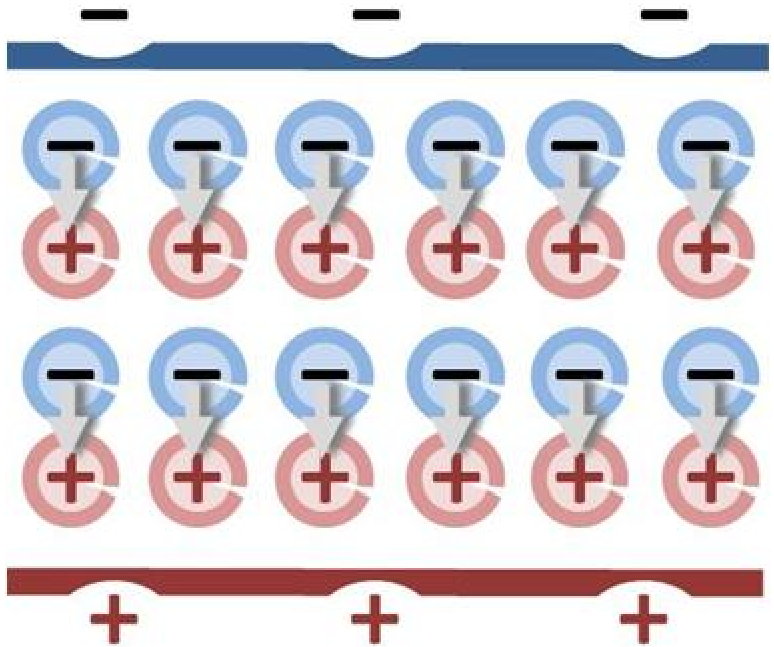
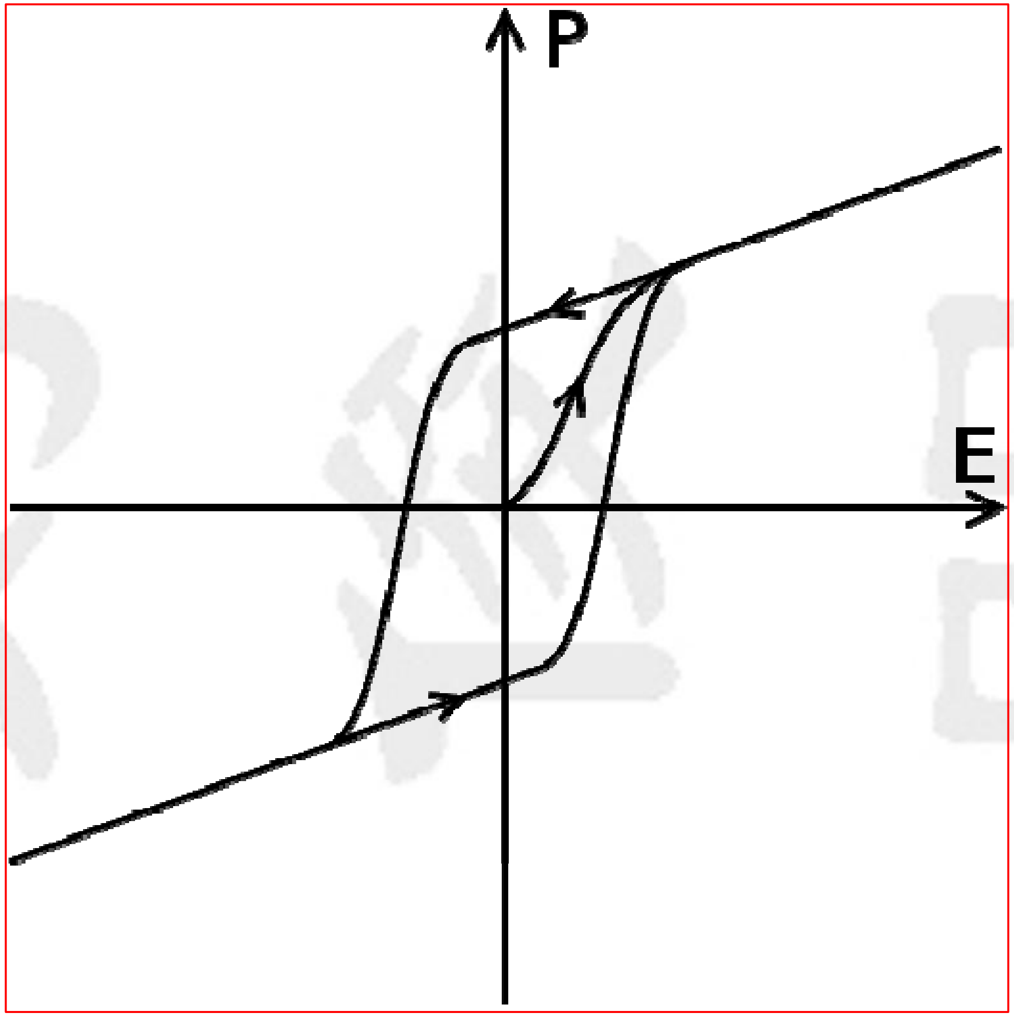
第三章 电介质

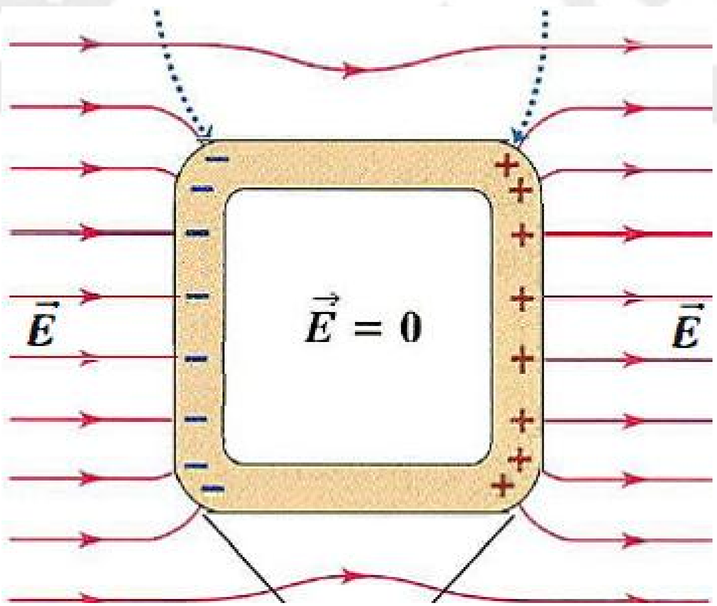



P
E

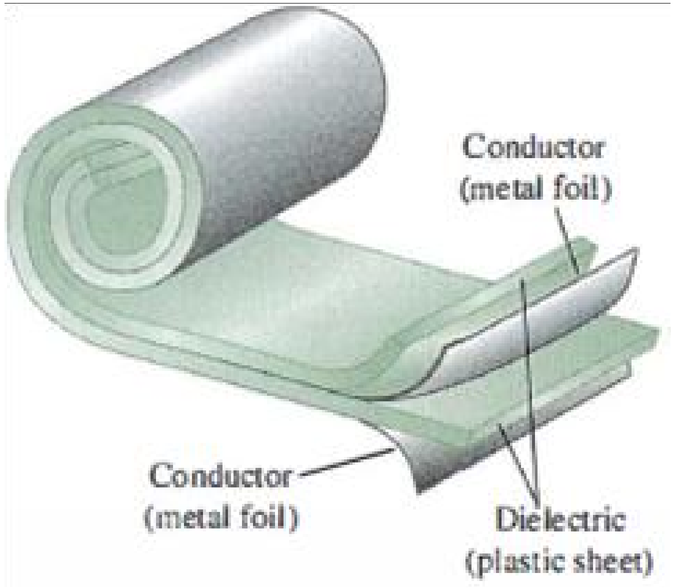
回顾静电场中导体的性质：

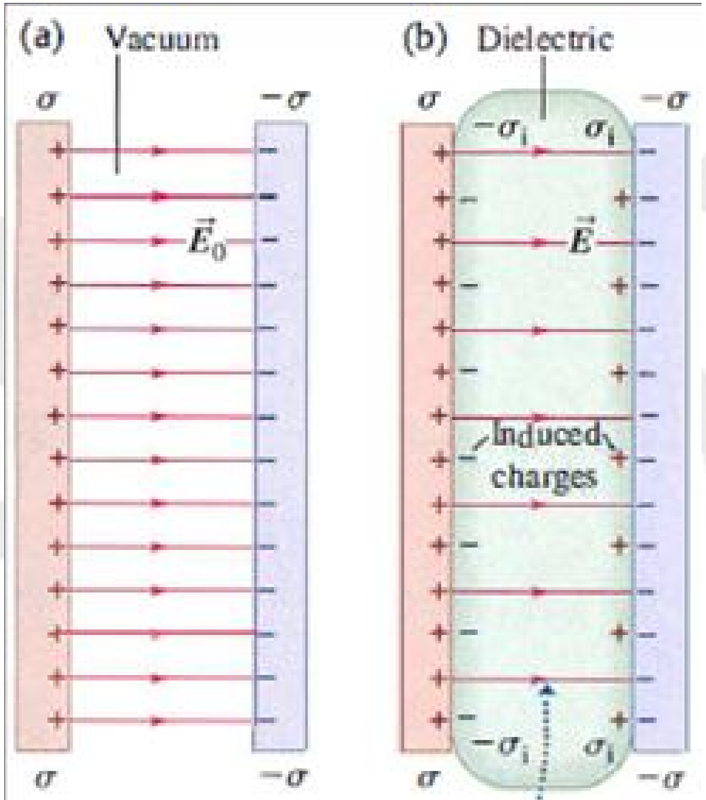
- (1) 静电平衡条件：静电平衡时，导体内部场强处处为零，每个导体都是等势体(电荷静止(宏观)，充要条件)。
- (2) 静电感应：静电平衡中所指的场乃一切电荷合场。
- (3) 分布在导体表面：静电平衡时，导体所带电荷分布在导体表面, 导体内部不可能有未抵消的静电荷。

针对自由电荷真空静电场



引入导体或者电介质会怎样?

