1 PENDAHULUAN

1.1 DETERMINAN ORDO DUA DAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN DUA ANU

Pandang 4 bilangan a, b, c, d yang disusun secara bujur sangkar :

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad \text{...............................} \ (1.1)$$

Bilangan *ad – cd* didefinisikan sebagai *determinan ordo* dua dari susunan bilangan (1.1) di atas.

Dinotasikan sebagai :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$$

Contoh (1.1)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 2.2 - 3.(-1) = 7$$

Sekarang pandang suatu Sistem persamaan derajat pertama dengan dua anu, x dan y ·

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned}$$

Pasangan bilangan $x = x_0$ dan $y = y_0$ disebut solusi *(penyelesaian)* dari Sistem (1.2) jika x_0 dan y_0 memenuhi Sistem (1.2) tersebut. Dengan cara biasa, kita eliminir y sebagai berikut :

kalikan persamaan pertama dengan d dan persamaan kedua dengan b diperoleh :

$$\begin{aligned} ad\ x + bd\ y &= pd \\ cd\ x + db\ y &= qb \\ \hline (ad - cb)\ x \quad &= pd - qb \end{aligned} \ -$$

$$x = \frac{pd - qb}{ad - cb} \qquad \text{.................... (1.3)}$$

Sekarang andaikan dari (1.2) kita eliminir x akan diperoleh :

$$y = \frac{pc - qa}{bc - da} = \frac{aq - cp}{ad - cb}$$

Kalau kita sebut

$$t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$t_x = \begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix}$$

yaitu determinan dengan mengganti kolom I dengan kolom konstanta dan

$t_y = \begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix}$ yaitu determinan dengan mengganti

kolom 2 dengan kolom konstanta maka (1.3) dan (1.4) menjadi :

$$x = \frac{t_x}{t} \text{ dan } y = \frac{t_y}{t} \qquad \text{.................... (1.5)}$$

(dengan syarat t tidak sama dengan 0). Bila = 0 maka Sistem akan mempunyai solusi yang tidak hingga banyaknya atau tidak mempunyai solusi sama sekali.

Contoh (1.2).

Cari solusi dari Sistem

$$7x + 9y = 23$$
$$4x - 2y = 6$$

Jawab :

$$t = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 7.(-2) - 4.9 = -50$$

$$t_x = \begin{vmatrix} 23 & 9 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 23.(-2) - 6.9 = -100$$

$$t_y = \begin{vmatrix} 7 & 23 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 7.6 - 4.23 = -50$$

$$x = \frac{100}{50} = 2 \quad , \quad y = \frac{-50}{-50} = 1$$

1.2. DETERMINAN ORDO 3

Selanjutnya, pandang susunan bilangan :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1.6)}$$

maka determinan (ordo 3) dari (1.6) didefinisikan sebagai :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \ \ldots\ldots\ldots \text{(1.7)}$$

Untuk lebih mudah mengingatnya :

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ \hline a & b & c & a & b \\ d & c & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ \hline & & + & + & + \end{array}$$

Contoh (1.3) :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 12 & 19 & 5 & 12 \\ 3 & 9 & 17 & 3 & 9 \end{array}\right. = \begin{array}{l} 2.12.17 + 4.19.3 + 6.5.9 - \\ 3.12.6 - 9.19.2 - 17.5.4 = 8. \end{array}$$

Untuk Sistem persamaan dengan 3 anu x, y, z rumus (1.5) dapat diperluas sehingga :

$$x = \frac{t_x}{t}, \quad y = \frac{t_y}{t}, \quad z = \frac{t_z}{t} \quad (t <> 0) \qquad \text{..........} \ (1.8)$$

Contoh (1.4) :

Hitung solusi dari sistem

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 3x - 5y + 3z &= 1 \\ 2x + 7y - z &= 8 \end{aligned}$$

Jawab :

$$t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

$$t_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \qquad t = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

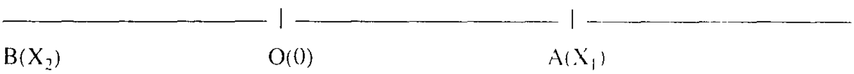
$$t_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33$$

Jadi x = y = z = 1.

