



هوش مصنوعی

بهار ۱۴۰۲

استاد: دکتر سمیعی

گرددآورندگان: سیاوش رحیمی، امیرحسین عابدی

مهلت ارسال: ۲۵ فروردین

آمار و احتمال

تمرین چهارم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ وجود ندارد.
- همکاری و همفکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت همفکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام همفکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۴۰ نمره)

۱. (۳۰ نمره) متغیرهای تصادفی $X, Y \sim \text{Unif}(0, 1)$ در اختیار داریم. تعریف میکنیم $S = X + Y$ مطلوب است:

(آ) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی S .

(ب) تابع چگالی احتمال $X|S$.

(ج) مقدار $\mathbb{E}[X|S = 0.5]$.

(د) تعریف میکنیم $M = \mathbb{E}[X|S]$ که خود تابعی از S میباشد بنابراین خود یک متغیر تصادفی است. تابع چگالی احتمال این متغیر تصادفی را بدست آورید.

۲. (۱۰ نمره) تورنومنتی با 2^n تیم برگزار میشود و هر دفعه ۲ تا از آنها باهم بازی میکنند و یکی از آنها حذف میشود. پیش از برگزاری بازی‌ها از شما میخواهیم که نتایج بازی را حدس بزنید. به ازای هر حدس درست در عمق i از بازی‌ها مقدار 2^{i-1} امتیاز به شما اضافه میشود. واضح است که ما کسیم امتیازی که یک نفر میتواند داشته باشد برابر است با $2^{n-1}(n-1)$. فرض کنید شما میخواهید بدون هیچ دانش پیشینی هرکدام از پیش بینی‌ها را با یک سکه متوازن انجام دهید. سود خود را X مینامیم. مقدار عبارت $\mathbb{E}[X]$ را بدست آورید.

۳. (۱۰ نمره) دو متغیر تصادفی از فضای احتمال $f_{X,Y}$ داریم که این فضا برای ما ناشناخته است. تنها اطلاعاتی که از این ۲ متغیر تصادفی داریم این است که با احتمال ۱ متفاوت هستند و همینطور هر دو نامنفی هستند. فرض کنید یکی از X, Y به شما نشان داده شود (اما نمیدانیم کدام)، که اسم آن را W میگذاریم. همینطور اسم متغیر تصادفی دیگر که هنوز ندیده‌ایم را Z میگذاریم. استراتژی‌ای ارائه دهید که با آن بتوانیم حدس بزنیم مقدار W از Z بیشتر است یا خیر و همینطور احتمال موفقیت این استراتژی برای یک ϵ بزرگتر از صفر برابر باشد با $\frac{1}{4} + \epsilon$.

۴. (۳۰ نمره) فرض کنید از برجی به برج دیگر میخواهیم مقدار θ را ارسال کنیم. برای اینکار n بار مقدار θ را به برج دیگر ارسال میکنیم و همینطور میدانیم که در هر بار ارسال یک نویز گوسی $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$ به آن اضافه میشود و در طرف دیگر خوانده میشود.

$$Y = \theta + x$$

(آ) تخمین‌گر MLE را برای θ بدست آورید.

(ب) consistent بودن یا نبودن تخمین‌گر قسمت قبل را بررسی کنید.

(ج) فرض کنید در برجی که مقدار Y دریافت میشود بدانیم که مقدار θ همواره یکی از مقادیر ۱ و ۱- میباشد که توسط یک متغیر تصادفی $Z \sim \text{Bernoulli}(p)$ تعیین میشود. با پیدا کردن Prior مناسب یک تخمین‌گر برای θ پیدا کنید.

(د) حال فرض کنید داشته باشیم $x_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$. در این حالت میخواهیم تخمین‌گری به فرم $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^N \alpha_i Y_i$ داشته باشیم که بایاس نداشته باشد و همینطور کمترین واریانس ممکن را داشته باشد. مقادیر α_i را پیدا کنید.

۵. (۲۰ نمره) شهردار شهر \mathbb{R} میخواهد یک آتش‌نشانی بسازد. امکان احتمال آتش‌سوزی بر روی خط \mathbb{R} توسط تابع چگالی احتمال f_X مدل شده‌است. حال شهردار به کمک شما احتیاج دارد تا مکان ساختن ساختمان آتش‌نشانی را مشخص کنید. روند این کار به این صورت است که در ابتدا شهردار به شما یک تابع ریسک L_x میدهد و شما باید مقدار c که به ازای آن مقدار $\mathbb{E}[L_x(c)]$ کمینه میشود $L_x(c)$ را به شهردار گزارش کنید. در صورت وجود جواب را به صورت فرم بسته بنویسید.

(آ)

$$L_x(c) = |x - c|$$

(ب)

$$L_x(c) = (x - c)^2$$

(ج)

$$L_x(c) = \begin{cases} k(c - x) & \text{if } c \geq x \\ x - c & \text{O.W} \end{cases}$$

۶. (۲۰ نمره) دو نوع داروی متفاوت بر روی دو جمعیت متفاوت امتحان شده‌اند. پس از گذشت مدتی، وزن پنج نفر حاضر در گروه اول به ترتیب ۳۸، ۳۹، ۴۱، ۴۲، ۶۰ و وزن هفت نفر حاضر در گروه دوم به ترتیب ۳۸، ۴۲، ۵۶، ۶۲، ۶۴، ۶۸، ۶۹ است. فرضیه "این دارو بر وزن افراد موثر است" را بررسی کنید.

۷. (۲۰ نمره) فرض کنید داده‌های $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ به شما داده شده‌است که میخواهیم رابطه X, Y را در آن پیدا کنیم. یک فرض ساده‌کننده که در خیلی از مواقع از آن استفاده میکنیم این است که فرض کنیم رابطه آنها خطی است.

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i$$

که در این رابطه a, b ضرایبی هستند که میخواهیم پیدا کنیم و ϵ_i ها توزیع گوسی دارند.

$$\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

(آ) تخمین‌گر MLE برای a, b بیابید.

(ب) نشان دهید این تخمین‌گرها با جواب Least Squares برابرند.

$$a_{LS}, b_{LS} = \operatorname{argmin}_{a,b} \sum_{i=1}^n (y - h_{a,b}(x))^2, \quad h_{a,b}(x) = ax + b$$