

Modélisation des forces

Les forces à courte portée

- ▶ Les solides composant notre système **interagissent** à travers différentes forces.
- ▶ Ces forces dépendent souvent des **positions** relatives des ces solides.
- ▶ **Rappel:** Pour modéliser le mouvement des particules, nous étions partis des relations suivantes:

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad F \propto \frac{dv}{dt} = f(x)$$

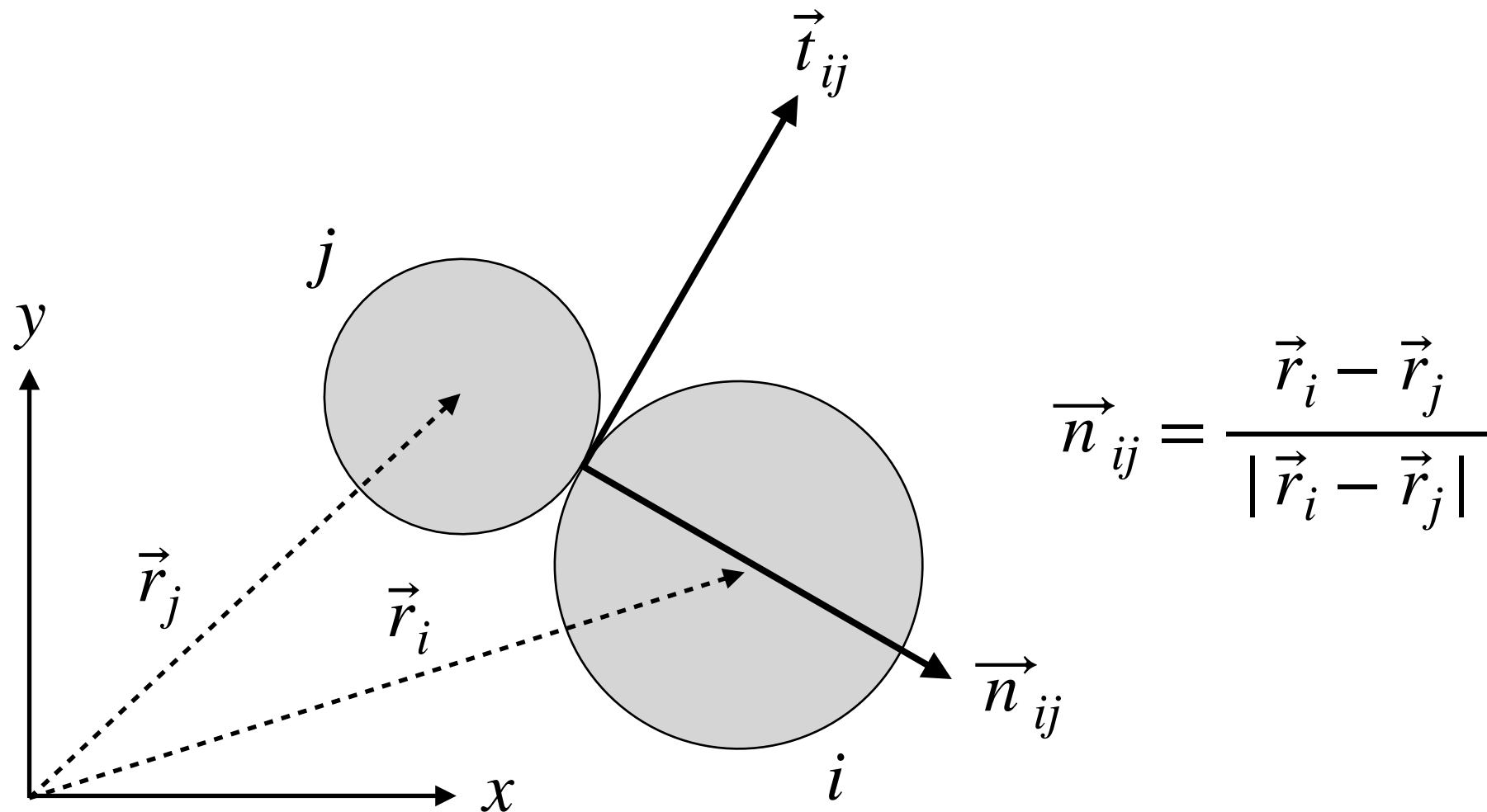
- ▶ Les forces à courte portée sont des forces dont on pourra **négliger** l'effet au delà d'une certaine distance.

Les forces de contact

- ▶ Les forces à courte portée les plus classiques sont les forces de **contact**.
- ▶ Lors d'une collision entre particule, apparaissent une force de **répulsion** et une force de **friction**.
- ▶ La force de répulsion \vec{F}_n s'exerce suivant la direction **normale** par rapport au contact.
- ▶ La force de friction \vec{F}_t s'exerce suivant la direction **tangentielle** par rapport au contact.
- ▶ Avant de modéliser ces forces, il nous faudra d'abord définir une **base** locale au contact.

Base au contact

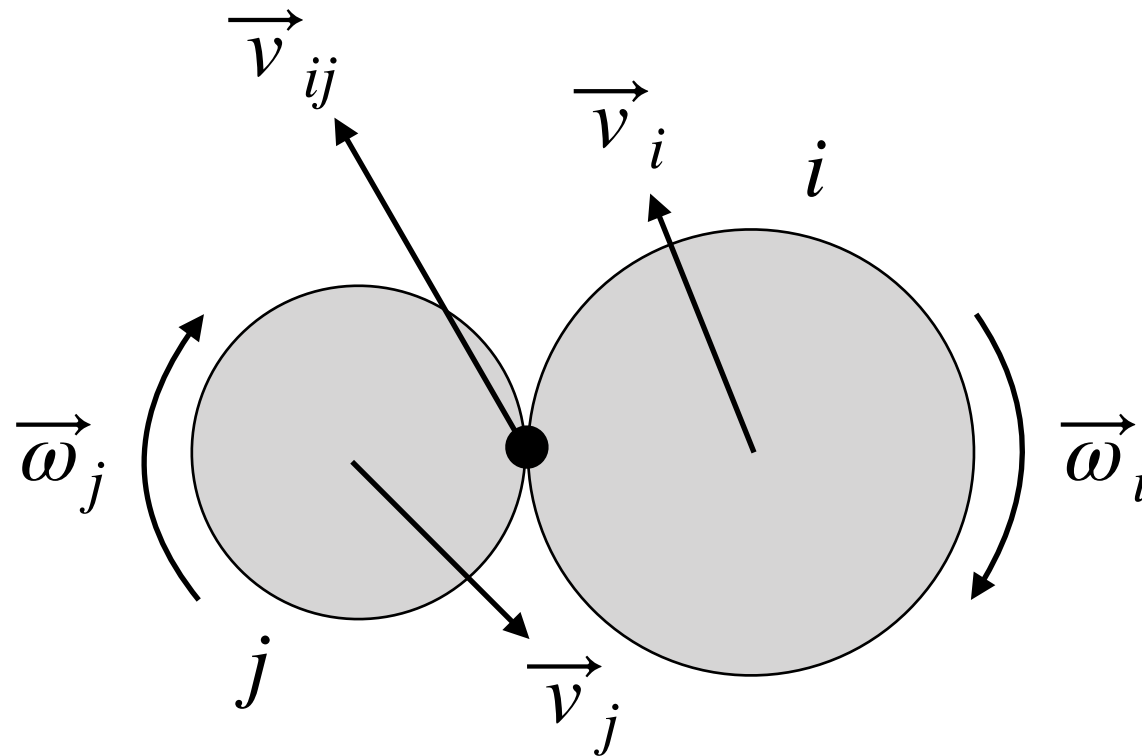
- Pour chaque contact détecté, il faudra définir localement une **base orthonormée**.



- Le vecteur unitaire **normale** s'obtient simplement en reliant les centres des disques en contact.

Base au contact

- ▶ Le sens du vecteur tangent est donnée par la vitesse de glissement du **point de contact**.

