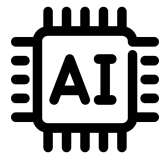


بسم تعالی



# هوش مصنوعی

تمرین ششم

استاد:

مهدی سمیعی

نویسنده :

محمد هومان کشوری

شماره دانشجویی :

99105667

# تمرینات تئوری

## سوال 1.

[منبع](#)

به صورت ساده، جمع تمامی درایه‌های سطر و ستون این ماتریس برابر ۱ است. حال با استفاده از استقرا روی تعداد سطرها ثابت می‌کنیم در زمان بی‌نهایت تمامی این ماتریس‌ها به سمت ماتریس با درایه‌های یکسان میل می‌کنند. حال می‌دانیم شرط پایدار این است که در زمان بی‌نهایت:  $\pi_i = \pi_i * P$  و همچنین در هر نقطه از زمان:

$$\sum_{i=1}^k P_{ji} = 1$$

حال می‌دانیم به دلیل ویژگی این ماتریس:

$$\sum_{i=1}^k P_{ij} = 1, \sum_{i=1}^k \pi_i P_{ij} = \pi_j \Rightarrow 1 - \pi_j = \sum_{i=1}^k (1 - \pi_j) P_{ij}$$
$$\Rightarrow \frac{1 - \pi_j}{k - 1} = \sum_{i=1}^k \frac{1 - \pi_j}{k - 1} P_{ij}$$

پس حال اگر فرض کنیم در نهایت  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$  جواب‌های ما هستند، پس به دلیل این که برای معادله ما فقط یک جواب unique وجود دارد (چرا که تمامی جواب‌ها به هم

converge می‌کنند) پس  $\frac{1 - \pi_1}{k - 1}, \frac{1 - \pi_2}{k - 1}, \dots, \frac{1 - \pi_k}{k - 1}$  نیز یک جواب است پس:

$$\frac{1 - \pi_j}{k - 1} = \pi_j \Rightarrow \pi_j = \frac{1}{k} \quad \checkmark$$

## سوال 2.

برای حل این سوال ابتدا معادلات را می‌نویسیم.

فرض کنید  $m_0$  تا  $m_4$  امیدریاضی رسیدن به اولین terminal state در صورت شروع از استیت مورد نظر باشند.

می‌دانیم که  $m_0, m_4$  هر دو برابر ۰ هستند چرا که وقتی وارد آنها شویم قطعاً به استیت ترمینال وارد شده‌ایم (همواره در آنها می‌مانیم)

$$m_1 = 1 + q * m_2$$

$$m_2 = 1 + p * m_1 + q * m_3$$

$$m_3 = 1 + p * m_2$$

حال معادله وسط را حل می‌کنیم.

$$m_2 = 1 + p * (1 + q * m_2) + q * (1 + p * m_2)$$


$$m_2 = \frac{p+q+1}{1-2pq} \Rightarrow m_2 = \frac{2}{1-2pq}$$

$$m_1 = 1 + q * \frac{p+q+1}{1-2pq} = \frac{1-pq+q^2+q}{1-2pq} = \frac{1+2q-2pq}{1-2pq} = \frac{1+2q(1-p)}{1-2pq} = \frac{1+2q^2}{1-2pq}$$

$$m_3 = 1 + p * \frac{p+q+1}{1-2pq} = \frac{1-pq+p^2+p}{1-2pq} = \frac{1+2p-2pq}{1-2pq} = \frac{1+2p(1-q)}{1-2pq} = \frac{1+2p^2}{1-2pq}$$

در صورتی که  $p = q = \frac{1}{2}$  باشد :

$$m_2 = \frac{2}{1-2*1/2*1/2} = 4, m_1 = 3, m_3 = 3$$

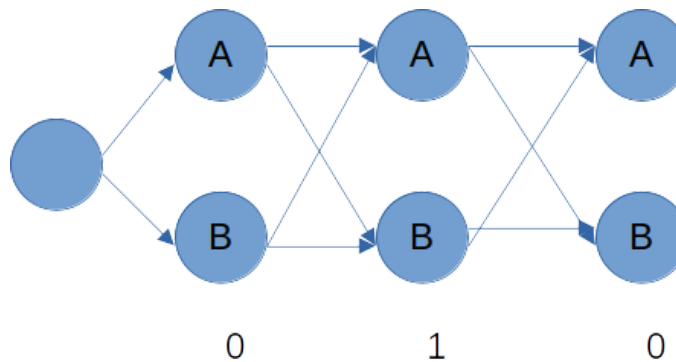
در غیر این صورت کل فضا را افراز می‌کنیم و چون می‌دانیم  $n$  در حالات ما، ۵ مقدار بیشتر نمی‌تواند داشته باشد، پس می‌توانیم ۱ و ۲ و ۳ را در معادله سوال قرار دهیم (بدیهتاً برای ۰ و ۴ درست است) و نشان‌دهیم نهایتاً با معادلات بالا یکی می‌شوند. 

