高三年级数学练习答案

一、选择题

1-5 CABDB　6-9 DDAC

二、填空题

10. 2-i　11. 80　12. $\sqrt{2}-1$　13. $\frac{1}{12};\frac{5}{54}$　14. $\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BD};-\frac{1}{2}$　15. $(-\infty,-2)\cup(1,2)\cup\{8\}$

三、解答题

16．(1) $\frac{\sqrt{57}}{19}$; (2) 5; (3) $\frac{11}{38}$.

解：(1)在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{57}}{19}$;

(2)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$, 可得$c^2-2c-15=0$, 解得 c=5(负根舍去)；

(3)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4\sqrt{19}}{19}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{\sqrt{19}}{38}$.

而$B,C\in(0,\pi)$, 所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{5\sqrt{57}}{38}$, $\cos(B-C)=\cos B\cos C+\sin B\sin C=\frac{4\sqrt{19}}{19}\times\left(-\frac{\sqrt{19}}{38}\right)+\frac{\sqrt{57}}{19}\times\frac{5\sqrt{57}}{38}=\frac{11}{38}$.

17. (2) $\frac{4}{3}$; (3) $\frac{1}{3}$.

解：(1)证明：由题，直线AB,AD,AA_1两两垂直。

如图，以点 A 为原点，AB,AD,AA_1所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系。由题，$A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $E(2,1,0)$, $F(1,2,0)$, $A_1(0,0,2)$, $B_1(2,0,2)$, $C_1(2,2,2)$, $D_1(0,2,2)$, $\overrightarrow{D_1F}=(1,0,-2)$, $\overrightarrow{EC_1}=(0,1,2)$, $\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$.

设平面A_1EC_1的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}y_1+2z_1=0\\ 2x_1+2y_1=0\end{cases}$，令$y_1=-2$，得$\overrightarrow{n_1}=(2,-2,1)$.

所以$\overrightarrow{D_1F}\cdot\overrightarrow{n_1}=2+0-2=0$，$\overrightarrow{D_1F}\perp\overrightarrow{n_1}$，又因为$D_1F$不在平面$A_1EC_1$上，所以$D_1F//$平面$A_1EC_1$。

(2)由(1)知，点 F 到平面A_1EC_1的距离即为直线D_1F到平面A_1EC_1的距离，而$\overrightarrow{FE}=(1,-1,0)$,

所以直线D_1F到平面A_1EC_1的距离为$\frac{|\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_1}|}=\frac{4}{3}$.

(3)由题，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$,

设平面A_1AC_1的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}2z_1=0\\ 2x_1+2y_1+2z_1=0\end{cases}$，令$y_1=1$，得$\overrightarrow{n_2}=(-1,1,0)$.

所以$|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{1}{3}$. 二面角$A-A_1C_1-E$的正弦值为$\frac{1}{3}$.

18. (1) $a_n=2^{n-1}$; (2)(ii) $S_{2n}=\left(2n+\frac{1}{3}\right)4^n-\frac{1}{3}$.

解：(1) $a_1=1$，设$\{a_n\}$公比为 q (q>0)，则$q^2-q-2=0$，解得 q=2(负根舍去)，所以$a_n=2^{n-1}$。

(2)(i)证明：设 $b_n=a_k=2^{k-1}$, 则在 $\{a_n\}$ 中，比 b_n 小的数只有 $a_1,a_2,\dots,a_{k-1}$ 这 k-1 个数，此时只需证：$c_n\le n+k$；

由题，b_{c_n} 即为数列 $\{b_n\}$ 中，在 b_n 之后出现的首个大于 b_n 的数。而 b_n 之后最多只有 k-1 个数小于 b_n（即为上述 k-1 个数），故 b_{c_n} 最晚在这 k-1 个数之后出现，即 b_n 之后的第 k 位出现，即 $c_n\le n+k$，得证。

(ii)由题，$b_{2n-1}=2^{2n-1}, c_{2n-1}=\log_2 2^{2n+1}=2n+1$, 即 $b_{2n}<2^{2n-1}, n\in N^*$.

当 n=1 时，$b_2<2$，而在 $\{a_n\}$ 中，比 2 小的数只有 $a_1=1$ 这一个数，所以 $b_2=1$；

当 n=2 时，$b_4<8$，而在 $\{a_n\}$ 中，比 8 小的数只有 1,2,4 这三个数，又因为 1 和 2 已在 b_3 之前出现，所以 $b_4=4$；

类似地，对于任意的 n，在 $\{a_n\}$ 中，比 2^{2n-1} 小的数只有 $1,2,\dots,2^{2n-2}$ 这 2n-1 个数，又因为 $1,2,\dots,2^{2n-3}$ 已在 b_{2n-1} 之前出现，所以 $b_{2n}=2^{2n-2}$.

