2-2-2 方程组解法综合

教学目标

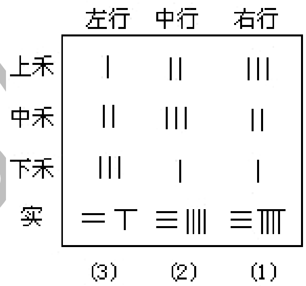
1.学会用带入消元和加减消元法解方程组
2.熟练掌握解方程组的方法并用到以后做题

知识精讲

知识点说明：

一、　方程的历史

同学们，你们知道古代的方程到底是什么样子的吗？公元 263 年，数学家刘徽所著《九章算术》一书里有一个例子："今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？"刘徽列出的"方程"如图所示。



方程的英语是 equation，就是"等式"的意思。清朝初年，中国的数学家把 equation 译成"相等式"，到清朝咸丰九年才译成"方程"。从这时候起，"方程"这个词就表示"含有未知数的等式"，而刘徽所说的"方程"就叫做"方程组"了。

二、　学习方程的目的

使用方程有助于解决数学难题，作为代数学最基本内容，方程的学习和使用不但能为未来初中阶段数学学习打好基础，同时能够将抽象数学直观表达出来，能够帮助学生更好的理解抽象的数学知识。

三、 解二元一次方程组的一般方法

解二元一次方程的关键的步骤：是消元，即将二元一次方程或多元一次方程化为一元一次方程。

消元方法：代入消元法和加减消元法

代入消元法：

1 取一个方程，将它写成用一个未知数表示另一个未知数，记作方程①；

2 将①代入另一个方程，得一元一次方程；

3 解这个一元一次方程，求出一个未知数的值；

4 将这个未知数的值代入①，求出另一个未知数的值，从而得到方程组的解．

加减消元法：

1 变形、调整两条方程，使某个未知数的系数绝对值相等（类似于通分）；

2 将两条方程相加或相减消元；

3 解一元一次方程；

4 代入法求另一未知数．

加减消元实际上就是将带系数的方程整体代入．

例题精讲

模块一、二元一次方程

【例 1】 解方程$\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}$（$x,y$为正整数）

方法一：加减消元法

解 $(x+y)+(x-y)=5+1$

$2x=6$

$x=3$

方法二：解 代入消元法，由$x+y=5$得到$x=5-y$，代入方程$x-y=1$中，得到$(5-y)-y=1$，整理

得$y=2$，所以$x=3$，所以方程的解为$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

【例 2】 解方程$\begin{cases}\boldsymbol{9u+2v=20}\\\boldsymbol{3u+4v=10}\end{cases}$（$\boldsymbol{u,v}$为正整数）

方法一：加减消元法

解： 化v的系数相同，加减消元法计算得 $2(9u+2v)-(3u+4v)=2\times20-10$

去括号和并同类项得 $18u\quad 3u\quad 20$

$15u\quad 30$

$u\quad 2$

$\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases}$

方法二：代入消元法由$9u+2v=20$得到$v=10-4.5u$，代入方程$3u+4v=10$中得到$3u+4(10-4.5u)=10$，整理得$u=2$，$v=1$，所以方程解为$\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases}$

【例 3】 解方程组$\begin{cases}\boldsymbol{x-5y=0}\\\boldsymbol{3x+2y=17}\end{cases}$（$\boldsymbol{x,y}$为正整数）

【解析】加减消元，若想消掉y，应将y的系数统一，因为$[2,5]=10$，所以第一个方程应该扩大 2 倍，第二个式子应该扩大 5 倍，又因为y的系数符号不同，所以应该用加消元，计算结果如下：$2(x-5y)+5(3x+2y)=2\times0+5\times17$，$17x=85$得$x=5$，所以$5-5y=0$，解得$y=1$。

【例 4】 解方程组$\begin{cases}\boldsymbol{3x-y=7}\\\boldsymbol{5x+2y=8}\end{cases}$（$\boldsymbol{x,y}$为正整数）

【解析】将第一个式子扩大 2 倍和二式相减得$2(3x-y)+(5x+2y)=2\times5+12$，去括号整理$11x=22$解得$x=2$，所以方程的解为$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

