



## 2-3-3 列不定方程解应用题



### 教学目标

- 1、熟练掌握不定方程的解题技巧
- 2、能够根据题意找到等量关系设未知数解方程
- 3、学会解不定方程的经典例题



### 知识精讲

#### 一、知识点说明

##### 历史概述

不定方程是数论中最古老的分支之一。古希腊的丢番图早在公元3世纪就开始研究不定方程，因此常称不定方程为丢番图方程。中国是研究不定方程最早的国家，公元初的五家共井问题就是一个不定方程组问题，公元5世纪的《张丘建算经》中的百鸡问题标志着中国对不定方程理论有了系统研究。宋代数学家秦九韶的大衍求一术将不定方程与同余理论联系起来。

##### 考点说明

在各类竞赛考试中，不定方程经常以应用题的形式出现，除此以外，不定方程还经常作为解题的重要方法贯穿在行程问题、数论问题等压轴大题之中。在以后初高中数学的进一步学习中，不定方程也同样有着重要的地位，所以本讲的着重目的是让学生学会利用不定方程这个工具，并能够在以后的学习中使用这个工具解题。

#### 二、运用不定方程解应用题步骤

- 1、根据题目叙述找到等量关系列出方程
- 2、根据解不定方程方法解方程
- 3、找到符合条件的解

##### 模块一、不定方程与数论

**【例1】** 把2001拆成两个正整数的和，一个是11的倍数（要尽量小），一个是13的倍数（要尽量大），求这两个数。

**【解析】** 这是一道整数分拆的常规题。可设拆成的两个数分别为 $11x$ 和 $13y$ ，则有： $11x + 13y = 2001$ ，要让 $x$ 取最小值， $y$ 取最大值。

可把式子变形为： $y = \frac{2001-11x}{13} = \frac{13 \times 153 + 12 - 11x + 2x}{13} = 153 - x + \frac{12+2x}{13}$ ，可见 $\frac{12+2x}{13}$ 是整数，满足这一条件的 $x$ 最小为7，且当 $x = 7$ 时， $y = 148$ 。

则拆成的两个数分别是 $7 \times 11 = 77$ 和 $148 \times 13 = 1924$ 。

【巩固】甲、乙二人搬砖，甲搬的砖数是18的倍数，乙搬的砖数是23的倍数，两人共搬了300块砖。问：甲、乙二人谁搬的砖多？多几块？

【解析】设甲搬的是 $18x$ 块，乙搬的是 $23y$ 块。那么 $18x + 23y = 300$ 。观察发现 $18x$ 和300都是6的倍数，所以 $y$ 也是6的倍数。由于 $y < 300 \div 23 \approx 13$ ，所以 $y$ 只能为6或12。

时 $18x = 162$ ，得到 $x = 9$ ；  
 $y = 6$

时 $18x = 24$ ，此时 $x$ 不是整数，矛盾。  
 $y = 12$

所以甲搬了162块，乙搬了138块，甲比乙搬得多，多24块。

【巩固】现有足够多的5角和8角的邮票，用来付4.7元的邮资，问8角的邮票需要多少张？

【解析】设5角和8角的邮票分别有 $x$ 张和 $y$ 张，那么就有等量关系： $5x + 8y = 47$ 。

尝试 $y$ 的取值，当 $y$ 取4时， $x$ 能取得整数3，当 $y$ 再增大，取大于等于6的数时， $x$ 没有自然数解。所以8角的邮票需要4张。

【例2】（2008年北大附中“资优博雅杯”数学竞赛）用十进制表示的某些自然数，恰等于它的各位数字之和的16倍，则满足条件的所有自然数之和为\_\_\_\_\_。

【解析】若是四位数 $\overline{abcd}$ ，则 $16 \times (a + b + c + d) \leq 16 \times 36 < 1000$ ，矛盾，四位以上的自然数也不可能。

若是两位数 $\overline{ab}$ ，则 $16 \times (a + b) > 10a + b = \overline{ab}$ ，也不可能，故只有三位数 $\overline{abc}$ 。

$16 \times (a + b + c) = 100a + 10b + c$ ，化简得 $28a = 2b + 5c$ 。由于 $2b + 5c < 7 \times 9 = 63$ ，所以 $a = 1$ 或 $b = 2$ 。 $a = 1$ 时， $b = 9$ ， $c = 2$ ，或 $b = 4$ ， $c = 4$ ； $a = 2$ 时， $b = 8$ ， $c = 8$ 。

所以所有自然数之和为 $192 + 144 + 288 = 624$ 。

## 模块二、不定方程与应用题

【例3】有两种不同规格的油桶若干个，大的能装8千克油，小的能装5千克油，44千克油恰好装满这些油桶。问：大、小油桶各几个？

【解析】设有大油桶 $x$ 个，小油桶 $y$ 个。由题意得：

可知 $8x \leq 44$ ，所以 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。由于 $x, y$ 必须为整数，所以相应的将 $x$ 的所有可能

值代入方程，可得 $x = 3$ 时， $y = 4$ 这一组整数解。

所以大油桶有3个，小油桶有4个。

[小结] 这道题在解答时，也可联系数论的知识，注意到能被5整除的数的特点，便可轻松求解。

【例4】在一次活动中，丁丁和冬冬到射击室打靶，回来后见到同学“小博士”，他们让“小博士”猜他们各命中多少次。“小博士”让丁丁把自己命中的次数乘以5，让冬冬把自己命中的次数乘以4，再把两个得数加起来告诉他，丁丁和冬冬算了一下是31，“小博士”正确地说出了他们各自命中的次数。你知道丁丁和冬冬各命中几次吗？

**【解析】** 设丁丁和冬冬分别命中了 $x$ 次和 $y$ 次，则： $5x + 4y = 31$ 。可见 $x$ 除以4的余数为3，而且 $x$ 不能超过6，所以 $x = 3$ ， $y = 4$ 。即丁丁命中了3次，冬冬命中了4次。

