Schémas d'intégration

Evolution du système

- En DEM, le système évolue par petits **déplacements successifs** de même durée constante.

- Cette durée constante est appelée le **pas de temps** et sera notée Δt par la suite.

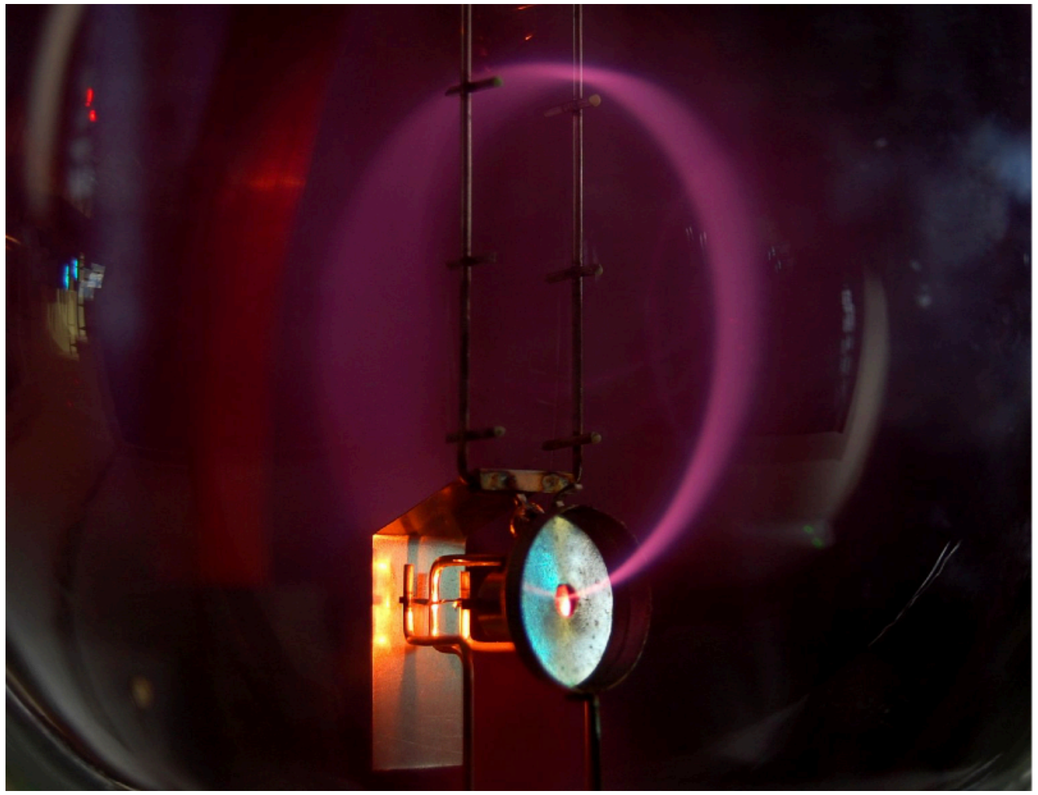
- Dans le cas d'un **MRUA** (et d'un MRU), le déplacement d'un objet est très **simple** à dicrétiser,

