2-3-2 列方程组解应用题

教学目标

1、设未知数的主要技巧和手段：找出与其他量的数量关系紧密的关键量
2、用代数法来表示各个量：利用“x,y”表示出所有未知量或变量
3、找准等量关系，构建方程（明显的等量关系与隐含的等量关系）

知识精讲

一、列方程解应用题的主要步骤

1. 审题找出题目中涉及到的各个量中的关键量，这个量最好能和题目中的其他量有着紧密数量关系；
2. 用字母来表示关键量，用含字母的代数式来表示题目中的其他量；
3. 找到题目中的等量关系，建立方程；
4. 解方程；
5. 通过求到的关键量求得题目最终答案．

二、解二元一次方程（多元一次方程）

消元目的：即将二元一次方程或多元一次方程化为一元一次方程．消元方法主要有代入消元和加减消元．

模块一、列方程组解应用题

【例 1】 30 辆小车和 3 辆卡车一次运货 75 吨，45 辆小车和 6 辆卡车一次运货 120 吨。每辆卡车和每辆小车每次各运货多少吨？

【解析】设每辆卡车和每辆小车每次各运货 x、y 吨，根据题意可得：

$$\begin{cases}30x+3y=75\\45x+6y=120\end{cases}，解得\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$$

所以，每辆卡车每次运货 2 吨，每辆小车每次运货 5 吨。

【巩固】 甲、乙二人2时共可加工54个零件，甲加工3时的零件比乙加工4时的零件还多4个．问：甲每时加工多少个零件？

【解析】设甲每小时加工x个零件，乙每小时加工y个零件.则根据题目条件有：

$\begin{cases}2x+2y=54\\3x-4y=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=16\\y=11\end{cases}$

所以甲每小时加工16个零件，以每小时加工11个零件．

【例 2】 已知练习本每本0.40元，铅笔每支0.32元，老师让小虎买一些练习本和铅笔，总价正好是老师所给的10元钱．但小虎将练习本的数量与铅笔的数量记混了，结果找回来0.56元，那么老师原来打算让小虎买多少本练习本？

【解析】设老师原本打算让小虎买x本练习本和y支铅笔，则由题意可列方程组：

$\begin{cases}0.4x+0.32y=10\\0.4y+0.32x=10-0.56\end{cases}$，整理得$\begin{cases}40x+32y=1000\\40y+32x=944\end{cases}$，即$\begin{cases}5x+4y=125\cdots\cdots(1)\\5y+4x=118\cdots\cdots(2)\end{cases}$，

将两式相加，得$9(x+y)=243$，则$x+y=27\cdots\cdots(2)$，

(1) $-4\times(3)$，得$x=17$．

所以，老师原打算让小虎买 17 本练习本．

【巩固】 商店有胶鞋、布鞋共45双，胶鞋每双3.5元，布鞋每双2.4元，全部卖出后，胶鞋比布鞋收入多10元．问：两种鞋各多少双？

【解析】设布鞋有x双，胶鞋有y双．

$\begin{cases}x+y=45\\3.5x-2.4y=10\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=20\\y=25\end{cases}$

所以布鞋有20双，胶鞋有25双．

【例 3】 松鼠妈妈采松子，晴天每天可以采20个，雨天每天可以采12个，它一连几天采了112个松子，平均每天采14个，问这几天当中有几天是下雨天？

【解析】根据题意，松鼠妈妈采的松子有晴天采的，也有雨天采的，总的采集数可以求得，采集天数也确定，因此可列方程组来求解．

设晴天有x天，雨天有y天，则可列得方程组：

$\begin{cases}20x+12y=112\cdots\cdots(1)\\x+y=\dfrac{112}{14}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)化简为$5x+3y=28$ …………(3)

用加减法消元：$(2)\times5-(3)$得：$5(x+y)-(5x+3y)=40-28$

解得$y=6$.所以其中6天下雨.

【例 4】 运来三车苹果，甲车比乙车多4箱，乙车比丙车多4箱，甲车比乙车每箱少3个苹果，乙车比丙车每箱少5个苹果，甲车比乙车总共多3个苹果，乙车比丙车总共多5个苹果，这三车苹果共有多少个？

【解析】设乙车运来x箱，每箱装y个苹果，根据题意列表如下：

车别	甲	乙	丙
箱数	$x+4$	x	$x-4$
每箱苹果数	$y-3$	y	$y+5$

根据上表可列出如下方程：

$\begin{cases}(x+4)(y-3)-xy=3\\ xy-(x-4)(y+5)=5\end{cases}$，化简为$\begin{cases}4y-3x=15\cdots(1)\\ 5x-4y=15\cdots(2)\end{cases}$

$(1)+(2)$，得：$2x=30$，于是$x=15$．

将$x=15$代入(1)或(2)，可得：$y=15$．

所以甲车运 19 箱，每箱 12 个；乙车运 15 箱，每箱 15 个；丙车运 11 箱，每箱 20 个．

三车苹果的总数是：$19\times12+15\times15+11\times20=673$(个)．

【例 5】 有大、中、小三种包装的筷子27盒，它们分别装有18双、12双、8双筷子，一共装有330双筷子，其中小盒数是中盒数的2倍．问：三种盒各有多少盒？

【解析】设中盒数为x，大盒数为y，那么小盒数为$2x$，根据题目条件有两个等量关系：

$\begin{cases}2x+x+y=27\\ 18y+12x+8\times2x=330\end{cases}$

该方程组解得$\begin{cases}x=6\\ y=9\end{cases}$，所以大盒有 9 个，中盒有 6 个，小盒有 12 个．

【巩固】用62根同样长的木条钉制出正三角形、正方形和正五边形总共有15个．其中正方形的个数是三角形与五边形个数和的一半，三角形、正方形和五边形各有多少个？

【解析】设三角形的个数为x，五边形的个数为y，那么正方形的个数为$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$，由此可列得方程组：

$$\begin{cases}x+\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+y=15\\ 3x+4\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+5y=62\end{cases}$$

该方程组解得：$\begin{cases}x=4\\ y=6\end{cases}$，所以$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=5$，因此三角形、正方形、五边形分别有$4$、$5$、$6$个．

【例 6】 有1克、2克、5克三种砝码共16个，总重量为50克；如果把1克的砝码和5克的砝码的个数对调一下，这时总重量变为34克．那么1克、2克、5克的砝码有多少个？

【解析】5克砝码比1克砝码每多1个，对调后总重量将减少$5-1=4$克，所以5克砝码比1克砝码多$(50-34)\div4=4$（个）．

在原来的砝码中减掉4个5克砝码，此时剩下12个砝码，且1克砝码与5克同样多，总重量为30克．

设剩下 1 克、5 克各x个，2 克砝码y个，则

$\begin{cases}2x+y=12\\ (1+5)x+2y=30\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=3\\ y=6\end{cases}$

