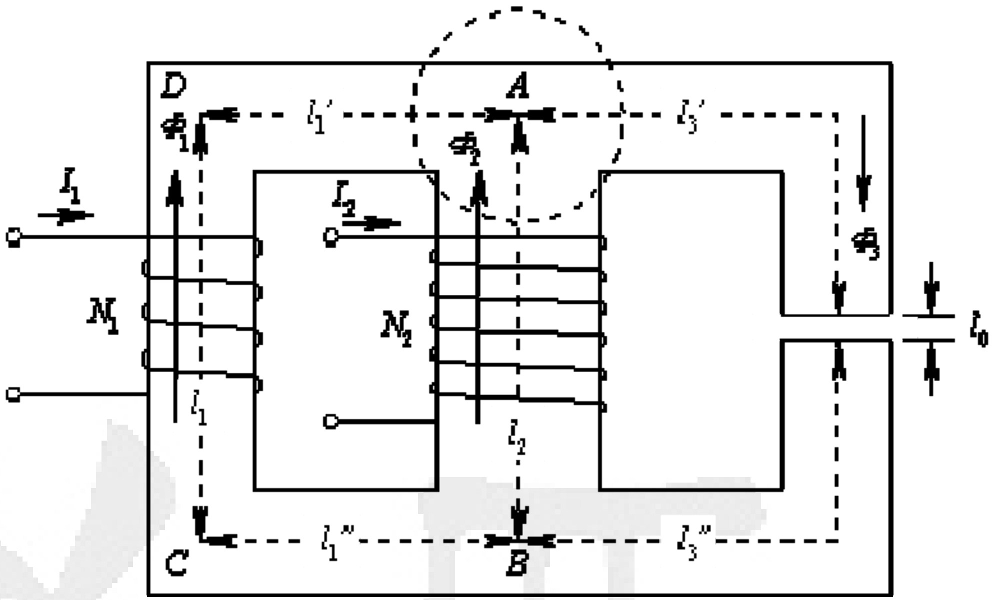
$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l_1}{S_1\mu_{r1}\mu_0} + \frac{l_2}{S_2\mu_{r2}\mu_0}} \Leftrightarrow I = \frac{\Sigma}{R_1 + R_2} \Rightarrow \begin{cases} l_1/(S\mu_r\mu_0) \to R = (1/\mu_0\mu_r)(l/S) \\ \Phi \to I \\ NI \to \Sigma \end{cases}$$

磁路欧姆定律！

电磁学07-11: 磁路问题

- 分支磁路问题：
- 磁场高斯定理与环路定理：
- 磁场的基尔霍夫定理：

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum \Phi_i = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2\\&\sum \Phi_i R_{mi} = \sum \Sigma_{mi}\end{aligned}}$$

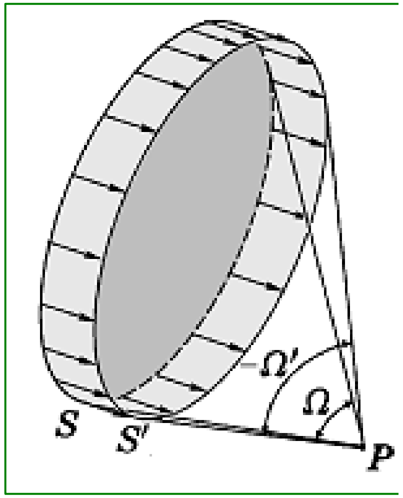


- 磁路串联、并联问题，漏磁效应问题，有效磁导率问题；
- 参见例子p.292

电流环与磁偶极子的等效性

- 闭合电流环对空间任一场点 ***P*** 处产生的磁场与环对 ***P*** 点所张球面角 **Ω** 的梯度成正比。

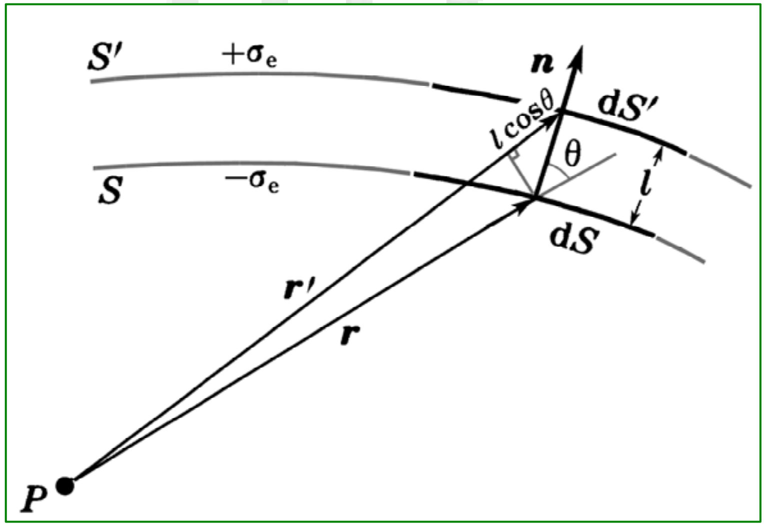
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega$$

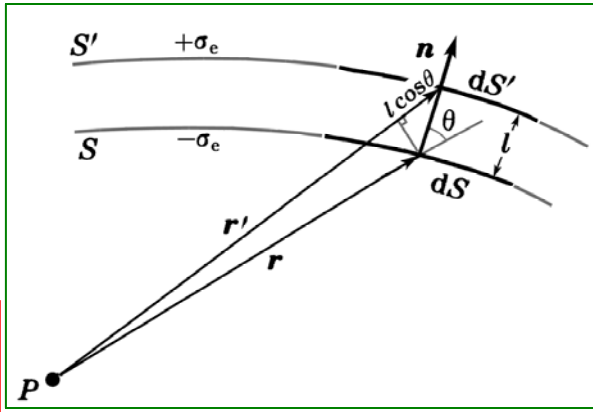


- 从电偶极层开始。对于正负电荷薄壳层，电偶极子微元 **dS** 施加给空间 ***P*** 点的电势：

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e dS'}{r'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-\sigma_e)dS}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_e\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)dS$$





- 继续看几何关系:

$$\because r' \approx r + l\cos\theta$$

$$\therefore \frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r + l\cos\theta} = \frac{1}{r(1+\dfrac{l\cos\theta}{r})} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{l\cos\theta}{r}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = -\frac{l\cos\theta}{r^2} = -\frac{\vec{l}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

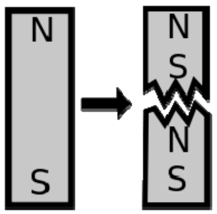
$$U(P)\big|_{dS} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e l\cos\theta dS}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_e\cdot\vec{r}}{r^3}$$

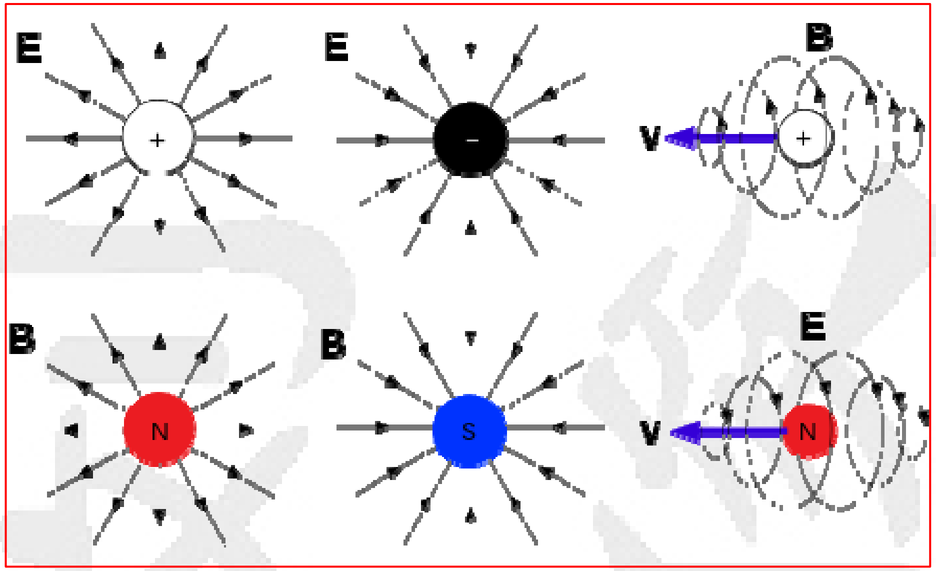
$$\because \frac{\cos\theta dS}{r^2} = d\Omega$$

