

به نام خدا



درس نظریه بازی‌ها

تمرین تئوری یک - بخش دوم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۰۲-۰۱

استاد:

مرضیه نیلی پور

مهلت ارسال:

۱۲ اسفند

مسئول تمرین تئوری یک - بخش دوم:

علی مرادی

طراحان تمرین تئوری یک - بخش دوم:

زهرا حیدری‌فر، علی انصاری‌فر، علی مرادی، مهدی قائم‌پناه

ویراستار فنی تمرین تئوری یک - بخش دوم:

علی انصاری‌فر

فهرست

نکات قابل توجه

۲

سوالات

۳

۳

۴

۵

۶

سوال ۱. پیدا کردن تعادل های ترکیبی

سوال ۲. بازی روی گراف

سوال ۳. انتخاب اعداد

سوال ۴. استراتژی های مغلوب



نکات قابل توجه

- مشورت و همفکری به طور محدود مجاز است ولی باید راه‌حل برای خودتان باشد.
- شما در طول ترم ۱۲ روز تاخیر مجاز برای کل تمرین‌های تئوری و عملی خواهید داشت. برای هر تمرین از حداکثر ۳ روز تاخیر مجاز می‌توان استفاده کرد. در انتهای ترم اگر از تاخیرهای مجاز شما باقی مانده بود، نمره‌ای برای آن در نظر گرفته نمی‌شود.
- برای هر تمرین امکان آپلود Quera تا ۶ روز بعد ددلاین وجود خواهد داشت. به ازای هر روز تاخیر ۱۵ درصد از نمره کسب شده توسط شما به صورت ساعتی کم می‌شود. (تاخیرهای مجاز در انتهای ترم و به شکلی که بیشترین نمره را کسب کنید اعمال می‌شود)
- نوشتن پاسخ تمرین‌های تئوری به صورت لاتک ۱۵ درصد نمره امتیازی آن تمرین را دارد.



سوالات

سوال ۱. پیدا کردن تعادل‌های ترکیبی

الف) تعادل ترکیبی بازی سه نفره‌ی زیر را پیدا کنید که در آن هر بازیکن هر حرکت را با احتمال ناصفر بازی کند. جدول امتیازات سمت چپ مربوط به حالتی است که بازیکن سوم حرکت X را انجام دهد و جدول سمت راست مربوط به حالتی است که بازیکن سوم حرکت Y را بازی کند. امتیازات در هر خانه‌ی جدول به ترتیب از چپ به راست متعلق به نفر اول، دوم و سوم هستند.

	L	R		L	R
T	3, 3, -2	1, -4, 2	T	0, 0, 0	-4, 1, 2
B	-4, 1, 2	0, 0, 0	B	1, -4, 2	2, 2, -2

بازیکن ۳ حرکت Y را بازی کند بازیکن ۳ حرکت X را بازی کند

ب) در بازی زیر تمام تعادل‌های ترکیبی را پیدا کنید.

	A	B	C
X	-3, -3	-1, 0	4, 0
Y	0, 0	2, 2	3, 1
Z	0, 0	2, 4	3, 3



سوال ۲. بازی روی گراف

گراف جهت‌دار و n راسی G را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر جفت راس (i, j) یالی از i به j با وزن نامنفی w_{ij} وجود دارد. همچنین W_i را به ازای هر راس i به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$$

دو نفر روی این گراف یک بازی جمع صفر انجام می‌دهند، به این صورت که هر کدام یک راس انتخاب می‌کنند. راس نفر اول را u و راس نفر دوم را v می‌نامیم. در صورتی که $u \neq v$ نفر اول امتیاز w_{uv} را کسب می‌کند و در غیر این صورت امتیاز $W_u - w_{uu}$ را از دست می‌دهد، و امتیاز نفر دوم نیز در هر حالت قرینه‌ی امتیاز نفر اول است. بنابراین اگر A ماتریس امتیازهای نفر اول باشد، درایه‌های آن به صورت زیر هستند:

$$a_{ij} = w_{ij} - \mathbb{1}_{\{i=j\}} W_i$$

الف) نشان دهید که ارزش این بازی برابر صفر است (ارزش بازی دو نفره‌ی جمع صفر برابر امتیازی است که استراتژی مکس‌مین برای نفر اول تضمین می‌کند).

ب) نشان دهید بردار x وجود دارد که $x^T A = 0$ به طوری که درایه‌های x نامنفی هستند و مجموع درایه‌های آن برابر یک است.



سوال ۳. انتخاب اعداد

حمید و مجید هر کدام یک عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, k\}$ انتخاب می‌کنند. در صورتی که اعداد انتخابی توسط آن‌ها با هم برابر باشند، مجید به حمید یک ریال می‌دهد، و در غیر این صورت هیچ‌کدام پولی به دست نمی‌آورد یا از دست نمی‌دهد. یک تعادل در استراتژی‌های ترکیبی برای این بازی پیدا کنید و نشان دهید که پاسخ شما تنها تعادل بازی است.



سوال ۴. استراتژی‌های مغلوب

دو نفر از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ عدد انتخاب می‌کنند. اگر اعداد انتخابی دو بازیکن متفاوت باشند، هر بازیکن به اندازه‌ی عددی که انتخاب کرده است امتیاز می‌گیرد و در غیر این صورت هیچ‌کدام امتیازی نمی‌گیرند.

الف) جدول بازی را برای $n = 5$ بکشید، و یک تعادل متقارن برای آن پیدا کنید.
ب) نشان دهید که اعداد 1 تا C در هیچ‌کدام از تعادل‌ها با احتمال ناصفر بازی نمی‌شوند.

$$C = \left\lfloor n - \frac{\sqrt{8n+1} - 1}{2} \right\rfloor$$