Ferromagnetismus

Kollektive Wechselwirkungen im Heisenberg-Modell

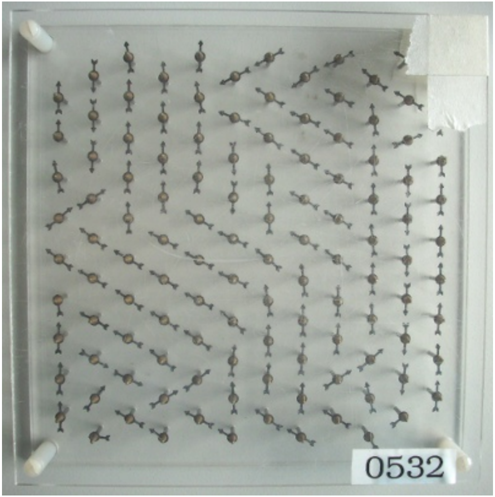
Bijan Chokoufe Nejad

Vortrag zur Vielteilchen-Physik

13. Januar 2012

$|\uparrow\downarrow\rangle$

Wie ensteht Ferromagnetismus?



- Ferromagnetismus
- Ferrimagnetismus
- Antiferromagnetismus

Verhalten unterhalb der
kritischen Temperatur
spontane Symmetriebrechung

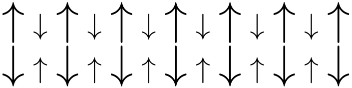
$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$$
$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$$

Kritische Temperatur $T^* = T_\mathrm{C}$
Curie Temperatur

Magnetische Strukturen

- Ferromagnetismus
- Ferrimagnetismus
- Antiferromagnetismus

Verhalten unterhalb der kritischen Temperatur
spontane Symmetriebrechung



Kritische Temperatur $T^* = T_\mathrm{C}$
Curie Temperatur

- Ferromagnetismus
- Ferrimagnetismus
- Antiferromagnetismus

Verhalten unterhalb der kritischen Temperatur
spontane Symmetriebrechung

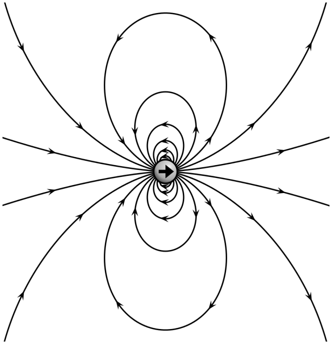
$$\begin{array}{c}\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \\ \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\end{array}$$

Kritische Temperatur $T^* = T_\mathrm{N}$
Néel Temperatur

Aus der Elektrodynamik kennen wir

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{D} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{r}_{ij})\boldsymbol{r}_{ij} - \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{r}_{ij}^2}{\boldsymbol{r}_{ij}^5},$$

$$\text{mit } \boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j$$



und somit folgt die WW-Energie

$$E_\mathrm{D}^i = -\boldsymbol{m}_i \boldsymbol{B}_\mathrm{D}(\boldsymbol{R}_i)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_j \frac{-3(\boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{r}_{ij})(\boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{r}_{ij}) + (\boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{m}_i)\boldsymbol{r}_{ij}^2}{\boldsymbol{r}_{ij}^5}$$

Dies lässt sich abschätzen

$$E_\mathrm{D}^i \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(p_\mathrm{eff}\mu_\mathrm{B})^2}{r^3} z = 0.5371 \cdot 10^{-4} \, \frac{z p_\mathrm{eff}^2}{r^3} \, \mathrm{eV}\,\mathrm{Å}^3 \approx 10^{-4}\,\mathrm{eV}\,,$$

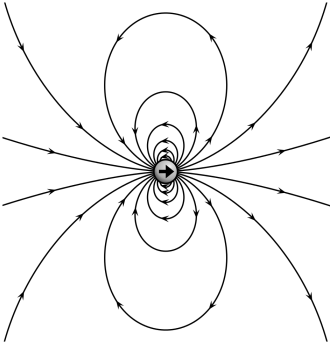
wobei $r \approx 2\,$Å, p_eff die effektive Anzahl an Magnetonen und z die Zahl nächster Nachbarn ist.

Abschätzung der Dipol-Dipol-WW

Aus der Elektrodynamik kennen wir

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{D} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{m}_j\cdot\boldsymbol{r}_{ij})\boldsymbol{r}_{ij} - \boldsymbol{m}_j\boldsymbol{r}_{ij}^2}{\boldsymbol{r}_{ij}^5},$$

$$\text{mit } \boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j$$



und somit folgt die WW-Energie

$$E_\mathrm{D}^i = -\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{B}_\mathrm{D}(\boldsymbol{R}_i)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_j \frac{-3(\boldsymbol{m}_j\cdot\boldsymbol{r}_{ij})(\boldsymbol{m}_i\cdot\boldsymbol{r}_{ij}) + (\boldsymbol{m}_j\cdot\boldsymbol{m}_i)\boldsymbol{r}_{ij}^2}{\boldsymbol{r}_{ij}^5}$$

Dies lässt sich abschätzen

$$E_\mathrm{D}^i \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(p_\mathrm{eff}\mu_\mathrm{B})^2}{r^3}z = 0.5371\cdot 10^{-4}\,\frac{zp_\mathrm{eff}^2}{r^3}\,\mathrm{eV}\,\text{Å}^3 \approx 10^{-4}\,\mathrm{eV}\,,$$

wobei $r \approx 2\,$Å, p_eff die effektive Anzahl an Magnetonen und z die Zahl nächster Nachbarn ist.

Größenordnungen der WW-Energie

- Magnetische Dipol-Dipol-WW: $E_{\mathrm{D}}^{i} = 10^{-4}\,\mathrm{eV} \hat{=} 1.16\,\mathrm{K}$
- Vergleiche mit $T_{\mathrm{C}} = 1043\,\mathrm{K}$ von Fe.
- Kann nicht der Ursprung der ferromagnetischen Ordnung sein. Nur Korrekturterm.
- Ferromagnetismus ist klassisch nicht erklärbar.
- Elektrostatische WW aufgrund des Pauli-Prinzips bzw. der antisymmetrischen Wellenfunktion.

Größenordnungen der WW-Energie

- Magnetische Dipol-Dipol-WW: $E_{\mathrm{D}}^{i} = 10^{-4}\,\mathrm{eV} \hat{=} 1.16\,\mathrm{K}$
- Vergleiche mit $T_{\mathrm{C}} = 1043\,\mathrm{K}$ von Fe.
- Kann nicht der Ursprung der ferromagnetischen Ordnung sein. Nur Korrekturterm.
- Ferromagnetismus ist klassisch nicht erklärbar.
- Elektrostatische WW aufgrund des Pauli-Prinzips bzw. der antisymmetrischen Wellenfunktion.

Größenordnungen der WW-Energie

- Magnetische Dipol-Dipol-WW: $E_{\mathrm{D}}^{i} = 10^{-4}\,\mathrm{eV} \hat{=} 1.16\,\mathrm{K}$
- Vergleiche mit $T_{\mathrm{C}} = 1043\,\mathrm{K}$ von Fe.
- Kann nicht der Ursprung der ferromagnetischen Ordnung sein. Nur Korrekturterm.
- Ferromagnetismus ist klassisch nicht erklärbar.
- Elektrostatische WW aufgrund des Pauli-Prinzips bzw. der antisymmetrischen Wellenfunktion.

Größenordnungen der WW-Energie

- Magnetische Dipol-Dipol-WW: $E_\mathrm{D}^i = 10^{-4}\,\mathrm{eV} \hat{=} 1.16\,\mathrm{K}$
- Vergleiche mit $T_\mathrm{C} = 1043\,\mathrm{K}$ von Fe.
- Kann nicht der Ursprung der ferromagnetischen Ordnung sein. Nur Korrekturterm.
- Ferromagnetismus ist klassisch nicht erklärbar.
- Elektrostatische WW aufgrund des Pauli-Prinzips bzw. der antisymmetrischen Wellenfunktion.