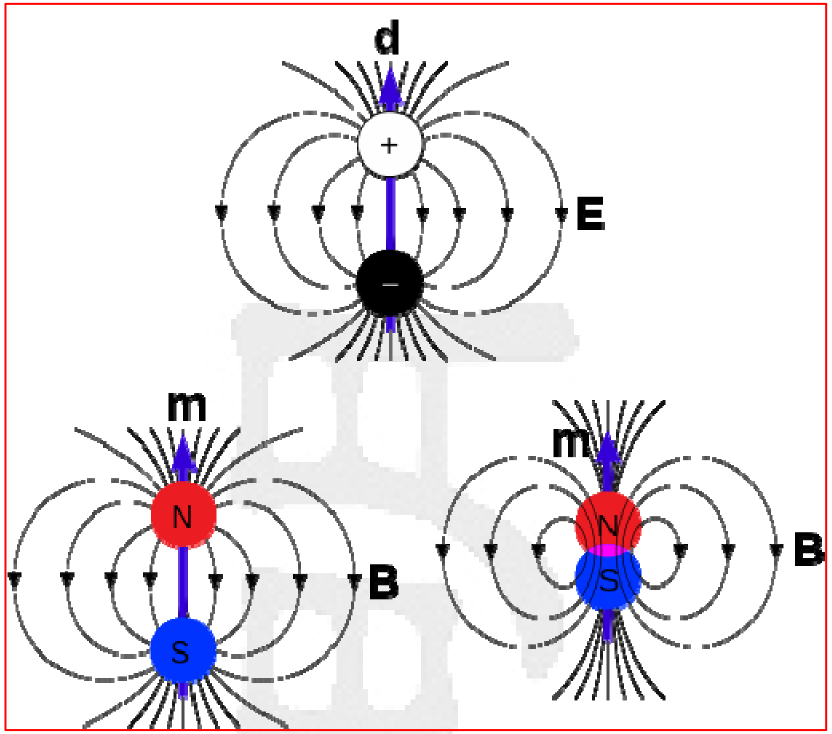
$$\therefore U(P)\big|_{dS} = -\frac{\sigma_e l}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \Rightarrow \vec{E}\big|_{dS} = -\nabla U(P) = \frac{\sigma_e l}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\Omega = \frac{\tau_e}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\Omega$$

电磁学07-12: 等效磁荷理论

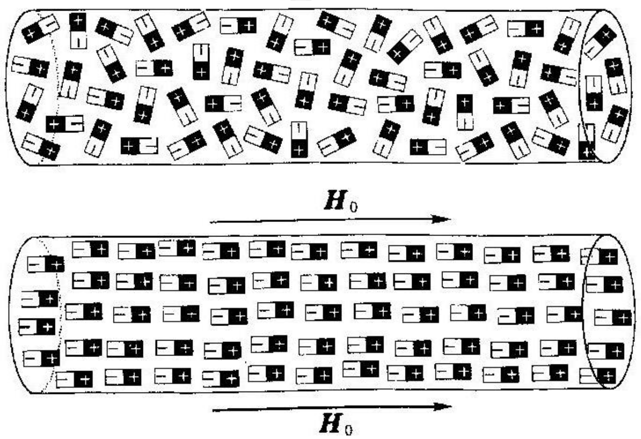
- 对磁荷假说而言:

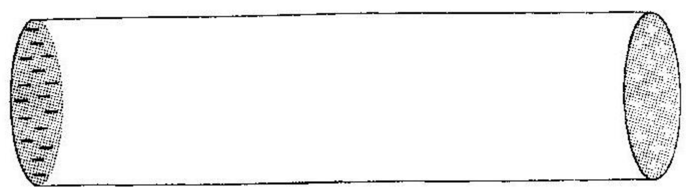


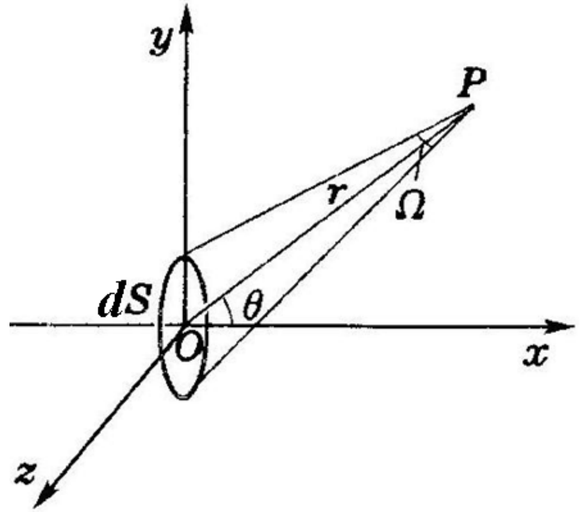




- 对磁体而言:







- 磁荷假说：

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{Q_{m1}Q_{m2}}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{H}=\frac{\vec{F}}{Q_{m1}}=\sum_i\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{Q_{mi}}{r^3}\vec{r}=\iiint_V\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{dQ_m}{r^3}\vec{r}$$

$$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=0\Rightarrow\vec{H}=-\nabla U_m$$

- 对一磁偶极子单元(也就是电流环) **dS**，有：

$$\vec{p}_m=Q_m\vec{l}=(\sigma_m dS)\vec{l}$$

$$\tau_m=p_m/dS=\sigma_m l$$

$$U_m\big|_{dS}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{\vec{p}_m\cdot\vec{r}}{r^3}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{(\sigma_m dS)\vec{l}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$=\frac{\sigma_m l}{4\pi\mu_0}\frac{\cos\theta dS}{r^2}=\frac{\sigma_m l}{4\pi\mu_0}d\Omega=\frac{\tau_m}{4\pi\mu_0}d\Omega$$

$$U(P)\big|_{dS}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_e\cdot\vec{r}}{r^3}$$

- 继续:

$$\vec{H}(P)\Big|_{dS} = -\nabla U_m(P)\Big|_{dS} = \frac{\tau_m}{4\pi\mu_0}\nabla\Omega \iff \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega$$

- 结合电流环与磁偶极子的对应性，定义:

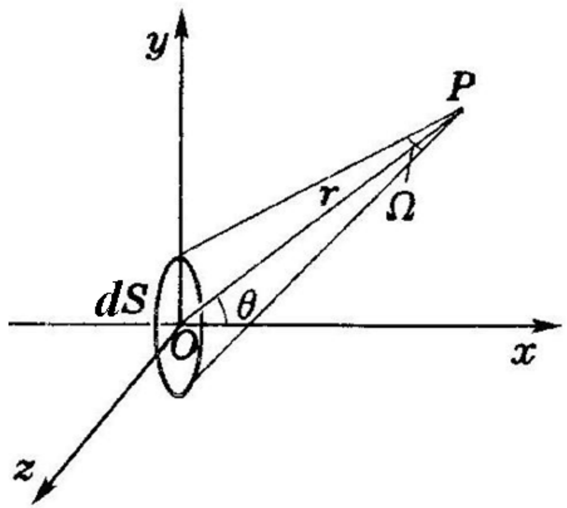
$$\vec{p}_m = \mu_0\vec{m} = \mu_0 I dS, \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

$$\tau_m = p_m / dS$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega = \frac{\mu_0 I dS}{4\pi dS}\nabla\Omega = \frac{\mu_0 m}{4\pi dS}\nabla\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{p_m}{dS}\nabla\Omega = \frac{\tau_m}{4\pi}\nabla\Omega = \mu_0\left(\frac{\tau_m}{4\pi\mu_0}\nabla\Omega\right)$$

$$= \mu_0\vec{H}$$



假定存在磁荷，仿照静电学建立静磁学

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{Q_{m1}Q_{m2}}{r^3}\vec{r}\Leftrightarrow\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{e1}Q_{e2}}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{H}=\frac{\vec{F}}{Q_m}\Leftrightarrow\vec{E}=\frac{\vec{F}}{Q_e}$$

$$\vec{H}=\sum_i\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{Q_{mi}}{r^3}\vec{r}=\iiint_V\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{dQ_m}{r^3}\vec{r}\Leftrightarrow\vec{E}=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{ei}}{r^3}\vec{r}=\iiint_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ_e}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{p}_m=Q_m\vec{l}\Leftrightarrow\vec{p}_e=Q_e\vec{l}$$

$$\vec{J}\ (\text{or } \vec{P}_m)=\frac{\sum_i\vec{p}_{mi}}{d\tau}\Leftrightarrow\vec{P}=\vec{P}_e=\frac{\sum_i\vec{p}_{ei}}{d\tau}$$

$$\oint\vec{P}_m\cdot d\vec{S}=\sum_{s内}Q'_m\Big/\rho'_m=-div\vec{P}_m\Leftrightarrow\oint\vec{P}_e\cdot d\vec{S}=\sum_{s内}Q'_e\Big/\rho'_e=-div\vec{P}_e$$

- 继续我们的等效理论

$$\sigma'_m = \left|\vec{J}_n\right| = \left|\vec{P}_m\right| \Leftrightarrow \sigma'_e = \left|\vec{P}_n\right|$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0\ (??) \Leftrightarrow \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