1.3. GARIS BILANGAN

Pandang suatu garis g. Kita ambil suatu titik tertentu O, maka g akan terbagi 2 bagian :

Sebelah kiri O dan sebelah kanan O. Setiap titik sebarang P pada g akan dapat ditentukan dengan cara mengukur jarak OP. Untuk itu kita tetapkan tanda negatif untuk titik-titik di sebelah kiri O dan tanda positif untuk titik-titik di sebelah kanan O. Titik O disebut *titik asal*, sedangkan bilangan (yang menyatakan jarak) berikut tandanya, disebut absis.



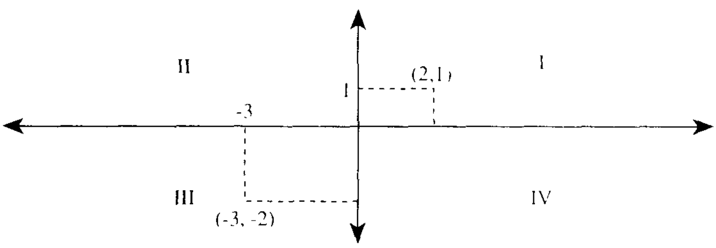
Gambar (1)

Jarak 2 titik $A(x_1)$ dan $B(x_2)$ adalah

$$| x_1 - x_2 | \qquad \text{(harga mutlak)}$$

1.4. SISTEM KOORDINAT PADA BILANGAN DATAR

Untuk menyatakan letak suatu titik pada bilangan datar kita pergunakan 2 buah garis (biasanya saling tegak lurus) yang berpotongan di titik O. Kedua garis tersebut dinamakan sumbu koordinat. Garis yang horisontal disebut sumbu X dan yang vertikal disebut sumbu Y. Setiap titik dapat dinyatakan dengan pasangan terurut bilangan (x,y) yang disebut *koordinat* dari titik tersebut. x disebut *absis* dan y disebut *ordinat.*



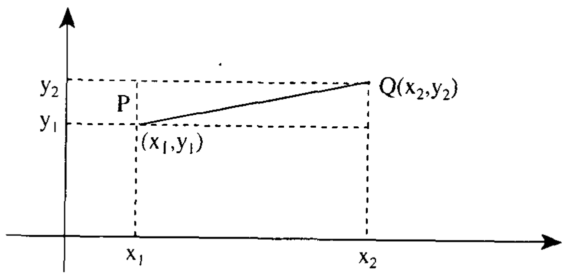
Gambar (2)

Bidang datar akan terbagi 4 bagian yang masing-masingnya disebut kuadran. Sistem koordinat yang sumbu-sumbunya saling tegak lurus disebut sistem koordınat *Cartesian.*

1.5 JARAK ANTARA 2 TITIK SEBARANG $P(X_1,Y_1)$ DAN $Q(X_2,Y_2)$.

Pandang segitiga PQR siku-siku.

$$PR = \left| x_1 - x_2 \right|$$
$$QR = \left| y_1 - y_2 \right|$$



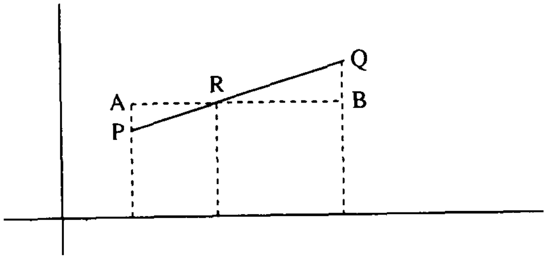
Gambar (3)

Menuut Phytagoras :

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$ adalah jarak 2 titik P dan Q.

1.6. KOORDINAT TITIK YANG MEMBAGI POTONGAN (SEGMEN) GARIS PQ ATAS PERBANDINGAN m : n

Misalkan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ dan titik $R(x_R,Y_R)$ ımembagi potongan garis PQ atas perbandingan m : n. Tarik ARB // sb. X.



