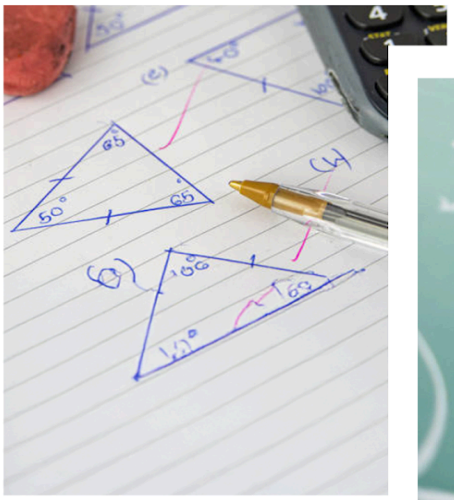
testbook PASS PRO MAX

संख्यात्मक अभियोग्यता

संख्या पद्धति

STUDY NOTES

लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) और महत्तम समापवर्तक (HCF)



लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) और महत्तम समापवर्तक (HCF)

लघुत्तम समापवर्त्य (LCM):

दो या दो से अधिक पूर्णांकों का **लघुत्तम समापवर्त्य** (LCM) वह सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक होता है जो प्रत्येक संख्या का गुणज होता है। दूसरे शब्दों में, यह सबसे छोटी संख्या है जिसे दी गई प्रत्येक संख्या से पूर्णतः विभाजित किया जा सकता है।

उभयनिष्ठ गुणज:

1. दो संख्याओं के लिए, उभयनिष्ठ गुणज वे संख्याएँ होती हैं जो दोनों संख्याओं के गुणज होते हैं। उदाहरण के लिए, 4 और 6 के उभयनिष्ठ गुणज 12, 24, 36, आदि हैं।
2. LCM इन उभयनिष्ठ गुणजों में से सबसे छोटा होता है।

LCM के गुणधर्म

3. **अशून्य आवश्यकता**: किसी भी संख्याओं के समुच्चय का LCM हमेशा एक अशून्य पूर्णांक होता है।
4. **किसी संख्या और 1 का LCM**: किसी भी संख्या और 1 का LCM वह संख्या स्वयं होती है (जैसे, 5 और 1 का LCM 5 है)।
5. **क्रमविनिमेय गुणधर्म**: दो संख्याओं का LCM संख्याओं के क्रम पर निर्भर नहीं करता है। इस प्रकार, LCM(a, b) = LCM(b, a)।

6. **साहचर्य गुणधर्म**: तीन संख्याओं का LCM LCM(a, LCM(b, c)) के रूप में ज्ञात किया जा सकता है, और यह गुणधर्म हमें पुनरावृति द्वारा कई संख्याओं का LCM ज्ञात करने की अनुमति देता है।

LCM ज्ञात करना

दो या दो से अधिक संख्याओं का LCM ज्ञात करने के कई तरीके हैं:

1. गुणजों की सूची विधि:

यह एक सरल लेकिन कम कुशल विधि है, खासकर बड़ी संख्याओं के लिए। इसमें प्रत्येक संख्या के गुणजों की सूची बनाना शामिल है जब तक कि एक उभयनिष्ठ गुणज नहीं मिल जाता।

उदाहरण 1: 4 और 6 का LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

4 के गुणज: 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...

6 के गुणज: 6, 12, 18, 24, 30, ...

4 और 6 के उभयनिष्ठ गुणज: 12, 24, ...

LCM = 12 (सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज)।

---

2. अभाज्य गुणनखंड विधि

इस विधि में, प्रत्येक संख्या को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, और LCM गुणनखंड में मौजूद प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की उच्चतम घात लेकर प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 2: 8 और 12 का LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

8 का अभाज्य गुणनखंड: $8 = 2^3$

12 का अभाज्य गुणनखंड: $12 = 2^2 \times 3^1$

LCM के लिए, प्रत्येक अभाज्य की उच्चतम घात लीजिए:

2 की घात: 2^3

3 की घात: 3^1

LCM = $2^3 * 3 = 8 * 3 = 24$

उदाहरण 3: 2, 3 और 8 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) क्या है?

