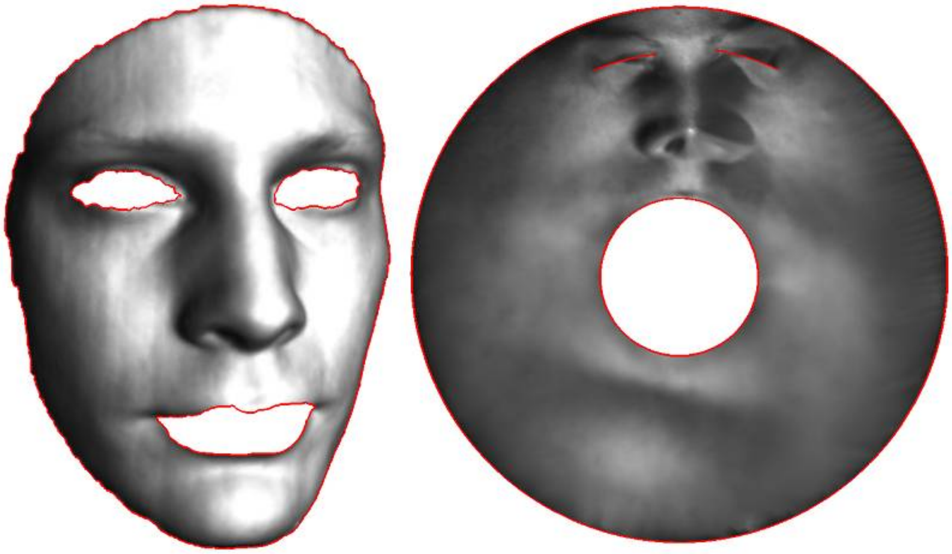
清华笔记：计算共形几何讲义（8）狭缝映射（Slit Map）的存在性

2017-07-15　顾险峰　老顾谈几何



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。欢迎任何有兴趣的朋友，前来旁听指导。】

我们用较为初等的复变函数方法证明一种共形映射的存在性：狭缝映射（slit mapping）。如图所示，给定亏过为0的多连通曲面，存在共形映射将其映射到平面区域，每个边界的联通分支都被映成一条狭缝（slit）。这里所用的数学证明方法比较巧妙，令人赏心悦目。真正的计算和需要应用全纯微分的方法。这篇笔记和罗锋教授讨论过。

Gronwall 面积估计

在复平面$\mathbb{C}$上，复数$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$，平面的Lebesgue测度为$\mu$，面元为

$$dA = dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \frac{i}{2} d(z d\bar{z})$$

引理：假设J是一条Jordan曲线，是某个Jordan区域的边界，解析映射$f : \mathbb{D} \to \Omega$为1-1映射，那么

$$\mu(\Omega) = \frac{i}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\overline{f'(z)} d\bar{z}$$

证明：Jordan区域的面积为

$$\mu(\Omega) = \frac{i}{2} \int_{\Omega} d(\omega d\bar{\omega}) = \frac{i}{2} \int_{\partial\Omega} \omega d\bar{\omega}$$

代入$\omega = f(z)$，我们得到

$$\mu(\Omega) = \frac{i}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\overline{f'(z)} d\bar{z}$$

定理（Gronwall）假设平面区域$\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$包含无穷远点$\infty \in \Omega$，解析映射$f : \Omega \to \bar{\mathbb{C}}$ 为1-1 映射，并且具有Laurent 级数表示，

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, |z| > R$$

令$E = \mathbb{C} - f(|z| > R)$，那么

$$\mu(E) = \pi(R^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 R^{-2n})$$

证明：假设$r > R$，令$E_r = \mathbb{C} - f(\{|z| > R\})$，应用上面引理，

$$\mu(E_r) = \frac{i}{2} \int_{|z|=r} f(z)\overline{f'(z)} d\bar{z}$$

由于$z = re^{i\theta}, dz = -i\bar{z}d\theta$，我们得到

$$\frac{1}{2} \int_{|z|=r} (z + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{-m})(1 - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \overline{b_n}(\bar{z})^{-n-1})\bar{z} d\theta$$