所以原有 1 克砝码 3 个，2 克砝码 6 个，5 克砝码$3+4=7$个．

【巩固】某份月刊，全年共出12期，每期定价2.5元．某小学六年级组织集体订阅，有些学生订半年而另一些学生订全年，共需订费1320元；若订全年的同学都改订半年，而订半年的同学都改订全年，则共需订费1245元．则该小学六年级订阅这份月刊的学生共有________人．

【解析】设订半年的x人，订全年的y人，则：

$\begin{cases}2.5\times(6x+12y)=1320\\ 2.5\times(12x+6y)=1245\end{cases}$，得$\begin{cases}x+2y=88\\ 2x+y=83\end{cases}$，两式相加，得$3(x+y)=171$，

所以$x+y=57$，即该小学六年级订阅这份月刊的学生共有 57 人．

【例 7】 有两辆卡车要将几十筐水果运到另一个城市，由于可能超载，所以要将两辆卡车中的一部分转移到另外一辆卡车上去，如果第一辆卡车转移出 20 筐，第二辆卡车转移出 30 筐，那么第一辆卡车剩下的水果筐数是第二辆的1.2 倍，如果第一辆卡车转移出 21 筐，第二辆卡车转移出 25 筐，那么第三辆车上的水果筐数是前面两辆车水果筐数和的一半，求原来两辆车上有多少筐水果？

【解析】设第一辆卡车上的水果有x筐，第二辆卡车上的水果有y筐，

则有$\begin{cases} x-20=(y-30)\times1.2\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-21+y-25=(21+25)\times2\cdots(2) \end{cases}$，

由(1)得$x=1.2y-16$，代入(2)得$2.2y-62=92$，解得$y=70$，

所以$x=1.2y-16=68$，原来两辆车上分别装有 68 筐水果和 70 筐水果．

【巩固】 大、小两个水池都未注满水．若从小池抽水将大池注满，则小池还剩5 吨水；若从大池抽水将小池注满，则大池还剩30 吨水．已知大池容量是小池的1.5 倍，问：两池中共有多少吨水？

【解析】设大池中有x吨水，小池中有y吨水.则根据题目条件，两池一共有$x+y$吨水，大池可装$x+y-5$吨水，小池可装$x+y-30$吨水，所以可列得方程$x+y-5=(x+y-30)\times1.5$，方程化简为$x+y=80$，所以两池中共有80 吨水．

【例 8】 某公司花了 44000 元给办公室中添置了一些计算机和空调，办公室每月用电增加了 480 千瓦时，已知，计算机的价格为每台 5000 元，空调的价格为 2000 元，计算机每小时用电0.2 千瓦时，平均每天使用 5 小时，空调每小时用电0.8 千瓦时，平均每天运行 5 小时，如果一个月以 30 天计，求公司一共添置了多少台计算机，多少台空调？

【解析】设添置了x台计算机，y台空调．

则有$\begin{cases} 5000x+2000y=44000\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 0.2\times5\times30x+0.8\times5\times30y=480\cdots(2) \end{cases}$

(2)式整理得$x+4y=16$，则$x=16-4y$；

代入(1)得$5000(16-4y)+2000y=44000$，解得$y=2$，则$x=8$，

所以公司一共添置了 8 台计算机和 2 台空调．

【巩固】 甲、乙两件商品成本共600 元，已知甲商品按45% 的利润定价，乙商品按40% 的利润定价；后来甲打8 折出售，乙打9 折出售，结果共获利110 元. 两件商品中，成本较高的那件商品的成本是多少？

【解析】设甲、乙两件商品成本分别为x元、y元.

根据题意，有方程组：

$\begin{cases} x+y=600 \\ x(1+45\%)\times0.8+y\times(1+40\%)\times0.9-600=110 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=460 \\ y=140 \end{cases}$

所以成本较高的那件商品的成本是460 元．

【巩固】 某市现有 720 万人口，计划一年后城镇人口增涨0.4%，农村人口增长0.7%，这样全市人口增加0.6%，求这个城市现在的城镇人口和农村人口．

【解析】假设这个城市现在的城镇人口是x万人，农村人口是y万人，得：

$\begin{cases} x+y=720 \\ 0.4\%x+0.7\%y=720\times0.6\% \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=240 \\ y=480 \end{cases}$，

即这个城市现在的城镇人口有 240 万，农村人口有 480 万．

【例 9】 某次数学竞赛，分两种方法给分．一种是先给 40 分，每答对一题给 4 分，不答题不给分，答错扣1分，另一种是先给 60 分，每答对一题给 3 分，不答题不给分，答错扣 3 分，小明在考试中只有 2 道题没有答，以两种方式计分他都得102 分，求考试一共有多少道题？

【解析】设小明答对了 x 道题，答错了 y 道题.由题目条件两种计分方式，他都得102 分，可得到两条等量关系式：

$$\begin{cases}40+4x-y=102\\60+3x-3y=102\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=16\\y=2\end{cases}$ ，所以考试一共有 $16+2+2=20$ 道题.

【巩固】某次数学比赛，分两种方法给分．一种是答对一题给 5 分，不答给 2 分，答错不给分；另一种是先给 40 分，答对一题给 3 分，不答不给分，答错扣1分．某考生按两种判分方法均得 81 分，这次比赛共多少道题？

【解析】设答对 a 道题，未答 b 道题，答错 c 道题，由条件可列方程

$$\begin{cases}5a+2b=81 & \cdots\cdots(1)\\40+3a-c=81 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由(1)式知，a 是奇数，且小于17 ．(2)式可化简为

$c=3a-41\cdots\cdots(3)$

由(3)式知，a 大于13 ．综合上面的分析，a 是大于13 小于17 的奇数，所以 $a=15$ ．

再由(1)(3)式得到 $b=3$，$c=4$． $a+b+c=15+3+4=22$， 所以共有 22 道题.

【巩固】下表是某班 40 名同学参加数学竞赛的分数表，如果全班平均成绩是 2.5 分，那么得 3 分和 5 分的各有多少人？

分数	0	1	2	3	4	5
人数	4	7	10	?	8	?