**【巩固】** 某人打靶，8发共打了53环，全部命中在10环、7环和5环上。问：他命中10环、7环和5环各几发？

**【解析】** 假设命中10环 $x$ 发，7环 $y$ 发，5环 $z$ 发，则 $\begin{cases} x + y + z = 8 \cdots \cdots (1) \\ 10x + 7y + 5z = 53 \cdots (2) \end{cases}$ 由(2)可知 $7y$ 除以5的余数为3，所以 $y = 4, 9, \cdots$ 如果 $y$ 为9，则 $7y = 63 > 53$ ，所以 $y$ 只能为4，代入原方程组可解得 $x = 1$ ， $z = 3$ 。所以他命中10环1发，7环4发，5环3发。

**【例5】** 某次聚餐，每一位男宾付130元，每一位女宾付100元，每带一个孩子付60元，现在有 $\frac{1}{3}$ 的成人各带一个孩子，总共收了2160元，问：这个活动共有多少人参加(成人和孩子)？

**【解析】** 设参加的男宾有 $x$ 人，女宾有 $y$ 人，则由题意得方程： $130x + 100y + \frac{1}{3}(x + y) \times 60 = 2160$ ，即

$150x + 120y = 2160$ ，化简得 $5x + 4y = 72$ 。这个方程有四组解： $\begin{cases} x = 4 \\ y = 13 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x = 12 \\ y = 3 \end{cases}$ 和

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 18 \end{cases}$$

但是由于有 $\frac{1}{3}$ 的成人带着孩子，所以 $x + y$ 能被3整除，检验可知只有后两组满足。

所以，这个活动共有 $12 + 3 + \frac{1}{3} \times (12 + 3) = 20$ 人或 $18 + \frac{1}{3} \times 18 = 24$ 人参加。

**【巩固】** 单位的职工到郊外植树，其中有男职工，也有女职工，并且有 $\frac{1}{3}$ 的职工各带一个孩子参加。男职工每人种13棵树，女职工每人种10棵树，每个孩子都种6棵树，他们一共种了216棵树，那么其中有多少名男职工？

**【解析】** 因为有 $\frac{1}{3}$ 的职工各带一个孩子参加，则职工总人数是3的倍数。设男职工有 $x$ 人，女职工有 $y$ 人。

则职工总人数是 $(x + y)$ 人，孩子是 $\frac{x + y}{3}$ 人。得到方程： $13x + 10y + (x + y) \div 3 \times 6 = 216$ ，化简

得： $5x + 4y = 72$ 。因为男职工与女职工的人数都是整数，所以当 $y = 3$ 时， $x = 12$ ；当 $y = 8$ 时， $x = 8$ ；当 $y = 13$ ， $x = 4$ 。其中只有 $3 + 12 = 15$ 是3的倍数，符合题意，所以其中有12名男职工。

**【例6】** 张师傅每天能缝制3件上衣，或者9件裙裤，李师傅每天能缝制2件上衣，或者7件裙裤，两人20天共缝制上衣和裙裤134件，那么其中上衣是多少件？

**【解析】** 如果20天都缝制上衣，共可缝制 $(3 + 2) \times 20 = 100$ 件，实际上比这多缝制了 $134 - 100 = 34$ 件，这就要把上衣换成裙裤，张师傅每天可多换 $9 - 3 = 6$ 件，李师傅每天可多换 $7 - 2 = 5$ 件，设张师傅缝制裙裤 $x$ 天，李师傅缝制裙裤 $y$ 天，则： $6x + 5y = 34$ ，整数解只有 $x = 4$ ， $y = 2$ 。因此共缝制裙裤 $9 \times 4 + 7 \times 2 = 50$ 件，上衣共 $134 - 50 = 84$ 件。

**【巩固】** 小花狗和波斯猫是一对好朋友，它们在早晚见面时总要叫上几声表示问候。若是早晨见面，小花狗叫两声，波斯猫叫一声；若是晚上见面，小花狗叫两声，波斯猫叫三声。细心的小娟对它们的叫声统计了15天，发现它们并不是每天早晚都见面。在这15天内它们共叫了61声。问：波斯猫至少叫了多少声？

**【解析】** 早晨见面小花狗和波斯猫共叫3声，晚上见面共叫5声。设在这15天内早晨见面 $x$ 次，晚上见面 $y$

次. 根据题意有:  $3x + 5y = 61$  ( $x \leq 15, y \leq 15$ ).

可以凑出, 当  $x = 2$  时,  $y = 11$ ; 当  $x = 7$  时,  $y = 8$ ; 当  $x = 12$  时,  $y = 5$ .

因为小花狗共叫了  $2(x + y)$  声, 那么  $(x + y)$  越大, 小花狗就叫得越多, 从而波斯猫叫得越少, 所以当  $x = 12, y = 5$  时波斯猫叫得最少, 共叫了  $1 \times 12 + 3 \times 5 = 27$  (声).

**【例 7】** 甲、乙两人生产一种产品, 这种产品由一个 A 配件与一个 B 配件组成. 甲每天生产 300 个 A 配件, 或生产 150 个 B 配件; 乙每天生产 120 个 A 配件, 或生产 48 个 B 配件. 为了在 10 天内生产出更多的产品, 二人决定合作生产, 这样他们最多能生产出多少套产品?

**【解析】** 假设甲、乙分别有  $x$  天和  $y$  天在生产 A 配件, 则他们生产 B 配件所用的时间分别为  $(10 - x)$  天和  $(10 - y)$  天, 那么 10 天内共生产了 A 配件  $(300x + 120y)$  个, 共生产了 B 配件

个. 要将它们配成套, A 配件与 B 配件的数量

应相等, 即  $300x + 120y = 1980 - 150x - 48y$ , 得到  $75x + 28y = 330$ , 则  $x = \frac{330 - 28y}{75}$ .