Gambar (4)

$$PR : PQ = m : n \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{AP}{QB} = \frac{RD - PC}{QE - RD} = \frac{y_R - y_1}{y_2 - y_R}$$

$$m(y_2 - y_R) = n(y_R - y_1)$$

$y_R = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ dan dengan menarik garis-garis tegak lurus ke sumbu Y

dan secara yang sama, diperoleh :

$$x_R = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

Di dalam hal khusus untuk m : n = 1 : 1, maka R adalah titik tengah potongan garis PQ, maka :

$$R\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

Contoh (1.5):

P(-4,5), Q(2,-4) maka koordinat titik R yang membagi P dan Q atas perbandingan 1 : 2 adalah

$$R\left(\frac{1.2 + 2.(-4)}{1 + 2}, \frac{1.(-4) + 2.5}{1 + 2}\right)$$

atau R (-2,2).

1.7. BEBERAPA CONTOH SOAL

Contoh (1.6) :

Tunjukan bahwa segitiga ABC dengan A(2,-2), B(-3,-1), C(1,6) adalah segitiga samakaki.

Jawab :

$$AB = \sqrt{(2 + 3)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{26}$$

$$AB = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-1 - 6)^2} = \sqrt{65}$$

Karena AC = BC maka segitiga ABC samakaki.

Contoh (1.7) :

Tunjukkan bahwa segitiga ABC dengan A(3,-2), B(-2,3), C(0,4) adalah segitiga siku-siku

Jawab :

$$AB = \sqrt{(3 + 2)^2 + (-2 + 3)^2} = \sqrt{50}$$

$$AC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 + 4)^2} = \sqrt{45}$$

$$BC = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{5}$$

Karena terpenuhi dalil Phytagoras : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ maka segitiga ABC siku-siku di C.

Luasnya = $^1/_4 . \sqrt{45}.\sqrt{5} = 7^1/_2$.

Contoh (1.8) :

Tunjukkan bahwa ke 3 titik : A(1,3), B(-2,-3), C(3,7) terletak pada sebuah garis lurus

Jawab :

$$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(1-3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-7)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Karena BA + AC = BC maka ke 3 titik terletak pada sebuah garis lurus.

Contoh (1.9)

Tentukan titik pusat lingkaran luar segitiga ABC, bila A (2,3), B(4,-1), C(5,2).

Jawab :

Misalkan titik yang diminta adalah P(x,y) maka

$$AP = \sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2}$$

$$AC = \sqrt{(4-x)^2 + (-1-y)^2}$$

di mana
AP = BP = CP

$$BC = \sqrt{(5-x)^2 + (2-y)^2}$$

$$AP^2 = BP \rightarrow (2-X)^2 + (3-Y)^2 = (4-X)^2 + (-1-Y)^2$$
$$\text{atau } 4x - 8y = 4 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

$$AP^2 = CP^2 \rightarrow (2-X)^2 + (3-Y)^2 = (5-X)^2 + (2-Y)^2$$
$$\text{atau } 6x - 2y = 16 \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Dengan menyelesaikan persamaan (1) dan (2) diperoleh x = 3 dan y = 1, atau P(3,1).

Contoh (1.10) :

Tentukan koordinat titik berat segitiga ABC, dengan A(2,-1), B(6,7), C(-4,-3).

Jawab :

Misalkan titik D adalah titik tengah AB maka

$x_D = {}^1/_2\,(2 + 6) = 4,\ y_D = {}^1/_2\,(-1 + 7) = 3$

Misalkan titik berat segitiga ABC adalah Z, berarti

CZ : ZD = 2 : 1 atau

$$x_Z = \frac{2.x_D + 1.x_C}{2 + 1} = \frac{2.4 + 1.-4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$x_Z = \frac{2.y_D + 1.x_C}{2 + 1} = \frac{2.3 + 1.-3}{3} = 1$$

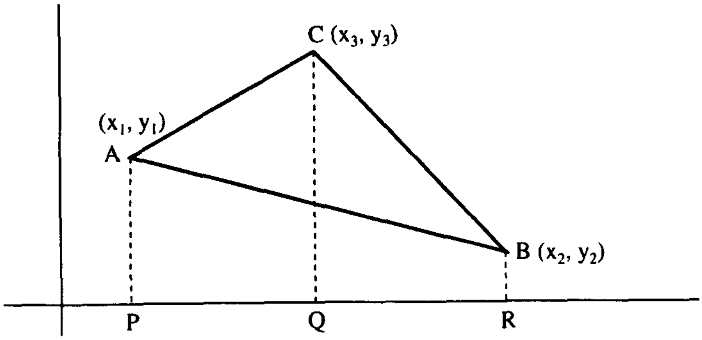
Jadi Z(4/3,1).

