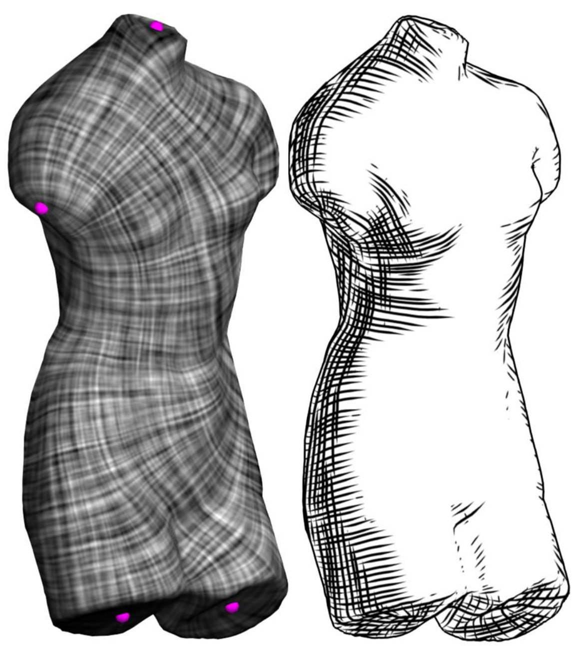
清华笔记：计算共形几何讲义（7）矢量场设计

2017-07-13　顾险峰　老顾谈几何

漫长的课程至此，我们终于可以应用所学的理论工具来分析解决一些实际问题了。我们学习了曲面的代数拓扑和微分拓扑，de Rham上同调的霍奇理论，作为应用实例，我们讨论如何构造曲面上光滑矢量场的问题，这一问题对于设计卡通动物的毛发具有根本的重要性；同时，这一个例子可以使我们对所学的各种概念融汇贯通。这次课程的视频可以在【1】的后半部找到，具体算法可以在【2】中找到。



根据矢量场的Hopf指标定理，矢量场必有奇异点。假设用户指定了奇异点的位置和指标，我们的算法应该可以自动生成光滑矢量场，具有指定的奇异点。我们的算法用到了Ricci flow，平行移动等概念工具，但最为重要的是holonomy，和用调和微分形式对holonomy的补偿。

平行移动

平行移动是黎曼几何中最为基本的概念。如图1所示，令$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$是平面上的一条直线段。我们在起点处选择一个平面矢量$\mathbf{v}$，然后将$\mathbf{v}$ 的起点沿着直线移动，同时保持$\mathbf{v}$和直线切向量的夹角不变，这样我们得到$\mathbf{v}$ 沿着γ 的**平行移动**，在直线的终点处得到平行移动的结果w。假设γ是折线段，我们可以逐段平行移动。如果γ 是曲线，我们可以用折线来逼近曲线。我们取曲线上的采样点

$$\{\gamma(0),\gamma(1/n),\gamma(2/n),\cdots,\gamma(n-1/n),\gamma(1)\}$$

然后用直线段连接相邻的两个采样点，这样得到折线。我们将$\mathbf{v}$沿着这条折线平行移动得到w_n。令n趋向无穷，则折线收敛到原来曲线，w_n会趋向到一个极限向量$\lim_{n\to\infty}w_n=w$。我们说$\mathbf{v}$沿着γ平行移动的结果是w。

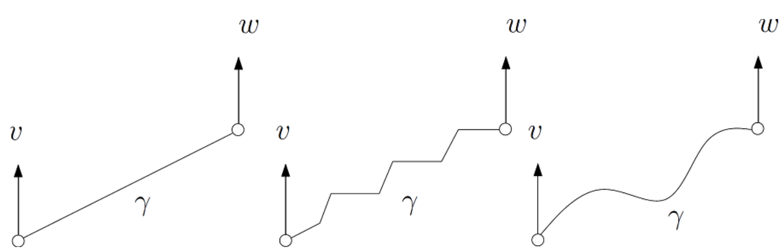


图1．平面上的平行移动

下面我们将平行移动的概念从平面推广到曲面情形。曲面上平行移动的定义方式和平面情形相类似，**唯一的区别是将直线换成测地线**。更为详尽地，如果曲线γ是定义在曲面S上的一条测地线，我们在起点处选择一个切矢量$\mathbf{v}$，然后将$\mathbf{v}$的起点沿着测地线移动，同时保持$\mathbf{v}$和测地线切向量的夹角不变，这样我们得到$\mathbf{v}$沿着γ的平行移动，在测地线的终点处得到平行移动的结果w。如果γ 是定义在曲面上的任意一条分片光滑曲线，则我们可以在γ上采样，并用分片测地线来逼近γ，同时在分片测地线上逐段平行移动。当采样密度趋于无穷的时候，分片测地线收敛到原来曲线，逐段平行移动的结果趋于一个极限切向量w，则我们将w 定义为$\mathbf{v}$沿着γ的平行移动结果。

