

# Les Mathématiques Financières

## Introduction

Les mathématiques financières sont devenues de nos jours un outil incontournable dans un monde où l'argent (la monnaie) prend une place prépondérante dans les affaires. Pour toutes opérations économiques, l'agent économique n'a plus droit à l'erreur. Son raisonnement doit toujours être rationnel afin de lui permettre de prendre des décisions rentables.

Ainsi grâce aux calculs rationnels, l'agent économique doit minutieusement détecter des placements ou investissements rentables. Par exemple l'on peut chercher à savoir s'il est préférable d'acheter ou de louer un matériel sur une période donnée compte tenu des recettes espérées et des charges correspondantes. Le concept de rentabilité guide de nos jours le choix économique du citoyen en matière de consommation et d'investissement. A cet effet une bonne maîtrise des mathématiques financières ne saurait être qu'un atout non négligeable pour un opérateur économique qui se veut pérenne dans un environnement de plus en plus compétitif et incertain.

## 1) Objectif du cours:

Ce cours vise à présenter les différents éléments du calcul financier et d'expliquer la notion de la valeur temporelle de l'argent. Il fait apparaître principalement cinq préoccupations :

- La différence entre les différents types d'intérêts (intérêt simple, intérêt composé).
- La différence entre les situations d'actualisation et de capitalisation.
- La méthode de calcul de la valeur future et la valeur présente d'une somme ou d'une suite d'annuités.
- Les grands domaines d'application du calcul financier.
- Les tableaux d'amortissement des emprunts.

Pour atteindre les objectifs d'apprentissage, le contenu du cours est structuré en 6 chapitres :

## 2) plan du cours:

**Chapitre 1 : Intérêts simples**

**Chapitre 2 : l'escompte commercial**

**Chapitre 3 : Equivalence de capitaux à intérêts simples**

**Chapitre 4 : Intérêts composés**

**Chapitre 5 : Equivalence de capitaux à intérêts composés**

**Chapitre 6 : Les annuités et Les emprunts indivis**

Chacun des chapitres comporte des applications permettant de bien assimiler le contenu du cours. Des exercices et des problèmes à la fin de chaque chapitre permettront à l'étudiant de tester ses connaissances.

# Chapitre 1 : les intérêts simples.

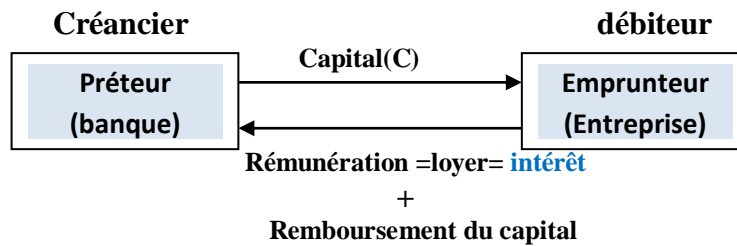
## Plan

1. Concept de l'intérêt
2. Formule fondamentale de l'intérêt simple
3. Valeur acquise
4. Taux moyen de plusieurs placements

## 1) Concept de l'intérêt

Les Mathématiques financières mettent en relation une personne qui prête une somme d'argent (appelée : « prêteur ») et une personne qui emprunte cet argent (appelée « emprunteur »)

La somme d'argent prêtée (appelée « capital ») rapporte une rémunération à celui qui le prête cette rémunération est appelé intérêt.



### a) Définition d'intérêt

L'intérêt peut être défini comme le loyer de l'argent placé ou prêté pendant une durée déterminée.

C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps. Il s'agit d'un revenu pour le prêteur et une dépense pour l'emprunteur.

Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt:

- ✓ la somme prêtée (**Capital (C)**)
- ✓ la durée du prêt (**n**)
- ✓ le taux auquel cette somme est prêtée (**t**)

Il y a deux types d'intérêt: l'intérêt simple et l'intérêt composé.

### b) Types d'intérêt (modes de calcul) :

#### □ **Les intérêts simples :**

Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt, L'emprunteur doit verser à la fin de chaque période le même montant d'intérêt dû.

