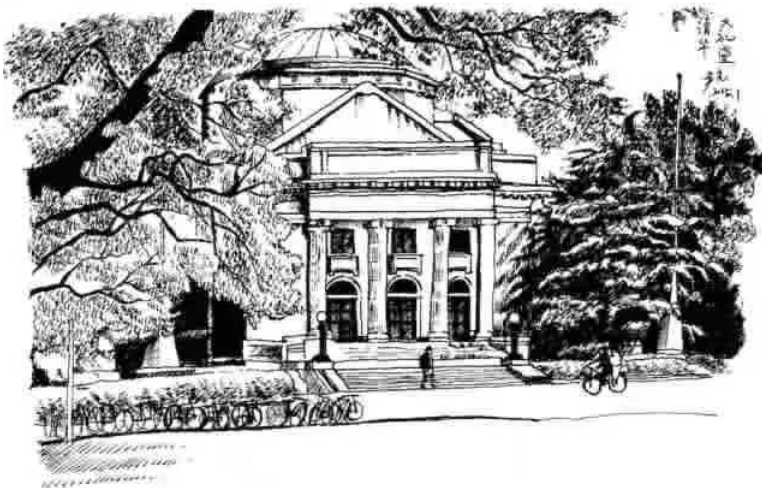


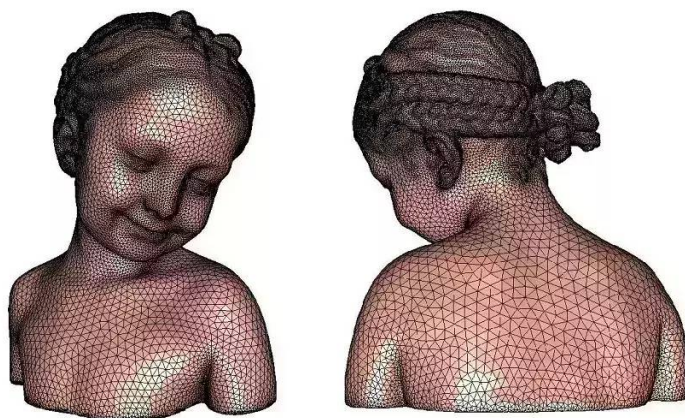
# 清华笔记：计算共形几何讲义（4）单纯同调

2017-07-01 顾险峰 老顾谈几何



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。】

这次课程，我们介绍单纯同调理论。在代数拓扑中，有单纯同调、奇异同调和de Rham同调理论。它们所用的数学工具不同，但是理论彼此等价。【1】给出了本课程的视频链接。



## 基本方法

代数拓扑的目的是将拓扑范畴的问题转换成代数范畴的问题，用代数方法加以解决。最为基本的问题之一就是判断两个拓扑空间是否同胚。在理想情形下，我们为每一个空间配上一系列群结构，如果这些群彼此同构，则空间拓扑同胚。但是，目前代数拓扑的方法还没有到达这一程度。同调群同构只能推出空间伦型等价。伦型等价远远弱于拓扑等价。

同调论的基本方法是将流形三角剖分，然后将子流形表示成单形的线性组合，所有的子流形构成线性空间。将拓扑算子（边缘算子）表示成线性算子（矩阵），用线性代数的方法来获取拓扑信息。