【解析】根据题意，只要设得3分和5 分的各有多少人，即可利用总人数和总分数而列方程组求解,等量关系有两条：一是各分数段人数之和等于总人数，各分数段所有人得分之和等于总分数.设得 3 分的人数有 x 人，得5 分的人数有 y 人,那么：

$$\begin{cases}4+7+10+x+8+y=40\\1\times7+2\times10+3x+4\times8+5y=40\times2.5\end{cases}$$，化简为：$$\begin{cases}x+y=11 & \cdots\cdots(1)\\3x+5y=41 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(2)-(1)\times3$ ，得到 $2y=8$ ，即 $y=4$ ，再代入(1) ，最后得到方程组得解 $\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$ ，所以 40 名学生当中得3 分的有 7 人，得 5 分的有 4 人．

【例 10】 在 S 岛上居住着100 个人，其中一些人总是说假话，其余人则永远说真话，岛上的每一位居民崇拜三个神之一：太阳神、月亮神和地球神．向岛上的每一位居民提三个问题：⑴您崇拜太阳神吗？⑵您崇拜月亮神吗？⑶您崇拜地球神吗？对第一个问题有 60 人回答：“是”；对第二个问题有 40 人回答：“是”；对第三个问题有 30 人回答：“是”．他们中有多少人说的是假话？

【解析】我们将永远说真话的人称为老实人,把总说假话的人称为骗子.每个老实人都只会对一个问题“是”.而每个骗子则都对两个问题答“是”.将老实人的数目计为 x ，将骗子的数目计为 y .于是 $x+2y=130$ ．又由于在 S 岛上居住着100 个人，所以 $x+y=100$ ，联立两条方程，解得 $y=30$.所以岛上有30 个人说的是假话．

【例 11】甲、乙两人生产一种产品，这种产品由一个 A 配件与一个 B 配件组成．甲每天生产 300 个 A 配件，或生产 150 个 B 配件；乙每天生产 120 个 A 配件，或生产 48 个 B 配件．为了在 10 天内生产出更多的产品，二人决定合作生产，这样他们最多能生产出多少套产品？

【解析】假设甲、乙分别有 x 天和 y 天在生产 A 配件，则他们生产 B 配件所用的时间分别为 $(10-x)$ 天和 $(10-y)$ 天，那么 10 天内共生产了 A 配件 $(300x+120y)$ 个，共生产了 B 配件 $150\times(10-x)+48\times(10-y)=1980-150x-48y$ 个．

要将它们配成套，A 配件与 B 配件的数量应相等，即 $300x+120y=1980-150x-48y$，得到 $75x+28y=330$，则 $x=\dfrac{330-28y}{75}$．

此时生产的产品的套数为 $300x+120y=300\times\dfrac{330-28y}{75}+120y=1320+8y$，要使生产的产品最多，就要使得 y 最大，而 y 最大为 10，所以最多能生产出 $1320+8\times10=1400$ 套产品．

【巩固】某服装厂有甲、乙两个生产车间，甲车间每天能生产上衣 16 件或裤子 20 件；乙车间每天能生产上衣 18 件或裤子 24 件．现在要上衣和裤子配套，两车间合作 21 天，最多能生产多少套衣服？

【解析】假设甲、乙两个车间用于生产上衣的时间分别为 x 天和 y 天，则他们用于生产裤子的天数分别为 $(21-x)$ 天和 $(21-y)$ 天，那么总共生产了上衣 $(16x+18y)$ 件，生产了裤子 $20\times(21-x)+24\times(21-y)=924-20x-24y$ 件．

根据题意，裤子和上衣的件数相等，所以 $16x+18y=924-20x-24y$，即 $6x+7y=154$，即 $x=\dfrac{154-7y}{6}$．那么共生产了 $16x+18y=16\times\dfrac{154-7y}{6}+18y=410\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}y$ 套衣服．要使生产的衣服最多，就要使得 y 最小，则 x 应最大，而 x 最大为 21，此时 $y=4$．故最多可以生产出 $410\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times4=408$ 套衣服．

【例 12】一片青草，每天长草的速度相等，可供 10 头牛单独吃 20 天，供 60 只羊单独吃 10 天．如果 1 头牛的吃草量等于 4 只羊的吃草量，那么，10 头牛与 60 只羊一起吃草，这片草可以吃________天．

【解析】把 1 只羊每天的吃草量当作单位“1”，则 1 头牛每天的吃草量为 4，设原有草量为 x，每天的长草量为 y，那么：

$$\begin{cases}x+20y=4\times10\times20\\x+10y=1\times60\times10\end{cases}$$

解得 $x=400$，$y=20$，

如果 10 头牛与 60 只羊一起吃草，这片草可以吃 $400\div(4\times10+1\times60-20)=5$ (天)．

【例 13】甲、乙、丙沿着环形操场跑步，乙与甲、丙的方向相反．甲每隔 19 分钟追上丙一次，乙每隔 5 分钟与丙相遇一次．如果甲 4 分钟跑的路程与乙 5 分钟跑的路程相同，那么甲的速度是丙的速度的多少倍？甲与乙多长时间相遇一次？

【解析】把环形操场的周长看作 1，设甲每分钟跑的路程为 x，丙每分钟跑的路程为 y．根据题意可知乙每分钟跑的路程为 $\dfrac{4}{5}x$．有：

$\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{19} \\ \dfrac{4}{5}x+y=\dfrac{1}{5} \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\dfrac{8}{57} \\ y=\dfrac{5}{57} \end{cases}$.

所以甲的速度是丙的速度的$\dfrac{8}{57}\div\dfrac{5}{57}=1.6$倍；

甲与乙相遇一次所用的时间为$1\div(\dfrac{8}{57}+\dfrac{8}{57}\times\dfrac{4}{5})=3\dfrac{23}{24}$分钟．

【例 14】 甲、乙二人从相距60千米的两地同时出发，沿同一条公路相向而行，6小时后在途中相遇．如果两人每小时所行走的路程各增加1千米，则相遇地点距前一次地点差1千米．求甲、乙两人的速度．

【解析】 设甲速为每小时x千米，乙速为每小时y千米.根据第一次相遇的条件，可知：$6(x+y)=60$，则$x+y=10$，即甲、乙两人的速度和为10千米/小时，所以第二次相遇两人的速度和为12千米/小时.第二次相遇时，甲走的路程可能比第一次少1千米或多1千米，即$(6x-1)$千米，或$(6x+1)$千米.由此可列第二条方程：$5(x+1)=6x-1$或$5(x+1)=6x+1$.因此可列的方程组有：

$\begin{cases} x+y=10 \\ 5(x+1)=6x-1 \end{cases}$解得$\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$，或$\begin{cases} x+y=10 \\ 5(x+1)=6x+1 \end{cases}$解得$\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$.

所以甲、乙（或乙、甲）两人的速度分别为6千米/小时和4千米/小时．

【例 15】 (华杯赛复赛)从甲地到乙地的公路，只有上坡路和下坡路，没有平路．一辆汽车上坡时每小时行驶20千米，下坡时每小时行驶35千米．车从甲地开往乙地需9小时，从乙地到甲地需7.5小时，问：甲乙两地公路有多少千米？从甲地到乙地须行驶多少千米的上坡路？

【解析】 (法 1)从甲地到乙地的上坡路，就是从乙地到甲地的下坡路；从甲地到乙地下坡路，就是从乙地到甲地的上坡路．设从甲地到乙地的上坡路为x千米，下坡路为y千米，依题意得：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{35}=9 \\ \dfrac{x}{35}+\dfrac{y}{20}=7\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解得$x=140$，$y=70$，

所以甲、乙两地间的公路有$140+70=210$千米，从甲地到乙地须行驶140千米的上坡路．

答：甲、乙两地间的公路有210千米，从甲地到乙地须行驶140千米的上坡路．

【巩固】 从A村到B村必须经过C村，其中A村至C村为上坡路，C村至B村为下坡路，A村至B村的总路程为20千米．某人骑自行车从A村到B村用了2小时，再从B村返回A村又用了1小时45分．已知自行车上、下坡时的速度分别保持不变，而且下坡时的速度是上坡时速度的2倍．求A、C之间的路程及自行车上坡时的速度．

【解析】 设A、C之间的路程为x千米，自行车上坡速度为每小时y千米，则C、B之间的路程为$(20-x)$千米，自行车下坡速度为每小时$2y$千米．依题意得：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{20-x}{2y}=2\\ \dfrac{20-x}{y}+\dfrac{x}{2y}=1\dfrac{3}{4}\end{cases},$$

两式相加，得：$\dfrac{20}{y}+\dfrac{20}{2y}=2+1\dfrac{3}{4}$，解得 $y=8$；代入得 $x=12$.