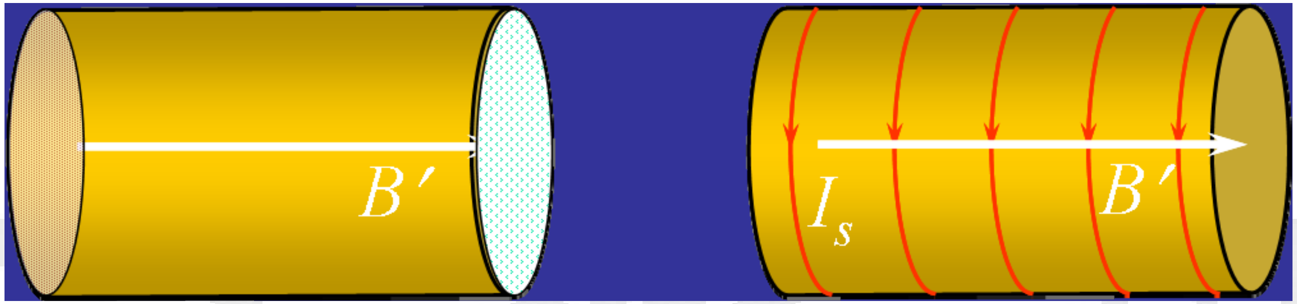
$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\sum_{s内} Q_m \Leftrightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{s内} Q_e$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{P}_m \Leftrightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_e$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{s内} Q_{e0}$$

- 注意：永久磁铁中 **I_0=0**，***i'=M_t***
- 困难：磁荷理论不能解释抗磁性。

- 如果完全不考虑自由电流，只计及分子电流，如永久磁铁，则：



$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_0 = 0, \quad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\because \vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}, \quad \therefore \oint_S \vec{H}\cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{M}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\therefore \oint_S \vec{H}\cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{M}\cdot d\vec{S}$$

- 在处理磁介质的具体问题时，必须把一种观点(分子电流/磁荷)贯彻到底。

- 由此可以建立只计及分子电流的等效磁荷理论:

Ampere current $\Leftrightarrow$ magnetic charge

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = -\oint \vec{M} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\sum_{s内} Q_m$$

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \Leftrightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \ (\text{or } \vec{P}_m)$$

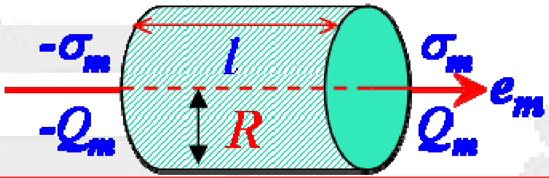
$$-\oint \vec{M} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\mu_0}\oint \vec{P}_m \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\sum_{s内} Q'_m$$

$$\sum_{s内} Q'_m = -\oint \mu_0 \vec{M} \cdot d\vec{S} = -\oint \vec{P}_m \cdot d\vec{S}$$

$$\rho'_m = -\mu_0 div\vec{M}$$

On interface: $\sigma'_m = \left|\mu_0 \vec{M}_n\right| \ (\sigma'_m = \mu_0 \vec{n} \cdot \vec{M})$

- 磁偶极子问题：即便是自由电流，电流环等效于一对正负磁荷组成的磁偶极矩，Q_m 称之为磁极强度。磁偶极矩 $p_m=Q_m l$
- 磁偶极矩 m 产生的磁感应强度 B 与电偶极矩 p 的效果完全对应：



$$\vec{p}_m = Q_m\vec{l} = \sigma_m S\vec{l} = \mu_0 I\vec{S} = \mu_0 I\pi R^2\vec{e}_m$$

$$\vec{m} = \vec{p}_m / \mu_0 = I\pi R^2\vec{e}_m$$

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}\right]$$

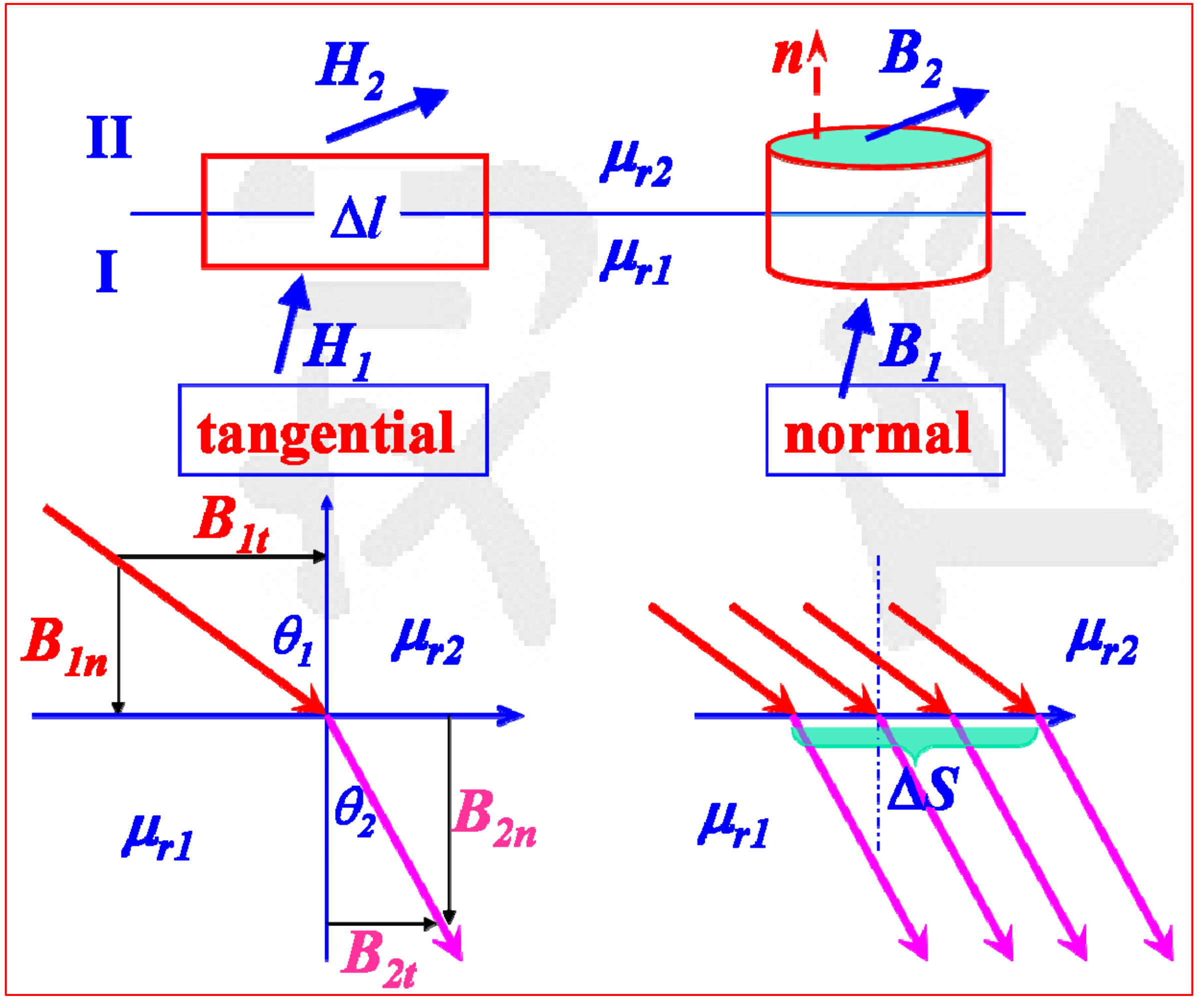
$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}\right]$$

- 回顾第五章内容：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\vec{m}}{r^3} + 3\frac{(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right) \Longleftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)$$

$$\vec{m} = I\vec{S},\ \vec{p}_m = Q_m\vec{l} \Longleftrightarrow \vec{p} = q\vec{l}$$

□ 假定磁介质界面无自由电流，只有分子电流：

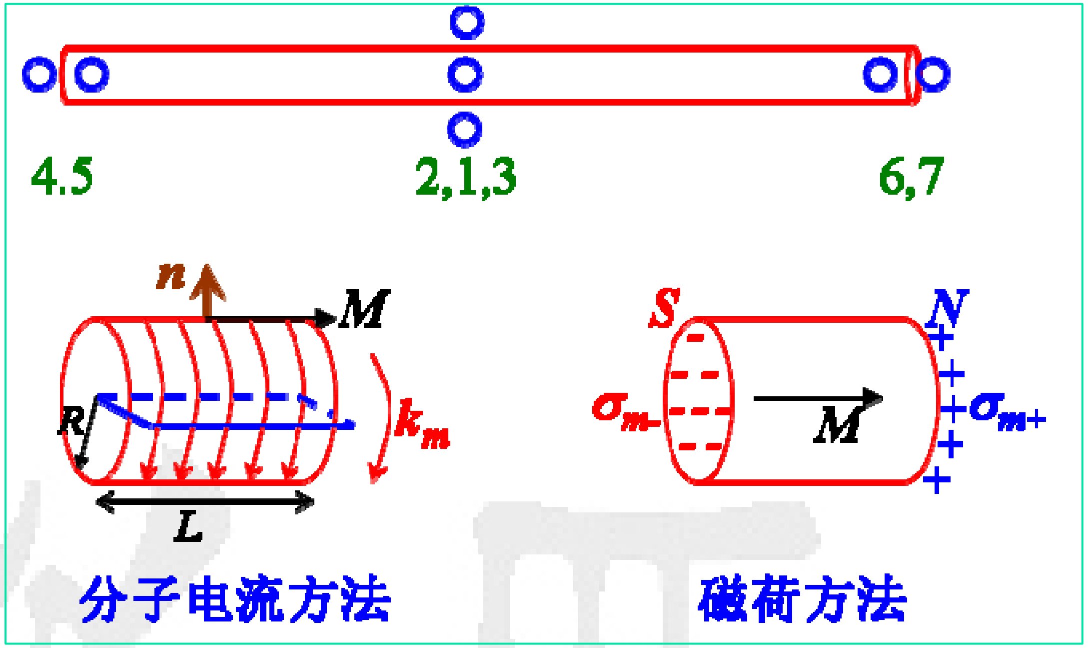


$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$$

$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\vec{B}_{1t}}{\vec{B}_{1n}}, \quad \tan\theta_2 = \frac{\vec{B}_{2t}}{\vec{B}_{2n}}$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\vec{B}_{1t}}{\vec{B}_{2t}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\frac{\vec{H}_{1t}}{\vec{H}_{2t}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$