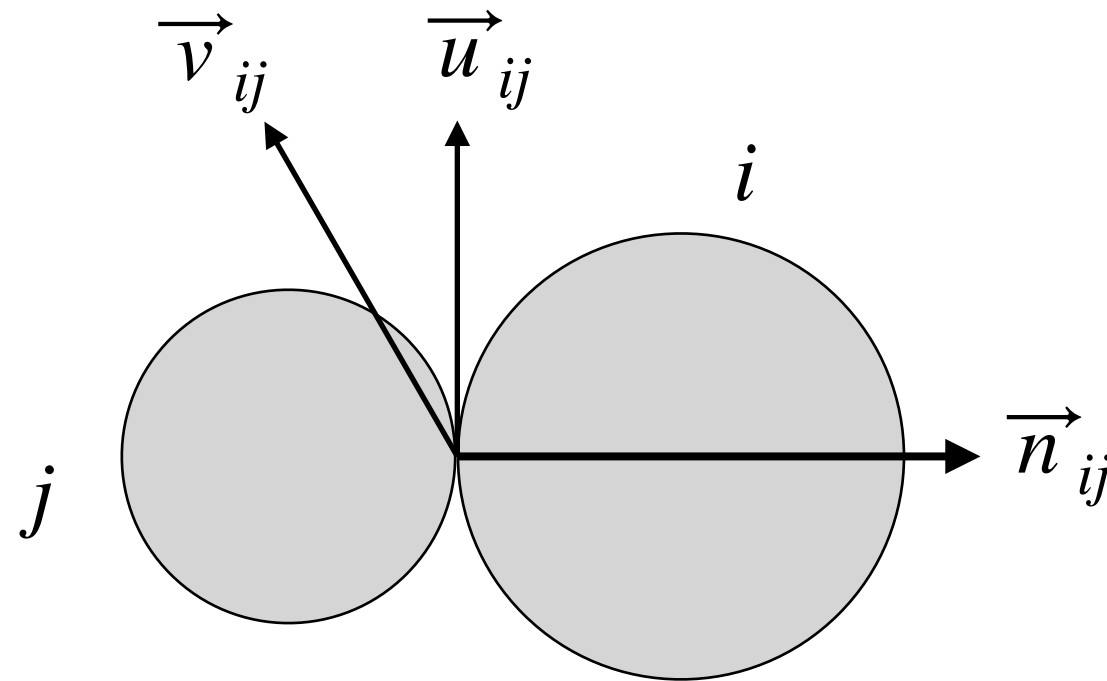


$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times (-\vec{n}_{ij}R_i) - (\vec{v}_j + \vec{\omega}_j \times \vec{n}_{ij}R_j)$$

- ▶ La vitesse de **glissement** dépend des vitesses de centre de masse mais aussi des vitesses de rotation.

Base au contact

- ▶ Si on retranche sa composant normale à la vitesse de glissement, on obtient un vecteur \vec{u}_{ij} .

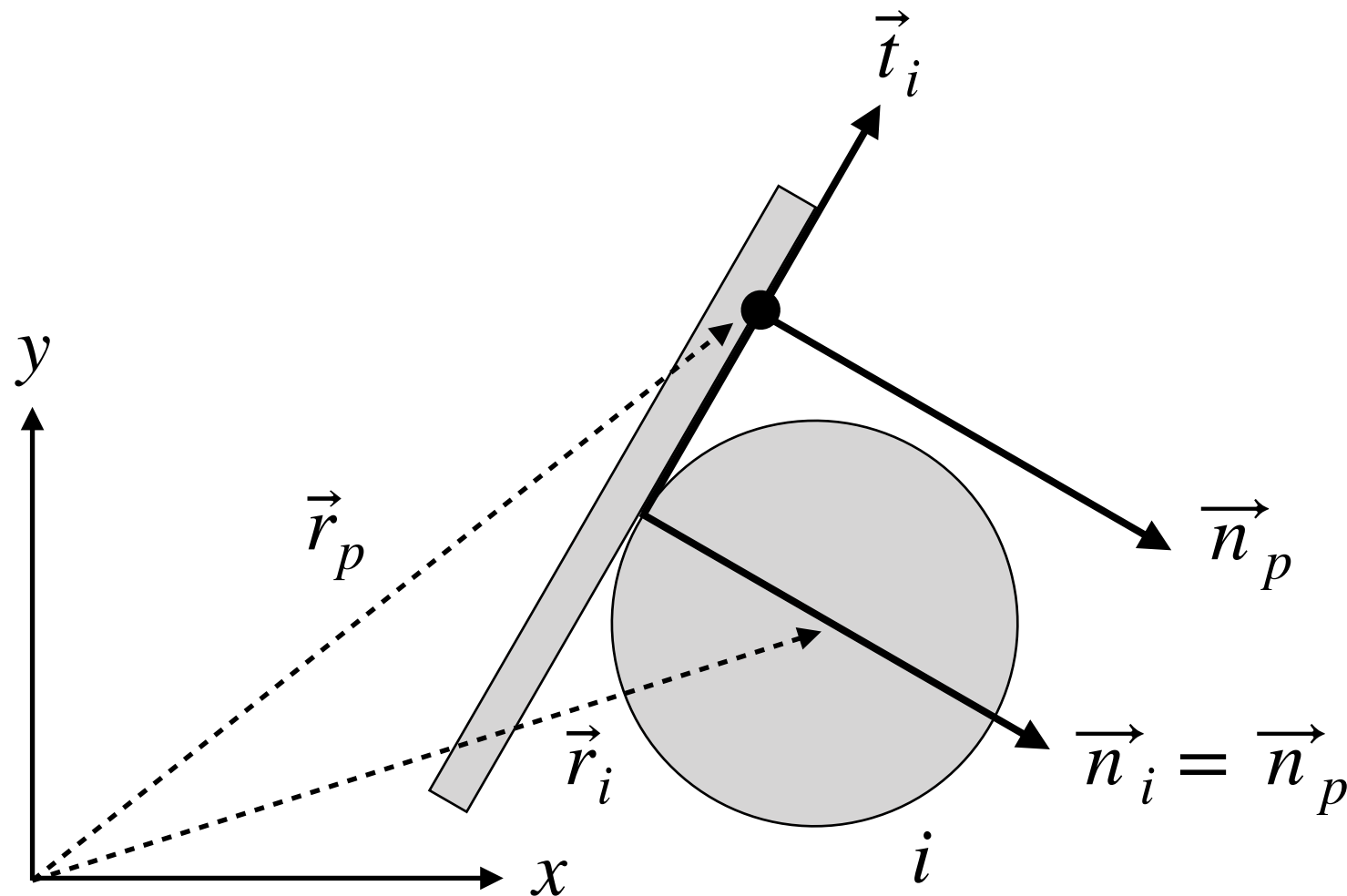


$$\vec{t}_{ij} = \frac{\vec{u}_{ij}}{|\vec{u}_{ij}|} \quad \vec{u}_{ij} = \vec{v}_{ij} - (\vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}) \vec{n}_{ij}$$

- ▶ Le vecteur unitaire **tangent** au contact est alors obtenu en normalisant le vecteur \vec{u}_{ij} .

Base au contact

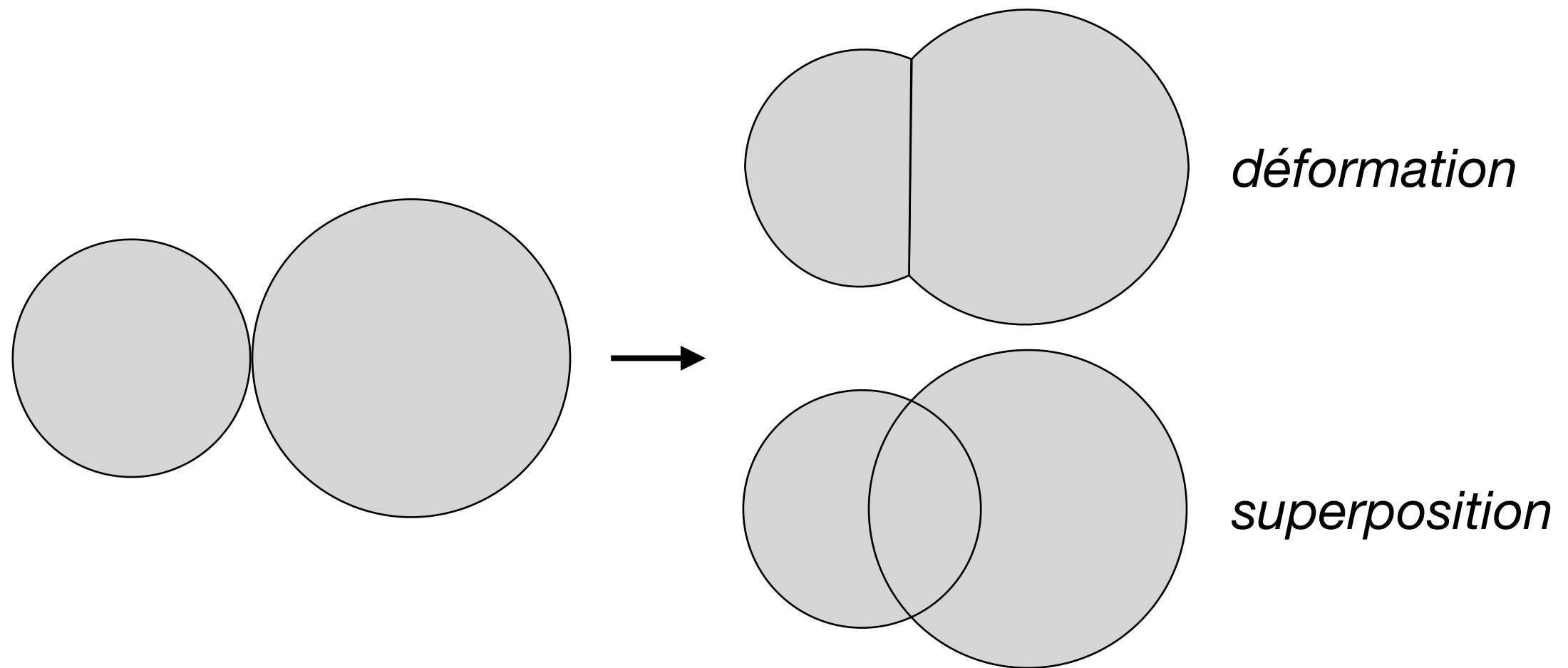
- ▶ Dans le cas d'une collision entre un disque et une paroi, le vecteur unitaire normale est connu.