故 A、C 之间的路程为 12 千米，自行车上坡时的速度为每小时 8 千米 .

【巩固】(2004 年南京市少年数学智力冬令营)华医生下午 2 时离开诊所出诊，走了一段平路后爬上一个山坡，给病人看病用了半小时，然后原路返回，下午 6 时回到诊所．医生走平路的速度是每小时 4 千米，上山的速度是每小时 3 千米，下山的速度是每小时 6 千米，华医生这次出诊一共走了_____千米．

【解析】设平路长 a 千米，山坡长 b 千米，则共走了 $2(a+b)$ 千米，根据题意，列方程

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{a}{4}+\frac{b}{6}=3.5,$$

$$\frac{1}{2}(a+b)=3.5,$$

$$2(a+b)=14.$$

所以，华医生这次出诊一共走了 14 千米．

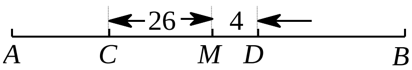
【例 16】(第十一届迎春杯决赛)小明从自己家到奶奶家时，前一半路程步行，后一半路程乘车；他从奶奶家回家时，前 $\frac{1}{3}$ 时间乘车，后 $\frac{2}{3}$ 时间步行．结果去奶奶家的时间比回家所用的时间多 2 小时．已知小明步行每小时行 5 千米，乘车每小时行 15 千米，那么小明从自己家到奶奶家的路程是多少千米?

【解析】设小明家到奶奶家的路程为 x 千米，而小明从奶奶家返回家里所需要的时间是 y 小时，那么根据题意有：

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}x}{5}+\dfrac{\frac{1}{2}x}{15}=y+2\\ x=\dfrac{1}{3}y\times15+\dfrac{2}{3}y\times5\end{cases}，解得：\begin{cases}x=150\\ y=18\end{cases}$$

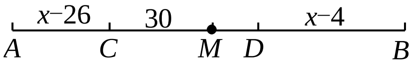
答：小明从自己家到奶奶家的路程是 150 千米．

【例 17】(保良局亚洲区城市小学数学邀请赛)米老鼠从 A 到 B，唐老鸭从 B 到 A，米老鼠与唐老鸭行走速度之比是 $6:5$，如下图所示．



M 是 A、B 的中点，离 M 点 26 千米的 C 点有一个魔鬼，谁从它经过就要减速 25%，离 M 点 4 千米的 D 点有一个仙人，谁从它经过就能加速 25%．现在米老鼠与唐老鸭同时出发，同时到达，那么 A 与 B 之间的距离是_____千米．

【解析】设 $AM=MB=x$，米老鼠的行走速度为 $6k$，则唐老鸭的行走速度为 $5k$（$k\neq0$），如下图，则有米老鼠从 A 到 B 需要时间



$$\frac{x-26}{6k}+\frac{30}{6k\times(1-25\%)}+\frac{x-4}{6k\times(1-25\%)\times(1+25\%)}$$

$$=\frac{1}{6k}\left\{x+14+\frac{16}{15}(x-4)\right\},$$

唐老鸭从 B 到 A 需要时间

$$\frac{x-4}{5k}+\frac{30}{5k\times(1+25\%)}+\frac{x-26}{5k\times(1-25\%)\times(1+25\%)}$$

$$=\frac{1}{5k}\left\{x+20+\frac{16}{15}(x-26)\right\}.$$

因为米老鼠与唐老鸭用的时间相同，所以列方程

$$\frac{1}{6k}\left\{x+14+\frac{16}{15}(x-4)\right\}=\frac{1}{5k}\left\{x+20+\frac{16}{15}(x-26)\right\},$$

解得 $x=46$ ．

所以，A、B 两地相距 92 千米．

【例 18】 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发相向而行，5 小时后相遇在 C 点. 如果甲速度不变，乙每小时多行 4 千米，且甲、乙还从 A、B 两地同时出发相向而行，则相遇点 D 距 C 点 10 千米. 如果乙速度不变，甲每小时多行 3 千米，且甲、乙还从 A、B 两地同时出发相向而行，则相遇点 E 距 C 点 5 千米. 问：甲原来的速度是每小时多少千米？

【解析】 甲速度不变，乙每小时多行 4 千米，相遇点 D 距 C 点 10 千米，出发后 5 小时，甲到达 C，乙到达 F，因为乙每小时多行 4 千米，所以 $FC=4\times5=20$ 千米，那么 $FD=DC=10$ 千米，也就是说相遇后相同的时间内甲、乙走的路程相同，也就是说原来甲比乙每小时多行 4 千米.

乙速度不变，甲每小时多行 3 千米，相遇点 E 距 C 点 5 千米，出发后 5 小时乙到达 C，甲到达 G，因为甲每小时多行 3 千米，所以 $GC=3\times5=15$ 千米.那么 $GE=10$ 千米，$EC=5$ 千米.所以 $EG=2EC$，即相遇后在相同的时间甲走的路程是乙的 2 倍，所以甲每小时多行 3 千米后，速度是乙的两倍.

于是可列得方程组：$\begin{cases}v_甲=v_乙+4\\v_甲+3=2v_乙\end{cases}$，解得 $\begin{cases}v_甲=11\\v_乙=7\end{cases}$，所以甲原来每小时 11 千米.