高斯-博内定理

平面上的平行移动只和起点和终点有关，和平行移动所经历的路径无关。换言之，如果γ是平面上的一条封闭曲线，沿着γ 平行移动矢量$\mathbf{v}$得到w，则$\mathbf{v}$和w重合。

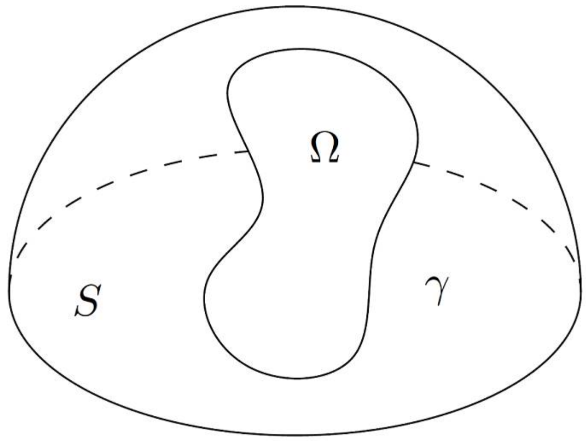


图2. 高斯-博内定理

如果γ是曲面上的一条分片光滑封闭曲线，如果γ是曲面某个区域$\Omega \subset S$的边界$\partial\Omega = \gamma$，那么沿着γ平行移动矢量$\mathbf{v}$ 得到w，则$\mathbf{v}$ 和w 不一定重合，其相差的角度等于曲面的高斯曲率在区域Ω 上的积分。这可以由高斯- 博内（Gauss-Bonnet）定理来精确描述：

$$\int_\Omega K dA + \int_\gamma k_g ds + \sum_i \theta_i = 2\pi$$

这里K是内点处的高斯曲率，k_g是边界点处的测地曲率，θ_i是曲线在折角处的外角。如果曲面的高斯曲率非零，则平行移动的结果依赖于路径的选择。由此，我们可以提炼出和乐群的概念。

和乐群

给定带黎曼度量的光滑曲面S，和其上的基点$p \in S$，考察所有经过基点的封闭曲线$\gamma \subset S$，我们沿着γ平行移动切向量$\mathbf{v}$ 得到w，则$\mathbf{v}$ 和w之间相差一个旋转，所有这种旋转构成的群被称为是曲面的和乐群（Holonomy Group）。陈省身先生非常重视和乐群的研究，因为和乐群反映了黎曼流形的几何特性。如果曲面的黎曼度量为平直度量，高斯曲率处处为0，那么如果γ同伦平庸（即γ 同伦于点），那么γ对应的holonomy平庸。由此推出，如果两个封闭曲线同伦，则它们的holonomy 相同。这意味着**平直度量可以简化和乐群**，我们利用这一点来构造曲面上的光滑切矢量场。

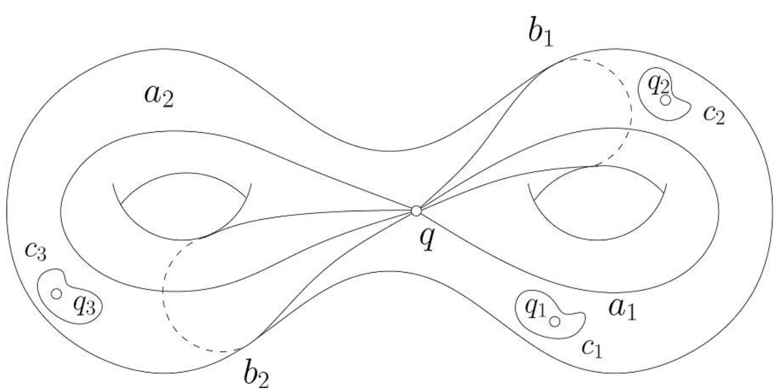


图3. 曲面基本群生成元

给定一个亏格为g的曲面S，用户选择n个点，作为切矢量场的零点$\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$，并且指定这些零点的指标$\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$，满足庞加莱- 霍普夫公式：零点的总指标等于曲面的欧拉示性数，

$$\sum_i k_i = \chi S$$

我们在曲面的每个环柄上选择两个封闭曲线$\{a_i, b_i\}$，围绕每个零点q_j选择一条封闭曲线c_j。带孔曲面定义为：

$$\widetilde{S} = S \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$$

其基本群为

$$\pi_1(\widetilde{S}) = \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c_1, \cdots, c_{n-1}\rangle$$

