

Nichtlineare Oszillationen

Bijan Chokouf  Nejad

Universität Würzburg

01.07.2011

Übersicht

Motivation

Theoretische Grundlagen

Methoden

Duffing Oszillator

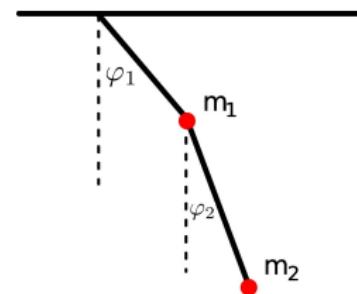
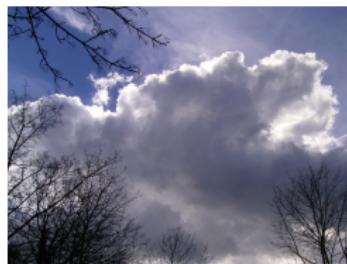
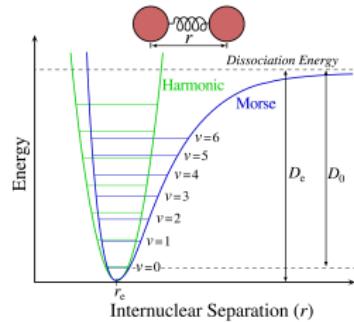
Zusammenfassung

Motivation

Was sind Nichtlineare Oszillationen?

Linearität: Systems reagiert proportional auf Veränderung eines Parameters. Bsp: Hook $\ddot{x} \propto x$. Entspricht Harm.Osz.

Zur Lösung werden DGL's linearisiert, aber eigentlich ist die Natur meist **nichtlinear!**



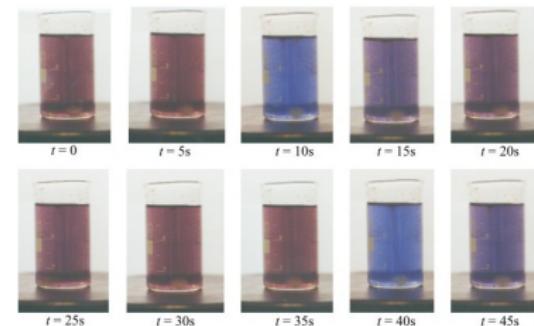
Motivation

Oszillationen: Auch bei komplexen Systemen sind periodische Bewegungen mit fester Periode möglich.

Wichtiges Forschungsgebiet. Anwendungen in Fluidmechanik, theoretischer Biologie, Neurowissenschaften, Meteorologie, etc.

Nichtlineare Systeme: DGL's mit nichtlinearen Termen, z.B. $x^2, x^3, \sin x$, etc.
Kein Superpositionsprinzip mehr.

Hilfsmittel nötig, um ohne analytische Lösung System zu beschreiben.



Chemischer Oszillator: Belousov-Zhabotinsky-Reaktion

Theoretische Grundlagen

Definitionen

Phasenraum: T^*Q auch Zustandsraum. Menge der möglichen Zustände eines Systems.

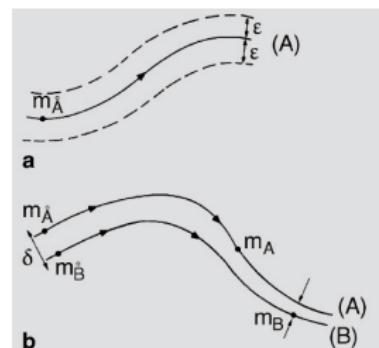
In Mechanik: $q_i, p_i \quad i = 1, \dots, S$ spannen einen $2S$ -dim Phasenportrait auf. Mit Zeit $\rightarrow 2S + 1$.

Oszillationen: Geschlossene Trajektorien im Phasenraum mit $q(t + T) = q(t), T > 0$.
Stabil (\rightarrow Grenzzyklen) oder instabil.

Bahnstabilität im Phasenraum:

Sei $\delta > 0$ geg. Bahn (A) heisst stabil, wenn
 \forall Testbahnen (B), mit $\|m_B(0) - m_A(0)\| < \delta$,