### سوال 3.

(الف)

در هر ترنزیشن  $k$  انتخاب داریم و عملاً  $m$  بار انتخاب را انجام می‌دهیم پس :  $k^m$

(ب)



**First level :**

$$A_0 = 0.99 * 0.8 = 0.792 \Rightarrow \max$$

$$B_0 = 0.01 * 0.1 = 0.001$$

**Second level :**

$$A_1 = 0.792 * 0.99 * 0.2 + 0.001 * 0.01 * 0.2 = 0.157 \Rightarrow \max$$

$$B_1 = 0.792 * 0.01 * 0.9 + 0.001 * 0.99 * 0.9 = 0.008$$

**Third level :**

$$A_2 = 0.157 * 0.99 * 0.8 + 0.008 * 0.01 * 0.8 = 0.124 \Rightarrow \max$$

$$B_2 = 0.008 * 0.01 * 0.1 + 0.157 * 0.99 * 0.1 = 0.001$$

Start  $\rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$  محتمل‌ترین گزینه

(ج)

$$\begin{aligned}
\beta_i(t) &= p\left(v_k(t+1) \dots v_k(T) | s(t) = i\right) \\
&= \sum_{j=0}^M p\left(v_k(t+1) \dots v_k(T), s(t+1) = j | s(t) = i\right) \\
&= \sum_{j=0}^M p\left(v_k(t+2) \dots v_k(T) | v_k(t+1), s(t+1) = j, s(t) = i\right) \\
&\quad p\left(v_k(t+1), s(t+1) = j | s(t) = i\right) \\
&= \sum_{j=0}^M p\left(v_k(t+2) \dots v_k(T) | v_k(t+1), s(t+1) = j, s(t) = i\right) \\
&\quad p\left(v_k(t+1) | s(t+1) = j, s(t) = i\right) p\left(s(t+1) = j | s(t) = i\right) \\
&= \sum_{j=0}^M p\left(v_k(t+2) \dots v_k(T) | s(t+1) = j\right) p\left(v_k(t+1) | s(t+1) = j\right) \\
&\quad p\left(s(t+1) = j | s(t) = i\right) \\
&= \sum_{j=0}^M \beta_j(t+1) b_{jkv(t+1)} a_{ij}
\end{aligned}$$

where  $a_{i2}$  = Transition Probability

$b_{jkv(t+1)}$  = Emission Probability at  $t = t + 1$

$\beta_i(t+1)$  = Backward probability at  $t = t + 1$

$$\beta_2(A) = 0.99 * 0.8 + 0.01 * 0.01 = 0.792$$

$$\beta_2(B) = 0.01 * 0.8 + 0.99 * 0.1 = 0.107$$

$$\beta_1(A) = 0.792 * 0.99 * 0.2 + 0.107 * 0.01 * 0.9 = 0.1578$$

$$\beta_1(B) = 0.792 * 0.01 * 0.2 + 0.107 * 0.99 * 0.9 = 0.0969$$

$$\beta_0(A) = 0.1578 * 0.99 * 0.8 + 0.0969 * 0.01 * 0.1 = 0.125$$

$$\beta_0(B) = 0.1578 * 0.01 * 0.8 + 0.0960 * 0.99 * 0.1 = 0.0107$$

**A ← A ← A ← start: backward to start**

(د)

در هر مرحله ماکسیمم را استفاده می‌کنیم.

**First level :**

$$A_0 = 0.99 * 0.8 = 0.792 \Rightarrow \max$$

$$B_0 = 0.01 * 0.1 = 0.001$$

**Second level :**

$$A_1 = \max(0.792 * 0.99 * 0.2, 0.001 * 0.01 * 0.2) = 0.1568 \Rightarrow \max$$

$$B_1 = \max(0.792 * 0.01 * 0.9, 0.001 * 0.99 * 0.9) = 0.0071$$

**Third level :**

$$A_2 = \max(0.1568 * 0.99 * 0.8, 0.0071 * 0.01 * 0.8) = 0.1241 \Rightarrow \max$$

$$B_2 = \max(0.1568 * 0.01 * 0.1, 0.0071 * 0.99 * 0.1) = 0.001$$

**Start**  $\rightarrow$  **A**  $\rightarrow$  **A**  $\rightarrow$  **A** محتمل‌ترین گزینه

## سوال 4.

(الف)