我们可以用Ricci 流的方法构造一个平直度量，使得曲面的高斯曲率集中在零点上，q_i点处的曲率等于2π乘以其指标，其他各点的高斯曲率处处为0。后面我们会详细介绍，离散曲面Ricci流方法可以计算出这样平直度量。根据Gauss-Bonnet定理，我们可以看出，带孔曲面上，如果两条封闭曲线同伦，则它们对应的holonomy相同。因此，holonomy是定义在带孔曲面的同伦群上的。

根据定义，c_i的holonomy为0，但是$\{a_i, b_i\}$的holonomy依然复杂，我们假设相应的holonomy分别是θ_i和τ_i 。我们构造一个微分1- 形式ω,满足

$$\int_{a_i} \omega = \theta_i, \int_{b_i} \omega = \tau_i$$

在构造光滑矢量场时，ω用于补偿平直度量诱导的holonomy。

我们在带孔曲面上任选一点$p \in \widetilde{S}$，任选一个单位切向量$\mathbf{v} \in T_p\widetilde{S}$，对于带孔曲面上任意一点$q \in \widetilde{S}$，我们可以任选一条连接$p$和$q$的路径$\gamma$，将$\mathbf{v}$沿着$\gamma$平行移动到$q$点，然后再旋转角$\theta$，这里

$$\theta = -\int_\gamma \omega$$

这样，可以证明我们在带孔曲面上生成了一个光滑切矢量场，切矢量的长度处处为1。然后我们构造一个光滑函数λ，λ在零点处为0，其他各处为正，则λ和带孔曲面上的光滑单位切矢量场之积是原来曲面上的一个光滑矢量场，其零点以及零点的指标由用户指定。

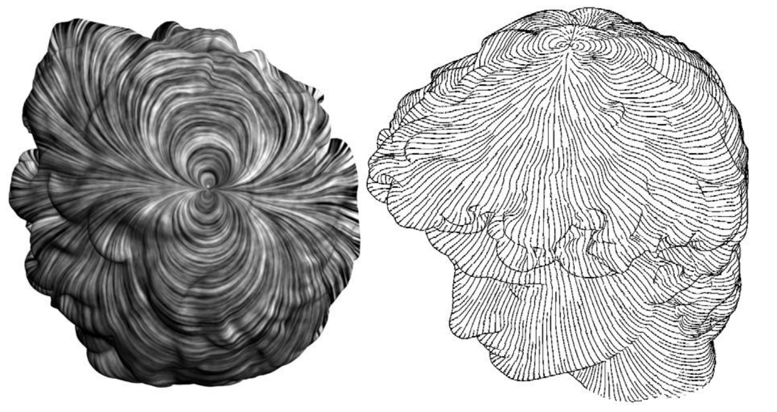


图4．亏格为0的曲面上只有一个零点的光滑向量场

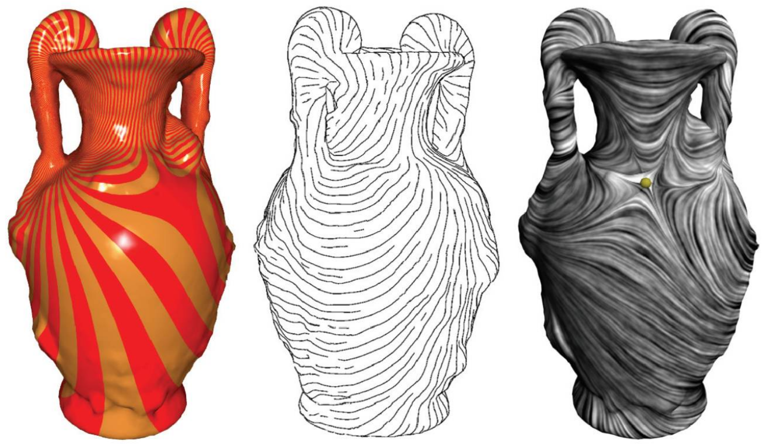


图5. 亏格为2的曲面上只有一个零点的矢量场

图4显示了亏格为0曲面上只有一个零点的光滑矢量场。图5显示了亏格为2的曲面上只有一个零点的切矢量场。左帧是如上构造的用于补偿holonomy的微分形式，中帧显示的是未加补偿直接由平行移动生成的切矢量场，其上存在间断曲线，右帧是补偿后的光滑矢量场。