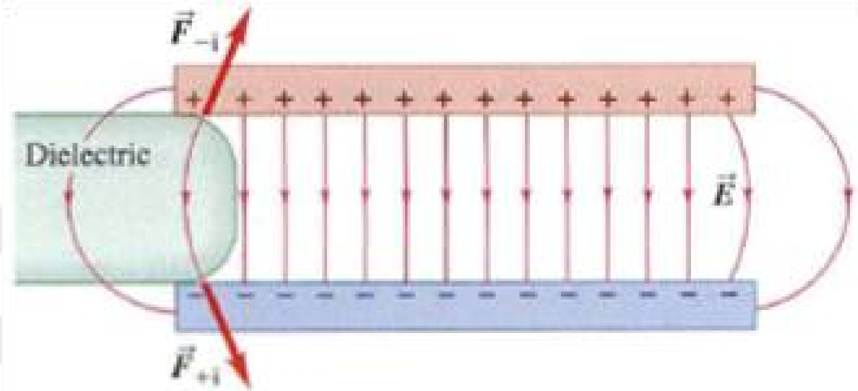


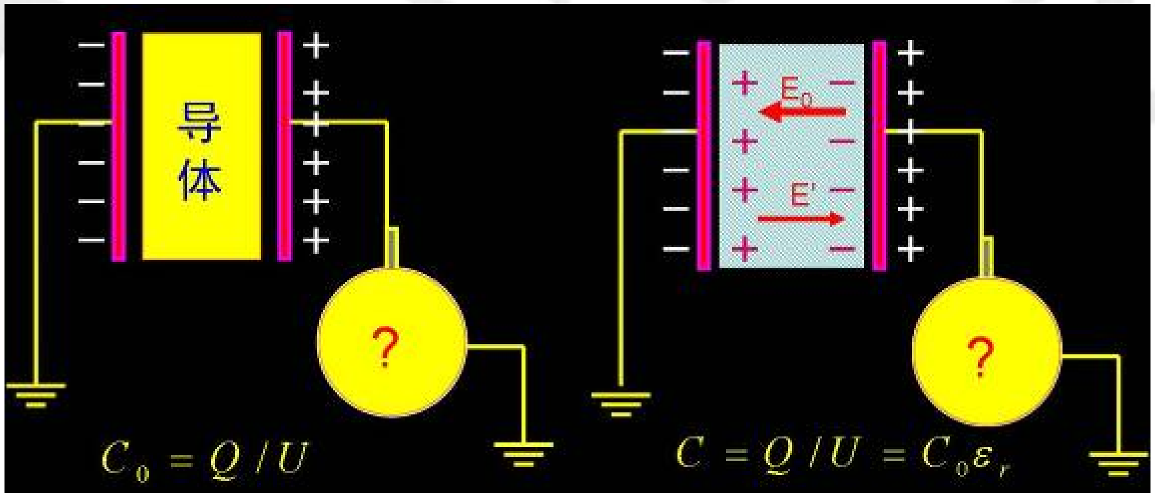


For a given charge density σ, the induced charges on the dielectric's surfaces reduce the electric field between the plates.