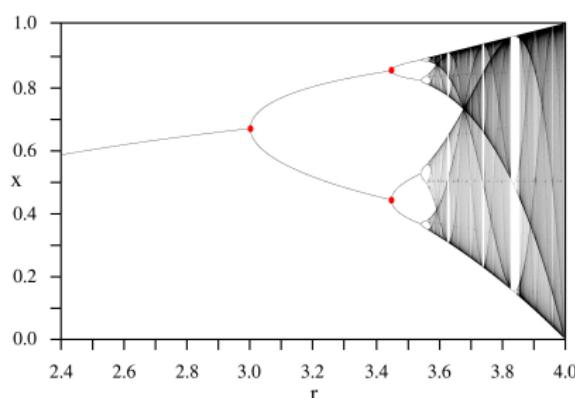
- a) $\exists \epsilon > 0$ sodass (B) eine Röhre mit Radius ϵ um (A) nie verlässt (*Bahnstabilität*) oder
- b) Abstand (B) zu (A) für $t \rightarrow \infty$ nach Null geht (*asymptotische Stabilität*)



Definitionen

Gleichgewichtspunkte: $\dot{p} = 0, \dot{q} = 0$. Auch kritischer Punkt genannt. Anzahl und Stabilität hängt von Parametern ab.

Bifurkation: Auch Verzweigung. Plötzliche Verhaltensänderung eines Systems unter Variation eines Parameters.



Fixpunkte der Logistischen Abbildung $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$

Fixpunkte: $x_{n+1} = x_n$
 Periodenverdoppelung, (d.h.
 $x_{n+2} = x_n$) an den
 Verzweigungspunkten.

$$r > 3.56994\dots^a$$

keine Periode mehr erkennbar.

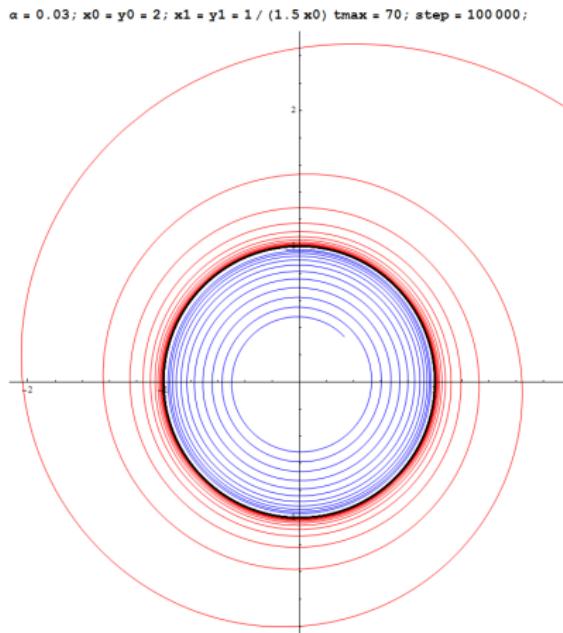
^a : Feigenbaum, 1979

Beispielhaftes Phasenraumdiagramm

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

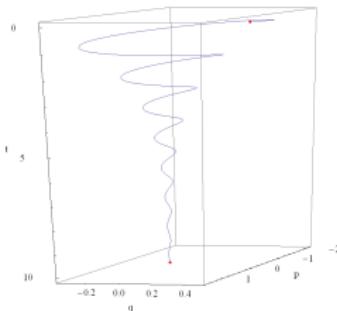
$$\Leftrightarrow \begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r(r - 1) \\ \dot{\varphi} &= 1\end{aligned}$$

J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (1983)



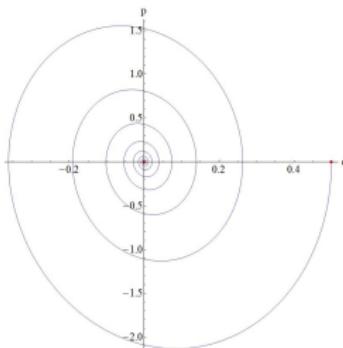
Einheitskreis: Stabiler Grenzzyklus. Kann nie erreicht werden (Eindeutigkeit). Beispiel eines Attraktors.

Attraktor



$$\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) + 25 \sin \theta(t) = 0$$

$$\theta(0) = 0.5, \dot{\theta}(0) = 0$$



Definition: Untermenge A von T^*Q mit $\dim A < \dim T^*Q$. Limes von Trajektorien für $t \rightarrow \infty$.

Einzugsgebiet: Menge aller Punkte des Phasenraums, die dem Attraktor zustreben.

Entstehung: Wird häufig durch Dissipation hervorgerufen, im Beispiel Reibung.

Beispiele: Gleichgewichtspunkte und Grenzzyklen.

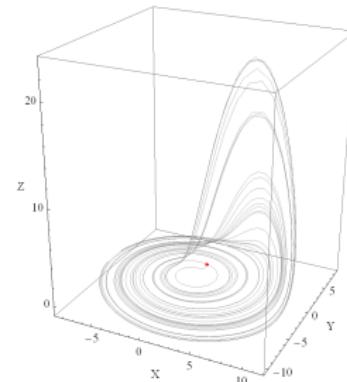
Seltsame Attraktor

Definition: Besitzen *fraktale* Struktur.
 Bahnen in Nähe des Attraktors laufen exp. auseinander. (\rightarrow Chaos).

