

# 清华笔记：计算共形几何讲义（5）上同调理论

2017-07-04 顾险峰 老顾谈几何



【上课时间：每周二和周四上午9:50-11:20AM；地点：清华大学，近春园西楼三楼报告厅。】

这次课程，我们介绍上同调理论。经过漫长的学习历程，我们终于接近了计算共形几何的核心地带。上同调理论相对抽象费解，但在实际应用中至关重要。【1】给出了本课程的视频链接。

## 上同调思想的工程应用

几乎所有的工程方法，只要涉及到复杂拓扑流形，都会直接或者间接地应用上同调理论。在图形学领域，这样的算法例子俯拾皆是：例如莱昱坤、胡事民教授的图像矢量化算法【2】，矢量场设计【3】，Pinkal、Crane的曲面形变算法【5】，黄劲教授的六面体网格化算法【4】。所有这些算法都是基于上同调的思想。

这些工程算法的基本手法如下：我们希望计算曲面间的映射，或者矢量值函数，直接计算比较困难。我们转而计算函数的导数，或者梯度场，然后通过积分来恢复原函数。矢量场可积具有局部条件和全局条件，局部条件可以用偏微分方程来描述，全局条件即为上同调。

## 上同调群的直观解释

下同调理论的要义是考察流形上所有的封闭曲线（圈），和所有曲面片的边缘（边），所有的边必为圈，反之不对，存在不是边的圈，因此圈和边的差别就是流形的下同调。

下面我们用场论来直观解释上同调的思想。上同调理论的本质是考察流形上所有旋量为零的切向量场（无旋场），和所有函数的梯度场，梯度场必为无旋场，反之不对，存在不是梯度场的无旋场，因此无旋场和梯度场的差别就是流形的上同调。

我们先考察复平面 $\mathbb{C}$ ，任给 $C^1$ 光滑函数 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ，其梯度为

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

梯度的旋度为零，

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ f_x & f_y \end{vmatrix} = f_{yx} - f_{xy} = 0$$

反之，假设 $\omega$ 是平面上的无旋场，那么路径积分只和起点和终点有关，和具体路径的选取无关。假设路径 $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  相互同伦，那么存在平面区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ ，其边缘 $\partial\Omega = \gamma_0 - \gamma_1$ ，因此

$$\int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0 - \gamma_1} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \nabla \times \omega = 0$$

我们固定一个基点 $a \in \mathbb{C}$ ，定义一个函数

$$g(b) = \int_a^b \omega$$

这里积分路径任意选取，那么 $\nabla g = \omega$ 。这意味着平面上，无旋场和梯度场彼此等价。

我们再考察平面去掉原点 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ，矢量场

$$\omega = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

直接计算表明，这个矢量场是无旋场 $\nabla \times \omega = 0$ 。我们选取单位圆周，环绕原点，积分为

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma} d \tan^{-1} \frac{y}{x} = 2\pi$$

因此在这种情形下，无旋场 $\omega$ 不是梯度场。

假设 $\omega_1, \omega_2$ 都是无旋场，它们相差一个梯度场 $\omega_1 - \omega_2 = \nabla f$ ，则我们说它们是上同调等价的。流形上，所有上同调等价类在加法下成群，这个群就是一维上同调群。

## 外微分的概念

下面，我们将上同调群的概念严格化，推广到曲面上，这需要用到流形的概念和嘉当发明的外微分(exterior calculus)。

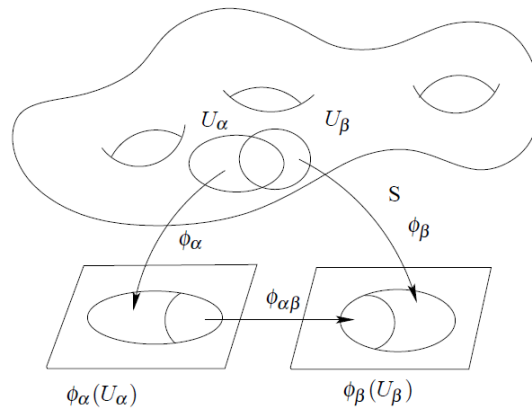


图2. 流形

**流形** 一个流形是一个拓扑空间 $S$ ，被一族开集覆盖 $S \subset \bigcup U_\alpha$ 。对于每一个开集 $U_\alpha$ ，存在拓扑同胚 $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  被称为一个局部坐标卡。如果两个局部坐标卡交集非空， $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ，那么