此时生产的产品的套数为  $300x + 120y = 300 \times \frac{330 - 28y}{75} + 120y = 1320 + 8y$ , 要使生产的产品最多, 就要使得  $y$  最大, 而  $y$  最大为 10, 所以最多能生产出  $1320 + 8 \times 10 = 1400$  套产品.

**【巩固】** 某服装厂有甲、乙两个生产车间, 甲车间每天能生产上衣 16 件或裤子 20 件; 乙车间每天能生产上衣 18 件或裤子 24 件. 现在要上衣和裤子配套, 两车间合作 21 天, 最多能生产多少套衣服?

**【解析】** 假设甲、乙两个车间用于生产上衣的时间分别为  $x$  天和  $y$  天, 则他们用于生产裤子的天数分别为  $(21 - x)$  天和  $(21 - y)$  天, 那么总共生产了上衣  $(16x + 18y)$  件,

生产了裤子  $20 \times (21 - x) + 24 \times (21 - y) = 924 - 20x - 24y$  件.

根据题意, 裤子和上衣的件数相等, 所以  $16x + 18y = 924 - 20x - 24y$ , 即  $6x + 7y = 154$ , 即

$x = \frac{154 - 7y}{6}$ . 那么共生产了  $16x + 18y = 16 \times \frac{154 - 7y}{6} + 18y = 410\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y$  套衣服.

要使生产的衣服最多, 就要使得  $y$  最小, 则  $x$  应最大, 而  $x$  最大为 21, 此时  $y = 4$ . 故最多可以生产

出  $410\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 4 = 408$  套衣服.

**【例 8】** 有一项工程, 甲单独做需要 36 天完成, 乙单独做需要 30 天完成, 丙单独做需要 48 天完成, 现在由甲、乙、丙三人同时做, 在工作期间, 丙休息了整数天, 而甲和乙一直工作至完成, 最后完成这项工程也用了整数天, 那么丙休息了 \_\_\_\_\_ 天.

**【解析】** 设完成这项工程用了  $a$  天, 其间丙休息了  $b$  天.

根据题意可知:  $\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{30} + \frac{1}{48}\right)a - \frac{1}{48}b = 1$ ,  $\frac{59}{720}a - \frac{1}{48}b = 1$ , 化简得  $59a - 15b = 720$ .

由上式, 因为  $15b$  与  $720$  都是 15 的倍数, 所以  $59a$  必须是 15 的倍数, 所以  $a$  是 15 的倍数, 在  $a > b$  的条件下, 只有  $a = 15, b = 11$  一组解, 即丙休息了 11 天.

**【例 9】** 实验小学的五年级学生租车去野外开展“走向大自然, 热爱大自然”活动, 所有的学生和老师共 306 人恰好坐满了 5 辆大巴车和 3 辆中巴车, 已知每辆中巴车的载客人数在 20 人到 25 人之间, 求每辆大巴车的载客人数.

**【解析】** 设每辆大巴车和中巴车的载客人数分别为  $x$  人和  $y$  人, 那么有:  $5x + 3y = 306$ . 由于知道中巴车的载客人数, 也就是知道了  $y$  的取值范围, 所以应该从  $y$  入手. 显然  $3y$  被 5 除所得的余数与 306 被 5 除所得的余数相等, 从个位数上来考虑,  $3y$  的个位数字只能为 1 或 6, 那么当  $y$  的个位数是 2 或 7 时成立. 由于  $y$  的值在 20 与 25 之间, 所以满足条件的  $y = 22$ , 继而求得  $x = 48$ , 所以大巴车的载客人数为 48 人.

**【巩固】** 实验小学的五年级学生租车去野外开展“走向大自然，热爱大自然”活动，所有的学生和老师共306人恰好坐满了7辆大巴车和2辆中巴车，已知每辆中巴车的载客人数在20人到25人之间，求每辆大巴车的载客人数。

**【解析】** 设大巴车和中巴车的载客人数分别为 $x$ 人和 $y$ 人，那么有： $7x + 2y = 306$ 。

考虑等式两边除以7的余数，由于306被7除余5，所以 $2y$ 被7除余5，符合条件的 $y$ 有：6、13、20、27，所以 $y = 20$ ，继而求得 $x = 38$ ，所以大巴车的载客人数为38人。

**【巩固】** 每辆大汽车能容纳54人，每辆小汽车能容纳36人。现有378人，要使每个人都上车且每辆车都装满，需要大、小汽车各几辆？

**【解析】** 设需要大、小汽车分别为 $x$ 辆、 $y$ 辆，则有： $54x + 36y = 378$ ，可化为 $3x + 2y = 21$ 。

可以看出 $y$ 是3的倍数，又不超过10，所以 $y$ 可以为0、3、6或9，将 $y = 0、3、6、9$ 分别代入可

知有四组解： $\begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases}$ ；或 $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$ ；或 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ ；或 $\begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases}$