同调方法将低秩、稀疏，高度非线性的拓扑性质变换成高维空间的线性运算，非常具有启发意义。

## 拓扑去噪应用

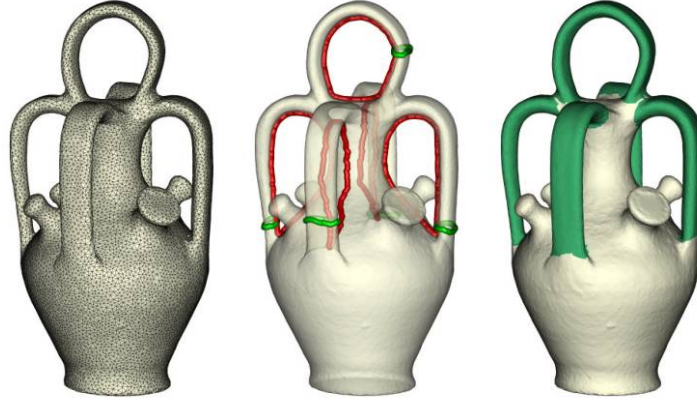


图1. 表面上的环柄圈（绿色handle loop）、隧道圈（红色tunnel loop）

如图1所示，给定一个嵌在三维欧氏空间中的高亏格曲面 $S$ ，曲面 $S$ 将三维欧氏空间分为内部 $\mathbb{I}$ 和外部 $\mathbb{O}$ ，存在一族同伦群的基底， $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}\}$ ，这里亏格 $g > 1$ 。直观上，其中有 $g$ 条圈在内部 $\mathbb{I}$ 可以缩成点，但在外部 $\mathbb{O}$ 中无法缩成点，它们构成外部空间 $\mathbb{O}$ 的同伦群的基底，被称为是隧道圈（tunnel loop）；另外 $g$ 条圈在外部 $\mathbb{O}$ 中可以缩成点，但在内部 $\mathbb{I}$ 中无法缩成点，它们构成内部同伦群的基底，被称为是环柄圈（handle loop）。环柄圈和隧道圈对于医学图像具有重要意义。

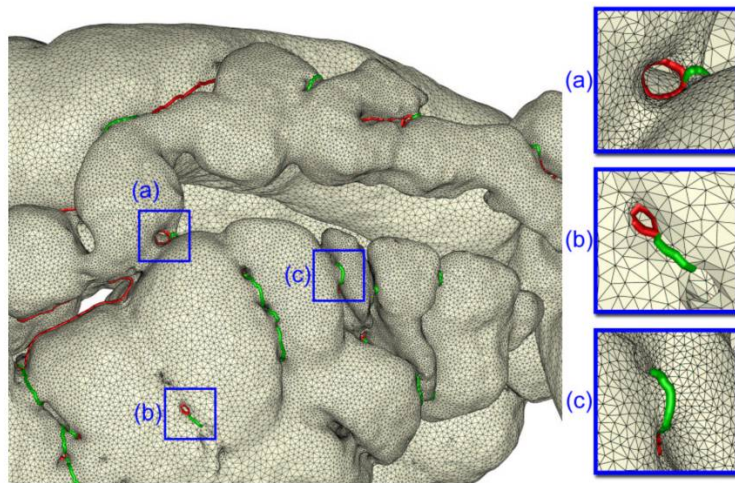


图2. 医学图像中的拓扑去噪

如图2所示，我们用CT断层扫描技术获取直肠切面图像，经过曲面重建得到直肠曲面。由于图像分割的误差，重建的曲面有很多虚假的亏格（环柄）。在实际应用中，我们需要检测这些虚假亏格。这些环柄非常微小，用肉眼无法直接检测。唯一的方法就是通过计算拓扑方法得到，这往往依赖于曲面的环柄圈和隧道圈的算法。

## 单纯同调理论

相对于曲面而言，同伦群和同调群保留了相同的信息，因此彼此等价；对于三流形而言，同伦群反映的信息远远多于同调群，同伦群强于同调群。但是，同伦群本身为非阿贝尔群（非交换群），判定两个非阿贝尔群是否同构是非常繁难的问题。相反，同调群是同伦群的阿贝尔化，阿贝尔群的计算只需要线性代数。

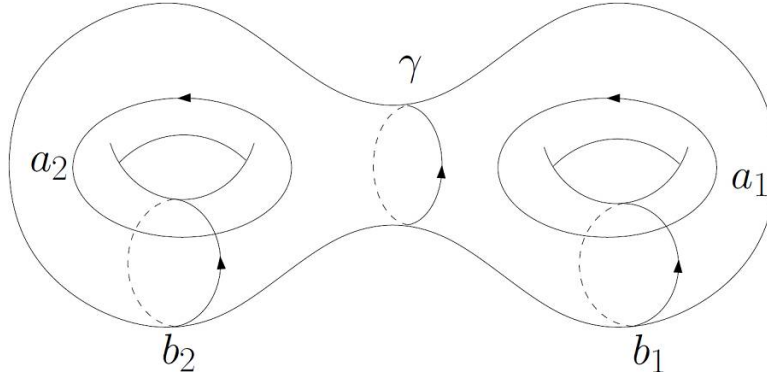


图0. 同伦群是非阿贝尔群

如图所示，环路 $\gamma$ 无法在曲面上缩成一个点，因此同伦群中 $[\gamma] \neq e$ ，同时 $[\gamma] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ ，我们得到 $a_1 b_1 \neq b_1 a_1$ 。因此亏格为2的曲面的同伦群 $\pi_1(S, p)$ 不可交换。