【例 5】 解方程组$\begin{cases}\boldsymbol{2(x-150)=5(3y+50)}\\\boldsymbol{0.1x+0.06y=0.085\times800}\end{cases}$（$\boldsymbol{x,y}$为正整数）

【解析】对第一个方程去括号整理，根据等式的性质将第二个式子扩倍变成正式进行整理得：$\begin{cases}2x-15y=550\\5x+3y=8.5\times400\end{cases}$，若想消掉$y$，将方程二扩大 3 倍，又因为$y$的系数符号不同，所以应该用加消元，计算结果如下：$(2x-15y)+5(5x+3y)=550+5\times8.5\times400$，去括号整理得$27x=17550$，解得$x=650$，所以方程的解为$\begin{cases}x=650\\y=50\end{cases}$

【例 6】 解下面关于x、y的二元一次方程组：$\begin{cases}4x+3y-2=0\\ y-1=-\frac{4}{3}x\end{cases}$

【解析】整理这个方程组里的两个方程，可以得到：$\begin{cases}4x+3y-2=0\\ 4x+3y-3=0\end{cases}$，可以看出，两个方程是不可能同时成立的，所以这是题目本身的问题，无解

【例 7】 解方程组$\begin{cases}\frac{3}{x-4}+\frac{4}{y-1}=3\\ \frac{9}{x-4}-\frac{2}{y-1}=2\end{cases}$（$x,y$为正整数）

【解析】本题需要同学能够利用整体思想进行解题，将$x-4$与$y-1$看出相应的未知数，因为每一项的分母不同，所以先将分母系数化成同样的，所以第二个式子等号两边同时乘以 2 整理得：$(\frac{3}{x-4}+\frac{4}{y-1})+2(\frac{9}{x-4}-\frac{2}{y-1})=3+2\times 2$，去括号整理后得到$\frac{21}{x-4}=7$，根据分数的性质计算得$x=7$，所以方程的解为：$\begin{cases}x=7\\ y=3\end{cases}$

模块一、多元一次方程

【例 8】 解方程组$\begin{cases}3x-4z=7\\ 2x+3y-z=9\\ 5x-9y-7z=8\end{cases}$（$x,y,z$为正整数）

【解析】观察x,y,z的系数发现，第二个式子与第三个式子中y的系数是 3 倍关系，所以将第二个式子扩大 3 倍与第三个式子相减得到：$3(2x+3y-z)+(5x-9y-7z)=3\times 9+8$，去括号整理得$11x-10z=35$，与第一个式子整理得$\begin{cases}3x-4z=7\\ 11x-10z=35\end{cases}$，若想消掉$z$，因为$[4,10]=20$，所以第一个方程应该扩大 5 倍，第二个式子应该扩大 2 倍，又因为z的系数符号相同，所以应该用减消元，计算结果如下：$2(11x-10z)-5(3x-4z)=2\times 35-5\times 7$，去括号整理得$7x=35$，$x=5$，所以方程解为$\begin{cases}x=5\\ y=7\\ z=2\end{cases}$

【巩固】 解方程组$\begin{cases}2x+y+z=7\\ x+2y+z=8\\ x+y+2z=9\end{cases}$（$x,y,z$为正整数）

【解析】将一式与二式相减得$(x+2y+z)-(2x+y+z)=8-7$去括号整理后得$y-x=1$；将二式扩大 2 倍与三式相减得$2(x+2y+z)-(x+y+2z)=2\times 8-9$，去括号整理后得$3y+x=7$；最后将两式相加计算结果如下：$(y-x)+(3y+x)=1+7$，整理得$4y=8$，$y=4$所以方程的解为：

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

【例 9】 解方程组 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z+u=2 \\ z-u+v=5 \\ u-v+x=2 \\ v-x+y=7 \end{cases}$（$x,y,z,u,v$ 为正整数）

【解析】 将 5 个式子相加得 $x+y+z+u+v=17$，将 1 式与 2 式相加得 $x+u=3$，将 2 式与 3 式相加得 $y+v=7$，同理连续相加得到 $\begin{cases} x+u=3 \\ y+v=7 \\ z+x=7 \\ u+y=9 \\ v+z=8 \end{cases}$，整理后解为 $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \\ z=7 \\ u=3 \\ v=1 \end{cases}$