即需大汽车1辆，小汽车9辆；或大汽车3辆，小汽车6辆；或大汽车5辆，小汽车3辆；或大汽车7辆。

**【巩固】** 小伟听说小峰养了一些兔和鸡，就问小峰：“你养了几只兔和鸡？”小峰说：“我养的兔比鸡多，鸡兔共24条腿。”那么小峰养了多少兔和鸡？

**【解析】** 这是一道鸡兔同笼问题，但由于已知鸡兔腿的总数，而不是鸡兔腿数的差，所以用不定方程求解。

设小峰养了 $x$ 只兔子和 $y$ 只鸡，由题意得：

$$4x + 2y = 24$$

$$\text{即：} 2x + y = 12, y = 12 - 2x$$

这是一个不定方程，其可能整数解如下表所示：

$x$	$y$	1	2	3	4	5	6
	12	10	8	6	4	2	0

由题意 $x > y$ ，且 $x, y$ 均不为0，所以 $x = 5, y = 2$ ，也就是兔有5只，鸡有2只。

**【例10】** (1999年香港保良局亚洲区城市小学数学邀请赛) 一个家具店在1998年总共卖了213张床。起初他们每个月卖出25张床，之后每个月卖出16张床，最后他们每个月卖出20张床。问：他们共有多少个月是卖出25张床？

**【解析】** 设卖出25、16、20张床的月份分别为 $x、y、z$ 个月，则：

$$\text{由(1)得 } y = 12 - x - z, \text{ 代入(2)得 } 9x + 4z = 21.$$

显然这个方程的正整数解只有 $x = 1, z = 3$ 。

所以只有1个月是卖出25张床的。

**【例11】** (2008年“希望杯”第二试试题) 五年级一班共有36人，每人参加一个兴趣小组，共有A、B、C、D、E五个小组。若参加A组的有15人，参加B组的人数仅次于A组，参加C组、D组的人数相同，



参加E组的人数最少，只有4人。那么，参加B组的有\_\_\_\_\_人。

【解析】设参加B组的有 $x$ 人，参加C组、D组的有 $y$ 人，则 $x > y > 4$ ，

由题知 $15 + x + 2y + 4 = 36$ ，整理得 $x + 2y = 17$ ；

由于 $y > 4$ ，若 $y = 5$ ，得 $x = 7$ ，满足题意；若 $y \geq 6$ ，则 $x \leq 5$ ，与 $x > y$ 矛盾；

所以只有 $x = 7$ ， $y = 5$ 符合条件，故参加B组的有7人。

【例 12】（2008 年全国小学生“我爱数学夏令营”数学竞赛）将一群人分为甲乙丙三组，每人都必在且仅在一组。已知甲乙丙的平均年龄分为37，23，41。甲乙两组人合起来的平均年龄为29；乙丙两组人合起来的平均年龄为33。则这一群人的平均年龄为\_\_\_\_\_。

【解析】设甲乙丙三组分别有 $x$ ， $y$ ， $z$ 人，依提议有：

(1)

(2)

由(1)化简可得 $x:y = 3:4$ ，由(2)化简可得 $y:z = 4:5$ ，所以 $x:y:z = 3:4:5$ ；

因此，这一群人的平均年龄为 $\frac{37 \times 3 + 23 \times 4 + 41 \times 5}{3 + 4 + 5} = 34$ 。

【例 13】14个大、中、小号钢珠共重100克，大号钢珠每个重12克，中号钢珠每个重8克，小号钢珠每个重5克。问：大、中、小号钢珠各有多少个？

【解析】设大、中、小号钢珠分别有 $x$ 个， $y$ 个和 $z$ 个，则： $\begin{cases} x + y + z = 14 \cdots \cdots (1) \\ 12x + 8y + 5z = 100 \cdots (2) \end{cases}$  (2) - (1)  $\times 5$ ，

得 $7x + 3y = 30$ 。可见 $7x$ 是3的倍数，又是7的倍数，且小于30，所以只能为21，故 $x = 3$ ，代入得 $y = 3$ ， $z = 8$ 。所以大、中、小号钢珠分别有3个、3个和8个。

【巩固】袋子里有三种球，分别标有数字2，3和5，小明从中摸出12个球，它们的数字之和是43。问：小明最多摸出几个标有数字2的球？

【解析】设小明摸出标有数字2，3和5的球分别为 $x$ ， $y$ ， $z$ 个，于是有

由 $5 \times (1) - (2)$ ，得 $3x + 2y = 17 \cdots \cdots (3)$ ，

由于 $x$ ， $y$ 都是正整数，因此在(3)中， $y$ 取1时， $x$ 取最大值5，

所以小明最多摸出5个标有数字2的球。

【例 14】公鸡1只值钱5，母鸡一只值钱3，小鸡三只值钱1，今有钱100，买鸡100只，问公鸡、母鸡、小鸡各买几只？

【解析】设买公鸡、母鸡、小鸡各 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 只，根据题意，得方程组 $\begin{cases} x + y + z = 100 \text{ ①} \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \text{ ②} \end{cases}$  由② $\times 3 -$

①，得 $14x + 8y = 200$ ，即： $y = \frac{200 - 14x}{8} = 25 - \frac{7}{4}x$ ，因为 $x$ 、 $y$ 为正整数，所以不难得出 $x$ 应为4

的倍数，故 $x$ 只能为4、8、12，从而相应 $y$ 的值分别为18、11、4，相应 $z$ 的值分别为78、81、84。所

以，方程组的特殊解为  $\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$ ，所以公鸡、母鸡、小鸡应分别买4只、18只、78只或8只、11只、81只或12只、4只、84只。

78只或8只、11只、81只或12只、4只、84只。

**【巩固】** 小明玩套圈游戏，套中小鸡一次得9分，套中小猴得5分，套中小狗得2分。小明共套了10次，每次都套中了，每个小玩具都至少被套中一次，小明套10次共得61分。问：小明至多套中小鸡几次？

**【解析】** 设套中小鸡  $x$  次，套中小猴  $y$  次，则套中小狗  $(10-x-y)$  次。根据得61分可列方程： $9x+5y+2 \times (10-x-y)=61$ ，化简后得  $7x=41-3y$ 。显然  $y$  越小， $x$  越大。将  $y=1$  代入得  $7x=38$ ，无整数解；若  $y=2$ ， $7x=35$ ，解得  $x=5$ ，所以小明至多套中小鸡5次。

**【例 15】** 开学前，宁宁拿着妈妈给的30元钱去买笔，文具店里的圆珠笔每支4元，铅笔每支3元。宁宁买完两种笔后把钱花完。请问：她一共买了几支笔？

**【解析】** (法一) 由于题中圆珠笔与铅笔的数量都不知道，但总费用已知，所以可以根据不定方程分析两种笔的数量，进而得解。设她买了  $x$  支圆珠笔， $y$  支铅笔，由题意列方程： $4x+3y=30$ ，所以  $3y=30-4x$ ， $y=10-\frac{4x}{3}$  因为  $x, y$  均为整数，所以  $x$  应该能被3整除，又因为  $1 \leq x \leq 7$ ，所以  $x=3$  或  $6$ ，当  $x=3$  时， $y=6$ ， $x+y=9$ ，当  $x=6$  时， $y=2$ ， $x+y=8$ ，宁宁共买了9支笔或8支笔。