我们记 $\pi_1(S, p)$ 的中心交换子群为所有形如 $aba^{-1}b^{-1}$ 生成的正规子群，

$$[\pi_1(S, p), \pi_1(S, p)] = \langle aba^{-1}b^{-1} | a, b \in \pi_1(S, p) \rangle$$

那么商群

$$\frac{\pi_1(S, p)}{[\pi_1(S, p), \pi_1(S, p)]}$$

为一阿贝群，即为曲面的一维下同调群。换句话说，**同调群是同伦群的阿贝尔化**。

环路 $\gamma$ 在同伦群中不是单位元，但是在同调群中却是单位元。几何上来看， $\gamma$ 将曲面分成两个连通分支， $\gamma$ 是其中一个分支的边缘。这意味着，在同调群中，边缘环路被视为单位元。

同调群概念的要义在于：**边的边为空，圈和边的差别就是同调**。

### 同调群的概念

单纯复形是曲面三角剖分的直接推广，但是单纯复形可以表示更为广泛的拓扑空间，例如非流形的空间。

**单纯形** 给定 $\mathbb{R}^n$ 中一般位置的 $k+1$ 个点 $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ ， $k$ 维单纯形是这些点构成的凸包(convex hull)，

$$\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k] = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

我们称 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 为单纯形 $\sigma$ 的顶点。如果另外一个单纯形 $\tau$ 包含在 $\sigma$ 中， $\tau \subset \sigma$ ，我们称 $\tau$ 是 $\sigma$ 的一个面。

单纯形是有定向的，每一个单纯形有两个定向，单纯形的定向由其顶点的排列给出。我们考虑数列 $(0, 1, \dots, k)$ 的所有排列，它们构成对称群 $S_{k+1}$ ，其中所有由偶次对换（即只交换两个数的位置）构成的子群记为 $A_{k+1}$ 。如果排列 $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_k)$ 属于 $A_{k+1}$ ，则单纯形 $[v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ 的定向为正，反之



定向为负。

通常意义下的点，线段，三角形，四面体就是0到3维的单纯形。

**单纯复形** 单纯形粘贴在一起就构成单纯复形。所谓一个单纯复形 $\Sigma$ 就是一组单纯形的并集，满足两个条件，

1. 如果一个单纯形 $\sigma$ 属于 $\Sigma$ ，那么 $\sigma$ 的所有面都属于 $\Sigma$
2. 如果两个单纯形都属于 $\Sigma$ ， $\sigma_1, \sigma_2 \subset \Sigma$ ，那么或者它们的交集为空，或者它们的交集是它们共同的一个面。

通常意义下，曲面的三角剖分就是单纯复形。

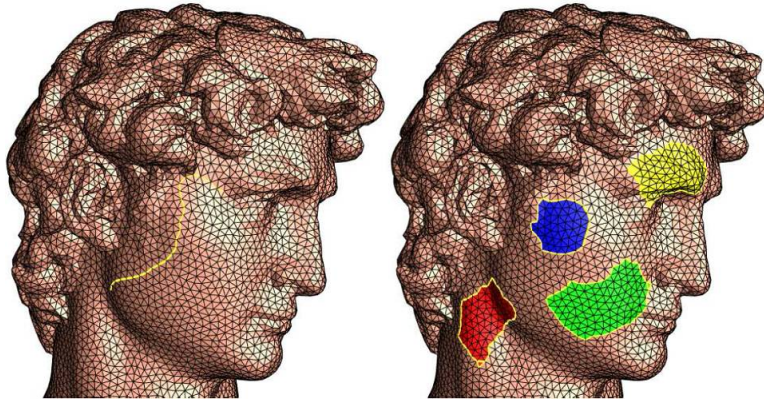


图1. 复形上的1维和2维链

**链群** 给定一个单纯复形，一个 $k$ 维链就是所有 $k$ 维单纯形的线性组合，如图1所示，

$$\sum_i \lambda_i \sigma_i, \lambda_i \in \mathbb{Z}$$

所有的 $k$ 维链在加法下成一阿贝尔群（可交换群），记为 $C_k(\Sigma)$ ，

$$\sum \alpha_j \sigma_j + \sum \beta_j \sigma_j = \sum (\alpha_j + \beta_j) \sigma_j$$

