不定方程与不定方程组

教学目标：

1.利用整除及奇偶性解不定方程

2.不定方程的试值技巧

3.学会解不定方程的经典例题

知识要点：

一、知识点说明

历史概述

不定方程是数论中最古老的分支之一．古希腊的丢番图早在公元3世纪就开始研究不定方程，因此常称不定方程为丢番图方程．中国是研究不定方程最早的国家，公元初的五家共井问题就是一个不定方程组问题，公元5世纪的《张丘建算经》中的百鸡问题标志着中国对不定方程理论有了系统研究．宋代数学家秦九韶的大衍求一术将不定方程与同余理论联系起来．

考点说明

在各类竞赛考试中，不定方程经常以应用题的形式出现，除此以外，不定方程还经常作为解题的重要方法贯穿在行程问题、数论问题等压轴大题之中．在以后初高中数学的进一步学习中，不定方程也同样有着重要的地位，所以本讲的着重目的是让学生学会利用不定方程这个工具，并能够在以后的学习中使用这个工具解题。

二、不定方程基本定义

1、定义：不定方程（组）是指未知数的个数多于方程个数的方程（组）。
2、不定方程的解：使不定方程等号两端相等的未知数的值叫不定方程的解，不定方程的解不唯一。
3、研究不定方程要解决三个问题：①判断何时有解；②有解时确定解的个数；③求出所有的解

三、不定方程的试值技巧

1、奇偶性
2、整除的特点（能被2、3、5等数字整除的特性）
3、余数性质的应用（和、差、积的性质及同余的性质）

例题精讲：

模块一、利用整除性质解不定方程

【例 1】 求方程$2x-3y=8$的整数解

【解析】 方法一：

由原方程，易得 $2x=8+3y$，$x=4+\frac{3}{2}y$，因此，对 y 的任意一个值，都有一个 x 与之对应，并且，此时x与y的值必定满足原方程，故这样的x与y是原方程的一组解，即原方程的解可表为：$\begin{cases}x=4+\frac{3}{2}k\\y=k\end{cases}$，其中 k 为任意数．说明　由 y 取值的任意性，可知上述不定方程有无穷多组解．

方法二：

根据奇偶性知道 $2x$ 是偶数，8 为偶数，所以若想 $2x-3y=8$ 成立，y 必为偶数，

当 $y=0$，$x=4$；当 $y=2$，$x=7$；当 $y=4$，$x=10$……，本题有无穷多个解。

【巩固】 求方程 $2x+6y=9$ 的整数解

【解析】 因为 $2x+6y=2(x+3y)$，所以，不论 x 和 y 取何整数，都有 $2|2x+6y$，但 $2 \nmid 9$，因此，不论 x 和 y 取什么整数，$2x+6y$ 都不可能等于 9，即原方程无整数解．

说明：此题告诉我们并非所有的二元一次方程都有整数解。

【例 2】 求方程 $4x+10y=34$ 的正整数解

【解析】 因为 4 与 10 的最大公约数为 2，而 $2|34$，两边约去 2 后，得 $2x+5y=17$，$5y$ 的个位是 0 或 5 两种情况，$2x$ 是偶数，要想和为 17，$5y$ 的个位只能是 5，y 为奇数即可；$2x$ 的个位为 2，所以 x 的取值为 1、6、11、16……

$x=1$ 时，$17-2x=15$，$y=3$，

$x=6$ 时，$17-2x=5$，$y=1$，

$x=11$ 时，$17-2x=17-22$，无解

所以方程有两组整数解为：$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=6\\y=1\end{cases}$

【巩固】 求方程 $3x+5y=12$ 的整数解

【解析】 由 $3x+5y=12$，$3x$ 是 3 的倍数，要想和为 12（3 的倍数），$5y$ 也为 3 的倍数，所以 y 为 3 的倍数即可，所以 y 的取值为 0、3、6、9、12……

$y=0$ 时，$12-5y=12$，$x=4$，

$x=3$ 时，$12-5y=12-15$，无解

所以方程的解为：$\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$

【巩固】 解不定方程：$2x+9y=40$（其中 x,y 均为正整数）

【解析】 方法一：$2x$ 是偶数，要想和为 40（偶数），$9y$ 也为偶数，即 y 为偶数，也可以化简方程 $2x+9y=40$，$x=\frac{40-9x}{2}=20-5y+\frac{y}{2}$ 知道 y 为偶数，所以方程解为：$\begin{cases}x=11\\y=2\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

模块二、利用余数性质解不定方程

【例 3】 求不定方程 $7x+11y=1288$ 的正整数解有多少组？

【解析】 本题无论 x 或是 y，情况都较多，故不可能逐一试验．检验可知 1288 是 7 的倍数，所以 $11y$ 也是 7 的倍数，则 y 是 7 的倍数．

设 $y=7z$，原方程可变为 $x+11z=184$，z 可以为 1，2，3，……16．由于每一个 z 的值都确定了原方程的一组正整数解，所以原方程共有 16 组正整数解．