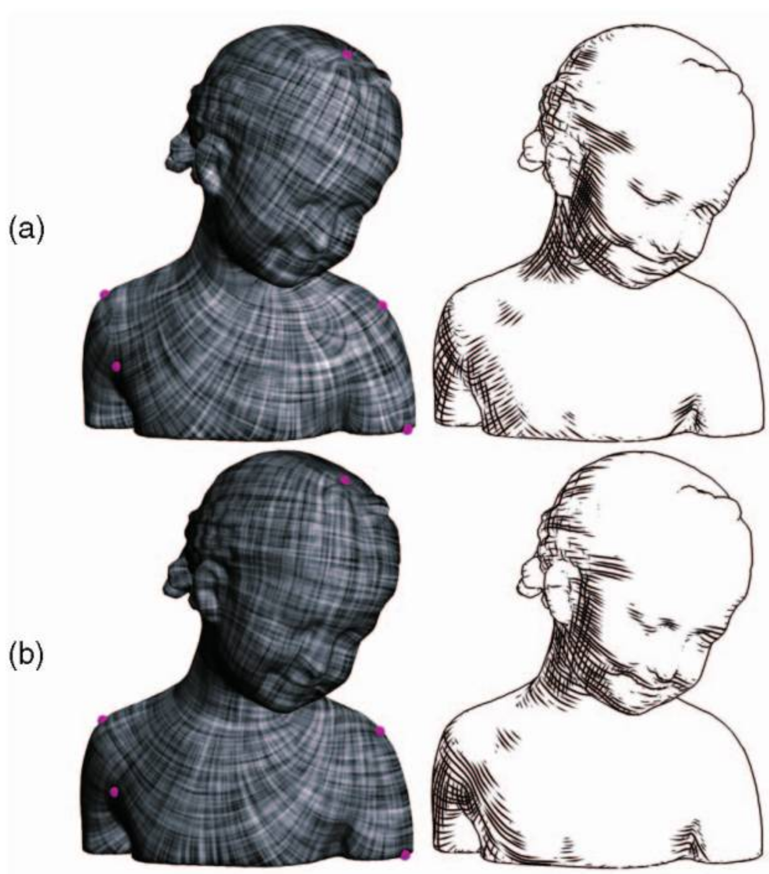


图6. 曲面上的矢量场设计，零点由用户指定

图7. 将曲面转换成编织模型

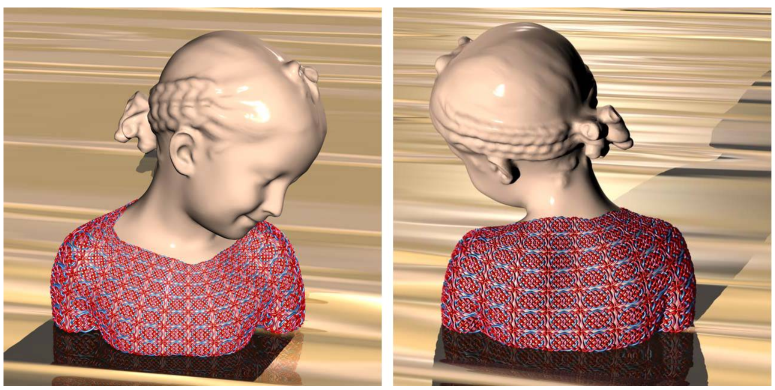


图8. 将曲面转换成编织模型

同样的方法，也可以用于生成曲面上的光滑标架场。如图6所示，曲面上的标架场用于自动生成铅笔素描画，这可以用计算机来模拟艺术家来进行非真实感绘制。图7和图8显示了将曲面自动转换成编织模型，这为数字制造提供了新颖的思路。

References:

【1】http://m.iqiyi.com/w_19rtoay4k9.html#vfrm=8-8-u-1

【2】Lai, Yu-Kun, et al. "Metric-driven rosyfield design and remeshing." IEEETransactions on Visualization and Computer Graphics 16.1 (2010): 95-108.