极化电荷、束缚电荷

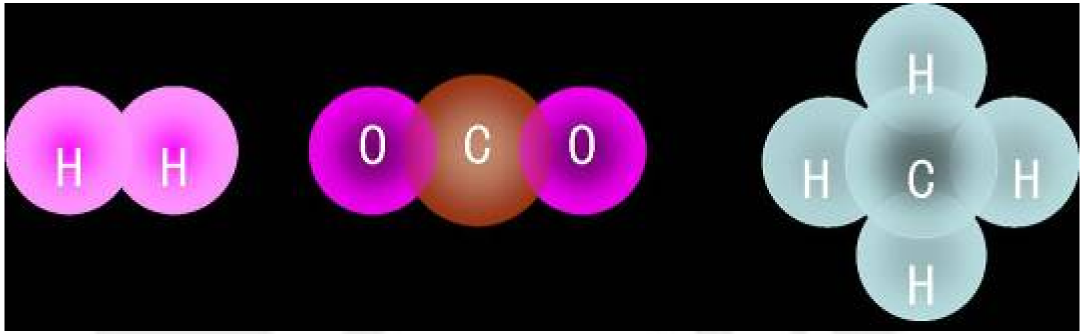
□ 电荷量不变，电势差下降？静电能下降？

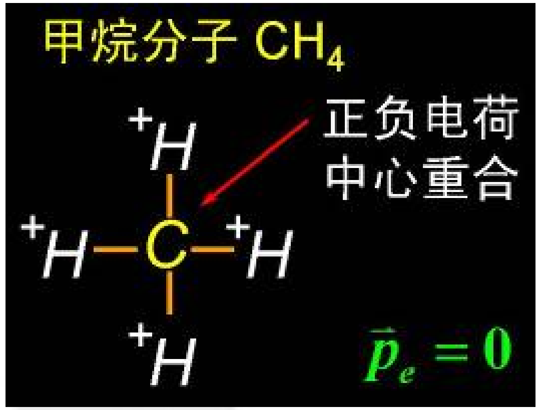




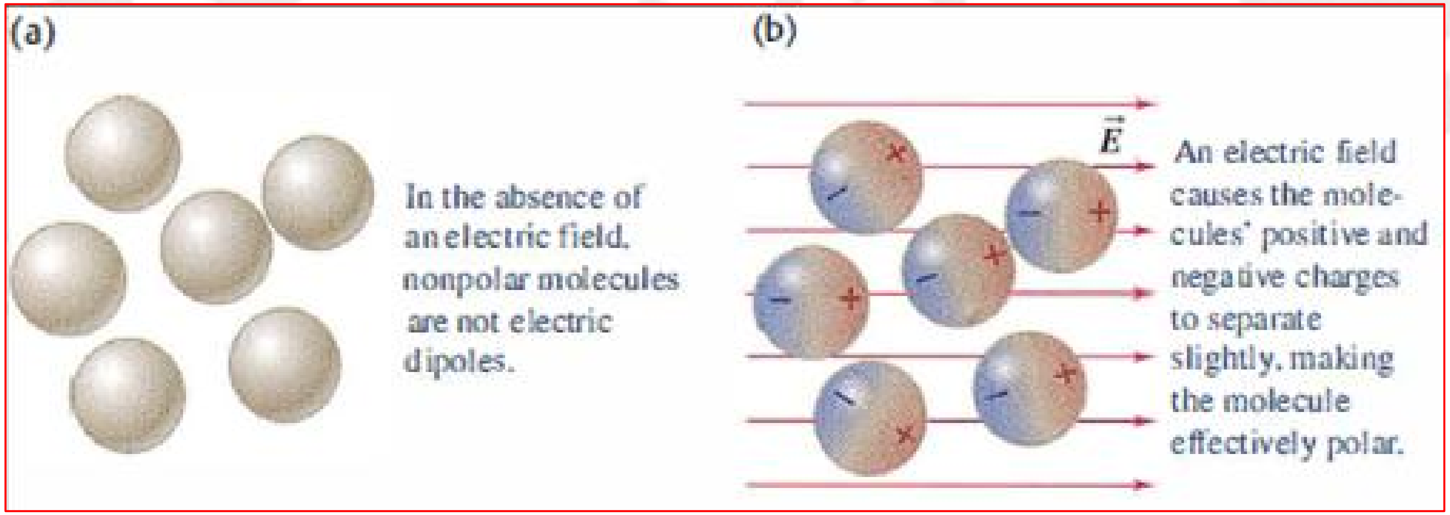
□ 非极性分子

位移量10^{-15}m

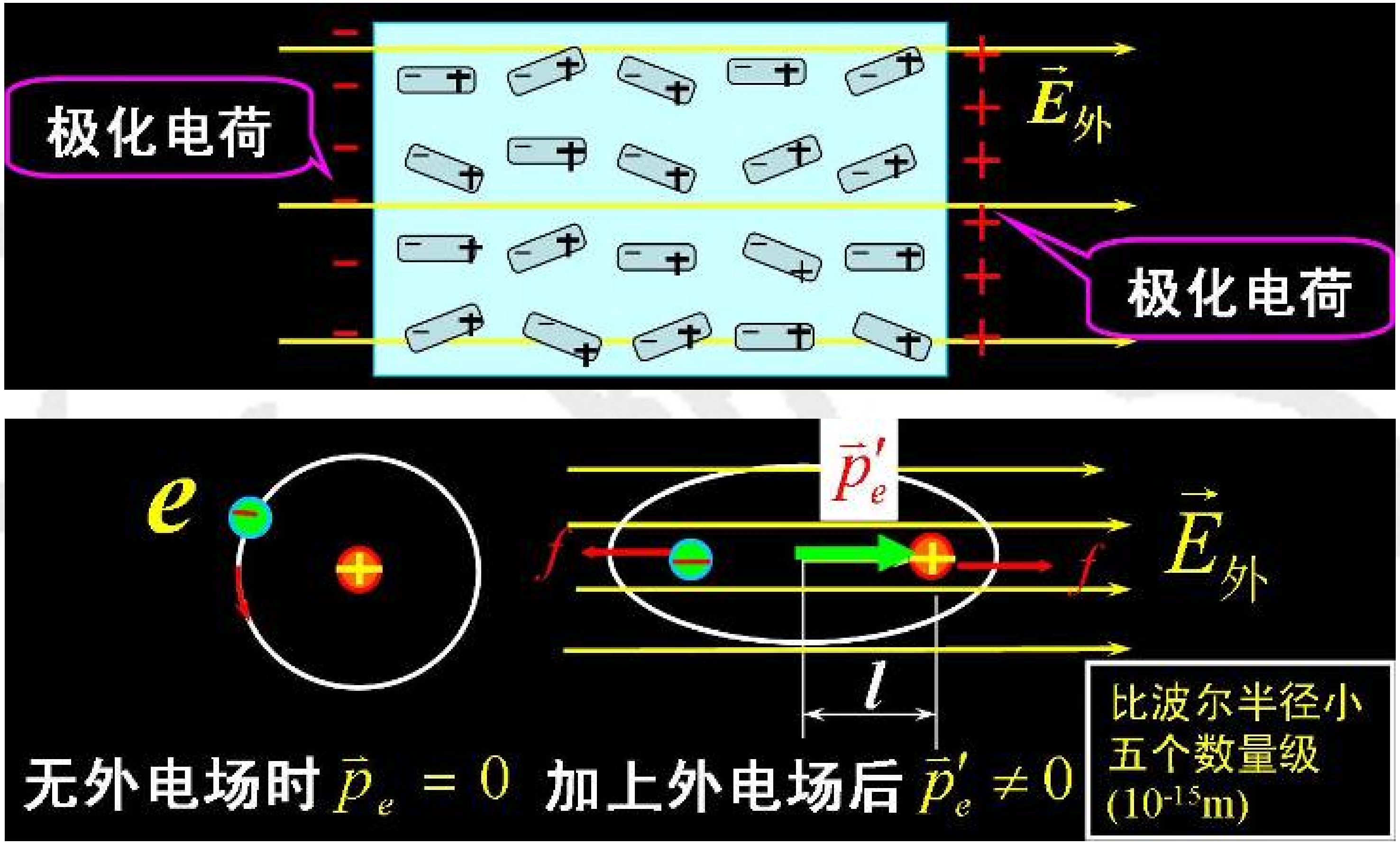




$p \sim e \times 10^{-15}\mathrm{m} \sim 1.6\times10^{-34}\mathrm{C\cdot m}$

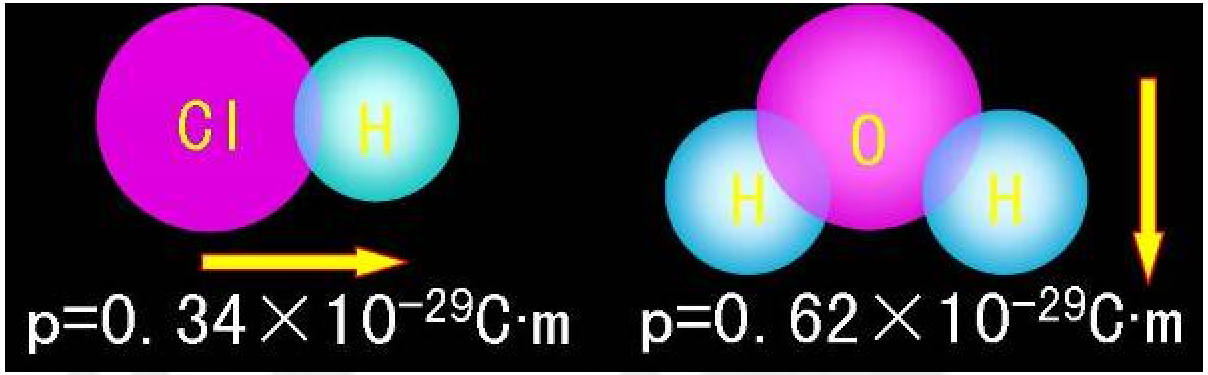


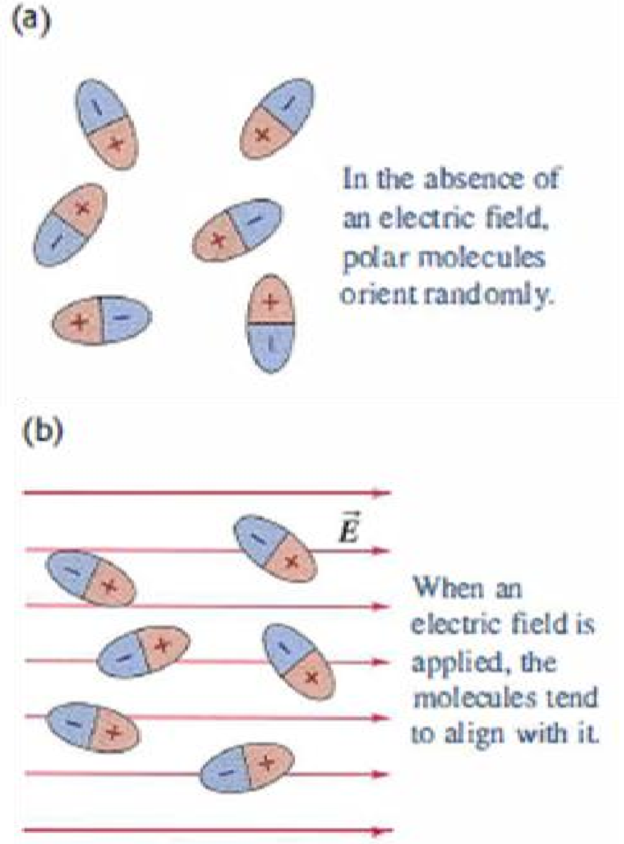
非极性分子：极化电荷与偶极矩估算



- 电子位移极化：外场下，电介质内各体积元中分子偶极矩的总和不等于零，呈电性。外场撤消后，电性消失。

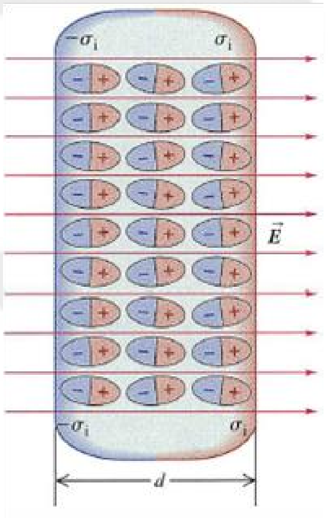
- 极性分子：分子正负电荷中心不重合
- 本身固有电偶极矩，如：HCl, H_2O, NH_3

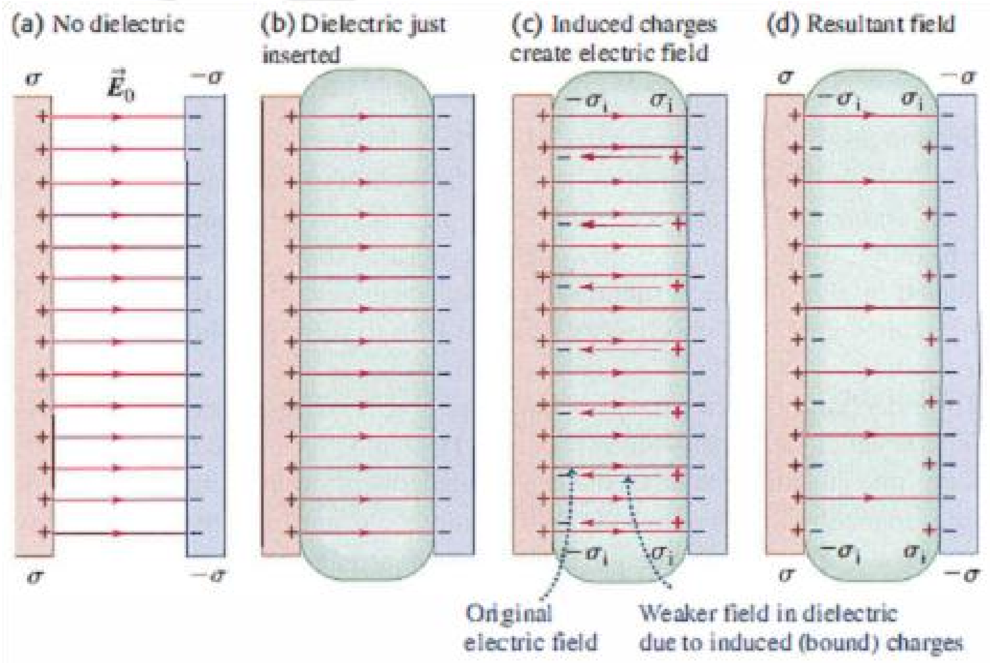




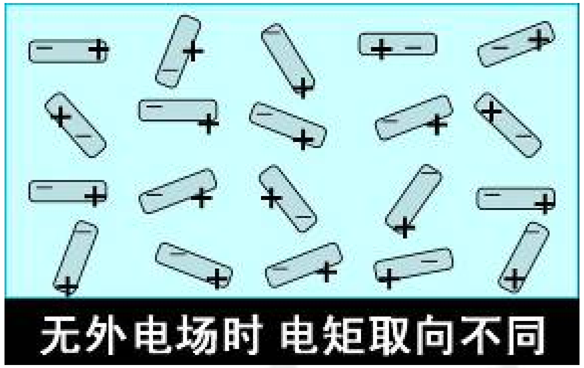
- 极性分子的性质：
- 分子电矩量级：e×(原子间隔) ~10^{-29}C·m
- 外场中偶极矩能量：$2pE$ ~2×10^{-4}eV
- 室温下热运动能量： 3/2kT ~0.04eV

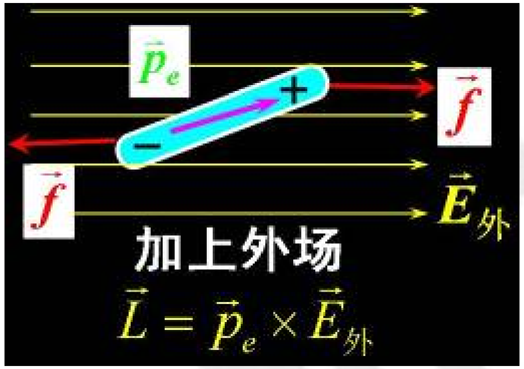
加电场极化：

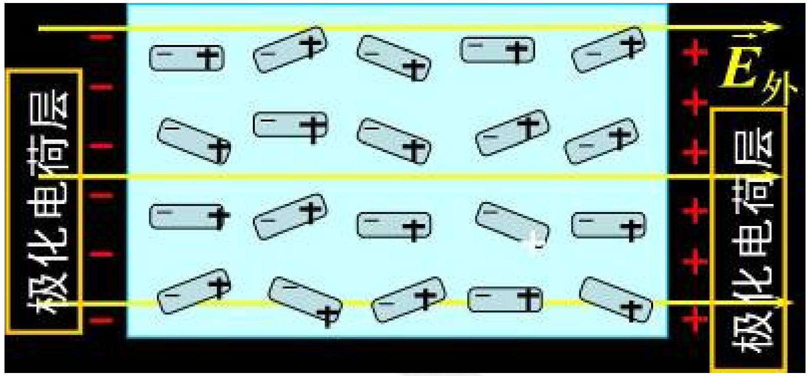

$-\sigma_i$
σ_i
$\vec{E}$
d


(a) No dielectric
(b) Dielectric just inserted
(c) Induced charges create electric field
(d) Resultant field
σ
$\vec{E}_0$
$-\sigma$
$-\sigma_i$
σ_i
Original electric field
Weaker field in dielectric due to induced (bound) charges

