2-3-3 列不定方程解应用题

教学目标

1、 熟练掌握不定方程的解题技巧
2、 能够根据题意找到等量关系设未知数解方程
3、 学会解不定方程的经典例题

知识精讲

一、知识点说明

历史概述

不定方程是数论中最古老的分支之一．古希腊的丢番图早在公元3世纪就开始研究不定方程，因此常称不定方程为丢番图方程．中国是研究不定方程最早的国家，公元初的五家共井问题就是一个不定方程组问题，公元5世纪的《张丘建算经》中的百鸡问题标志着中国对不定方程理论有了系统研究．宋代数学家秦九韶的大衍求一术将不定方程与同余理论联系起来．

考点说明

在各类竞赛考试中，不定方程经常以应用题的形式出现，除此以外，不定方程还经常作为解题的重要方法贯穿在行程问题、数论问题等压轴大题之中．在以后初高中数学的进一步学习中，不定方程也同样有着重要的地位，所以本讲的着重目的是让学生学会利用不定方程这个工具，并能够在以后的学习中使用这个工具解题。

二、运用不定方程解应用题步骤

1、根据题目叙述找到等量关系列出方程
2、根据解不定方程方法解方程
3、找到符合条件的解

模块一、不定方程与数论

【例 1】 把2001拆成两个正整数的和，一个是11的倍数（要尽量小），一个是13的倍数（要尽量大），求这两个数.

【解析】 这是一道整数分拆的常规题．可设拆成的两个数分别为$11x$和$13y$，则有：$11x+13y=2001$，要让x取最小值，y取最大值．

可把式子变形为：$y=\frac{2001-11x}{13}=\frac{13\times153+12-13x+2x}{13}=153-x+\frac{12+2x}{13}$，可见$\frac{12+2x}{13}$是整数，满足这一条件的$x$最小为7，且当$x=7$时，$y=148$．

则拆成的两个数分别是$7\times11=77$和$148\times13=1924$．

【巩固】 甲、乙二人搬砖，甲搬的砖数是18的倍数，乙搬的砖数是23的倍数，两人共搬了300块砖．问：甲、乙二人谁搬的砖多？多几块？

【解析】 设甲搬的是$18x$块，乙搬的是$23y$块．那么$18x+23y=300$．观察发现$18x$和300都是6的倍数，所以y也是6的倍数．由于$y<300\div23\approx13$，所以y只能为6或12．

$y=6$时$18x=162$，得到$x=9$；

$y=12$时$18x=24$，此时x不是整数，矛盾．

所以甲搬了162块，乙搬了138块，甲比乙搬得多，多24块．

【巩固】 现有足够多的5角和8角的邮票，用来付4.7元的邮资，问8角的邮票需要多少张？

【解析】 设5角和8角的邮票分别有x张和y张，那么就有等量关系：$5x+8y=47$．

尝试y的取值，当y取4时，x能取得整数3，当y再增大，取大于等于6的数时，x没有自然数解．所以8角的邮票需要4张．

【例 2】 （2008年北大附中“资优博雅杯”数学竞赛）用十进制表示的某些自然数，恰等于它的各位数字之和的16倍，则满足条件的所有自然数之和为__________________.

【解析】 若是四位数$\overline{abcd}$，则$16\times(a+b+c+d)\leqslant16\times36<1000$，矛盾，四位以上的自然数也不可能。

若是两位数$\overline{ab}$，则$16\times(a+b)>10a+b=\overline{ab}$，也不可能，故只有三位数$\overline{abc}$.

$16\times(a+b+c)=100a+10b+c$，化简得$28a=2b+5c$.由于$2b+5c<7\times9=63$，

所以$a=1$或$b=2$.$a=1$时，$b=9$，$c=2$，或$b=4$，$c=4$；$a=2$时，$b=8$，$c=8$.

所以所有自然数之和为$192+144+288=624$.

模块二、不定方程与应用题

【例 3】 有两种不同规格的油桶若干个，大的能装8千克油，小的能装5千克油，44千克油恰好装满这些油桶．问：大、小油桶各几个？

【解析】 设有大油桶x个，小油桶y个．由题意得：

$$8x+5y=44$$

可知$8x\leq44$，所以$x=0,1,2,3,4,5$．由于x、y必须为整数，所以相应的将x的所有可能值代入方程，可得$x=3$时，$y=4$这一组整数解．

所以大油桶有3个，小油桶有4个．

[小结] 这道题在解答时，也可联系数论的知识，注意到能被5整除的数的特点，便可轻松求解.

【例 4】 在一次活动中，丁丁和冬冬到射击室打靶，回来后见到同学“小博士”，他们让“小博士”猜他们各命中多少次.“小博士”让丁丁把自己命中的次数乘以5，让冬冬把自己命中的次数乘以4，再把两个得数加起来告诉他，丁丁和冬冬算了一下是31，“小博士”正确地说出了他们各自命中的次数．你知道丁丁和冬冬各命中几次吗？

【解析】 设丁丁和冬冬分别命中了x次和y次，则：$5x+4y=31$．可见x除以4的余数为3，而且x不能超过6，所以$x=3$，$y=4$．即丁丁命中了3次，冬冬命中了4次．

