2-3-3 列不定方程解应用题

教学目标

1、 熟练掌握不定方程的解题技巧
2、 能够根据题意找到等量关系设未知数解方程
3、 学会解不定方程的经典例题

知识精讲

一、知识点说明

历史概述

不定方程是数论中最古老的分支之一．古希腊的丢番图早在公元3世纪就开始研究不定方程，因此常称不定方程为丢番图方程．中国是研究不定方程最早的国家，公元初的五家共井问题就是一个不定方程组问题，公元5世纪的《张丘建算经》中的百鸡问题标志着中国对不定方程理论有了系统研究．宋代数学家秦九韶的大衍求一术将不定方程与同余理论联系起来．

考点说明

在各类竞赛考试中，不定方程经常以应用题的形式出现，除此以外，不定方程还经常作为解题的重要方法贯穿在行程问题、数论问题等压轴大题之中．在以后初高中数学的进一步学习中，不定方程也同样有着重要的地位，所以本讲的着重目的是让学生学会利用不定方程这个工具，并能够在以后的学习中使用这个工具解题。

二、运用不定方程解应用题步骤

1、根据题目叙述找到等量关系列出方程
2、根据解不定方程方法解方程
3、找到符合条件的解

模块一、不定方程与数论

【例 1】 **把2001拆成两个正整数的和，一个是11的倍数（要尽量小），一个是13的倍数（要尽量大），求这两个数．**

【解析】 这是一道整数分拆的常规题．可设拆成的两个数分别为$11x$和$13y$，则有：$11x+13y=2001$，要让x取最小值，y取最大值．

可把式子变形为：$y=\frac{2001-11x}{13}=\frac{13\times153+12-13x+2x}{13}=153-x+\frac{12+2x}{13}$，可见$\frac{12+2x}{13}$是整数，满足这一条件的$x$最小为 7，且当$x=7$时，$y=148$．

则拆成的两个数分别是$7\times11=77$和$148\times13=1924$．

【巩固】 **甲、乙二人搬砖，甲搬的砖数是18的倍数，乙搬的砖数是23的倍数，两人共搬了300块砖．问：甲、乙二人谁搬的砖多？多几块？**

【解析】 设甲搬的是$18x$块，乙搬的是$23y$块．那么$18x+23y=300$．观察发现$18x$和300都是6的倍数，所以y也是6的倍数．由于$y<300\div23\approx13$，所以y只能为 6 或 12．

$y=6$时$18x=162$，得到$x=9$；

$y=12$时$18x=24$，此时x不是整数，矛盾．

所以甲搬了162块，乙搬了138块，甲比乙搬得多，多24块．

【巩固】 **现有足够多的5角和8角的邮票，用来付4.7元的邮资，问8角的邮票需要多少张？**

【解析】 设5角和8角的邮票分别有x张和y张，那么就有等量关系：$5x+8y=47$．
尝试y的取值，当y取4时，x能取得整数3，当y再增大，取大于等于6的数时，x没有自然数解．所以8角的邮票需要4张．

【例 2】 **（2008 年北大附中“资优博雅杯”数学竞赛）用十进制表示的某些自然数，恰等于它的各位数字之和的16倍，则满足条件的所有自然数之和为____________．**

【解析】 若是四位数$\overline{abcd}$，则$16\times(a+b+c+d)\le16\times36<1000$，矛盾，四位以上的自然数也不可能。
若是两位数$\overline{ab}$，则$16\times(a+b)>10a+b=\overline{ab}$，也不可能，故只有三位数$\overline{abc}$．
$16\times(a+b+c)=100a+10b+c$，化简得$28a=2b+5c$．由于$2b+5c<7\times9=63$，
所以$a=1$或$b=2$. $a=1$时，$b=9$，$c=2$，或$b=4$，$c=4$；$a=2$时，$b=8$，$c=8$．
所以所有自然数之和为$192+144+288=624$．

模块二、不定方程与应用题

【例 3】 **有两种不同规格的油桶若干个，大的能装8千克油，小的能装5千克油，44千克油恰好装满这些油桶．问：大、小油桶各几个？**

【解析】 设有大油桶x个，小油桶y个．由题意得：

$$8x+5y=44$$

可知$8x\le44$，所以$x=0$、1、2、3、4、5．由于x、y必须为整数，所以相应的将x的所有可能值代入方程，可得$x=3$时，$y=4$这一组整数解．
所以大油桶有3个，小油桶有4个．

[小结] 这道题在解答时，也可联系数论的知识，注意到能被 5 整除的数的特点，便可轻松求解．

【例 4】 **在一次活动中，丁丁和冬冬到射击室打靶，回来后见到同学“小博士”，他们让“小博士”猜他们各命中多少次．“小博士”让丁丁把自己命中的次数乘以5，让冬冬把自己命中的次数乘以4，再把两个得数加起来告诉他，丁丁和冬冬算了一下是31，“小博士”正确地说出了他们各自命中的次数．你知道丁丁和冬冬各命中几次吗？**

【解析】 设丁丁和冬冬分别命中了x次和y次，则：$5x+4y=31$．可见x除以 4 的余数为 3，而且x不能超过 6，所以$x=3$，$y=4$．即丁丁命中了3次，冬冬命中了4次．