(法二) 换个角考虑：将“一支圆珠笔和一支铅笔”看成一对，分析宁宁可能买了几对笔，不妨设为  $m$  对，余下的一定是圆珠笔与铅笔中的唯一一种，一对笔的售价为“ $4+3=7$ 元”，由题意可知， $1 \leq m \leq 4$ ，又  $m$  为整数

(1) 当  $m=1$  时，余款为  $30-7=23$ ，不能被3或4整除，这种情况不可能；

(2) 当  $m=2$  时，余款为  $30-2 \times 7=16$ ，能被4整除，也就是说配对后，余下4支圆珠笔。此时，宁宁买了6支圆珠笔，2支铅笔，共8支笔。

(3) 当  $m=3$  时，余款为  $30-3 \times 7=9$ ，能被3整除，也就是说配对后，余下3支圆珠笔。此时，宁宁买了3支圆珠笔，6支铅笔，共9支笔。

(4) 当  $m=4$  时，余款为  $30-4 \times 7=2$ ，不能被3或4整除，这种情况不可能，由上面的分析可知，宁宁共买了9支笔或8支笔。

**【巩固】** (迎春杯预赛试题) 小华和小强各用6角4分买了若干支铅笔，他们买来的铅笔中都是5分一支和7分一支的两种，而且小华买来的铅笔比小强多。小华比小强多买来铅笔多少支。

**【解析】** 设买5分一支的铅笔  $m$  支，7分一支的铅笔  $n$  支。则： $5 \times m+7 \times n=64$ ， $64-7 \times n$  是5的倍数。用  $n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  代入检验，只有  $n=2$ ，7满足这一要求，得出相应的  $m=10$ ，3。即小华买铅笔  $10+2=12$  支，小强买铅笔  $7+3=10$  支，小华比小强多买2支。

**【例 16】** 蓝天小学举行“迎春”环保知识大赛，一共有100名男、女选手参加初赛，经过初赛、复赛，最后确定了参加决赛的人选。已知参加决赛的男选手的人数，占初赛的男选手人数的20%；参加决赛的女选手的人数，占初赛的女选手人数的12.5%，而且比参加初赛的男选手的人数多。参加决赛的男、女选手各有多少人？

**【解析】** 由于参加决赛的男选手的人数，占初赛的男选手人数的20%；参加决赛的女选手的人数，占初赛时女选手人数的12.5%，所以参加初赛的男选手人数应是5的倍数，参加初赛的女选手的人数应是8的倍数。

设参加初赛的男生为 $5x$ 人，参加初赛的女生为 $8y$ 人。

根据题意可列方程： $5x + 8y = 100$ 。

$$\text{解得} \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases}.$$

又因为参加决赛的女选手的人数，比参加决赛的男选手的人数多，也就是 $y$ 要比 $x$ 大，所以第一组解不合适，只有 $x = 4$ ， $y = 10$ 满足。

故参加决赛的男选手为4人，女选手为10人。

**【巩固】** 今有桃95个，分给甲、乙两班学生吃，甲班分到的桃有 $\frac{2}{9}$ 是坏的，其他是好的；乙班分到的桃有 $\frac{3}{16}$ 是坏的，其他是好的。甲、乙两班分到的好桃共有几个？

**【解析】** 甲班分到的桃是9的倍数，乙班分到的桃是16的倍数，假设甲班分到桃 $9x$ 个，乙班分到桃 $16y$ 个。于是： $9x + 16y = 95$ ，解得 $x = 7$ ， $y = 2$ ，即甲班分到桃 $9 \times 7 = 63$ （个），乙班分到桃 $16 \times 2 = 32$ （个）。所以，两班共分到好桃 $63 \times (1 - \frac{2}{9}) + 32 \times (1 - \frac{3}{16}) = 75$ （个）。

**【例 17】** 甲、乙两人各有一袋糖，每袋糖都不到20粒。如果甲给乙一定数量的糖后，甲的糖就是乙的2倍；如果乙给甲同样数量的糖后，甲的糖就是乙的3倍。甲、乙两人共有多少粒糖？

**【解析】** 设甲、乙原有糖分别为 $x$ 粒、 $y$ 粒，甲给乙的数量为 $z$ 粒，则依题意有：

$$\text{且} \begin{cases} x \leq 20 \\ y \leq 20 \end{cases}, \text{ 整理得} \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \cdots \cdots (1) \\ x - 3y + 4z = 0 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