हल:

गणना:

प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

2 = 2

3 = 3

8 = 2 × 2 × 2 = 23

प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की उच्चतम घात ज्ञात कीजिए: 2^3 और 3^1

LCM ज्ञात करने के लिए उच्चतम घातों को गुणा कीजिए:

LCM = 23 × 31 = 8 × 3 = 24.

इसलिए, 2, 3 और 8 का LCM 24 है।

---

3. भाग विधि

कई संख्याओं का LCM ज्ञात करने के लिए भाग विधि कुशल है। इस विधि में संख्याओं को उनके उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों से तब तक विभाजित करना शामिल है जब तक कि केवल 1 ही न बचे।

सभी निर्दिष्ट संख्याओं को एक रेखा पर अल्पविराम से अलग करके लिखना शुरू करें। फिर, इन संख्याओं को सबसे कम उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों, जैसे 2, 3, 5, 7 और 11..., से विभाजित करें, और भागफलों को संख्याओं के ठीक नीचे, अल्पविराम से अलग करके रखें।

यदि कोई संख्या किसी अभाज्य गुणनखंड से विभाज्य नहीं है, तो उसे उसके नीचे स्वयं लिखें। उच्च अभाज्य गुणनखंडों से विभाजित करना जारी रखें जब तक कि अंतिम पंक्ति पर भागफल 1 न हो जाए।

विभिन्न चरणों में संख्याओं को विभाजित करने के लिए उपयोग किए गए सभी अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल ज्ञात कीजिए। यह गुणनफल प्रदान की गई संख्याओं का LCM होगा।

उदाहरण 4: 6, 8 और 12 का LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

संख्याओं को एक पंक्ति में लिखें: 6, 8, 12

सबसे छोटे अभाज्य से विभाजित करें जो कम से कम एक संख्या को विभाजित कर सकता है (2 से शुरू करके):

2: 6 ÷ 2 = 3, 8 ÷ 2 = 4, 12 ÷ 2 = 6 ⇒ नई पंक्ति: 3, 4, 6

2: 4 ÷ 2 = 2, 6 ÷ 2 = 3 ⇒ नई पंक्ति: 3, 2, 3

3: 3 ÷ 3 = 1, 3 ÷ 3 = 1, ⇒ नई पंक्ति: 1, 2, 1

2: 2 ÷ 2 = 1⇒ नई पंक्ति: 1, 1, 1

सभी भाजकों को गुणा करें: 2 × 2 × 3 × 2 = 24

LCM = 24

उदाहरण 5: 24, 36 और 48 का LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

हम संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों से तब तक विभाजित करते हैं जब तक कि सभी संख्याएँ 1 न हो जाएँ।

2	24	36	48
2	12	18	24
2	6	9	12
2	3	9	6
3	3	9	3
3	1	3	1
	1	1	1

अब, सभी भाजकों को गुणा करते हैं:

LCM = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 = 144

इस प्रकार, 24, 36 और 48 का अभीष्ट LCM, 144 है।

महत्तम समापवर्तक (HCF):

दो या दो से अधिक संख्याओं का **महत्तम समापवर्तक (HCF)** वह सबसे बड़ा धनात्मक पूर्णांक होता है जो प्रत्येक संख्या को बिना शेषफल छोड़े विभाजित करता है। दूसरे शब्दों में, यह सबसे बड़ी संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं का गुणनखंड है।

HCF के गुणधर्म

1. **उभयनिष्ठ गुणनखंड**:

- किसी संख्या का गुणनखंड कोई भी पूर्णांक होता है जो उसे पूर्णतः विभाजित करता है, बिना कोई शेषफल छोड़े। उदाहरण के लिए, 12 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6 और 12 हैं।
- दो या दो से अधिक संख्याओं के लिए, उभयनिष्ठ गुणनखंड वे गुणनखंड होते हैं जो प्रत्येक संख्या के गुणनखंडों की सूची में दिखाई देते हैं। HCF इन उभयनिष्ठ गुणनखंडों में से सबसे बड़ा होता है।

