Problème 1

1) Prouvons que (U_n) est croissante

$U_n = S_{2n}$ or $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

$$U_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k$$

Calculons $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k + (-1)^{2n+1+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2+1} a_{2n+2} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k$$

$$= (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2}$$

$U_{n+1} - U_n = a_{2n+1} - a_{2n+2}$ or $(a_n)_n$ est décroissante donc

$a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$

donc $a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$ et par suite

$U_{n+1} \geq U_n$ d'où $(U_n)_n$ est croissante

* Prouvons que $(v_n)_n$ est décroissante

$v_n = S_{2n+1}$

donc $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k$

Calculons $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+2+1} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k + (-1)^{2n+2+1} a_{2n+2} + (-1)^{2n+3+1} a_{2n+3} - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k$$

$$= (-1)^{2n+3} a_{2n+2} + (-1)^{2n+4} a_{2n+3}$$

$$= a_{2n+3} - a_{2n+2}$$

Or (a_n) est décroissante donc

$a_{2n+3} < a_{2n+2} \Rightarrow a_{2n+3} - a_{2n+2} < 0$

d'où $v_{n+1} - v_n < 0 \Rightarrow v_{n+1} < v_n$

On en déduit que $(v_n)_n$ est décroissante

2) Ecrivons $u_n - v_n$ en fonction de a_{2n+1}

$$u_n - v_n = S_{2n} - S_{2n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k - (-1)^{2n+1+1} a_{2n+1}$$

$$= -(-1)^{2n+2} a_{2n+1}$$

$$u_n - v_n = -a_{2n+1}$$

Prouvons que $u_n \leq v_n$

On a $u_n - v_n = -a_{2n+1}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n \geq 0$ donc $u_n - v_n \leq 0$

d'où $u_n \leq v_n$

3) Déduisons que $(u_n)_n$ est majorée

~~Des questions précédentes (u_n) est croissante et de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq v_n$~~

~~$u_n \leq v_n$ donc (u_n) est majorée.~~

Or $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k$

$\Rightarrow v_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots (a_{2n} - a_{2n+1})$

Scanné avec CamScanner

~~$v_n = a_1 - a_{2n+1}$~~

~~Or $u_n - v_n = -a_{2n+1}$ donc~~

~~$u_n -$~~

~~Or $(a_n)_n$ est une suite décroissante~~

~~donc $a_n < a_{n+1}$~~

$v_n = a_1 - a_{2n+1}$ or $a_1 - a_{2n+1} \leq a_1$ car $a_n \geq 0$

Or $u_n \leq v_n$ donc $u_n \leq a_1$

On en déduit que (u_n) est majorée

. Conclusion

De la question précédente (u_n) est croiss donc on conclut que (u_n) converge

4) Montrons que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent

$u_n - v_n = -a_{2n+1}$

$\Rightarrow |u_n - v_n| = |-a_{2n+1}|$

$\Rightarrow |u_n - v_n| = a_{2n+1}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - v_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1}$

$= 0$ car (a_n) converge vers 0

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ d'où u_n et v_n ont même limite a

* Montrons que (S_n) converge

On a $U_n - V_n = S_{2n} - S_{2n+1} = -a_{2n+1}$

donc $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$ or $a_{2n+1} > 0$

donc $(S_n)_n$ est croissante ①

De plus $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n)$

$S_n = a_1 - a_n \leq a_1$

donc $S_n < a_1$ d'où S_n est majoré

par a_1 ②

De ① et ② $(S_n)_n$ converge