由(1)得 $x = 2y + 3z$ ，代入(2)得 $7z - y = 0$ ，即 $y = 7z$ 。

因 $y \leq 20$ ，故 $z = 1$ 或 $z = 2$ 。

若 $z = 2$ ，则 $y = 14$ ， $x = 2 \times 14 + 3 \times 2 = 34 > 20$ ，不合题意。

因而 $z = 1$ ，对应方程组有唯一解 $x = 17$ ， $y = 7$ ， $z = 1$ 。则甲、乙共有糖 $17 + 7 = 24$ 粒。

**【巩固】** 有两小堆砖头，如果从第一堆中取出100块放到第二堆中去，那么第二堆将比第一堆多一倍。如果相反，从第二堆中取出若干块放到第一堆中去，那么第一堆将是第二堆的6倍。问：第一堆中的砖头最少有多少块？

**【解析】** 设第一堆砖有 $x$ 块，则根据第一个条件可得第二堆砖有 $(2x - 300)$ 块。

再设从第二堆中取出 $y$ 块放在第一堆后，第一堆将是第二堆的6倍，可列方程：

$$, \text{ 化简得 } 7y + 1800 = 11x,$$

$$\text{那么 } x = (7y + 1800) \div 11 = 163 + \frac{7y+7}{11}.$$

因为 $x$ 是整数，7与11互质，所以 $(y+1)$ 应是11的倍数， $y$ 最小是10，推知 $x$ 最小是

$$163 + \frac{7 \times (10+1)}{11} = 163 + 7 = 170, \text{ 所以，第一堆中的砖头最少有170块。}$$



**【例 18】** (第六届华杯赛复赛第 16 题) 甲乙丙三个班向希望工程捐赠图书，已知甲班有 1 人捐 6 册，有 2 人各捐 7 册，其余都各捐 11 册，乙班有 1 人捐 6 册，3 人各捐 8 册，其余各捐 10 册；丙班有 2 人各捐 4 册，6 人各捐 7 册，其余各捐 9 册。已知甲班捐书总数比乙班多 28 册，乙班比丙班多 101 册，各班捐书总数在 400 册与 550 册之间，问各班各有多少人？

**【解析】** 我们设甲班有  $x$  人，乙班有  $y$  人，丙班有  $z$  人，那么三个班的捐书数目分别为：

$$\begin{aligned} 11x - 13 &= (10y - 10) + 28 \\ 11x - 13 &= 10y - 10 + 28 \end{aligned}$$

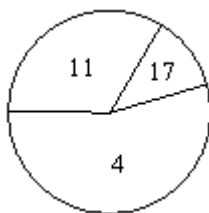
$$\text{根据题意有：} 11x - 13 = (10y - 10) + 28$$

$$10y - 10 = (9z - 22) + 101, \text{ 即有 } 11x = 10y + 31$$

$$10y = 9z + 89$$

又因为各班的捐书数目都在 400 到 550 之间，因此我们知道：捐书最多的甲班有  $11x - 13 \leq 550$ ，而捐书最少的丙班有  $9z - 22 \geq 400$ ，从而有  $563 \geq 11x = 10y + 31 = (9z + 89) + 31 \geq 422 + 89$ ，于是有  $52 > x > 49$ ，所以有  $x = 50$  或  $51$ 。经检验，当  $x = 50$  时， $y$  不是整数，而当  $x = 51$  时，有  $y = 53, z = 49$ ，也就是说，甲乙丙三班人数分别为 51, 53, 49。

**【例 19】** (2009 年“迎春杯”高年级组复赛) 在新年联欢会上，某班组织了一场飞镖比赛。如右图，飞镖的靶子分为三块区域，分别对应 17 分、11 分和 4 分。每人可以扔若干次飞镖，脱靶不得分，投中靶子就可以得到相应的分数。若恰好投在两块(或三块)区域的交界线上，则得两块(或三块)区域中分数最高区域的分数。如果比赛规定恰好投中 120 分才能获奖，要想获奖至少需要投中次飞镖。



**【解析】** 假设投中 17 分、11 分、4 分的次数分别为  $x$  次、 $y$  次和  $z$  次，那么投中飞镖的总次数为  $(x + y + z)$  次，而总得分为  $17x + 11y + 4z$  分，要想获奖，必须  $17x + 11y + 4z = 120$ 。

由于  $17x < 120$ ，得到  $x \leq 6$ 。当  $x$  的值一定后，要使  $(x + y + z)$  最小，必须使  $y$  尽可能大。

若  $x = 6$ ，得到  $11y + 4z = 18$ ，此时无整数解；

若  $x = 5$ ，得到  $11y + 4z = 35$ ，此时  $y = 1, z = 6, x + y + z = 5 + 1 + 6 = 12$ ；

若  $x = 4$ ，得到  $11y + 4z = 52$ ，此时  $y$  最大为 4，当  $y = 4$  时  $z = 2$ ，这种情况下  $x + y + z = 10$ ；

若  $x = 3$ ，得到  $11y + 4z = 69$ ，此时  $y = 3, z = 9, x + y + z = 3 + 3 + 9 = 15$ ；

若  $x = 2$ ，得到  $11y + 4z = 86$ ，此时  $y$  最大为 6，当  $y = 6$  时  $z = 5$ ，这种情况下  $x + y + z = 13$ ；

若  $x = 1$ ，得到  $11y + 4z = 103$ ，此时  $y$  最大为 9，当  $y = 9$  时  $z = 1$ ，这种情况下  $x + y + z = 11$ ；

若  $x = 0$ ，得到  $11y + 4z = 120$ ，此时  $y$  最大为 8，当  $y = 8$  时  $z = 8$ ，这种情况下  $x + y + z = 16$ 。

经过比较可知  $(x + y + z)$  的值最小为 10，所以至少需要投中 10 次飞镖才能获奖。

### 模块三、不定方程与生活中的应用题

**【例 20】** 某地用电收费的标准是：若每月用电不超过50度，则每度收5角；若超过50度，则超出部分按每度8角收费。某月甲用户比乙用户多交3元3角电费，这个月甲、乙各用了多少度电？

**【解析】** 3元3角即33角，因为33既不是5的倍数又不是8的倍数，所以甲、乙两用户用电的情况一定是一个超过了50度，另一个则没有超过。由于甲用户用电更多，所以甲用户用电超过50度，乙用户用电不足50度。设这个月甲用电 $(50+x)$ 度，乙用电 $(50-y)$ 度。因为甲比乙多交33角电费，所以有 $8x+5y=33$ 。容易看出 $x=1$ ， $y=5$ ，可知甲用电51度，乙用电45度。

**【巩固】** 某区对用电的收费标准规定如下：每月每户用电不超过10度的部分，按每度0.45元收费；超过10度而不超过20度的部分，按每度0.80元收费；超过20度的部分按每度1.50元收费。某月甲用户比乙用户多交电费7.10元，乙用户比丙用户多交3.75元，那么甲、乙、丙三用户共交电费多少元？(用电都按整数度收费)

