

NICHTLINEARE OSZILLATIONEN

01. Juli 2011

BIJAN CHOKOUFÉ NEJAD

Universität Würzburg

Abstract

Im Rahmen des Vortrags über nichtlineare Oszillationen werden einige Methoden zur Untersuchung nichtlinearer Systeme wie die Fourier-Analyse oder Poincaré-Schnitte sowie ihre praktische Umsetzung in Mathematica dargestellt.

Der nichtlineare Duffing-Oszillator mit kubischem Rückstellterm dient hierbei als bedeutendes Beispiel zur anschaulichen Betrachtung von Attraktoren oder Bifurkation. Ferner zählt er zu den einfachsten Systemen, an denen chaotische Bewegungen und seltsame Attraktoren untersucht werden können.

1 Einführung

Die Beschreibung oszillierender Systeme ist ein wichtiger Bestandteil der Physik. Während die Mathematik und Theorie linearer Oszillationen weitgehend ausgereift ist, werfen nichtlineare Systeme derzeit noch viele Fragen auf. *Nichtlinear* bezeichnet man insbesondere Systeme mit nichtlinearen Termen in den Differentialgleichungen (DGLen) des Systems. Eine wichtige Eigenschaft, die hierbei verloren geht, ist das *Superpositionsprinzip*, wie man in Gleichung (2) leicht sieht. Seien $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen von $\ddot{x} = f(x)$. In einem linearen Fall wie $f(x) = -kx$ gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1(t) + x_2(t)) = \ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t) = -k(x_1(t) + x_2(t)), \quad (1)$$

womit die DGL erfüllt ist. In einem nichtlinearen Fall wie $f(x) = -kx^2$ hingegen, gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1(t) + x_2(t)) = -k(x_1(t)^2 + x_2(t)^2) \neq -k(x_1(t) + x_2(t))^2 \quad (2)$$

Somit ist keine Entwicklung in ein Fundamentalsystem und auch kein Separationsansatz möglich. Da nur selten analytische Lösungen existieren, muss man sich meist der Numerik sowie anderer Hilfsmittel bedienen. Wichtige Anwendungen der Nichtlinearen Dynamik finden sich dort, wo die Linearisierung nicht mehr sinnvoll ist. Beispiele hierfür gibt es in der Fluidmechanik (vgl. Preface [1]), Neurowissenschaft (z.B. Neuronale Netze), der Meteorologie, etc.

In Teil 2 werden zunächst einige grundlegende Begriffe der qualitativen Phasenraumanalyse eingeführt. Darauf aufbauend wird in Teil 3 auf Poincaré-Schnitte sowie die Fourier-Analyse in Mathematica eingegangen. Schließlich wird in Teil 4 der Duffing-Oszillator diskutiert.

2 Theoretische Grundlagen

Zur anschaulichen Beschreibung des Systems wird meist der *Phasenraum* T^*Q (auch Zustandsraum) betrachtet. Er stellt die Menge der möglichen Zustände eines Systems dar, wobei zu jedem Punkt eine eindeutige Trajektorie gehört. In der Mechanik wird das *Phasenportrait* T^*Q durch die verallgemeinerten Koordinaten q_i und ihre konjugierten Impulse p_i , $i = 1, \dots, N$ aufgespannt. Die Dimension

des Phasenportraits ist somit $2N$. Der Phasenraum selbst hat eigentlich die Dimension $2N + 1$ unter Berücksichtigung der Zeit. In Systemen mit Energieerhaltung enthält diese keine neuen Informationen (1.20 von [2]), bei nicht abgeschlossenen Systemen können sich aber daher im Phasenportrait Trajektorien schneiden. Im Allgemeinen können beliebige Zustandsvariablen [3] den Phasenraum aufspannen, wie z.B. Konzentrationen, Populationen von Jägern & Beute, usw.