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

被称为是局部坐标变换。如果所有的局部坐标变换都是光滑的，那么流形被称为是光滑流形。二维流形被称为曲面。

**微分形式** 固定一点 $p \in S$ ，此点处的切空间记为 $T_p S$ ，切向量 $v \in T_p S$ 。选择一个局部坐标系 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，则切向量有局部表示 $v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 。定义在切空间 $T_p S$ 上的线性函数被称为是微分1-形式，所有微分1-形式构成的线性空间被称为是余切空间 $T_p^* S$ ，即切空间的 $\mathbb{R}$ -对偶空间。（线性空间上所有线性函数构成对偶空间，对偶空间和原空间线性同构。）设 $\omega \in T_p^* S$ ,  $v_1, v_2 \in T_p S$ ，则有微分1-形式的线性性：

$$\omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \omega(v_1) + \lambda_2 \omega(v_2)$$

假设切向量和微分1-形式的局部表示为

$$v = \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \omega = \sum \omega_i dx_i$$

我们有

$$\omega(v) = \sum \lambda_i \omega_i.$$

**外积**  $k$ 个微分1-形式的外积是多重线性函数，

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \cdots \wedge \omega_k : T_p S \times T_p S \cdots \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

被称为是微分 $k$ -形式，具体定义为

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \cdots \omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_1(v_2) & \cdots & \omega_1(v_k) \\ \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) & \cdots & \omega_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(v_1) & \omega_k(v_2) & \cdots & \omega_k(v_k) \end{vmatrix}$$

我们看到外积是反对称的，假设 $\sigma$ 是 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的排列，则

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \omega_{\sigma(2)} \cdots \wedge \omega_{\sigma(k)} = (-1)^\sigma \omega_1 \wedge \omega_2 \cdots \wedge \omega_k$$

这里，如果 $\sigma$ 是奇排列 $(-1)^\sigma = -1$ ,  $\sigma$ 是偶排列 $(-1)^\sigma = +1$ 。

**外微分** 外微分算子是场论中梯度，旋度，散度算子的推广。首先我们定义0-形式（函数）的外微分，

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

1-形式的外微分

$$d(\sum \omega_i dx_i) = \sum_{i,j} (\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}) dx^i \wedge dx^j$$

$k$ -形式的外微分

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \cdots \wedge \omega_k) = \sum (-1)^{i-1} \omega_1 \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge d\omega_i \wedge \omega_{i+1} \cdots \wedge \omega_k$$

## 积分

微分形式可以在链上积分。给定k-形式

$$\omega = \sum \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$D$ 是k维链，在局部坐标系下积分转化为经典的勒贝格积分

$$\int_D \omega = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \int_D \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k}$$

可以看出，微分形式的积分和局部坐标系的选取无关。在非局部情况下，我们可以用单位分解来定义积分。

微分形式的积分满足斯托克斯（Stokes）定理，它将外微分算子和边缘算子对偶起来，

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

我们知道“**边的边为空**”，即 $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ ，对偶地我们得到“**梯度的旋度为零**”，即 $d_k \circ d_{k-1} = 0$ 。

## de Rham上同调的概念

我们用 $\Omega_k(S)$ 表示流形上所有k-微分形式构成的空间， $d_k : \Omega_k(S) \rightarrow \Omega_{k+1}(S)$ 表示外微分算子。k-形式 $\omega \in \Omega_k(S)$ 被称为是闭形式，如果 $d_k \omega = 0$ ，即 $\omega \in \text{Ker } d_k$ ；如果存在 $\tau \in \Omega_{k-1}(S)$ ，使得 $\omega = d_{k-1} \tau$ ，那么 $\omega$ 被称为是恰当形式，即 $\omega \in \text{Img } d_{k-1}$ 。由 $d_k \circ d_{k-1} = 0$ ，我们得到恰当形式必为闭形式， $\text{Img } d_{k-1} \subset \text{Ker } d_k$ ，**闭形式和恰当形式之差被称为是流形的k-维de Rham上同调群**，

$$H_{dR}^k(S) := \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Img } d_{k-1}}$$

这里分子是无旋场，分母是梯度场，所有无旋的非梯度场构成上同调群。

### 上下同调群的对偶

上同调群实际上是下同调群的对偶。我们取同调的闭下链 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2 = \partial D$ ，同调的闭微分形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_1 - \omega_2 = df$ ，

$$\int_{\sigma_1 - \sigma_2} \omega_1 = \int_{\partial D} \omega_1 = \int_D d\omega_1 = 0$$