#### □ **Les intérêts composés :**

l'intérêt est dit « composé » si à la fin de chaque période, l'intérêt simple produit pendant la période précédente est ajouté au capital, cet intérêt produisant à son tour des intérêts. (On dit alors que l'intérêt est « capitalisé ».)

### c) Modes de paiement d'intérêts

- **Intérêts précomptés :** les intérêts sont versés au début de la période de prêt (au moment de la remise de la somme prêtée)

Exemple : celui qui emprunte 1000DH au taux annuel de 8% pendant une année recevra ;  
 $1000 - (1000 \times 8 / 100) = 920$  DH

- **Intérêts post-comptés :** les intérêts sont versés à la fin de la période de prêt

- **Intérêts périodiques :** payés à la fin de chaque période (mois, trimestre, semestre ou année.)

## 2) Formule fondamentale de l'intérêt simple

### a) **Durée de prêt (n) est exprimée en années**

Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt, l'emprunteur doit verser à la fin de chaque période l'intérêt dû.

Le montant d'intérêt dépend :

- **Capital placé(C)** ; c'est-à-dire la somme d'argent prêtée (ou empruntée) noté **C**.
- **Durée de prêt ou de l'emprunt(n)**: divisée en unités de temps appelées périodes (Année).
- **Le taux d'intérêt (t)** : représente le montant d'intérêt généré par le placement de 100 DH pendant une année.
- **Intérêt (I)** : rapporté par le capital (C).

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100}$$

#### **Exemple1 :**

Un prêteur prête à une entreprise un capital de 20 000 DH pendant 3 ans au taux de 9,5%(taux annuel)

**Question :** Calculer le montant de l'intérêt dû(I).

I = ?

**Solution**

On a :

$$I = C \cdot \frac{t}{100} \cdot n \quad \text{donc} \quad \frac{20\,000 \times 9,5 \times 3}{100} = \mathbf{5700 \text{ DH}}$$

**Exemple2 :** quel est l'intérêt produit par un capital de 35.850 dirhams placé pendant 5 ans à un taux égal à 11% ?

### a) **Durée de prêt(n) est exprimée en mois**

Si la durée **n** de placement est exprimée en mois, on aura n correspond n/12 année:

$$I = C \cdot \frac{t}{100} \cdot \frac{n}{12}$$

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{1200}$$

#### **Exemple1 :**

Une Banque prête à un client un capital de 25000 DH pendant 8 mois au taux de 9%(taux annuel)

**Question :** Calculer le montant de l'intérêt dû(I).

On a :

$$I = C \cdot \frac{t}{100} \cdot \frac{n}{12}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{(25\,000 \times 9 \times 8)}{1200} = \mathbf{1500 \text{ DH}}$$

c) la durée du placement n est exprimée en jours,

On a dans ce cas n correspond à n/360 année ;

**Formule :**

$$I = C \cdot \frac{t}{100} \cdot \frac{n}{360}$$

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{36000}$$

**Remarque :**

Pour une durée de placement exprimée en jours, l'usage fait que l'intérêt est calculé sur la base de l'année financière ou commerciale comptant 360 jours et non pas l'année civile comptant 365 jours ou 366 jours.

Par ailleurs, il faut aussi signaler que lorsque la durée est exprimée en jours, les mois sont comptés à leur nombre exact de jours, et on ne tient compte que de l'une des deux dates extrêmes.

**Exemple1:**

Une somme de 10 000 DH est placée sur un compte du 23 Avril 2020 au 9 Août 2020 au taux simple de 7 %

-Calculer le montant de l'intérêt produit.

**Solution :**

On a

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{36000}$$

et  $C = 10000$ ,  $t = 7$ , Calculons alors le nombre de jours de placement.

- Avril = 30-23= 7 jours
  - Mai = 31 jours
  - Juin = 30 jours
  - Juillet = 31 jours
  - Août = 9 jours
- =108 jours

Donc

$$I = \frac{10000 \cdot 7 \cdot 108}{36000} = 210$$

**Exemple 2 ;** Un capital de 32 500 DH prêté entre 6 Mai et le 11 Août au taux d'intérêt de 4,5 %

-Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.