【巩固】 **某人打靶，8发共打了53环，全部命中在10环、7环和5环上．问：他命中10环、7环和5环各几发？**

【解析】 假设命中 10 环x发，7 环y发，5 环z发，则$\begin{cases}x+y+z=8\cdots\cdots\cdots(1)\\10x+7y+5z=53\cdots\cdot(2)\end{cases}$由(2)可知$7y$除以 5 的余数为 3，所以$y=4$、9……如果$y$为 9，则$7y=63>53$，所以$y$只能为 4，代入原方程组可解得$x=1$，$z=3$．所以他命中10环1发，7环4发，5环3发．

【例 5】 **某次聚餐，每一位男宾付130元，每一位女宾付100元，每带一个孩子付60元，现在有$\frac{1}{3}$的成人各带一个孩子，总共收了2160元，问：这个活动共有多少人参加(成人和孩子)？**

【解析】 设参加的男宾有x人，女宾有y人，则由题意得方程：$130x+100y+\frac{1}{3}(x+y)\times60=2160$，即

$150x+120y=2160$，化简得$5x+4y=72$．这个方程有四组解：$\begin{cases}x=4\\y=13\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\y=8\end{cases}$，$\begin{cases}x=12\\y=3\end{cases}$和$\begin{cases}x=0\\y=18\end{cases}$，

但是由于有$\frac{1}{3}$的成人带着孩子，所以$x+y$能被3整除，检验可知只有后两组满足．

所以，这个活动共有$12+3+\frac{1}{3}\times(12+3)=20$人或$18+\frac{1}{3}\times18=24$人参加．

【巩固】单位的职工到郊外植树，其中有男职工，也有女职工，并且有$\frac{1}{3}$的职工各带一个孩子参加．男职工每人种13棵树，女职工每人种10棵树，每个孩子都种6棵树，他们一共种了216棵树，那么其中有多少名男职工？

【解析】因为有$\frac{1}{3}$的职工各带一个孩子参加，则职工总人数是3的倍数．设男职工有x人，女职工有y人．则职工总人数是$(x+y)$人，孩子是$\frac{x+y}{3}$人．得到方程：$13x+10y+(x+y)\div3\times6=216$，化简得：$5x+4y=72$．因为男职工与女职工的人数都是整数，所以当$y=3$时，$x=12$；当$y=8$时，$x=8$；当$y=13$，$x=4$．其中只有$3+12=15$是3的倍数，符合题意，所以其中有 12 名男职工．

【例 6】 张师傅每天能缝制3件上衣，或者9件裙裤，李师傅每天能缝制2件上衣，或者7件裙裤，两人20天共缝制上衣和裙裤134件，那么其中上衣是多少件？

【解析】如果20天都缝制上衣，共可缝制$(3+2)\times20=100$件，实际上比这多缝制了$134-100=34$件，这就要把上衣换成裙裤，张师傅每天可多换$9-3=6$件，李师傅每天可多换$7-2=5$件，设张师傅缝制裙裤x天，李师傅缝制裙裤y天，则：$6x+5y=34$，整数解只有$x=4$，$y=2$．

因此共缝制裙裤$9\times4+7\times2=50$件，上衣共$134-50=84$件．

【巩固】小花狗和波斯猫是一对好朋友，它们在早晚见面时总要叫上几声表示问候．若是早晨见面，小花狗叫两声，波斯猫叫一声；若是晚上见面，小花狗叫两声，波斯猫叫三声．细心的小娟对它们的叫声统计了15天，发现它们并不是每天早晚都见面．在这15天内它们共叫了61声．问：波斯猫至少叫了多少声？

【解析】早晨见面小花狗和波斯猫共叫3声，晚上见面共叫5声．设在这 15 天内早晨见面x次，晚上见面y次．根据题意有：$3x+5y=61$（$x\le15$，$y\le15$）．

可以凑出，当$x=2$时，$y=11$；当$x=7$时，$y=8$；当$x=12$时，$y=5$．

因为小花狗共叫了$2(x+y)$声，那么$(x+y)$越大，小花狗就叫得越多，从而波斯猫叫得越少，所以当$x=12$，$y=5$时波斯猫叫得最少，共叫了$1\times12+3\times5=27$（声）．

【例 7】 甲、乙两人生产一种产品，这种产品由一个A配件与一个B配件组成．甲每天生产 300 个A配件，或生产 150 个B配件；乙每天生产 120 个A配件，或生产 48 个B配件．为了在 10 天内生产出更多的产品，二人决定合作生产，这样他们最多能生产出多少套产品？

【解析】假设甲、乙分别有x天和y天在生产A配件，则他们生产B配件所用的时间分别为$(10-x)$天和$(10-y)$天，那么 10 天内共生产了A配件$(300x+120y)$个，共生产了B配件$150\times(10-x)+48\times(10-y)=1980-150x-48y$个．要将它们配成套，$A$配件与$B$配件的数量应相等，即$300x+120y=1980-150x-48y$，得到$75x+28y=330$，则$x=\frac{330-28y}{75}$．

此时生产的产品的套数为$300x+120y=300\times\frac{330-28y}{75}+120y=1320+8y$，要使生产的产品最多，就要使得$y$最大，而$y$最大为 10，所以最多能生产出$1320+8\times10=1400$套产品．