Contoh :

Buktikan bahwa luas segitiga ABC dengan $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ adalah harga mutlak dari :

$${}^1/_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Jawab :



Gambar (5)

Luas ABC = Luas APQC + Luas BRQC – Luas ABRP

Maka luas ABC = $^1/_2\ (y_1 + y_2)(x_3 - x_1) + {}^1/_2\ (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - {}^1/_2\ (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = {}^1/_2\ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$

atau $\quad ^1/_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

Luas diambil harga mutlaknya.

Misalkan A(-8,-2), B(-4,-6), C(-1,5), maka luas segitiga ABC :

$$^1/_2 \left|\begin{array}{ccc|cc} -8 & -2 & 1 & -8 & -2 \\ -4 & -6 & 1 & -4 & -6 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right|$$

Luas segitiga ABC = $^1/_2\ \{(-8).(-6).1 + (-2).1.(-1) + 1.(-4).5$
$(-1).(-6).1 - 5.1.(-8) - 1.(-4).(-2)\}$
$= 28.$

1.8. SOAL LATIHAN

1. Hitung determinan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = 32,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Gunakan determinan untuk menghitung solusi dari

(a) $16x + 23y = 55$
$13x - 9y = 17$

(b) $2x - 23y = 17$
$11x + y = 221$

Jawab : (a) $x = 2, y = 1$ (b) $x = 20, y = 1$

3. Hitung determinan:

(a) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{matrix}$ (c) $\begin{matrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{matrix}$

Jawab : (a) 55 (b) 67 (c) 14

4. Gunakan determinan untuk menghitung solusi dari :

(a) $\begin{vmatrix} 3y + 2x = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2x + 3 = y + 3z \\ z + y + 7 - 4x \\ 5y - x = 6 + 3z \end{vmatrix}$

Jawab : (a) $x = 3, y = -1, z = 2$
(b) $x = 1, y = 2, z = 1$

5. Tunjukkan bahwa segitiga-segitiga berikut adalah samakaki

(a). (2,4), (5,1), (6,5) (b). (6,7), (-8,-1), (-2,-7)

6. Tunjukkan bahwa segitiga-segitiga berikut adalah siku-siku tentukan luasnya.

   a. (0,9), (-4,-1), (3,2) (b). (10,5), (3,2), (6,-5)

   Jawab : (a) 29 (b) 29

7. Diketahui titik A(-1,-2), B(0,1), C(-3,2). Tentukan koordinat titik D sehingga ABCD jajaran genjang.

   Jawab : (-4, -1)

8. Tentukan koordinat titik pusat lingkaran luar segitiga ABC bila

   (a). A(3,3), B(6,2), C(8,-2)

   (b). A(4,3), B(2,7), C(-3,-8)

   Jawab : (a). (3,-2) (b). (-5,1)

9. Tentukan koordinat titik berat segitiga :

   (a). (5,7), (1,-3), (-5,1) (b). (3,6), (-5,2), (7,-6)

   Jawab : (a) (1/3, 5/3) (b). (5/3, 2/3)

10. Tentukan koordinat titik-titik sudut suatu segitiga jika titik tengah sisi-sisinya (5,2), (-2,1), (2,-3).

    Jawab : (1,6), (9,-2), (-5,-4).

11. Diketahui segiempat A(-2,6), B(4,4), C(6,-6), D(2,-8).

    (a). Tunjukkan bahwa segmen garis yang menghubungkan titik-titik tengah AD dan BC serta yang menghubungkan titik-titik tengah AB dan CD saling berpotongan di tengah-tengah.

    (b). Tunjukkan bahwa segment-segmen garis yang menghubungkan sisi-sisi yang berdampingan, merupakan sebuah jajaran genjang.