Größenordnungen der WW-Energie

- Magnetische Dipol-Dipol-WW: $E_{\mathrm{D}}^{i} = 10^{-4}\,\mathrm{eV} \hat{=} 1.16\,\mathrm{K}$
- Vergleiche mit $T_{\mathrm{C}} = 1043\,\mathrm{K}$ von Fe.
- Kann nicht der Ursprung der ferromagnetischen Ordnung sein. Nur Korrekturterm.
- Ferromagnetismus ist klassisch nicht erklärbar.
- Elektrostatische WW aufgrund des Pauli-Prinzips bzw. der antisymmetrischen Wellenfunktion.

Spinunabhängiger Hamilton ohne WW

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$
$$|\psi\rangle^- = |q\rangle^\pm |S\rangle^\mp$$

Mögliche Lösungen

$$|\psi_1\rangle^- = |q\rangle^+ |0\rangle^- \quad \text{oder}$$
$$|\psi_2\rangle^- = |q\rangle^- |1\rangle^+$$
$$\mathcal{H} |q\rangle^\pm = E_\pm |q\rangle^\pm$$

Falls $E_+ \neq E_-$, existiert eine *spontane* magnetische Ordnung.

Wähle effektiven $\tilde{\mathcal{H}}$ mit

$$\tilde{\mathcal{H}} |0\rangle^- = E_+ |0\rangle^-$$
$$\tilde{\mathcal{H}} |1\rangle^+ = E_- |1\rangle^+$$

$\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}}$ sind offensichtlich äquivalent in ihrer Wirkung.

Spinunabhängiger Hamilton ohne WW

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$

$$|\psi\rangle^- = |q\rangle^\pm |S\rangle^\mp$$

Mögliche Lösungen

$$|\psi_1\rangle^- = |q\rangle^+ |0\rangle^- \quad \text{oder}$$
$$|\psi_2\rangle^- = |q\rangle^- |1\rangle^+$$
$$\mathcal{H} |q\rangle^\pm = E_\pm |q\rangle^\pm$$

Falls $E_+ \neq E_-$, existiert eine *spontane* magnetische Ordnung.

Wähle effektiven $\tilde{\mathcal{H}}$ mit

$$\tilde{\mathcal{H}} |0\rangle^- = E_+ |0\rangle^-$$
$$\tilde{\mathcal{H}} |1\rangle^+ = E_- |1\rangle^+$$

$\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}}$ sind offensichtlich äquivalent in ihrer Wirkung.

Spinunabhängiger Hamilton ohne WW

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$
$$|\psi\rangle^- = |q\rangle^\pm |S\rangle^\mp$$

Mögliche Lösungen

$$|\psi_1\rangle^- = |q\rangle^+ |0\rangle^- \quad \text{oder}$$
$$|\psi_2\rangle^- = |q\rangle^- |1\rangle^+$$
$$\mathcal{H} |q\rangle^\pm = E_\pm |q\rangle^\pm$$

Falls $E_+ \neq E_-$, existiert eine *spontane* magnetische Ordnung.

Wähle effektiven $\tilde{\mathcal{H}}$ mit

$$\tilde{\mathcal{H}} |0\rangle^- = E_+ |0\rangle^-$$
$$\tilde{\mathcal{H}} |1\rangle^+ = E_- |1\rangle^+$$

$\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}}$ sind offensichtlich äquivalent in ihrer Wirkung.

Spinunabhängiger Hamilton ohne WW

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$
$$|\psi\rangle^- = |q\rangle^\pm |S\rangle^\mp$$

Mögliche Lösungen

$$|\psi_1\rangle^- = |q\rangle^+ |0\rangle^- \quad \text{oder}$$
$$|\psi_2\rangle^- = |q\rangle^- |1\rangle^+$$
$$\mathcal{H} |q\rangle^\pm = E_\pm |q\rangle^\pm$$

Falls $E_+ \neq E_-$, existiert eine *spontane* magnetische Ordnung.

Wähle effektiven $\tilde{\mathcal{H}}$ mit

$$\tilde{\mathcal{H}} |0\rangle^- = E_+ |0\rangle^-$$
$$\tilde{\mathcal{H}} |1\rangle^+ = E_- |1\rangle^+$$

$\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}}$ sind offensichtlich äquivalent in ihrer Wirkung.

Welche Form hat $\tilde{\mathcal{H}}$? Sei $\boldsymbol{s}_i$ der Spin des i-ten Elektrons

$$\boldsymbol{s}_i^2 = s_i(s_i+1) = \frac{3}{4} \qquad \text{und für den Gesamtspin}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^2 &= (\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2)^2 = S(S+1)\\ &= \boldsymbol{s}_1^2+\boldsymbol{s}_2^2+2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 = \frac{3}{2}+2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 = \frac{1}{2}S(S+1)-\frac{3}{4} = \begin{cases}-\frac{3}{4} & \text{falls } S=0\\ +\frac{1}{4} & \text{falls } S=1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{4}(E_+ + 3E_-) - (E_+ - E_-)\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\\ &= J_0 - J_{12}\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 \qquad \text{Molekulares Heisenbergmodell}\end{aligned}$$

Welche Form hat $\tilde{\mathcal{H}}$? Sei $\boldsymbol{s}_i$ der Spin des i-ten Elektrons

$$\boldsymbol{s}_i^2 = s_i(s_i+1) = \frac{3}{4} \qquad \text{und für den Gesamtspin}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^2 &= (\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2)^2 = S(S+1)\\ &= \boldsymbol{s}_1^2 + \boldsymbol{s}_2^2 + 2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 = \frac{3}{2} + 2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 = \frac{1}{2}S(S+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{falls } S=0 \\ +\frac{1}{4} & \text{falls } S=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{4}(E_+ + 3E_-) - (E_+ - E_-)\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\\ &= J_0 - J_{12}\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 \qquad \text{Molekulares Heisenbergmodell}\end{aligned}$$

Welche Form hat $\tilde{\mathcal{H}}$? Sei $\boldsymbol{s}_i$ der Spin des i-ten Elektrons

$$\boldsymbol{s}_i^2 = s_i(s_i+1) = \frac{3}{4} \qquad \text{und für den Gesamtspin}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^2 &= (\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2)^2 = S(S+1)\\ &= \boldsymbol{s}_1^2+\boldsymbol{s}_2^2+2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 = \frac{3}{2}+2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 &= \frac{1}{2}S(S+1)-\frac{3}{4} = \begin{cases}-\frac{3}{4} & \text{falls } S=0\\ +\frac{1}{4} & \text{falls } S=1\end{cases}\\ \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{4}(E_+ + 3E_-) - (E_+ - E_-)\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\\ &= J_0 - J_{12}\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 \qquad \text{Molekulares Heisenbergmodell}\end{aligned}$$

- Mithilfe der *Heitler-London* Methode kann für das H_2-Molekül $J_{12} = E_+ - E_- \neq 0$ gezeigt werden.
- J_{12} kann durch das Überlappintegral, das Coulombintegral und das Austauschintegral ausgedrückt werden.
- Durch postulierte Verallgemeinerung erhält man das Heisenberg-Model für N Vielelektronenatome.
- Lässt sich in 1. Ordnung Störungstheorie formal ableiten (z.B. im *Dirac Vektor* Modell). Gibt aber keine Einsicht in physikalische Grundlagen.
- Meist kein akzeptabler Kopplungsmechanismus, da Überlappintegrale in magnetischen Ionen zu gering (große Abstände, selbst zu NN).

