清华笔记：计算共形几何讲义（9）全纯微分

2017-07-14　顾险峰　老顾谈几何

【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

双全纯函数

图1. Escher 效果：双全纯函数是复平面间的共形映射

假设复值函数$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$将$z=x+iy$ 映到$w=u+iv$,如果函数满足所谓的柯西-黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

则函数被称为一个全纯函数。如果函数可逆，并且逆函数也是全纯的，则函数被称为是双全纯的。

如图2所示，从微分几何角度而言，双全纯函数是共形映射。我们在办公室桌面上放了一个相框。然后将整个办公室的照片嵌入相框。相框内部还有相框，这形成无限递归嵌套结构。然后，我们将整个复平面用一个双全纯函数进行变换，封闭的相框变成了无穷的螺旋线。但是，局部形状被完美保持，例如纸兔子，米开朗基罗的大卫雕塑，毕加索的《镜中少女》，等等。这一变换由荷兰画家埃舍尔发明，因此被称为埃舍尔效果。

柯西-黎曼方程具有更为简洁的复表示，记复算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}),\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})$$

则柯西-黎曼方程等价于

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$$

假设映射$w=f(z)$是双全纯的，那么

$$dw=\frac{\partial w}{\partial z}dz+\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}d\bar{z}=\frac{\partial w}{\partial z}dz$$

源z-平面的黎曼度量为$dzd\bar{z}$，目标w-平面的黎曼度量为$dwd\bar{w}$，那么由映射$w=f(z)$诱导的拉回度量为

$$dwd\bar{w}=|w_z|^2dzd\bar{z}$$

和初始度量相差一个标量函数，因此映射为共形映射，亦即保角映射。

黎曼面

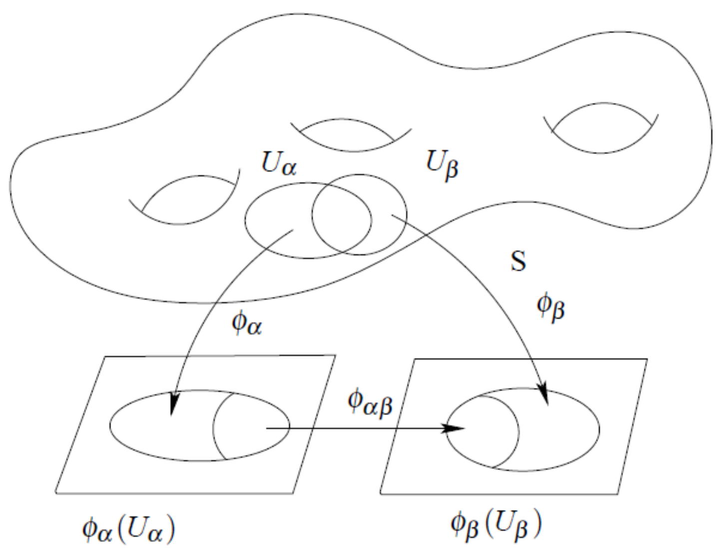

图2. 黎曼面的概念

假设S是一个二维拓扑流形（曲面），配有图册$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, 每个局部坐标为复数坐标$\varphi_\alpha: U_\alpha\to\mathbb{C}$，记为$z_\alpha$，并且坐标变换为双全纯函数，

$$\varphi_{\alpha\beta}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta), z_\alpha\mapsto z_\beta,$$

则图册被称为是一个共形图册。设$\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$都是共形图册，如果它们的并集$\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 也是共形图册，则我们说$\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$共形等价。我们可以用共形等价的关系将曲面的所有共形图册分成等价类，每一个共形

等价类都被称为是一个共形结构，或者一维复结构。一个带有共形结构的拓扑曲面被称为是一个黎曼面。

黎曼面和黎曼度量

共形结构弱于黎曼度量，它可以用来测量角度，但是无法测量面积，长度。假如两条曲线$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to S$在黎曼面上相交$\gamma_0 \cap \gamma_1 = \{p\}$，它们的交角可以在局部坐标上测量，如果$p \in U_\alpha$，我们在局部坐标卡$U_\alpha, \varphi_\alpha$ 上测量$\varphi_\alpha(\gamma_0), \varphi_\alpha(\gamma_1)$ 在$\varphi_\alpha(p)$ 处的交角，记为θ_α。同理，如果同时$p \in U_\beta$，我们可以同法得到$\varphi_\beta(\gamma_0), \varphi_\beta(\gamma_1)$ 在$\varphi_\beta(p)$ 处的交角θ_β。因为坐标变换$\varphi_{\alpha\beta}$保角，我们有