**【解析】** 由于丙交的电费最少，而且是求甲、乙电费的关键，先分析一下他的用电度数。因为乙用户比丙用户多交3.75元，所以二者中必有一个用电度数小于10度(否则差中不会出现0.05元)，丙用电少，所以丙用电度数小于10度，乙用电度数大于10度，但是不会超过20度(否则甲、乙用电均超过20度，其电费差应为1.50的整数倍，而不会是7.10元)。

设丙用电 $(10-x)$ 度，乙用电 $(10+y)$ 度，由题意得：

$$\begin{aligned} 0.45(10-x) + 0.80y &= 3.75 \\ 0.45(10-x) + 0.80(10+y) &= 7.10 \end{aligned}$$

所以 $y$ 是3的倍数，又 $x, y$ 均为整数，且都大于0小于10

$$\text{所以 } y=3, x=\frac{75-16 \times 3}{9}=3$$

所以丙用电 $10-3=7$ 度，交电费 $0.45 \times 7=3.15$ 元；乙交电费 $3.15+3.75=6.90$ 元，甲交电费

$6.90+7.10=14.00$ 元，三户共交电费 $3.15+6.90+14.00=24.05$ 元。

**【例 21】** 马小富在甲公司打工，几个月后又在乙公司兼职，甲公司每月付给他薪金470元，乙公司每月付给他薪金350元。年终，马小富从两家公司共获薪金7620元。他在甲公司打工\_\_\_\_个月，在乙公司兼职\_\_\_\_个月。

**【解析】** 设马小富在甲公司打工 $a$ 月，在乙公司兼职 $b$ 月( $a > b$ ， $a, b$ 都是不大于12的自然数)，则有 $470a+350b=7620$ ，化简得 $47a+35b=762$ 。若 $b$ 为偶数，则 $35b$ 的末位数字为0，从而 $47a$ 的末位数字必为2，这时 $a=6$ 。但 $a=6$ 时， $b=\frac{480}{35}$ 不是整数，不合题意，所以 $b$ 必为奇数。 $b$ 为奇数时， $35b$ 的末位数字为5，从而 $47a$ 的末位数字为7， $a=1$ 或 $a=11$ 。但 $a=1$ 时容易看出 $a < b$ ，与 $a > b$ 矛盾。所以， $a=11$ ，代入得 $b=(762-47 \times 11) \div 35=7$ 。  
于是马小富在甲公司打工11个月，在乙公司兼职7个月。

**【例 22】** 甲、乙、丙、丁、戊五人接受了满分为10分(成绩都是整数)的测验。已知：甲得了4分，乙得

了最高分，丙的成绩与甲、丁的平均分相等，丁的成绩刚好等于五人的平均分，戊比丙多2分。求乙、丙、丁、戊的成绩。

【解析】法一：方程法。设丁的分数为 $x$ 分，乙的分数为 $y$ 分，那么丙的分数为 $\frac{x+4}{2}$ 分，戊的分数为

$\frac{x+4}{2} + 2 = \frac{x+8}{2}$ 分，根据“丁的成绩刚好等于五人的平均分”，有 $5x = 4 + x + \frac{x+4}{2} + \frac{x+8}{2} + y$ ，所以 $3x = 10 + y$ 。因为 $x < y \leq 10$ ，所以 $3x = 10 + y \leq 10 + 10 = 20$ ， $3x = 10 + y > 10 + x$ ，得到 $5 < x \leq \frac{20}{3}$ ，故 $x = 6$ ，代入得 $y = 8$ 。所以丁得6分，丙得5分，戊得7分，乙得8分。

法二：推理法。因为丁为五人的平均分，所以丁不是成绩最低的；丙的成绩与甲、丁的平均分相等，所以丙在甲与丁之间；又因为戊和乙都比丙的成绩高，所以乙、丙、丁、戊都不是最低分，那么甲的成绩是最低的。因为甲是4分，所以丁可能是6分或8分（由丙的成绩与甲、丁的平均分相等知丁的得分是偶数），经检验丁得8分时与题意不符，所以丁得6分，则丙得5分，戊得7分，乙得8分。

【巩固】有两个学生参加4次数学测验，他们的平均分数不同，但都是低于90分的整数。他们又参加了第5次测验，这样5次的平均分数都提高到了90分。求第5次测验两人的得分。（每次测验满分为100分）

【解析】设某一学生前4次的平均分为 $x$ 分，第5次的得分为 $y$ 分，则其5次总分为 $4x + y = 90 \times 5 = 450$ ，于是 $y = 450 - 4x$ 。显然 $90 < y \leq 100$ ，故 $90 < 450 - 4x \leq 100$ ，解得 $87.5 \leq x < 90$ 。

由于 $x$ 为整数，可能为88和89，而且这两个学生前4次的平均分不同，所以他们前4次的平均分分别为88分和89分，那么他们第5次的得分分别为： $450 - 88 \times 4 = 98$ 分； $450 - 89 \times 4 = 94$ 分。

【例23】小明、小红和小军三人参加一次数学竞赛，一共有100道题，每个人各解出其中的60道题，有些题三人都解出来了，我们称之为“容易题”；有些题只有两人解出来，我们称之为“中等题”；有些题只有一人解出来，我们称之为“难题”。已知每个题都至少被他们中的一人解出，则难题比容易题多\_\_\_\_\_道。

【解析】设容易题、中等题和难题分别有 $x$ 道、 $y$ 道、 $z$ 道，则 $\begin{cases} x + y + z = 100 \cdots (1) \\ 3x + 2y + z = 180 \cdots (2) \end{cases}$ ，由 $(1) \times 2 - (2)$ 得 $2x + 2y + 2z - (3x + 2y + z) = 200 - 180$ ，即 $z - x = 20$ ，所以难题比容易题多20道。