Unter *Oszillationen* versteht man in diesem Zusammenhang geschlossene Trajektorien im Phasenraum mit fester Periode T und $q(t + T) = q(t)$, $T > 0$, wobei diese sowohl stabil (*Grenzzyklen*) als auch instabil sein können. *Bahnstabilität* lässt sich wie folgt definieren: Sei $\delta > 0$ geg. Eine Bahn (A) heisst stabil, wenn \forall Testbahnen (B), mit $\|m_B(0) - m_A(0)\| < \delta$ (wie in Abb. 1 gezeigt),

- a) $\exists \epsilon > 0$ sodass (B) eine Röhre mit Radius ϵ um (A) nie verlässt (*Bahnstabilität*) oder
- b) Abstand (B) zu (A) für $t \rightarrow \infty$ nach Null geht (*asymptotische Stabilität*).

Gleichgewichtspunkte oder auch kritische Punkte sind Punkte in T^*Q mit $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 0$. Die Anzahl und Stabilität der Gleichgewichtspunkte sowie der Grenzzyklen hängt von den Parametern des Systems ab. Eine solche qualitative Zustandsänderung bezeichnet man, gemäß [4], als *Bifurkation* bzw. Verzweigung. Eine Aufgabe der Bifurkationstheorie ist es Bifurkationsdiagramme zu erstellen, die den Paramterraum in Regionen topologisch äquivalenter Systeme unterteilen.

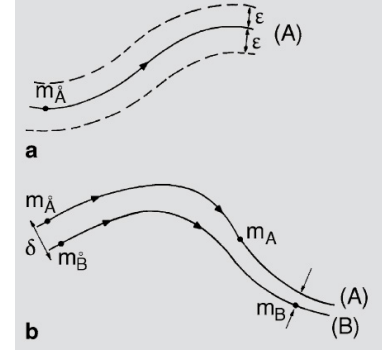


Abb. 1: Veranschaulichung von Bahnstabilität (6.3.2 aus [2])

Man kann sowohl Fixpunkte als auch Grenzzyklen zu dem generellen Konzept eines Attraktors zusammenfassen. Ein *Attraktor* ist per Definition eine offene Untermenge A von T^*Q mit $\dim A < \dim T^*Q$. Er stellt den Limes von Trajektorien für $t \rightarrow \infty$ in seinem *Einzugsgebiet* (engl. 'basin') dar. Der Attraktor selbst ist invariant unter der Zeitentwicklung. Häufig entstehen Attraktoren in physikalischen Systemen durch Dissipation.

Von den gewöhnlichen Attraktoren abzugrenzen, sind die *seltsamen Attraktoren*. Sie besitzen eine *fraktale* Struktur und Bahnen in unmittelbarer Nähe des Attraktors laufen exponentiell auseinander. Dies entspricht einer empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und zählt somit zu deterministischem Chaos. Unter einem Fraktal versteht man Gebilde mit 'gebrochener' (nicht-ganzzahliger) Dimension. Diese Dimension kann z.B. via Box-Counting-Verfahren ermittelt werden. Hierbei wird über das Fraktal ein Gitter aus Boxen mit Breite ϵ gelegt und gezählt, wieviele Boxen (N) ein Element der Menge enthalten. Die Dimension D folgt mit Gleichung (3):

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} \quad (3)$$

Berühmte Beispiele für seltsame Attraktoren sind der Rössler-Attraktor und der Lorentz-Attraktor, welche aus vereinfachten Navier-Stokes-Gleichungen folgen.

3 Methoden

Für Systeme mit mehr als einem Freiheitsgrad wird die Phasenraumanalyse unübersichtlich. Ein essentielles Hilfsmittel werden somit die *Poincaré-Schnitte*. Hierbei betrachtet man nur Durchstoßpunkte mit einer Hyperfläche S (Untermannigfaltigkeit der Dimension n im $(n + 1)$ -dimensionalen affinen Raum), die senkrecht zur periodischen Lösung Γ steht, wie in Abb. 2 ersichtlich. Somit sieht man das System effektiv nur zu den Zeitpunkten $t_0, t_0 + T, t_0 + 2T$, usw. Ein Poincaré-Schnitt lässt

sich in Mathematica sehr leicht implementieren: Sei `temp=NDSolve[]`, die numerische Lösung einer DGL. Mittels

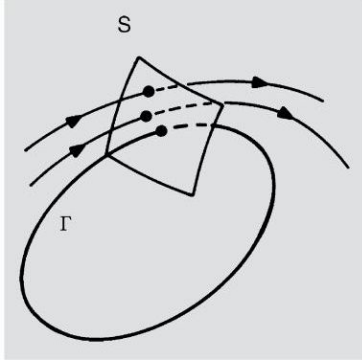


Abb. 2: Poincaré-Schnitte mit einer Hyperfläche S (6.3.4 aus [2])

`Table[{q[t],p[t]}/.temp,{t,tstart,tmax,2Pi/w}]`

wird der Phasenraum nur bei ganzzahligen Vielfachen von $T = \frac{2\pi}{w}$ betrachtet.