12. Diketahui titik A(-2,-1) dan B(3,3). Titik C pada perpanjangan AB sehingga BC = 3AB. Tentukan koordinat titik C.

Jawab : (18,15)

13. Buktikan titik (1,-2), (-5,1) dan (7,-5) terletak pada satu garis lurus.

14. Hitung luas segitiga-segitiga berikut :
(a). (2,-3), (4,2), (-5,-2)   (b). (-3,4), (6,2), (4,-3)
(c). (p,q+r) (q,r+p), (r,p+q)

Jawab : (a). 18 1/2   (b). 24 1/2   (c). nol

15. Hitung luas segibanyak dengan titik sudut :
(a). (2,5), (7,1), (3,-4), (-2,3)
(b). (4,0), (-3,-2), (-6,1), (2,-4)
(c). (1,5), (-2,4), (-3,-1), (2,-3), (5,1)

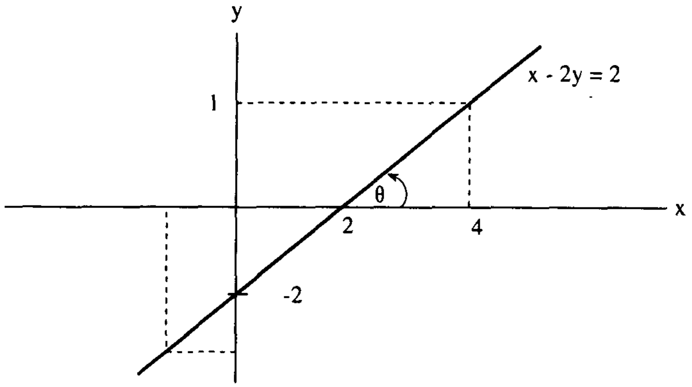
Jawab : (a). 39 1/2   (b). 25 1/2   (c). 40

1.9. GARIS LURUS PADA BIDANG

Pandang misalnya sebuah persamaan derajat pertama dengan 2 anu x - 2y = 2. Ternyata terdapat banyak tak terhingga solusi dari persamaan di atas, misalnya :

x	= -2	0	2	4	10	....
Y	= -2	-1	0	1	4	.... dan sebagainya.

Kalau kita gambar, maka tempat kedudukan dari titik-titik yang memenuhi persamaan di atas merupakan sebuah garis lurus (singkatnya: garis).



Gambar (6)

Tempat kedudukan titik-titik (x,y) sehingga terdapat hubungan linier :

$Ax + By + C = 0$ merupakan suatu garis lurus

Untuk $B <> 0$ bentuk $Ax + By + C = 0$ dapat ditulis

$$y = mx + n \;;$$

di sini:

$$m = -\frac{A}{B}, \quad n = -\frac{C}{B}$$

Lebih lanjut : $m = tg\ Q$, disebut koefisien arah atau gradien garis, Q = sudut terkecil yang diukur berlawanan arah perputaran jarum jam dari sumbu x positif ke garis tersebut.

Pada gambar di atas : $x - 2y = 2$

$\rightarrow y = 1/2x - 1$

di sini $m = tg\ Q = 1/2$

Akibat : 2 garis akan sejajar $\longleftrightarrow$ koefisien arahnya sama.

Contoh (1.12):

Periksa apakah titik (2,1) terletak pada garis

$2x + y = 4$?

Jawab :

$x = 2, y = 1 \rightarrow 2.2 + 1 = 5 = 4$ jadi tidak terletak pada garis.

1.10. KEDUDUKAN 2 BUAH GARIS

Dua garis $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

dan $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ akan:

a. berpotongan $\longleftrightarrow$ $A_1/A_2 <> B_1/B_2$
b. sejajar $\longleftrightarrow$ $A_1/A_2 <> B_1/B_2 <> C_1/C_2$ .... (2.1)
c. berimpit $\longleftrightarrow$ $A_1/A_2 <> B_1/B_2 = C_1/C_2$

Contoh (1.13):

Bagaimana kedudukan ke 2 garis

$2x + 3y = 5$ dan $4x + 6y = 7$?

Jawab :

$A_1/A_2 = 2/4$, $B_1/B_2 = 3/6$, $C_1/C_2 = -5/-7 = 5/7$

Jadi ke 2 garis adalah sejajar

Contoh (1.14) :

Tunjukkan bahwa garis

$4x - 2y - 8 = 0$

dan $x + 2y = 7$ berpotongan.

Carititik perpotongannya.

Jawab :

Ternyata 4/1 <> -2/2, jadi berpotongan.