进一步化简，得到

$$\frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (z + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{-m})(\bar{z} - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \overline{b_n}(\bar{z})^{-n}) d\theta$$

直接计算得到：

$$\mu(E_r) = \pi(R^2 - \sum_{i=1}^{\infty} n|b_n|^2 R^{-2n})$$

然后，令$r \to R$，得到结论。证明完毕。

推论1：假设平面区域$\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$包含无穷远点$\infty \in \Omega$，解析映射为1-1映射$f : \Omega \to \bar{\mathbb{C}}$，并且具有Laurent 级数表示，

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, |z| > R$$

那么$|b_1| \leq R^2, Re(b_1) \leq R^2$ 。极值情况，$Re(b_1) = R^2$当且仅当

$$f(z) = z + \frac{R^2}{z} + b_0$$

这等价于$f(|z| \leq R)$的补集是一条长度为$4R$的水平线段。

证明：令$E = \mathbb{C} - f(|z| > R)$，解析映射$f : \Omega \to \bar{\mathbb{C}}$为1-1映射，因此$\mu(E) \geq 0$。由以上定理，我们得到$|b_1| \leq R^2$。极值情况，直接计算可得。证明完毕。

Hilbert定理

定理 （Bieberbach）解析函数（1-1映射）族

$$A = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f(0) = 0, f'(0) = 1, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, |z| < 1\}$$

中所有的函数都有$|b_2| \leq 2$。

证明：给定$f \in A$，构造

$$g(z) = f(\frac{1}{z^2})^{-\frac{1}{2}} : \{|z| > 1\} \to \bar{\mathbb{C}}$$

那么$g(\infty) = \infty$，在单位圆外是解析1-1映射。我们计算$g(z)$的Lauren展开，

$$g(z) = (\frac{1}{z^2} + \frac{b_2}{z^4} + \cdots)^{-\frac{1}{2}} = z(1 + \frac{b_2}{z^2} + \cdots)^{-\frac{1}{2}} = z - \frac{b_2}{2}\frac{1}{z} + \cdots$$

由上面推论，我们得到$|b_2| \leq 2$。证明完毕。

定理 （Koebe - 1/4）解析函数（1-1映射）族

$$A = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f(0) = 0, f'(0) = 1, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, |z| < 1\}$$

如果$f \in A$，那么

$$\{|z| < \frac{1}{4}\} \subset f(D)$$

。证明：设$w \notin f(D)$，考虑

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} \in A$$

考虑$g(z)$在0点的Tayler展开:

$$g(z) = f(z) \cdot \frac{1}{1 - f(z)/w}$$

直接计算表明

$$\begin{aligned}
& (z + b_2 z^{-2} + \cdots)(1 + \tfrac{f(z)}{w} + \tfrac{f^2(z)}{w^2} + \cdots) \\
= \quad & (z + b_2 z^{-2} + \cdots)(1 + \tfrac{z}{w} + \cdots) \\
= \quad & z + (b_2 + \tfrac{1}{w})z^{-2} + \cdots
\end{aligned}$$

由Bieberbach定理，我们得到

$$|b_2+\frac{1}{w}|\leq 2, |b_2|\leq 2$$

由此$|\frac{1}{w}|\leq 4$，所以$w\geq|\frac{1}{4}|$。证明完毕。

推论2：假设解析1-1映射

$$f(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots,|z|>1$$

那么

$$\partial f(|z|>1)=f(|z|=1)\subset\{|w-b_0|\leq 2\}$$

证明：考虑$f(z^{-1})^{-1}$，证明完毕。

定义：复平面上的区域$\Omega\subset\mathbb{C}$被称为是狭缝区域（slit domain），如果其边界$\partial\Omega$ 的每个联通分支或者是一个点，或者是水平闭区间。

