



- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر وجود ندارد و پاسخ‌هایی که بعد از زمان تعیین شده ارسال شوند، پذیرفته نخواهند شد.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۲۵ نمره) ماتریس انتقال $P = (p_{ij})_{i,j=1}^K$ با فضای حالت محدود $S = 1, \dots, K$ را تصادفی-دوگانه می‌گوییم اگر برای همه‌ی مقادیر $j = 1, \dots, K$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^K P_{ij} = 1$. ثابت کنید حالت ایستای چنین ماتریس انتقالی یک توزیع یکنواخت خواهد داشت.
۲. (۲۵ نمره) ماتریس پنج در پنج جابجایی زیر را در نظر بگیرید که در آن هر المان (i, j) نشانگر احتمال جابجایی از حالت $i \leq 4$ به حالت $j \leq 4$ در هر زمانی است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال اگر حالات نهایی ما ۰ یا ۴ باشند، $f(n)$ را برابر با امید ریاضی رسیدن به یک حالت نهایی با شروع از حالت n بنامیم. ثابت کنید که تابع $f(n)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$f(n) = \begin{cases} n(4-n) & p = \frac{1}{4} \\ \frac{n}{q-p} - \frac{4}{q-p} \frac{1-\frac{q}{p}n}{1-\frac{q}{p}} & o.w \end{cases}$$

۳. (۲۵ نمره) HMM داده شده زیر را در نظر بگیرید.

(آ) اگر k حالت وجود داشته باشد و مجموعاً بتوانیم m بار مشاهده روی تمام حالت‌ها انجام بدهیم، چه تعداد پارامتر برای نشان دادن چنین مدلی نیاز داریم؟

(ب) با استفاده از الگوریتم *forward* و جدول داده‌های داده شده احتمال وقوع توالی وقایع ۰، ۱، ۰ را به دست بیاورید.

(ج) این بار با استفاده از الگوریتم *backward* احتمال وقایع سمت قبل را محاسبه کنید. پاسخ را با پاسخ قسمت قبل مقایسه کرده و آن را توجیح کنید.

(د) با استفاده از الگوریتم *viterbi* محتمل ترین توالی حالات پیش آمده را به دست آورید.

State	Probability
A	۰.۹۹
B	۰.۰۱

جدول ۱: احتمالات حالت اولیه

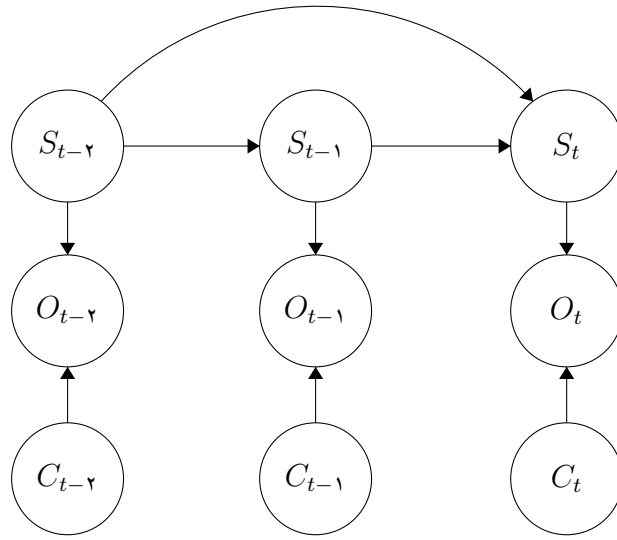
S_1	S_2	$P(S_2 S_1)$
A	A	۰.۹۹
A	B	۰.۰۱
B	A	۰.۰۱
B	B	۰.۹۹

جدول ۲: احتمالات انتقال

S	O	$P(O S)$
A	۰	۰.۸
A	۱	۰.۲
B	۰	۰.۱
B	۱	۰.۹

جدول ۳: احتمالات انتقال

۴. (۲۵ نمره) پک من در حال جستجو برای پیدا کردن یک روح در یک راهرو نامتناهی با خانه‌های با برچسب‌های صحیح می‌باشد. با توجه به هوش بالا پک من و دسترسی او به فناوری‌های جدید او به دنبال پیدا کردن موقعیت دقیق روح در زمان t ، S_t ، می‌باشد. در هر واحد زمان پک من می‌تواند با کمک یکی از سنسورهایی که در دست دارد، یک موقعیت نسبی و نویز دار از موقعیت اصلی روح بدست بیاورد، O_t . از طرفی روح هم به فناوری‌های نوینی دسترسی پیدا کرده و می‌تواند با پوشیدن شنل مخصوص خود در لحظه t ، مقداری نویز اضافه به سنسور پک من اضافه کند. C_t نشان دهنده این هست که آیا روح ما در لحظه t شنل به تن دارد یا نه. پک من با توجه به داده‌های موجود یک جدول احتمال شرطی از نتیجه خروجی سنسور با توجه به اینکه روح شنل به تن دارد یا نه بدست آورده است. علاوه بر این پک من جدول احتمال شرطی مکان روح با توجه به مکانش در ۲ مرحله قبل را هم دارد. مدل مارکوف پایین نشان دهنده *HMM* متناظر این مسئله می‌باشد.



D_1	D_2	$F(D_1, D_2)$
0	0	0.7
0	1	0.2
0	2	0
1	0	0.3
1	1	0.3
2	2	0.5

Table 4: Dynamics Model

به طوری که

$$P(S_t | S_{t-1}, S_{t-2}) = F(D_1, D_2), D_1 = |S_t - S_{t-1}|, D_2 = |S_t - S_{t-2}|$$

C	D	$E(C, D)$
+	0	0.4
+	1	0.2
+	2	0.1
-	0	0.6
-	1	0.2
-	2	0

Table 5: Observation Model

به طوری که

$$P(O_t | S_t, C_t) = E(C_t, D), D = |O_t - S_t|$$

(\bar{A}) فرض کنید که دو ذره ($S_{\text{ع}} = 7, S_{\text{ص}} = 8$) و ($S_{\text{ع}} = 6, S_{\text{ص}} = 6$) را در حال حاضر داریم. وزن هر ذره را با توجه به مشاهدات $O_{\text{ع}} = 5, O_{\text{ص}} = 8, C_{\text{ع}} = +, C_{\text{ص}} = -$.

(ب) فرض کنید که دو ذره $(S_e = 7, S_v = 8)$ و $(S_e = 6, S_v = 6)$ را در حال حاضر داریم. اما یک من توانایی تشخیص اینکه روح شئل پوشیده است یا نه را از دست داده است. با فرض اینکه در هر لحظه به احتمال ۵۰٪ شئل توسط روح پوشیده شده است، وزن ذرات را با توجه به مشاهدات $O_e = 5, O_v = 8$ بدست آورید.

(ج) برای جلوگیری از انباشه شدن ارور ها، فرض کنید که بعد از یک مرحله وزن دادن و نمونه گیری مجدد یکی از ذراتی که بهش می‌رسیم $(S_e = 6, S_v = 7)$ باشد. احتمال تبدیل ذره به $(S_v = 6, S_e = 6)$ و $(S_v = 7, S_e = 8)$ بعد از گذراندن ذره از model dynamic را محاسبه کنید.

سوالات عملی (۱۰۰ نمره)

۱. (۵۰ نمره) برای حل این سوال به نوت‌بوک مربوطه مراجعه شود.
۲. (۵۰ نمره) برای حل این سوال به صفحه کوئرا مربوطه مراجعه شود.