- Mithilfe der *Heitler-London* Methode kann für das H_2-Molekül $J_{12} = E_+ - E_- \neq 0$ gezeigt werden.
- J_{12} kann durch das Überlappintegral, das Coulombintegral und das Austauschintegral ausgedrückt werden.
- Durch postulierte Verallgemeinerung erhält man das Heisenberg-Model für N Vielelektronenatome.
- Lässt sich in 1. Ordnung Störungstheorie formal ableiten (z.B. im *Dirac Vektor* Modell). Gibt aber keine Einsicht in physikalische Grundlagen.
- Meist kein akzeptabler Kopplungsmechanismus, da Überlappintegrale in magnetischen Ionen zu gering (große Abstände, selbst zu NN).

- Mithilfe der *Heitler-London* Methode kann für das H_2-Molekül $J_{12} = E_+ - E_- \neq 0$ gezeigt werden.
- J_{12} kann durch das Überlappintegral, das Coulombintegral und das Austauschintegral ausgedrückt werden.
- Durch postulierte Verallgemeinerung erhält man das Heisenberg-Model für N Vielelektronenatome.
- Lässt sich in 1. Ordnung Störungstheorie formal ableiten (z.B. im *Dirac Vektor* Modell). Gibt aber keine Einsicht in physikalische Grundlagen.
- Meist kein akzeptabler Kopplungsmechanismus, da Überlappintegrale in magnetischen Ionen zu gering (große Abstände, selbst zu NN).

- Mithilfe der *Heitler-London* Methode kann für das H_2-Molekül $J_{12} = E_+ - E_- \neq 0$ gezeigt werden.
- J_{12} kann durch das Überlappintegral, das Coulombintegral und das Austauschintegral ausgedrückt werden.
- Durch postulierte Verallgemeinerung erhält man das Heisenberg-Model für N Vielelektronenatome.
- Lässt sich in 1. Ordnung Störungstheorie formal ableiten (z.B. im *Dirac Vektor* Modell). Gibt aber keine Einsicht in physikalische Grundlagen.
- Meist kein akzeptabler Kopplungsmechanismus, da Überlappintegrale in magnetischen Ionen zu gering (große Abstände, selbst zu NN).

- Mithilfe der *Heitler-London* Methode kann für das H_2-Molekül $J_{12} = E_+ - E_- \neq 0$ gezeigt werden.
- J_{12} kann durch das Überlappintegral, das Coulombintegral und das Austauschintegral ausgedrückt werden.
- Durch postulierte Verallgemeinerung erhält man das Heisenberg-Model für N Vielelektronenatome.
- Lässt sich in 1. Ordnung Störungstheorie formal ableiten (z.B. im *Dirac Vektor* Modell). Gibt aber keine Einsicht in physikalische Grundlagen.
- Meist kein akzeptabler Kopplungsmechanismus, da Überlappintegrale in magnetischen Ionen zu gering (große Abstände, selbst zu NN).

Eine von vielen *indirekten* Austausch-WW
2. Ordnung Störungstheorie.

Motiviert durch unterschiedliche Phänomene, je nach Konzentration von paramagnetischen Mn^{2+}-Ionen in nichtmagnetischer Cu Matrix:

- *Quenching* von 3d-Momenten
- *Kondo* Effekt
- *Spin Glass* Frustration
- *Ferromagnetische* Ordnung
- *Anitferromagnetische* Ordnung

Eine von vielen *indirekten* Austausch-WW
2. Ordnung Störungstheorie.

Motiviert durch unterschiedliche Phänomene, je nach Konzentration von paramagnetischen Mn^{2+}-Ionen in nichtmagnetischer Cu Matrix:

- *Quenching* von 3d-Momenten
- *Kondo* Effekt
- *Spin Glass* Frustration
- *Ferromagnetische* Ordnung
- *Anitferromagnetische* Ordnung

Verwende einfaches Sommerfeld Modell:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \epsilon(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}$$

Lokalisierte Spins $\boldsymbol{S}_i$ sollen nicht miteinander wechselwirken, aber lokalisierte mit Bandelektronen $\boldsymbol{s}$:

$$\mathcal{H}_S = -J \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{S}_i$$

$\mathcal{H}_S$ trägt in 1. Ordnung nicht bei. In 2. Ordnung ergibt sich

$$E_0^{(2)} = \ldots = \frac{J}{2N^2} \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{q}} \sum_{ij} \theta(k_F - |\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}|)\theta(|\boldsymbol{k}| - k_f) \frac{e^{-i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)}}{\epsilon(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) - \epsilon(\boldsymbol{k})} \langle f \mid \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \mid f \rangle$$

$$= -\sum_{ij} J_{ij}^{\text{RKKY}}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j) \langle f \mid \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \mid f \rangle$$

mit dem Spinzustand $|f\rangle$ als Lin.Komb. aller Orientierungen

Die Oszillation erklärt das Verhalten in Abhängigkeit vom Gitterabstand bzw. der Konzentration von Mn^{2+}.

Verwende einfaches Sommerfeld Modell:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \epsilon(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}$$

Lokalisierte Spins $\boldsymbol{S}_i$ sollen nicht miteinander wechselwirken, aber lokalisierte mit Bandelektronen $\boldsymbol{s}$:

$$\mathcal{H}_S = -J \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{S}_i$$

$\mathcal{H}_S$ trägt in 1. Ordnung nicht bei. In 2. Ordnung ergibt sich

$$E_0^{(2)} = \ldots = \frac{J}{2N^2} \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{q}} \sum_{ij} \theta(k_F - |\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}|)\theta(|\boldsymbol{k}| - k_f) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)}}{\epsilon(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) - \epsilon(\boldsymbol{k})} \langle\, f \,|\, \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \,|\, f \,\rangle$$

$$= -\sum_{ij} J^{\mathrm{RKKY}}_{ij}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j) \langle\, f \,|\, \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \,|\, f \,\rangle$$

mit dem Spinzustand $|f\rangle$ als Lin.Komb. aller Orientierungen

Die Oszillation erklärt das Verhalten in Abhängigkeit vom Gitterabstand bzw. der Konzentration von Mn^{2+}.

Verwende einfaches Sommerfeld Modell:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \epsilon(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}$$

Lokalisierte Spins $\boldsymbol{S}_i$ sollen nicht miteinander wechselwirken, aber lokalisierte mit Bandelektronen $\boldsymbol{s}$:

$$\mathcal{H}_S = -J \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{S}_i$$

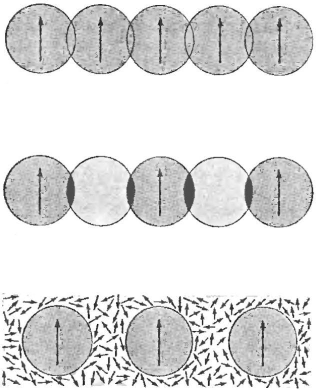
$\mathcal{H}_S$ trägt in 1. Ordnung nicht bei. In 2. Ordnung ergibt sich

$$E_0^{(2)} = \dots = \frac{J}{2N^2} \sum_{\boldsymbol{kq}} \sum_{ij} \theta(k_F - |\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}|)\theta(|\boldsymbol{k}| - k_f) \frac{e^{-i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)}}{\epsilon(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) - \epsilon(\boldsymbol{k})} \langle f \,|\, \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \,|\, f \rangle$$

$$= -\sum_{ij} J^{\mathrm{RKKY}}_{ij}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j) \langle f \,|\, \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \,|\, f \rangle$$

mit dem Spinzustand $|f\rangle$ als Lin.Komb. aller Orientierungen

Die Oszillation erklärt das Verhalten in Abhängigkeit vom Gitterabstand bzw. der Konzentration von Mn^{2+}.



Direkter Austausch
Superaustausch
Indirekter Austausch (RKKY)

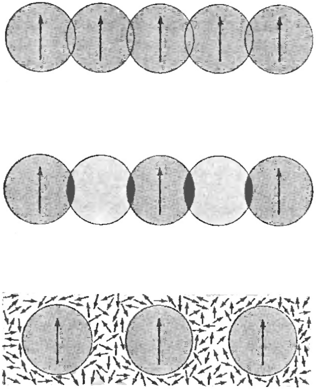
RKKY funktioniert nur für metallische Heisenberg Magnete, da $\propto n_e$.