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

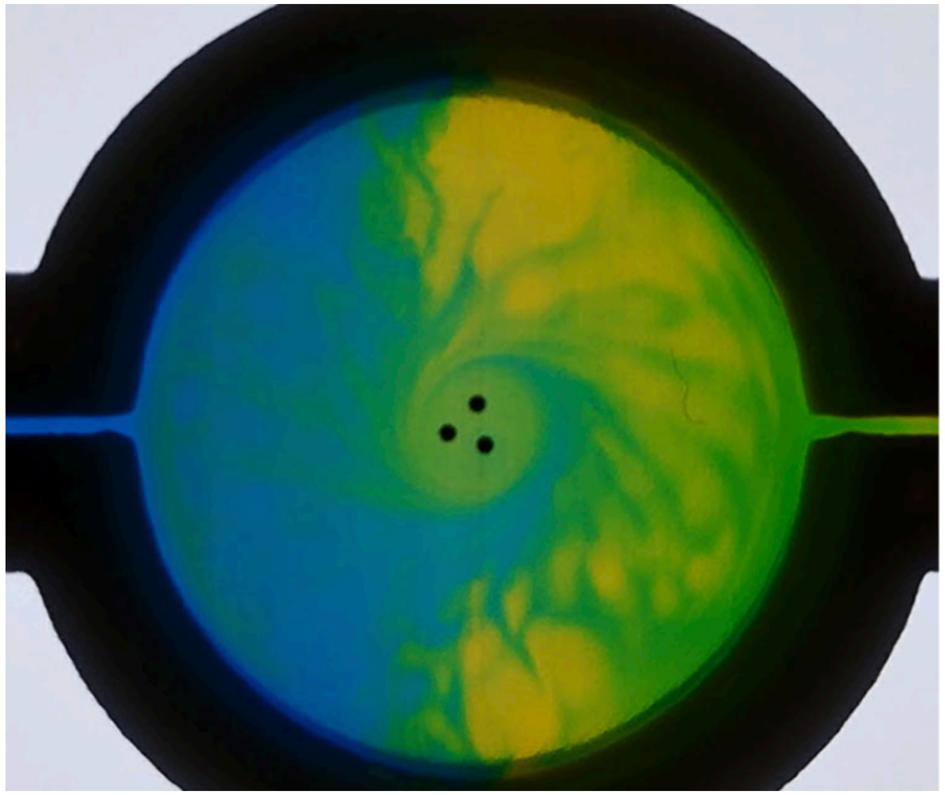
- Mais comment peut-on modéliser les **mouvements** d'un objet dont l'accélération n'est pas constante?

Exemple

- Imaginons qu’une particule soit soumise à une force qui dépend de sa **position** ou de sa **vitesse**.