【巩固】某服装厂有甲、乙两个生产车间，甲车间每天能生产上衣 16 件或裤子 20 件；乙车间每天能生产上衣 18 件或裤子 24 件．现在要上衣和裤子配套，两车间合作 21 天，最多能生产多少套衣服？

【解析】假设甲、乙两个车间用于生产上衣的时间分别为x天和y天，则他们用于生产裤子的天数分别为$(21-x)$天和$(21-y)$天，那么总共生产了上衣$(16x+18y)$件，

生产了裤子$20\times(21-x)+24\times(21-y)=924-20x-24y$件．

根据题意，裤子和上衣的件数相等，所以$16x+18y=924-20x-24y$，即$6x+7y=154$，即$x=\frac{154-7y}{6}$．那么共生产了$16x+18y=16\times\frac{154-7y}{6}+18y=410\frac{2}{3}-\frac{2}{3}y$套衣服．

要使生产的衣服最多，就要使得y最小，则x应最大，而x最大为 21，此时$y=4$．故最多可以生产出$410\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 4=408$套衣服．

【例 8】 **有一项工程，甲单独做需要36天完成，乙单独做需要30天完成，丙单独做需要48天完成，现在由甲、乙、丙三人同时做，在工作期间，丙休息了整数天，而甲和乙一直工作至完成，最后完成这项工程也用了整数天，那么丙休息了_______天．**

【解析】 设完成这项工程用了a天，其间丙休息了b天．

根据题意可知：$\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{30}+\frac{1}{48}\right)a-\frac{1}{48}b=1$，$\frac{59}{720}a-\frac{1}{48}b=1$，化简得$59a-15b=720$．

由上式，因为$15b$与720都是15的倍数，所以$59a$必须是15的倍数，所以a是15的倍数，在$a>b$ 的条件下，只有$a=15$，$b=11$一组解，即丙休息了11天．

【例 9】 **实验小学的五年级学生租车去野外开展“走向大自然，热爱大自然”活动，所有的学生和老师共306人恰好坐满了5辆大巴车和3辆中巴车，已知每辆中巴车的载客人数在20人到25人之间，求每辆大巴车的载客人数．**

【解析】 设每辆大巴车和中巴车的载客人数分别为x人和y人，那么有：$5x+3y=306$．由于知道中巴车的载客人数，也就是知道了y的取值范围，所以应该从y入手．显然$3y$被5除所得的余数与306被5除所得的余数相等，从个位数上来考虑，$3y$的个位数字只能为 1 或 6，那么当y的个位数是2或7时成立．由于y的值在 20 与 25 之间，所以满足条件的$y=22$，继而求得$x=48$，所以大巴车的载客人数为48人．

【巩固】 **实验小学的五年级学生租车去野外开展“走向大自然，热爱大自然”活动，所有的学生和老师共306人恰好坐满了7辆大巴车和2辆中巴车，已知每辆中巴车的载客人数在20人到25人之间，求每辆大巴车的载客人数．**

【解析】 设大巴车和中巴车的载客人数分别为x人和y人，那么有：$7x+2y=306$．

考虑等式两边除以 7 的余数，由于306被7除余5，所以$2y$被7除余5，符合条件的y有：6、13、20、27，所以$y=20$，继而求得$x=38$，所以大巴车的载客人数为38人．

【巩固】 **每辆大汽车能容纳 54 人，每辆小汽车能容纳 36 人．现有 378 人，要使每个人都上车且每辆车都装满，需要大、小汽车各几辆？**

【解析】 设需要大、小汽车分别为x辆、y辆，则有：$54x+36y=378$，可化为$3x+2y=21$．

可以看出y是 3 的倍数，又不超过 10，所以y可以为 0、3、6 或 9，将$y=$ 0、3、6、9 分别代入可知有四组解：$\begin{cases}x=1\\y=9\end{cases}$；或$\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$；或$\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$；或$\begin{cases}x=7\\y=0\end{cases}$

即需大汽车 1 辆，小汽车 9 辆；或大汽车 3 辆，小汽车 6 辆；或大汽车 5 辆，小汽车 3 辆；或大汽车 7 辆．

【巩固】 **小伟听说小峰养了一些兔和鸡，就问小峰：“你养了几只兔和鸡？”小峰说：“我养的兔比鸡多，鸡兔共24条腿．”那么小峰养了多少兔和鸡？**

【解析】 这是一道鸡兔同笼问题，但由于已知鸡兔腿的总数，而不是鸡兔腿数的差，所以用不定方程求解．

设小峰养了x只兔子和y只鸡，由题意得：

$$4x+2y=24$$

即：$2x+y=12$，$y=12-2x$

这是一个不定方程，其可能整数解如下表所示：

x	0	1	2	3	4	5	6
	12	10	8	6	4	2	0

由题意$x>y$，且x，y均不为0，所以$x=5$，$y=2$，也就是兔有5只，鸡有2只．

【例 10】 **（1999 年香港保良局亚洲区城市小学数学邀请赛）一个家具店在 1998 年总共卖了 213 张床．起初他们每个月卖出 25 张床，之后每个月卖出 16 张床，最后他们每个月卖出 20 张床．问：他们**