【巩固】 某人打靶，8发共打了53环，全部命中在10环、7环和5环上．问：他命中10环、7环和5环各几发？

【解析】 假设命中10环x发，7环y发，5环z发，则$\begin{cases}x+y+z=8\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\10x+7y+5z=53\cdots\cdots(2)\end{cases}$由(2)可知$7y$除以5的余数为3，所以$y=4$、9......如果$y$为9，则$7y=63>53$，所以$y$只能为4，代入原方程组可解得$x=1$，$z=3$．所以他命中10环1发，7环4发，5环3发．

【例 5】 某次聚餐，每一位男宾付130元，每一位女宾付100元，每带一个孩子付60元，现在有$\frac{1}{3}$的成人各带一个孩子，总共收了2160元，问：这个活动共有多少人参加(成人和孩子)？

【解析】 设参加的男宾有x人，女宾有y人，则由题意得方程：$130x+100y+\frac{1}{3}(x+y)\times60=2160$，即$150x+120y=2160$，化简得$5x+4y=72$．这个方程有四组解：$\begin{cases}x=4\\y=13\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\y=8\end{cases}$，$\begin{cases}x=12\\y=3\end{cases}$和$\begin{cases}x=0\\y=18\end{cases}$，

但是由于有$\frac{1}{3}$的成人带着孩子，所以$x+y$能被3整除，检验可知只有后两组满足．

所以，这个活动共有$12+3+\frac{1}{3}\times(12+3)=20$人或$18+\frac{1}{3}\times18=24$人参加．

【巩固】 单位的职工到郊外植树，其中有男职工，也有女职工，并且有$\frac{1}{3}$的职工各带一个孩子参加．男职工每人种13棵树，女职工每人种10棵树，每个孩子都种6棵树，他们一共种了216棵树，那么其中有多少名男职工？

【解析】 因为有$\frac{1}{3}$的职工各带一个孩子参加，则职工总人数是3的倍数．设男职工有x人，女职工有y人．

则职工总人数是$(x+y)$人，孩子是$\frac{x+y}{3}$人．得到方程：$13x+10y+(x+y)\div3\times6=216$，化简得：$5x+4y=72$．因为男职工与女职工的人数都是整数，所以当$y=3$时，$x=12$；当$y=8$时，$x=8$；当$y=13$，$x=4$．其中只有$3+12=15$是3的倍数，符合题意，所以其中有12名男职工．

【例 6】 张师傅每天能缝制3件上衣，或者9件裙裤，李师傅每天能缝制2件上衣，或者7件裙裤，两人20天共缝制上衣和裙裤134件，那么其中上衣是多少件？

【解析】 如果20天都缝制上衣，共可缝制$(3+2)\times20=100$件，实际上比这多缝制了$134-100=34$件，这就要把上衣换成裙裤，张师傅每天可多换$9-3=6$件，李师傅每天可多换$7-2=5$件，设张师傅缝制裙裤x天，李师傅缝制裙裤y天，则：$6x+5y=34$，整数解只有$x=4$，$y=2$．

因此共缝制裙裤$9\times4+7\times2=50$件，上衣共$134-50=84$件．

【巩固】 小花狗和波斯猫是一对好朋友，它们在早晚见面时总要叫上几声表示问候．若是早晨见面，小花狗叫两声，波斯猫叫一声；若是晚上见面，小花狗叫两声，波斯猫叫三声．细心的小娟对它们的叫声统计了15天，发现它们并不是每天早晚都见面．在这15天内它们共叫了61声．问：波斯猫至少叫了多少声？

【解析】 早晨见面小花狗和波斯猫共叫3声，晚上见面共叫5声．设在这15天内早晨见面x次，晚上见面y次．根据题意有：$3x+5y=61$（$x\leqslant15$，$y\leqslant15$）．

可以凑出，当$x=2$时，$y=11$；当$x=7$时，$y=8$；当$x=12$时，$y=5$．

因为小花狗共叫了$2(x+y)$声，那么$(x+y)$越大，小花狗就叫得越多，从而波斯猫叫得越少，所以当$x=12$，$y=5$时波斯猫叫得最少，共叫了$1\times12+3\times5=27$（声）．

【例 7】 甲、乙两人生产一种产品，这种产品由一个A配件与一个B配件组成．甲每天生产300个A配件，或生产150个B配件；乙每天生产120个A配件，或生产48个B配件．为了在10天内生产出更多的产品，二人决定合作生产，这样他们最多能生产出多少套产品？

【解析】 假设甲、乙分别有x天和y天在生产A配件，则他们生产B配件所用的时间分别为$(10-x)$天和$(10-y)$天，那么10天内共生产了A配件$(300x+120y)$个，共生产了B配件$150\times(10-x)+48\times(10-y)=1980-150x-48y$个．要将它们配成套，$A$配件与$B$配件的数量应相等，即$300x+120y=1980-150x-48y$，得到$75x+28y=330$，则$x=\frac{330-28y}{75}$．

此时生产的产品的套数为$300x+120y=300\times\frac{330-28y}{75}+120y=1320+8y$，要使生产的产品最多，就要使得$y$最大，而$y$最大为10，所以最多能生产出$1320+8\times10=1400$套产品．

【巩固】 某服装厂有甲、乙两个生产车间，甲车间每天能生产上衣16件或裤子20件；乙车间每天能生产上衣18件或裤子24件．现在要上衣和裤子配套，两车间合作21天，最多能生产多少套衣服？

【解析】 假设甲、乙两个车间用于生产上衣的时间分别为x天和y天，则他们用于生产裤子的天数分别为$(21-x)$天和$(21-y)$天，那么总共生产了上衣$(16x+18y)$件，

