Representasi Graf pada Matriks

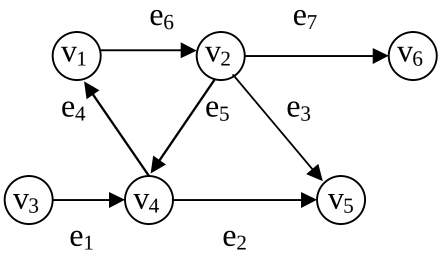
Di dalam suatu graf seringkali perhitungan-perhitungan yang dikerjakan akan lebih sederhana bila graf yang dihadapi dinyatakan dalam bentuk matriks. Dalam pembahasan ini, ada tiga bentuk representasi matriks dari suatu graf, yaitu:

1. Matriks Adjasensi

Matriks Adjasensi dari G dengan $m \times m$ matriks $A = [a_{ij}]$ menunjukkan jumlah busur yang menghubungkan v_i dan v_j. X_{ij} bernilai 1 jika busur (i. j) $\in$ E mempunyai arah dari simpul i $\in$ V ke simpul j $\in$ V, dan bernilai 0 jika tidak ada hubungan sama sekali. Jika *loop* diberi nilai 2.

Jika graf G merupakan graf tak berarah, setiap busur (i, j) dapat dinyatakan sebagai suatu busur dengan dua arah. Dalam hal ini matriks Adjasensi X merupakan matriks simetris.

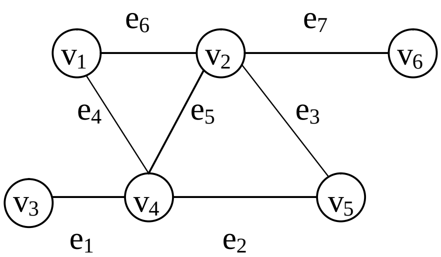
Contoh 3.10 :



Gambar 3.17

Matriks Adjasensi X dari graf berarah pada Gambar 3.17 adalah :

$$X = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Gambar 3.18

Matriks Adjasensi X dari graf tak berarah pada Gambar 3.18 adalah :

$$X = [X_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beberapa sifat penting dapat diturunkan dari representasi matriks suatu graf berarah maupun graf tak berarah. Dengan melihat contoh di atas, dapat diturunkan sifat bahwa :

Matriks Adjasensi X dari graf berarah :

- Suatu kolom yang seluruh elemennya bernilai 0 menyatakan suatu sumber.
- Suatu baris yang seluruh elemennya bernilai 0 menyatakan suatu muara.
- Jika seluruh elemen diagonal utamanya bernilai 0, maka menyatakan tidak terdapat *loop* dalam graf tersebut. Sebaliknya, suatu elemen yang tidak bernilai 0 pada diagonal menyatakan suatu loop.
- Matriks X tidak simetri.

Matriks Adjasensi X dari graf tak berarah :

- Jika pada graf ditambahkan suatu simpul yang tidak terhubung, maka pada matriks X akan ditambahkan pula baris dan kolom yang seluruh elemennya bernilai 0.
- Matriks X simetris.
- Elemen yang tidak bernilai 0 pada diagonal menyatakan suatu *loop*.

2. Matriks Insidensi

Secara khusus, jika $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kita definisikan sebagai matriks Insidensi dari G dengan ordo $m \times n$. Matriks Insidensi Z dari graf berarah merupakan matriks $[z_{ij}]$ di mana z_{ij} bernilai 1 jika simpul i merupakan simpul awal busur, z_{ij} bernilai -1 jika simpul i merupakan simpul akhir busur, dan bernilai 0 jika lainnya. Berdasarkan Gambar 3.17, matriks Insidensi Z dari graf berarah tersebut adalah :

$$Z = [Z_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Insidensi Z dari graf tak berarah adalah matriks $[z_{ij}]$ di mana z_{ij} bernilai 1 jika simpul i dihubungkan dengan busur dan bernilai 0 jika lainnya. Matriks Insidensi dari graf tak berarah Gambar 3.18 adalah :

$$Z = [Z_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari representasi matriks Insidensi Z pada contoh di atas dapat dilihat bahwa :

Pada graf tak berarah :

- Jumlah elemen tidak nol pada suatu baris menunjukkan derajat dari simpul.
- Setiap kolom mempunyai tepat dua elemen yang tidak nol.
- Suatu kolom yang hanya mempunyai satu elemen tidak nol menunjukkan suatu gelung.

Pada graf berarah :

- Pada suatu baris yang semua elemen-elemen tidak nolnya adalah 1 menunjukkan bahwa barisan (simpul) merupakan suatu sumber.
- Suatu baris yang semua elemen-elemen tidak nolnya adalah -1 menunjukkan bahwa baris (simpul) merupakan muara.
- Jumlah elemen 1 pada suatu baris menunjukkan derajat keluar dari baris (simpul). Jumlah elemen -1 pada suatu baris menunjukkan derajat masuk dari simpul.
- Setiap kolom mempunyai satu elemen -1 dan satu elemen 1. Hal ini sebagai akibat bahwa setiap busur selalu mempunyai satu simpul awal dan satu simpul akhir.