$$\theta_\alpha = \theta_\beta,$$

因此曲线交角的测量值和局部坐标的选取无关。换言之，曲线的交角可以全局无歧义地定义在黎曼面上。

假设(S,g)是一个可定向带黎曼度量的曲面，对于曲面上任意一点$p \in S$，存在一个邻域$U_\alpha \subset S$，$p \in U_\alpha$，在U_α 上存在等温坐标：$g = e^{2\lambda(z_\alpha)} dz_\alpha d\bar{z}_\alpha$。那么等温坐标构成的图册$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ 是共形图册，被称为是由黎曼度量诱导的共形结构。换言之，所有带度量的可定向曲面都是黎曼面。

黎曼面之间的全纯映射

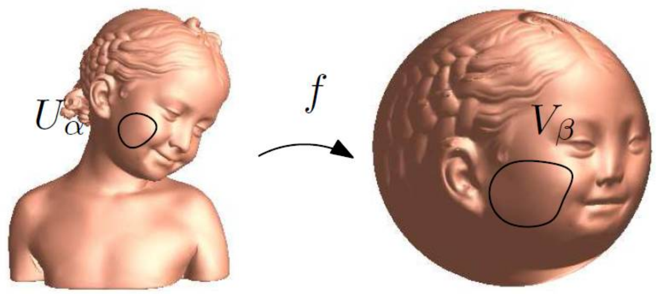

图3．黎曼面间的双全纯映射

我们现在可以用黎曼面来定义共形映射。考察一个黎曼面$(S, \{z_\alpha\})$，这里z_α是S的复结构。复值函数$f : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 被称为是亚纯函数，如果其局部表示$f_\alpha : z_\alpha \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$是亚纯函数。推而广之，假设$f : (S, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}), (S, \{(V_\beta, \tau_\beta)\})$ 是黎曼面之间的映射，如果每一个局部表示

$$\tau_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \tau_\beta(V_\beta)$$

都是双全纯函数。

亚纯微分

假设ω是黎曼面上的复微分形式，具有局部表示

$$\omega = f_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha^m d\bar{z}_\alpha^n,$$

这里$f_\alpha(z_\alpha)$是亚纯函数，$m, n \in \mathbb{Z}$是整数，则ω被称为是(m,n)型的亚纯微分；如果$f_\alpha(z_\alpha)$是全纯函数，则ω 被称为是全纯微分。

黎曼面上的微分形式的定义非常抽象，但是其背后具有非常丰富的几何内涵，对理解黎曼面的几何具有根本的重要性。（1,0）型的全纯微分，被称为是全纯1-形式（holomorphic 1-form）。全纯1-形式可以用于计算曲面的共形不变量，计算共形等价的曲面间的共形映射；（2,0）型的全纯微分，被称为是全纯二次微分（holomorphic quadratic differentials）。全纯二次微分可以用于计算曲面的叶状结构（foliation），非共形等价的曲面间最接近共形映射的极值映射；（-1,1）型的微分被称为是Beltrami 微分，固定两个黎曼面，则Beltrami微分控制了曲面间的微分同胚；全纯四次微分可以用于计算曲面的实射影结构。

图4. 全纯1-形式的算法

全纯1-形式的计算

我们下面讨论全纯1-形式的具体计算方法。给定一张亏格为g黎曼面S，其调和1-形式群的基底为$\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{2g}\}$。每个调和1- 形式$\tau_k$的共轭（Hodge Star）1-形式仍然是调和的，记为$\{^*\tau_1,^*\tau_2,\cdots,^*\tau_{2g}\}$，每对共轭的调和1- 形式构成一个全纯1-形式，

$$\{\tau_1+\sqrt{-1}^*\tau_1,\tau_2+\sqrt{-1}^*\tau_2,\cdots,\tau_{2g}+\sqrt{-1}^*\tau_{2g}\}$$

如图4所示，左帧显示的是调和1-形式τ_k，中间帧是其共轭调和1-形式$^*\tau_k$，右帧是全纯1-形式$\tau_k+\sqrt{-1}^*\tau_k$。

