ENSA Ecole Nationale des Sciences Appliquées BERRECHID

CONTRÔLE N°1 -ANALYSE 1 (1H30MIN)

Exercice 1 :(4 points)

1. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$, puis l'appliquer pour montrer que :

$$\inf\left\{1+\frac{1}{4n^2}, n\in\mathbb{N}^\star\right\}=1$$

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ ona :

$$0\leq E(2x)-2E(x)\leq 1$$

$E(x)$ la partie entier de x

Exercice 2 :(4 points)

Étudier le maximum, minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble B :

$$B=\left\{\frac{1}{n+1}+(-1)^n, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Exercice 3 :(7 points)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0=U_1=1, \\ U_{n+2}=U_{n+1}+U_n. \end{cases}$$

On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n>0$

1. Montrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .
2. Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n\geq n$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^\star$ on a $U_n^2-U_{n-1}U_{n+1}=(-1)^n$.
5. On considère les suites (V_n) et (W_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$ $V_n=\frac{U_{2n+1}}{U_{2n}}$ et $W_n=\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$
   (a) Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}: W_n=1+\frac{1}{V_n}$.
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}: V_n\leq W_n$.
   (c) Montrer que les deux suites (W_n) et (V_n) sont adjacentes puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

Exercice 4 :(5 points)

1. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

   (a) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^\star$, $\sqrt{k-1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq\sqrt{k+1}$.
   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$ $U_n\leq\sqrt{n-1}+\sqrt{n}$.
2. On considère la suite numérique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $V_n=\frac{U_n}{\sqrt{n}}$
   (a) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et convergente.