Mencari titik potong (titik persekutuan ke 2 garis) sama saja dengan mencari solusi sistem persamaan:

$$4x - 2y = 8$$
$$x + 2y = 7$$

Jadi dengan determinan: $t = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

$t_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 30 \quad t_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20$

Jadi titik potong (3,2)

1.11. MENGGAMBAR GARIS

Cukup kita tentukan 2 buah titik pada garis tersebut lalu dihubungkan (biasanya kita tentukan titik-titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y).

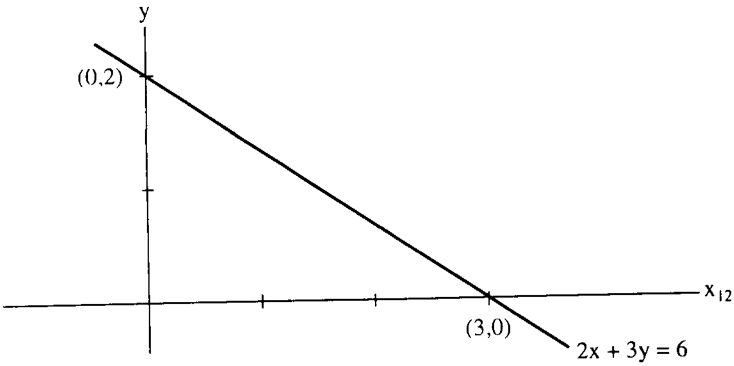
Contoh (1.15) :

Gambarkan garis $2x + 3y = 6$.

Jawab :

Titik potong dengan sumbu X : $y = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3,0)$

Titik potong dengan sumbu Y : $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0,2)$



Gambar (7)

1.12. SUDUT ANTARA 2 GARIS

Selalu dimaksudkan lancip antara ke 2 garis tersebut.

Bila bentuk g_1 dan g_2 adalah :

$g_1 : y = m_1 x + n_1$

$g_2 : y = m_2 x + n_2$

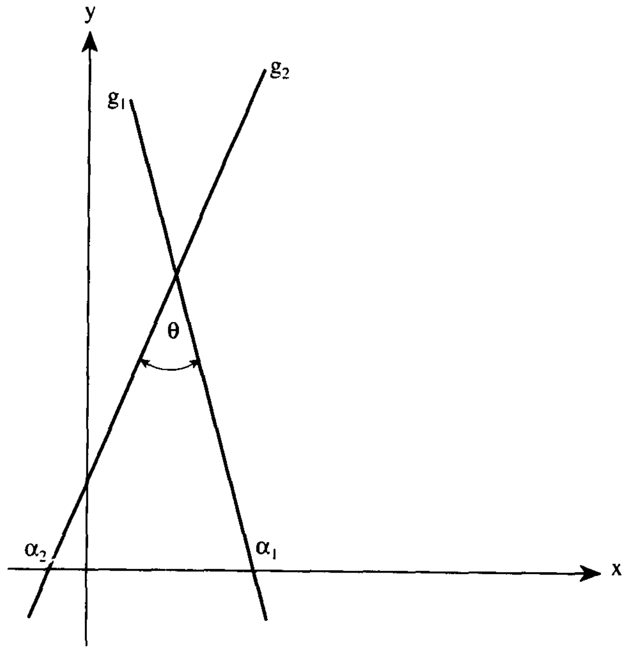
$$\text{tg } \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Sedangkan bila :

$g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$g_2 : A_2x + B_2y + C_1 = 0$

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$$



Gambar (8)

Tegaklurus :

Dua garis akan saling tegak lurus (berarti $\theta = 90^\circ$ tg θ = tak hingga) maka penyebut persamaan akan = 0

Dua garis saling tegak lurus $\longleftrightarrow 1 + m_1 m_2 = 0$

atau $m_1 m_2$ = atau $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

Contoh (1.16) :

Berapa besar sudut antara garis $7x - 3y + 5 = Q$ dan $5x + 2y + 13 = 0$?

Jawab :

Sudut antara ke 2 garis tersebut misalkan θ.

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{7.5 - 3.2} \right| = \frac{29}{29} = 1 \rightarrow q = 45^{o}$$

Contoh (1.17) :

Cari persamaan garis yang melalui titik (2,3) dan tegaklurus garis $4x + 3y = 5$.