我们假设$^*\tau_i=\sum_{j=1}^{2g}\lambda_{ij}\tau_j$，利用Wedge积构造线性方程：

$$\int_S \tau_i\wedge^*\tau_j=\sum_{k=1}^{2g}\lambda_{jk}\int_S\tau_i\wedge\tau_k, 1\le i,j\le 2g$$

由此我们通过解线性系统，求得未知变量$\{\lambda_{ij}\}$，从而得到共轭调和1-形式。

这里，我们需要用到微分形式和且矢量场的对偶关系。给定一个带度量的曲面(S,g)，任意一个微分形式τ，则存在唯一的一个切矢量场$\mathbf{v}_\tau$，使得

$$\forall p\in S,\mathbf{w}\in T_pS,\langle v_\tau,\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{g}}|_p=\tau(\mathbf{w})|_p$$

这里$\langle\cdot,\cdot\rangle_g$是黎曼度量定义的在切空间上的内积。我们将$\mathbf{v}_\tau$称为是微分形式的切矢量场表示。直接计算可得，微分1- 形式的Hodge 星运算等价于其矢量场表示的旋转90度，

$$\forall p\in S,\mathbf{v}_{^*\tau}|_p=\mathbf{n}\times\mathbf{v}_\tau|_p$$

我们用多面体网格来逼近光滑曲面，用单纯1-形式来逼近调和1-形式，在每个面上，我们可以算出调和形式的切矢量表示，然后将微分形式运算转换成矢量运算。假设在一个三角形$\triangle$ 上，

$$\int_\triangle\tau\wedge\omega=(\mathbf{v}_\tau\times\mathbf{v}_\omega\cdot\mathbf{n})A_\triangle$$

并且

$$\int_{\triangle} \tau \wedge^* \omega = \langle \mathbf{v}_\tau, \mathbf{v}_\omega \rangle A_{\triangle}.$$