- 包含电子极化与分子取向极化：



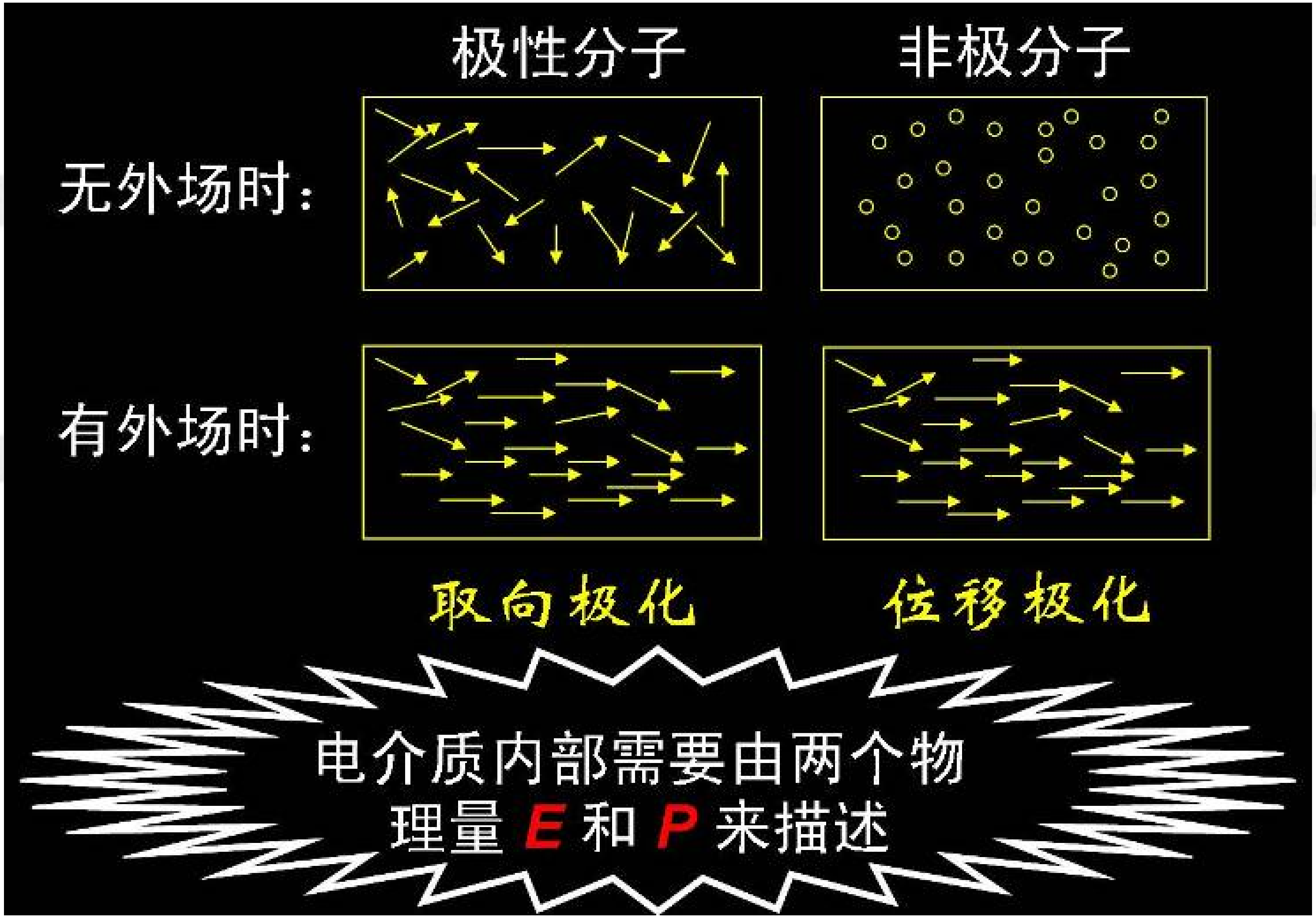




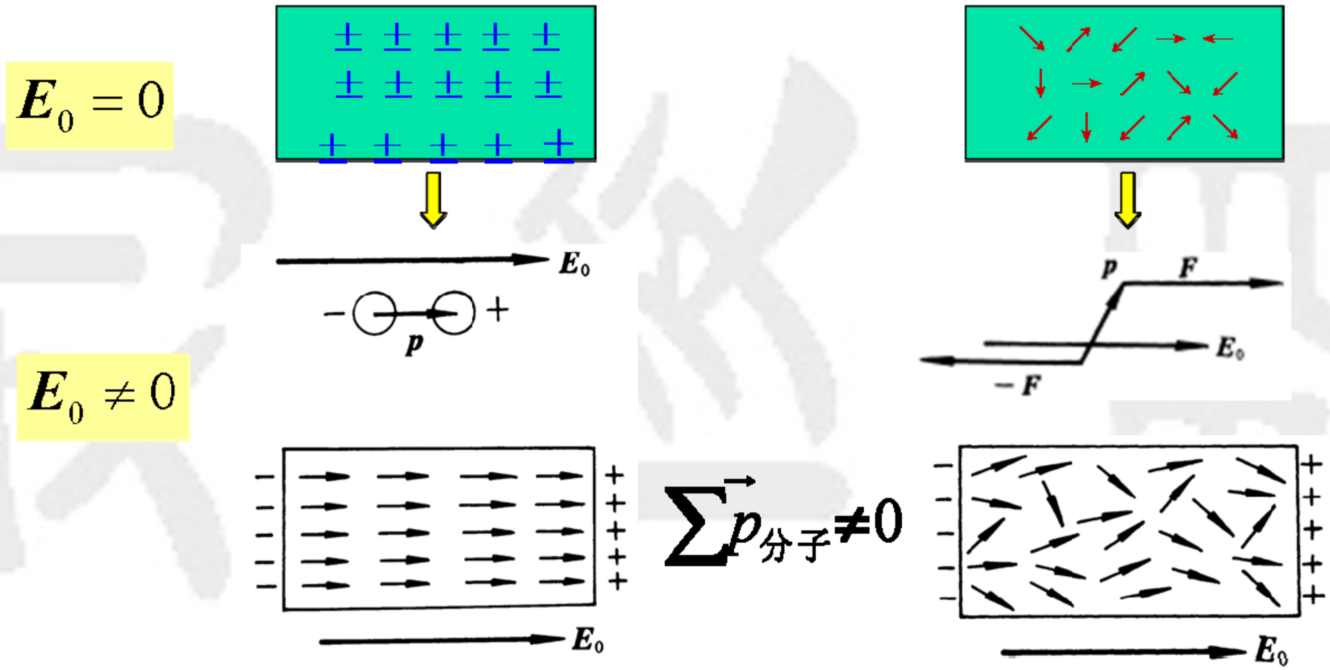
- 取向极化：外场下,电介质的分子偶极子倾向于沿电场方向排列,使得各体积元中分子偶极矩的总和不等于零。

- 种类：电子极化、分子取向极化、离子极化

电介质极化总结：



无极分子　　　　有极分子



极化性质：　位移极化　　　　取向极化+位移极化

后果：　出现极化电荷(不能自由移动) → 束缚电荷

电磁学03-02: 极化物理量

- 极化电荷 $Q'(\sigma', \rho')$:
- 极化后果：从原来处处电中性变成出现了宏观的极化电荷；
  可能出现在介质表面 (均匀介质)面分布；
  可能出现在整个介质中(非均匀介质)体分布。
- 极化电荷会产生电场——附加场(退极化场)。

外场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

极化电荷产生的场

- 极化过程中：极化电荷与外场相互影响、相互制约，过程复杂——达到平衡(不讨论过程)；
- 平衡时总场决定了介质的极化程度。

- 极化强度 ***P*** 是单位体积电偶极矩的代数和；
- ***P*** 由极化负电荷指向极化正电荷。

微观量、矢量

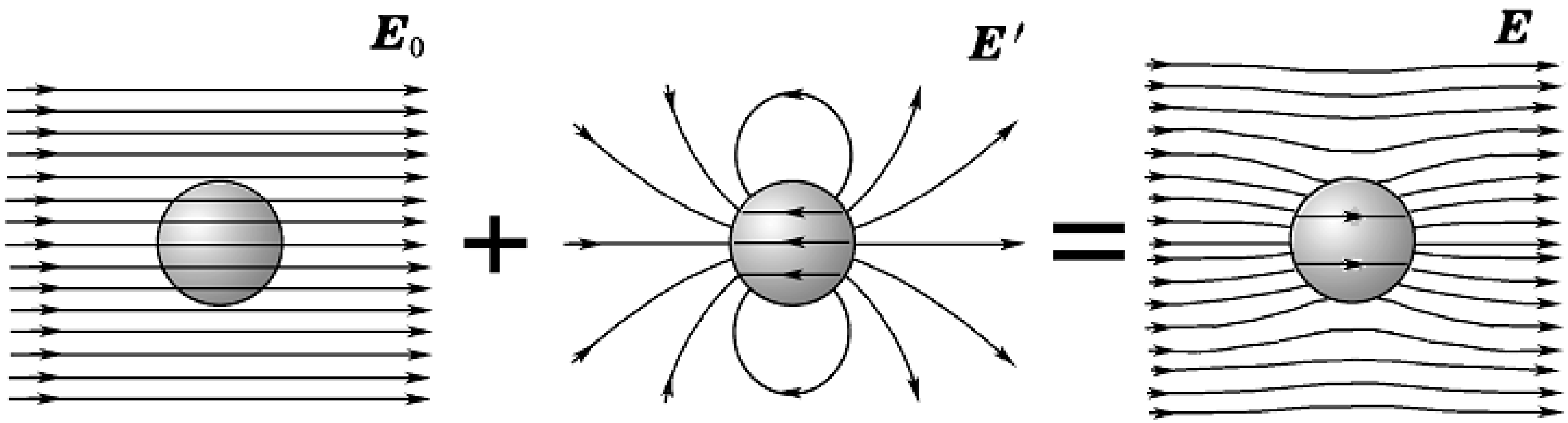
$$\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}_i}{d\tau}=\frac{\sum Q_i\vec{l}_i}{d\tau}$$

介质中一点的 ***P***(宏观量)

介质的体积，宏观小微观大(包含大量分子)

- 如果是非极性介质，有无外电场时极化强度 ***P*** 如何？
- 如果是极性分子，有无外电场时极化强度***P*** 如何？决定于温度 ***T*** ？

- 退极化场 E'：附加场
- 在电介质内部：附加场与外电场方向相反，削弱；
- 在电介质外部(特定空间)：附加场与外电场方向相同，加强。



- 三种物理表述：

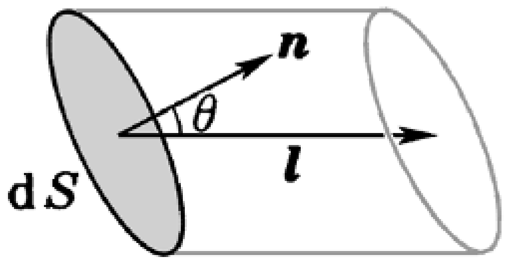
$$\left.\begin{cases}\vec{P}\\ Q'(\sigma',\rho')\\ \vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'\end{cases}\right\}\text{描绘极化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象——极化，之间必有联系，这些关系——电介质极化遵循的规律。

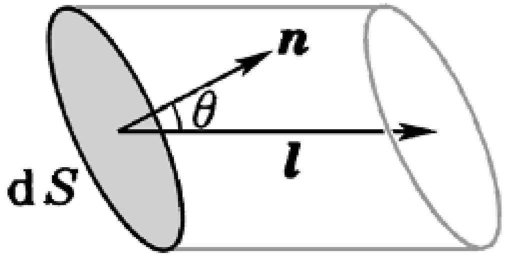
- 极化电荷 dQ'：穿过 dS 面元的偶极子电荷数目。
- P 与 Q' 的关系：
- 以位移极化为例，设介质极化时每一个分子中的正电荷中心相对于负电荷中心有一位移 l，用 q 代表正、负电荷的电量，则一个分子电偶极矩为 $P_{分子}$;
- 设单位体积内有n 个分子 —— n个电偶极子，则：

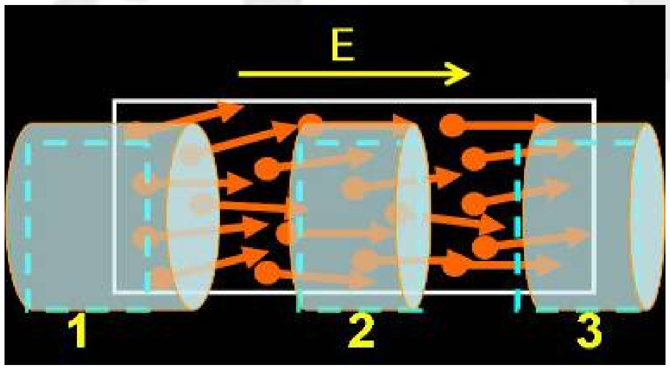
$$\vec{P}_{分子} = q\vec{l} \qquad \vec{P} = n\vec{P}_{分子} = nq\vec{l}$$

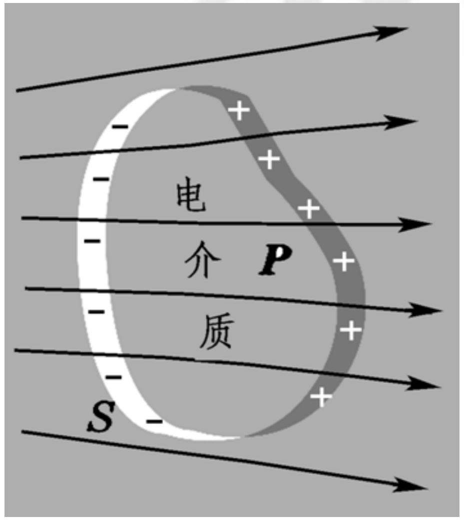
$$\Delta V = dSl\cos\theta$$



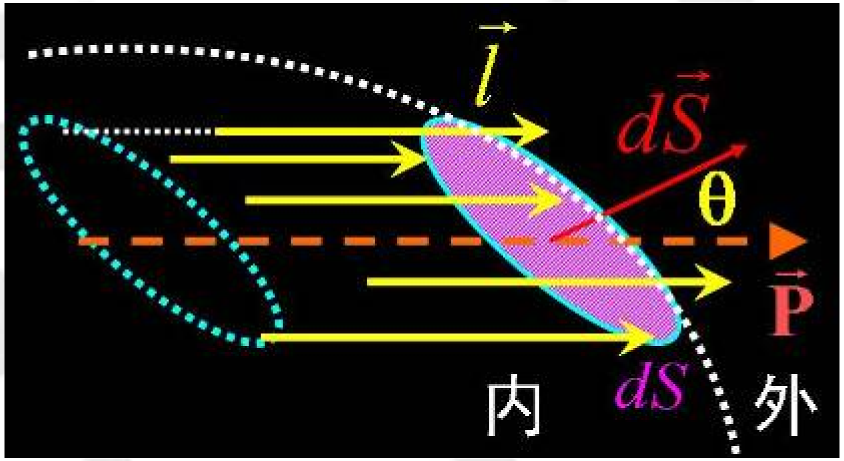
- 在介质内部任取一面元矢量d*S*，必有电荷因为极化而移动从而穿过 d*S*，从该柱体内穿出的极化电荷总量为 $|dQ'|$：