Expérience de Thomson

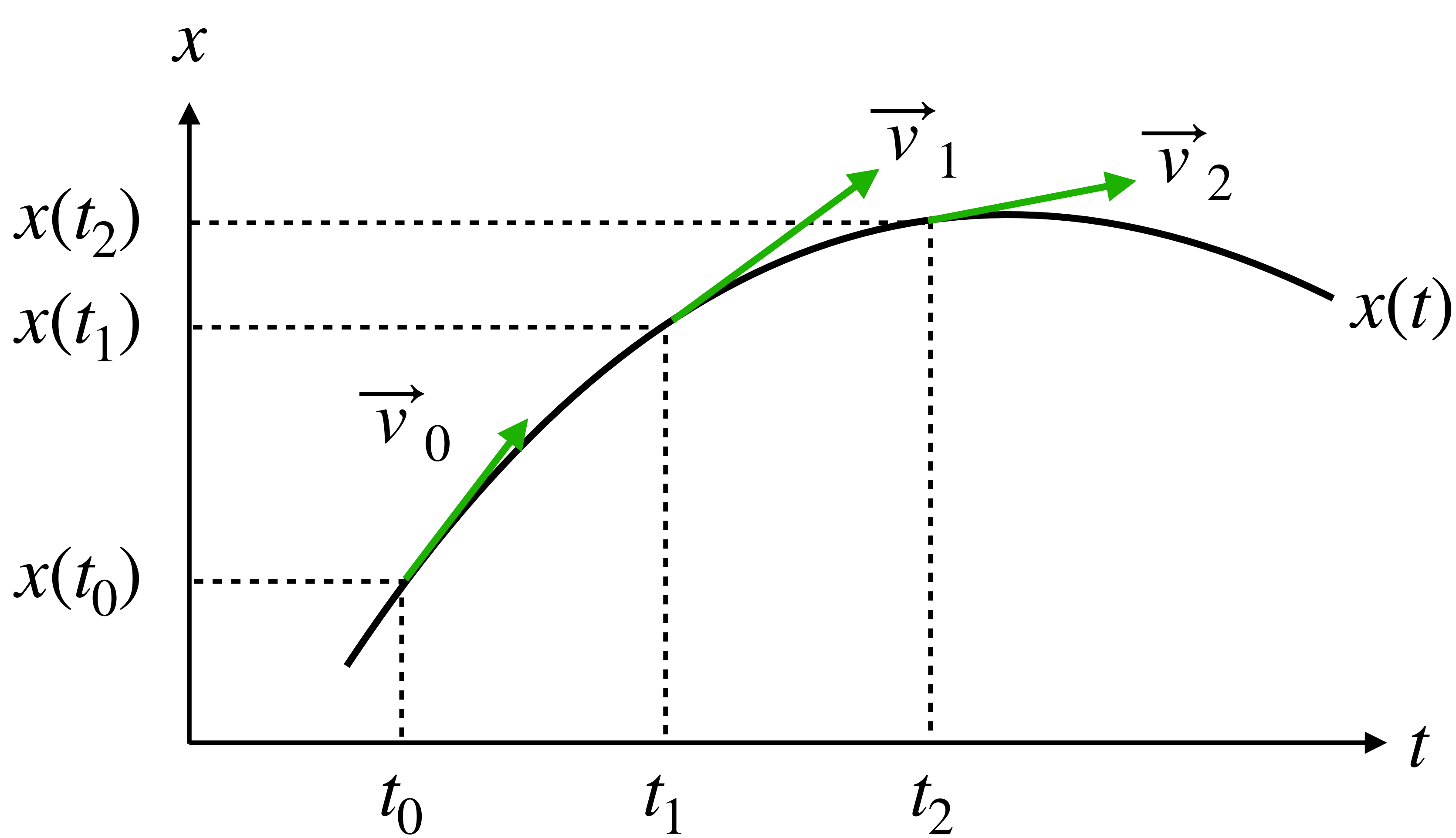


Micro-nageurs magnétiques

- Ceci est le cas pour des particules chargées ou encore lorsqu’un film de liquide doit être drainé.

Evolution du système

- Modéliser un tel mouvement revient à **approcher** au mieux **une fonction** quelconque.



- Pour faire cela, nous allons nous baser sur les schémas **d'intégration** de l'analyse numérique.

Méthode d’Euler

- Nous partons des équations de **Newton** et adoptons les **conventions** suivantes,

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = f(x)$$

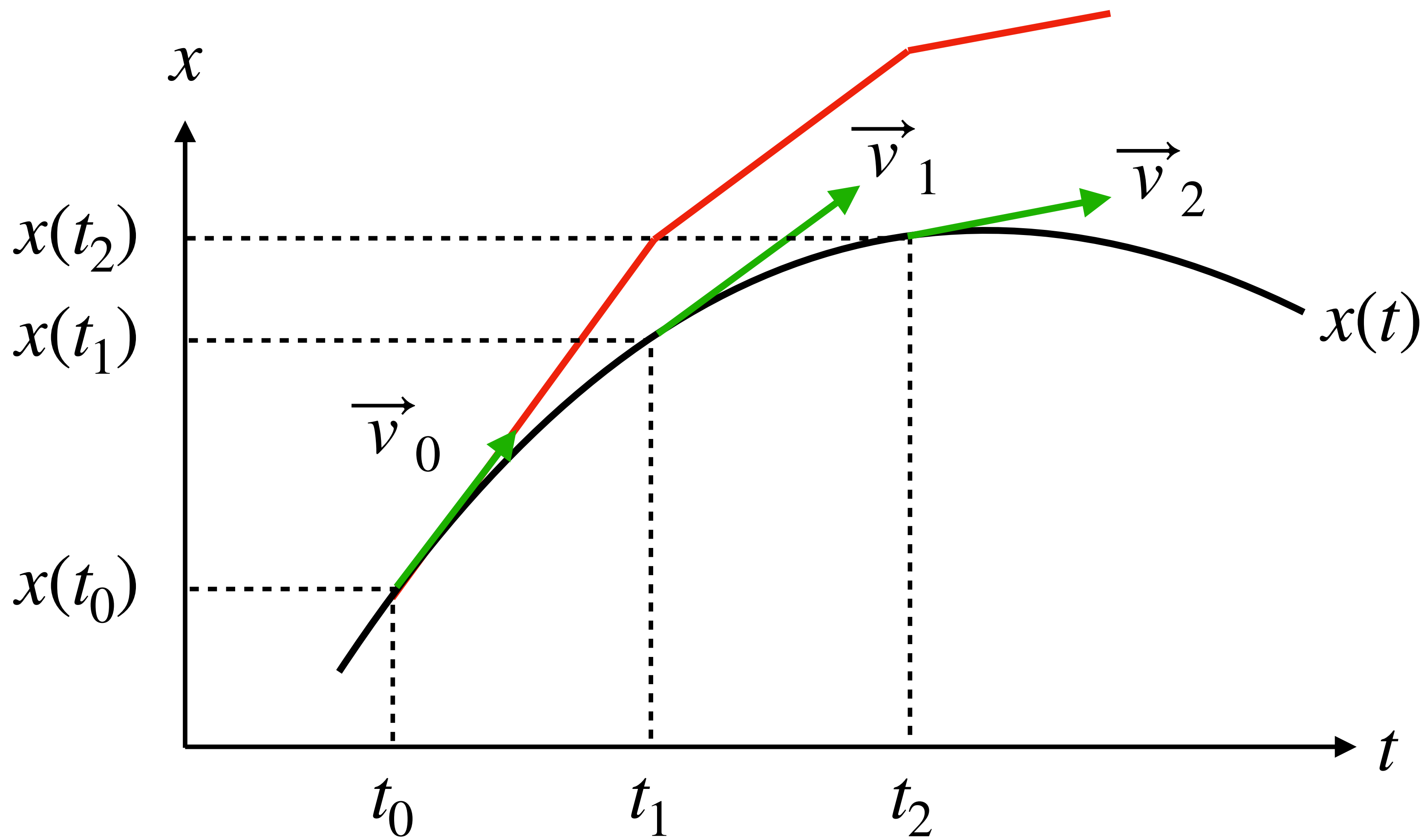
- Il est possible de **prédire** la nouvelle position d’une particule sur base ces relations,