所以 $c_{2n}=c_{2n-1}=2n+1$, $b_{2n-1}c_{2n-1}+b_{2n}c_{2n}=(2n+1)(2^{2n-1}+2^{2n-2})=3(2n+1)4^{n-1}$.

所以 $S_{2n}=\sum_{i=1}^{n}(b_{2i-1}c_{2i-1}+b_{2i}c_{2i})=3\sum_{i=1}^{n}(2i+1)4^{i-1}$，由错位相减得 $S_{2n}=\left(2n+\frac{1}{3}\right)4^n-\frac{1}{3}$.

19. (1) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$；(2) 存在，$B(-\frac{3\sqrt{7}}{8},0)$.

解：（1）记椭圆焦距为 2c，则 2c=4，$ab=\sqrt{21}$, $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{3}$，$c=2$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$。

（2）假设存在，设 O 为原点，$NC\perp PQ$ 于点 N，由题，$A(\sqrt{7},0)$, |NC|=|NO|=|MO|，在直角三角形 CMN 中，|MN|=2|NC|，所以 $\angle CMN=30°$，l 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$. 由对称性，不妨设斜率为 $\sqrt{3}$。

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$l: y=\sqrt{3}x+m(m>0)$，则 M(0, m), N(0, -m)，联立 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x+m \\ \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，消去 y 得 $24x^2+14\sqrt{3}mx+7m^2-21=0$, $\Delta=84(24-m^2)>0$, $0<m<2\sqrt{6}$, $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{7\sqrt{3}m}{12} \\ x_1x_2=\frac{7m^2-21}{24} \end{cases}$.

由题，|NP|=|NA|，设 AP 的中点为 D，则 $D\left(\frac{x_1+\sqrt{7}}{2},\frac{y_1}{2}\right)$, $ND\perp AP$, $k_{AP}k_{ND}=-1$. 而 $\frac{x_1^2}{7}+\frac{y_1^2}{3}=1$, $x_1^2=7\left(1-\frac{y_1^2}{3}\right)$,

所以 $k_{AP}=\frac{y_1}{x_1-\sqrt{7}}$, $ND: y=-\frac{x_1-\sqrt{7}}{y_1}\left(x-\frac{x_1+\sqrt{7}}{2}\right)+\frac{y_1}{2}=-\frac{x_1-\sqrt{7}}{y_1}x+\frac{x_1^2-7}{2y_1}+\frac{y_1}{2}=-\frac{x_1-\sqrt{7}}{y_1}x-\frac{2}{3}y_1$, $N\left(0,-\frac{2}{3}y_1\right)$.

所以 $-m=-\frac{2}{3}y_1$, $y_1=\frac{3}{2}m=\sqrt{3}x_1+m$, $x_1=\frac{\sqrt{3}}{6}m$, 代回 $x_1+x_2=-\frac{7\sqrt{3}m}{12}$，解得 $x_2=-\frac{3\sqrt{3}}{4}m$.

所以 $x_1x_2=\frac{\sqrt{3}}{6}m\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}m\right)=-\frac{3}{8}m^2=\frac{7m^2-21}{24}$, 解得 $m=\frac{\sqrt{21}}{4}<2\sqrt{6}$. 易知此时 $\angle NAB$ 为锐角，B 在 A 左侧。

由题，|PQ|=|AB|, 而 $|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2=4\left(\frac{11}{12}\sqrt{3}m\right)^2$, $|PQ|=\frac{11}{6}\sqrt{3}m=\frac{11}{8}\sqrt{7}=|AB|$,

所以 $\sqrt{7}-\frac{11}{8}\sqrt{7}=-\frac{3}{8}\sqrt{7}$, 即 $B\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8},0\right)$, 验证知成立。故存在，$B(-\frac{3\sqrt{7}}{8},0)$.

20. (1) y=x; (2) $[\frac{2}{\pi},+\infty)$.

解：(1)由题，$f(0)=0, f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}, f'(0)=1$，所以切线方程为 y=x；

(2) $\tan^2 x\le ax$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时恒成立，令 $x=\frac{\pi}{6}$，得 $\frac{1}{3}\le\frac{\pi}{6}a, a\ge\frac{2}{\pi}$. 下证 $a\ge\frac{2}{\pi}$ 时不等式成立。

只需证：$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right], \tan^2 x-\frac{2}{\pi}x\le 0$.