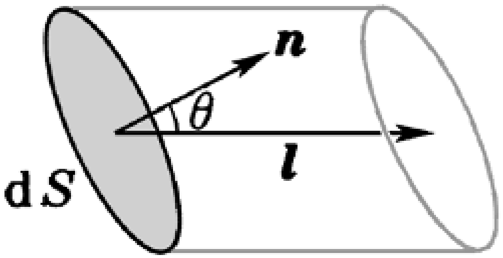






- 取闭合曲面*S*，以曲面外法线方向 ***n*** 为正，***P*** 经整个闭合面 ***S*** 的通量等于因极化穿出该闭合面的极化电荷总量 **Σ*q*′**。根据电荷守恒定律，穿出S的极化电荷等于S面内净余的等量异号极化电荷 **-Σ*q*′**。





P在dS上的通量

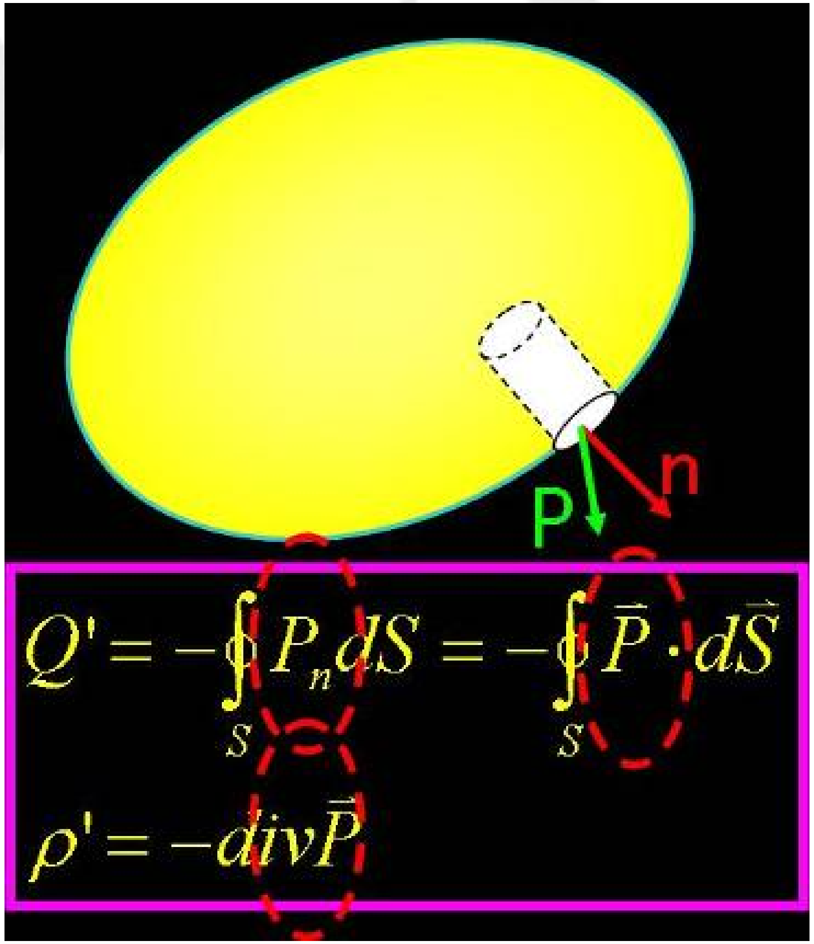
$$\therefore \left|dQ'\right| = nq\Delta V = nqldS\cos\theta = nq\vec{l}\cdot d\vec{S} = \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\therefore dQ' = -\vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = \sum_{\text{穿出}S\text{面}} q' = -\sum_{S\text{内}} q'$$

- 极化强度 ***P*** 沿闭合曲面的积分是极化电荷的负数：

$$Q' = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \rho' = \lim_{\Delta V\to\infty} -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}/\Delta V = -div\vec{P} = -\nabla\cdot\vec{P}$$



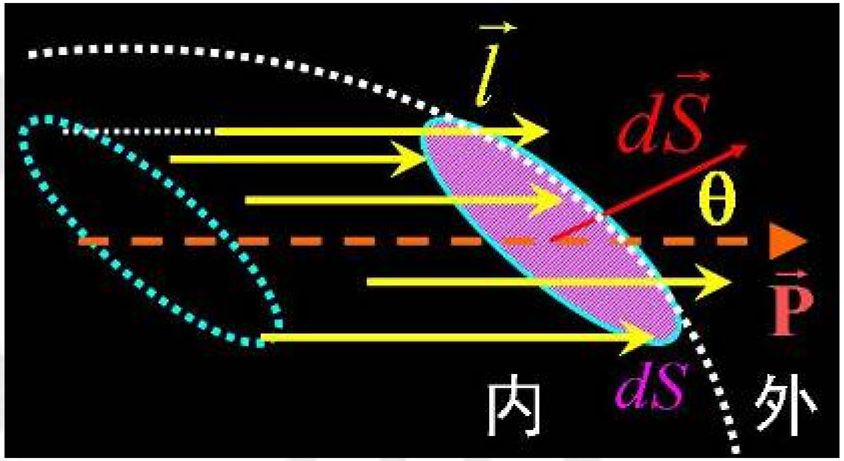
- 极化电荷面密度 σ'：在均匀介质表面取一面元如图，则因极化而穿过面元dS的极化电荷数量为：

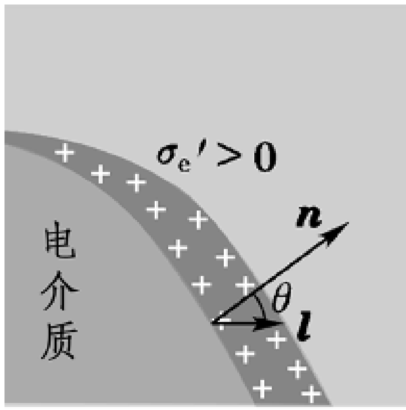
$$|dQ'| = |\vec{P}\cdot d\vec{S}| = P_n dS$$

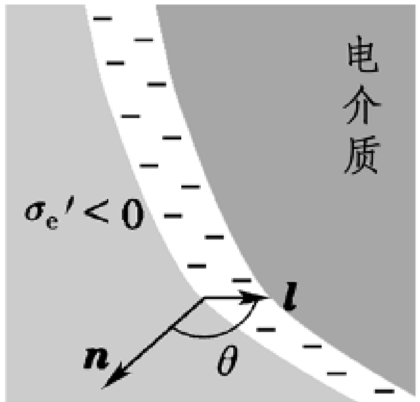
$$|dQ'| = \sigma'_e dS = nqdV$$

$$= nq(ldS\cos\theta) = nq\vec{l}\cdot d\vec{S} = \vec{P}\cdot\vec{n}dS$$

$$\sigma' = \frac{dQ'}{dS} = P_n = \vec{P}\cdot\hat{n}$$







- 微观场与宏观场的定义：
  - 在原子、分子、电偶极子尺度，且库仑定律依然适用前提下，我们“探测”到的电场及其分布---微观场(它可以大幅度涨落)；
  - 宏观尺度下，对微元中的微观场求得的平均场---宏观场。

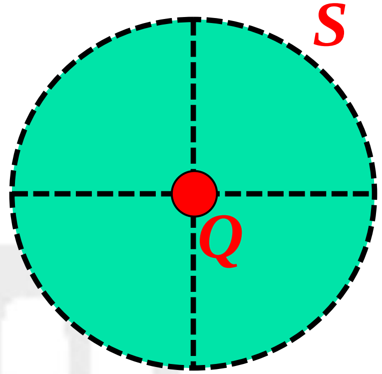
- 介质方程：库仑定律在10^{-15}m尺度依然有效，因此微观场满足真空静电学，有电场 $\boldsymbol{E_m}$ 和电荷密度 $\boldsymbol{\rho_m}$，

$$\oint_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 0, \quad \oint_S \vec{E}_m \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_m d\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{f}) = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \int \overline{f} dx = \overline{\int f dx}$$

$$\because \overline{\oint_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l}} = \oint_L \overline{\vec{E}_m} \cdot d\vec{l}, \quad \overline{\oint_S \vec{E}_m \cdot d\vec{S}} = \oint_S \overline{\vec{E}_m} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{E} = < \vec{E}_m >$$

- 容易出现“悖论”：针对一个电荷 **Q**，应用下式



$$\overline{\oint_S \vec{E}_m \cdot d\vec{S}} = \oint_S \overline{\vec{E}_m} \cdot d\vec{S} \qquad ????$$

$$\overline{\oint_S \vec{E}_m \cdot d\vec{S}} = Q/\varepsilon_0 > 0, \qquad \oint_S \overline{\vec{E}_m} \cdot d\vec{S} = \oint_S 0 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\because \overline{\oint_S \vec{E}_m \cdot d\vec{S}} = \overline{\sum_{i=1}^{N\to\infty} Q/\varepsilon_0} = 0, \qquad \therefore \overline{\oint_S \vec{E}_m \cdot d\vec{S}} = \oint_S \overline{\vec{E}_m} \cdot d\vec{S}$$

- 微观场是针对物质内部大数的等量正负电荷体系。

- 因此，对于宏观场，有：

$$\therefore \begin{cases} \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V \overline{(\rho_{m0}+\rho'_m)}\,d\tau = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V (\rho_0+\rho')\,d\tau = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_S (Q_0+Q') \end{cases}$$

宏观极化电荷密度

宏观极化电荷

微观电荷密度平均值

宏观自由电荷密度

宏观自由电荷

- 上式为有介质时宏观环路定理和高斯定理，也可写成微分形式：

$$\therefore rot\vec{E} = 0, \quad div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_0+\rho')$$

介质中的电势:

E_0 E'

$$\vec{E} = \left\langle \vec{E}_m \right\rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_0 \vec{r}}{r^3} d\tau + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho' \vec{r}}{r^3} d\tau$$

$$\vec{E}_m = -\nabla U_m \Rightarrow \vec{E} = <\vec{E}_m> = -\nabla U$$

电感应强度 *D*:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V (\rho_0+\rho')\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S (Q_0+Q')$$

$$\therefore \int_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -Q' = -\int_V \rho' d\tau, \quad \therefore \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho' d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0 d\tau$$

$$\therefore \oint_S (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 d\tau = \sum_{s内} Q_0 \Rightarrow \oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} Q_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

电感应强度
电位移矢量

- 电感应线源于正自由电荷，终止于负自由电荷。

- 归纳总结电介质静电场：

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\Rightarrow \text{电感应强度}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \Leftrightarrow rot\vec{E}=0 \Rightarrow \text{环路定理} \Leftarrow \oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}\neq 0$$

$$\left.\begin{aligned}&\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V(\rho_0+\rho')d\tau \Leftrightarrow div\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_0+\rho')\\&\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho_0 d\tau=\sum_{s内}Q_0 \Leftrightarrow div\vec{D}=\rho_0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{高斯定理}$$

- 引入辅助量 ***D*** 是一个手段，在静电场中作用不大；
- ***D*** 和 $\boldsymbol{\varepsilon_0 E_0}$ 在本质上是不同的，在普遍的情况下不能相互代替。

- 顾名思义，极化率是 ***P*** 对电场 ***E*** 的响应，因此：

$$\begin{cases}\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}\\ P=\varepsilon_0\chi^{(1)}E+\varepsilon_0\chi^{(2)}E^2+\varepsilon_0\chi^{(3)}E^3+\dots\end{cases}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi\vec{E}=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\varepsilon_r=1+\chi,\quad \varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$$