其中零元为 $\sum 0 \sigma_j$ ,  $\sum \alpha_j \sigma_j$ 的逆元为 $\sum (-\alpha_j) \sigma_j$

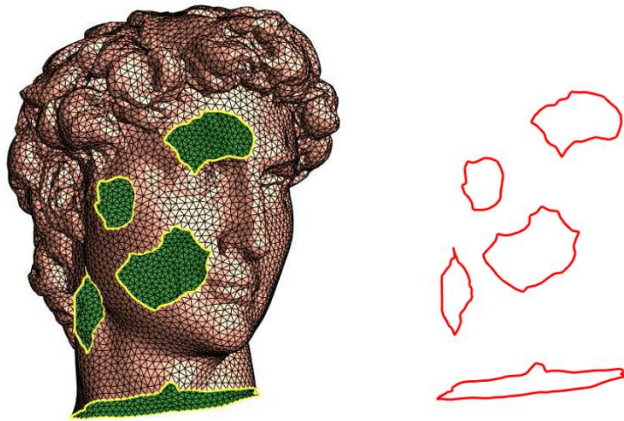


图2. 边缘算子

**边缘算子**  $k$ 维边缘算子是链群之间的一个同态

$$\partial_k : C_k(\Sigma) \rightarrow C_{k-1}(\Sigma)$$

作用在单纯形上

$$\partial_k[v_0, v_1, \dots, v_k] = \sum_i (-1)^i [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k]$$

作用在链上

$$\partial_k \sum_i \alpha_i \sigma_i = \sum_i \alpha_i \partial_k \sigma_i, \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

直观上，边缘算子就是剥离每个链的边界。

通过直接计算，我们可得到

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$$

亦即**边的边为空**

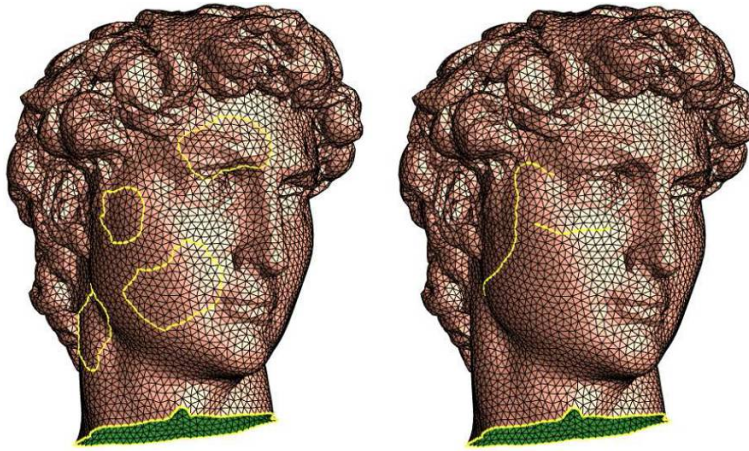


图3. 闭链和开链

**同调群**  $k$ 维链  $\gamma \in C_k(\Sigma)$  被称为是闭链，如果  $\partial_k \gamma = 0$ 。所有的  $k$ 维闭链  $C_k(\Sigma)$  构成的一个子群，记为  $Z_k(\Sigma)$ ；如果存在一个  $k+1$ 维链  $\sigma \in C_{k+1}(\Sigma)$ ，满足  $\partial_{k+1} \sigma = \gamma$ ，那么  $\gamma \in C_k(\Sigma)$  被称为是恰当链，所有  $k$ 维恰当链构成一个子群，记为  $B_k(\Sigma)$ 。因为边的边为空，所以恰当链必为闭链，