2. **HCF के गुणधर्म:**
   - **क्रमविनिमेय गुणधर्म:** HCF संख्याओं के क्रम से स्वतंत्र है, इसलिए HCF(a, b) = HCF(b, a)।
   - **साहचर्य गुणधर्म:** तीन संख्याओं का HCF HCF(a, HCF(b, c)) के रूप में ज्ञात किया जा सकता है, और यह पुनरावृति द्वारा कई संख्याओं का HCF ज्ञात करने की अनुमति देता है।
   - **विभाज्यता:** दो संख्याओं का HCF प्रत्येक संख्या को विभाजित करता है।

HCF ज्ञात करना

दो या दो से अधिक संख्याओं का HCF ज्ञात करने के कई तरीके हैं:

1. गुणनखंडों की सूची विधि

यह सबसे सरल विधि है लेकिन केवल छोटी संख्याओं के लिए प्रभावी है। इसमें प्रत्येक संख्या के सभी गुणनखंडों की सूची बनाना और सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड ज्ञात करना शामिल है।

उदाहरण 6: 18 और 24 का HCF ज्ञात कीजिए।

हल:

18 के गुणनखंड: 1, 2, 3, 6, 9, 18

24 के गुणनखंड: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

18 और 24 के उभयनिष्ठ गुणनखंड: 1, 2, 3, 6

HCF = 6 (सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड)।

---

2. अभाज्य गुणनखंड विधि

इस विधि में, प्रत्येक संख्या को उसके अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, और HCF प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे कम घात लेकर प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 7: 36 और 60 का HCF ज्ञात कीजिए।

हल:

36 का अभाज्य गुणनखंड: $36 = 2^2 \times 3^2$

60 का अभाज्य गुणनखंड: $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5$

HCF के लिए, प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य की सबसे कम घात लीजिए:

2 की घात: 2^2

3 की घात: 3^1

HCF = $2^2 * 3 = 4 * 3 = 12$

---

3. भाग विधि (यूक्लिडियन एल्गोरिथम):

यूक्लिडियन एल्गोरिथम दो संख्याओं, विशेष रूप से बड़ी संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए एक तेज और कुशल विधि है। इसमें बड़ी संख्या को छोटी संख्या से विभाजित करना और फिर शेषफल के साथ प्रक्रिया को तब तक दोहराना शामिल है जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए। अंतिम गैर-शून्य शेषफल HCF है।

चरण:

1. बड़ी संख्या को छोटी संख्या से विभाजित करें और शेषफल नोट करें।
2. बड़ी संख्या को छोटी संख्या से और छोटी संख्या को शेषफल से बदलें।
3. प्रक्रिया को तब तक दोहराएँ जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए। अंतिम गैर-शून्य शेषफल HCF है।

उदाहरण 8: 48 और 18 का HCF ज्ञात कीजिए।

हल:

चरण 1: 48 ÷ 18 = 2 शेषफल 12

चरण 2: 18 ÷ 12 = 1 शेषफल 6

चरण 3: 12 ÷ 6 = 2 शेषफल 0

HCF = 6

दो से अधिक संख्याओं का HCF ज्ञात करना:

जब दो से अधिक संख्याएँ होती हैं, तो HCF को एक समय में दो संख्याओं का HCF ज्ञात करके और फिर परिणाम का उपयोग अगली संख्या के साथ HCF ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है।

उदाहरण 9: 18, 24 और 30 का HCF ज्ञात कीजिए।

हल:

चरण 1: 18 और 24 का HCF ज्ञात कीजिए (HCF = 6)

चरण 2: 6 और 30 का HCF ज्ञात कीजिए (HCF = 6)

18, 24 और 30 का HCF = 6

HCF और LCM के बीच संबंध:

प्राकृतिक संख्याओं के महत्तम समापवर्तक (HCF) और लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) के बीच के संबंध का उपयोग समस्याओं को कुशलतापूर्वक हल करने के लिए किया जा सकता है। एक प्रमुख गुण यह है कि किन्हीं दो संख्याओं के LCM और HCF का गुणनफल संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

निम्नलिखित सूत्र में HCF और LCM दोनों शामिल हैं:

दो संख्याओं का गुणनफल = (दो संख्याओं का HCF) x (दो संख्याओं का LCM)

यदि A और B दो पूर्णांक हैं, तो:

$$A \times B = H.C.F.(A, B) \times L.C.M.(A, B)$$

उदाहरण 10: 40 और 60 संख्याओं के लिए उपरोक्त सूत्र को सत्यापित करें:

हल:

HCF(40, 60) = 20

LCM(40, 60) = 120

दो संख्याओं का गुणनफल = 40 × 60 = 2400

सत्यापन: LCM × HCF = 120 × 20 = 2400

उदाहरण 11: किन्हीं दो पूर्ण धनात्मक संख्याओं का HCF और LCM क्रमशः 35 और 525 है। यदि एक पूर्ण संख्या 105 है, तो दूसरी पूर्ण संख्या क्या होगी?

हल:

दिया गया है:

HCF = 35

LCM = 525

एक पूर्ण संख्या = 105

प्रयुक्त सूत्र:

HCF × LCM = पहली संख्या × दूसरी संख्या

गणना:

35 × 525 = 105 × दूसरी संख्या

⇒ दूसरी संख्या = (35 × 525)/105

⇒ दूसरी संख्या = 175

∴ दूसरी पूर्ण संख्या 175 है।

उदाहरण 12: यदि दो संख्याओं के LCM और HCF का योग 396 है और LCM और HCF का अंतर 324 है और पहली संख्या 72 है तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया गया है:

LCM + HCF = 396, LCM - HCF = 324

पहली संख्या = 72

प्रयुक्त सूत्र:

LCM × HCF = पहली संख्या × दूसरी संख्या

गणना:

LCM + HCF = 396 ----(1)

LCM - HCF = 324 ----(2)

(1) और (2) को हल करके

⇒ LCM = 360, HCF = 36

LCM × HCF = पहली संख्या × दूसरी संख्या

⇒ 360 × 36 = 72 × दूसरी संख्या

⇒ दूसरी संख्या = 180

∴ दूसरी संख्या 180 है।

उदाहरण 13: दो 3-अंकीय संख्याओं का योग 684 है और उनका HCF 57 है। यदि x संख्याओं का LCM है, तो x के अंकों का योग है:

हल:

मान लीजिए दो संख्याएँ 57a और 57b हैं।

प्रश्न के अनुसार

$57 \times (a + b) = 684$

$(a + b) = 684/57 = 12$

$(a + b) = 12$

इसलिए, a और b के मानों का आवश्यक संभव युग्म जो एक-दूसरे के अभाज्य हैं, (1, 11) और (5, 7) हैं।

इस प्रकार, संख्याओं के आवश्यक युग्म हैं

यदि दोनों संख्याएँ 3-अंकीय संख्याएँ हैं तो संख्या होगी

$5a = 5 \times 57 = 285$

$7b = 7 \times 57 = 399$

255 और 399 का LCM

$\Rightarrow 285 = 5 \times 57$

$\Rightarrow 399 = 7 \times 57$

⇒ LCM = 5 × 7 × 57 = 1995

⇒ 1995 के अंकों का योग = 1 + 9 + 9 + 5 = 24

भिन्नों का HCF और LCM:

LCM और HCF में विशेष स्थितियाँ

- **सह-अभाज्य संख्याएँ:**
  जब दो संख्याएँ सह-अभाज्य होती हैं (अर्थात, उनका HCF 1 है), तो उनका LCM केवल दो संख्याओं का गुणनफल होता है।
  उदाहरण:
  उदाहरण: 13 और 17 (दोनों अभाज्य संख्याएँ) का LCM 13 × 17 = 221 है।