共有多少个月是卖出 25 张床？

【解析】设卖出 25、16、20 张床的月份分别为x、y、z个月，则：

由(1)得$y=12-x-z$，代入(2)得$9x+4z=21$．

显然这个方程的正整数解只有$x=1$，$z=3$．

所以只有 1 个月是卖出 25 张床的．

$$\begin{cases}x+y+z=12\cdots\cdots(1)\\25x+16y+20z=213\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

【例 11】(2008年“希望杯”第二试试题)五年级一班共有36人，每人参加一个兴趣小组，共有A、B、C、D、E五个小组．若参加A组的有15人，参加B组的人数仅次于A组，参加C组、D组的人数相同，参加E组的人数最少，只有4人．那么，参加B组的有_______人．

【解析】设参加B组的有x人，参加C组、D组的有y人，则$x>y>4$，

由题知$15+x+2y+4=36$，整理得$x+2y=17$；

由于$y>4$，若$y=5$，得$x=7$，满足题意；若$y\geq6$，则$x\leq5$，与$x>y$矛盾；

所以只有$x=7$，$y=5$符合条件，故参加B组的有7人．

【例 12】(2008 年全国小学生“我爱数学夏令营”数学竞赛）将一群人分为甲乙丙三组，每人都必在且仅在一组．已知甲乙丙的平均年龄分别为37，23，41．甲乙两组人合起来的平均年龄为29；乙丙两组人合起来的平均年龄为33．则这一群人的平均年龄为______．

【解析】设甲乙丙三组分别有x，y，z人，依提议有：

由(1)化简可得$x:y=3:4$，由(2)化简可得$y:z=4:5$，所以$x:y:z=3:4:5$；

因此，这一群人的平均年龄为$\frac{37\times3+23\times4+41\times5}{3+4+5}=34$．

$$\begin{cases}37x+23y=29(x+y)\quad(1)\\23y+41z=33(y+z)\quad(2)\end{cases}$$

【例 13】14个大、中、小号钢珠共重100克，大号钢珠每个重12克，中号钢珠每个重8克，小号钢珠每个重5克．问：大、中、小号钢珠各有多少个？

【解析】设大、中、小号钢珠分别有x个，y个和z个，则：$\begin{cases}x+y+z=14\cdots\cdots\cdots(1)\\12x+8y+5z=100\cdots(2)\end{cases}$ $(2)-(1)\times5$，得$7x+3y=30$．可见$7x$是 3 的倍数，又是 7 的倍数，且小于 30，所以只能为 21，故$x=3$，代入得$y=3$，$z=8$．所以大、中、小号钢珠分别有 3 个、3 个和 8 个．

【巩固】袋子里有三种球，分别标有数字2，3和5，小明从中摸出 12 个球，它们的数字之和是43．问：小明最多摸出几个标有数字2的球？

【解析】设小明摸出标有数字2，3和5的球分别为x，y，z个，于是有

由$5\times(1)-(2)$，得$3x+2y=17\cdots\cdots(3)$，

由于x，y都是正整数，因此在(3)中，y取1时．x取最大值5，

所以小明最多摸出 5 个标有数字 2 的球．

$$\begin{cases}x+y+z=12\cdots\cdots(1)\\2x+3y+5z=43\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

【例 14】公鸡 1 只值钱 5，母鸡一只值钱 3，小鸡三只值钱 1，今有钱 100，买鸡 100 只，问公鸡、母鸡、小鸡各买几只？

【解析】设买公鸡、母鸡、小鸡各x、y、z只，根据题意，得方程组$\begin{cases}x+y+z=100\text{①}\\5x+3y+\frac{1}{3}z=100\text{②}\end{cases}$由②$\times3-$①，得$14x+8y=200$，即：$y=\frac{200-14x}{8}=25-\frac{7}{4}x$，因为$x$、$y$为正整数，所以不难得出$x$应为4的倍数，故$x$只能为4、8、12，从而相应$y$的值分别为18、11、4，相应$z$的值分别为78、81、84．所以，方程组的特殊解为$\begin{cases}x=4\\y=18\\z=78\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\y=11\\z=81\end{cases}$，$\begin{cases}x=12\\y=4\\z=84\end{cases}$，所以公鸡、母鸡、小鸡应分别买4只、18只、

78只或8只、11只、81只或12只、4只、84只．

【巩固】小明玩套圈游戏，套中小鸡一次得9分，套中小猴得5分，套中小狗得2分．小明共套了10次，每次都套中了，每个小玩具都至少被套中一次，小明套10次共得61分．问：小明至多套中小鸡几次？

【解析】设套中小鸡x次，套中小猴y次，则套中小狗$(10-x-y)$次．根据得61分可列方程：$9x+5y+2\times(10-x-y)=61$，化简后得$7x=41-3y$．显然y越小，x越大． 将$y=1$代入得$7x=38$，无整数解；若$y=2$，$7x=35$，解得$x=5$，所以小明至多套中小鸡5次．