Für magnetische Isolatoren Superaustausch.

Semiklassischer Ansatz: Hüpf-Prozessen t und Vektormodell der Spins $\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = S^2 \cos\theta$.

$\Rightarrow$ Heisenberg Hamiltonian

Superaustausch



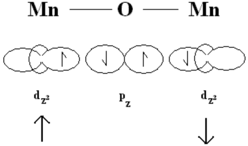
Direkter Austausch
Superaustausch
Indirekter Austausch (RKKY)

RKKY funktioniert nur für metallische Heisenberg Magnete, da $\propto n_e$.

Für magnetische Isolatoren Superaustausch.

Semiklassischer Ansatz: Hüpf-Prozessen t und Vektormodell der Spins $\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = S^2 \cos\theta$.

$\Rightarrow$ Heisenberg Hamiltonian



$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j$$

- Wie gezeigt wurde plausibles Modell.
- Beschreibt sehr realistisch

$$\begin{aligned} \text{Ferromagnete } (J_{ij} > 0)\text{:} &\quad \text{CrBr}_3, \text{K}_2\text{CuF}_4, \text{EuO}, \text{EuS},.. \\ \text{Antiferromagnete } (J_{ij} < 0)\text{:} &\quad \text{MnO}, \text{EuTe}, \text{NiO}, \text{RbMnF}_3,.. \\ \text{Ferrimagnete } (J_{ij} < 0)\text{:} &\quad \text{MO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3 \text{ (M=Fe,Ni,Cd,..)} \end{aligned}$$

- Konvention: $J_{ij} = J_{ji}$, $J_{ii} = 0$ und $\sum_i J_{ij} = J_0$.
- Modell ist rotationssymmetrisch.

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j$$

- Wie gezeigt wurde plausibles Modell.
- Beschreibt sehr realistisch

$$\begin{aligned}
\text{Ferromagnete } (J_{ij} > 0)\text{:} &\quad CrBr_3,\ K_2CuF_4,\ EuO,\ EuS,.. \\
\text{Antiferromagnete } (J_{ij} < 0)\text{:} &\quad MnO,\ EuTe,\ NiO,\ RbMnF_3,.. \\
\text{Ferrimagnete } (J_{ij} < 0)\text{:} &\quad MO \cdot Fe_2O_3 \ (M{=}Fe,Ni,Cd,..)
\end{aligned}$$

- Konvention: $J_{ij} = J_{ji}$, $J_{ii} = 0$ und $\sum_i J_{ij} = J_0$.
- Modell ist rotationssymmetrisch.

Goldstone's Theorem für nichtrelativistische Theorien

Zu jeder spontan gebrochenen Symmetrie korrespondiert ein Quasiteilchen ohne Bandlücke.

Rotationssymmetrie	$\Leftrightarrow$	Translationssymmetrie
$\downarrow$	Spontane Symmetriebrechung	$\downarrow$
Magnonen		Phononen
$\downarrow$	Quantisierungseinheit	$\downarrow$
Spinwellen	$\Leftrightarrow$	Gitterschwingungen

?

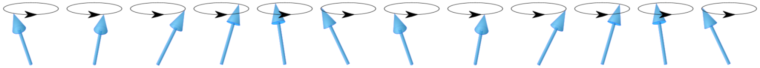
Shut up and calculate..

Goldstone-Moden

Goldstone's Theorem für nichtrelativistische Theorien

Zu jeder spontan gebrochenen Symmetrie korrespondiert ein Quasiteilchen ohne Bandlücke.

Rotationssymmetrie	$\Leftrightarrow$	Translationssymmetrie
$\downarrow$	Spontane Symmetriebrechung	$\downarrow$
Magnonen		Phononen
$\downarrow$	Quantisierungseinheit	$\downarrow$
Spinwellen	$\Leftrightarrow$	Gitterschwingungen



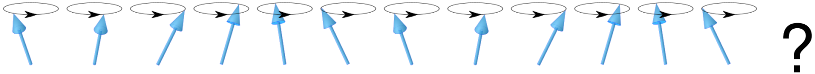
?

Shut up and calculate..

Goldstone's Theorem für nichtrelativistische Theorien

Zu jeder spontan gebrochenen Symmetrie korrespondiert ein Quasiteilchen ohne Bandlücke.

Rotationssymmetrie	$\Leftrightarrow$	Translationssymmetrie
$\downarrow$	Spontane Symmetriebrechung	$\downarrow$
Magnonen		Phononen
$\downarrow$	Quantisierungseinheit	$\downarrow$
Spinwellen	$\Leftrightarrow$	Gitterschwingungen



Shut up and calculate..

Heisenberg-Modell mit lokalem Feld:

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j - g_\mathrm{J} \mu_\mathrm{B} B_0 \sum_i S_i^z$$

Nutze $S_j^\pm = S_j^x \pm \mathrm{i} S_j^y$,

$$S_j^x = \frac{1}{2}\left(S_j^+ + S_j^-\right), \; S_j^y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(S_j^+ - S_j^-\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j = S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z$$
$$= \frac{1}{2}\left(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+\right) + S_i^z S_j^z$$

Heisenberg-Modell mit lokalem Feld:

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j - g_\mathrm{J} \mu_\mathrm{B} B_0 \sum_i S_i^z$$

Nutze $S_j^\pm = S_j^x \pm \mathrm{i} S_j^y$,

$$S_j^x = \tfrac{1}{2}\left(S_j^+ + S_j^-\right),\; S_j^y = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(S_j^+ - S_j^-\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j = S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+\right) + S_i^z S_j^z$$

 $|\uparrow\downarrow\rangle$

Heisenberg-Modell mit lokalem Feld:

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j - g_{\mathrm{J}} \mu_{\mathrm{B}} B_0 \sum_i S_i^z$$

Nutze $S_j^{\pm} = S_j^x \pm \mathrm{i} S_j^y$,

$$S_j^x = \tfrac{1}{2}\left(S_j^+ + S_j^-\right),\; S_j^y = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(S_j^+ - S_j^-\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j &= S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z \\ &= \frac{1}{2}\left(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+\right) + S_i^z S_j^z\end{aligned}$$

$$S^\alpha(\boldsymbol{k}) = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^\alpha \quad \text{Diskrete Fourier-Transformation}$$

$$S_i^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S^\alpha(\boldsymbol{k}) \qquad \alpha = (+, -, x, y, z)$$

Mit bekannten Kommutatoren
im Ortsraum:

$$\left[S_i^a, S_j^b\right] = \delta_{ij}\,\mathrm{i}\,\epsilon^{abc} S_i^c$$

$$\left[S_i^z, S_j^\pm\right] = \pm\delta_{ij} S_i^\pm$$

$$\left[S_i^+, S_j^-\right] = 2\delta_{ij} S_i^z$$

$$S^\alpha(\boldsymbol{k}) = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^\alpha \quad \text{Diskrete Fourier-Transformation}$$

$$S_i^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S^\alpha(\boldsymbol{k}) \qquad \alpha = (+,-,x,y,z)$$

Mit bekannten Kommutatoren
im Ortsraum:

$$\left[S_i^a, S_j^b\right] = \delta_{ij}\,\mathrm{i}\,\epsilon^{abc} S_i^c$$

$$\left[S_i^z, S_j^\pm\right] = \pm\delta_{ij} S_i^\pm$$

$$\left[S_i^+, S_j^-\right] = 2\delta_{ij} S_i^z$$

$$S^\alpha(\boldsymbol{k}) = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^\alpha \quad \text{Diskrete Fourier-Transformation}$$

$$S_i^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S^\alpha(\boldsymbol{k}) \qquad \alpha = (+, -, x, y, z)$$