生产了裤子$20\times(21-x)+24\times(21-y)=924-20x-24y$件．

根据题意，裤子和上衣的件数相等，所以$16x+18y=924-20x-24y$，即$6x+7y=154$，即$x=\frac{154-7y}{6}$．那么共生产了$16x+18y=16\times\frac{154-7y}{6}+18y=410\frac{2}{3}-\frac{2}{3}y$套衣服．

要使生产的衣服最多，就要使得y最小，则x应最大，而x最大为21，此时$y=4$．故最多可以生产出$410\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times4=408$套衣服．

【例 8】 有一项工程，甲单独做需要36天完成，乙单独做需要30天完成，丙单独做需要48天完成，现在由甲、乙、丙三人同时做，在工作期间，丙休息了整数天，而甲和乙一直工作至完成，最后完成这项工程也用了整数天，那么丙休息了_______天．

【解析】 设完成这项工程用了a天，其间丙休息了b天．

根据题意可知：$\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{30}+\frac{1}{48}\right)a-\frac{1}{48}b=1$，$\frac{59}{720}a-\frac{1}{48}b=1$，化简得$59a-15b=720$．

由上式，因为$15b$与720都是15的倍数，所以$59a$必须是15的倍数，所以a是15的倍数，在$a>b$ 的条件下，只有$a=15$，$b=11$一组解，即丙休息了11天．

【例 9】 **实验小学的五年级学生租车去野外开展“走向大自然，热爱大自然”活动，所有的学生和老师共306人恰好坐满了5辆大巴车和3辆中巴车，已知每辆中巴车的载客人数在20人到25人之间，求每辆大巴车的载客人数．**

【解析】 设每辆大巴车和中巴车的载客人数分别为x人和y人，那么有：$5x+3y=306$．由于知道中巴车的载客人数，也就是知道了y的取值范围，所以应该从y入手．显然$3y$被5除所得的余数与306被5除所得的余数相等，从个位数上来考虑，$3y$的个位数字只能为1或6，那么当y的个位数是2或7时成立．由于y的值在20与25之间，所以满足条件的$y=22$，继而求得$x=48$，所以大巴车的载客人数为48人．

【巩固】 **实验小学的五年级学生租车去野外开展“走向大自然，热爱大自然”活动，所有的学生和老师共306人恰好坐满了7辆大巴车和2辆中巴车，已知每辆中巴车的载客人数在20人到25人之间，求每辆大巴车的载客人数．**

【解析】 设大巴车和中巴车的载客人数分别为x人和y人，那么有：$7x+2y=306$．

考虑等式两边除以 7 的余数，由于306被7除余5，所以$2y$被7除余5，符合条件的y有：6、13、20、27，所以$y=20$，继而求得$x=38$，所以大巴车的载客人数为38人．

【巩固】 **每辆大汽车能容纳54人，每辆小汽车能容纳36人．现有378人，要使每个人都上车且每辆车都装满，需要大、小汽车各几辆？**

【解析】 设需要大、小汽车分别为x辆、y辆，则有：$54x+36y=378$，可化为$3x+2y=21$．

可以看出y是3的倍数，又不超过10，所以y可以为0、3、6或9，将$y=0$、3、6、9分别代入可知有四组解：$\begin{cases}x=1\\y=9\end{cases}$；或$\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$；或$\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$；或$\begin{cases}x=7\\y=0\end{cases}$

即需大汽车1辆，小汽车9辆；或大汽车3辆，小汽车6辆；或大汽车5辆，小汽车3辆；或大汽车7辆．

【巩固】 **小伟听说小峰养了一些兔和鸡，就问小峰：“你养了几只兔和鸡？”小峰说：“我养的兔比鸡多，鸡兔共24条腿．”那么小峰养了多少兔和鸡？**

【解析】 这是一道鸡兔同笼问题，但由于已知鸡兔腿的总数，而不是鸡兔腿数的差，所以用不定方程求解．

设小峰养了x只兔子和y只鸡，由题意得：

$$4x+2y=24$$

即：$2x+y=12$，$y=12-2x$

这是一个不定方程，其可能整数解如下表所示：

x	0	1	2	3	4	5	6
y	12	10	8	6	4	2	0

由题意 $x>y$ ，且 x ， y 均不为 0 ，所以 $x=5$ ， $y=2$ ，也就是兔有 5 只，鸡有 2 只．

【例 10】（1999 年香港保良局亚洲区城市小学数学邀请赛）一个家具店在 1998 年总共卖了 213 张床．起初他们每个月卖出 25 张床，之后每个月卖出 16 张床，最后他们每个月卖出 20 张床．问：他们共有多少个月是卖出 25 张床？

【解析】设卖出 25、16、20 张床的月份分别为 x 、 y 、 z 个月，则：

$$\begin{cases}x+y+z=12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\25x+16y+20z=213\cdots(2)\end{cases}$$

由(1)得 $y=12-x-z$ ，代入(2)得 $9x+4z=21$ ．

显然这个方程的正整数解只有 $x=1$ ， $z=3$ ．

所以只有 1 个月是卖出 25 张床的．

【例 11】（2008 年“希望杯”第二试试题）五年级一班共有 36 人，每人参加一个兴趣小组，共有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个小组．若参加 A 组的有 15 人，参加 B 组的人数仅次于 A 组，参加 C 组、 D 组的人数相同，参加 E 组的人数最少，只有 4 人．那么，参加 B 组的有______人．