各向同性介质

- 极化率χ无量纲，体现了电偶极矩的响应程度；
- ***E***为合场强：电偶极子产生的电场与外场叠加；
- 介电常数的概念。

$$\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oint_S \varepsilon_0\chi\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$-\sum_{S内}Q'=\chi\sum_{S内}(Q_0+Q')$$

$$\sum_{S内}Q'=-\frac{\chi}{1+\chi}\sum_{S内}Q_0$$

- 介质中自由电荷与极化电荷的关系？循环论证？

- 与计算真空静电场比较，电介质静电场计算更为复杂，但基本思路一致；
- 可以充分利用对称性来做简化，然后利用环路定理与高斯定理：

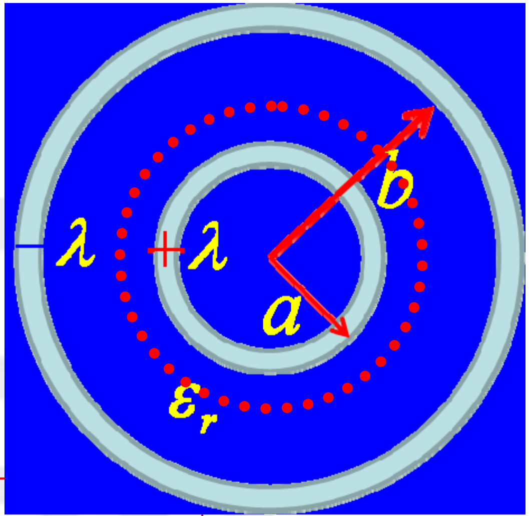
$$\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l} = \oint_L (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{P}\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{P}\cdot d\vec{l} \neq 0$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} Q_0 \quad \text{(free charges)}$$

- 【例p.114】求 (1) D, E & P；(2) 极化电荷分布及对应的场强；(3) 电容。

  a) 对称性分析：电矢量沿径向方向分布；

  b) 作高斯柱面，应用高斯定理；



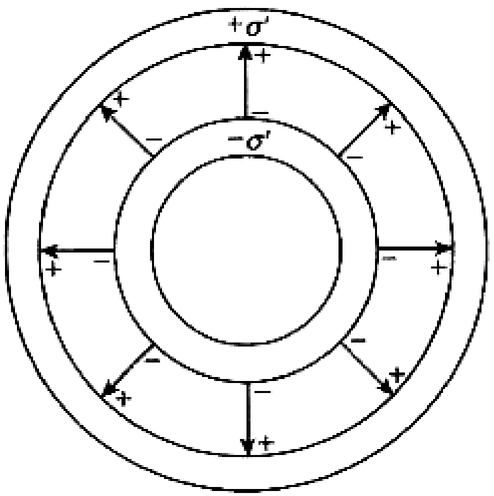
$$Q_0 = \lambda L \Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r L D \Rightarrow D = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (a<r<b)$$

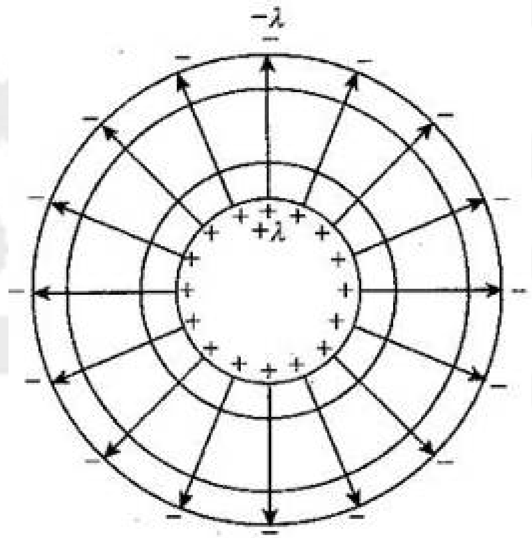
$$\because D = \varepsilon_0\varepsilon_r E, \quad \therefore E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi r} \quad (a<r<b)$$

$$\because D = \varepsilon_0 E + P, \quad \therefore P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\lambda}{2\pi r} \quad (a<r<b)$$

- 极化电荷由电容器正负极上的自由电荷诱发，只存在于介质与电极界面处。

- 既然是自由电荷诱发的，极化电荷一定取如下分布(附加 E_0 的分布):





- 计算电容:

$$\Delta U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}\Rightarrow C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(b/a)}\Rightarrow C=\varepsilon_r C_0$$

- 含电介质的电容器电能：

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}Q(U_1-U_2)=\frac{1}{2}C(U_1-U_2)^2$$

以平板电容器为特例

$$\boxed{w=\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0E^2}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0E^2$$

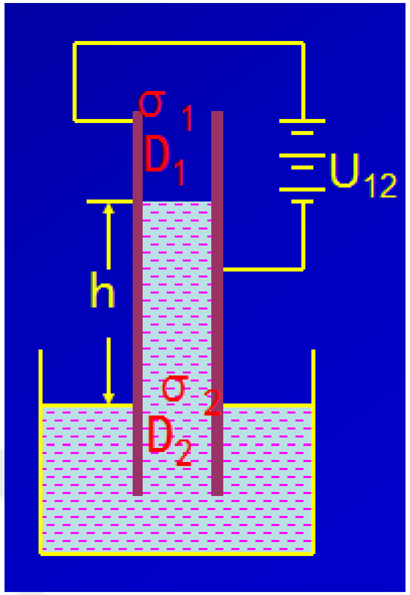
本来意义的电场能

微观位形变化能

- 功能原理：电源供给系统能量用于增加电能 **dW** 并对外做功 **dA**

$$\sum U_i dQ_i = dW + dA$$

- 【p.118例】将一平行板电容器的两板竖直的插在液态电介质中，两板间保持一定的电势差 U_{12}，试求液面上升的高度。(重力与电场力的平衡)



$$\begin{cases} dQ = b(\sigma_2 - \sigma_1)dh = b(D_2 - D_1)dh = b\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)Edh \\ dW = (\dfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 - \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2)Sdh \\ dA = Sfdh \end{cases}$$

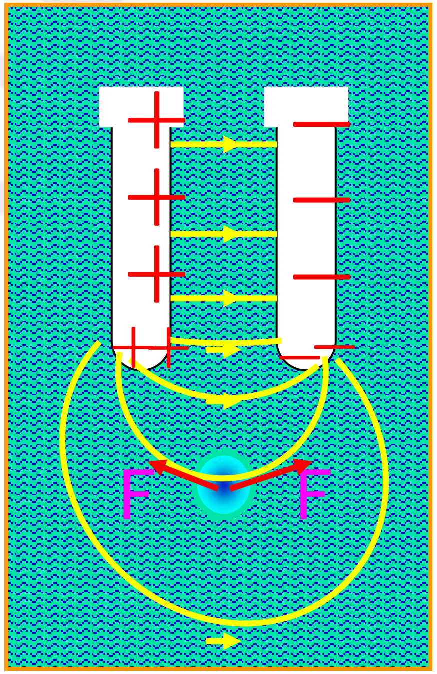
$$U_{12}dQ = dW + dA$$

$$U_{12} = E\cdot(\frac{S}{b})$$

$$f = \rho g h$$

$$f = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2$$

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}{2\rho g} = \frac{\varepsilon_0 \chi U_{12}^2}{2\rho g a^2}$$



- 注意：液面上升过程有能量耗散

- 【例2.2.1】自由电荷 q_1 和 q_2 放在电容率为 ε 的无穷大电介质中，相距为 r。求 q_1 作用于 q_2 上之力，q_2 之受力：
  - 考虑到 q_2 引起的极化电荷 q'_2 围绕 q_2 周围，球面对称，因此 q'_2 对 q_2 的作用力合力为零。
  - 剩下的是 q_1 和 q_1 周围极化电荷 q'_1 对 q_2 的作用力。

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{12}$$

$$\because q' = -\frac{\chi}{1+\chi}q, \quad \therefore q'_1 = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)q_1 \ \& \ q'_2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)q_2$$

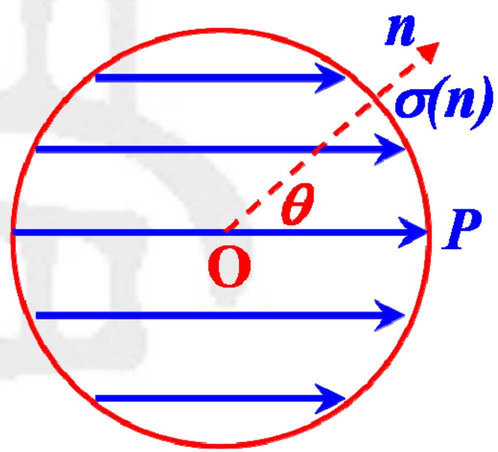
$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}'_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{12}$$

- 【例2.2.17】均匀介质球在均匀极化后极化强度 **P**，求表面极化电荷面密度；球心电场强度。

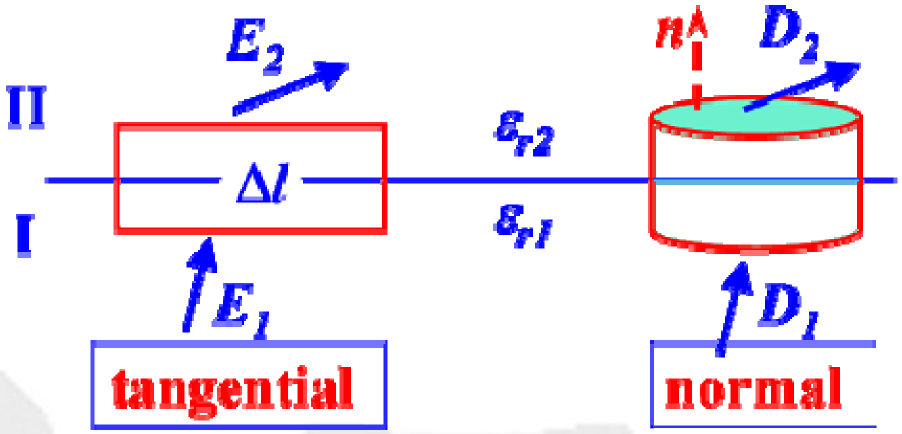
$$\sigma'(\vec{n}) = \vec{n}\cdot\vec{P} = P\cos\theta$$

$$dq' = \sigma' dS = 2\pi R^2 P\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$dE' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'}{R^2}\cos\theta \Rightarrow E' = \frac{P}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}' = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$$



- 两种电介质 ε_{r1}, ε_{r2}，假定无界面自由电荷 Q_0
- 静电场物理量在界面过渡问题



- 沿界面内任意方向 Δl 应用环路定理：折射行为

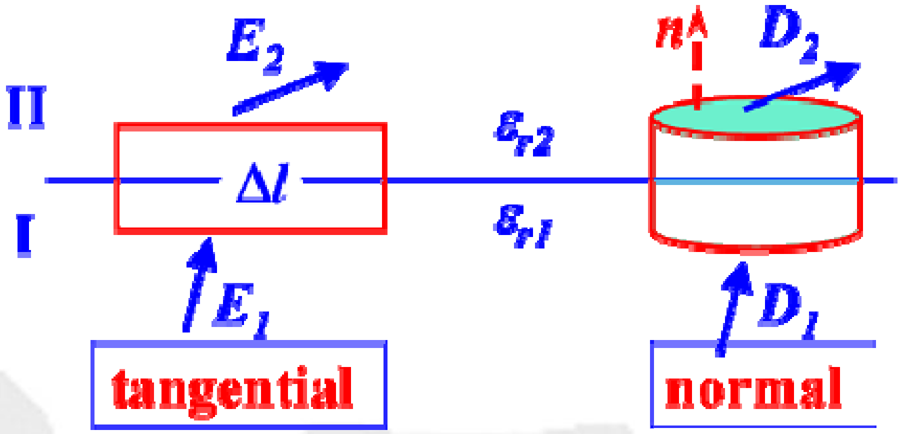
$$\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l} - \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l} = 0 \Rightarrow (E_1 \cos\theta_1 - E_1 \cos\theta_2) = 0$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \Rightarrow \text{coplanar behavior}$$

$$\because \vec{D}_i = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_i$$

$$\therefore \frac{\vec{D}_{1t}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{\vec{D}_{2t}}{\varepsilon_{r2}}$$