【例 19】 甲、乙二人共存款 100 元，如果甲取出 $\frac{4}{9}$，乙取出 $\frac{2}{7}$，那么两人存款还剩 60 元. 问甲、乙二人各有存款多少元？

【解析】 设甲存款 x 元，乙存款 y 元，根据题目条件有两条等量关系,一是两人存款加起来等于 100 元，二是取钱后两人存款加起来有 60 元.由此可列得方程组:

$$\begin{cases}x+y=100\\\frac{4}{9}x+\frac{2}{7}y=100-60\end{cases}$$

方程组最终解得 $\begin{cases}x=72\\y=28\end{cases}$,所以甲存款 72 元，乙存款 28 元．

【巩固】 甲、乙两个容器共有溶液 2600 克，从甲容器取出 $\frac{1}{4}$ 的溶液，从乙容器取出 $\frac{1}{5}$ 的溶液，结果两个容器共剩下 2000 克．问：两个容器原来各有多少溶液？

【解析】设甲容器有溶液 x 克，乙容器有溶液 y 克，根据题目条件有两条等量关系,一是两容器溶液加起来等于 2600 克，二是取溶液后两容器加起来有 2000 克.由此可列得方程组:

$$\begin{cases} x+y=2600 \\ \left(1-\frac{1}{4}\right)x+\left(1-\frac{1}{5}\right)y=2000 \end{cases}$$

方程组最终解得 $\begin{cases} x=1600 \\ y=1000 \end{cases}$，所以甲容器中有溶液 1600 克，乙容器中有溶液 1000 克．

【例 20】 某班有 45 名同学，其中有 6 名男生和女生的 $\frac{1}{7}$ 参加了数学竞赛，剩下的男女生人数正好相等．问：这个班有多少名男生？

【解析】设有 x 名男生和 y 名女生，那么根据题目条件有两条等量关系：一是原来男女生人数和为 45 人，二是剩下的男女生人数相等，由此可列得方程组：

$$\begin{cases} x+y=45 \\ x-6=y\left(1-\frac{1}{7}\right) \end{cases}$$

该方程组解得 $\begin{cases} x=24 \\ y=21 \end{cases}$，所以这个班有 24 名男生．

【巩固】 甲、乙两班人数都是 44 人，两班各有一些同学参加了数学小组的活动，甲班参加的人数恰好是乙班未参加人数的 $\frac{1}{3}$，乙班参加的人数恰好是甲班未参加人数的 $\frac{1}{4}$，那么共有多少人未参加数学小组？

【解析】设甲、乙两班参加数学小组的人数分别为 x 人、y 人，未参加人数分别为 $(44-x)$ 人、$(44-y)$ 人，由题设已知条件可以得到：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}(44-y) \\ \frac{1}{4}(44-x)=y \end{cases}，解之得 \begin{cases} x=12 \\ y=8 \end{cases}$$

所以未参加兴趣小组的人数 $=(44-x)+(44-y)=68$ 人．

【例 21】 一群小朋友去春游，男孩戴小黄帽，女孩戴小红帽．在每个男孩看来，黄帽子比红帽子多 5 顶；在每个女孩看来，黄帽子是红帽子的 2 倍．问：男孩、女孩各有多少人？

【解析】设男孩有 x 人，女孩有 y 人．根据条件可列方程：$\begin{cases} (x-1)-y=5 \\ x=2(y-1) \end{cases}$ 由第一条方程可以得到 $x=6+y$，代入第二条方程得到 $6+y=2(y-1)$.解得 $y=8$，再代入第一条方程．方程解得 $\begin{cases} x=14 \\ y=8 \end{cases}$.所以男孩有 14 人，女孩有 8 人．

【巩固】 有大小两盘苹果，如果从大盘中拿出一个苹果放在小盘里，两盘苹果一样多；如果从小盘里拿出一个苹果放在大盘里，大盘苹果的个数是小盘苹果数的 3 倍．大、小两盘苹果原来各有多少个？

【解析】设原来大盘有苹果 x 个，小盘有苹果 y 个.那么可列方程组：

$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+1=3(y-1) \end{cases}$，方程组解得$\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$，

所以大盘原来有苹果5个，小盘原来有苹果3个．

【巩固】 教室里有若干学生，走了10名女生后，男生是女生人数的2倍，又走了9名男生后，女生是男生人数的5倍。问：最初有多少名女生？

【解析】设原来男生人数为x，女生人数为y，那么根据题目条件有以下数量关系：

$\begin{cases} x=2(y-10) \\ 5(x-9)=(y-10) \end{cases}$

方程组化简为：$\begin{cases} x=10 \\ y=15 \end{cases}$，所以最初有$15$名女生．

【例 22】 一位牧羊人赶着一群羊去放牧，跑出一只公羊后，他数了数羊的只数，发现剩下的羊中，公羊与母羊的只数比是$9:7$；过了一会儿跑走的公羊又回到羊群，却又跑走了一只母羊，牧羊人又数了数羊的只数，发现公羊与母羊的只数比是$7:5$．这群羊原来有多少只？

【解析】设原来公羊有x只，母羊有y只，那么根据题目条件有以下数量关系：$\begin{cases} (x-1):y=9:7 \\ x:(y-1)=7:5 \end{cases}$，根据有关比例性质，方程组可化简为：$\begin{cases} x=28 \\ y=21 \end{cases}$，所以这群羊原来有$28+21=49$只.

【巩固】 口袋中有若干红色和白色的球．若取走一个红球，则口袋中的红球占$\frac{2}{7}$；若取出的不是一个红球而是两个白球，则口袋中的白球占$\frac{2}{3}$．原来口袋中白球比红球多多少个？

【解析】设原来红球数为x，白球数为y，那么根据题目条件有以下数量关系：$\begin{cases} (x-1)=\frac{2}{7}(x+y-1) \\ (y-2)=\frac{2}{3}(x+y-2) \end{cases}$

方程组解得$\begin{cases} x=9 \\ y=20 \end{cases}$，原来口袋中白球比红球多$20-9=11$个．

【例 23】 甲、乙两种商品的原来价格比是 $7:3$．如果它们的价格各自上涨70元，它们的价格比变为$7:4$．求甲乙两种商品的原价各是多少元？

【解析】方法1：设甲乙两种商品原来价格分别为$7x$元，$3x$元，根据涨价后价格比为$7:4$，列方程得$(7x+70):(3x+70)=7:4$，解得$x=30$，原来两种商品的原价各是$7\times30=210$元，$3\times30=90$元

方法2：设甲乙两种商品原价各是x元，y元，依题意列方程组得$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{7}{3} \\ \frac{x+70}{y+70}=\frac{7}{4} \end{cases}$解得$\begin{cases} x=210 \\ y=90 \end{cases}$

甲乙两种商品原价各是210元，90元

方法3：由于原来两种商品相差$7-3=4$份，涨价后相差$7-4=3$份，由于涨价钱数相同，所以应涨$[3,4]=12$份，所以原来两种商品的价格比$7\times3:3\times3=21:9$，涨价后价格比$7\times4:4\times4=28:16$，所以价格涨了7份，恰是70元，所以1份是10元，所以原来两种商品的价格各是为210元，90元

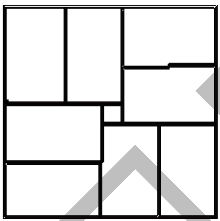
【巩固】兄弟两人每月收入比$4:3$，支出钱数比$18:13$，他们每月都节余360元，求兄弟两人月收入各多少？

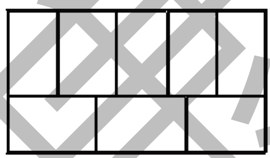
【解析】方法1：设兄弟两人每月收入分别为$4x$元，$3x$元，根据支出钱数比$18:13$列方程得$(4x-360):(3x-360)=18:13$，解得$x=900$，所以兄弟两人收入各是$4\times900=3600$元，$3\times900=2700$元

