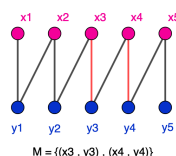




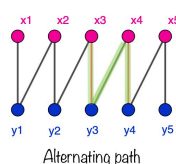
در جلسه گذشته با مسئله تطابق در گراف‌های دوبخشی آشنا شدیم و الگوریتم Karp-Hopcroft را برای حل این مسئله بررسی کردیم.

مسئله تطابق بیشینه

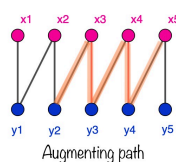
یک تطابق به زیرمجموعه‌ای از یال‌های یک گراف گفته می‌شود که هیچ‌کدام سر مشترک ندارند. برای مثال



شکل ۱: تطابق



شکل ۲: مسیر متناوب



شکل ۳: مسیر افزایشی

در شکل ۱ یال‌های قرمز یک تطابق را تشکیل می‌دهند. هدف ما در این جلسه، این است که به ازای گراف دوبخشی داده شده، تطابق با بیشترین تعداد یال را پیدا کنیم.

اگر M یک تطابق دلخواه در گراف G باشد، بر اساس آن تعاریف زیر را انجام می‌دهیم:

- رأس آزاد، رأسی است که با هیچ یالی از M مجاور نیست.
- مسیر متناوب^a به مسیری در G گفته می‌شود که یال‌های آن یکی در میان متعلق به M باشد. مسیر سبز در شکل ۲ یک مسیر متناوب برای تطابق شکل ۱ است.
- مسیر افزایشی^b، یک مسیر متناوب که رأس ابتدای آن آزاد است. مسیر نارنجی در شکل ۳ یک مسیر افزوده برای تطابق شکل ۱ است. طبیعتاً در صورت وجود مسیر افزایشی می‌توانیم با برعکس کردن یال‌های این مسیر طول تطابق را زیاد کنیم.

^aalternating

^baugmenting

قضیه ۱. برای گراف دوبخشی G تطابق M بیشینه است، اگر و تنها اگر G هیچ مسیر افزایشی نداشته باشد.

بر اساس قضیه ۱، کافی است با $M = \emptyset$ شروع کنیم و تا زمانی که مسیر افزایشی در گراف وجود دارد، با استفاده از آن‌ها طول تطابق را زیاد کنیم. همچنین نشان دادیم که یک مسیر افزوده را می‌توان در زمان $O(m)$ با استفاده از یک DFS ساده پیدا کرد. با فرض این که در هر بخش حداکثر n راس وجود دارد، اندازه تطابق بیشینه هم حداکثر برابر با n است و لذا با حداکثر n بار پیدا کردن مسیر افزایشی تطابق بیشینه پیدا می‌شود. بنابراین زمان الگوریتم برابر با $O(mn)$ خواهد بود. همچنین با استفاده از BFS برای پیدا کردن همزمان چندین مسیر افزایشی کوتاه در هر مرحله، می‌توان نشان داد که الگوریتم بعد از \sqrt{n} مرحله به پایان می‌رسد و بنابراین زمان اجرا $O(\sqrt{n}.m)$ خواهد بود.

پرسش سه خانه و سه فرد داریم که ارزش هر خانه برای هر فرد در جدول نشان داده شده است. هدف تعیین یک قیمت برای هر خانه و تخصیص هر خانه به یک نفر است (یک تطابق بین خانه‌ها و افراد) به طوری که هر فرد خانه خود را به سایر خانه‌ها ترجیح دهد. یک فرد خانه a را به خانه b ترجیح می‌دهد، اگر ارزش خانه a برای او منهای قیمت خانه a بیشتر یا مساوی با ارزش خانه b برای او منهای قیمت خانه b باشد. یک قیمت‌گذاری و یک تخصیص برای ورودی زیر ارائه دهید.

	خانه ۱	خانه ۲	خانه ۳
فرد ۱	۱۲	۷	۳
فرد ۲	۱۰	۹	۵
فرد ۳	۴	۱۰	۱۵

پاسخ‌های خود را می‌توانید تا قبل از شروع کلاس به این لینک ارسال کنید.