- ▶ Le vecteur unitaire **tangent** s'obtient de façon analogue que lors d'un contact entre disques.

Force de répulsion

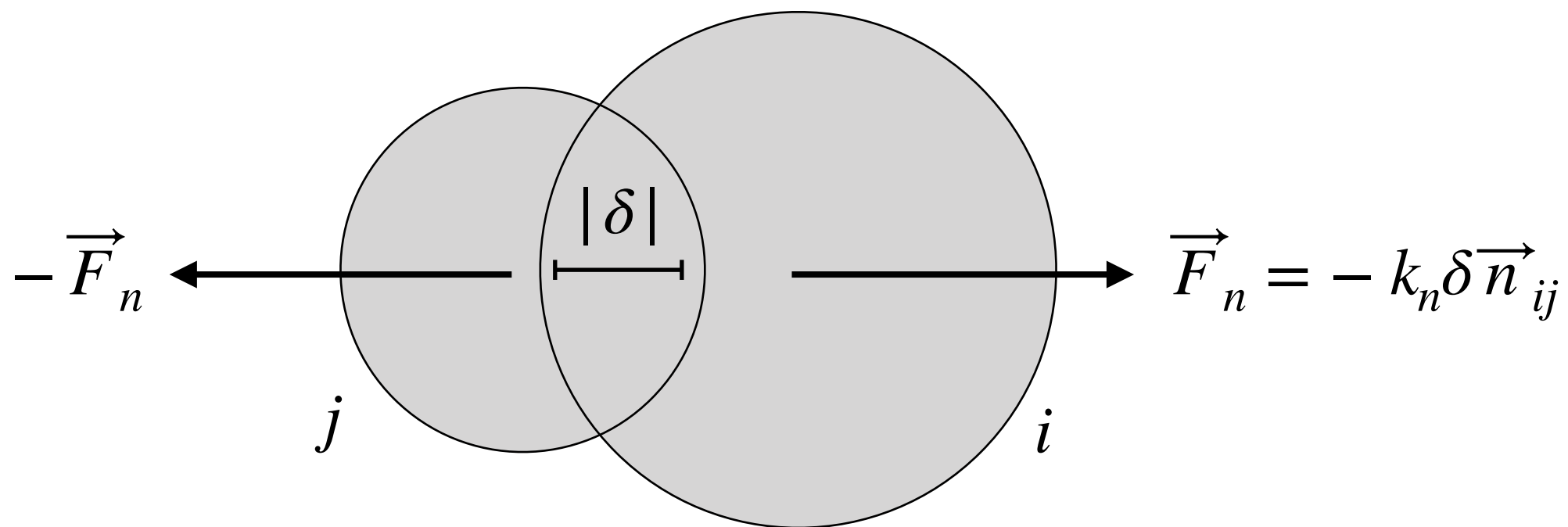
- ▶ Lors des collisions les particules se déforment, ce qui est modéliser par une **superposition**.



- ▶ Plus la superposition est **importante**, plus la force de répulsion doit être **grande**.

Le modèle du ressort

- ▶ Dans un premier temps, on modélise une collision par le cycle de compression-relaxation d'un **ressort**.

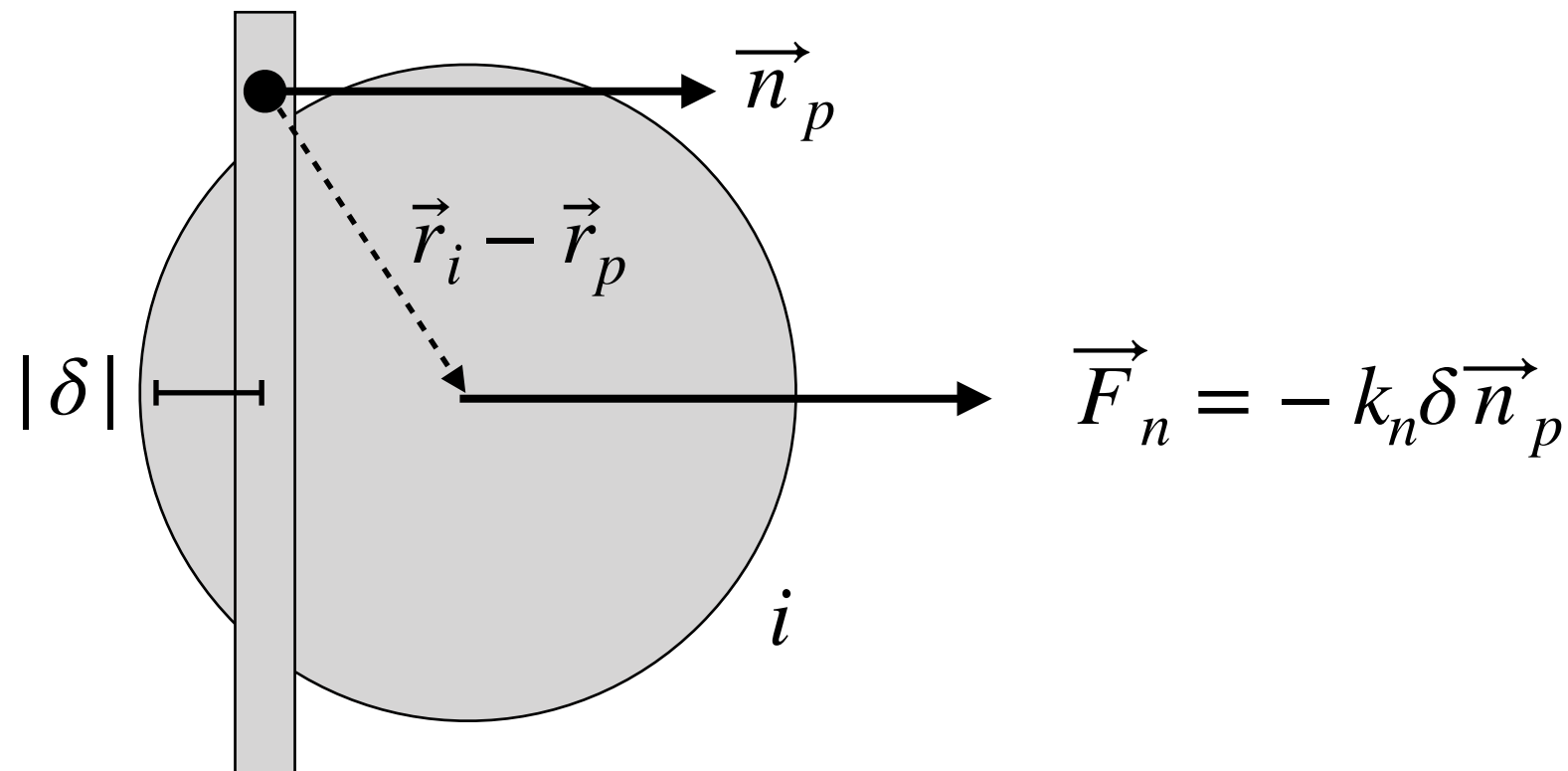


$$\delta = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - (R_i + R_j) < 0$$

- ▶ La force de répulsion est alors donnée par la loi de **Hooke** en utilisant une constante de **raideur** k_n .

Le modèle du ressort

- ▶ Dans un premier temps, on modélise une collision par le cycle de compression-relaxation d'un **ressort**.



$$\delta = (\vec{r}_i - \vec{r}_p) \cdot \vec{n}_p - R_i$$

- ▶ La force de répulsion est alors donnée par la loi de **Hooke** en utilisant une constante de **raideur** k_n .