$$B_k(\Sigma) \subset Z_k(\Sigma) \subset C_k(\Sigma)$$

给定单纯复形  $\Sigma$ ，我们得到链复形，

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

具有条件  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ 。

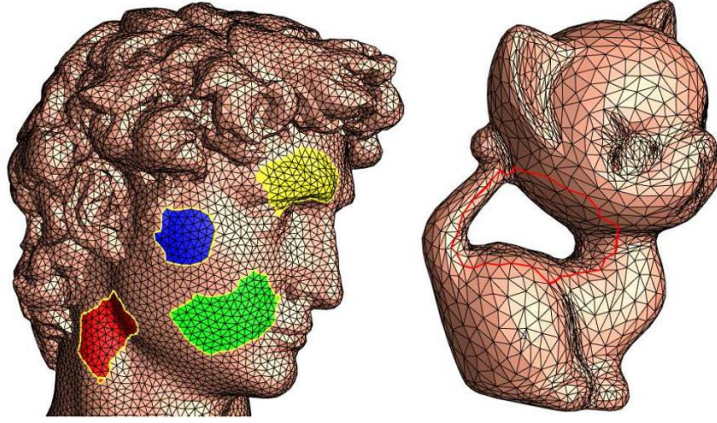


图4. 恰当闭链和非恰当闭链

综上所述，边（恰当链）一定是圈（闭链），圈可能不是边。圈和边的差别就是同调

$$H_k(\Sigma) = \frac{Z_k(\Sigma)}{B_k(\Sigma)}$$

如图4所示，左帧显示了恰当的闭链，每一个闭链都包围着一个曲面区域，因此是边缘。右帧是非恰当的闭链 $\gamma$ ，这条链 $\gamma$ 并不包围任何一个曲面区域。如果我们把曲面 $S$ 沿着 $\gamma$ 切开，我们得到一个圆筒面 $S \setminus \gamma$ ，圆筒面有两个边缘曲线，

$$\partial_2(S \setminus \gamma) = \gamma^+ - \gamma^-,$$

但是 $\gamma$ 本身并不构成圆筒面 $S \setminus \gamma$ 的边界。

我们将单纯复形 $\Sigma$ 的所有同调群放在一起，记为 $H_*(\Sigma) = \{H_k(\Sigma)\}$ 。

#### 同调群的计算

曲面一维同调群的基底和曲面基本群基底相同，我们可以用基本群的组合算法来计算一维同调群基底。高维同调群的算法基于线性代数的矩阵特征值和特征向量算法。

我们可以将链群视为线性空间，边缘算子 $\partial_k : C_k(\Sigma) \rightarrow C_{k-1}(\Sigma)$ 是线性算子，因此可以被表示为矩阵。假设复形 $\Sigma$ 所有的 $k$ 维单纯形为

$$\{\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_m^k\}$$

它们线性张成 $k$ 维链群

$$C_k(\Sigma) = \text{Span}(\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_m^k);$$

复形 $\Sigma$ 所有的 $k-1$ 维单纯形为

$$\{\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}, \dots, \sigma_n^{k-1}\}$$

它们线性张成 $k-1$ 维链群

$$C_{k-1}(\Sigma) = \text{Span}(\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}, \dots, \sigma_n^{k-1}).$$

边缘算子具有矩阵表示，

$$\partial_k = ([\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}])$$

这里联接数 $[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$ 是一个整数，定义如下：如果 $\sigma_j^{k-1} \cap \sigma_i^k = \emptyset$ ，则 $[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$ 为0；如果 $+\sigma_j^{k-1}$ 是 $\sigma_i^k$ 的一个边缘面， $+\sigma_j^{k-1} \in \partial_k \sigma_i^k$ ，则 $[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$ 为+1；如果 $-\sigma_j^{k-1}$ 是 $\sigma_i^k$ 的一个边缘面， $-\sigma_j^{k-1} \in \partial_k \sigma_i^k$ ，

则 $[\sigma_i^k, \sigma_j^{k-1}]$ 为-1。

如此，我们构造离散拉普拉斯算子：

$$\Delta_k = \partial_{k+1} \circ \partial_{k+1}^T + \partial_k^T \circ \partial_k,$$

$H_k(\Sigma, \mathbb{Z})$ 的基底是 $\Delta_k$ 的对应于0特征根的特征向量。

这里， $\Delta_k$ 是整数矩阵，存在Smith 标准型 (Smith Normal Form)：存在 $m \times m$  可逆整数矩阵 $S$ 和 $T$ ， $S \Delta_k T$ 为对角阵，