- 因界面无自由电荷，沿界面法线方向 n 微元应用高斯定理(为什么不能对 E 用高斯定理？[因为对 E 的高斯定理右边含有极化电荷]):

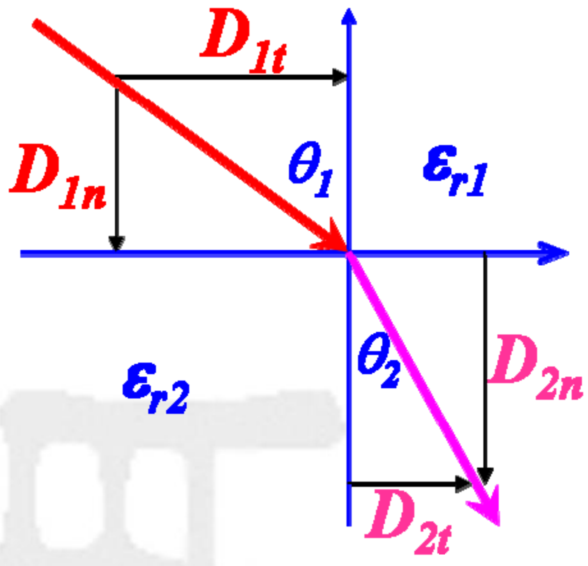


$$\vec{D}_2\cdot\vec{n}dS-\vec{D}_1\cdot\vec{n}dS=\sigma_0 dS\Rightarrow D_{2n}-D_{1n}=\sigma_0$$

$$D_{1n}=D_{2n}\Rightarrow\frac{E_{1n}}{\varepsilon_{r2}}=\frac{E_{2n}}{\varepsilon_{r1}}$$

注意：法向分量可看成标量，而切线分量还是矢量

- 将电感应强度的切向与法向分量几何化，即得到右图的折射类比：

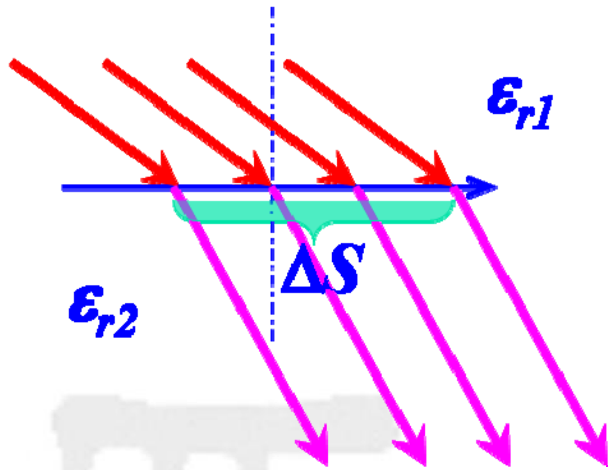


$$\tan\theta_1 = D_{1t} / D_{1n}, \quad \tan\theta_2 = D_{2t} / D_{2n}$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} \cdot \frac{D_{2n}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

- 上面显示的是 ***D*** 线折射，也是 ***E*** 线折射，类比于光折射！
- 注意到光是电磁波，光的折射率与介电常数有比例关系：**n=√ε**，当然，这里折射率是静态条件下的，而光折射论及光频下的介电常数，有所不同。

- 电感应线与电场线问题：穿越介质界面处的D线和E线决定于各自法向分量：



$$\because D_{1n} = D_{2n}, \quad \therefore N_{D1} = \Delta S \cdot D_{1n} = N_{D2}$$

$$\because E_{1n} \neq E_{2n}, \quad \therefore N_{E1} = \Delta S \cdot E_{1n} \neq N_{E2}$$

- 界面处电感应线连续、电场线不连续。

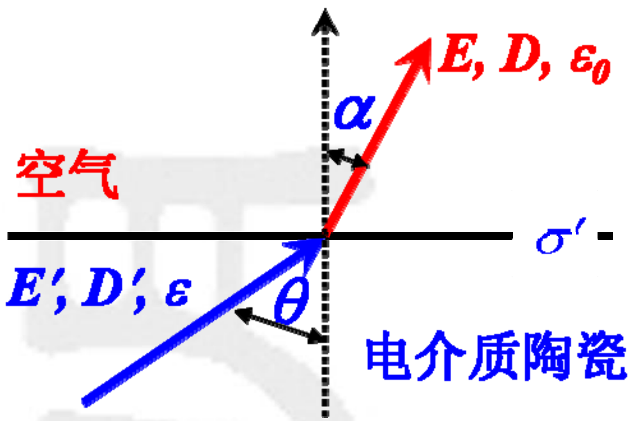
- 【例2.2.18】求 D', E', σ':

on interface: $E_t = E_t'$, $D_n = D_n'$

$\therefore E'\sin\theta = E\sin\alpha$, $D'\cos\theta = D\cos\alpha$

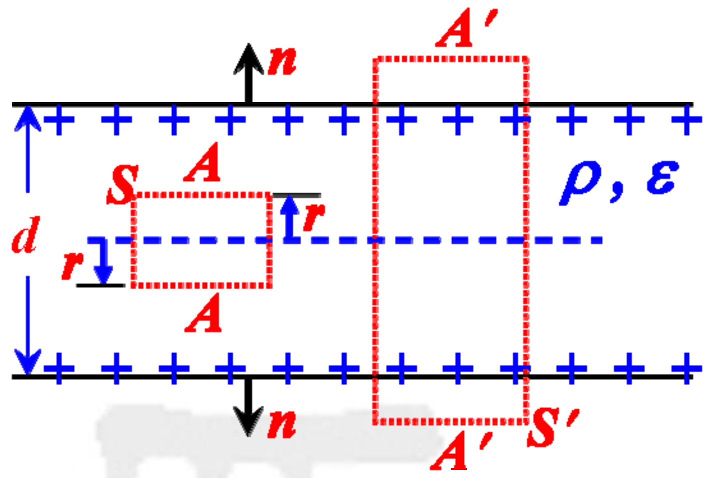
$\because D = \varepsilon E = \varepsilon_0\varepsilon_r E$, $\sigma' = P\cos\theta$

$\Rightarrow E', D', \sigma'$



□ 【例2.2.24】无限大均匀介质平板分布着体密度为 ρ 的均匀自由电荷。求板内外的 E, D, P, ρ', σ'。

对称性决定对称面在板中面处，那里E相等、D相等，且垂直于板面。

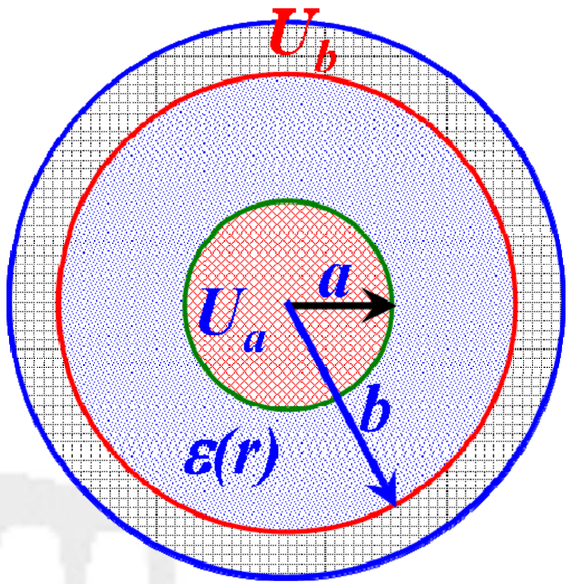


for Gauss closed surface S $(t=\varepsilon_0/\varepsilon)$:

$$\begin{cases}\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2DA = 2Ar\rho \Rightarrow \\ \vec{D} = \rho\vec{r} \\ \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon = \rho\vec{r}/\varepsilon \\ \vec{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E} = (1-t)\rho\vec{r} \\ \rho' = -(1-t)\rho \\ \sigma'_{r=d/2} = \vec{n}\cdot\vec{P}_{r=d/2} = (1-t)d\rho/2 \end{cases}$$

for Gauss closed surface S':

$$\begin{cases}\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2DA' = \rho A'd \Rightarrow \\ \vec{D} = \rho d\cdot\vec{n}/2 \\ \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon_0 = \rho d\cdot\vec{n}/2\varepsilon_0 \\ \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = 0 \\ \rho' = -\nabla\cdot\vec{P} = 0 \\ \sigma'_{r>d/2} = \vec{n}\cdot\vec{P}_{r>d/2} = 0 \end{cases}$$



- 【例2.2.31】金属球 **a** 和球壳 **b**，电介质 **ε(r)~rⁿ**。已知电势 U_a 和 U_b，求离球心距离为 **r** 处的电势。

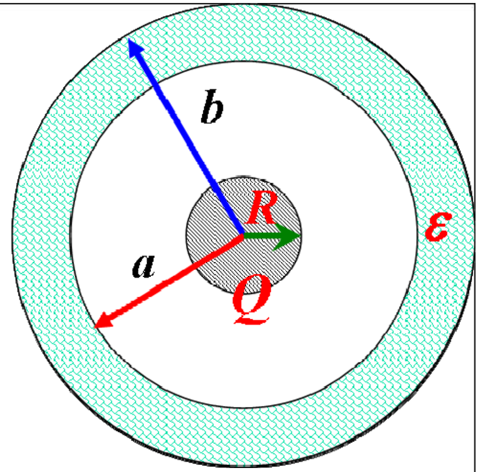
设球带电 **q**，作高斯面处理：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon = \vec{D}/Cr^n = \frac{q}{4\pi C}\frac{\vec{r}}{r^{3+n}}$$

$$\because U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi(n+1)C}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(ab)^{n+1}}$$

$$\therefore U_a - U_r = \int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi(n+1)C}\frac{r^{n+1}-a^{n+1}}{(ar)^{n+1}}$$

$$\therefore U_r = f(r,\ U_a,\ U_b)$$



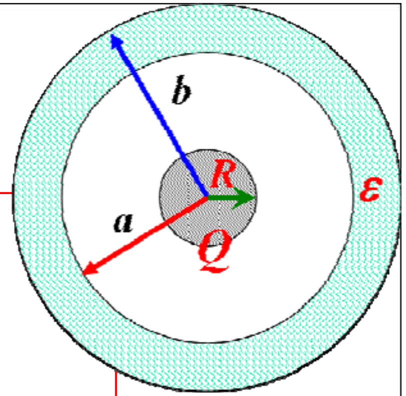
- 【例2.2.35】金属球带电Q，外有介电球壳，求空间各处的 E, D, P, ρ', σ'和U:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0, & r<R \\ Q, & r>R \end{cases} \Rightarrow D = \begin{cases} 0, & r<R \\ \dfrac{Q}{4\pi r^3}\vec{r}, & r>R \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} 0, & r<R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}, & R<r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}, & a<r<b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}, & r>a \end{cases}$$