Choix de la raideur

- ▶ On fixe la raideur du ressort en fixant la **superposition maximale** tolérée entre deux solides.
- ▶ Dans le cas d'un système **forcé** on considère souvent la collision frontale de deux disques identiques.
- ▶ On égale alors **l'énergie** potentielle de déformation avec l'énergie cinétique d'une particule.

$$\frac{1}{2}k_n\delta_{max}^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow k_n = \frac{mv^2}{\delta_{max}^2}$$

- ▶ **Remarque:** On utilise les masses et vitesses maximales rencontrées dans le système.

Choix de la raideur

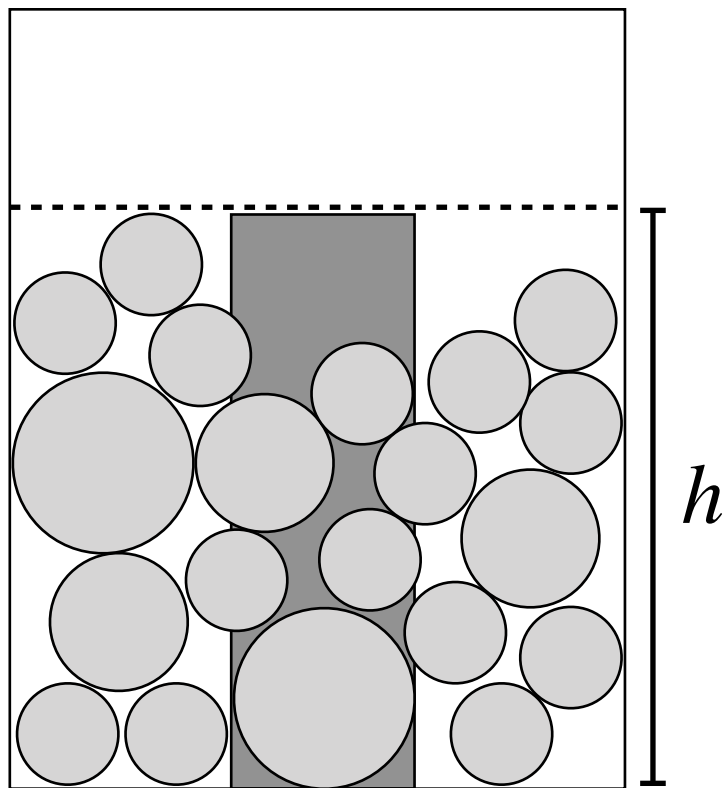
- ▶ Pour des particules en **chute libre**, on peut aussi baser l'estimation sur une hauteur de lâché h .
- ▶ Dans ce cas, on considère la déformation d'un disque lorsqu'il entre en collision avec le **fond** du système.
- ▶ On égale alors **l'énergie** potentielle de déformation avec l'énergie potentielle gravifique d'une particule.

$$\frac{1}{2}k_n\delta_{max}^2 = mgh \Leftrightarrow k_n = \frac{2mgh}{\delta_{max}^2}$$

- ▶ **Remarque:** On utilise les masses et hauteurs maximales rencontrées dans le système.

Choix de la raideur

- ▶ Lorsqu'on modélise des empilements **statiques**, les particules du fond supportent tout le structure.
- ▶ On égale alors la force de répulsion avec le **poids** de la **colonne** de particule.



$$-k_n \delta_{max} = 2Rh\rho_{2d}g$$

$$\Leftrightarrow k_n = -\frac{2Rh\rho_{2d}g}{\delta_{max}}$$

Choix de la raideur

- ▶ Lorsqu'un système comprend **plusieurs** de ces dynamiques, on choisit la valeur la plus grande.

Forçage extérieur $k_n = \frac{mv^2}{\delta_{max}^2}$

Chute libre $k_n = \frac{2mgh}{\delta_{max}^2}$ $\delta_{max} \approx -R/100$

Empilement $k_n = -\frac{2Rh\rho_{2d}g}{\delta_{max}}$

- ▶ Typiquement on utilise une valeur de déformation maximale d'un **centième** de rayon.

Choix du pas de temps

- ▶ Un pas de temps **trop grand** mène à une mauvaise intégration des forces.
- ▶ Dans la méthode des éléments discrets, on utilise souvent une **borne supérieure**

$$\Delta t \leq c\pi \sqrt{\frac{m}{k_n}}, \quad c \leq 0.05$$

C'est le min. On peut aussi prendre 1/100

- ▶ Ainsi, on s'assure qu'une collision dure au moins une vingtaine de pas de temps.
- ▶ **Remarque:** Il faudra toujours être vigilant à la bonne intégration des forces.

Exercice

- Modélisez plusieurs rebonds d'une particule en vous servant du modèle du **ressort** et du *Leapfrog*.