Mit bekannten Kommutatoren im Ortsraum:

$$\left[S_i^a, S_j^b\right] = \delta_{ij}\, \mathrm{i}\, \epsilon^{abc} S_i^c$$
$$\left[S_i^z, S_j^\pm\right] = \pm\delta_{ij} S_i^\pm$$
$$\left[S_i^+, S_j^-\right] = 2\delta_{ij} S_i^z$$

Folgt im $\boldsymbol{k}$-Raum:

$$\begin{aligned}\left[S^+(\boldsymbol{k}_1), S^-(\boldsymbol{k}_2)\right] &= \sum_{ij} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{R}_j\right)} \left[S_i^+, S_j^-\right] \\ &= 2\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)} S_i^z \\ &= 2S^z(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)\end{aligned}$$

$$S^\alpha(\boldsymbol{k}) = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^\alpha \quad \text{Diskrete Fourier-Transformation}$$

$$S_i^\alpha = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S^\alpha(\boldsymbol{k}) \qquad \alpha = (+,-,x,y,z)$$

Mit bekannten Kommutatoren im Ortsraum:

$$\left[S_i^a, S_j^b\right] = \delta_{ij}\,\mathrm{i}\,\epsilon^{abc} S_i^c$$
$$\left[S_i^z, S_j^\pm\right] = \pm\delta_{ij} S_i^\pm$$
$$\left[S_i^+, S_j^-\right] = 2\delta_{ij} S_i^z$$

Folgt im $\boldsymbol{k}$-Raum:

$$\begin{aligned}\left[S^+(\boldsymbol{k}_1), S^-(\boldsymbol{k}_2)\right] &= \sum_{ij} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{R}_j\right)} \left[S_i^+, S_j^-\right] \\ &= 2\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)} S_i^z \\ &= 2S^z(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)\end{aligned}$$

$$S^\alpha(\boldsymbol{k}) = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^\alpha \quad \text{Diskrete Fourier-Transformation}$$

$$S_i^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S^\alpha(\boldsymbol{k}) \qquad \alpha = (+,-,x,y,z)$$

Mit bekannten Kommutatoren im Ortsraum:

$$\left[S_i^a, S_j^b\right] = \delta_{ij}\,\mathrm{i}\,\epsilon^{abc} S_i^c$$
$$\left[S_i^z, S_j^\pm\right] = \pm\delta_{ij} S_i^\pm$$
$$\left[S_i^+, S_j^-\right] = 2\delta_{ij} S_i^z$$

Folgt im $\boldsymbol{k}$-Raum:

$$\left[S^+(\boldsymbol{k}_1), S^-(\boldsymbol{k}_2)\right] = 2S^z(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)$$
$$\left[S^z(\boldsymbol{k}_1), S^\pm(\boldsymbol{k}_2)\right] = \pm S^\pm(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)$$

sowie

$$S^+(\boldsymbol{k})^\dagger = S^-(-\boldsymbol{k}) \qquad S^z(\boldsymbol{k})^\dagger = S^z(-\boldsymbol{k})$$

Spinoperatoren im $\boldsymbol{k}$-Raum

$$S^\alpha(\boldsymbol{k}) = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S_i^\alpha \quad \text{Diskrete Fourier-Transformation}$$

$$S_i^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S^\alpha(\boldsymbol{k}) \qquad \alpha = (+, -, x, y, z)$$

Mit bekannten Kommutatoren im Ortsraum:

$$\left[S_i^a, S_j^b\right] = \delta_{ij}\, \mathrm{i}\, \epsilon^{abc} S_i^c$$

$$\left[S_i^z, S_j^\pm\right] = \pm\delta_{ij} S_i^\pm$$

$$\left[S_i^+, S_j^-\right] = 2\delta_{ij} S_i^z$$

Folgt im $\boldsymbol{k}$-Raum:

$$\left[S^+(\boldsymbol{k}_1), S^-(\boldsymbol{k}_2)\right] = 2S^z(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)$$

$$\left[S^z(\boldsymbol{k}_1), S^\pm(\boldsymbol{k}_2)\right] = \pm S^\pm(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)$$

sowie

$$S^+(\boldsymbol{k})^\dagger = S^-(-\boldsymbol{k}) \qquad S^z(\boldsymbol{k})^\dagger = S^z(-\boldsymbol{k})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\sum_{ij} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j - g_\mathrm{J}\mu_\mathrm{B} B_0 \sum_i S_i^z \\
&= -\sum_{ij} J_{ij}\left(S_i^+ S_j^- + S_i^z S_j^z\right) - g_\mathrm{J}\mu_\mathrm{B} B_0 \sum_i S_i^z \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})\left(S^+(\boldsymbol{k})S^-(-\boldsymbol{k}) + S^z(\boldsymbol{k})S^z(-\boldsymbol{k})\right) \\
&\quad - g_\mathrm{J}\mu_\mathrm{B} B_0 S^z(\boldsymbol{0})
\end{aligned}$$

mit $J(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)}$

Umformulierung des Heisenberg-Modells

$\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j = \frac{1}{2}\left(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+\right) + S_i^z S_j^z \qquad S_i^\alpha = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_i} S^\alpha(\boldsymbol{k})$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\sum_{ij} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j - g_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 \sum_i S_i^z \\
&= -\sum_{ij} J_{ij} \left(S_i^+ S_j^- + S_i^z S_j^z\right) - g_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 \sum_i S_i^z \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) \left(S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k}) + S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\right) \\
&\quad - g_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 S^z(\boldsymbol{0})
\end{aligned}
$$

mit $J(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)}$

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$$

$|0\rangle$ entspricht der totalen Ausrichtung der Spins (*ferromagnetische Sättigung*).

Die Wirkung der Spinoperatoren ist klar:

$$S_i^z\,|0\rangle = S\,|0\rangle \quad \Rightarrow S^z(\boldsymbol{k})\,|0\rangle = S\,|0\rangle \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_i} = NS\,|0\rangle\,\delta_{\boldsymbol{k}0},$$

$$\text{da } \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} = \frac{1}{N}\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')R_i}$$

$$S_i^+\,|0\rangle = 0 \qquad \Rightarrow S^+(\boldsymbol{k})\,|0\rangle = 0$$

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$$

$|0\rangle$ entspricht der totalen Ausrichtung der Spins (*ferromagnetische Sättigung*).
Die Wirkung der Spinoperatoren ist klar:

$$S_i^z\,|0\rangle = S\,|0\rangle \quad \Rightarrow S^z(\boldsymbol{k})\,|0\rangle = S\,|0\rangle \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_i} = NS\,|0\rangle\,\delta_{\boldsymbol{k}0},$$

$$\text{da } \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} = \frac{1}{N}\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')R_i}$$

$$S_i^+\,|0\rangle = 0 \qquad \Rightarrow S^+(\boldsymbol{k})\,|0\rangle = 0$$

Grundzustandsenergie E_0

$\left[S^+(\boldsymbol{k}_1), S^-(\boldsymbol{k}_2)\right] = 2S^z(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2) \qquad S^z(\boldsymbol{k}) \left|0\right\rangle = NS \left|0\right\rangle \delta_{\boldsymbol{k}0} \qquad S^+(\boldsymbol{k}) \left|0\right\rangle = 0$

Damit folgt für $\mathcal{H}$ mit $\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)} = J_{ii}$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k}) \left|0\right\rangle &= -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) \left[S^-(-\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) + 2S^z(\boldsymbol{0})\right] \left|0\right\rangle \\
&= -2NSJ_{ii} = 0
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k}) \left|0\right\rangle = -\frac{1}{N} J(\boldsymbol{0}) S^z(\boldsymbol{0}) NS \left|0\right\rangle = -NS^2 J_0 \left|0\right\rangle$$

und somit ist die Grundzustandsenergie E_0

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left|0\right\rangle &= \left[-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) \left(S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k}) + S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\right) - g_J \mu_B B_0 S^z(\boldsymbol{0})\right] \left|0\right\rangle \\
&= \left(-NS^2 J_0 - NS g_J \mu_B B_0\right) \left|0\right\rangle = E_0 \left|0\right\rangle
\end{aligned}$$

