به نام خدا

شبیه‌سازی کامپیوتری

تمرین چهارم

استاد :

دکتر بردیا صفائی

نویسنده :

محمدهومان کشوری

شماره دانشجویی :

۹۹۱۰۵۶۶۷

سوال ۱

برای این کار طبق فرمول گفته شده در اسلایدها عمل می‌کنیم.

ابتدا باید cdf تابع گفته‌شده را بدست آوریم، سپس باید تابع معکوس آنها را برای یافت خواسته سوال استفاده کنیم.

$$CDF = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \int_{-2}^{x} \frac{3t^2}{16}\,dt = \frac{1}{16}(8 + x^3) & -2 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} e^{-2t}\,dt = 1 - \frac{e^{-2x}}{2} & 0 \le x \end{cases}$$

$$x = F^{-1}(R_i) \rightarrow$$

$$F^{-1}(R_i) = \begin{cases} \sqrt[3]{16R - 8} & 0 \le R < \frac{1}{2} \\ \frac{\ln(2(1-R))}{-2} & \frac{1}{2} \le R \le 1 \end{cases}$$

حال مطابق چیزی که دیدیم در صورتی که اعداد تصافی R را در فرمول مناسب جای‌گذاری کنیم، مطابق توزیع گفته شده variable random خواهیم تولید کرد.

سوال ۲

۱.
برای این کار ابتدا تابع توزیع احتمال را بدست می‌آوریم.

$$P[X] = \begin{cases} \frac{50}{110} & X = apple \\ \frac{30}{110} & X = banana \\ \frac{20}{110} & X = orange \\ \frac{10}{110} & X = pineapple \end{cases}$$

حال تابع توزیع تجمعی را بدست می‌آوریم.

$$CDF = F(x) = \begin{cases} \frac{50}{110} & X = apple \\ \frac{80}{110} & X = banana \\ \frac{100}{110} & X = orange \\ \frac{110}{110} & X = pineapple \end{cases}$$

۲.
حال بررسی می‌کنیم که هر کدام از اعداد در کدام بازه قرار می‌گیرند.

$$\begin{cases} 0 < 0.3, 0.45 < \frac{50}{110} = 0.454 \rightarrow apple \\ 0.454 < 0.6 < \frac{80}{110} = 0.727 \rightarrow banana \\ 0.727 < 0.8 < \frac{100}{110} = 0.909 \rightarrow orange \\ 0.909 < 0.95 < \frac{110}{110} = 1.000 \rightarrow pineapple \end{cases}$$

سوال ۳
می‌دانیم که توزیع bionomial negative عملا جمع چندین متغیر تصادفی با توزیع هندسی است.
مثلا فرض کنید $X \sim NB(r,p)$ که یعنی X می‌گوید چه تعداد اقدام ناموفق تا قبل از دیدن r موفقیت داشته‌ایم که در هر دور احتمال موفقیت نیز p است.

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r, Y \sim Geometric(p)$$

$$CDF(Y) = F(Y = y) = 1 - (1-p)^y = R \xrightarrow{\text{Inverse Transform}} y_i = \log_{1-p}(1 - R_i)$$

$$X = \sum_{i=1}^{r} y_i = \sum_{i=1}^{r} \log_{1-p}(1 - R_i) = \sum_{i=1}^{r} \log_{1-p}(R_i') = \log_{1-p}(\Pi_{i=1}^{r} R_i') \leq 1 < \log_{1-p}(\Pi_{i=1}^{r+1} R_i')$$

$$\to 1 - p < \Pi_{i=1}^{r+1} R_i'$$

می‌توان از روش دیگر استفاده کرد که با استفاده از توزیع نمایی یک عدد مثل Y تولید بکنیم و در مرحله بعدی این عدد را در توزیع bionomial negative قرار دهیم حال سپس در هر مرحله توزیع NB را بر geometric تقسیم کرده و اگر عدد تولید شده رندوم ما از این مقدار کوچکتر بود آنرا قبول می‌کنیم و در غیر این صورت دوباره مراحل را از اول با اعداد جدید انجام می‌دهیم.

سوال ۴

طبق تست کولموگروف می‌دانیم که در ابتدا باید اعداد را به صورت سعودی سورت کنیم.

0.02, 0.09, 0.15, 0.25, 0.31, 0.43, 0.6, 0.8, 0.85, 0.95

Kolmogorov-Smirnov table										
R_i	0.02	0.09	0.15	0.25	0.31	0.43	0.6	0.8	0.85	0.95
$\frac{i}{N}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\frac{i}{N} - R_i$	0.08	0.11	0.15	0.15	0.19	0.17	0.1	0	0.05	0.05
$R_i - \frac{i-1}{N}$	0.02	-	-	-	-	-	0	0.1	0.05	0.05

Max Row 3 : $D^+ = 0.19$

Max Row 4 : $D^- = 0.1$

D = Max(0.19,0.1) = 0.19

Degree of Freedom = N = 10 $\xrightarrow{\alpha=0.05} D = 0.19 < D_\alpha = 0.432 \rightarrow$ **H0 not rejected**

سوال ۵

.۱

می‌دانیم در توزیع پوآسون برای تخمین پارامتر می‌توانیم از میانگین وزن‌دار استفاده کنیم.

$\alpha = \bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{c} f_j m_j^2}{n}$

$\alpha = \frac{30*0+45*1+15*2+7*3+2*4+5*1}{100} = 1.09$

$E_i = np(x) = n\frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!}$

Test table			
x_i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
0	30	33.62	0.389
1	45	36.64	1.9
2	15	19.97	1.236
3	7	7.25	
4	2	1.97	0.012
5	1	0.43	
	100	99.88	3.537

Degree of freedom $= k - s - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$

$\chi_0^2 = 3.537 < \chi_{0.05,2}^2 = 5.99 \rightarrow$ Hypothesis not rejected.

.۲

در این قسمت نیز با توجه به پارامتر داده‌شده جدول مورد نظر را کامل می‌کنیم.

Test table			
x_i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
0	30	22.31	2.648
1	45	33.46	3.97
2	15	25.10	4.06
3	7	12.55	2.45
4	2	4.70	1.582
5	1	1.41	
	100	99.53	14.71

Degree of freedom $= k - s - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$

$\chi_0^2 = 14.71 > \chi_{0.05,3}^2 = 7.81 \rightarrow$ Hypothesis rejected.

سوال ۶

۱. Weibull : این توزیع برای محاسبه میزان اتکاپذیری و طول عمر داده به کار می‌رود، همنچین در صنعت برق نیز برای نشان دادن ولتاژ اضافه ورودی به یک سیستم به کار می‌رود، در گرفتن اطلاعات نیز این توزیع برای بدست آوردن زمان ماندن در یک سایت به کار می‌رود.

۲. Lognormal : این توزیع برای بدست آوردن میزان درآمد جهانی به کار می‌رود، همچنین کاربرد دیگر آن بدست آوردن زمان بین گرفتن بیماری تا نشان دادن علائم آن است و کاربرد دیگر آن نیز باری بدست آوردن تعداد حرکات در بازی شطرنج است.