Fraktal: Gebilde mit 'gebrochener'
 (nichtganzzahliger) Dim.
 Via Box-Counting:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

Berühmte Beispiele: Rössler-Attraktor und Lorentz-Attraktor (folgen aus Navier-Stokes).



Rössler-Attraktor

$$\begin{array}{lll} a = 0.2 & b = 0.2 & c = 5.7 \\ X(0) = 1 & Y(0) = 1 & Z(0) = 1 \end{array}$$

$$\dot{X} = -(Y + Z)$$

$$\dot{Y} = X + aY$$

$$\dot{Z} = b + XZ - cZ$$

Methoden

Wichtigste Mathematica Befehle

NDSolve: Löst gegebene DGL's mit Anfangsbedingungen numerisch. Wichtige Optionen:

`MaxSteps, MaxStepSize, AccuracyGoal=a, PrecisionGoal=p`

$\rightarrow \Delta = 10^{-a} + x10^{-p}$ bei einem Ergebnis x .

ParametricPlot: Plottet eine Kurve $\{f_x(u), f_y(u)\}$ mit $u \in [u_{min}, u_{max}]$. Ideal für Phasenraum. Wichtige Optionen:

`PlotRange, PlotStyle, AspectRatio, ImageSize (as usual)`

ListPlot: Plottet eine Menge von Punkten $\{x, y\}$.

VectorPlot: Erzeugt 2D-Vektorfelder $\vec{F}(x, y)$. Wichtige Optionen:

`VectorScale, VectorPoints`

3D: VectorPlot3D, ListPointPlot3D, ParametricPlot3D, ...

Animate, Manipulate: Darstellung von Bewegungen oder zur schnellen Betrachtung der Abhängigkeit von einem Parameter.

Poincaré Schnitte

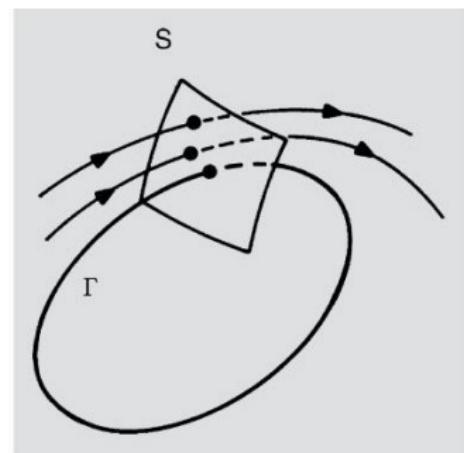
Hilfreich um Phasendiagramme höherer Dimension zu studieren.

→ Betrachte Durchstoßpunkte mit Hyperfläche S kleinerer Dimension \perp periodischer Lösung Γ .

Damit wird T^*Q nur bei $t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots$ betrachtet.



Bei chaotischen Systemen wird der Phasenraum vollständig ausgefüllt. Poincare-Schnitt erlaubt Blick auf seltsamen Attraktor.



Florian Scheck,
Theoretische Physik 1: Mechanik 6.3.4 (2007)

Fourier Analyse

Bei periodischen Bewegungen oft aussagekräftiger als Phasenraum oder Bewegungskurve.

Listen numerischer Daten → Diskrete Fourier-Transformation (DFT) über Fourier[].

DFT v_s einer Liste u_r der Länge n ist definiert als:

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n u_r e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n}$$

Andere Konventionen in Optionen wählbar.

Betrag Abs[] von v_s erlaubt qualitative Aussage, über Anzahl der Frequenzen bzw. ob es sich um periodische Lösung handelt.

Duffing Oszillator

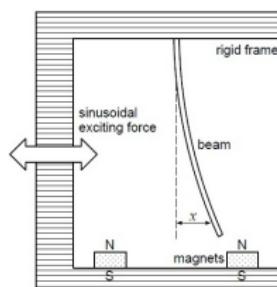
$$q''[t] + \gamma q'[t] - a q[t] + b q[t]^3 = f_0 \cos[\omega_d t]$$

Duffing Oszillator

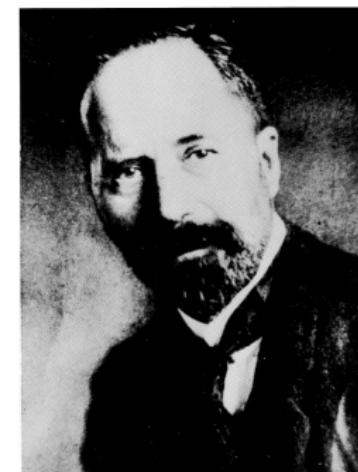
$$q''[t] + \gamma q'[t] - aq[t] + bq[t]^3 = f_0 \cos[\omega_d t]$$

[1918] G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz.