Unterstützend hierzu kann die *Fourier-Analyse* angewendet werden. Das Frequenzspektrum ist gerade bei den periodischen Bewegungen von nichtlinearen Oszillationen oft aussagekräftiger als der Phasenraum oder gar die Bewegungskurve selbst. Da die numerischen Daten, sowohl bei Berechnung in Mathematica als auch bei eigener Numerik in C++ o.Ä., in Form von Listen (1D-Table) vorliegt, muss die diskrete Fourier-Transformation (DFT) mittels `Fourier[]` angewendet werden. Der Betrag `Abs[]` der entstehenden Liste lässt eine qualitative Aussage zu, wieviele Frequenzen beteiligt sind bzw. ob es sich überhaupt um eine periodische Lösung handelt.

4 Duffing Oszillator

Die allgemeine Darstellung des Duffing Oszillators lautet

$$q''[t] + \gamma q'[t] - aq[t] + \mathbf{b}q[t]^3 = f_0 \cos[\omega_d t] \quad (4)$$

wobei sich diese DGL nur im $\mathbf{b}q[t]^3$ Term vom harmonischen Oszillator mit periodischem Antrieb (f_0) und Dämpfung (γ) unterscheidet. Der Duffing Oszillator wurde zuerst 1918 von Duffing [5] untersucht. Der kubische Term ergab sich als höhere Ordnung einer sinus-förmigen Rückstellkraft. Ein experimenteller Aufbau mit zwei Magneten und einer steifen Feder findet sich in [6]. Wenn man zunächst Dämpfung und äußere Kraft Null setzt, ergibt sich als Potential:

$$V = \frac{1}{4}bq[t]^4 - \frac{1}{2}aq[t]^2 \quad (5)$$

Falls b und a beliebige Konstanten sind, entspricht dies der nächsthöheren Ordnung der Entwicklung eines symmetrischen Potentials. Setzt man $a, b > 0$ ist das entstehende Doppelmuldenpotential die Projektion des Higgs potentials ($\mathcal{V} = -\mu\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$). Ferner ergibt sich mit $b > 0$ bei $a = 0$ ein Bifurkationspunkt zwischen dem genannten und dem einfachen Potentialtopf für $a < 0$. Anhand des gedämpften Duffing Oszillators kann man anhand eines `VectorPlot[]` und einigen Trajektorien die Einzugsgebiete der entstehenden zwei Attraktoren visualisieren.

Ein weiteres interessantes Beispiel des Duffing-Oszillators ist in Abb. 3 dargestellt. Hier zeigt sich, wie man die verschiedenen Hilfsmittel aus Teil 2 und 3 sinnvoll kombinieren kann. Während man in 3a) lediglich eine Art Schwebung beobachten kann, wird die Struktur anhand des Poincaré-Schnitts (in 3b) rot) deutlich. Die Punkte werden mit der Anregerfrequenz gezeichnet, d.h. es gibt eine weitere periodische Bewegung, die die verbogene Ellipse bildet. Auch im Fourier-Spektrum kann man diese schwächere und langsamere Periodizität erkennen.