भिन्नों का HCF और LCM:

Fभिन्नों के लिए, HCF और LCM ज्ञात करने के सूत्र हैं:

$$\text{HCF of Fractions} = \frac{\text{HCF of Numerators}}{\text{LCM of Denominators}}$$

$$\text{LCM of Fractions} = \frac{\text{LCM of Numerators}}{\text{HCF of Denominators}}$$

उदाहरण 14: 4/9, 8/15 और 12/20 भिन्नों का HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

अंशों का HCF (4, 8, 12) = 4

हरों का LCM (9, 15, 20) = 180

इसलिए, भिन्नों का HCF 4/180 = 1/45 है

LCM के लिए:

अंशों का LCM (4, 8, 12) = 24

हरों का HCF (9, 15, 20) = 1

इसलिए, भिन्नों का LCM 24/1 है।

उदाहरण 15: 7/9, 14/185 और 7/10 का HCF क्या होगा?

हल:

दिया गया है

7/9, 14/185, 7/10

दिया गया है

7/9, 14/185, 7/10

प्रयुक्त अवधारणा

भिन्न का HCF = (अंश का HCF) / (हर का LCM)

गणना

7, 14, 7 का HCF = 7

9 के अभाज्य गुणनखंड = 3 × 3

185 के अभाज्य गुणनखंड = 5 × 37

10 के अभाज्य गुणनखंड = 2 × 5

इसलिए, 9, 185, 10 का LCM = 3330

भिन्न का HCF = 7/3330

उदाहरण 16: 0.75 और 1/3 का LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया गया है:

दी गई संख्याएँ 0.75 और 1/3 हैं।

प्रयुक्त अवधारणा:

भिन्न का LCM = अंशों का LCM/हरों का HCF

गणना:

0.75 का भिन्न रूपांतरण 3/4 है।

अंश का LCM = (3, 1) का LCM = 3

और, हर का HCF = (4, 3) का HCF = 1

अब,

(0.75 और 0.33) का LCM = (3, 1) का LCM/(4, 3) का HCF = 3/1 = 3

उदाहरण 17: 1.43, 1.87 और 20.9 का HCF ज्ञात कीजिए।

A. 11

B. 1

C.0.11

D. 110

हल:

गणना

भिन्न का HCF = अंश का HCF/हर का LCM

1.43 = 143/100,, 1.87 = 187/100 और 20.9 = 209/10

143, 187, 209 का HCF = 11

100,, 100 और 10 का LCM = 100

1.43, 1.87 और 20.9 का HCF = 11/100 या 0.11

LCM और HCF समस्याओं में शेषफल

कुछ प्रकार की समस्याओं में, हम सबसे छोटी या सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करते हैं, जिसे जब भाजकों के एक समूह से विभाजित किया जाता है, तो विशिष्ट शेषफल बचते हैं। LCM और HCF का उपयोग करके इन समस्याओं से कैसे निपटें, इस प्रकार है।

1. समान शेषफल छोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या ज्ञात करना:

समस्या का प्रकार: सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे जब x, y और z से विभाजित किया जाता है, तो समान शेषफल R बचता है।

अभीष्ट संख्या है:

अभीष्ट संख्या = LCM of (x, y, z) + R

उदाहरण 18: सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे जब 5, 7 और 9 से विभाजित किया जाता है, तो 3 का शेषफल बचता है:

हल:

- **चरण 1**: 5, 7 और 9 का LCM ज्ञात कीजिए, जो 315 है।
- **चरण** 2: शेषफल R = 3 जोड़ें।

  इस प्रकार, अभीष्ट संख्या 315 + 3 = 318 है।

---

2. समान शेषफल छोड़ने वाली सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करना:

समस्या का प्रकार: सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को विभाजित करती है और समान शेषफल R बचता है।

इसे हल करने के लिए, गणना करें:

(x – R), (y – R), और (z – R) का HCF

उदाहरण 19: सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 20, 50 और 70 को विभाजित करती है, और 4 का शेषफल छोड़ती है:

हल:

- **चरण 1**: प्रत्येक संख्या से 4 घटाएँ: 20 - 4 = 16, 50 - 4 = 46, 70 - 4 = 66
- **चरण 2:** 16, 46 और 66 का HCF ज्ञात कीजिए, जो 2 है।

इसलिए, अभीष्ट सबसे बड़ी संख्या 2 है।

---

3. विभिन्न शेषफलों के साथ कई संख्याओं को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करना:

समस्या का प्रकार: सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को क्रमशः a, b और c शेषफल छोड़कर विभाजित करती है।

गणना:

(x – a), (y – b), और (z – c) का HCF

उदाहरण 20: सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 23, 34 और 45 को क्रमशः 2, 1 और 3 शेषफल छोड़कर विभाजित करती है:

हल:

- **चरण 1**: प्रत्येक शेषफल को उसकी संगत संख्या से घटाएँ: 23 - 2 = 21, 34 - 1 = 33 और 45 - 3 = 42
- **चरण 2:** 21, 33 और 42 का HCF ज्ञात कीजिए, जो 3 है।

इस प्रकार, सबसे बड़ी संख्या 3 है।

---

4. विभिन्न शेषफल शेष रखने वाली सबसे छोटी संख्या ज्ञात करना:

समस्या का प्रकार: सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे जब x, y और z से विभाजित किया जाता है, तो क्रमशः a, b और c शेषफल बचते हैं।

1. (x – a), (y – b) और (z – c) की गणना करें और उभयनिष्ठ गुणनखंड K ज्ञात करें (यदि ये अंतर सभी K के गुणज हैं)।
2. अभीष्ट संख्या:

अभीष्ट संख्या = (x, y, z) का LCM - K

उदाहरण 21: सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे जब 4, 7 और 9 से विभाजित किया जाता है, तो क्रमशः 3, 5 और 6 शेषफल बचते हैं:

हल:

- **चरण 1:** (4 – 3) = 1, (7 – 5) = 2, (9 – 6) = 3 की गणना करें। यहाँ, उभयनिष्ठ गुणनखंड K 1 है।
- **चरण 2:** 4, 7 और 9 का LCM ज्ञात कीजिए, जो 252 है।
- **चरण 3:** K घटाएँ: 252 – 1 = 251

इसलिए, सबसे छोटी संख्या 251 है।

उदाहरण 22: दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है और उनका LCM 72 है, तो दो संख्याओं का योग है।

हल:

दिया गया है:

संख्याओं का अनुपात = 3 : 4

LCM = 72

प्रयुक्त अवधारणा:

यदि दो संख्याएँ mx, my के रूप में हैं

तब, LCM = m × x × y

गणना:

माना संख्याएँ 3x और 4x हैं

LCM = 72

⇒ 3 × 4 × x = 72

⇒ 12x = 72

⇒ x = 6

अभीष्ट योग = 3x + 4x

⇒ अभीष्ट योग = 3 × 6 + 4 × 6

⇒ अभीष्ट योग = 18 + 24

⇒ अभीष्ट योग = 42

∴ दो संख्याओं का योग 42 है।

मुख्य निष्कर्ष

1. **समान शेषफल वाली सबसे छोटी संख्याओं के लिए:** भाजकों के LCM में शेषफल जोड़ें।
2. **समान शेषफल वाली सबसे बड़ी संख्याओं के लिए:** समायोजित मानों के HCF का उपयोग करें।
3. **विभिन्न शेषफलों वाली सबसे बड़ी संख्याओं के लिए:** प्रत्येक भाजक को उसके शेषफल से घटाकर HCF ज्ञात करें।
4. **विभिन्न शेषफलों वाली सबसे छोटी संख्याओं के लिए:** भाजकों के LCM से उभयनिष्ठ गुणनखंड घटाएँ।

ये तकनीकें LCM और HCF में शेषफल-आधारित समस्याओं को हल करने के लिए प्रभावी हैं और प्रायः प्रतियोगी परीक्षाओं में परीक्षण की जाती हैं।