方法2：设兄弟两人月收入各是x元，y元根据两个比例列方程得$\begin{cases}x:y=4:3\\(x-360):(y-360)=18:13\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3600\\y=2700\end{cases}$所以兄弟两人收入各是$3600$元，$2700$元

方法3：由于兄弟结余相同，所以兄弟收入差和支出差相同，而收入差为$4-3=1$份，支出差为$18-13=5$份，所以收入差应为和支出差应为5份，所以兄弟收入比为$4\times5:3\times5=20:15$，所以结余应为$20-18=15-13=2$份对应360元，所以1份就是180元，所以兄弟两人月收入各是$180\times20=3600$元，$180\times15=2700$元

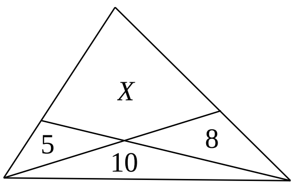
【例24】小明用8个一样大的小长方形拼图，拼出了如图甲、乙的两种图案：图案甲是一个正方形，图案乙是一个大的长方形；图案甲的中间留下了边长是2 cm的正方形小洞．求小长方形的长和宽？

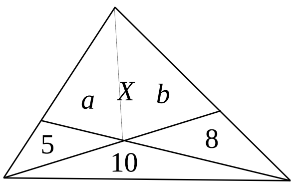

甲


乙

【解析】由甲图可以看出小长方形的长加上小正方形的边长等于小长方形的两个宽，由乙图可以看出小长方形的3个长等于小长方形的5个宽，所以设小长方形的长为x cm，宽为y cm，依题意列方程得$\begin{cases}x+2=2y\\3x=5y\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=10\\y=6\end{cases}$

【例25】如图，图中5、8和10分别代表包含该数字的三个三角形的面积．试问：包含X这个字母的四边形面积是多少？



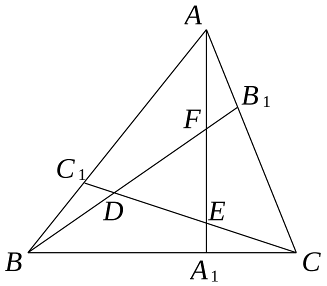


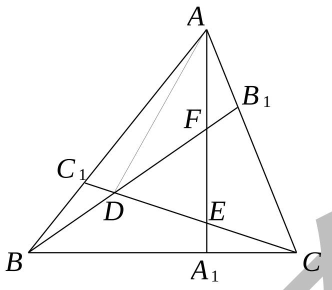
【解析】如图，设虚线把四边形X分成面积为a、b的两个三角形.利用同高的两个三角形面积之比等于相应底边之比，可得：$\frac{5}{a}=\frac{5+10}{8+a+b}$（可化简为$2a-b=8$）和$\frac{8}{b}=\frac{8+10}{5+a+b}$（可化简为$5b-4a=20$），由这两条方程构成方程组：

$\begin{cases}2a-b=8\\5b-4a=20\end{cases}$，方程组可解得：$\begin{cases}a=10\\b=12\end{cases}$，

所以四边形 X 的面积为$10+12=22$ 002E

【巩固】三角形 ABC 中，$\dfrac{A_1C}{A_1B}=\dfrac{B_1A}{B_1C}=\dfrac{C_1B}{C_1A}=\dfrac{1}{2}$，问：$\dfrac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}}=?$





【解析】根据题意，直接建立 ΔDEF 与 ΔABC 的联系是解答本题的关键，因为 $\dfrac{C_1B}{C_1A}=\dfrac{1}{2}$，所以连接 AD 后，既可以使 ΔBDC_1 与 ΔABC 建立联系，又可使四边形 $AFDC_1$ 与 ΔABC 也建立联系.

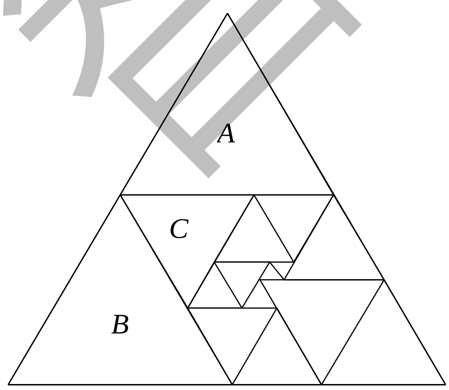
设 $S_{\Delta ABC}=1$，$S_{\Delta BDC_1}=a$，$S_{\Delta ADB_1}=x$，则：$S_{\Delta ADC_1}=2a$，$S_{\Delta CDB_1}=2x$.

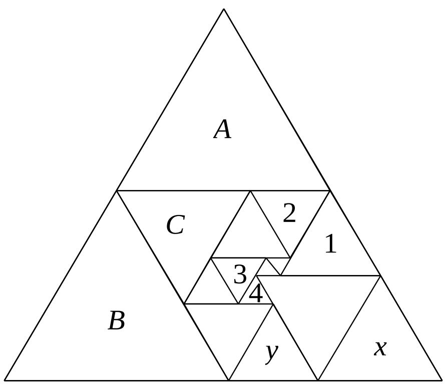
根据题意，$\dfrac{A_1C}{A_1B}=\dfrac{B_1A}{B_1C}=\dfrac{C_1B}{C_1A}=\dfrac{1}{2}$，可列方程：

$\begin{cases}3a+x=\dfrac{1}{3}\\2a+3x=\dfrac{2}{3}\end{cases}$，方程解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{21}\\a=\dfrac{1}{21}\end{cases}$，

所以四边形 AC_1DB_1 的面积等于 $x+2a=\dfrac{2}{7}$，同理四边形 CB_1FA_1 的面积和四边形 BA_1EC_1 的面积都是 $\dfrac{2}{7}$，所以剩下的三角形 DEF 的面积为 $\dfrac{1}{7}$.

【例 26】**（2007 年华杯赛总决赛）图中的三角形都是等边三角形，三角形 A 的边长是 24.7，三角形 B 的边长是 26．问：所夹三角形 C 的边长是多少?**





【解析】如图，设相应的三角形的边长是 x 和 y，则可知：

标号为1的三角形的边长是：$26-x$

标号为4的三角形的边长是：$x-y$

标号为3的三角形的边长是：$y-(x-y)=2y-x$

最小的三角形的边长是：$x-(26-x)=2x-26$；

标号为2的三角形的边长是：

$2y-x+2x-26=2y+x-26$或$26-x-(2x-26)=52-3x$

所以，$\begin{cases}x+y=24.7\\y+2x=39\end{cases}$

解上述方程，$\begin{cases}x=14.3\\y=10.4\end{cases}$，可以得到三角形$C$的边长是$15.6$．

【例 27】 甲、乙、丙三个人玩三张牌，这三张牌分别写着不同的自然数，洗牌后发给每人一张，按每人所拿的自然数得分，重复玩了3次后，甲共得19分，乙和丙各得13分，那么这三张牌上写的数是哪三个数？

【解析】 三张牌上的三个数之和是$(19+13+13)\div3=15$．

因为3不能整除13和19，所以甲、乙、丙谁也不可能三次拿到同一张牌，，又因为谁也没有拿到三张牌各1次，所以三人都是拿了某张牌两次、另一张牌一次．设三张牌从大到小写的数依次为a、b、c.由乙、丙各得13分，推知乙、丙的三张牌是c、c、a和b、b、c.则甲的三张牌是a、a、b.

$$\begin{cases}a+a+b=19\cdots\cdots(1)\\b+b+c=13\cdots\cdots(2)\\c+c+a=13\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

由$2\times(1)-(2)$得$4a-c=25$.