Der Duffing Oszillator bietet zahlreiche Möglichkeiten zur Untersuchung von sowohl mehrfach periodischen als auch chaotischen Bewegungen. 1961 wurde von Y. Ueda mit den Parametern

$$q'' + 0.05q' + q^3 = 7.5\cos[t] \quad (6)$$

ein seltsamer Attraktor im Poincaré-Schnitt entdeckt. Es zeigt sich, dass dieser nur bei bestimmter Parameterwahl entsteht. Eine geringfügige Änderung in der Frequenz (vgl. [7]) sorgt für völlig andere

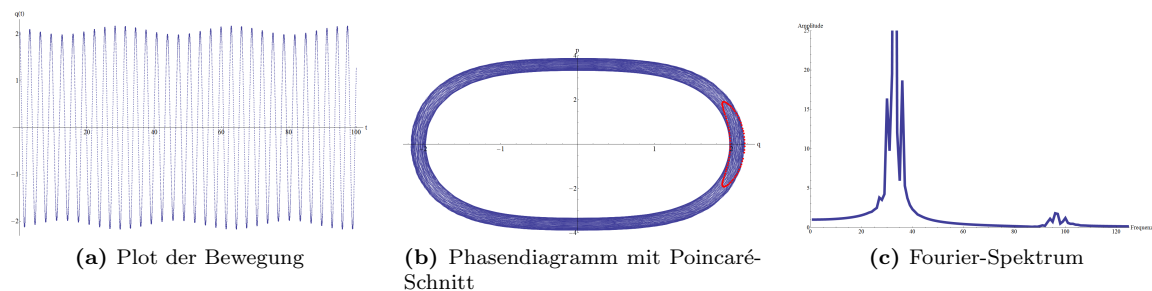


Abb. 3: Verschiedene Darstellungen der Lösung zu $q(0) = 2$, $p(0) = -1.5$, $p' + q + q^3 = 0.25 \cos(2t) \wedge q' = p$. Im Frequenzspektrum lässt sich erkennen, dass die Bewegung mehrere Frequenzen enthält, wobei der ausgeprägte Peak die Ellipse im Phasenraum bzw. die schnelle periodische Bewegung in (a) erzeugt.

Bewegungen und statt einer Struktur sieht man verstreute Punkte als Poincaré-Schnitt. Während die meisten Attraktoren bei beliebigen Startbedingungen entstehen, sind andere nur bei bestimmten Startpunkten sichtbar.

5 Zusammenfassung

Insgesamt kann man sagen, dass sich nichtlineare Systeme zwar auch ohne explizite Lösung gut beschreiben lassen, aber hier noch viele Fragen ungeklärt sind. Mathematica liefert gerade für die Arbeit mit nichtlinearer Dynamik gute Werkzeuge. Die Daten der numerischen Lösung einer DGL können direkt weiterverarbeitet werden. Poincaré-Schnitte mit fester Frequenz lassen sich leicht mit einer entsprechenden Auswahl der Daten über `Table[]` erstellen und mittels `ListPlot[]` visualisieren. Wenn man eine DGL genauer untersucht, lohnt es sich user-defined procedures zu definieren wie im Vortrag gezeigt wurde oder in [8] beschrieben ist.

Der Duffing-Oszillator stellt trotz seiner einfachen DGL ein verblüffend komplexes System dar. Bei entsprechender Wahl der Parameter lassen sich sowohl ein chaotische als auch periodische Bewegungen betrachten. Somit dient er neben dem physikalischen Hintergrund vor allem als wichtiges Modellobjekt um Nichtlineare Dynamik zu verstehen. Für weitere, umfassendere Informationen zum Thema nichtlineare Oszillationen kann auf das Standardwerk von J. Guckenheimer und P. Holmes verwiesen werden [1].

Literatur

- [1] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Applied mathematical sciences; **42**. Springer, 1983.
- [2] Florian Scheck. *Mechanik*. Springer, Berlin [u.a.], 1988.
- [3] D. H. Terman and E. M. Izhikevich. State space. *Scholarpedia*, 3(3):**1924**, 2008.
- [4] J. Guckenheimer. Bifurcation. *Scholarpedia*, 2(6):**1517**, 2007.
- [5] G. Duffing. Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz. *F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig*, 1918.
- [6] F.C. Moon and P.J. Holmes. Magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, 65:**275–296**, 1979.
- [7] R. Seydel. Attractors of a duffing equation - dependence on the exciting frequency. *Physica*, 17D:**308–312**, 1985.
- [8] Robert L. Zimmerman, Fredrick I. Olness. *Mathematica for Physics*. Addison-Wesley, 2002.