令 $g(x)=\tan^2 x-\frac{2}{\pi}x$. 则 $g'(x)=2\tan x(\tan^2 x+1)-\frac{2}{\pi}=2(\tan^3 x+\tan x-\frac{1}{\pi})$，而 $\mathrm{y}=\tan x$，$y=x^3+x$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上均单调递增，所以 $g'(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增。而 $g'(0)=-\frac{2}{\pi}<0$，$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}-\frac{1}{\pi}\right)>2\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)>0$，由零点存在定理，存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，使得 $g'(x_0)=0$. 所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，g(x)单调递减，g(x)<g(0)=0; 当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，g(x)单调递增，g(x)<g($\frac{\pi}{6}$)=0。故不等式成立。

所以 $a\in[\frac{2}{\pi},+\infty)$.

(3)证明：由题，$\tan x_n=x_n$，$n\in N^*$.

左侧：先证明：$0<x_{n+1}-x_n-\pi<\frac{\pi}{2}$.

由题，$x_{n+1}>x_n$，$\tan x_{n+1}>\tan x_n=\tan(x_n+\pi)$. 而 x_{n+1}，$x_n+\pi\in((n+1)\pi,(n+1)\pi+\frac{\pi}{2})$，由 tan x 在该区间上单调递增得知，$x_{n+1}>x_n+\pi$. 而 $x_{n+1}-x_n-\pi<(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}-n\pi-\pi=\frac{\pi}{2}$，得证。

再证明：$\tan x>x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $h(x)=\tan x-x$, 则 $h'(x)=\tan^2 x+1-1=\tan^2 x>0$，$h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，得证。

左侧不等式等价于：$x_{n+1}-x_n-\pi<\frac{\pi}{x_{n+1}x_n}$.

所以 $x_{n+1}-x_n-\pi<\tan(x_{n+1}-x_n-\pi)=\tan(x_{n+1}-x_n)=\frac{\tan x_{n+1}-\tan x_n}{1+\tan x_{n+1}\tan x_n}=\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_{n+1}x_n}=\frac{x_{n+1}-x_n-\pi}{1+x_{n+1}x_n}+\frac{\pi}{1+x_{n+1}x_n}$.

所以 $\left(1-\frac{1}{1+x_{n+1}x_n}\right)(x_{n+1}-x_n-\pi)=\frac{x_{n+1}x_n}{1+x_{n+1}x_n}(x_{n+1}-x_n-\pi)<\frac{\pi}{1+x_{n+1}x_n}$，$x_{n+1}-x_n-\pi<\frac{\pi}{x_{n+1}x_n}$，得证！

右侧：先证明：$x_n>n\pi+\frac{\pi}{3}$.

对于 $h(x)=\tan x-x$，由上述证明知 h(x)在 $\left(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增。而 $h\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)-n\pi-\frac{\pi}{3}\le\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}<\sqrt{3}-4<0=h(x_n)$, 所以 $x_n>n\pi+\frac{\pi}{3}$，得证。

所以 $0<x_{n+1}-x_n-\pi<(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}-n\pi-\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{\pi}{6}$.

再证明：$\tan x<x\left(\frac{1}{\pi}x+1\right), x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $\varphi(x)=\tan x-x(\frac{1}{\pi}x+1)$, 则 $\varphi'(x)=\tan^2 x+1-\frac{2}{\pi}x-1=\tan^2 x-\frac{2}{\pi}x<0$ (第 2 问结论) , $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，$\varphi(x)<\varphi(0)=0$, 得证。所以 $x>\frac{\tan x}{\frac{1}{\pi}x+1}$.

右侧不等式等价于：$x_{n+1}-x_n-\pi>\frac{\pi}{1+x_{n+1}x_n}$.

所以 $x_{n+1}-x_n-\pi>\frac{\tan(x_{n+1}-x_n-\pi)}{\frac{1}{\pi}(x_{n+1}-x_n-\pi)+1}=\frac{\pi\tan(x_{n+1}-x_n)}{x_{n+1}-x_n}=\frac{\pi(x_{n+1}-x_n)}{(x_{n+1}-x_n)(1+x_{n+1}x_n)}=\frac{\pi}{1+x_{n+1}x_n}$, 得证！