【解析】设参加 B 组的有 x 人，参加 C 组、 D 组的有 y 人，则 $x>y>4$ ，

由题知 $15+x+2y+4=36$ ，整理得 $x+2y=17$ ；

由于 $y>4$ ，若 $y=5$ ，得 $x=7$ ，满足题意；若 $y\geq 6$ ，则 $x\leq 5$ ，与 $x>y$ 矛盾；

所以只有 $x=7$ ， $y=5$ 符合条件，故参加 B 组的有 7 人．

【例 12】（2008 年全国小学生“我爱数学夏令营”数学竞赛）将一群人分为甲乙丙三组，每人都必在且仅在一组．已知甲乙丙的平均年龄分为 37 ， 23 ， 41 ．甲乙两组人合起来的平均年龄为 29 ；乙丙两组人合起来的平均年龄为 33 ．则这一群人的平均年龄为______．

【解析】设甲乙丙三组分别有 x ， y ， z 人，依提议有：

$$\begin{cases}37x+23y=29(x+y) & (1)\\23y+41z=33(y+z) & (2)\end{cases}$$

由(1)化简可得 $x:y=3:4$ ，由(2)化简可得 $y:z=4:5$ ，所以 $x:y:z=3:4:5$ ；

因此，这一群人的平均年龄为 $\dfrac{37\times3+23\times4+41\times5}{3+4+5}=34$ ．

【例 13】14 个大、中、小号钢珠共重 100 克，大号钢珠每个重 12 克，中号钢珠每个重 8 克，小号钢珠每个重 5 克．问：大、中、小号钢珠各有多少个？

【解析】设大、中、小号钢珠分别有 x 个， y 个和 z 个，则： $\begin{cases}x+y+z=14\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\12x+8y+5z=100\cdots\cdots(2)\end{cases}$ $(2)-(1)\times5$ ，

得 $7x+3y=30$ ．可见 $7x$ 是 3 的倍数，又是 7 的倍数，且小于 30，所以只能为 21，故 $x=3$ ，代入得 $y=3$ ， $z=8$ ．所以大、中、小号钢珠分别有 3 个、3 个和 8 个．

【巩固】袋子里有三种球，分别标有数字 2 ， 3 和 5 ，小明从中摸出 12 个球，它们的数字之和是 43 ．问：小明最多摸出几个标有数字 2 的球？

【解析】 设小明摸出标有数字 2 ，3 和 5 的球分别为 x ，y ，z 个，于是有

$$\begin{cases}x+y+z=12\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\2x+3y+5z=43\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由 $5\times(1)-(2)$ ，得 $3x+2y=17\cdots\cdots\cdots(3)$ ，

由于 x ，y 都是正整数，因此在(3)中，y 取 1 时．x 取最大值 5 ，

所以小明最多摸出 5 个标有数字 2 的球．

【例 14】 公鸡 1 只值钱 5，母鸡一只值钱 3，小鸡三只值钱 1，今有钱 100，买鸡 100 只，问公鸡、母鸡、小鸡各买几只？

【解析】 设买公鸡、母鸡、小鸡各 x、y、z 只，根据题意，得方程组 $\begin{cases}x+y+z=100①\\5x+3y+\frac{1}{3}z=100②\end{cases}$ 由②×3－①，得 $14x+8y=200$ ，即：$y=\frac{200-14x}{8}=25-\frac{7}{4}x$ ，因为 x、y 为正整数，所以不难得出 x 应为 4 的倍数，故 x 只能为 4、8、12 ，从而相应 y 的值分别为 18、11、4 ，相应 z 的值分别为 78、81、84 ．所以，方程组的特殊解为 $\begin{cases}x=4\\y=18\\z=78\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\y=11\\z=81\end{cases}$，$\begin{cases}x=12\\y=4\\z=84\end{cases}$ ，所以公鸡、母鸡、小鸡应分别买 4 只、18 只、78 只或 8 只、11 只、81 只或 12 只、4 只、84 只．

【巩固】 小明玩套圈游戏，套中小鸡一次得 9 分，套中小猴得 5 分，套中小狗得 2 分．小明共套了 10 次，每次都套中了，每个小玩具都至少被套中一次，小明套 10 次共得 61 分．问：小明至多套中小鸡几次？

【解析】 设套中小鸡 x 次，套中小猴 y 次，则套中小狗 $(10-x-y)$ 次．根据得 61 分可列方程：$9x+5y+2\times(10-x-y)=61$ ，化简后得 $7x=41-3y$ ．显然 y 越小，x 越大． 将 $y=1$ 代入得 $7x=38$ ，无整数解；若 $y=2$ ，$7x=35$ ，解得 $x=5$ ，所以小明至多套中小鸡 5 次．

【例 15】 开学前，宁宁拿着妈妈给的 30 元钱去买笔，文具店里的圆珠笔每支 4 元，铅笔每支 3 元．宁宁买完两种笔后把钱花完．请问：她一共买了几支笔？

【解析】 (法一)由于题中圆珠笔与铅笔的数量都不知道，但总费用已知，所以可以根据不定方程分析两种笔的数量，进而得解．设她买了 x 支圆珠笔，y 支铅笔，由题意列方程：$4x+3y=30$ ，所以 $3y=30-4x$ ，$y=10-\frac{4x}{3}$ 因为 x、y 均为整数，所以 x 应该能被 3 整除，又因为 $1\le x\le7$ ，所以 $x=3$ 或 6 ，当 $x=3$ 时，$y=6$ ，$x+y=9$ ，当 $x=6$ 时，$y=2$ ，$x+y=8$ ，宁宁共买了 9 支笔或 8 支笔．