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n \Delta t \\ v_{n+1} &= v_n + f\left(x_n\right)\,\Delta t \end{aligned}}$$

- Malheureusement, cette prédiction, appelée **méthode d’Euler,** manque de précision et de stabilité.

Evolution du système

- En effet, en utilisant la méthode d'Euler, le modèle s'écarte considérablement de la trajectoire réelle.



- Nous allons donc utiliser d'**autres modèles** permettant de reproduire plus fidèlement la réalité.

Méthode du trapèze

- Une première amélioration est donnée par une évaluation **pondérée** de la vitesse.

$$v_{n+1} = v_n + f\left(x_n\right)\,\Delta t$$

$$v_{int} = \frac{v_n}{2} + \frac{v_{n+1}}{2}$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{int}\Delta t$$

- Cette méthode est du **second ordre** et bien plus stable que la méthode d'Euler.

Méthode du Leapfrog

- Une autre méthode du second ordre repose sur le **décalage** de l'actualisation de la **vitesse**.

$$v_{n+1/2} = v_n + f\left(x_n\right)\frac{\Delta t}{2}$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1/2}\Delta t$$

$$v_{n+1} = v_{n+1/2} + f\left(x_{n+1}\right)\frac{\Delta t}{2}$$

- En effet, la nouvelle position est évaluée sur base de la vitesse au **milieu** du pas de temps.

Méthode du Leapfrog

- Si on décale l'actualisation de la **position** au lieu de la vitesse, on obtient le schéma suivant,

$$x_{n+1/2} = x_n + v_n \frac{\Delta t}{2}$$

$$v_{n+1} = v_n + f\left(x_{n+1/2}\right) \Delta t$$

$$x_{n+1} = x_{n+1/2} + v_{n+1} \frac{\Delta t}{2}$$

- **Remarque**: C'est ce dernier schéma d'intégration qui va être retenu pour notre algorithme.

Méthode du Leapfrog

- Si on **combine** ces trois dernières équations, on obtient une formule bien connue,

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} f(x_{n+1/2}) \Delta t^2$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_{n+1/2} \Delta t^2$$

- Ce schéma correspond à un MRUA dont l'accélération est évaluée au **milieu** du pas de temps.

- **Remarque**: Dans notre algorithme la formulation en trois lignes sera utilisée.

Exercices

- Simulez la chute libre d'une particule à l'aide des méthodes d'Euler et du *Leapfrog*.
- Utilisez le *Leapfrog* pour simuler une charge mobile s'approchant d'une charge fixe de même signe.
- Utilisez le *Leapfrog* pour simuler une bille qui coule dans une liquide visqueux.