$bq[t]^3$ -Term entspricht Taylor-Entwicklung einer sin-förmigen Rückstellkraft (vgl. Math. Pendel).



Experimenteller Aufbau
mit 2 stabilen und
1 labilen Ruhelage.



Georg Duffing (1861-1944)

F.C. Moon and P.J. Holmes,
Magnetoelastic strange attractor, Journal
of Sound & Vibration, 65, 275-296 (1979)

TECHNISCHE MECHANIK,
Band 14, Heft 1,(1994)

Duffing Oszillatör

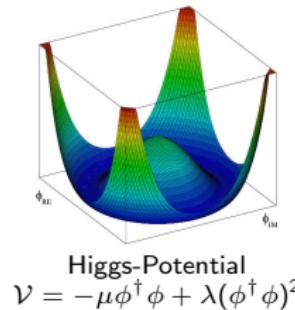
Betrachte zunächst: $q''[t] - \underbrace{aq[t] + bq[t]^3}_{=-F} = 0$

Für das zugehörige Potential:

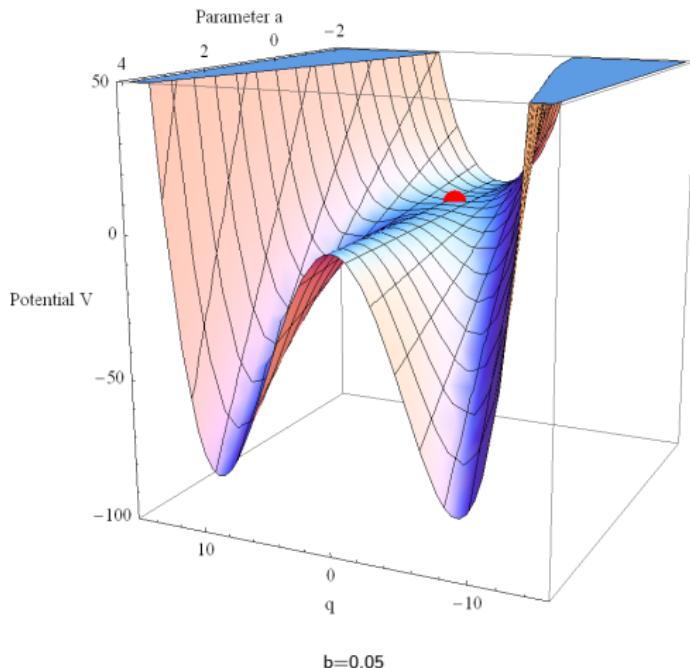
$$V = - \int F dq = - \int F \frac{dq}{dt} dt = \boxed{\frac{1}{4} bq[t]^4 - \frac{1}{2} aq[t]^2}$$

a, b bel. → Nächsthöhere Ordnung eines symmetrischen Potentials.

a, b > 0 → Projektion des Higgs-Potentials



Duffing Potential



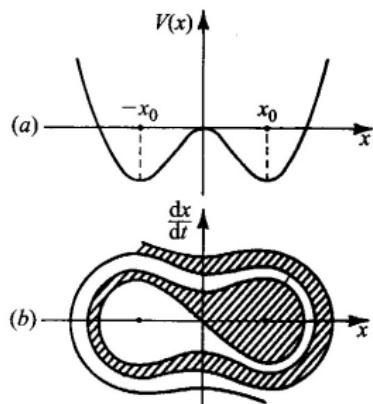
$$V = \frac{1}{4} b q[t]^4 - \frac{1}{2} a q[t]^2$$

$a < 0 \rightarrow$ Einfacher Potentialtopf.

$a = 0 \rightarrow$ Bifurkation.

$a > 0 \rightarrow$ Doppelmulden-Potential
mit 3 GGW-Pkten.

Gedämpfter Duffing Oszillatör



$$q''[t] + \gamma q'[t] - aq[t] + bq[t]^3 = 0$$

Zusätzlicher Dämpfungsterm erzeugt
2 Attraktoren.

Vektorplot gibt Bewegung im
Phasenraum vor.

Einzugsgebiet des Attraktors wird
durch verschiedene Trajektorien
sichtbar.