【例 4】 求方程 $3x+5y=31$ 的整数解

【解析】 方法一：利用欧拉分离法，由原方程，得 $x=\frac{31-5y}{3}$，即 $x=10-2y+\frac{1+y}{3}$，要使方程有整数解 $\frac{1+y}{3}$ 必须为整数．

取 $y=2$，得 $x=10-2y+\frac{1+y}{3}=10-4+1=7$，故 $x=7$，$y=2$

当 $y=5$，得 $x=10-2y+\frac{1+y}{3}=10-10+2=2$，故 $x=2$，$y=5$

当 $y=8$，得 $x=10-2y+\frac{1+y}{3}=10-16+3$ 无解

所以方程的解为：$\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$,$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$

方法二：利用余数的性质

$3x$ 是 3 的倍数，和 31 除以 3 余 1，所以 $5y$ 除以 3 余 1（$2y$ 除以 3 余 1），根据这个情况用余数的和与乘积性质进行判定为：

取 $y=1$，$2y=2$，$2\div3=0\ldots\ldots2$（舍）

$y=2$，$2y=4$，$4\div3=1\ldots\ldots1$（符合题意）

$y=3$，$2y=6$，$6\div3=2$（舍）

$y=4$，$2y=8$，$8\div3=2\ldots\ldots2$（舍）

$y=5$，$2y=10$，$10\div3=3\ldots\ldots1$（符合题意）

$y=6$，$2y=12$，$12\div3=4$（舍）

当 $y>6$ 时，结果超过 31，不符合题意。

所以方程的解为：$\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$,$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$

【巩固】解方程 $7x+4y=89$，（其中 x、y 均为正整数）

【解析】方法一：$7x+4y=89$，$4y$ 是 4 的倍数，和 89 除以 4 余 1，所以 $7x$ 除以 4 余 1（$7\div4\equiv3$），可以看成 $3x$ 除以 4 余 1，根据这个情况用余数的和与乘积性质进行判定为（$x<13$）

$x=1$，$3x=3$，$3\div4\equiv3$（舍）

$x=2$，$3x=6$，$6\div4\equiv2$（舍）

$x=3$，$3x=9$，$9\div4\equiv1$（符合题意）

$x=4$，$3x=12$，$12\div4\equiv0$（舍）

$x=5$，$3x=15$，$15\div4\equiv3$（舍）

$x=6$，$3x=18$，$18\div4\equiv2$（舍）

$x=7$，$3x=21$，$21\div4\equiv1$（符合题意）

$x=8$，$3x=24$，$24\div4\equiv0$（舍）

$x=9$，$3x=27$，$27\div4\equiv3$（舍）

$x=10$，$3x=30$，$30\div4\equiv2$（舍）

$x=11$，$3x=33$，$33\div4\equiv1$（符合题意）

$x=12$，$3x=36$，$36\div4\equiv0$（舍）

所以方程的解为：$\begin{cases}x=3\\y=17\end{cases}$,$\begin{cases}x=7\\y=10\end{cases}$,$\begin{cases}x=11\\y=3\end{cases}$

方法二：利用欧拉分离法，由原方程，$y=\frac{89-7x}{4}=22-2x+\frac{1+x}{4}$，$(x+1)$的取值为 4 的倍数即可，所以方程的解为：$\begin{cases}x=3\\y=17\end{cases}$,$\begin{cases}x=7\\y=10\end{cases}$,$\begin{cases}x=11\\y=3\end{cases}$

模块三、解不定方程组

【例 5】解方程$\begin{cases}1800a+1200b+800c=16000\\a+b+c=15\end{cases}$ （ 其中 a、b、c 均为正整数 ）

【解析】 根据等式的性质将第一个方程整理得$\begin{cases}9a+6b+4c=80\\a+b+c=15\end{cases}$，根据消元的思想将第二个式子扩大 4 倍相减后为：$(9a+6b+4c)-4(a+b+c)=80-4\times15$，整理后得$5a+2b=20$，根据等式性质，$2b$ 为偶数，20 为偶数，所以$5a$为偶数，所以a为偶数，当$a=2$时，$5\times2+2b=20$，$b=5$，所以$c=8$，当$a=4$时，$5\times4+2b=20$，$b=5$，所以无解。所以方程解为$\begin{cases}a=2\\b=5\\c=8\end{cases}$

【例 6】解不定方程$\begin{cases}5x+3y+\frac{1}{3}z=100\\x+y+z=100\end{cases}$ (其中 x、y、z 均为正整数)

【解析】 根据等式的性质将第一个方程整理得$\begin{cases}15x+9y+z=300\\x+y+z=100\end{cases}$，根据消元思想与第二个式子相减得$14x+8y=200$，根据等式的性质两边同时除以 2 得：$7x+4y=100$，根据等式性质$4y$为 4 的倍数，100 为 4 的倍数，所以$7y$为 4 的倍数，所以$y$为 4 的倍数试值如下$\begin{cases}x=4\\y=18,\\z=78\end{cases}\begin{cases}x=8\\y=11,\\z=81\end{cases}\begin{cases}x=12\\y=4\\z=84\end{cases}$