并且

$$\int_{\sigma_1} \omega_1 - \omega_2 = \int_{\sigma_1} df = \int_{\partial \sigma_1} f = 0$$

因此我们可以定义上同调类在下同调类上的积分， $H_k(S), H^k(S)$ 互为对偶空间，它们彼此线性同构 $H_k(S) \cong H^k(S)$ 。

## 单纯上同调

为了计算方便，我们解释单纯上同调。单纯上同调是de Rham上同调的离散逼近。假设我们三角剖分流形 $S$ ，得到单纯复形，仍然记为 $S$ 。由单纯复形，我们得到链复形

$$\dots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \dots$$

一个 $q$ 维上链是一个线性函数 $\omega : C_q \rightarrow \mathbb{R}$ ，所有 $q$ 维上链构成的线性空间被称为是 $q$ 维上链空间，记为 $C^q$ 。 $q$ 维外微分算子 $d_q : C^q \rightarrow C^{q+1}$ ，可以由斯托克斯来直接定义：令 $\sigma \in C_{q+1}$ 为一 $(q+1)$ 维下链， $\omega \in C^q$ 为一 $q$ 维上链，则 $d\omega \in C^{q+1}$ 为一 $(q+1)$ 维上链，

$$d\omega(\sigma) := \omega(\partial\sigma)$$

我们得到上链复形

$$C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \xrightarrow{d_2} C^3 \xrightarrow{d_3} \dots$$

由 $d_{q+1} \circ d_q = 0$ ，我们得到单纯上同调群的定义：

$$H^q(S) := \frac{\text{Ker } d_q}{\text{Img } d_{q-1}}$$

单纯上同调群和de Rham上同调群同构，

$$H^q(S) \cong H_{dR}^q(S)$$

## 上同调群的计算

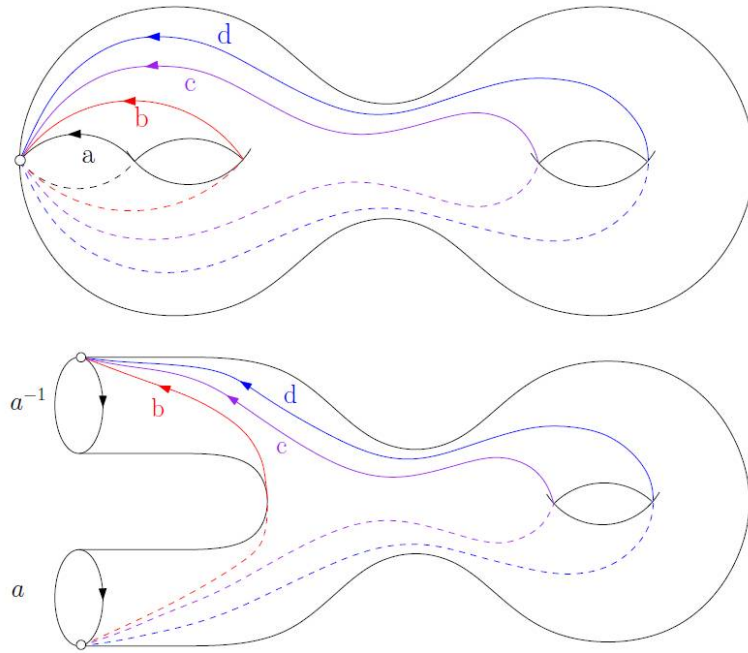


图3. 上同调群基底的算法

给定一个三角剖分的曲面，表示成单纯复形 $M$ 。我们计算其单纯上同调群的基底。算法非常直接了当：

1. 我们先用火烧法计算同伦群（下同调群 $H_1(M)$ ）的基底，记为 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}\}$ ，
2. 对每一个下同调群基底 $a$ ，我们将曲面沿着 $a$ 切开，得到开曲面 $\bar{M}$ 带有两个边缘环路 $a, a^{-1}$ ，如图所示。

3. 构造函数  $f_a : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$f_a(p) = \begin{cases} 1 & p \in a \\ 0 & p \in a^{-1} \\ \text{rand} & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. 1-形式  $\omega_\alpha := df_\alpha$  在边界  $a, a^{-1}$  上恒为0, 所以  $\omega_\alpha$  是定义在原来曲面上的闭1-形式, 并且非恰当, 因为  $\int_b \omega_\alpha = 1$