Einzugsgebiete der Attraktoren des gedämpften Duffing Oszillators
Dr. Eduard Ott, Scholarpedia: 1(8):1701 (2006)



Getriebener Duffing Oszillatör

$$q(0) = 2, p(0) = -1.5$$

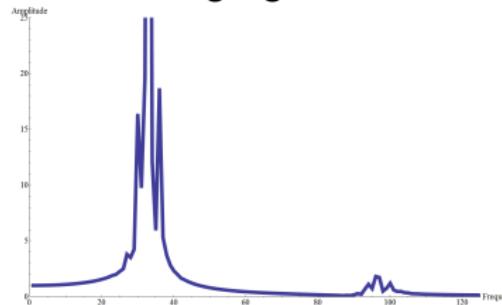
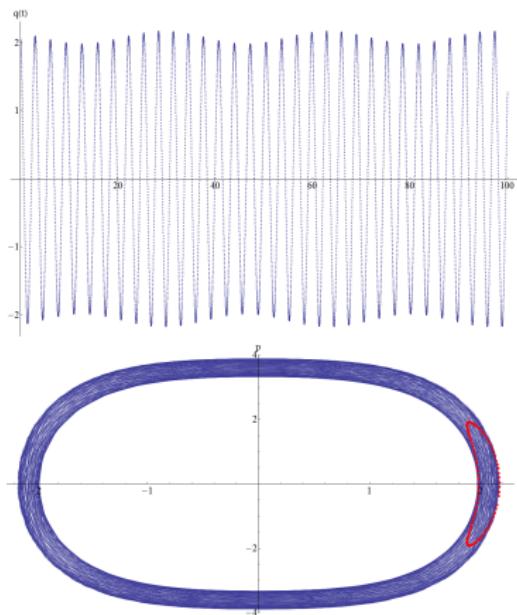
$$a = -1, b = 1, f_0 = 0.25, \omega_d = 2$$

$$q''[t] - aq[t] + bq[t]^3 = f_0 \cos[\omega_d t]$$

Äußere Kraft erzwingt Frequenz der eigentlichen Schwingung (Ellipse).

Poincaré-Schnitt macht Überlagerung 2. Schwingung sichtbar.

Fourier-Spektrum bestätigt Vermutung.
Äußere Anregung $\hat{=}$ Größtem Peak.

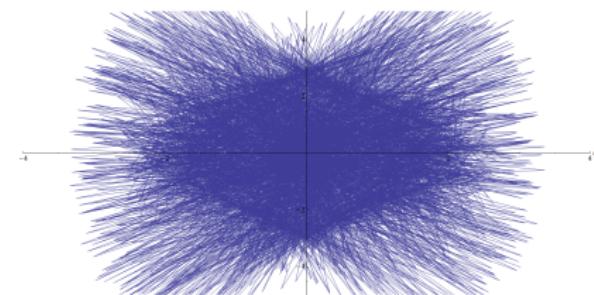
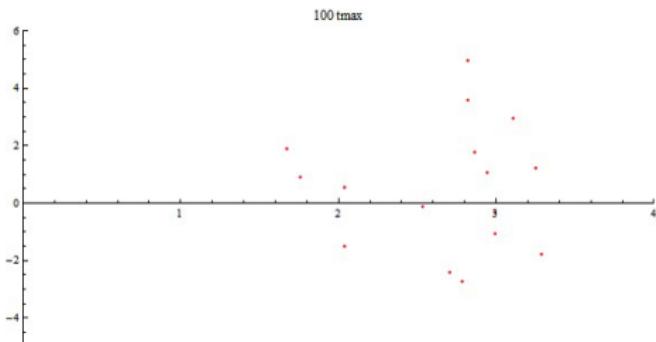


Wege ins Chaos

Parameter mit denen Ueda 1961 Chaos entdeckte.

Startbedingungen beliebig. $q'' + 0.05q' + q^3 = 7.5\cos[t]$

Y. Ueda, *Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation*,
Journal of Statistical Physics, 20, 181-196 (1979)



Poincaré-Schnitt mit Anregerfrequenz

Phasenraum, $t_{max} = 5000$

Zusammenfassung

- ▶ Nichtlineare Systeme auch ohne explizite Lösung beschreibbar
- ▶ Mathematica liefert Werkzeuge für Berechnung und Visualisierung
- ▶ Gleichgewichtspunkte und Grenzzyklen sind nichtchaotische Attraktoren
- ▶ Bifurkationspunkte unterteilen ein System
- ▶ Bislang keine vollständige Analyse des Duffing-Oszillators
- ▶ Gewisse Parameter führen zu seltsamen Attraktoren und Chaos andere zu periodischen Bewegungen