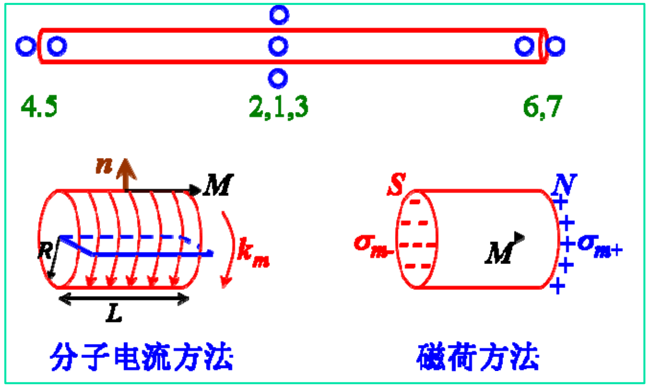
- 【例7.2】一细长均匀磁化棒，磁化强度 ***M*** 沿棒长方向，求解图中 **1** 至 **7** 各点的磁场强度 ***H*** 和磁感应强度 ***B***：

- 面磁化电流：

$$I_m(\vec{k}_m):\quad \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = \sum_{L\text{以内}} I_m \Rightarrow L\vec{M} = (nI)L\vec{n}\times\vec{k}_m \Rightarrow M = nI$$

- 磁棒中心位置：

$$B_0 = \frac{\mu_0 nI}{\sqrt{1+(2R/L)^2}} = \frac{\mu_0 M}{\sqrt{1+(2R/L)^2}}$$



继续

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \vec{M}}{\sqrt{1+(2R/L)^2}} \approx \mu_0 \vec{M} - 2\mu_0 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \vec{M} \approx \mu_0 \vec{M}$$

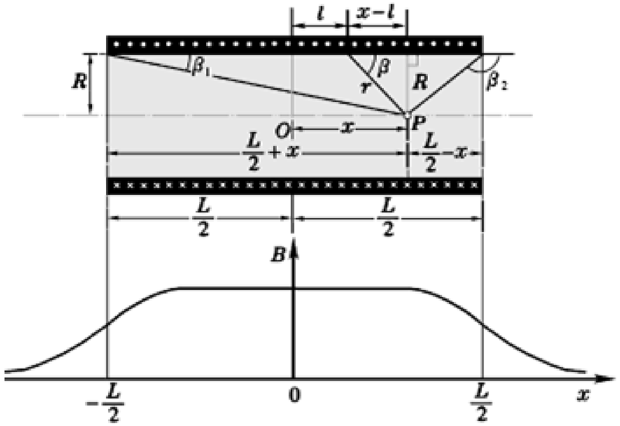
$$\vec{B}_2 = \vec{B}_3 \approx 0$$

对端部各处，见第5章结果:

$$\vec{B}_e = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 \vec{M}}{\sqrt{1+(R/L)^2}}$$

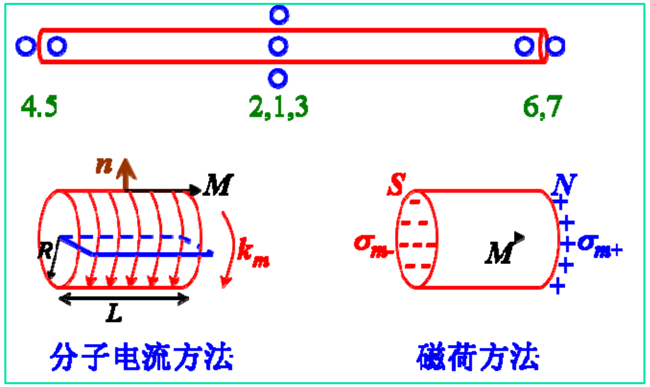
$$\approx \frac{1}{2}\mu_0 \vec{M} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2 \mu_0 \vec{M} \approx \frac{1}{2}\mu_0 \vec{M}$$

$$\therefore \vec{B}_4 = \vec{B}_5 = \vec{B}_6 = \vec{B}_7 \approx \frac{1}{2}\mu_0 \vec{M}$$



$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

电磁学07-14: 磁介质的若干问题



- 再继续

$$\boxed{\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}}$$

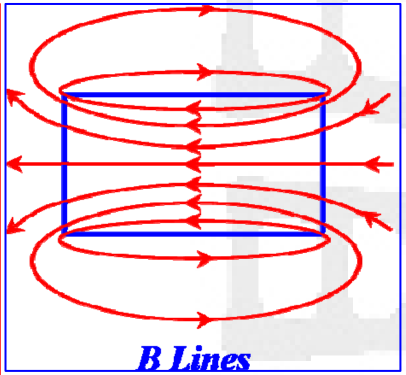
- 对各点处:

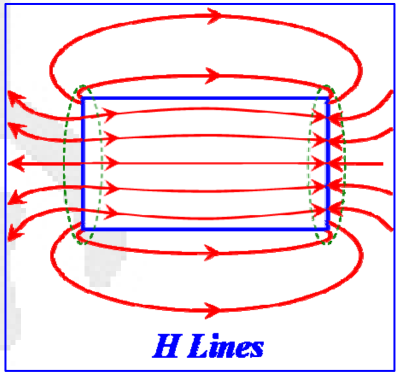
$$\vec{H}_1=\vec{M}-2\left(\frac{R}{L}\right)^2\vec{M}-\vec{M}=2\left(\frac{R}{L}\right)^2\vec{M}\approx 0$$

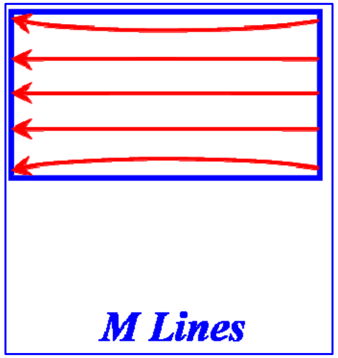
$$\vec{H}_2=0-0=0,\quad \vec{H}_3=0-0=0$$

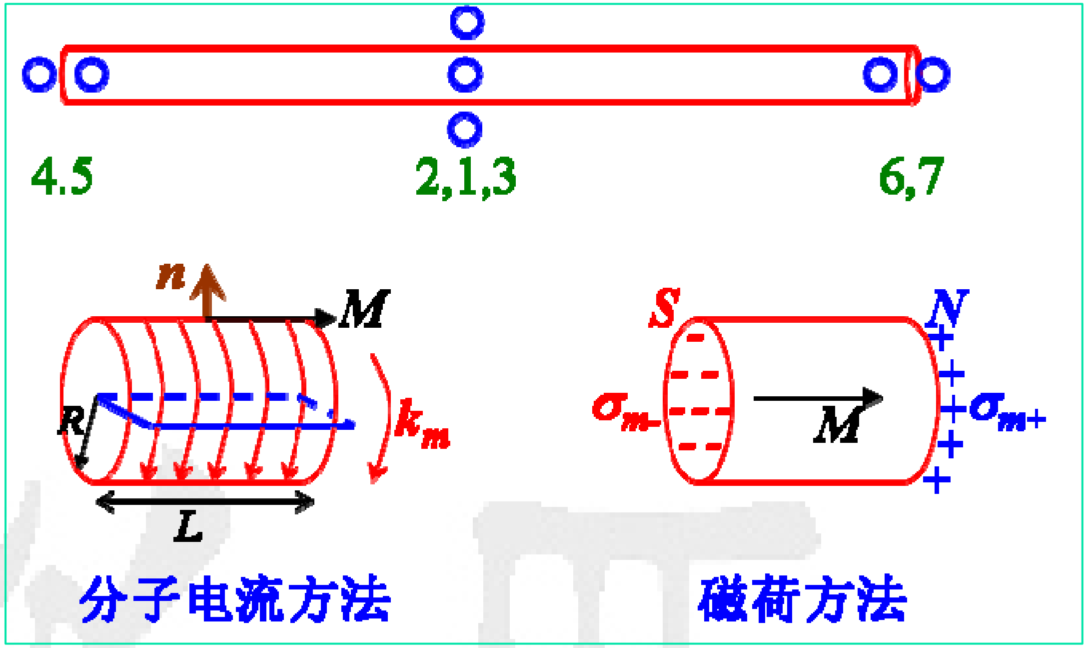
$$\vec{H}_4=\vec{H}_7=\frac{1}{2}\vec{M}-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2\vec{M}-0\approx\frac{1}{2}\vec{M}$$

$$\vec{H}_5=\vec{H}_6=\frac{1}{2}\vec{M}-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2\vec{M}-\vec{M}\approx-\frac{1}{2}\vec{M}$$