(法二)换个角考虑：将"一支圆珠笔和一支铅笔"看成一对，分析宁宁可能买了几对笔，不妨设为

m 对，余下的一定是圆珠笔与铅笔中的唯一一种．一对笔的售价为" $4+3=7$ 元，由题意

可知，$1\le m\le4$ ，又 m 为整数

（1）当 $m=1$ 时，余款为 $30-7=23$ ，不能被3或4整除，这种情况不可能；

（2）当 $m=2$ 时，余款为 $30-2\times7=16$ ，能被4整除，也就是说配对后，余下4支圆珠笔．此时，宁宁买了6支圆珠笔，2支铅笔，共8支笔．

（3）当 $m=3$ 时，余款为 $30-3\times7=9$ ，能被3整除，也就是说配对后，余下3支圆珠笔．此时，宁宁买了3支圆珠笔，6支铅笔，共9支笔．

（4）当 $m=4$ 时，余款为 $30-4\times7=2$ ，不能被3或4整除，这种情况不可能，由上面的分析可知，宁宁共买了9支笔或8支笔．

【巩固】（迎春杯预赛试题）小华和小强各用6角4分买了若干支铅笔，他们买来的铅笔中都是5分一支和7分一支的两种，而且小华买来的铅笔比小强多．小华比小强多买来铅笔多少支．

【解析】设买5分一支的铅笔 m 支，7分一支的铅笔 n 支．则：$5\times m+7\times n=64$ ，$64-7\times n$ 是5的倍数．用 $n=0$ ，1，2，3，4，5，6，7，8代入检验，只有 $n=2$ ，7满足这一要求，得出相应的 $m=10$ ，3．即小华买铅笔 $10+2=12$ 支，小强买铅笔 $7+3=10$ 支，小华比小强多买2支．

【例 16】蓝天小学举行“迎春”环保知识大赛，一共有100名男、女选手参加初赛，经过初赛、复赛，最后确定了参加决赛的人选．已知参加决赛的男选手的人数，占初赛的男选手人数的20%；参加决赛的女选手的人数，占初赛的女选手人数的12.5%，而且比参加初赛的男选手的人数多．参加决赛的男、女选手各有多少人？

【解析】由于参加决赛的男选手的人数，占初赛的男选手人数的20%；参加决赛的女选手的人数，占初赛时女选手人数的12.5%，所以参加初赛的男选手人数应是5的倍数，参加初赛的女选手的人数应是8的倍数．

设参加初赛的男生为 $5x$ 人，参加初赛的女生为 $8y$ 人．

根据题意可列方程：$5x+8y=100$ ．

解得 $\begin{cases}x=12\\y=5\end{cases}$ ，或 $\begin{cases}x=4\\y=10\end{cases}$ ．

又因为参加决赛的女选手的人数，比参加决赛的男选手的人数多，也就是 y 要比 x 大，所以第一组解不合适，只有 $x=4$ ，$y=10$ 满足．

故参加决赛的男选手为4人，女选手为10人．

【巩固】今有桃95个，分给甲、乙两班学生吃，甲班分到的桃有 $\frac{2}{9}$ 是坏的，其他是好的；乙班分到的桃有 $\frac{3}{16}$ 是坏的，其他是好的．甲、乙两班分到的好桃共有几个？

【解析】甲班分到的桃是9的倍数，乙班分到的桃是16的倍数，假设甲班分到桃 $9x$ 个，乙班分到桃 $16y$ 个．于是：$9x+16y=95$ ，解得 $x=7$ ，$y=2$ ，即甲班分到桃 $9\times7=63$（个），乙班分到桃

$16\times2=32$（个）．所以，两班共分到好桃 $63\times(1-\frac{2}{9})+32\times(1-\frac{3}{16})=75$（个）．

【例 17】 甲、乙两人各有一袋糖，每袋糖都不到 20 粒．如果甲给乙一定数量的糖后，甲的糖就是乙的 2 倍；如果乙给甲同样数量的糖后，甲的糖就是乙的 3 倍．甲、乙两人共有多少粒糖？

【解析】 设甲、乙原有糖分别为 x 粒、y 粒，甲给乙的数量为 z 粒，则依题意有：

$\begin{cases}x-z=2(y+z)\\x+z=3(y-z)\end{cases}$，且 $\begin{cases}x\le20\\y\le20\end{cases}$．整理得 $\begin{cases}x-2y-3z=0\cdots\cdots(1)\\x-3y+4z=0\cdots\cdots(2)\end{cases}$

由(1)得 $x=2y+3z$，代入(2)得 $7z-y=0$，即 $y=7z$．

因 $y\le20$，故 $z=1$ 或 $z=2$．

若 $z=2$，则 $y=14$，$x=2\times14+3\times2=34>20$，不合题意．

因而 $z=1$，对应方程组有唯一解 $x=17$，$y=7$，$z=1$．则甲、乙共有糖 $17+7=24$ 粒．

【巩固】 有两小堆砖头，如果从第一堆中取出 100 块放到第二堆中去，那么第二堆将比第一堆多一倍．如果相反，从第二堆中取出若干块放到第一堆中去，那么第一堆将是第二堆的 6 倍．问：第一堆中的砖头最少有多少块？