由$2\times(4)+(3)$得$9a=63$，从而$a=7$ (4).

将$a=7$代入(1)、(3)得$b=5$，$c=3$.

所以，三张牌从大到小写的数依次是7，5，3.

【例 28】 （2003年陈省身杯）三张卡片上分另标有p、q、r数码（整数）且$0<p<q<r$，游戏时将三张卡片随意分发给A、B、C三个人，每人各一张，根据每个人得到卡片上的数码数分别给他们记分，如此重复游戏若干轮，结果A、B、三人得分总数分别为 20、10、9．已知B在最后一轮的得分是r，那么

(1)______在第一轮得分是q；

(2)p、q、r分别是______、______、______.

【解析】 三人总分为$20+10+9=39=1\times39=3\times13$．

如果游戏进行了39或13轮，则$p+q+r=1$或3，与$0<p<q<r$矛盾；如果游戏只进行了1轮，则$r=20$，被A得到，与“B在最后一轮的得分是r”矛盾．所以游戏进行了3轮，且$p+q+r=13$．

(1)因为B共得10分，且最后一次得r分，所以前两次都得p分，否则三次至少得13分．因为C三次总分比B少，所以C没得过r分，前两次都得q分，即第一轮得q分的是C．

(2)假设C三次都得q，由B得$p+p+r=10$和A得$r+r+p=20$，解得$r=10$，$p=0$，与$p>0$矛盾，所以C前两次得q，最后一次得p．

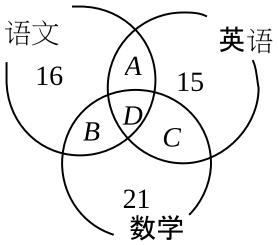
由$\begin{cases} p+2q=9, \\ 2p+r=10, \\ 2r+q=20, \end{cases}$解得 $p=1$ ，$q=4$ ，$r=8$ ．

【例 29】（2000 年全国小学数学奥林匹克）某校五年级共有 110 人，参加语文、数学、英语三科活动小组，每人至少参加一组．已知参加语言语小组的有 52 人，只参加语文小组的有 16 人；参加英语小组的有 61 人，只参加英语小组的有 15 人；参加数学小组的有 63 人，只参加数学小组的有 21 人．那么三组都参加的有_____人．

【解析】如图，由题设条件知，

$A+B+D=52-16=36$ ，

$A+C+D=61-15=46$ ，



$B+C+D=63-21=42$ ，

三式相加得

$2\times(A+B+C+D)+D=124$ ．

又 $A+B+C+D=110-(16+15+21)=58$ ，代入上式得 $D=8$ ．

即三组都参加的有 8 人．

【巩固】有甲、乙、丙、丁 4 个人，每三个人的平均年龄加上余下一人的年龄之和分别为 29，23，21 和 17，这 4 人中最大年龄与最小年龄的差是多少？

【解析】设甲、乙、丙、丁 4 个人的年龄分别为 a、b、c、d ，那么有：

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3}+d=29 \\ \frac{b+c+d}{3}+a=23 \\ \frac{a+c+d}{3}+b=21 \\ \frac{a+b+d}{3}+c=17 \end{cases}$$

把四个式子加起来得到：$a+b+c+d=45\cdots(1)$

再将上面方程组里面的每个式子$\times3$后与（1）式相减分别得到：

$a=12$ ，$b=9$ ，$c=3$ ，$d=21$ ，所以年龄最大与最小的差值为 $21-3=18$ 岁

答：这 4 人中最大年龄与最小年龄的差是 18 岁．

模块二、设而不求

【例 30】 10 位小学生的平均身高是 1.5 米，其中有些低于 1.5 米的，他们的平均身高是 1.2 米；另一些高于 1.5 米的，平均身高是 1.7 米，那么最多有________位同学的身高恰好是 1.5 米．

【解析】设身高低于 1.5 米的有 x 人，身高高于 1.5 米的有 y 人，则：

$1.2x+1.7y=1.5(x+y)$，得 $3x=2y$，所以 x 最小为 2，y 最小为 3，身高恰好是 1.5 米的同学最多有 $10-(2+3)=5$ 人．

【巩固】 庙里有若干个大和尚和若干个小和尚，已知 7 个大和尚每天共吃 41 个馒头，29 个小和尚每天共吃 11 个馒头，平均每个和尚每天恰好吃一个馒头．问：庙里至少有多少个和尚？

【解析】设庙里有 $7x$ 个大和尚，$29y$ 个小和尚，则共吃 $(41x+11y)$ 个馒头．由“平均每个和尚每天恰好吃一个馒头”，可列方程：$7x+29y=41x+11y$，化简为 $17x=9y$．当 $x=9$，$y=17$ 时和尚最少，有 $7\times9+29\times17=556$ (个)和尚．

【巩固】 10 位小学生的平均身高是 1.5 米，其中有些低于 1.5 米，他们的平均身高是 1.2 米；另一些高于 1.5 米，他们的平均身高是 1.7 米，那么最多有________位同学的身高恰好是 1.5 米．

【解析】设身高低于 1.5 米的有 x 人，身高高于 1.5 米的有 y 人，则：

$1.2x+1.7y=1.5(x+y)$，得 $3x=2y$，所以 x 最小为 2，y 最小为 3，身高恰好是 1.5 米的同学最多有 $10-(2+3)=5$ 人．

【巩固】 在一次团体知识竞赛中，某学校的平均分是 88 分，其中女生的平均成绩比男生高 10%，而男生的人数比女生多 10%．问男、女生的平均成绩各是多少分？

【解析】设男生的平均成绩为 x 分，女生的人数为 y 人，根据题意可知女生的平均成绩为 $(1+10\%)x=1.1x$ 分，男生的人数为 $(1+10\%)y=1.1y$ 分，则：$x\times1.1y+1.1x\times y=88\times(y+1.1y)$，解得 $x=84$，所以男生的平均成绩为 84 分，女生的平均成绩为 $84\times1.1=92.4$ 分．

【例 31】 某次演讲比赛，原定一等奖 10 人，二等奖 20 人，现将一等奖中的最后 4 人调整为二等奖，这样得二等奖的学生的平均分提高了 1 分，得一等奖的学生的平均分提高了 3 分，那么原来一等奖平均分比二等奖平均分多多少分？