磁荷方法求解

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$$

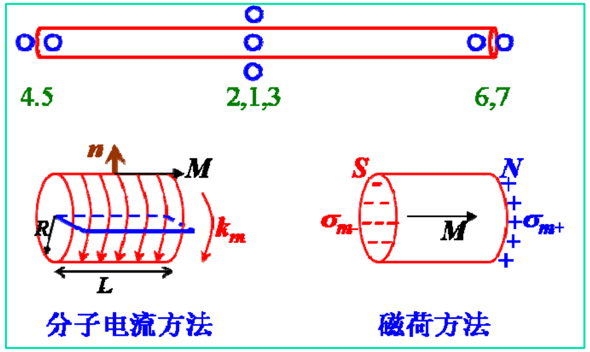
$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{J}\Rightarrow\vec{J}=\mu_0\vec{M}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m}{r^3}\vec{r}$$

磁荷只存在于圆柱端面，离端面轴线上一点的 *H*:

$$\vec{H}=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)\vec{e}_r$$

$$\because\begin{cases}\sigma_{m+}=\mu_0\vec{n}_+\cdot\vec{M}=\mu_0 M\\ \sigma_{m-}=\mu_0\vec{n}_-\cdot\vec{M}=-\mu_0 M\end{cases},\quad\therefore\vec{H}=\pm\frac{M}{2}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)\vec{e}_r$$



- 分别应用到不同位置(δ为离开端面的小量):

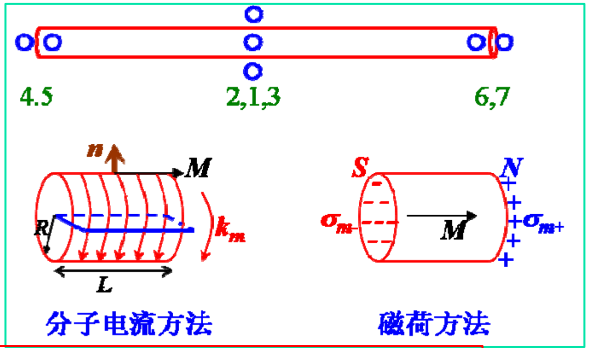
$$\vec{H}_1=\frac{M}{2}\left(1-\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+R^2}}\right)(-\vec{e}_r)+\frac{-M}{2}\left(1-\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+R^2}}\right)\vec{e}_r$$

$$=M\left(\frac{L}{\sqrt{L^2+(2R)^2}}-1\right)\vec{e}_r\approx M\left[-2\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]\vec{e}_r\approx 0$$

细长铁磁棒退极化场很小!

$$\vec{H}_5=\frac{M}{2}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)(-\vec{e}_r)+\frac{-M}{2}\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+R^2}}\right)\vec{e}_r\approx-\frac{1}{2}\vec{M}$$

$$\vec{H}_6=\frac{M}{2}\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+R^2}}\right)(-\vec{e}_r)+\frac{-M}{2}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)\vec{e}_r\approx-\frac{1}{2}\vec{M}$$



- 继续:

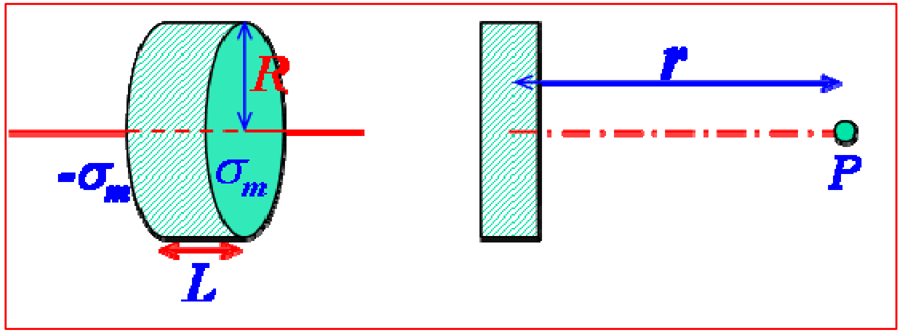
$$\vec{H}_4=\frac{M}{2}\left(1-\frac{L+\delta}{\sqrt{(L+\delta)^2+R^2}}\right)(-\vec{e}_r)+\frac{-M}{2}\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+R^2}}\right)(-\vec{e}_r)\approx\frac{1}{2}\vec{M}$$

$$\vec{H}_7=\frac{M}{2}\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+R^2}}\right)\vec{e}_r+\frac{-M}{2}\left(1-\frac{L+\delta}{\sqrt{(L+\delta)^2+R^2}}\right)\vec{e}_r\approx\frac{1}{2}\vec{M}$$

- 对于位置2、3，由环路安培定理很容易得到: $\boxed{\vec{H}_2=\vec{H}_3=\vec{H}_1\approx 0}$

- 接下来，由 $\boxed{\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}}$ 可以求得 $B_1 \sim B_7$

由磁荷方法也可以求得这个结果！

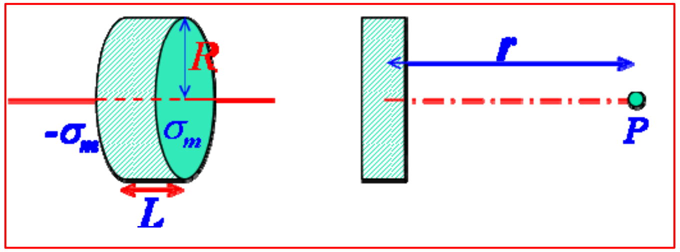


- 【例7.11】一圆磁片半径为 ***R***，厚度为 ***L***，两端面分布均匀磁荷，求轴线 ***P*** 处的磁势 U_m (非磁矢势)和磁场强度 ***H***。

- 均匀面磁荷对应于均匀电荷密度，因此轴线上离磁荷面为 ***r*** 处的磁势为：

$$U_m=\int_0^R\frac{\sigma_m(2\pi x dx)}{4\pi\mu_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\sqrt{r^2+x^2}\Big|_{x=0}^{x=R}$$

$$=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\sqrt{r^2+R^2}-r\right),\quad (r>0)$$



- 因此，***P*** 点的磁势为：

$$U_m = U_{m+} + U_{m-} = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\sqrt{(r-L/2)^2+R^2}-(r-L/2)\right)+$$

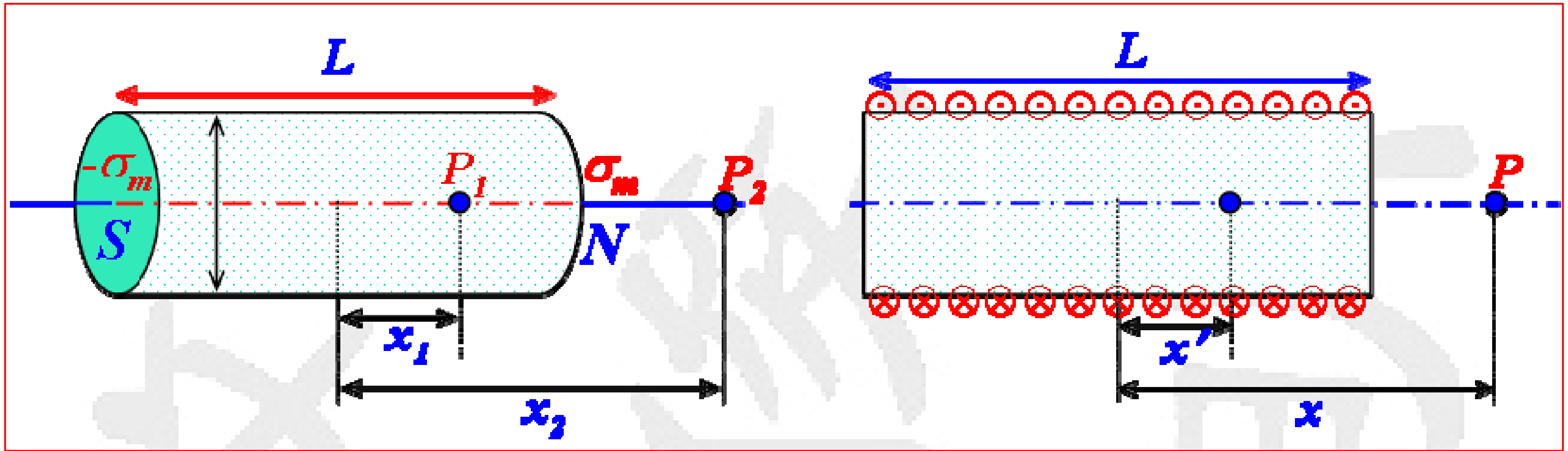
$$+\frac{-\sigma_m}{2\mu_0}\left(\sqrt{(r+L/2)^2+R^2}-(r+L/2)\right)$$

$$=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\sqrt{(r-L/2)^2+R^2}-\sqrt{(r+L/2)^2+R^2}+L\right),\quad (r>L/2)$$

$$\vec{H} = -\nabla U_m = -\frac{\partial}{\partial r}U_m\vec{e}_r = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\frac{r+L/2}{\sqrt{(r+L/2)^2+R^2}}-\frac{r-L/2}{\sqrt{(r-L/2)^2+R^2}}\right)\vec{e}_r$$

$$=\begin{cases} 0 \text{ at } L<<r \\ \dfrac{\sigma_m}{2\mu_0}\dfrac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\vec{e}_r \text{ at } r=L,\quad (r>L/2) \\ 0 \text{ at } R\to\infty \end{cases}$$