5.  $H^1(M, \mathbb{R})$  的基底由  $\{\omega_{\gamma_1}, \omega_{\gamma_2}, \dots, \omega_{\gamma_{2g}}\}$  给出。

### 拉回上同调群同态

假设  $M, N$  是流形, 连续映射  $f : M \rightarrow N$  诱导了下同调群间的同态  $f_* : H_*(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_*(N, \mathbb{R})$ , 同时诱导了上同调群间的同态  $f^* : H^*(N, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{R})$ , 注意这里上下同调群之间的同态箭头方向正好相反,  $f_*$  将定义域中的下同调类“推前”为值域的下同调类,  $f^*$  将值域的上同调类“拉回”成定义域的上同调类。假设闭链  $\sigma \in C_k(M)$ , 闭形式  $\omega \in C^k(N)$ ,

$$\int_\sigma f^*(\omega) := \int_{f_*(\sigma)} \omega$$

## 庞加莱-霍普夫定理

给定一个光滑曲面  $S \subset \mathbb{R}^3$ , 曲面的光滑矢量场可以看成是一个光滑映射  $\mathbf{v} : S \subset \mathbb{R}^3$ 。矢量场可以被分解为两部分: 切矢量场和法矢量场。法矢量场的结构非常简单直接, 可以表示成一个标量函数和曲面法向量场的乘积  $\lambda(p)\mathbf{n}(p)$ , 这里  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  是标量函数,  $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  是曲面法向量场。下面, 我们着重讨论切矢量场。我们依然用符号  $\mathbf{v} : S \rightarrow TS$  来表示曲面的切矢量场。

曲面的切矢量场和拓扑存在着基本的关系, 由庞加莱-霍普夫定理来刻画。我们考察切矢量场的零点集合:

$$Z(\mathbf{v}) := \{p \in S | \mathbf{v}(p) = \mathbf{0}\}$$

矢量场经过微小扰动, 我们可以假设零点都是孤立零点。选定一个零点  $p \in Z(v)$ , 围绕零点选定一个拓扑小圆盘  $D(p, \varepsilon)$ , 定义映射从圆盘边缘映到单位圆  $\varphi : \partial D(p, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^1$ :

$$q \mapsto \frac{\mathbf{v}(q)}{|\mathbf{v}(q)|}$$

这个映射诱导了同伦群之间的映射:  $\varphi_* : \pi_1(\partial D) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ ,  $\pi_1(\partial D), \pi_1(\mathbb{S}^1)$  都是整数加群, 因此  $\varphi_*(z) = kz$ 。这里的整数  $k$  被称为是零点的指标:

$$\text{Index}_p(\mathbf{v}) := k$$

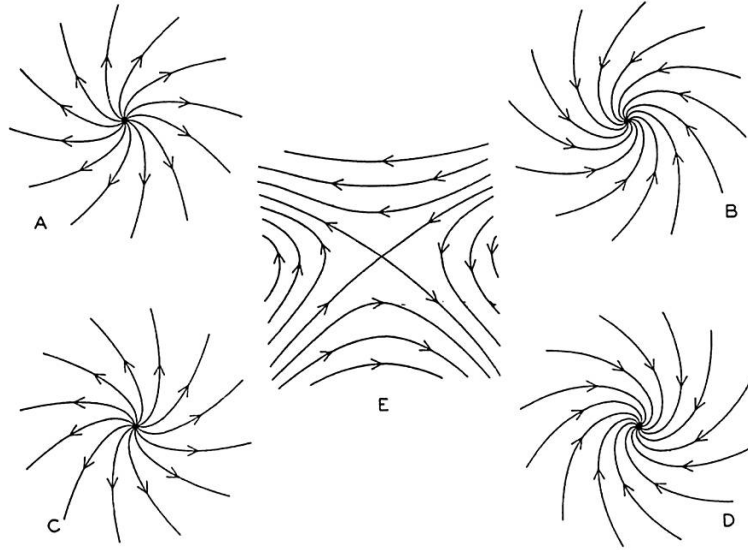


图4. 矢量场中的源 (A,C )和汇 (B,D ), 以及鞍点 (E ), 其指标分别为+1, +1和-1。

如图2所示, 光滑流场中的源 (A,C )和汇 (B,D )的指标为正1, 鞍点 (E )的指标为负1。著名的庞加莱-霍普夫( Poincare-Hopf )定理断言: 假设 $S$ 是一个紧的可定向光滑曲面,  $\mathbf{v}$ 是曲面上的一个光滑向量场,  $\mathbf{v}$ 具有孤立零点。如果 $S$ 有边界, 向量场在边界上指向外法向, 我们有公式