### 3) la valeur Acquise (valeur définitive) :

La valeur acquise du capital après « n » périodes de placement est la somme du capital et des intérêts gagnés. Si nous désignons par ( $C_n$ ) la valeur acquise alors :

$$C_n = C + I = C + \frac{C \cdot t \cdot n}{36000} = C \left(1 + \frac{t \cdot n}{36000}\right)$$

#### **Application :**

Dans notre exemple précédent, la valeur acquise par le capital de 10 000 DH au 9 Août 2020 au taux de 7% est :

$$C_n = C + I = 10\,000 + 210 = \underline{10\,210} \text{ DH}$$

### 4) Méthode des Nombres et des diviseurs fixes :

si n est exprimé en j ,

On a :

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{36000}$$

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{36000} = I = (C \cdot t \cdot n / t) / (36\,000 / t)$$

Posons  $D = (36\,000 / t)$  ceci entraîne que  $I = \frac{C \cdot n}{D}$  {  $D$  : Diviseur fixe

Nous posons également  $N = C \cdot n$ . Donc la formule finale devient : que  $I = \frac{N}{D}$  {  $N$  : Nombre

#### **Exemple :**

Un capital de 15 000 DH est placé à 5% pendant 32 jours.  
Quel est le montant de l'intérêt en fin de placement ?

#### **Solution**

$$N = C \cdot n = 15\,000 \cdot 32 = 480\,000 \text{ DH}$$

$$D = 36\,000 / t = 36\,000 / 5 = 7\,200 \text{ DH}$$

$$\text{D'où } I = N / D = 480\,000 / 7\,200$$

$$I = 66,66$$

**NB :** l'intérêt de cette méthode est de pouvoir faire rapidement le calcul d'intérêt lorsque plusieurs capitaux sont en jeu.  $I = \sum N_i / D$

**Exemple2 :** une entreprise a placé à un taux unique de 12% les capitaux suivant

- un capital de 15 000 DH pendant 38 j
- un capital de 27 000 DH pendant 76 j
- un capital de 32 000 DH pendant 60 j

**Question :** calculer le montant d'intérêt global généré par ces placements.

### 5) Taux moyen de placement de plusieurs capitaux

Soit trois capitaux  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  placés à des taux différents  $t_1$  ;  $t_2$  et  $t_3$  pendant des durées différentes de  $n_1$ ,  $n_2$ , et  $n_3$  calculons le taux moyen de ces placements.

### Solution

L'intérêt global **Ig** procuré par ces trois placements :

$$I = \frac{C_1 t_1 n_1}{36\,000} + \frac{C_2 t_2 n_2}{36\,000} + \frac{C_3 t_3 n_3}{36\,000}$$

Le taux moyen de placement serait le taux unique **tm** qui appliqué aux capitaux respectifs et pour leur durée respective conduirait au même intérêt global. Ce qui permet d'écrire :

$$I_g = \frac{C_1 t_m n_1}{36\,000} + \frac{C_2 t_m n_2}{36\,000} + \frac{C_3 t_m n_3}{36\,000} = \frac{C_1 t_1 n_1}{36\,000} + \frac{C_2 t_2 n_2}{36\,000} + \frac{C_3 t_3 n_3}{36\,000}$$

$$t_m = \frac{\sum C_1 t_1 n_1 + C_2 t_2 n_2 + C_3 t_3 n_3}{\sum C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3}$$

En général

$$t_m = \frac{\sum_{k=1}^n C_k \times j_k \times t_k}{\sum_{k=1}^n C_k \times j_k}$$

#### **Example:**

Calculer le taux moyen des placements suivants :

- \* 2.000 dirhams placés pendant 30 jours à 7%.
- \* 7.000 dirhams placés pendant 60 jours à 10%.
- \* 10.000 dirhams placés pendant 50 jours à 9%.

#### **Solution :**

$$t_m = \frac{(2.000 \times 30 \times 7) + (7.000 \times 60 \times 10) + (10.000 \times 50 \times 9)}{(2.000 \times 30) + (7.000 \times 60) + (10.000 \times 50)}$$
$$t_m = 9,3\%.$$