ENSIMAG 2ème année
Modélisation Géométrique **2018/19**

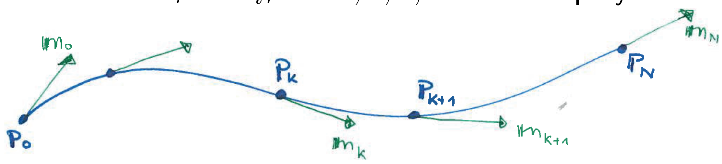
Splines Hermite

mini-Projet noté

Nous avons défini les polynômes d'interpolation Hermite en cours par

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}_0 H_0(t) + \boldsymbol{P}_1 H_1(t) + \boldsymbol{m}_0 H_2(t) + \boldsymbol{m}_1 H_3(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

où $\boldsymbol{P}(t)$ est l'unique polynôme cubique interpolant les points $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$ et les tangentes (dérivées) $\boldsymbol{m}_0$ et $\boldsymbol{m}_1$ aux paramètres 0 et 1, et H_i, $i = 0,1,2,3$ étant les polynômes d'Hermite cubiques.



Les **Splines Hermite cubiques** sont des courbes C^1 polynomiales de degré 3 par morceaux interpolant $N+1$ points $\boldsymbol{P}_k$ et tangentes $\boldsymbol{m}_k$, $k = 0, \ldots, N$ aux paramètres respectifs $u_0, \ldots, u_N$. Ils sont définis par

$$\boldsymbol{P}(u) = \boldsymbol{P}_k H_0(t) + \boldsymbol{P}_{k+1} H_1(t) + (u_{k+1} - u_k)\boldsymbol{m}_k H_2(t) + (u_{k+1} - u_k)\boldsymbol{m}_{k+1} H_3(t), \; u \in [u_0, u_N] \tag{2}$$

avec $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k} \in [0,1]$. On note t *paramètre locale* et u *paramètre global*.

Ces courbes splines sont typiquement utilisées pour l'interpolation de points $(\boldsymbol{P}_k, u_k)$ par une courbe *lisse*. Les tangentes $\boldsymbol{m}_k$ ne sont généralement pas données et doivent être estimées à partir des données en entrée. La formule (1) peut être appliquée à chaque intervalle $[u_k, u_{k+1}]$ séparément. La courbe spline résultante sera continue et aura des dérivées continues (C^1-spline).

Problème à résoudre:
Soient $N+1$ points de $\mathbb{R}^2$ donnés et leur paramètre associé, $(\boldsymbol{P}_k, u_k), k = 0, \ldots, N$. On cherche une courbe spline Hermite cubique $\boldsymbol{P}$ interpolant les points $\boldsymbol{P}_k$ aux paramètres u_k. On visualisera la "qualité" de la courbe. Optionellement, on pourrait comparer les Hermite splines avec d'autres méthodes d'interpolation.

Travail demandé (en binôme):

- Implémentation de splines Hermite sous forme Bézier, visualisation de la qualité, (et en option: comparaison avec Lagrange et splines C^2.
- Un rapport écrit (dactylographié ou à la main).
- Soutenance orale, **vendredi ????**, inscription sur Teide.
- Dépot sur Teide (code et rapport) dans un fichier *votre-nom.zip* avant le **???**

1. On choisira une paramétrisation équidistante: $u_k = k$ pour $k = 0, \ldots, N$.
Ecrivez la spline Hermite (2) sous forme Bézier, où

$$\boldsymbol{P}|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = \boldsymbol{x}_k(t) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{b}_{3k+i} B_i^3(t), \quad u \in [u_0, u_N]$$

avec $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k} \in [0, 1]$.

2. Faites un dessin pour deux polygones de contrôle consécutifs, $\boldsymbol{x}_k$ et $\boldsymbol{x}_{k+1}$, en y ajoutant les points de contrôle avec leur indice respectif et les données pour les paramètres u_k, u_{k+1}, et u_{k+2}.

3. En pratique les tangentes $\boldsymbol{m}_k$ ne sont pas données en entrée. Il faut les estimer raisonnablement. Une solution connue sont les:

- **Cardinal splines**:

$$\boldsymbol{m}_k = (1 - c) \frac{\boldsymbol{P}_{k+1} - \boldsymbol{P}_k}{u_{k+1} - u_k}, \quad k = 0, \ldots, N - 1, \quad c \in [0, 1]$$

  où c est un *paramètre de tension*. Pour $c = 1$ les tangentes sont nulles, pour $c = 0$ on retrouve des courbes splines connues sous le nom **Catmull-Rom**.

Comme c'est le cas pour toute estimation de dérivée par différences finies, la formule ne s'applique pas aux extrémités. A vous de faire un choix raisonnable ici pour définir m_N.

- Essayez de proposer d'autres estimations de $\boldsymbol{m}_k$, voir question 4.3.

4. Implémentez les splines Hermite en Matlab (Scilab) et permettez à l'utilisateur d'interagir. Des pistes possibles sont:

- entrer les points $\boldsymbol{P}_k$ à la souris,
- choix de $\boldsymbol{m}_0$ et $\boldsymbol{m}_N$ avec la souris, ou choix automatique "raisonnable",
- choix du paramètre c,
- visu d'une seule courbe ou superposition de plusieurs courbes,
- ....autres

Attention à une visualisation lisible (choix des couleurs, type et épaisseur des traits, ...)

4.1 Que constatez-vous quand vous faites varier le paramètre c ?

4.2 Comment jugez-vous la qualit'é du r'ésultat obtenu avec les Cardinal splines? Voici quelques pistes de réflexion: Est-ce que la courbe est lisse? ou a t'elle des ondulations non désirées? préserve t'elle la forme décrite par les points à interpoler, p.ex. un polygone convexe en entrée résulte-t'il en une spline convexe en sortie?

4.3 **En option:** Les choix des tangentes m_k est détermonante pour la forme de la spline? Essayez de trouver une meilleure formule d'estimation des tangentes et implémetez-la.

5. Visualisez la fonction de courbure, soit par un

- plot du graphe de courbure: $\kappa(u)$, soit par un
- plot de la courbe et sa courbe focale $\boldsymbol{f}(u) = \boldsymbol{P}(u) + \alpha\kappa(u) \cdot \boldsymbol{n}(u)$,
  où $\alpha \in \mathbb{R}$ (à bien choisir) et $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal (unitaire).

5.1 Qu'observez-vous quand le paramètre c varie?

5.2 Qu'observez-vous quand le choix des tangentes $\boldsymbol{m}_k$ varie selon votre réponse en 4.3?

5.3 A votre avis, pourquoi un plot de courbures est considéré comme un indicateur de qualité d'une courbe?

6. Utilisez votre programme pour créer un dessin d'un objet de votre choix.

En option:

7. Implémentez l'interpolation Lagrange (p.ex. algorithme Aitken-Neville) et comparez avec les splines Hermite. Qu'observez-vous?

Super Bonus:

8. Implémentez les splines cubiques C^2 (paramétrisation équidistante pour simplifier) et comparez avec les splines Hermite et polynôme de Lagrange. On peut aussi comparer leurs plots de courbure.
9. Laquelle des 3 méthodes d'interpolation est la meilleure? pourquoi?

Votre rapport doit contenir

- la formulation mathématique du problème et de sa solution,
- les réponses aux questions 1 à 6 (7,8),
- vos résultats obtenus (avec un grand nombre d'illustrations et d'exemples !!)
- vos comparaisons, vos observations, vos remarques éventuelles, etc.