$$\sum_{p \in Z(\mathbf{v})} \text{Index}_p(\mathbf{v}) := \chi(S)$$

这里我们取遍所有孤立零点,  $\chi(S)$ 是曲面的欧拉示性数。

庞加莱-霍普夫定理解释了为什么每个人的头顶都有发旋。这一定理的现代观点如下: 假设曲面 $S$ 封闭, 每一点处的单位切向量构成一个圆周。我们定义曲面的单位切丛为曲面的所有单位切向量构成的流形, 则单位切丛为以圆周为纤维, 以曲面为底空间的纤维丛。单位切丛的一个全局截面是和每根纤维相截的曲面。庞加莱-霍普夫定理断言这种全局截面不存在, 全局截面存在的拓扑障碍是曲面的欧拉示性数。

通俗的讲, 如果一个曲面的欧拉示性数不为零, 那这个曲面上长的头发一定要有漩涡, 顺时针漩涡的数目加上逆时针漩涡的数目减去鞍点的数目正好等于欧拉示性数。

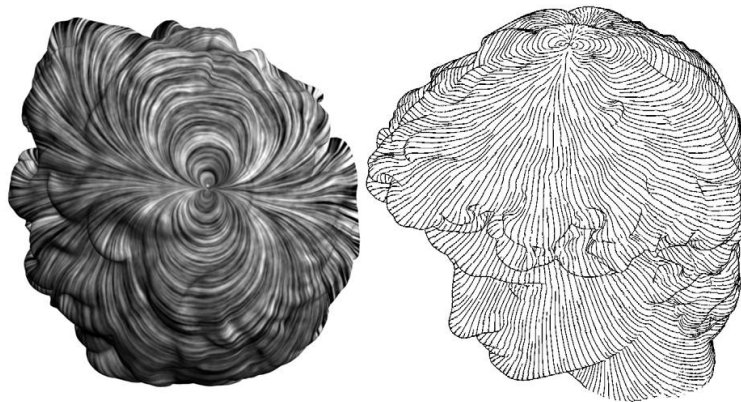


图5. 亏格为0的曲面上只有一个零点的光滑向量场



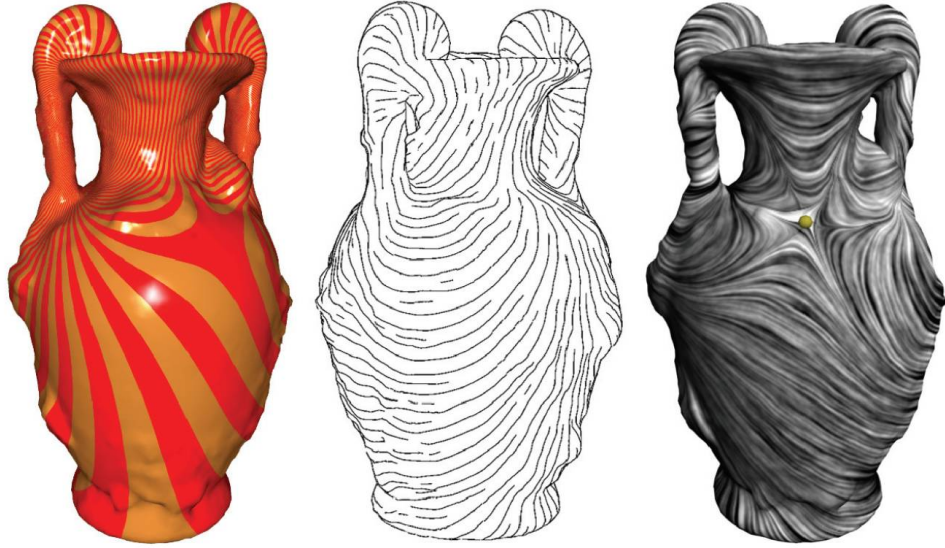


图6. 亏格为2的曲面上只有一个零点的矢量场

证明方法如下, 给定两个光滑切向量场,  $v_1, v_2$  具有不同的孤立零点。我们构造一个三角剖分  $T$ , 使得每个三角形中至多只有一个零点, 这个零点可能来自  $v_1$ , 也可能来自  $v_2$ 。由此, 我们得到两个2-形式,  $\omega_k(f)$  表示三角形  $f \in T$  中零点的指标。