由此，我们可以计算曲面全纯一形式（holomorphic 1-form）群的基底，如图5所示。

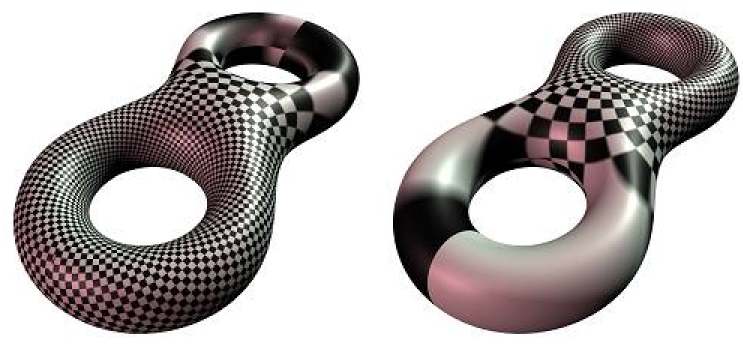

图5. 亏格为2的曲面上全纯1-形式群的基底

黎曼面上所有的全纯1-形式构成一个维复向量空间，通过复线性组合基底，我们可以遍历所有可能的全纯1-形式。根据实际应用的需要，我们从中挑选最优者，如图6所示。

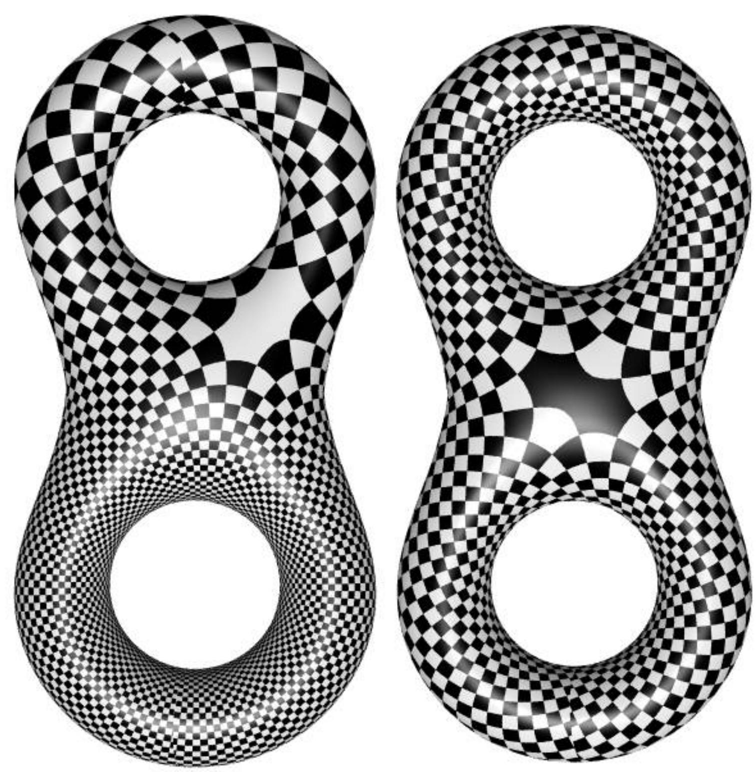

图6. 黎曼面上的全纯1-形式构成复线性空间

拓扑轮胎的共形模

我们下面用亏格为一的曲面来解释如何使用全纯1-形式来计算几何问题。

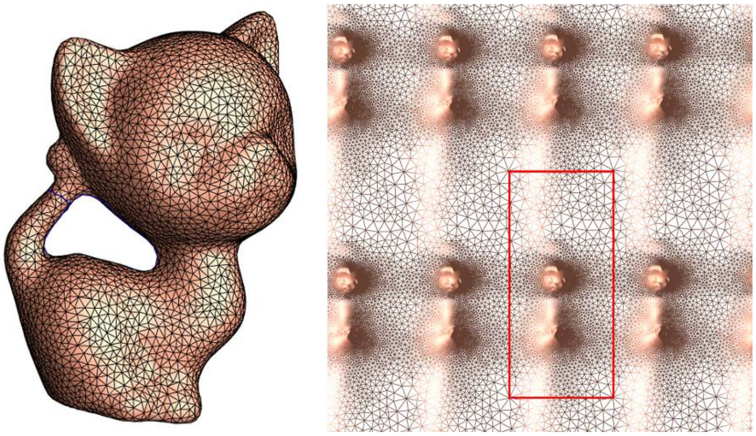

图7. 亏格为一的曲面的共形模

如图7所示，亏格为一的曲面的共形模可以通过全纯1-形式计算出来。曲面$(S, \mathbf{g})$带有黎曼度量$\mathbf{g}$，诱导的共形图册记为$\mathcal{A}$。我们在前面证明了调和微分形式的存在性和在每一个上同调类中的唯一性。假设τ是一个调和1- 形式，其共轭调和1- 形式为$^*\tau$，那么

$$\omega = \tau + \sqrt{-1}^*\tau$$

是全纯1-形式。我们选取一个特殊的全纯1-形式ω，满足如下条件：取曲面同伦群基底$\{a, b\}$,$\pi_1(S, p_0) = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$，$\omega$沿着a 积分为1，

$$\int_a \omega = 1$$

设ω沿着b积分为η。

令$p : \widetilde{S} \to S$是曲面的万有覆盖空间(universal covering space)，p是投影映射。那么投影映射诱导$\widetilde{S}$的拉回度量为$p^*\mathbf{g}$，拉回度量诱导了覆盖空间的共形结构，记为$p^*\mathcal{A}$。投影映射诱导的拉回全纯1-形式为$p^*\omega$，那么$p^*\omega$ 在共形结构$p^*\mathcal{A}$ 上仍然为全纯1- 形式。因为$\widetilde{S}$ 是单连通的，且全纯1- 形式的实部和虚部都是调和的，因此是恰当的。我们定义全纯函数$f : \widetilde{S} \to \mathbb{C}$，固定基点$p_0 \in \widetilde{S}fi\forall p \in \widetilde{S}$

$$f(p) := \int_{p_0}^{p} \omega$$

如图7所示，f将万有覆盖空间共形地映到复平面上。这时，万有覆盖空间的覆盖变换群（甲板映射群）是复平面上的刚体变换群的子群，实际上是格点群，

$$Deck(\widetilde{S}) = \Gamma = \{m + n\eta | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

格点群Γ作用在复平面$\mathbb{C}$上，所得的商空间是一个平环$\mathbb{C}/\Gamma$，映射f 给出了曲面到平环的共形映射。每个基本域是一个平行四边形，这个平行四边形的形状是曲面的共形不变量，被称为是曲面的共形模。