【解析】 设第一堆砖有 x 块，则根据第一个条件可得第二堆砖有 $(2x-300)$ 块．

再设从第二堆中取出 y 块放在第一堆后，第一堆将是第二堆的 6 倍，可列方程：

$x+y=6\times(2x-300-y)$，化简得 $7y+1800=11x$，

那么 $x=(7y+1800)\div11=163+\frac{7y+7}{11}$．

因为 x 是整数，7 与 11 互质，所以 $(y+1)$ 应是 11 的倍数，y 最小是 10，推知 x 最小是 $163+\frac{7\times(10+1)}{11}=163+7=170$，所以，第一堆中的砖头最少有 170 块．

【例 18】 (第六届华杯赛复赛第 16 题)甲乙丙三个班向希望工程捐赠图书，已知甲班有 1 人捐 6 册，有 2 人各捐 7 册，其余都各捐 11 册，乙班有 1 人捐 6 册，3 人各捐 8 册，其余各捐 10 册；丙班有 2 人各卷 4 册，6 人各捐 7 册，其余各捐 9 册。已知甲班捐书总数比乙班多 28 册，乙班比丙班多 101 册，各班捐书总数在 400 册与 550 册之间，问各班各有多少人？

【解析】 我们设甲班有 x 人，乙班有 y 人，丙班有 z 人，那么三个班的捐书数目分别为：

$11(x-3)+6+7+7=11x-13$，

$10(y-4)+6+8\times3=10y-10$，

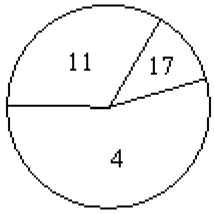
$9(z-8)+4\times2+7\times6=9z-22$，

根据题意有：$\begin{matrix}11x-13=(10y-10)+28\\10y-10=(9z-22)+101\end{matrix}$，即有 $\begin{matrix}11x=10y+31\\10y=9z+89\end{matrix}$

又因为各班的捐书数目都在 400 到 550 之间，因此我们知道：捐书最多的甲班有 $11x-13\le550$，而捐书最少的丙班有 $9z-22\ge400$，从而有 $563\ge11x=10y+31=(9z+89)+31\ge422+89+31=542$，于是有 $52>x>49$，所以有 $x=50$ 或 51。经检验，当 $x=50$ 时，y 不是整数，而当 $x=51$ 时，有 $y=53, z=49$，也就是说，甲乙丙三班人数分别为 51，53，49。

【例 19】 (2009 年“迎春杯”高年级组复赛)在新年联欢会上，某班组织了一场飞镖比赛．如右图，飞镖的靶子分为三块区域，分别对应 17 分、11 分和 4 分．每人可以扔若干次飞镖，脱靶不得分，投中靶子就可以得到相应的分数．若恰好投在两块(或三块)区域的交界线上，则得两块(或三块)

区域中分数最高区域的分数．如果比赛规定恰好投中120分才能获奖，要想获奖至少需要投中次飞镖．



【解析】 假设投中 17 分、11 分、4 分的次数分别为 x 次、 y 次和 z 次，那么投中飞镖的总次数为 $(x+y+z)$ 次，而总得分为 $17x+11y+4z$ 分，要想获奖，必须 $17x+11y+4z=120$ ．

由于 $17x<120$ ，得到 $x\le 6$ ．当 x 的值一定后，要使 $(x+y+z)$ 最小，必须使 y 尽可能大．

若 $x=6$ ，得到 $11y+4z=18$ ，此时无整数解；

若 $x=5$ ，得到 $11y+4z=35$ ，此时 $y=1$ ， $z=6$ ， $x+y+z=5+1+6=12$ ；

若 $x=4$ ，得到 $11y+4z=52$ ，此时 y 最大为 4，当 $y=4$ 时 $z=2$ ，这种情况下 $x+y+z=10$ ；

若 $x=3$ ，得到 $11y+4z=69$ ，此时 $y=3$ ， $z=9$ ， $x+y+z=3+3+9=15$ ；

若 $x=2$ ，得到 $11y+4z=86$ ，此时 y 最大为 6，当 $y=6$ 时 $z=5$ ，这种情况下 $x+y+z=13$ ；

若 $x=1$ ，得到 $11y+4z=103$ ，此时 y 最大为 9，当 $y=9$ 时 $z=1$ ，这种情况下 $x+y+z=11$ ；

若 $x=0$ ，得到 $11y+4z=120$ ，此时 y 最大为 8，当 $y=8$ 时 $z=8$ ，这种情况下 $x+y+z=16$ ．

经过比较可知 $(x+y+z)$ 的值最小为 10，所以至少需要投中 10 次飞镖才能获奖．

模块三、不定方程与生活中的应用题

【例 20】 某地用电收费的标准是：若每月用电不超过50度，则每度收5角；若超过50度，则超出部分按每度8角收费．某月甲用户比乙用户多交3元3角电费，这个月甲、乙各用了多少度电？

【解析】 3 元 3 角即 33 角，因为33既不是5的倍数又不是8的倍数，所以甲、乙两用户用电的情况一定是一个超过了 50 度，另一个则没有超过．由于甲用户用电更多，所以甲用户用电超过50度，乙用户用电不足 50 度．设这个月甲用电 $(50+x)$ 度，乙用电 $(50-y)$ 度．因为甲比乙多交 33 角电费，所以有 $8x+5y=33$ ．容易看出 $x=1$ ， $y=5$ ，可知甲用电51度，乙用电45度．