- 【例7.15】一圆柱形磁棒和一密绕螺线管，结构如图所示。分别求 P_1 点和 P_2 点处的磁场强度 H、磁感应强度 B，并比较之。



- 从磁荷观点处理磁棒，以毕-萨定律处理螺线管：

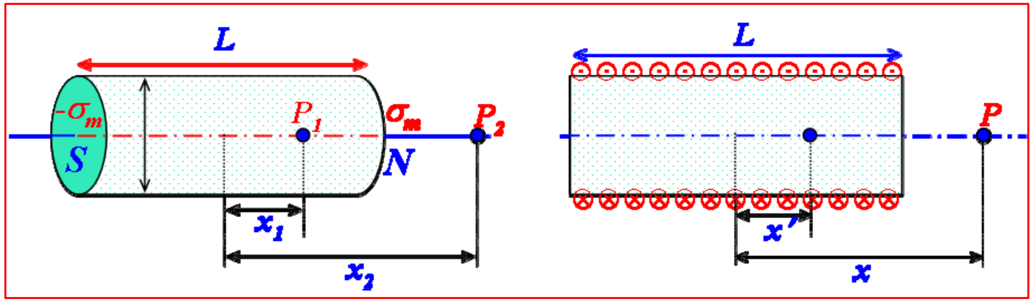
$$U_m = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\sqrt{r^2+R^2}-r\right),\quad (r>0)$$

$$\vec{H} = -\nabla U_m = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\right)\vec{e}_m$$

$\because$ 对单匝圆电流环： $M=0$

$$\therefore \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{IR^2}{2(r^2+R^2)^{3/2}}\vec{e}_I$$

➤ 继续：对磁棒

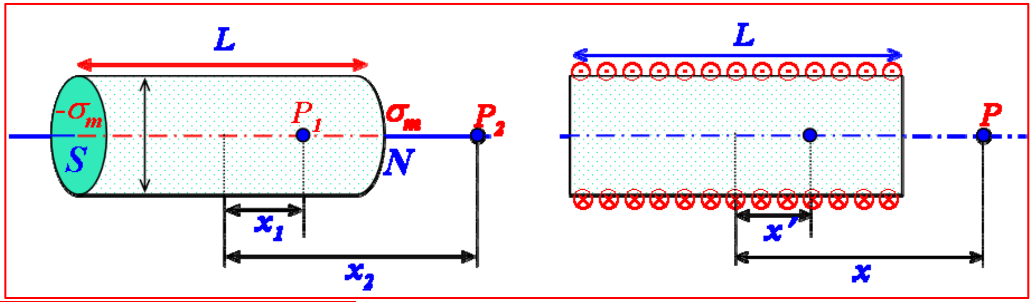


$$\vec{H}_{P_1}=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(1-\frac{L/2-x_1}{\sqrt{(L/2-x_1)^2+R^2}}\right)(-\vec{e}_m)+\frac{-\sigma_m}{2\mu_0}\left(1-\frac{L/2+x_1}{\sqrt{(L/2+x_1)^2+R^2}}\right)\vec{e}_m$$

$$=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\frac{L/2+x_1}{\sqrt{(L/2+x_1)^2+R^2}}-\frac{L/2-x_1}{\sqrt{(L/2-x_1)^2+R^2}}-2\right)\vec{e}_m$$

$$\vec{H}_{P_2}=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(1-\frac{x_2-L/2}{\sqrt{(x_2-L/2)^2+R^2}}\right)\vec{e}_m+\frac{-\sigma_m}{2\mu_0}\left(1-\frac{x_2+L/2}{\sqrt{(x_2+L/2)^2+R^2}}\right)\vec{e}_m$$

$$=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\frac{x_2+L/2}{\sqrt{(x_2+L/2)^2+R^2}}-\frac{x_2-L/2}{\sqrt{(x_2-L/2)^2+R^2}}\right)\vec{e}_m$$



- 继续：对螺线管

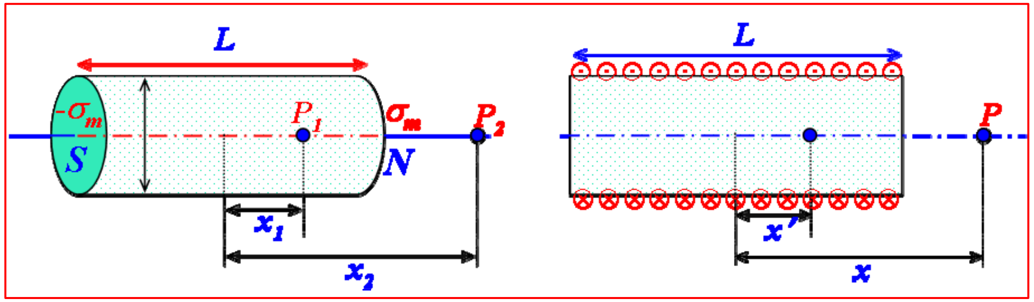
$$\vec{H}_P=\frac{NIR^2\vec{e}_I}{2L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx'}{\left[(x-x')^2+R^2\right]^{3/2}}$$

$$=\frac{NI}{2L}\left[\frac{x+L/2}{\sqrt{(x+L/2)^2+R^2}}-\frac{x-L/2}{\sqrt{(x-L/2)^2+R^2}}\right]\vec{e}_I$$

- 比较：

(1): at $x=x_2\to L/2+0,\ \vec{H}_P=\vec{H}_{P_2}\Rightarrow\sigma_m=\dfrac{\mu_0 NI}{L}$

(2): at $x=x_1\to L/2-0,\ \vec{H}_P\neq\vec{H}_{P_1}\Rightarrow\vec{H}_P-\vec{H}_{P_1}=\dfrac{\sigma_m}{\mu_0}\vec{e}_m(\text{or }\vec{e}_I)$



- 继续比较：在磁棒或者螺线管外部，**M=0**，且对磁棒和螺线管均已经导出 ***H*** 相等。

$$\therefore \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0\vec{H}\ \text{ for } x>L/2 \text{ and all outer points}$$

- 在螺线管内部：

$$\because \vec{M}=0,\quad \therefore \vec{B}=\mu_0\vec{H}$$

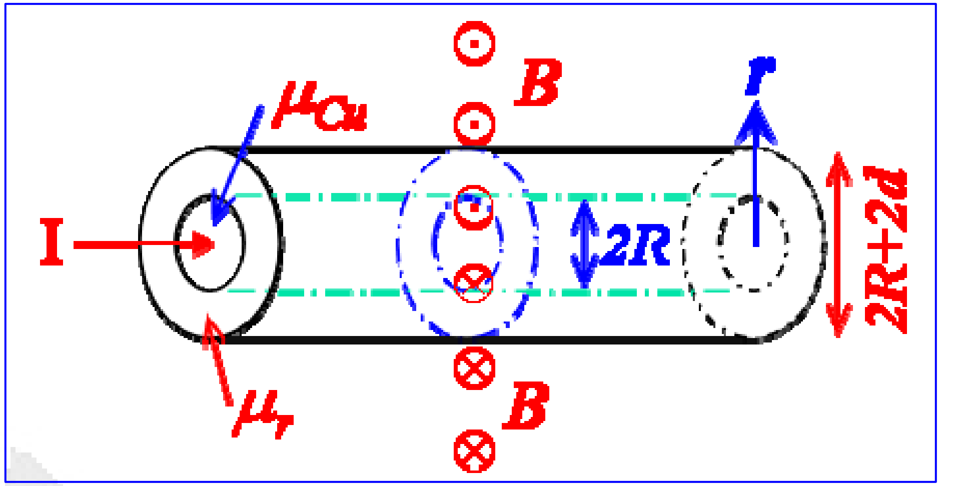
磁棒与螺线管：

- 外部 ***B***、***H***、***M*** 均相等
- 内部 ***B*** 相等
- 内部 ***H***、***M*** 不相等

- 在磁棒内部：

$$\because \vec{J}(\text{or } \vec{P}_m)=\mu_0\vec{M},\ \vec{P}_m=\frac{\sum\vec{p}_{mi}}{V}=\frac{\text{端面磁荷}Q_m\cdot\vec{L}}{V}=\frac{\pi R^2\sigma_m\cdot\vec{L}}{\pi R^2 L}=\sigma_m\vec{e}_m$$

$$\therefore \vec{M}=\frac{\sigma_m}{\mu_0}\vec{e}_m \Rightarrow \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0\vec{H}+\sigma_m\vec{e}_m$$