【解析】设原来一等奖的平均分为 x 分，二等奖的平均分为 y 分，得：

$$
\begin{aligned}
10x-(10-4)\times(x+3)&=(20+4)(y+1)-20y\\
4x-18&=4y+24\\
4x&=4y+42\\
x&=y+10.5,
\end{aligned}
$$

即原来一等奖平均分比二等奖平均分多 10.5 分．

【例 32】 有两个学生参加 4 次数学测验，他们的平均分数不同，但都是低于 90 分的整数．他们又参加了第 5 次测验，这样 5 次的平均分数都提高到了 90 分．求第 5 次测验两人的得分．（每次测验满分为 100 分）

【解析】设某一学生前 4 次的平均分为 x 分，第 5 次的得分为 y 分，则其 5 次总分为 $4x+y=90\times5=450$，

于是 $y=450-4x$ ．显然 $90<y\le 100$ ，故 $90<450-4x\le 100$ ，解得 $87.5\le x<90$ ．

由于 x 为整数，可能为 88 和 89，而且这两个学生前 4 次的平均分不同，所以他们前 4 次的平均分分别为 88 分和 89 分，那么他们第 5 次的得分分别为：$450-88\times 4=98$ 分；$450-89\times 4=94$ 分．

【例 33】（2008 年第六届“希望杯”第 1 试六年级）购买 3 斤苹果，2 斤桔子需要 6.90 元；购买 8 斤苹果，9 斤桔子需要 22.80 元，那么苹果、桔子各买 1 斤需要________元.

【解析】假设购买 1 斤苹果、桔子分别需要 x 元、y 元，则：

$$\begin{cases}3x+2y=6.9\\8x+9y=22.8\end{cases},$$

两式相加得 $11x+11y=29.7$ ，即 $x+y=2.7$ 。

所以各买 1 斤需要 2.7 元。

点评：从上面的过程可以看出，本题可以直接采用算术解法：买 $3+8=11$ 斤苹果和 $2+9=11$ 斤苹果，须 $6.90+22.80=29.7$ 元，所以各买 1 斤需要 $29.7\div 11=2.7$ 元.

【例 34】（2008 年“陈省身杯”国际青少年数学邀请赛）有甲、乙、丙三种货物，若购甲 3 件、乙 7 件、丙 1 件，共需 20 元；若购甲 4 件、乙 10 件、丙 1 件，共需 27 元；则购买甲、乙、丙各 1 件，共需要________元。

【解析】设甲、乙、丙的单价分别为 x，y，z，则 $\begin{cases}3x+7y+z=20\cdots\cdots(1)\\4x+10y+z=27\cdots\cdots(2)\end{cases}$，

由 $(1)\times 3-(2)\times 2$ 得 $x+y+z=3\times 20-2\times 27=6$ ，即各买一件需要 6 元。

点评：本题实际上是三元一次方程，但整体代入消元的思想与二元一次方程是相同的。

【例 35】假设五家共用一井取水，甲用绳 2 根不够，差乙家绳子 1 根；乙用绳 3 根不够，差丙家绳子 1 根；丙用绳子 4 根不够。差丁家绳子 1 根；丁用绳子 5 根不够，差戊家绳子 1 根；戊用绳 6 根不够，差甲家绳子 1 根．如果各得所差的绳子 1 根，都能到达井深．问井深，绳长各是多少？（井深为小于 1000 的整数）

【解析】依次设甲、乙、丙、丁、戊家绳长为 A、B、C、D、E，井深 k，则可列出方程组如下：

$$\begin{cases}2A+B=k\\3B+C=k\\4C+D=k\\5D+E=k\\6E+A=k\end{cases}$$

这个方程组不是二元一次方程组，但是解方程组的思想方法与二元一次方程组相同，依次迭代

$B=k-2A$，$C=k-3B=6A-2k$，$D=k-4C=9k-24A$，$E=k-5D=120A-44k$，

代入最后一个式子，$6\times(120A-44k)+A=k$，即 $721A=265k$，所以 $A=265$，$k=721$．

于是，$B=191$，$C=148$，$D=129$，$E=76$．

【例 36】在同一路线上有 4 个人：第一个人坐汽车，第二个人开摩托车，第三个人乘助力车，第四个人骑自行车，各种车的速度是固定的，坐汽车的 12 时追上乘助力车的，14 时遇到骑自行车的，而与开摩托车的相遇是 16 时．开摩托车的遇到乘助力车的是 17 时，并在 18 时追上骑自行车的，问骑自行车的几时遇见乘助力车的？

【解析】12 时以前的位置关系对于这个问题的解决不起任何作用，所以我们从 12 时开始考虑．

设汽车、摩托车、助力车、自行车的速度分别为a、b、c、d，设在12时骑自行车的与坐汽车的距离为x，骑自行车的与开摩托车的之间的距离为y．

有$\begin{cases} x=2(a+d)..........(1) \\ x+y=4(a+b).....(2) \\ x+y=5(b+c)\cdots.(3) \\ y=6(b-d).........(4) \end{cases}$

$(1)\times 2+(3)\times 2-(2)-(4)$得到$3x=10(c+d)$，即$x=\frac{10}{3}(c+d)$

设骑自行车的在t时遇见骑助力车的，则

$x=(t-12)\times(c+d)$，即$t-12=\frac{10}{3}$，所以$t=15\frac{1}{3}$．

所以骑自行车的在15时20分遇见骑助力车的．

【例 37】 河水是流动的，在Q点处流入静止的湖中，一游泳者在河中顺流从P到Q，然后穿过湖到R，共用3小时．若他由R到Q再到P，共需6小时．如果湖水也是流动的，速度等于河水的速度，那么从P到Q再到R需$\frac{5}{2}$小时．问在这样的条件下，从R到Q再到P需几小时？

【解析】设游泳者的速度为1，水速为y，$PQ=a$，$QR=b$，则有：

$$\begin{cases} \frac{a}{1+y}+b=3\cdots\cdots(1) \\ \frac{a+b}{1+y}=\frac{5}{2}\cdots\cdots\cdots(2) \\ \frac{a}{1-y}+b=6\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

且有$1+y$、$1-y$、y均不为0．

$(1)-(2)$得$\frac{by}{1+y}=\frac{1}{2}$，即$b=\frac{1+y}{2y}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)-(1)$得$\frac{2ay}{1-y^2}=3$，即$a=\frac{3(1-y^2)}{2y}\cdots\cdots(5)$

由(2)、(4)、(5)得：$\frac{5}{2}\times(1+y)=a+b=\frac{1+y}{2y}\times(4-3y)$，即$5y=4-3y$．

于是，$y=\frac{1}{2}$．由(2)得：$a+b=\frac{5}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}$．

$\frac{a+b}{1-y}=\frac{15}{4}\div\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$小时．

即题中所述情况下从R到Q再到P需$\frac{15}{2}$小时．