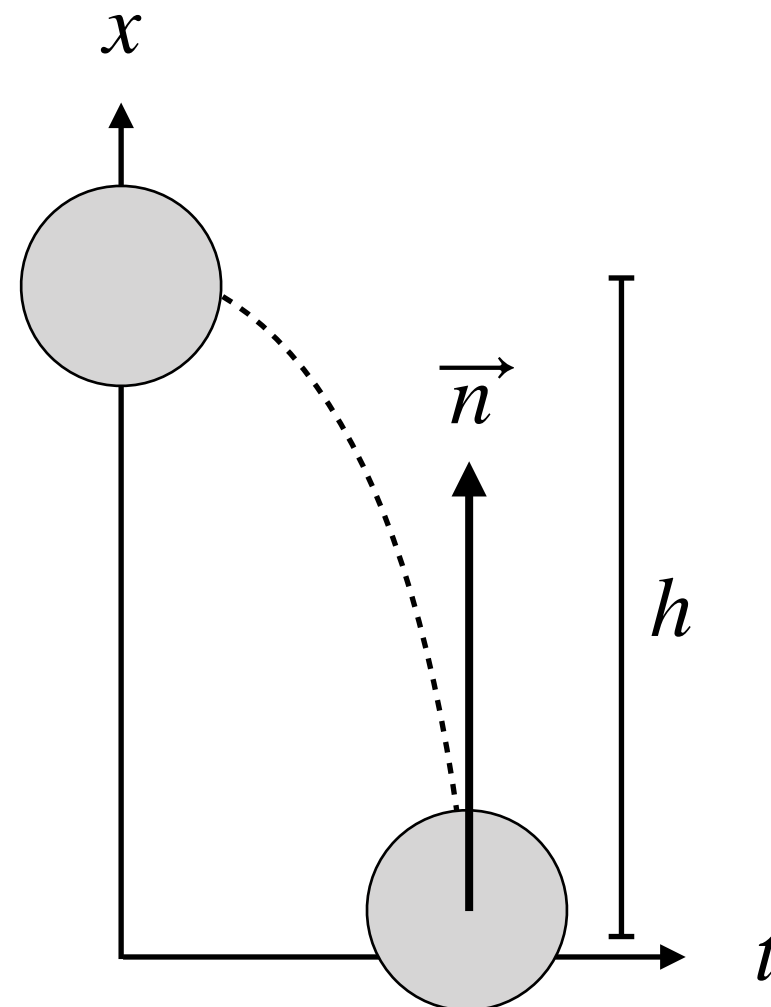
Données

$$F_n = -k_n \delta - mg$$

$$\delta = x - R < 0$$

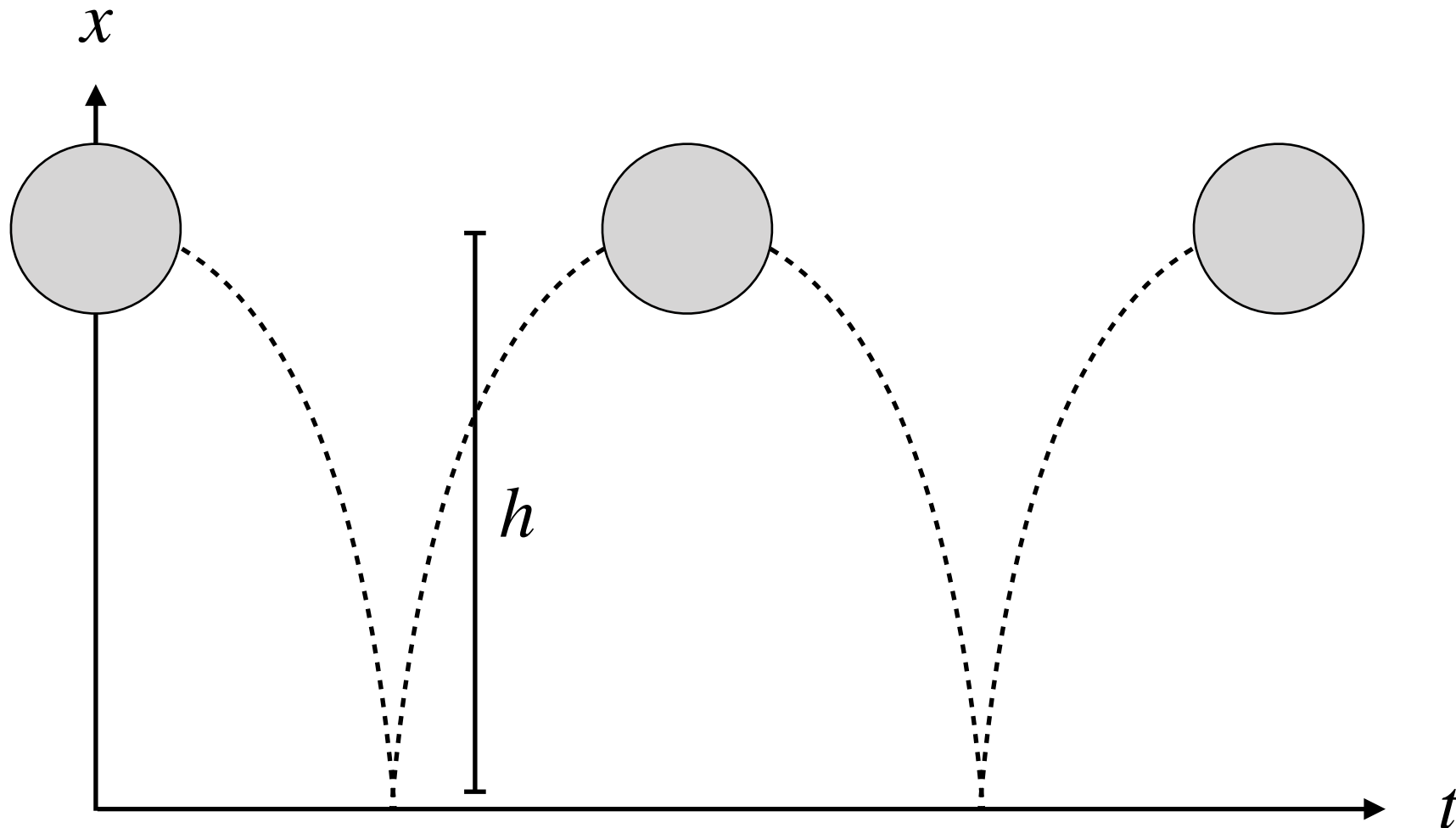
$$k_n = \frac{2mgh}{\delta_{max}^2}$$

$$\delta_{max} \approx R/100$$



Rebonds à l'infini

- ▶ Avec le modèle du ressort il est possible de reproduire les **rebonds** d'une particule sur une surface plane.



- ▶ Malheureusement, on constate que la **hauteur** de tous ces rebonds est **identique**.

Coefficient de restitution

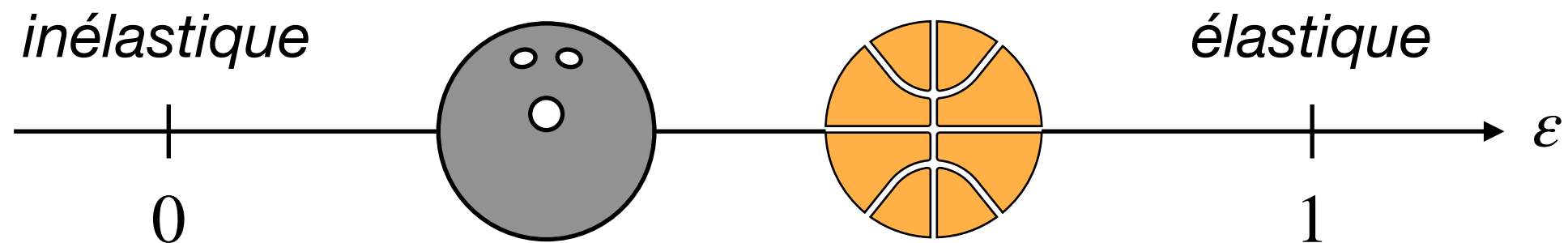
- ▶ Ce phénomène non-physique est dû au fait que l'énergie est **conservée** au cours de chaque rebond.
- ▶ Il faut donc réussir à **modéliser** la perte d'énergie et l'intégrer au modèle du ressort.
- ▶ La perte d'énergie lors de la collision se caractérise par le **coefficient de restitution**, noté ε .

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{E_f}{E_i}} = \sqrt{\frac{h_f}{h_i}} = \left| \frac{\vec{v}_f \cdot \vec{n}}{\vec{v}_i \cdot \vec{n}} \right|$$

- ▶ Le coefficient de restitution correspond au rapport des normes des **vitesse normales**.

Coefficient de restitution

- ▶ La valeur du coefficient de restitution dépend de la **nature** des solides en interaction.
- ▶ Comme une collision ne fait pas gagner de l'énergie, le coefficient de restitution est **borné**: $0 \leq \varepsilon < 1$



- ▶ **Remarque:** On peut facilement trouver des tableaux de valeurs de ε en fonction des matériaux.

Le modèle du ressort amorti

- ▶ La dissipation d'énergie peut être modélisée en ajoutant un **amortissement** visqueux au ressort.

$$F_n = \vec{F}_n \cdot \vec{n} = -\eta \frac{d\delta}{dt} - k_n \delta$$

- ▶ La force visqueuse est proportionnelle à la **vitesse** relative **normale** de collision.
- ▶ La **constante** de viscosité est un paramètre clef dont la valeur doit être déterminée avec soin.
- ▶ **Remarque:** Pour des raideurs de ressort trop faibles, ce modèle mène à des comportements non-physique.

Déterminer la viscosité

- ▶ Nous allons maintenant trouver une façon de **relier** la viscosité au coefficient de restitution.
- ▶ En **réarrangeant** les membres de l'équation du modèle précédent on obtient,

$$F_n = -\eta \frac{d\delta}{dt} - k_n \delta \Leftrightarrow m \frac{d^2\delta}{dt^2} + \eta \frac{d\delta}{dt} + k_n \delta = 0$$

- ▶ On retrouve l'équation différentielle décrivant le mouvement d'un **oscillateur amorti**.
- ▶ Les **conditions initiales** (début de la collision) sont les suivantes: $t = 0$, $\delta = 0$, $\dot{\delta} = v_i$.

Déterminer la viscosité

- ▶ La **solution** de l'équation différentielle est donnée par la fonction suivante:

$$\delta(t) = \frac{v_i}{\omega} \exp\left(-\frac{\eta}{2m}t\right) \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\eta}{2m}\right)}$$

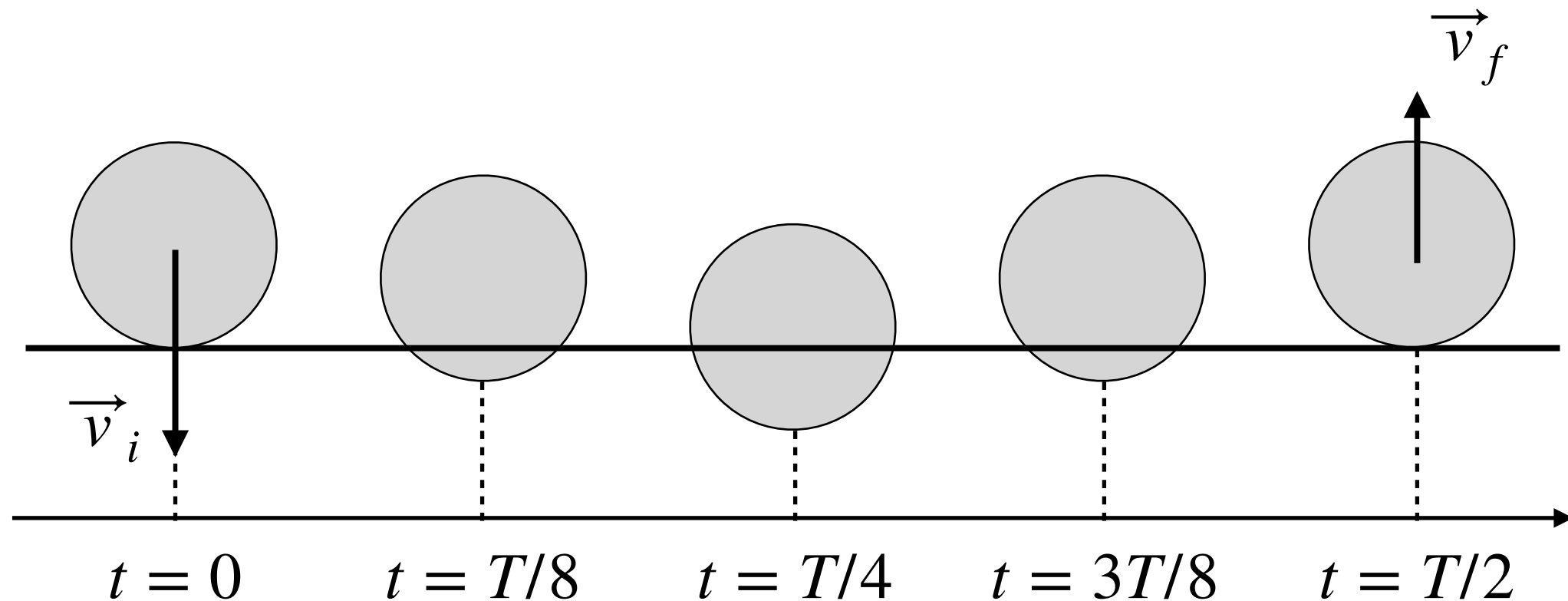
- ▶ En **dérivant** cette expression par rapport au temps, on obtient une fonction pour la **vitesse**,