【例 15】开学前，宁宁拿着妈妈给的30元钱去买笔，文具店里的圆珠笔每支4元，铅笔每支3元．宁宁买完两种笔后把钱花完．请问：她一共买了几支笔？

【解析】(法一)由于题中圆珠笔与铅笔的数量都不知道，但总费用已知，所以可以根据不定方程分析两种笔的数量，进而得解．设她买了x支圆珠笔，y支铅笔，由题意列方程：$4x+3y=30$，所以$3y=30-4x$，$y=10-\frac{4x}{3}$因为x、y均为整数，所以x应该能被3整除，又因为$1\le x\le 7$，所以$x=3$或6，当$x=3$时，$y=6$，$x+y=9$，当$x=6$时，$y=2$，$x+y=8$，宁宁共买了9支笔或8支笔．

(法二)换个角考虑：将“一支圆珠笔和一支铅笔”看成一对，分析宁宁可能买了几对笔，不妨设为m对，余下的一定是圆珠笔与铅笔中的唯一一种．一对笔的售价为“$4+3=7$元，由题意可知，$1\le m\le 4$，又m为整数

（1） 当$m=1$时，余款为$30-7=23$，不能被3或4整除，这种情况不可能；

（2） 当$m=2$时，余款为$30-2\times 7=16$，能被4整除，也就是说配对后，余下4支圆珠笔．此时，宁宁买了6支圆珠笔，2支铅笔，共8支笔．

（3） 当$m=3$时，余款为$30-3\times 7=9$，能被3整除，也就是说配对后，余下3支圆珠笔．此时，宁宁买了3支圆珠笔，6支铅笔，共9支笔．

（4） 当$m=4$时，余款为$30-4\times 7=2$，不能被3或4整除，这种情况不可能，由上面的分析可知，宁宁共买了9支笔或8支笔．

【巩固】(迎春杯预赛试题)小华和小强各用6角4分买了若干支铅笔，他们买来的铅笔中都是5分一支和7分一支的两种，而且小华买来的铅笔比小强多．小华比小强多买来铅笔多少支．

【解析】设买5分一支的铅笔m支，7分一支的铅笔n支．则：$5\times m+7\times n=64$，$64-7\times n$是5的倍数．用$n=0$，1，2，3，4，5，6，7，8代入检验，只有$n=2$，7满足这一要求，得出相应的$m=10$，3．即小华买铅笔$10+2=12$支，小强买铅笔$7+3=10$支，小华比小强多买2支．

【例 16】蓝天小学举行“迎春”环保知识大赛，一共有100名男、女选手参加初赛，经过初赛、复赛，最后确定了参加决赛的人选．已知参加决赛的男选手的人数，占初赛的男选手人数的20%；参加决赛的女选手的人数，占初赛的女选手人数的12.5%，而且比参加初赛的男选手的人数多．参加决赛的男、女选手各有多少人？

【解析】由于参加决赛的男选手的人数，占初赛的男选手人数的20%；参加决赛的女选手的人数，占初赛时女选手人数的12.5%，所以参加初赛的男选手人数应是5的倍数，参加初赛的女选手的人数应是8的倍数．

设参加初赛的男生为$5x$人，参加初赛的女生为$8y$人．

根据题意可列方程：$5x+8y=100$．

解得$\begin{cases}x=12\\y=5\end{cases}$，或$\begin{cases}x=4\\y=10\end{cases}$．

又因为参加决赛的女选手的人数，比参加决赛的男选手的人数多，也就是y要比x大，所以第一组解不合适，只有$x=4$，$y=10$满足．

故参加决赛的男选手为4人，女选手为10人．

【巩固】今有桃95个，分给甲、乙两班学生吃，甲班分到的桃有$\frac{2}{9}$是坏的，其他是好的；乙班分到的桃有$\frac{3}{16}$是坏的，其他是好的．甲、乙两班分到的好桃共有几个？

【解析】甲班分到的桃是9的倍数，乙班分到的桃是16的倍数，假设甲班分到桃$9x$个，乙班分到桃$16y$个．于是：$9x+16y=95$，解得$x=7$，$y=2$，即甲班分到桃$9\times7=63$（个），乙班分到桃$16\times2=32$（个）．所以，两班共分到好桃$63\times(1-\frac{2}{9})+32\times(1-\frac{3}{16})=75$（个）．

【例 17】甲、乙两人各有一袋糖，每袋糖都不到20粒．如果甲给乙一定数量的糖后，甲的糖就是乙的2倍；如果乙给甲同样数量的糖后，甲的糖就是乙的3倍．甲、乙两人共有多少粒糖？

【解析】设甲、乙原有糖分别为x粒、y粒，甲给乙的数量为z粒，则依题意有：

$\begin{cases}x-z=2(y+z)\\x+z=3(y-z)\end{cases}$，且$\begin{cases}x\le20\\y\le20\end{cases}$．整理得$\begin{cases}x-2y-3z=0\cdots\cdots(1)\\x-3y+4z=0\cdots\cdots(2)\end{cases}$

由(1)得$x=2y+3z$，代入(2)得$7z-y=0$，即$y=7z$．

因$y\le20$，故$z=1$或$z=2$．

若$z=2$，则$y=14$，$x=2\times14+3\times2=34>20$，不合题意．

因而$z=1$，对应方程组有唯一解$x=17$，$y=7$，$z=1$．则甲、乙共有糖$17+7=24$粒．

【巩固】有两小堆砖头，如果从第一堆中取出100块放到第二堆中去，那么第二堆将比第一堆多一倍．如果相反，从第二堆中取出若干块放到第一堆中去，那么第一堆将是第二堆的6倍．问：第一堆中的砖头最少有多少块？