【巩固】 某区对用电的收费标准规定如下：每月每户用电不超过10度的部分，按每度0.45元收费；超过10度而不超过20度的部分，按每度0.80元收费；超过20度的部分按每度1.50元收费．某月甲用户比乙用户多交电费7.10元，乙用户比丙用户多交3.75元，那么甲、乙、丙三用户共交电费多少元？（用电都按整度数收费）

【解析】 由于丙交的电费最少，而且是求甲、乙电费的关键，先分析一下他的用电度数．因为乙用户比

丙用户多交3.75元，所以二者中必有一个用电度数小于10度(否则差中不会出现0.05元)，丙用电少，所以丙用电度数小于10度，乙用电度数大于10度，但是不会超过20度(否则甲、乙用电均超过20度，其电费差应为1.50的整数倍，而不会是7.10元)．

设丙用电$(10-x)$度，乙用电$(10+y)$度，由题意得：

$$0.45x+0.8y=3.75$$
$$9x+16y=75$$
$$9x=75-16y$$
$$x=\frac{75-16y}{9}$$

所以y是3的倍数，又x,y均为整数，且都大于0小于10

所以$y=3$，$x=\frac{75-16\times3}{9}=3$

所以丙用电$10-3=7$度，交电费$0.45\times7=3.15$元；乙交电费$3.15+3.75=6.90$元，甲交电费

$6.90+7.10=14.00$元，三户共交电费$3.15+6.90+14.00=24.05$元．

【例21】马小富在甲公司打工，几个月后又在乙公司兼职，甲公司每月付给他薪金470元，乙公司每月付给他薪金350元．年终，马小富从两家公司共获薪金7620元．他在甲公司打工______个月，在乙公司兼职______个月．

【解析】设马小富在甲公司打工a月，在乙公司兼职b月($a>b$，a、b都是不大于12的自然数)，则有$470a+350b=7620$，化简得$47a+35b=762$．若b为偶数，则$35b$的末位数字为0，从而$47a$的末位数字必为2，这时$a=6$．但$a=6$时，$b=\frac{480}{35}$不是整数，不合题意，所以b必为奇数．b为奇数时，$35b$的末位数字为5，从而$47a$的末位数字为7，$a=1$或$a=11$．但$a=1$时容易看出$a<b$，与$a>b$矛盾．所以，$a=11$，代入得$b=(762-47\times11)\div35=7$．

于是马小富在甲公司打工11个月，在乙公司兼职7个月．

【例22】甲、乙、丙、丁、戊五人接受了满分为10分(成绩都是整数)的测验．已知：甲得了4分，乙得了最高分，丙的成绩与甲、丁的平均分相等，丁的成绩刚好等于五人的平均分，戊比丙多2分．求乙、丙、丁、戊的成绩．

【解析】法一：方程法．设丁的分数为x分，乙的分数为y分，那么丙的分数为$\frac{x+4}{2}$分，戊的分数为$\frac{x+4}{2}+2=\frac{x+8}{2}$分，根据"丁的成绩刚好等于五人的平均分"，有$5x=4+x+\frac{x+4}{2}+\frac{x+8}{2}+y$，所以$3x=10+y$．因为$x<y\leqslant10$，所以$3x=10+y\leqslant10+10=20$，$3x=10+y>10+x$，得到$5<x\leqslant\frac{20}{3}$，故$x=6$，代入得$y=8$．所以丁得6分，丙得5分，戊得7分，乙得8分．

法二：推理法．因为丁为五人的平均分，所以丁不是成绩最低的；丙的成绩与甲、丁的平均分相等，所以丙在甲与丁之间；又因为戊和乙都比丙的成绩高，所以乙、丙、丁、戊都不是最低分，那么甲的成绩是最低的．因为甲是4分，所以丁可能是6分或8分(由丙的成绩与甲、丁的平均分相等知丁的得分是偶数)，经检验丁得8分时与题意不符，所以丁得6分，则丙得5分，戊得

7分，乙得8分．

【巩固】有两个学生参加4次数学测验，他们的平均分数不同，但都是低于90分的整数．他们又参加了第5次测验，这样5次的平均分数都提高到了90分．求第5次测验两人的得分．（每次测验满分为100分）

【解析】设某一学生前4次的平均分为x分，第5次的得分为y分，则其5次总分为$4x+y=90\times5=450$，于是$y=450-4x$．显然$90<y\leqslant100$，故$90<450-4x\leqslant100$，解得$87.5\leqslant x<90$．

由于x为整数，可能为88和89，而且这两个学生前4次的平均分不同，所以他们前4次的平均分分别为88分和89分，那么他们第5次的得分分别为：$450-88\times4=98$分；$450-89\times4=94$分．

【例23】小明、小红和小军三人参加一次数学竞赛，一共有100道题，每个人各解出其中的60道题，有些题三人都解出来了，我们称之为“容易题”；有些题只有两人解出来，我们称之为“中等题”；有些题只有一人解出来，我们称之为“难题”．已知每个题都至少被他们中的一人解出，则难题比容易题多______道．

【解析】设容易题、中等题和难题分别有x道、y道、z道，则$\begin{cases}x+y+z=100\cdots\cdots(1)\\3x+2y+z=180\cdots(2)\end{cases}$，由$(1)\times2-(2)$得$2x+2y+2z-(3x+2y+z)=200-180$，即$z-x=20$，所以难题比容易题多20道．