Damit folgt für $\mathcal{H}$ mit $\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)} = J_{ii}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k})\,|0\rangle &= -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})\left[S^-(-\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) + 2S^z(\boldsymbol{0})\right]|0\rangle \\ &= -2NSJ_{ii} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\,|0\rangle = -\frac{1}{N} J(\boldsymbol{0}) S^z(\boldsymbol{0}) NS\,|0\rangle = -NS^2 J_0\,|0\rangle$$

und somit ist die Grundzustandsenergie E_0

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\,|0\rangle &= \left[-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})\left(S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k}) + S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\right) - g_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 S^z(\boldsymbol{0})\right]|0\rangle \\ &= \left(-NS^2 J_0 - NS g_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{B}} B_0\right)|0\rangle = E_0\,|0\rangle \end{aligned}$$

Damit folgt für $\mathcal{H}$ mit $\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij} e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)} = J_{ii}$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k})\,|0\rangle = -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) \left[S^-(-\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) + 2S^z(\boldsymbol{0})\right]|0\rangle$$
$$= -2NSJ_{ii} = 0$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\,|0\rangle = -\frac{1}{N} J(\boldsymbol{0}) S^z(\boldsymbol{0}) NS\,|0\rangle = -NS^2 J_0\,|0\rangle$$

und somit ist die Grundzustandsenergie E_0

$$\mathcal{H}\,|0\rangle = \left[-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) \left(S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k}) + S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\right) - g_J \mu_B B_0 S^z(\boldsymbol{0})\right]|0\rangle$$
$$= \left(-NS^2 J_0 - NS g_J \mu_B B_0\right)|0\rangle = E_0\,|0\rangle$$

Damit folgt für $\mathcal{H}$ mit $\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij} e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)} = J_{ii}$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k})\left|0\right\rangle &= -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})\left[S^-(-\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) + 2S^z(\boldsymbol{0})\right]\left|0\right\rangle \\
&= -2NSJ_{ii} = 0 \\
-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\left|0\right\rangle &= -\frac{1}{N} J(\boldsymbol{0}) S^z(\boldsymbol{0}) NS\left|0\right\rangle = -NS^2 J_0\left|0\right\rangle
\end{aligned}
$$

und somit ist die Grundzustandsenergie E_0

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\left|0\right\rangle &= \left[-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})\left(S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k}) + S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\right) - g_J \mu_B B_0 S^z(\boldsymbol{0})\right]\left|0\right\rangle \\
&= \left(-NS^2 J_0 - NS g_J \mu_B B_0\right)\left|0\right\rangle = E_0\left|0\right\rangle
\end{aligned}
$$

Damit folgt für $\mathcal{H}$ mit $\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)} = J_{ii}$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k})\,|0\rangle &= -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})\left[S^-(-\boldsymbol{k}) S^+(\boldsymbol{k}) + 2S^z(\boldsymbol{0})\right]|0\rangle \\
&= -2NSJ_{ii} = 0 \\
-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k}) S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\,|0\rangle &= -\frac{1}{N} J(\boldsymbol{0}) S^z(\boldsymbol{0}) NS\,|0\rangle = -NS^2 J_0\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

und somit ist die Grundzustandsenergie E_0

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\,|0\rangle &= \left[-\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})\left(S^+(\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{k}) + S^z(\boldsymbol{k}) S^z(-\boldsymbol{k})\right) - g_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 S^z(\boldsymbol{0})\right]|0\rangle \\
&= \left(-NS^2 J_0 - NSg_{\mathrm{J}}\mu_{\mathrm{B}} B_0\right)|0\rangle = E_0\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

Zeige nun $S^-(\boldsymbol{k})\left|0\right\rangle$ ist auch Eigenzustand. Dazu

$$
\begin{aligned}
\left[\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})\right] = -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(&\left[S^+(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})\right] S^-(-\boldsymbol{p}) + \\
&S^z(\boldsymbol{p})\left[S^z(-\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})\right] + \\
&\left[S^z(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})\right] S^z(-\boldsymbol{p})\Big) - \\
&g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 \left[S^z(\boldsymbol{0}), S^-(\boldsymbol{k})\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ldots \Big(&2S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})S^-(-\boldsymbol{p}) \\
&- S^z(\boldsymbol{p})S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) - S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})S^z(-\boldsymbol{p})\Big) + \\
&g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 S^-(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{komm.}) = g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 S^-(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(&-2S^-(\boldsymbol{k}) + \\
&2S^-(-\boldsymbol{p})S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + S^-(\boldsymbol{k}) - S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})S^z(\boldsymbol{p}) - \\
&S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})S^z(-\boldsymbol{p})\Big)
\end{aligned}
$$

$\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) = 0$

$\Rightarrow \left[\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})\right]\left|0\right\rangle = \omega(\boldsymbol{k}) S^-(\boldsymbol{k})\left|0\right\rangle$

mit $J(\boldsymbol{p}) = J(-\boldsymbol{p})$ gilt

$$\omega(\boldsymbol{k}) = g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 + 2S(J_0 - J(\boldsymbol{k}))$$

Nun folgt

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}\left(S^-(\boldsymbol{k})\left|0\right\rangle\right) \\
&\quad = S^-(\boldsymbol{k})\mathcal{H}\left|0\right\rangle + \left[\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})\right]\left|0\right\rangle \\
&\quad = \left(E_0 + \omega(\boldsymbol{k})\right) S^-(\boldsymbol{k})\left|0\right\rangle ,
\end{aligned}
$$

die Energie des Ein-Magnonen-Zustands.

Zeige nun $S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$ ist auch Eigenzustand. Dazu

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})] = -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(& [S^+(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^-(-\boldsymbol{p}) + \\
& S^z(\boldsymbol{p})\,[S^z(-\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})] + \\
& [S^z(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^z(-\boldsymbol{p})\Big) - \\
& g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0\,[S^z(\boldsymbol{0}), S^-(\boldsymbol{k})] \\
= \ldots\Big(& 2S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{p}) \\
& - S^z(\boldsymbol{p}) S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) - S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) S^z(-\boldsymbol{p})\Big) + \\
& g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0\, S^-(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{komm.}) = g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 S^-(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(& -2S^-(\boldsymbol{k}) + \\
& 2S^-(-\boldsymbol{p}) S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + S^-(\boldsymbol{k}) - S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) S^z(\boldsymbol{p}) - \\
& S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) S^z(-\boldsymbol{p})\Big)
\end{aligned}
$$

$\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) = 0$

$\Rightarrow [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle = \omega(\boldsymbol{k}) S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$

mit $J(\boldsymbol{p}) = J(-\boldsymbol{p})$ gilt

$$\omega(\boldsymbol{k}) = g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}} B_0 + 2S(J_0 - J(\boldsymbol{k}))$$

Nun folgt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\,(S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle) &= S^-(\boldsymbol{k})\mathcal{H}\,|0\rangle + [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle \\
&= (E_0 + \omega(\boldsymbol{k}))\, S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle\ ,
\end{aligned}
$$

die Energie des Ein-Magnonen-Zustands.