【解析】设第一堆砖有x块，则根据第一个条件可得第二堆砖有$(2x-300)$块．

再设从第二堆中取出y块放在第一堆后，第一堆将是第二堆的6倍，可列方程：

$x+y=6\times(2x-300-y)$，化简得$7y+1800=11x$，

那么$x=(7y+1800)\div11=163+\frac{7y+7}{11}$．

因为x是整数，7与11互质，所以$(y+1)$应是11的倍数，y最小是10，推知x最小是$163+\frac{7\times(10+1)}{11}=163+7=170$，所以，第一堆中的砖头最少有170块．

【例 18】(第六届华杯赛复赛第 16 题)甲乙丙三个班向希望工程捐赠图书，已知甲班有1人捐6册，有2人各捐7册，其余都各捐11册，乙班有1人捐6册，3人各捐8册，其余各捐10册；丙班有2人各卷4册，6人各捐7册，其余各捐9册。已知甲班捐书总数比乙班多28册，乙班比丙班多101册，各班捐书总数在400册与550册之间，问各班各有多少人？

【解析】我们设甲班有x人，乙班有y人，丙班有z人，那么三个班的捐书数目分别为：

$11(x-3)+6+7\times7=11x-13$，

$10(y-4)+6+8\times3=10y-10$，

$9(z-8)+4\times2+7\times6=9z-22$，

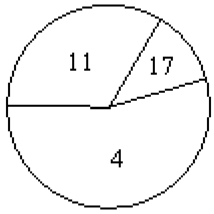
根据题意有：$11x-13=(10y-10)+28$

$10y-10=(9z-22)+101$，即有$11x=10y+31$

$10y=9z+89$

又因为各班的捐书数目都在400到550之间，因此我们知道：捐书最多的甲班有$11x-13\le550$，而捐书最少的丙班有$9z-22\ge400$，从而有$563\ge11x=10y+31=(9z+89)+31\ge422+89+31=542$，于是有$52>x>49$，所以有$x=50$或51。经检验，当$x=50$时，$y$不是整数，而当$x=51$时，有$y=53$，$z=49$，也就是说，甲乙丙三班人数分别为51，53，49。

【例 19】(2009 年“迎春杯”高年级组复赛)在新年联欢会上，某班组织了一场飞镖比赛．如右图，飞镖的靶子分为三块区域，分别对应17分、11分和4分．每人可以扔若干次飞镖，脱靶不得分，投中靶子就可以得到相应的分数．若恰好投在两块(或三块)区域的交界线上，则得两块(或三块)区域中分数最高区域的分数．如果比赛规定恰好投中120分才能获奖，要想获奖至少需要投中次飞镖．



【解析】假设投中 17 分、11 分、4 分的次数分别为x次、y次和z次，那么投中飞镖的总次数为$(x+y+z)$次，而总得分为$17x+11y+4z$分，要想获奖，必须$17x+11y+4z=120$.
由于$17x<120$，得到$x\leq 6$．当x的值一定后，要使$(x+y+z)$最小，必须使y尽可能大．
若$x=6$，得到$11y+4z=18$，此时无整数解；
若$x=5$，得到$11y+4z=35$，此时$y=1$，$z=6$，$x+y+z=5+1+6=12$；
若$x=4$，得到$11y+4z=52$，此时y最大为 4，当$y=4$时$z=2$，这种情况下$x+y+z=10$；
若$x=3$，得到$11y+4z=69$，此时$y=3$，$z=9$，$x+y+z=3+3+9=15$；
若$x=2$，得到$11y+4z=86$，此时y最大为 6，当$y=6$时$z=5$，这种情况下$x+y+z=13$；
若$x=1$，得到$11y+4z=103$，此时y最大为 9，当$y=9$时$z=1$，这种情况下$x+y+z=11$；
若$x=0$，得到$11y+4z=120$，此时y最大为 8，当$y=8$时$z=8$，这种情况下$x+y+z=16$.
经过比较可知$(x+y+z)$的值最小为 10，所以至少需要投中 10 次飞镖才能获奖.

模块三、不定方程与生活中的应用题

【例 20】 **某地用电收费的标准是：若每月用电不超过50度，则每度收5角；若超过50度，则超出部分按每度8角收费．某月甲用户比乙用户多交3元3角电费，这个月甲、乙各用了多少度电？**

【解析】3 元 3 角即 33 角，因为33既不是5的倍数又不是8的倍数，所以甲、乙两用户用电的情况一定是一个超过了 50 度，另一个则没有超过．由于甲用户用电更多，所以甲用户用电超过50度，乙用户用电不足50度．设这个月甲用电$(50+x)$度，乙用电$(50-y)$度．因为甲比乙多交33角电费，所以有$8x+5y=33$．容易看出$x=1$，$y=5$，可知甲用电51度，乙用电45度.