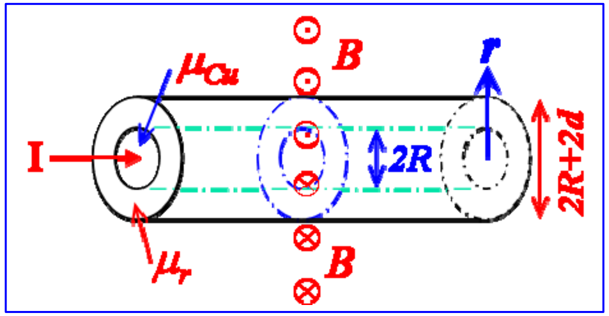


- 【例7.18】求不同 r 处的 H、B、M 和介质 μ_r 内外表面磁化电流密度 k_m。

- 以半径 r 作垂直于轴线的环路 L

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{L} = 2\pi r H = I_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{at } r<R: I_r = \pi r^2 \dfrac{I}{\pi R^2},\ H = \dfrac{I}{2\pi R^2} r,\ B = \mu_0\mu_{Cu} H = \dfrac{\mu_0\mu_{Cu} I}{2\pi R^2} r \\ \text{at } R<r<R+d: H = \dfrac{I}{2\pi r},\ B = \mu_0\mu_r H = \dfrac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r} \\ \text{at } r>R+d: H = \dfrac{I}{2\pi r},\ B = \mu_0 H = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



- 继续：e_I 为电流 I 方向，n为圆柱面外法向

$$\vec{M}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H}=\begin{cases}\text{at } r<R: \dfrac{\mu_{Cu}I}{2\pi R^2}r-\dfrac{I}{2\pi R^2}r=\dfrac{(\mu_{Cu}-1)Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_I\times\vec{n}\\ \text{at } R<r<R+d: \dfrac{(\mu_r-1)I}{2\pi r}\vec{e}_I\times\vec{n}\\ \text{at } r>R+d: \dfrac{I}{2\pi r}-\dfrac{I}{2\pi r}=0\end{cases}$$

$\mu_{Cu}<1.0$

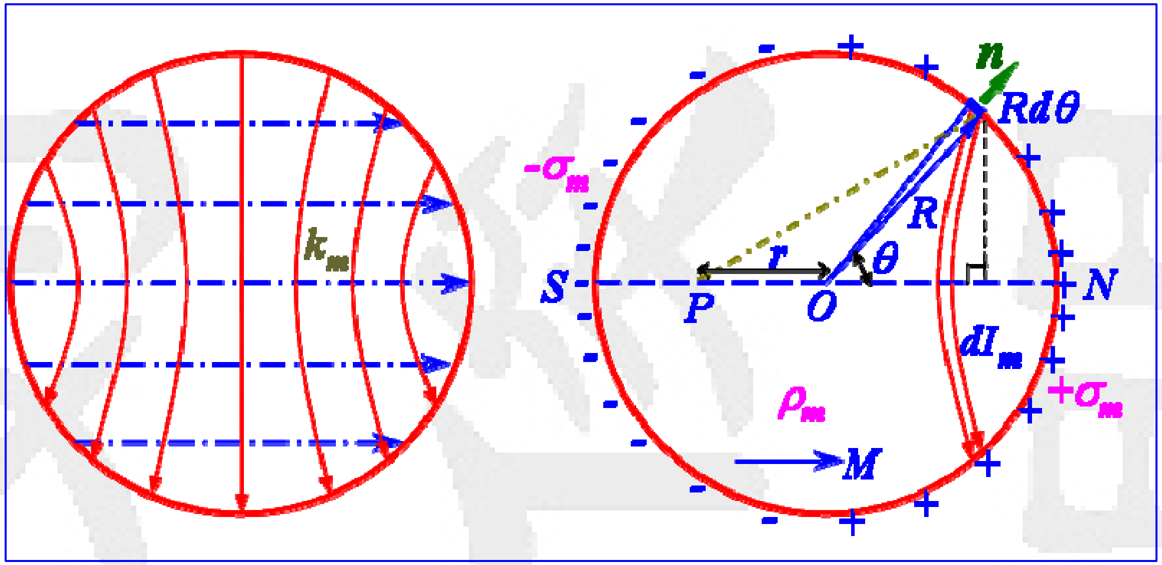
$\mu_r>1.0$

Inner interface ($r=R$): $\vec{k}_m=\vec{M}\times(-\vec{n})=-\dfrac{(\mu_r-1)I}{2\pi R}(\vec{e}_I\times\vec{n})\times\vec{n}=\dfrac{(\mu_r-1)I}{2\pi R}\vec{e}_I$

Outer surface ($r=R+d$): $\vec{k}_m=\vec{M}\times\vec{n}=\dfrac{(\mu_r-1)I}{2\pi(R+d)}(\vec{e}_I\times\vec{n})\times\vec{n}=-\dfrac{(\mu_r-1)I}{2\pi(R+d)}\vec{e}_I$

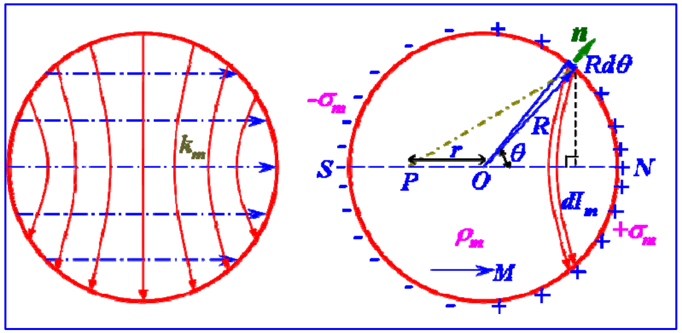
- 磁化电流 ***i′*** 产生磁化强度 ***M***，按右手螺旋法则判断方向

- 【例7.21/22/23】半径为 R 的磁介质均匀磁化，磁化强度为 M，求磁化电流、磁矩、磁荷、磁偶极矩、磁感应强度及相关讨论。



- 均匀磁化，球内磁化电流密度：

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{j}'_m &= \nabla\times\vec{M} = 0 \\ \vec{k}_m &= \vec{M}\times\vec{n} = M\sin\theta\,\vec{e}_M\times\vec{n} \end{aligned}}$$



- 球的磁矩 **m** 为球面所有磁化电流环构成的磁矩总和，因为 ***M*** 均匀：

$$\boxed{\vec{m} = V_{Sphere}\vec{M} = \frac{4\pi}{3}R^3\vec{M} = \int_{Sphere} dI_m\vec{S}}$$

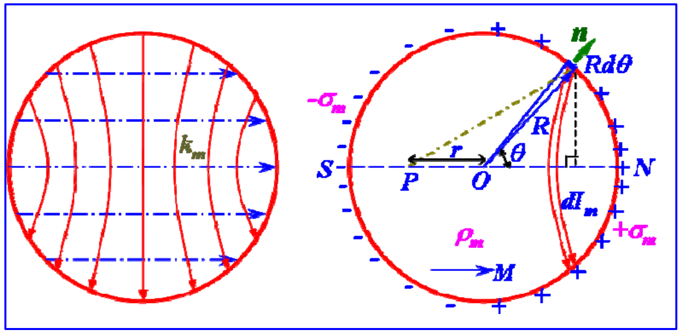
- 从磁化电流角度证明这一点也不难：

$$\vec{m} = \int_{Sphere} dI_m\vec{S}$$

$$\because \vec{k}_m = \vec{M}\times\vec{n} = M\sin\theta\vec{e}_M\times\vec{n},\quad \because k_m = \frac{dI_m}{Rd\theta},\quad \because S = \pi(R\sin\theta)^2$$

$$\therefore d\vec{m} = SdI_m\vec{e}_M = k_m Rd\theta\cdot\pi(R\sin\theta)^2\vec{e}_M = \pi R^3 M\sin^3\theta d\theta\vec{e}_M$$

$$\therefore \vec{m} = \int_{Sphere} d\vec{m} = \vec{e}_M\int_0^{\pi}\pi R^3 M\sin^3\theta d\theta = \frac{4\pi}{3}R^3\vec{M}$$



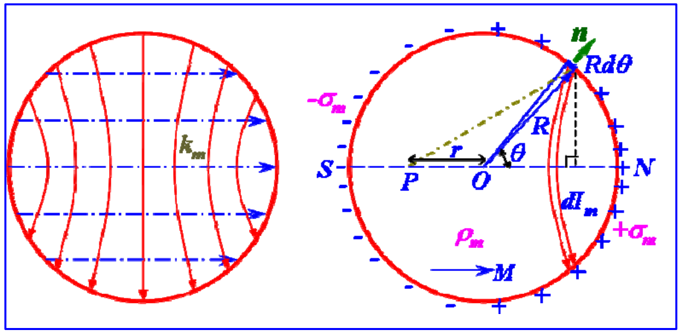
- 磁极化强度、磁荷密度、磁偶极矩：

$$\begin{cases} \vec{P}_m = \vec{J} = \mu_0 \vec{M} \\ \rho_m = -\nabla \cdot \vec{P}_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0 \\ \vec{p}_m = V\vec{P}_m = \mu_0 V\vec{M} = \dfrac{4\pi\mu_0}{3} R^3 \vec{M} \end{cases}$$