Zeige nun $S^-(\boldsymbol{k})|0\rangle$ ist auch Eigenzustand. Dazu

$$[\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})] = -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big([S^+(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^-(-\boldsymbol{p}) + S^z(\boldsymbol{p})\,[S^z(-\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})] + [S^z(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^z(-\boldsymbol{p})\Big) - g_j\mu_B B_0\, [S^z(\boldsymbol{0}), S^-(\boldsymbol{k})]$$

$$= \ldots\Big(2S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})S^-(-\boldsymbol{p}) - S^z(\boldsymbol{p})S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) - S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})S^z(-\boldsymbol{p})\Big) + g_j\mu_B B_0 S^-(\boldsymbol{k})$$

$$(\text{komm.}) = g_j\mu_B B_0 S^-(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(-2S^-(\boldsymbol{k}) + 2S^-(-\boldsymbol{p})S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + S^-(\boldsymbol{k}) - S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})S^z(\boldsymbol{p}) - S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})S^z(-\boldsymbol{p})\Big)$$

$\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) = 0$

$\Rightarrow [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle = \omega(\boldsymbol{k}) S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$

mit $J(\boldsymbol{p}) = J(-\boldsymbol{p})$ gilt

$$\omega(\boldsymbol{k}) = g_j\mu_B B_0 + 2S(J_0 - J(\boldsymbol{k}))$$

Nun folgt

$$\mathcal{H}\left(S^-(\boldsymbol{k})|0\rangle\right) = S^-(\boldsymbol{k})\mathcal{H}|0\rangle + [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle = (E_0 + \omega(\boldsymbol{k}))\, S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle\ ,$$

die Energie des Ein-Magnonen-Zustands.

Zeige nun $S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$ ist auch Eigenzustand. Dazu

$$[\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})] = -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big([S^+(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^-(-\boldsymbol{p}) + S^z(\boldsymbol{p})\,[S^z(-\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})] + [S^z(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^z(-\boldsymbol{p})\Big) - g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}}B_0\,[S^z(\boldsymbol{0}), S^-(\boldsymbol{k})]$$

$$= \ldots\Big(2S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})S^-(-\boldsymbol{p}) - S^z(\boldsymbol{p})S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) - S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})S^z(-\boldsymbol{p})\Big) + g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}}B_0 S^-(\boldsymbol{k})$$

$$(\text{komm.}) = g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}}B_0 S^-(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(-2S^-(\boldsymbol{k}) + 2S^-(-\boldsymbol{p})S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + S^-(\boldsymbol{k}) - S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})S^z(\boldsymbol{p}) - S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})S^z(-\boldsymbol{p})\Big)$$

$\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) = 0$

$\Rightarrow [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle = \omega(\boldsymbol{k})S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$

mit $J(\boldsymbol{p}) = J(-\boldsymbol{p})$ gilt

$$\omega(\boldsymbol{k}) = g_{\mathrm{j}}\mu_{\mathrm{B}}B_0 + 2S(J_0 - J(\boldsymbol{k}))$$

Nun folgt

$$\mathcal{H}\,(S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle) = S^-(\boldsymbol{k})\mathcal{H}\,|0\rangle + [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle = (E_0 + \omega(\boldsymbol{k}))\,S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle\ ,$$

die Energie des Ein-Magnonen-Zustands.

Zeige nun $S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$ ist auch Eigenzustand. Dazu

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})] = -\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(&[S^+(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^-(-\boldsymbol{p}) + \\
&S^z(\boldsymbol{p})\,[S^z(-\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})] + \\
&[S^z(\boldsymbol{p}), S^-(\boldsymbol{k})]\, S^z(-\boldsymbol{p})\Big) - \\
&g_j \mu_B B_0\, [S^z(\boldsymbol{0}), S^-(\boldsymbol{k})] \\
= \ldots \Big(&2S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) S^-(-\boldsymbol{p}) \\
&- S^z(\boldsymbol{p}) S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) - S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) S^z(-\boldsymbol{p})\Big) + \\
&g_j \mu_B B_0\, S^-(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{komm.}) = g_j \mu_B B_0 S^-(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p})\Big(&-2S^-(\boldsymbol{k}) + \\
&2S^-(-\boldsymbol{p}) S^z(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + S^-(\boldsymbol{k}) - S^-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) S^z(\boldsymbol{p}) - \\
&S^-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) S^z(-\boldsymbol{p})\Big)
\end{aligned}
$$

$\sum_{\boldsymbol{p}} J(\boldsymbol{p}) = 0$

$\Rightarrow [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle = \omega(\boldsymbol{k}) S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$

mit $J(\boldsymbol{p}) = J(-\boldsymbol{p})$ gilt

$$\omega(\boldsymbol{k}) = g_j \mu_B B_0 + 2S(J_0 - J(\boldsymbol{k}))$$

Nun folgt

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}\left(S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle\right) \\
&\quad = S^-(\boldsymbol{k})\mathcal{H}\,|0\rangle + [\mathcal{H}, S^-(\boldsymbol{k})]\,|0\rangle \\
&\quad = (E_0 + \omega(\boldsymbol{k}))\, S^-(\boldsymbol{k})\,|0\rangle\ ,
\end{aligned}
$$

die Energie des Ein-Magnonen-Zustands.

Sei $|0\rangle$ normiert, dann gilt:

$$\left\langle 0 \,\middle|\, S^{+}(-\boldsymbol{k})S^{-}(\boldsymbol{k}) \,\middle|\, 0 \right\rangle = \left\langle 0 \,\middle|\, \left(2S^{z}(\boldsymbol{0}) + S^{-}(\boldsymbol{k})S^{+}(-\boldsymbol{k})\right) \,\middle|\, 0 \right\rangle = 2NS$$

Normierter Ein-Magnonenzustand

$$|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2SN}} S^{-}(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$$

Analog lässt sich berechnen: $\left\langle \boldsymbol{k} \,\middle|\, S_i^z \,\middle|\, \boldsymbol{k} \right\rangle = \ldots = S - \frac{1}{N}$.
D.h. jeder Gitterplatz trägt $\hbar/N$ zur Spinwelle bei.

$\Rightarrow$ Magnonen sind Bosonen
mit S=1

z-Achse Spins

Sei $|0\rangle$ normiert, dann gilt:

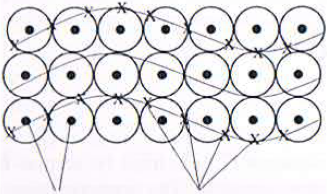
$$\left\langle 0 \right| S^{+}(-\boldsymbol{k}) S^{-}(\boldsymbol{k}) \left| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \right| \left(2S^{z}(\mathbf{0}) + S^{-}(\boldsymbol{k}) S^{+}(-\boldsymbol{k}) \right) \left| 0 \right\rangle$$
$$= 2NS$$

Normierter Ein-Magnonenzustand

$$|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2SN}} S^{-}(\boldsymbol{k}) \, |0\rangle$$

Analog lässt sich berechnen: $\left\langle \boldsymbol{k} \right| S_i^z \left| \boldsymbol{k} \right\rangle = \ldots = S - \frac{1}{N}$.
D.h. jeder Gitterplatz trägt $\hbar/N$ zur Spinwelle bei.

$\Rightarrow$ Magnonen sind Bosonen
mit S=1



 $|\uparrow\downarrow\rangle$

Naheliegender Ansatz, analog zu Phononen, für Viel-Spinwellen-Zustände wäre

$$|\psi\rangle \sim \prod_{\boldsymbol{k}} S^-(\boldsymbol{k})^{n_{\boldsymbol{k}}} |0\rangle \qquad \text{mit } n_{\boldsymbol{k}} \text{ Anzahl der Magnonen mit } \boldsymbol{k}$$

Man kann zeigen, dass dies keine Eigenzustände zu $\mathcal{H}$ sind.

Wechselwirkung ist offensichtlich nicht vernachlässigbar.

Produktansatz liefert aber dominanten Term der spontanen Magnetisierung bei tiefen Temp.

Spin 1, daher Bose-Verteilung $\langle n_{\boldsymbol{k}} \rangle = \dfrac{1}{e^{\omega(\boldsymbol{k})/k_{\mathrm{B}}T} - 1}$

Naheliegender Ansatz, analog zu Phononen, für Viel-Spinwellen-Zustände wäre

$$|\psi\rangle \sim \prod_{\boldsymbol{k}} S^{-}(\boldsymbol{k})^{n_{\boldsymbol{k}}} |0\rangle \qquad \text{mit } n_{\boldsymbol{k}} \text{ Anzahl der Magnonen mit } \boldsymbol{k}$$

Man kann zeigen, dass dies keine Eigenzustände zu $\mathcal{H}$ sind.