【巩固】 **某区对用电的收费标准规定如下：每月每户用电不超过10度的部分，按每度0.45元收费；超过10度而不超过20度的部分，按每度0.80元收费；超过20度的部分按每度1.50元收费．某月甲用户比乙用户多交电费7.10元，乙用户比丙用户多交3.75元，那么甲、乙、丙三用户共交电费多少元？(用电都按整度数收费)**

【解析】由于丙交的电费最少，而且是求甲、乙电费的关键，先分析一下他的用电度数．因为乙用户比丙用户多交3.75元，所以二者中必有一个用电度数小于10度(否则差中不会出现0.05元)，丙用电少，所以丙用电度数小于10度，乙用电度数大于10度，但是不会超过20度(否则甲、乙用电均超过20度，其电费差应为1.50的整数倍，而不会是7.10元)．
设丙用电$(10-x)$度，乙用电$(10+y)$度，由题意得：

$$0.45x+0.8y=3.75$$
$$9x+16y=75$$
$$9x=75-16y$$
$$x=\frac{75-16y}{9}$$

所以y是3的倍数，又x,y均为整数，且都大于0小于10

所以$y=3$，$x=\frac{75-16\times 3}{9}=3$

所以丙用电$10-3=7$度，交电费$0.45\times 7=3.15$元；乙交电费$3.15+3.75=6.90$元，甲交电费

$6.90+7.10=14.00$元，三户共交电费$3.15+6.90+14.00=24.05$元．

【例 21】 **马小富在甲公司打工，几个月后又在乙公司兼职，甲公司每月付给他薪金470元，乙公司每月付给他薪金350元．年终，马小富从两家公司共获薪金7620元．他在甲公司打工______个月，在乙公司兼职_______个月．**

【解析】 设马小富在甲公司打工a月，在乙公司兼职b月（$a>b$，a、b都是不大于12的自然数），则有$470a+350b=7620$，化简得$47a+35b=762$．若b为偶数，则$35b$的末位数字为0，从而$47a$的末位数字必为2，这时$a=6$．但$a=6$时，$b=\frac{480}{35}$不是整数，不合题意，所以b必为奇数．b为奇数时，$35b$的末位数字为5，从而$47a$的末位数字为7，$a=1$或$a=11$．但$a=1$时容易看出$a<b$，与$a>b$矛盾．所以，$a=11$，代入得$b=(762-47\times 11)\div 35=7$．
于是马小富在甲公司打工11个月，在乙公司兼职7个月．

【例 22】 **甲、乙、丙、丁、戊五人接受了满分为10分（成绩都是整数）的测验．已知：甲得了4分，乙得了最高分，丙的成绩与甲、丁的平均分相等，丁的成绩刚好等于五人的平均分，戊比丙多2分．求乙、丙、丁、戊的成绩．**

【解析】 法一：方程法． 设丁的分数为x分，乙的分数为y分，那么丙的分数为$\frac{x+4}{2}$分，戊的分数为$\frac{x+4}{2}+2=\frac{x+8}{2}$分，根据“丁的成绩刚好等于五人的平均分”，有$5x=4+x+\frac{x+4}{2}+\frac{x+8}{2}+y$，所以$3x=10+y$．因为$x<y\le 10$，所以$3x=10+y\le 10+10=20$，$3x=10+y>10+x$，得到$5<x\le\frac{20}{3}$，故$x=6$，代入得$y=8$．所以丁得$6$分，丙得$5$分，戊得$7$分，乙得$8$分．
法二：推理法．因为丁为五人的平均分，所以丁不是成绩最低的；丙的成绩与甲、丁的平均分相等，所以丙在甲与丁之间；又因为戊和乙都比丙的成绩高，所以乙、丙、丁、戊都不是最低分，那么甲的成绩是最低的．因为甲是4分，所以丁可能是6分或8分（由丙的成绩与甲、丁的平均分相等知丁的得分是偶数），经检验丁得8分时与题意不符，所以丁得6分，则丙得5分，戊得7分，乙得8分．

【巩固】 **有两个学生参加 4 次数学测验，他们的平均分数不同，但都是低于 90 分的整数．他们又参加了第 5 次测验，这样 5 次的平均分数都提高到了 90 分．求第 5 次测验两人的得分．（每次测验满分为 100 分）**

【解析】 设某一学生前 4 次的平均分为x分，第 5 次的得分为y分，则其 5 次总分为$4x+y=90\times 5=450$，于是$y=450-4x$．显然$90<y\le 100$，故$90<450-4x\le 100$，解得$87.5\le x<90$．
由于x为整数，可能为 88 和 89，而且这两个学生前 4 次的平均分不同，所以他们前 4 次的平均分分别为 88 分和 89 分，那么他们第 5 次的得分分别为：$450-88\times 4=98$分；$450-89\times 4=94$分．

【例 23】 **小明、小红和小军三人参加一次数学竞赛，一共有 100 道题，每个人各解出其中的 60 道题，有些题三人都解出来了，我们称之为“容易题”；有些题只有两人解出来，我们称之为“中等题”；有些题只有一人解出来，我们称之为“难题”．已知每个题都至少被他们中的一人解出，则难题比容易题多______道．**

【解析】 设容易题、中等题和难题分别有x道、y道、z道，则$\begin{cases}x+y+z=100\cdots\cdots(1)\\3x+2y+z=180\cdots(2)\end{cases}$，由$(1)\times 2-(2)$得$2x+2y+2z-(3x+2y+z)=200-180$，即$z-x=20$，所以难题比容易题多 20 道．