$$\dot{\delta}(t) = \frac{v_i}{\omega} \exp\left(-\frac{\eta}{2m}t\right) \left[\omega \cos(\omega t) - \frac{\eta}{2m} \sin(\omega t) \right]$$

- ▶ **Remarque:** ω est la pulsation du mouvement et ω_0 est la pulsation propre du ressort.

Déterminer la viscosité

- ▶ La **vitesse** après collision est atteinte après une demi période d'oscillation du ressort.



$$v_f = \dot{\delta} \left(\frac{T}{2} \right) = \dot{\delta} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = -v_i \exp \left(-\frac{\eta}{2m} \frac{\pi}{\omega} \right)$$

Déterminer la viscosité

- ▶ Le **coefficient de restitution** est donné par le rapport des vitesses avant et après collision, on a

$$\varepsilon = \left| \frac{v_f}{v_i} \right| = \exp \left(-\frac{\eta}{2m} \frac{\pi}{\omega} \right)$$

- ▶ **Remarque:** Comme ces vitesses dérivent de δ , elles sont purement normales.
- ▶ Nous obtenons donc un **lien** entre le coefficient de restitution et la viscosité.
- ▶ Il reste cependant à déterminer la **pulsation** de l'oscillateur amorti.

Déterminer la viscosité

- ▶ Comme la **pulsation propre** du ressort dépend de sa constante de raideur, on a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_n}{m}}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk_n - \eta^2}}{2m}$$

- ▶ Le coefficient de restitution et la **viscosité** peuvent alors être exprimés comme suit,

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{-\pi\eta}{\sqrt{4mk_n - \eta^2}}\right), \quad \eta = -2 \ln(\varepsilon) \sqrt{\frac{mk_n}{\ln^2(\varepsilon) + \pi^2}}$$

Masse effective

- ▶ La **masse** à utiliser dans la formule précédente dépend du type de solide en interaction.
- ▶ Si un disque entre en collision avec une paroi, on utilise la **masse de disque**.
- ▶ Si un disque entre en collision avec un autre disque, on utilise leur **masse effective**.

$$m = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$$

Exercice

- Modélisez plusieurs rebonds d'une particule en vous servant du modèle du ressort **amorti** et du *Leapfrog*.

Données

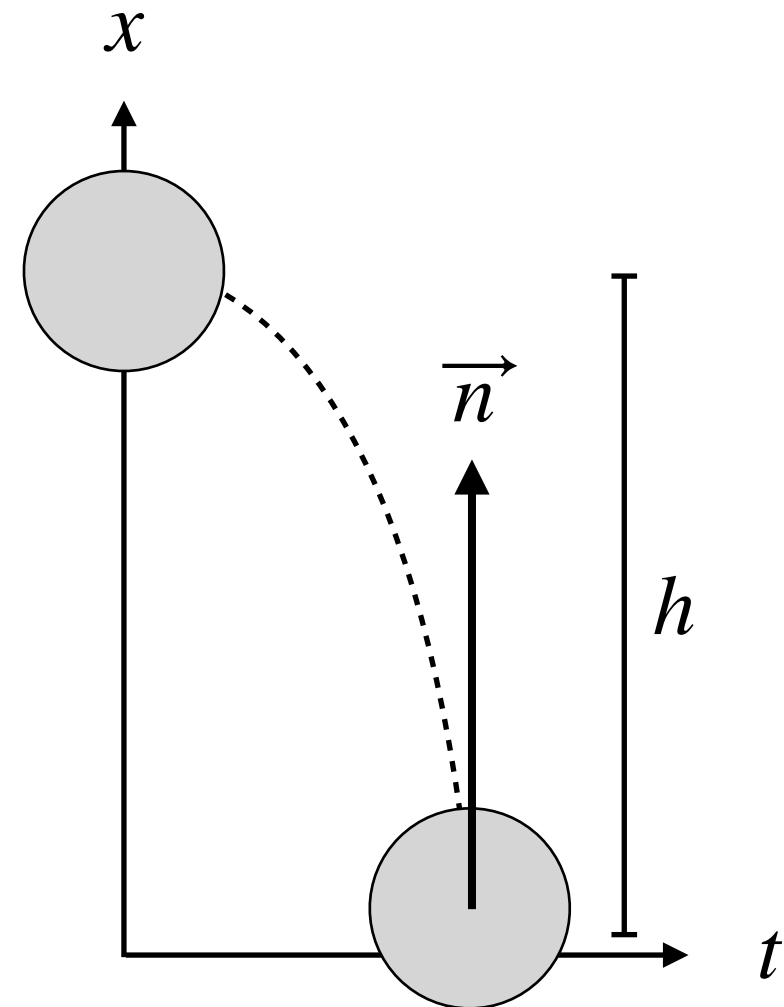
$$F_n = -\eta\dot{\delta} - k_n\delta - mg$$

$$\delta = x - R < 0$$

$$k_n = \frac{2mgh}{\delta_{max}^2} \quad \delta_{max} \approx R/100$$

$$\varepsilon = 0.8$$

$$\eta = -2 \ln(\varepsilon) \sqrt{\frac{mk_n}{\ln^2(\varepsilon) + \pi^2}}$$



Force de friction

- ▶ Pour modéliser la force de **friction** durant le contact, on utilise la méthode de Coulomb.

$$\vec{F}_t = -\mu F_n \vec{t}, \quad \vec{t} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

- ▶ Le signe **négatif** de la force découle directement de la définition du vecteur tangent unitaire.
- ▶ Afin d'éviter toute discontinuité autour de $\vec{u}_{ij} = \vec{0}$, on **régularise** la force,

$$\vec{F}_t = -k_t \vec{u}, \quad \left| \vec{F}_t \right| \leq \mu \left| \vec{F}_n \right|$$