Wechselwirkung ist offensichtlich nicht vernachlässigbar.

Produktansatz liefert aber dominanten Term der spontanen Magnetisierung bei tiefen Temp.

$$\text{Spin 1, daher Bose-Verteilung } \langle n_{\boldsymbol{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\omega(\boldsymbol{k})/k_B T} - 1}$$

Die Rechnung der *Linearen Spin Wellen* Theorie liefert mittels der *Holstein-Primakoff* Transformation das intuitive Ergebnis:

$$M(T) = M_0 \left(1 - \frac{1}{NS} \sum_{\boldsymbol{k}} \langle n_{\boldsymbol{k}} \rangle \right)$$

Mit nähern obiges $\omega(\boldsymbol{k})$

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{k}) &= g_\mathrm{j}\mu_\mathrm{B} B_0 + \frac{2S}{N} \sum_{ij} J_{ij} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ij}}\right) \\ &\approx \quad \dots \quad + \frac{S}{N} \sum_{ij} J_{ij} (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R}_{ij})^2 \qquad \text{da } \boldsymbol{R}_{ij} = -\boldsymbol{R}_{ji} \end{aligned}$$

Quadratische Dispersionsrelation für Ferromagneten in $\mathcal{O}(\boldsymbol{k}^3)$.

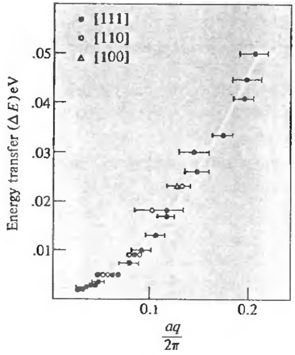
Die Rechnung der *Linearen Spin Wellen* Theorie liefert mittels der *Holstein-Primakoff* Transformation das intuitive Ergebnis:

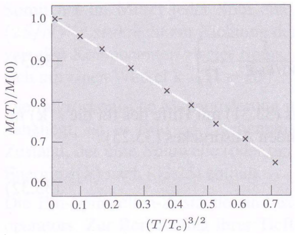
$$M(T) = M_0 \left(1 - \frac{1}{NS}\sum_{\boldsymbol{k}} \langle n_{\boldsymbol{k}} \rangle \right)$$

Mit nähern obiges $\omega(\boldsymbol{k})$

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{k}) &= g_\mathrm{j}\mu_\mathrm{B} B_0 + \frac{2S}{N}\sum_{ij} J_{ij} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ij}}\right) \\ &\approx \quad \ldots \quad + \frac{S}{N}\sum_{ij} J_{ij}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{ij})^2 \qquad \text{da } \boldsymbol{R}_{ij} = -\boldsymbol{R}_{ji} \end{aligned}$$

Quadratische Dispersionsrelation für Ferromagneten in $\mathcal{O}(\boldsymbol{k}^3)$.





Nachweis der quadratischen Dispersionsrelation der Spinwellenspektren von Ferromagneten.

Brockhouse, *Phys. Rev.* **120**, 1638 (1960)

Mit der Dispersionsrelation, sowie der Bose-Verteilung folgt näherungsweise

$$M(T) \propto T^{3/2}$$

(Blochsches $T^{3/2}$-Gesetz). Wird von Mean-Field nicht vorhergesagt.

F. Holtzberg et al., *J. Appl. Phys.* **35**, 1033 (1964)

Hubbard-Modell

$$\mathcal{H} = \sum_{\{ij\sigma\}} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i-\sigma}$$

Beschreibt sog. *Bandmagnetismus* von Fe, Co und Ni. Daraus lässt sich als Niederenergie-Grenzfall das

t-J-Modell

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_{ij\sigma} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} (1 - n_{i-\sigma})(1 - n_{j-\sigma}) c_{j\sigma} - \sum_{ij}^{i \neq j} J_{ij} \left(\boldsymbol{S}_i \boldsymbol{S}_j - \frac{1}{4} \right)$$

ableiten. Bei Halbfüllung ($N = L$) wird der erste Term Null und das Modell entspricht dem Heisenberg-Modell.

Hubbard-Modell

$$\mathcal{H} = \sum_{\{ij\sigma\}} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i-\sigma}$$

Beschreibt sog. *Bandmagnetismus* von Fe, Co und Ni.Daraus lässt sich als Niederenergie-Grenzfall das

t-J-Modell

$$\mathcal{H}_{\mathrm{eff}} = \sum_{ij\sigma} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} (1 - n_{i-\sigma})(1 - n_{j-\sigma}) c_{j\sigma} - \sum_{ij}^{i \neq j} J_{ij} \left(\boldsymbol{S}_i \boldsymbol{S}_j - \frac{1}{4} \right)$$

ableiten. Bei Halbfüllung ($N = L$) wird der erste Term Null und das Modell entspricht dem Heisenberg-Modell.

- Viele WW führen auf ein effektives Heisenberg-Modell.
- Wir haben die Grundzustandsenergie des Heisenberg-Modells sowie die kleinste Anregung, das Magnon, berechnet.
- Weitere Klasse an magnetischen Festkörpern wird durch das Hubbard-Modell beschrieben.
- Keine abgeschlossene Theorie für Ferromagnetismus.

Zusammenfassung

- Viele WW führen auf ein effektives Heisenberg-Modell.
- Wir haben die Grundzustandsenergie des Heisenberg-Modells sowie die kleinste Anregung, das Magnon, berechnet.
- Weitere Klasse an magnetischen Festkörpern wird durch das Hubbard-Modell beschrieben.
- Keine abgeschlossene Theorie für Ferromagnetismus.

Appetizer for further reading

O. Dzyapko, V. E. Demidov, G. A. Melkov and S. O. Demokritov

Universität Münster, 2011

Bose-Einstein condensation of spin wave quanta at room temperature

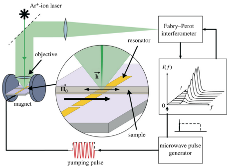


Figure 1. Experimental set-up for time-resolved investigation of redistribution over the spectrum of pumped magnons. (Online version in colour.)

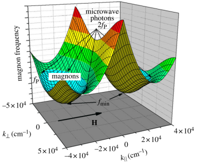


Figure 2. Calculated dispersion spectrum of magnons in an in-plane magnetized YIG film. $k_{||}$ and $k_\perp$ correspond to the components of the magnon wavevector parallel and perpendicular to the static magnetic field, respectively. The arrows illustrate the process of parametric pumping of magnons. (Online version in colour.)

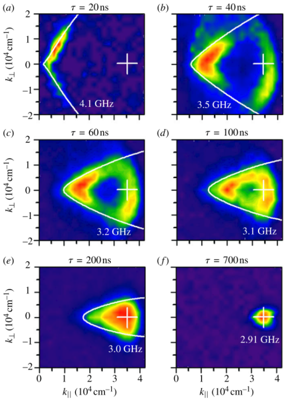


Figure 3. Colour-coded two-dimensional map of normalized BLS intensity measured for different two-dimensional magnon wavevectors $\mathbf{k}_m = (k_{||}, k_\perp)$. (a)–(f) Correspond to different delays τ after the start of the pumping pulse, as indicated. White lines are constant-frequency contours for different frequencies as indicated. The white pluses mark the position of the bottom of the magnon spectrum. $H = 1000$ Oe, $f_P = 4.1$ GHz.

- N. Ashcroft & D. Mermin
  Festkörperphysik.
- W. Nolting & A. Ramakanth
  Quantum Theory of Magnetism
- W. Nolting
  Viel-Teilchen-Theorie.
- M. Potthoff
  Vielteilchentheorie-Vorlesungsskript
- O. Dzyapko et. al.
  Phil. Trans. R. Soc. A, 2011 **369**, 3575-3587
  doi: 10.1098/rsta.2011.0128