电场是跳跃的！

电磁学03-09: 电介质物理问题



$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \begin{cases} 0, \; R < r < a \\ \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\vec{r}}{r^3}, \; a < r < b \\ 0, \; r > b \end{cases}$$

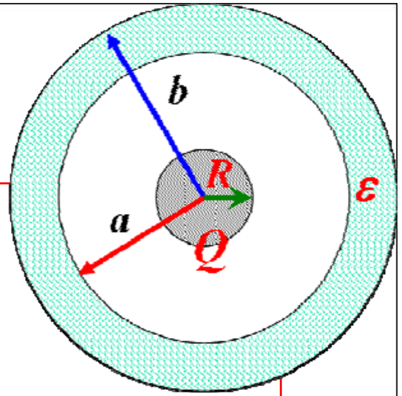
$$\rho' = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon}\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right), \; a < r < b$$

$$\because \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\nabla^2\frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{r}) = 0 \;\; \text{if } \vec{r} \neq 0 \quad \therefore \rho' = 0, \; a < r < b$$

$$\sigma_a' = \vec{n}_a\cdot\vec{P}_a = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{n}_a\cdot\vec{r}}{r^3}\bigg|_{r=a} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon a^2}$$

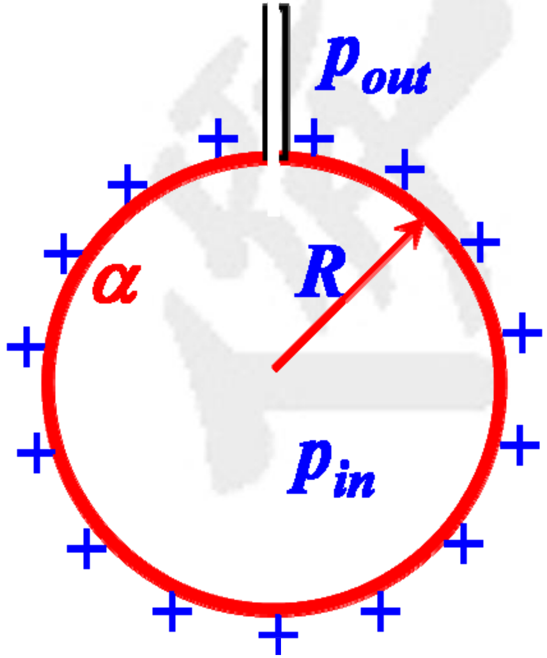
$$\sigma_b' = \vec{n}_b\cdot\vec{P}_b = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{n}_b\cdot\vec{r}}{r^3}\bigg|_{r=b} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon b^2}$$

电磁学03-09: 电介质物理问题



$$U=\begin{cases} r\ge b \Rightarrow \int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ a\le r\le b \Rightarrow \int_r^{b}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_b^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\dfrac{Q}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\varepsilon r}-\dfrac{1}{\varepsilon b}+\dfrac{1}{\varepsilon_0 b}\right) \\ R\le r\le a \Rightarrow \int_r^{a}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_a^{b}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_b^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}= \\ \qquad =\dfrac{Q}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0 r}-\dfrac{1}{\varepsilon_0 a}+\dfrac{1}{\varepsilon a}-\dfrac{1}{\varepsilon b}+\dfrac{1}{\varepsilon_0 b}\right) \\ r\le R \Rightarrow \int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{R}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_R^{a}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_a^{b}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_b^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}= \\ \qquad =\dfrac{Q}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0 R}-\dfrac{1}{\varepsilon_0 a}+\dfrac{1}{\varepsilon a}-\dfrac{1}{\varepsilon b}+\dfrac{1}{\varepsilon_0 b}\right) \end{cases}$$

- 【例2.2.41】肥皂泡问题：表面张力 α、内压强 p_{in}、外压强 p_{out} 讨论尺寸问题、最小肥皂泡半径、等等

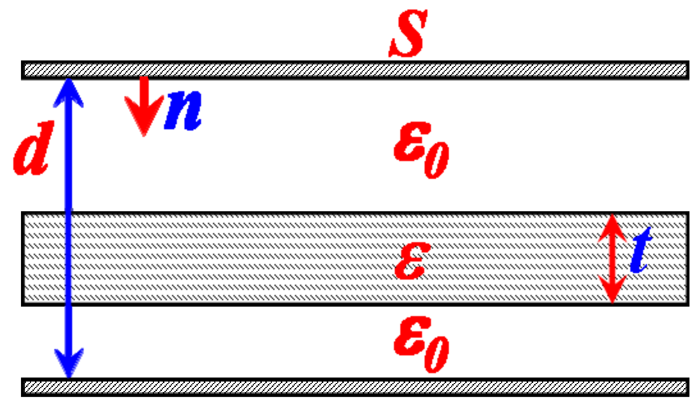


- 表面张力(单位面积)

$$\vec{f} = \frac{4\alpha}{R}\vec{n}$$

- 静电力(单位面积)

$$\vec{f} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$



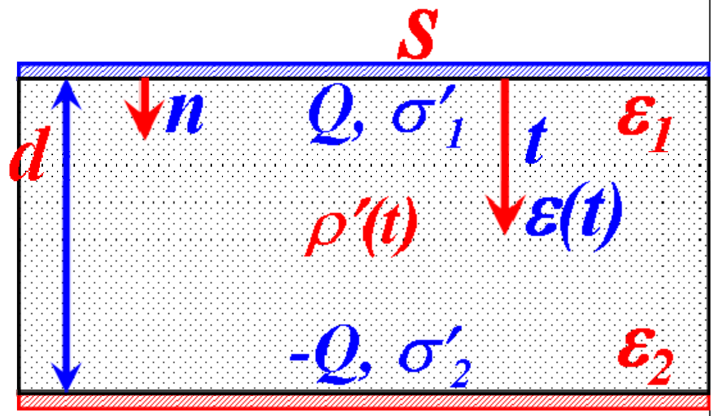
- 【例2.3.8】平行板电容器，求电容 *C*、电势差*U*，讨论极端情况

$$\text{Gauss law: } \vec{D} = \frac{Q}{S}\vec{n} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \vec{D}/\varepsilon = \dfrac{Q}{\varepsilon S}\vec{n} \text{ inside } \varepsilon \\ \vec{D}/\varepsilon_0 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{n} \text{ outside } \varepsilon \end{cases}$$

$$U = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-t) + \frac{Q}{\varepsilon S}t = \frac{Q}{S}\frac{\varepsilon(d-t)+\varepsilon_0 t}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

$$C = Q/U = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{\varepsilon(d-t)+\varepsilon_0 t}$$

- 金属板 $\varepsilon \to \infty$，或者作为电容串联求解。几何尺寸 $t \to 0$, $t \to d$。



【例2.3.11】平行板电容器，*ε(t)* 线性变化，求电容 *C*，极板电荷为 ±Q 时的 *ρ′* 和 *σ′*，讨论极端情况

$$\varepsilon(t)=kt+\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon(t)=\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}t$$

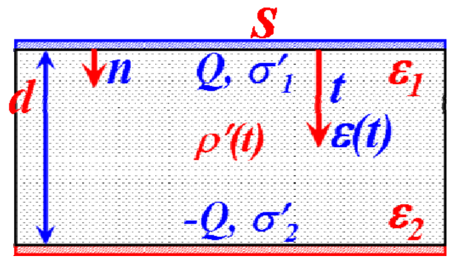
$$U=\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon(t)}dt=\frac{Qd}{S}\int_0^d \frac{dt}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)t+\varepsilon_1 d}=\frac{Qd}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)S}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$C=Q/U=\frac{S}{d}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}$$

$$\because \lim_{\varepsilon_2\to\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}=\lim_{\varepsilon_2\to\varepsilon_1}\frac{d}{d\varepsilon_1}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\bigg/\frac{d}{d\varepsilon_1}\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)=\varepsilon_1$$

$$\therefore C=\frac{\varepsilon_1 S}{d}\ \text{as}\ \varepsilon_2\to\varepsilon_1$$

电磁学03-09: 电介质物理问题



$$\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}=\frac{Q}{S}\vec{n}-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{Q}{S}\vec{n}=\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{S}\vec{n}$$

$$\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}=-\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{S}=\frac{\varepsilon_0 Q}{S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=-\frac{\varepsilon_0 Q}{S}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$$

$$=-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\varepsilon_0 Qd}{[(\varepsilon_2-\varepsilon_1)t+\varepsilon_1 d]^2 S}=f(t)$$

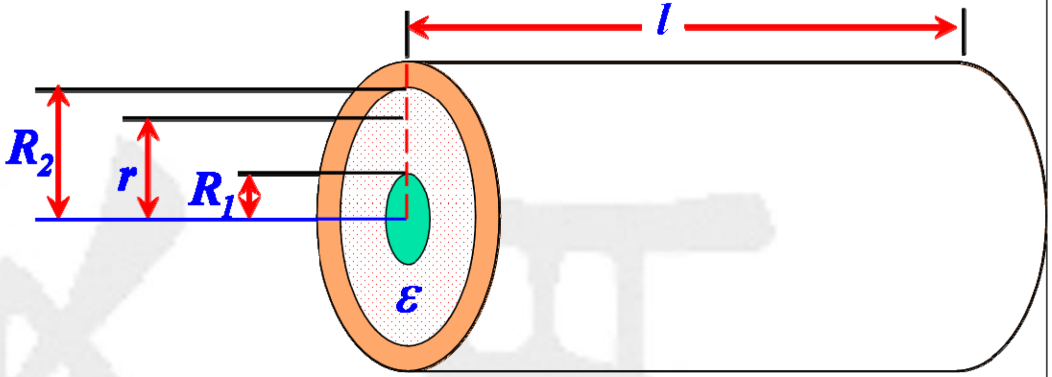
$$\sigma_1'=\vec{n}_1\cdot\vec{P}_1=-\vec{n}\cdot\vec{P}=-P_{t=0}=-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\frac{Q}{S}$$

$$\sigma_2'=\vec{n}_2\cdot\vec{P}_2=\vec{n}\cdot\vec{P}=P_{t=d}=\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\frac{Q}{S}$$

请讨论极限情况！

- 【例2.3.23】圆柱电容器，轴向电荷λ，求空间各处的 **E, D, P, ρ', σ'**和**U**、**C**，讨论极端情况

作同轴线圆柱高斯面 S



$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r l \cdot D = \lambda l \Rightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}, \quad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}$$

$$\rho' = -\nabla\cdot\vec{P}, \quad \sigma_1' = \vec{n}_1\cdot\vec{P}_1, \quad \sigma_2' = \vec{n}_2\cdot\vec{P}_2, \quad U = \int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$C = Q/U = \lambda l/U = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$$

- 惟一性定理 (省略)

- 作业：3.2，3.3，3.9，3.17，3.23

- 【一题44】在 $z\leq 0$ 的半空间中充满了相对电容率为 ε_r 的介质，在 $z>0$ 的半空间为真空。其中在 $z=h_1$ 处有一点电荷 q。用外力将此点电荷从 $z=h_1$ 处缓慢地移动到 $z=h_2$ 处，求外力所需做功。
- 一个半径为 R 的电介质球，极化强度 $p=K/r^2$，电容率为 ε:

  (1) 计算束缚电荷的体密度和面密度;

  (2) 计算自由电荷体密度;

  (3) 计算球外和球内的电势;

  (4) 求该带电介质球产生的静电场总能量