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \\ \vdots & & & \alpha_r & \vdots \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $\alpha_i | \alpha_{i+1}, \forall 1 \leq i < r, \alpha_i$  整除 $\alpha_{i+1}$ ，并且

$$\alpha_i = \frac{d_i(\Delta_k)}{d_{i-1}(\Delta_k)}$$

$d_i(\Delta_k)$ 是所有 $i \times i$ 阶子矩阵行列式的最大公因子。

### 伦型不变量

**单纯映射** 假设是拓扑空间之间的连续映射，我们可以将 $M$ 和 $N$ 用单纯复形来逼近，同时映射本身可以用所谓的单纯映射来逼近。所谓单纯映射，就是说对于 $M$ 中的任意一个单纯形 $\sigma \in M$ ，其像 $f(\sigma) \in N$ 是 $N$ 中的单纯形。给定一个连续映射，我们可以将 $M$ 和 $N$ 进一步细分(subdivision)，在细分后的复形上定义单纯映射来逼近连续映射。可以证明，对于任意给定的误差，我们可以将 $M$ 和 $N$ 细分的足够细腻，使得单纯映射和连续映射的误差小于给定的阈值。单纯映射可以表示成分片线性映射，图中，我们显示一个单纯映射的实例，从小女孩的雕像到单位球面的形变。现实生活中，所有的动漫动画都是基于单纯映射的理论。

**链映射**  $C$ 和 $D$ 是 $M$ 和 $N$ 的链复形，

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

单纯映射诱导了链复形之间的映射，被称为是链映射 $f = \{f_q : C_q \rightarrow D_q\}$ ,

同时对于每一维度，单纯映射和边缘算子可交换， $f_{q-1} \circ \partial_q = \partial_q \circ f_q$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & C_{q-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_{q+1} \downarrow & & f_q \downarrow & & f_{q-1} \downarrow & & f_{q-2} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & D_{q-2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

因为单纯映射将闭链映为闭链，链映射诱导了同调群间的同态， $f_* : H_*(C) \rightarrow H_*(D)$ ,

$$f_*([z_q]) : [f_q(z_q)], \forall z_q \in Z_q(C)$$

**链同伦** 假如映射  $f, g : M \rightarrow N$  彼此同伦，它们诱导的链映射  $f = \{f_q : C_q \rightarrow D_q\}, g = \{g_q : C_q \rightarrow D_q\}$ , 满足如下条件

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & C_{q-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow g_{q+1} & \nearrow f_{q+1} & \downarrow g_q & \nearrow f_q & \downarrow g_{q-1} & \nearrow f_{q-1} & \downarrow g_{q-2} & \nearrow f_{q-2} & \\
 \cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & D_{q-2} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

这里  $T$  是一系列同态  $T = \{T_q : C_q \rightarrow D_{q+1}\}$ , 满足

$$g_q - f_q = \partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q,$$

这两个链映射被称为是链同伦。

$F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  是同伦,  $F(0, \cdot) = f(\cdot)$  并且  $F(1, \cdot) = g(\cdot)$ , 那么同伦  $F$  将  $M$  中的低维链映到  $N$  中的高一维链, 诱导了同态  $T$ 。如下图所示,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  是  $M$  上的一条路径, 关系式成立:

$$\partial_2 \circ T_1(\gamma) + T_0 \circ \partial_1(\gamma) = g_1(\gamma) - f_1(\gamma)$$

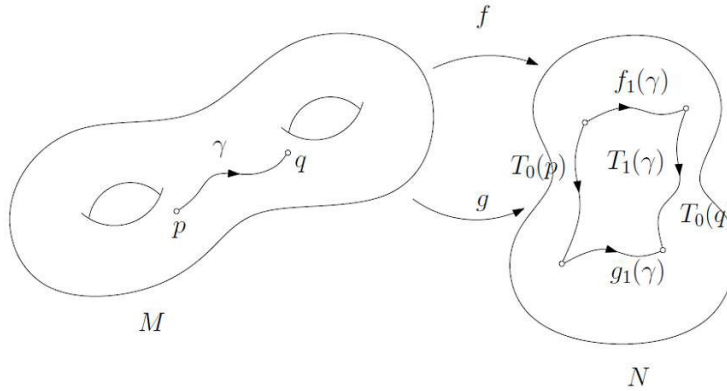


图5. 链同伦的直观解释

我们考察  $f, g : M \rightarrow N$  所诱导的同调群间的同态, 令  $\sigma \in Z_q(M)$  为一闭链, 则  $\partial_q \sigma = 0$ ,

$$g_q(\sigma) - f_q(\sigma) = \partial_{q+1} \circ T_q(\sigma) + T_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = \partial_{q+1} \circ T_q(\sigma),$$