Force de friction

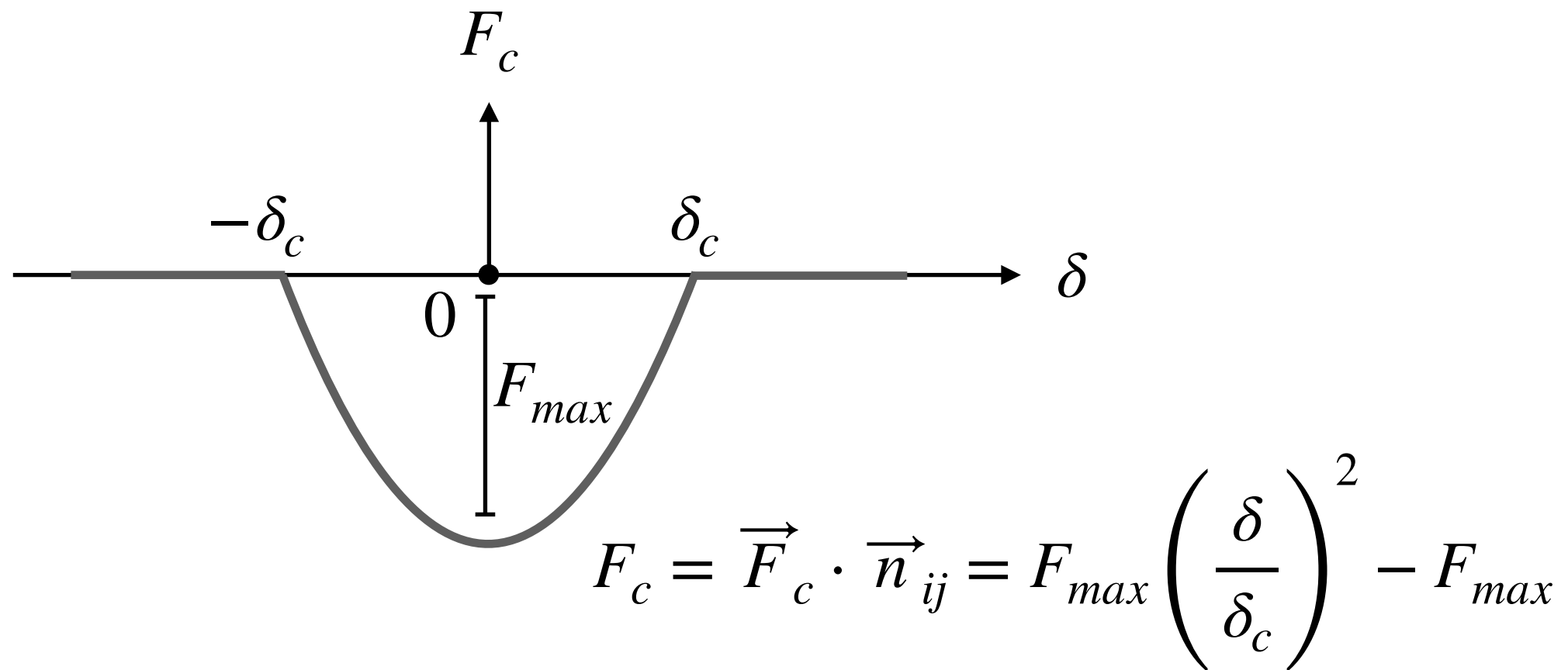
- ▶ La constante k_f n'a pas de justification physique et doit être choisie très **grande**.
- ▶ Le modèle a un défaut car aucune force de friction n'est générée dans un cas **statique**.
- ▶ Bien que d'autres **modèles** existent, on se limitera à la simulation de systèmes dynamiques ou quasi-statiques.

Force cohésive

- ▶ Lorsque les particules constituant un milieu granulaire sont très fines on parle de **poudres**.
- ▶ De nombreuses poudres ont un comportement **cohésif**, les grains semblent coller les uns aux autres.
- ▶ **Exemple:** Regardez la différence entre une cuillère de sucre et une cuillère de farine.
- ▶ On peut essayer de modéliser ce comportement en ajoutant une force **attractive** à courte portée.
- ▶ **Remarque:** Cette force est orientée suivant la direction normale au contact.

Force cohésive

- Voici un **modèle** simple pour modéliser une force attractive lorsque $|\delta| < \delta_c$.



- Les **paramètres** δ_c et F_{max} de cette loi dépendent de la nature de la poudre modélisée.

Interaction dipolaire

- ▶ Parfois les particules constituant un milieu granulaire sont munies d'un **moment** magnétique \vec{M} .
- ▶ La **force** d'interaction entre deux de ces particules est alors donnée par:

$$\vec{F}_m = \frac{3\mu_0}{4\pi |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^4} \left[\vec{n}_{ij} (\vec{M}_i \cdot \vec{M}_j) + \vec{M}_i (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{M}_j) + \vec{M}_j (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{M}_i) - 5 \vec{n}_{ij} (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{M}_i) (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{M}_j) \right]$$

- ▶ **Remarque:** Cette force n'est pas forcément orientée suivant la direction normale au contact.

Interaction dipolaire

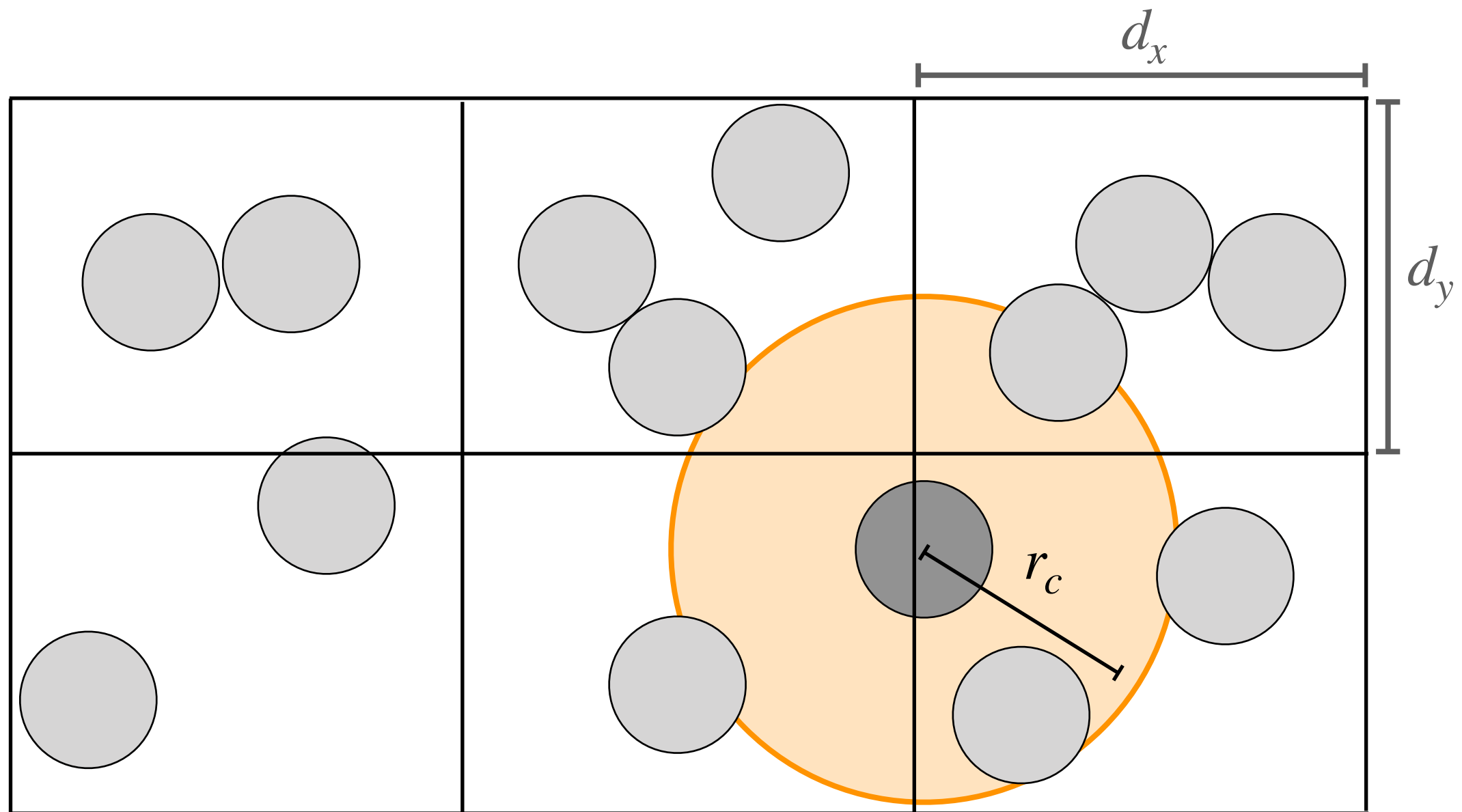
- ▶ La force d'interaction dépend de la **distance** centre à centre entre les particules.
- ▶ Sa décroissance en $1/r^4$ permet d'introduire une distance de **cut-off** notée r_c .
- ▶ Au delà de cette distance on peut **négliger** l'effet de la force et ne plus en tenir compte.

$$\frac{1}{(r_c)^4} = \frac{\alpha}{(R_i + R_j)^4}, \quad \alpha \leq 0.1$$

- ▶ **Remarque:** L'introduction de ces deux forces implique l'adaptation des cellules liées.