【例24】甲、乙两个同学在一次数学擂台赛中，试卷上有解答题、选择题、填空题各若干个，而且每个小题的分值都是自然数。结果公布后，已知甲做对了5道解答题，7道选择题，9道填空题，共得52分；乙做对了7道解答题，9道选择题，11道填空题，共得68分。问：解答题、选择题、填空题的每道小题各多少分？

【解析】设每道解答题为 $x$ 分，每道选择题为 $y$ 分，每道填空题为 $z$ 分，有 $\begin{cases} 5x + 7y + 9z = 52 \\ 7x + 9y + 11z = 68 \end{cases}$ ，解得 $y + 2z = 6$ 。因为 $y, z$ 都是自然数，而且不为0，所以有 $y = 2, z = 2$ ，或者 $y = 4, z = 1$ 。分别代入原方程解得 $x = 4$ 或者 $x = 3$ 。所以解答题、选择题、填空题的每道小题的分数分别为4分、2分、2分或者3分、4分、1分。

【例25】（2007年“我爱数学夏令营”数学竞赛）甲乙丙三人参加一个共有30个选择题的比赛，计分办法是在30分的基础上，每答对一题加4分，答错一题扣1分，不答既不扣分也不加分。赛完后发现根据甲所得总分可以准确算出他答对的题数，乙、丙二人所得总分相同，仅比甲少1分，但乙丙答对的题数却互不相同。由此可知，甲所得总分最多为\_\_\_\_\_。

【解析】设乙做对 $a$ 道题，做错 $b$ 道题；丙做对 $m$ 道，做错 $n$ 道，则有 $4a - b = 4m - n$ 。又 $4(a - m) = b - n$ ，则有 $4 \mid b - n$ 。要使得甲总分最高，由于乙丙仅比甲少1分，则乙丙也应尽可能总分最高，从而错

题最少，其他的题全多。若 $b=4$ ， $n=0$ ，则 $a-m=1$ ， $a=26$ ， $m=25$ 。此时乙得分为 $26 \times 4 - 4 + 30 = 130$ 分，丙得分为 $25 \times 4 - 0 + 30 = 130$ 分，甲得分为 $130 + 1 = 131$ 分。甲扣19分，只能 $5 \times 3 + 4 = 19$ ，别无其他方式，即只能错3题空1题。若 $b=5$ ， $n=1$ ，则 $a-m=1$ ， $a=25$ ， $m=24$ 。此时乙得分为 $25 \times 4 - 5 + 30 = 126$ 分，甲得分为 $125 + 1 = 126$ 分。这种得分不唯一，且得分不是最高，其他情况不可能超过131分。综上所述，甲的总分为131分。

**【例 26】** 某男孩在2003年2月16日说：“我活过的月数以及我活过的年数之差，到今天为止正好就是111。”请问：他是在哪一天出生的？

**【解析】** 设男孩的年龄为 $x$ 个年和 $y$ 个月，即 $12x+y$ 个月，由此有方程式： $12x+y-x=111$ ，也就是 $11x+y=11 \times 10 + 1$ ，得到 $x=10+\frac{1-y}{11}$ ，由于 $0 \leq y < 12$ 而且 $\frac{1-y}{11}$ 是整数，所以， $y=1$ ， $x=10$ ，从2003年2月16日那天退回10年又1个月就是他的生日，为1993年1月16日。

**【例 27】** 某次演讲比赛，原定一等奖10人，二等奖20人，现将一等奖中的最后4人调整为二等奖，这样得二等奖的学生的平均分提高了1分，得一等奖的学生的平均分提高了3分，那么原来一等奖平均分比二等奖平均分多\_\_\_\_\_分。

**【解析】** 设原来一等奖的平均分为 $x$ 分，二等奖的平均分为 $y$ 分，得：  
 $10x - (10-4) \times (x+3) = (20+4)(y+1) - 20y$ ，整理得 $x=y+10.5$ ，即 $x-y=10.5$ ，  
所以原来一等奖平均分比二等奖平均分多10.5分。

**【例 28】** 某次数学竞赛准备了35支铅笔作为奖品发给一、二、三等奖的学生，原计划一等奖每人发给6支，二等奖每人发给3支，三等奖每人发给2支，后来改为一等奖每人发13支，二等奖每人发4支，三等奖每人发1支。那么获二等奖的有\_\_\_\_\_人。

**【解析】** 法一：

根据“后来改为一等奖每人发13支”，可以确定获一等奖的人数小于3。否则仅一等奖就要发不少于39支铅笔，已超过35支，这是不可能的。分别考虑一等奖有2人或者1人的情况：

①获一等奖有2人时，改变后这2人共多得 $(13-6) \times 2 = 14$ 支，那么得二等奖和三等奖的共少得了14支铅笔。

由于改变后二等奖多得1支，三等奖少得1支，所以三等奖应比二等奖多 $14 \div 1 = 14$ 人，这样他们少得的铅笔数正好是一等奖多得的。但此时三等奖至少14人，他们的铅笔总数至少为 $13 \times 2 + 14 \times 1 = 40 > 35$ ，所以这种情况不可能发生。

②获一等奖有1人时，类似前面情况的讨论，可以确定获三等奖的人数比二等奖多  
人，所以获二等奖的有 $(35-13-7 \times 1) \div (4+1) = 3$ （人）。

经检验，获一等奖1人，获二等奖3人，获三等奖10人符合题目要求，所以有3人获二等奖。

法二：

设获一、二、三等奖的人数分别有 $x$ 人、 $y$ 人、 $z$ 人，则有方程组：

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 35 \cdots \cdots (1) \\ 13x + 4y + z = 35 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

由 $(2) \times 2 - (1)$ 将 $z$ 消元，则有 $20x + 5y = 35$ ，即 $4x + y = 7$ ，显然该方程的正整数解只有 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ，

继而可得到 $z=10$ 。所以获二等奖的有3人。