因此  $g_q(\sigma)$  和  $f_q(\sigma)$  相差一个边缘链, 彼此同调。因此  $f_*, g_* : H_*(C) \rightarrow H_*(D)$  彼此相等。如此, 我们证明了 **同伦映射诱导相同的同调群同态**。

**伦型等价** 假如存在连续映射  $f : M \rightarrow N$  和  $g : N \rightarrow M$ , 满足  $f \circ g \cong id_N$ , 并且  $g \circ f \cong id_M$ , 就是说  $f$  和  $g$  的复合同伦于  $N$  上恒同映射,  $g$  和  $f$  的复合同伦于  $M$  上的恒同映射, 则我们说拓扑空间  $M$  和  $N$  同伦等价, 或  $M$  和  $N$  具有相同的伦型。如上讨论, 我们得出 **同伦等价的空间具有同构的同调群**。

**形变收缩核** 假如  $B$  是  $A$  的子空间,  $B$  是  $A$  的形变收缩核, 是指  $B$  可以在保持  $A$  上各点不变的情况下连续形变到  $A$  上。这样形变收缩映射与自然包含构成了同伦等价关系。一个拓扑空间和其形变收缩核具有相同的同调群。



## 环柄圈和隧道圈算法

在【2】中，孙剑等给出了环柄圈和隧道圈的计算方法。这里，给定一个嵌在三维欧氏空间中的高亏格曲面 $S$ ，曲面 $S$ 将三维欧氏空间分为内部 $\mathbb{I}$ 和外部 $\mathbb{O}$ ，存在一族同调群的基底， $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}\}$ ，这里亏格 $g > 1$ 。直观上，其中有 $g$ 条圈在内部同调于0，但在外部 $\mathbb{O}$ 非同调于0，它们构成外部空间 $\mathbb{O}$ 的同调群的基底，被称为是隧道圈（tunnel loop）；另外 $g$ 条圈在外部 $\mathbb{O}$ 中同调于0，但在内部 $\mathbb{I}$ 中无法缩成点，它们构成内部 $\mathbb{I}$ 的同伦群的基底，被称为是环柄圈（handle loop）。

计算环柄和隧道圈的核心想法有两个：过滤（filtration）和配对（pair）。一个单纯复形的过滤（filtration）是一系列嵌套的复形：

$$\emptyset = K_{-1} \subset K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K$$

我们可以假设每一步，即添加一个单纯形。每一次我们添加一个维单纯形，有两种可能性：

1. 生成一个维非边界闭链，这时我们称为正的单形；
2. 消灭掉一个 $(k-1)$ 维已经存在的闭链，这时我们称 $\sigma_i$ 为负的单形。我们将被消灭掉的闭链中最后一个正单形和 $\sigma_i$ 配对。

我们将曲面 $S$ 三角剖分，再取一个实心球 $B$ ，包含曲面 $S$ 。再对 $B$ 进行三角剖分，使得 $B$ 的三角剖分限制在 $S$ 上，等于 $S$ 的三角剖分。球外取一点 $q$ ，边界 $\partial B$ 上的每个三角形都和 $q$ 连成一个四面体。如此，我们得到了一个三维球面 $S^3$ 的一个三角剖分，同时得到内部 $\mathbb{I}$ 、外部 $\mathbb{O}$ 和曲面 $S$ 的三角剖分。

我们首先构造曲面 $S$ 的一个过滤序列，然后逐步添加单形构造内部的过滤序列，最后在添加单形，构成整个 $S^3$ 的过滤序列。

1. 在完成曲面 $S$ 的过滤后，存在 $2g$ 个没有被配对的正单形，对应着 $2g$ 个同调群的基底。
2. 在完成内部 $\mathbb{I}$ 的过滤后，会有 $S$ 上 $g$ 个正单形被配对，它们对应着 $g$ 个环柄圈。
3. 剩下的 $g$ 个正单形，对应着 $g$ 个隧道圈。

计算细节可以在【2】中找到。

---

### References:

【1】[http://www.iqiyi.com/w\\_19rtrpkd5x.html](http://www.iqiyi.com/w_19rtrpkd5x.html)

【2】T.Dey, K. Li, J. Sun and D. Cohen-Steiner, "Computing Geometry-aware Handle and Tunnel Loops in 3D Models", SIGGRAPH 2008.

---