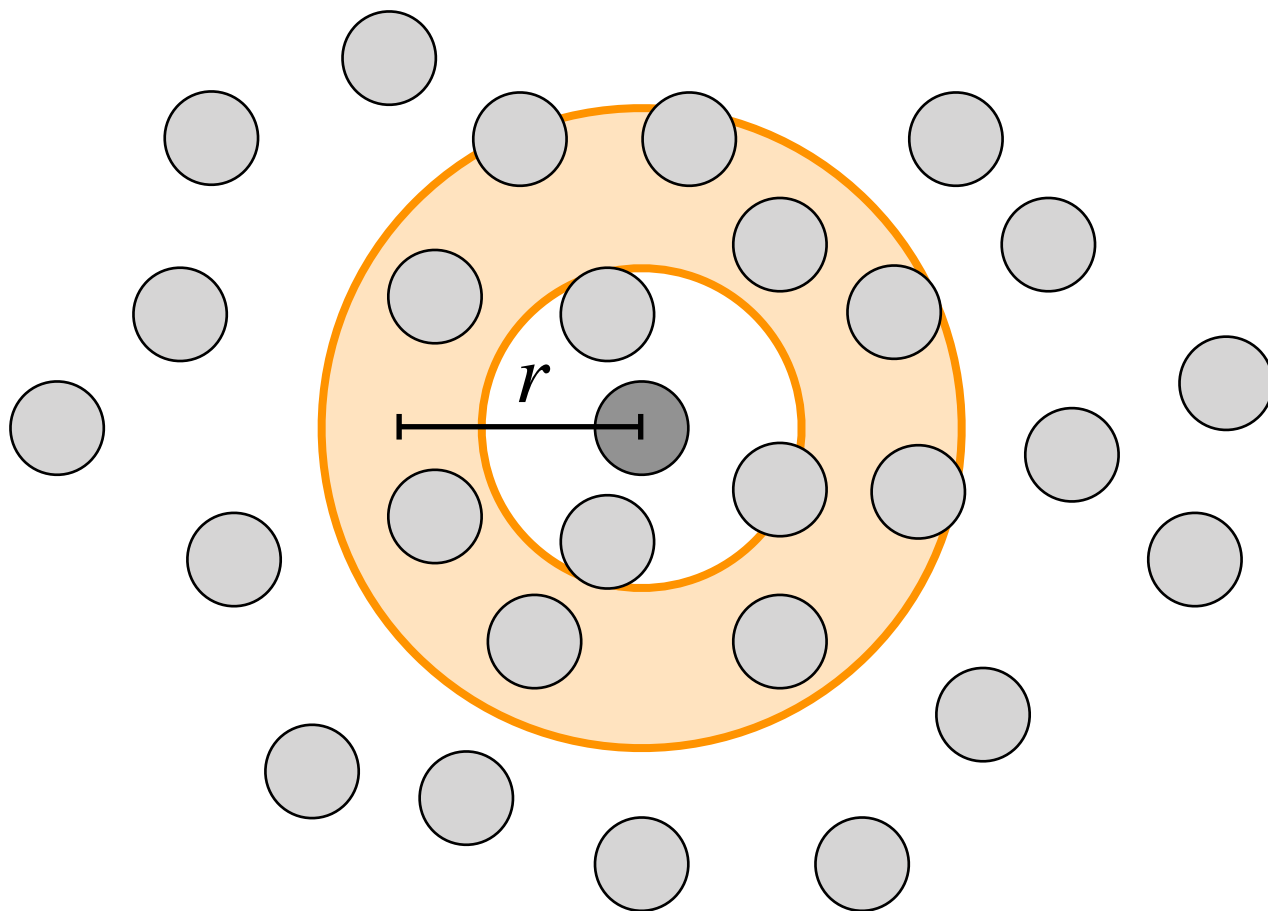
Adaptation des cellules liées

- ▶ En effet, les dimensions des cellules doivent être au moins **égales** aux distances de cut-off.



Les forces à longue portée

- ▶ Il existe des forces dont on ne peut **pas négliger** l'effet, quelque soit la distance r séparant les particules.
- ▶ En effet, il est possible que la décroissance de la force en fonction de la distance soit **compensée**.



$$N \propto r^d$$

$$F_{ij} \propto r^{-n}, \quad n \leq d$$

$$F_i = \left(\sum_{j \neq i} F_{ij} \right) \propto r^{(d-n)}$$

Les forces à longue portée

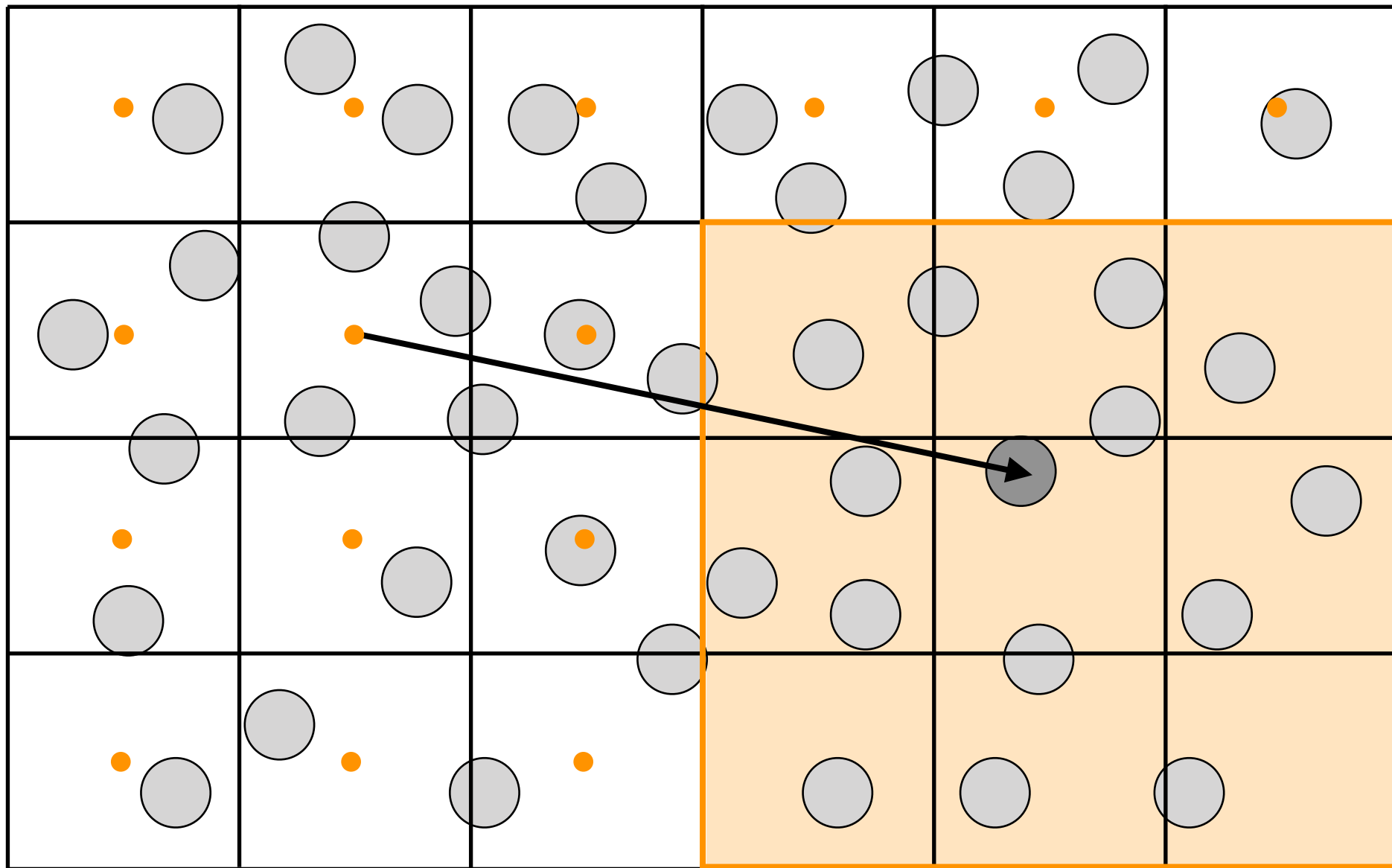
- ▶ *A priori*, nous sommes donc obligés de calculer **toutes** les paires d'interaction.
- ▶ Malheureusement, cela va considérablement **ralentir** les simulations.
- ▶ Pour résoudre ce problème, nous allons procéder en **deux** étapes:
- ▶ Les forces d'interactions vont être calculées de façon **exacte** pour des faibles distances r .
- ▶ Les forces d'interactions vont être **approximées** pour des grandes distances r .

Les forces à longue portée

- ▶ Cette approximation se fait grâce à une approche de **champ moyen**.
- ▶ D'abord on choisie une taille de cellule liée suffisamment **grande** pour effacer une anisotropie locale.
- ▶ Ensuite, on associe au centre de chaque cellule une **particule effective**.
- ▶ **Exemple:** Une particule de charge égale à la somme de toutes les charges de sa cellule.
- ▶ Les interactions à grande distance sont calculées via les particules effectives des cellules **non voisines**.

Les forces à longue portée

- ▶ Dans le cas de particules chargées, voici comment on évalue la force de Coulomb.



Exercice

- ▶ Simulez une comète qui passe près d'une planète bien plus massique qu'elle.