【例 24】 **甲、乙两个同学在一次数学擂台赛中，试卷上有解答题、选择题、填空题各若干个，而且每个小题的分值都是自然数．结果公布后，已知甲做对了 5 道解答题，7 道选择题，9 道填空题，共得 52 分；乙做对了 7 道解答题，9 道选择题，11 道填空题，共得 68 分．问：解答题、选择题、填空题的每道小题各多少分？**

【解析】 设每道解答题为x分，每道选择题为y分，每道填空题为z分，有$\begin{cases}5x+7y+9z=52\\7x+9y+11z=68\end{cases}$，解得$y+2z=6$．因为$y$、$z$都是自然数，而且不为 0，所以有$y=2$，$z=2$，或者$y=4$，$z=1$．分别代入原方程解得$x=4$或者$x=3$．所以解答题、选择题、填空题的每道小题的分数分别为 4 分、2 分、2 分或者 3 分、4 分、1 分．

【例 25】（2007 年“我爱数学夏令营”数学竞赛）甲乙丙三人参加一个共有30个选择题的比赛，计分办法是在30分的基础上，每答对一题加4分，答错一题扣1分，不答既不扣分也不加分．赛完后发现根据甲所得总分可以准确算出他答对的题数，乙、丙二人所得总分相同，仅比甲少1分，但乙丙答对的题数却互不相同．由此可知，甲所得总分最多为_______．

【解析】设乙做对a道题，做错b道题；丙做对m道，做错n道， 则有$4a-b=4m-n$．$4(a-m)=b-n$，则有$4|b-n$．要使得甲总分最高，由于乙丙仅比甲少 1 分，则乙丙也应尽可能总分最高，从而错题最少，其他的题全多．若$b=4$，$n=0$，则$a-m=1$，$a=26$，$m=25$．此时乙得分为$26\times4-4+30=130$分，丙得分为$25\times4-0+30=130$分，甲得分为$130+1=131$分．甲扣19分，只能$5\times3+4=19$，别无其他方式，即只能错3题空1题．若$b=5$，$n=1$，则$a-m=1$，$a=25$，$m=24$．此时乙得分为$25\times4-5+30=126$分，甲得分为$125+1=126$分．这种得分不唯一，且得分不是最高，其他情况不可能超过131分．综上所述，甲的总分为131分．

【例 26】某男孩在2003年2月16日说:“我活过的月数以及我活过的年数之差，到今天为止正好就是111．”请问：他是在哪一天出生的？

【解析】设男孩的年龄为x个年和y个月，即$12x+y$个月，由此有方程式：$12x+y-x=111$，也就是$11x+y=11\times10+1$，得到$x=10+\frac{1-y}{11}$，由于$0\le y<12$而且$\frac{1-y}{11}$是整数，所以，$y=1$，$x=10$，从2003年2月16日那天退回10年又1个月就是他的生日，为1993年1月16日．

【例 27】某次演讲比赛，原定一等奖10人，二等奖20人，现将一等奖中的最后4人调整为二等奖，这样得二等奖的学生的平均分提高了1分，得一等奖的学生的平均分提高了3分，那么原来一等奖平均分比二等奖平均分多________分．

【解析】设原来一等奖的平均分为x分，二等奖的平均分为y分，得：
$10x-(10-4)\times(x+3)=(20+4)(y+1)-20y$，整理得$x=y+10.5$，即$x-y=10.5$，
所以原来一等奖平均分比二等奖平均分多10.5分．

【例 28】某次数学竞赛准备了35支铅笔作为奖品发给一、二、三等奖的学生，原计划一等奖每人发给6支，二等奖每人发给3支，三等奖每人发给2支，后来改为一等奖每人发13支，二等奖每人发4支，三等奖每人发1支．那么获二等奖的有______人．

【解析】法一：
根据“后来改为一等奖每人发13支”，可以确定获一等奖的人数小于3．否则仅一等奖就要发不少于39支铅笔，已超过35支，这是不可能的．分别考虑一等奖有2人或者1人的情况：
①获一等奖有2人时，改变后这2人共多得$(13-6)\times2=14$支，那么得二等奖和三等奖的共少得了 14 支铅笔．
由于改变后二等奖多得 1 支，三等奖少得 1 支，所以三等奖应比二等奖多$14\div1=14$人，这样他们少得的铅笔数正好是一等奖多得的．但此时三等奖至少 14 人，他们的铅笔总数至少为$13\times2+14\times1=40>35$，所以这种情况不可能发生．
②获一等奖有 1 人时，类似前面情况的讨论，可以确定获三等奖的人数比二等奖多 $(13-6)\div(2-1)=7$ 人，所以获二等奖的有$(35-13-7\times1)\div(4+1)=3$（人）．
经检验，获一等奖1人，获二等奖3人，获三等奖10人符合题目要求，所以有 3 人获二等奖．
法二：
设获一、二、三等奖的人数分别有x人、y人、z人，则有方程组：

$$\begin{cases}6x+3y+2z=35\cdots\cdots(1)\\13x+4y+z=35\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由$(2)\times2-(1)$将z消元，则有$20x+5y=35$，即$4x+y=7$，显然该方程的正整数解只有$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，继而可得到$z=10$．所以获二等奖的有 3 人．