沿着每条边  $\gamma(t)$ , 有两个光滑切向量场  $v_1 \circ \gamma(t)$  和  $v_2 \circ \gamma(t)$ , 假设它们之间的夹角为  $\theta(t)$ , 由此我们可以定义一个1-形式,

$$\omega(\gamma) := \int \dot{\theta}(\tau) d\tau$$

假设在某个三角形  $f \in T$  中,  $v_1$  有一个零点  $p \in f$ ,  $v_2$  没有零点, 那么在三角形的边缘  $\partial f$ ,  $v_1$  相对于  $v_2$  旋转的角度为

$$\omega(\partial f) = d\omega(f)$$

那么, 我们可以看出

$$\text{Index}_p(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{2\pi} d(\omega f)$$

由此, 我们得到

$$\Omega_1 - \Omega_2 = d\omega$$

这意味着  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  上同调, 这一上同调类被称为是曲面的欧拉类。

切向量场的零点总指标

$$\sum_{p \in \mathbf{v}_k} \text{Index}_p(\mathbf{v}_k) = \int_S \Omega_k$$



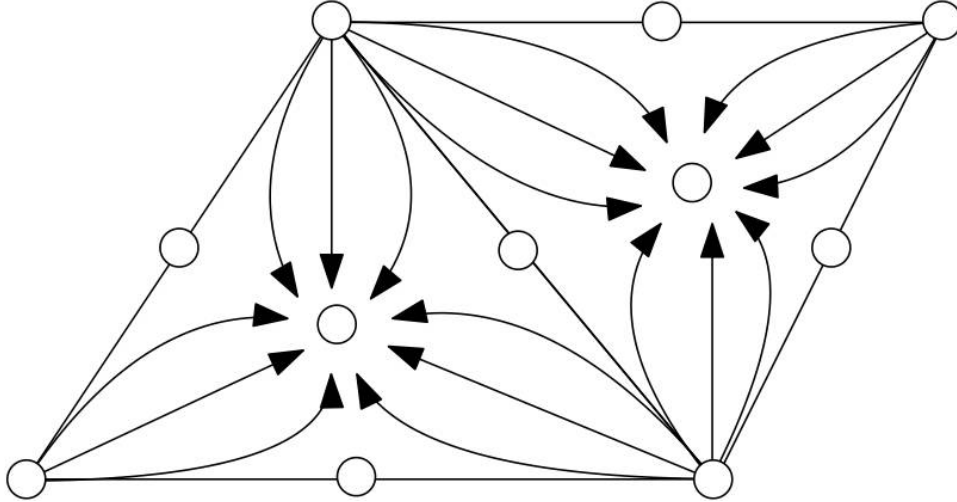


图7. 特殊的矢量场

如图7所示，我们构造一个特殊的矢量场，使得零点总指标易于计算。我们在曲面上任意构造一个三角剖分，然后设计一个流场，使得每个顶点是源（source），每个面的中心是一个汇（sink），每条边上有一个鞍点。

如此，我们得到零点的总指标和为：

$$\sum_{p \in \mathbf{v}_k} \text{Index}_p(\mathbf{v}_k) = |V| + |F| - |E| = \chi(S)$$

【今天讲完课程后匆忙赶往火车站，还是错过了火车。在南京见到了南京大学的曹汛教授。曹教授向我介绍了计算图像、摄像学方面的科研成就，令人惊艳；我向曹教授介绍了计算共形几何学方面的一些方法。曹教授介绍了国内电影特效的情况，如火如荼，蓬勃发展。但是瓶颈在于三维高端人才的紧缺。】

---

References:

- 【1】 [http://www.iqiyi.com/w\\_19trtpkd5x.html](http://www.iqiyi.com/w_19trtpkd5x.html)
  - 【2】 Lai, Yu-Kun, Shi-Min Hu, and Ralph R. Martin. "Automatic and topology-preserving gradient mesh generation for image vectorization." *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. Vol. 28. No. 3. ACM, 2009.
  - 【3】 Lai, Yu-Kun, et al. "Metric-driven rosyfield design and remeshing." *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 16.1 (2010): 95-108.
  - 【4】 Fang, Xianzhong, et al. "All-hex meshing using closed-form induced polycube." *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 35.4(2016): 124.
  - 【5】 Crane, Keenan, Ulrich Pinkall, and Peter Schröder. "Spin transformations of discrete surfaces." *ACM Transactions on Graphics (TOG)* Vol. 30. No. 4. ACM, 2011.
-