【例24】甲、乙两个同学在一次数学擂台赛中，试卷上有解答题、选择题、填空题各若干个，而且每个小题的分值都是自然数．结果公布后，已知甲做对了5道解答题，7道选择题，9道填空题，共得52分；乙做对了7道解答题，9道选择题，11道填空题，共得68分．问：解答题、选择题、填空题的每道小题各多少分？

【解析】设每道解答题为x分，每道选择题为y分，每道填空题为z分，有$\begin{cases}5x+7y+9z=52\\7x+9y+11z=68\end{cases}$，解得$y+2z=6$．因为$y$、$z$都是自然数，而且不为0，所以有$y=2$，$z=2$，或者$y=4$，$z=1$．分别代入原方程解得$x=4$或者$x=3$．所以解答题、选择题、填空题的每道小题的分数分别为4分、2分、2分或者3分、4分、1分．

【例25】（2007年“我爱数学夏令营”数学竞赛）甲乙丙三人参加一个共有30个选择题的比赛，计分办法是在30分的基础上，每答对一题加4分，答错一题扣1分，不答既不扣分也不加分．赛完后发现根据甲所得总分可以准确算出他答对的题数，乙、丙二人所得总分相同，仅比甲少1分，但乙丙答对的题数却互不相同．由此可知，甲所得总分最多为_______．

【解析】设乙做对a道题，做错b道题；丙做对m道，做错n道，则有$4a-b=4m-n$．$4(a-m)=b-n$，则有$4|b-n$．要使得甲总分最高，由于乙丙仅比甲少1分，则乙丙也应尽可能总分最高，从而错题最少，其他的题全多．若$b=4$，$n=0$，则$a-m=1$，$a=26$，$m=25$．此时乙得分为$26\times4-4+30=130$分，丙得分为$25\times4-0+30=130$分，甲得分为$130+1=131$分．甲扣19分，只能$5\times3+4=19$，别无其他方式，即只能错3题空1题．若$b=5$，$n=1$，则$a-m=1$，$a=25$，$m=24$．此时乙得分为$25\times4-5+30=126$分，甲得分为$125+1=126$分．这种得分不唯一，且得分不是最高，其他情况不可能超过131分．综上所述，甲的总分为131分．

【例26】某男孩在2003年2月16日说：“我活过的月数以及我活过的年数之差，到今天为止正好就是

111．”请问：他是在哪一天出生的？

【解析】 设男孩的年龄为 x 个年和 y 个月，即 $12x+y$ 个月，由此有方程式：$12x+y-x=111$，也就是 $11x+y=11\times10+1$，得到 $x=10+\frac{1-y}{11}$，由于 $0\leqslant y<12$ 而且 $\frac{1-y}{11}$ 是整数，所以，$y=1$，$x=10$，从2003年2月16日那天退回10年又1个月就是他的生日，为1993年1月16日．

【例 27】 某次演讲比赛，原定一等奖10人，二等奖20人，现将一等奖中的最后4人调整为二等奖，这样得二等奖的学生的平均分提高了1分，得一等奖的学生的平均分提高了3分，那么原来一等奖平均分比二等奖平均分多________分．

【解析】 设原来一等奖的平均分为 x 分，二等奖的平均分为 y 分，得：
$10x-(10-4)\times(x+3)=(20+4)(y+1)-20y$，整理得 $x=y+10.5$，即 $x-y=10.5$，
所以原来一等奖平均分比二等奖平均分多10.5分．

【例 28】 某次数学竞赛准备了35支铅笔作为奖品发给一、二、三等奖的学生，原计划一等奖每人发给6支，二等奖每人发给3支，三等奖每人发给2支，后来改为一等奖每人发13支，二等奖每人发4支，三等奖每人发1支．那么获二等奖的有______人．

【解析】 法一：

根据“后来改为一等奖每人发13支”，可以确定获一等奖的人数小于3．否则仅一等奖就要发不少于39支铅笔，已超过35支，这是不可能的．分别考虑一等奖有2人或者1人的情况：

①获一等奖有2人时，改变后这2人共多得 $(13-6)\times2=14$ 支，那么得二等奖和三等奖的共少得了14支铅笔．

由于改变后二等奖多得1支，三等奖少得1支，所以三等奖应比二等奖多 $14\div1=14$ 人，这样他们少得的铅笔数正好是一等奖多得的．但此时三等奖至少14人，他们的铅笔总数至少为 $13\times2+14\times1=40>35$，所以这种情况不可能发生．

②获一等奖有1人时，类似前面情况的讨论，可以确定获三等奖的人数比二等奖多 $(13-6)\div(2-1)=7$ 人，所以获二等奖的有 $(35-13-7\times1)\div(4+1)=3$（人）．

经检验，获一等奖1人，获二等奖3人，获三等奖10人符合题目要求，所以有3人获二等奖．

法二：

设获一、二、三等奖的人数分别有 x 人、y 人、z 人，则有方程组：

$$\begin{cases}6x+3y+2z=35\cdots\cdots(1)\\13x+4y+z=35\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由 $(2)\times2-(1)$ 将 z 消元，则有 $20x+5y=35$，即 $4x+y=7$，显然该方程的正整数解只有 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，继而可得到 $z=10$．所以获二等奖的有3人．