引理1：在∞点附近，解析函数

$$\alpha(z)=z+\frac{k_1}{z}+\cdots,\beta(z)=z+\frac{l_1}{z}+\cdots$$

那么

$$\beta\circ\alpha(z)=z+\frac{k_1+l_1}{z}+\cdots$$

定理（Possel-Gronwall）：复平面上的一切区域$\Omega\subset\mathbb{C}$都和平面狭缝区域共形等价。

定理（Hilbert）：复平面上的一切区域$\Omega\subset\mathbb{C}$，其边界$\partial\Omega$具有有限个联通分支，都和平面狭缝区域共形等价。

证明：给定一个平面区域$\Omega\subset\bar{\mathbb{C}}$，我们用Mobius变换，可以假设$\infty\in\Omega$并且$\Omega\subset\{|z|>1\}$，令解析1-1映射族

$$A=\{f:\Omega\to\bar{\mathbb{C}}|f(\infty)=\infty,f(z)=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots,|z|>1\}$$

令$f(z)=z\in A$，所以A是非空集合$A=\emptyset$。由推论2，A是一个正规函数族，（normal family）。由正规函数族的紧性，函数序列的极限也在A中。所以，存在$f\in A$，使得

$$Re_f(a_1)=max\{Re(a_1)_g|\forall g\in A\}$$

我们欲证明$f(\Omega)$ 是一个狭缝区域。

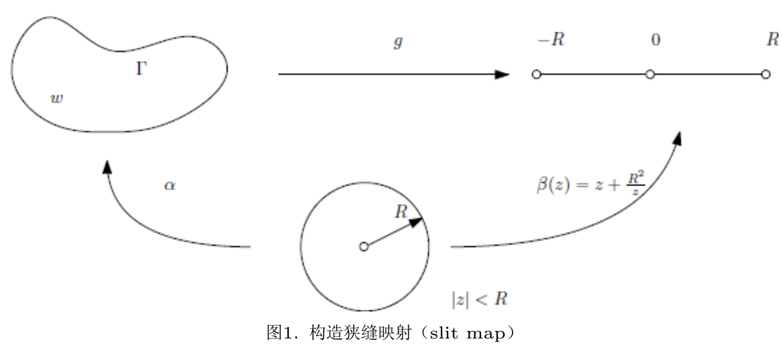


图1. 构造狭缝映射（slit map）

若反之，则存在$\partial f(\Omega)$的一个联通分支Γ，Γ既不是一个点，也不是一条水平线段。我们可以构造一个映射$g:\bar{\mathbb{C}}\setminus\Gamma\to\bar{\mathbb{C}}\setminus[-2R,2R]$，构造方法如下：

如图1所示，我们构造黎曼映照的逆映射：

$$\alpha : \{|z| > R\} \to \bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma, \alpha(z) = z + \frac{\varepsilon}{z} + \cdots$$

和狭缝映射：

$$\beta : \{|z| > R\} \to \bar{\mathbb{C}} \setminus [-2R, 2R], \beta(z) = z + \frac{R^2}{z} + \cdots$$

则复合映射：

$$g : \bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma \to \bar{\mathbb{C}} \setminus [-2R, 2R], g(w) = \beta \circ \alpha^{-1}(w) = w + \frac{\lambda}{w} + \cdots$$

由推论1，比较α, β，它们将圆盘的补集映到平面区域，狭缝映射b_1的实部取到最大，因此

$$R^2 = Re(a_1)_\beta > Re(a_1)_\alpha = Re(\varepsilon)$$

由引理1，$\beta(z) = g \circ \alpha(z)$，我们得到：

$$R^2 = Re(a_1)_\beta = Re(a_1)_{g\circ\alpha} = Re(\varepsilon + \lambda) > Re(\varepsilon)$$

由此，我们得到$Re(\lambda) > 0$。
由此，由引理1，在$\{|z| > 1\}$上，复合映射

$$g \circ f(z) = z + \frac{a_1 + \lambda}{z} + \cdots$$

由$Re(\lambda) > 0$，我们得到$Re(a_1 + \lambda) > Re(a_1)$, 这和$f$的取法矛盾，因此假设错误，结论成立。证明完毕。

后面我们会详细解释狭缝映射（Slit Map）的算法，主要的理论工具是全纯1-形式。