- 球面上角度 θ 处的磁荷面密度： $\boxed{\sigma_m = \vec{n} \cdot \vec{P}_m = \mu_0 M \cos\theta}$

- 要求得球内 **P** 点的 **B**，需回头求面磁化电流 dI_m (见上一页)：

$$\boxed{\because \vec{k}_m = \vec{M} \times \vec{n} = M \sin\theta \vec{e}_M \times \vec{n}, \quad \because k_m = \frac{dI_m}{Rd\theta}, \quad \therefore dI_m = RM \sin\theta d\theta}$$



- 这一面磁化电流在 ***P*** 点的 ***B***:

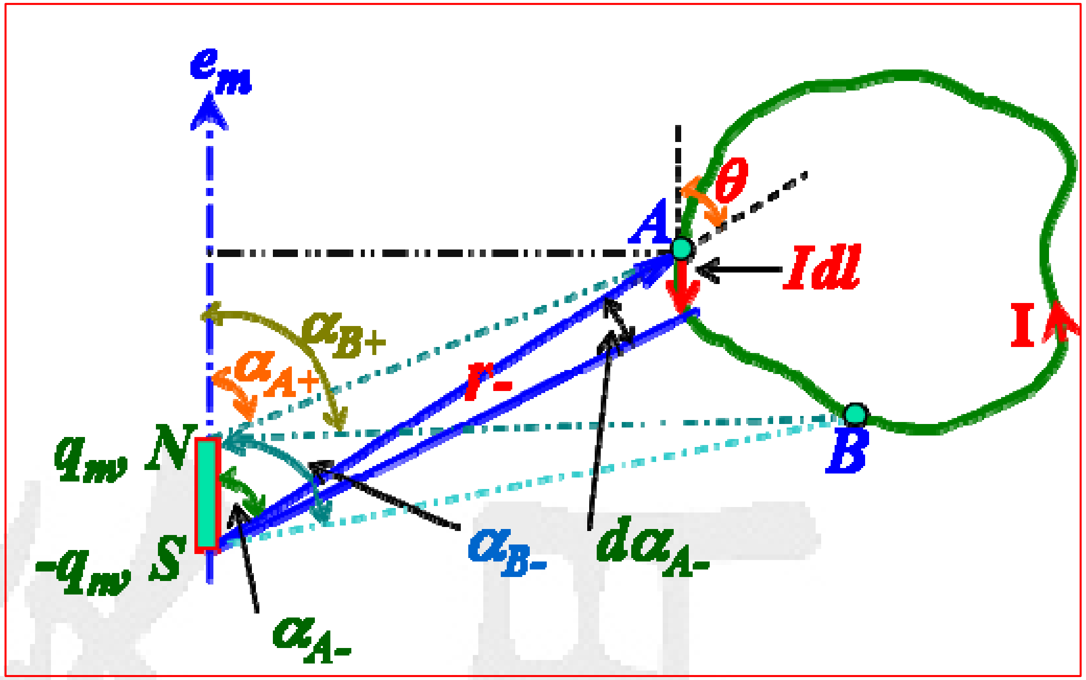
$$d\vec{B}_P=\frac{\mu_0(R\sin\theta)^2 dI_m}{2\left[\left(r+R\cos\theta\right)^2+(R\sin\theta)^2\right]^{3/2}}\vec{e}_M=\frac{\mu_0R^3\vec{M}}{2}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_P=\frac{\mu_0R^3\vec{M}}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\theta\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0R^3\vec{M}}{2}\begin{cases}\dfrac{4}{3R^3}, & \text{at } r<R\\ ???, & \text{at } r>R\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_P=\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$$

- 在球体内轴线上，***B*** 均匀，由内部安培环路定理，球体内 ***B*** 均匀
- ***B*** 均匀，则 ***M*** 均匀，***H*** 也一定均匀，但 ***H*** 与 ***B*** 方向不同。

- 【例7.43】磁铁与电流相互作用问题：平面内有小磁棒，磁极强度为 q_m 和 $-q_m$，指向 e_m。同一平面内有载流导线 I，求导线上AB段所受的力围绕磁棒转轴的力矩。

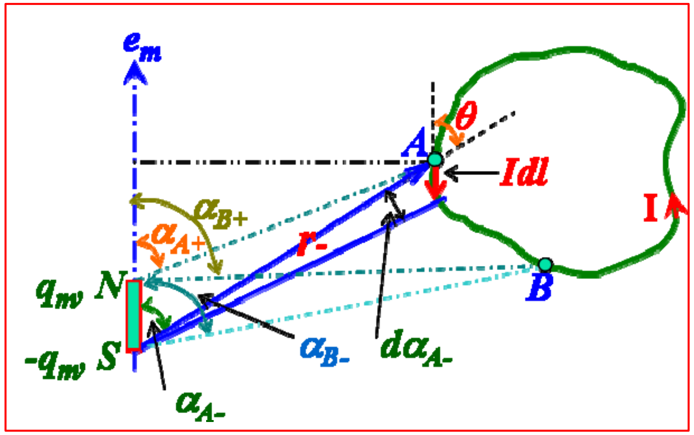


- 小磁棒的 S 极在 r_- 处产生磁感应强度为：

$$\vec{B}_- = \mu_0 \vec{H}_- = \mu_0 \frac{-q_m}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$$

- 这一磁场对载流线上任一微元 Idl 施加力：

$$d\vec{F}_- = Id\vec{l} \times \vec{B}_- = -\frac{q_m I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_-}{r_-^3} = -\frac{q_m I}{4\pi} \frac{dl \sin(\pi - \theta)}{r_-^3} (\vec{r}_- \times \vec{e}_m)$$



- dF_- 围绕转轴的力矩为：

$$d\vec{M}_- = r_- \sin\alpha_- dF_- (-\vec{e}_m) = \frac{q_m I}{4\pi} \frac{\sin\alpha_- \sin\theta dl}{r_-} \vec{e}_m$$

$$\because dl\sin\theta = r_- d\alpha_-, \quad \therefore d\vec{M}_- = \frac{q_m I}{4\pi} \sin\alpha_- d\alpha_- \vec{e}_m$$

$$\vec{M}_- = \int_A^B d\vec{M}_- = \frac{q_m I}{4\pi} \vec{e}_m \int_{\alpha_{A-}}^{\alpha_{B-}} \sin\alpha_- d\alpha_- = \frac{q_m I}{4\pi} (\cos\alpha_{A-} - \cos\alpha_{B-}) \vec{e}_m$$

- 类似处理施加于小磁棒的 *N* 极： $\vec{M}_+ = \frac{q_m I}{4\pi} (\cos\alpha_{B+} - \cos\alpha_{A+}) \vec{e}_m$

- 最后结果：

$$\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_- =$$
$$= \frac{q_m I}{4\pi} (\cos\alpha_{A-} + \cos\alpha_{B+} - \cos\alpha_{A+} - \cos\alpha_{B-}) \vec{e}_m$$

如果 ***B*** 点沿载流线循环一周回到 ***A*** 点，则 ***M*=0**，没有净力矩！为什么？

- 【例7.40】一磁偶极子的偶极矩 $\boldsymbol{p_m}$，指向 $\boldsymbol{l}$ 方向。其在非均匀磁场 $\boldsymbol{H}$ 中，磁偶极子受磁场 $\boldsymbol{H}$ 的作用力如何？

- 按磁偶极子思路求解：磁极强度 $\boldsymbol{q_m}$，长为 $\boldsymbol{\delta}$，则受磁场作用力

$$\vec{f} = q_m\vec{H}_+ + (-q_m)\vec{H}_- = q_m(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = q_m\Delta\vec{H}$$
$$= q_m\frac{\partial\vec{H}}{\partial l}\delta = \pm q_m\vec{\delta}\frac{\partial H}{\partial l} = \pm\vec{p}_m\frac{\partial H}{\partial l} = \begin{cases} \vec{p}_m\dfrac{\partial H}{\partial l}, & \text{if } \vec{p}_m \nearrow\nearrow \vec{H} \\ -\vec{p}_m\dfrac{\partial H}{\partial l}, & \text{if } \vec{p}_m \nearrow\swarrow \vec{H} \end{cases}$$

- 【例7.41】一磁偶极子磁矩为 $\boldsymbol{m}$，在磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 中的磁势能？

$$\vec{m} = \frac{1}{\mu_0}q_m\vec{\delta},\quad \vec{H} = -\vec{\nabla}U_m \Rightarrow W_m = q_mU_{m+} + (-q_m)U_{m-} = q_m(U_{m+} - U_{m-})$$
$$= q_m\Delta U_m = q_m\vec{\nabla}U_m\cdot\vec{\delta} = q_m\vec{\delta}\cdot\vec{\nabla}U_m = \mu_0\vec{m}\cdot(-\vec{H}) = -\vec{m}\cdot\mu_0\vec{H} = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

- 本章习题：P301: 7.1, 7.3, 7.4；P302: 7.5, 7.10, 7.14