Jawab :

Garis $4x + 3y = 5$ dapat ditulis $y = -4/3x + 5/3$

Jadi $m_1 = -4/3$. Syarat tegak lurus $m_1m_2 = -1$

berarti $m_2 = 3/4$.

Misalkan garis yang diminta : $y = 3/4\ x + n$

Karena titik (2,3) pada garis berarti :

$$3 = 3/4.2 + n \rightarrow n = 3/2$$

Persamaan garis : $y = 3/4\ x + 3/2$

atau $3x - 4y + 6 = 0$

1.13. BEBERAPA BENTUK PERSAMAAN GARIS

Suatu persoalan tertentu lebih cepat untuk diselesaikan bila menggunakan rumus yang sesuai dengan persoalan tersebut.

Karena itu diberikan di sini bentuk persamaan garis:

1. Bentuk Umum : $Ax + By + C = 0$
2. // sumbu X : $y = k$
3. // sumbu Y : $x = y$

   k = konstanta (yang menyatakan jarak ke sumbu).
4. Melalui (x_1,y_1) dengan koefisien arah m :

   $y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$

5. Melalui (x_1,y_1) dan (x_2,y_2) :

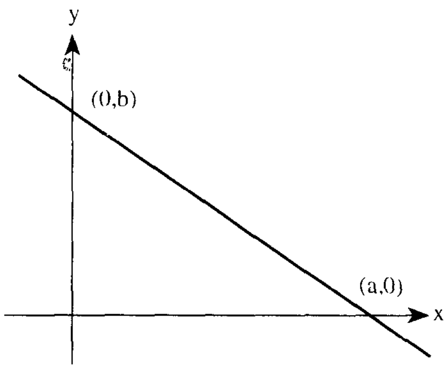
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Garis ini mempunyai koefisien arah : $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Bentuk di atas dapat kita tulis pula sebagai :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. Melalui (a,0) dan (0,b) :



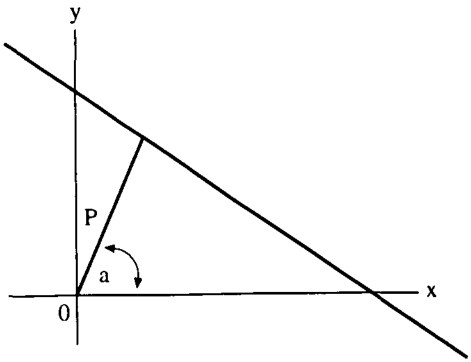
Gambar (9)

7. Bentuk normal :

x cos _ + y sin _ = p

p = jarak (0,0) ke garis (p>0)

a = sudut antara sumbu X positif
dengan jarak p tersebut



Gambar (10)

1.14. MENGUBAH MENJADI BENTUK NORMAL

Bentuk umum Ax + By + C = 0 dapat diubah menjadi bentuk normal sebagai berikut :

$$\frac{Ax + By + C}{- V(A^2 + B^2)} = 0 \quad \text{bila } C > 0$$

$$\frac{Ax + By + C}{+ V(A^2 + B^2} = 0 \quad \text{bila } C < 0$$

Contoh (1.18) :

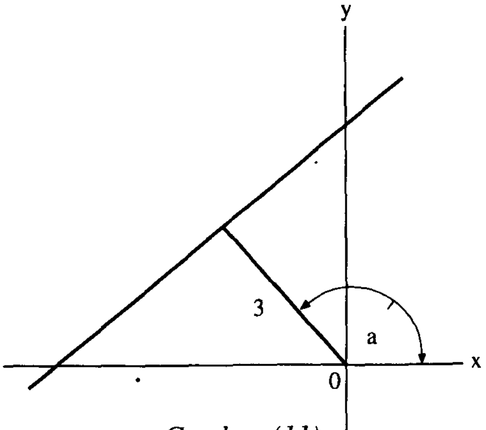
Ubah 4x - 3y + 15 = 0 ke bentuk normal.

Jawab : Bentuk normal $\dfrac{4x - 3y + 15}{\sqrt{(16 + 9)}} = 0$, atau

$4/5\ x + 3/5\ y = 3$

Cos a = -4/5

Sin a = 3/5



Gambar (11)

1.15. JARAK TITIK $P(x_1,y_1)$ KE GARIS G : Ax + By + c = 0

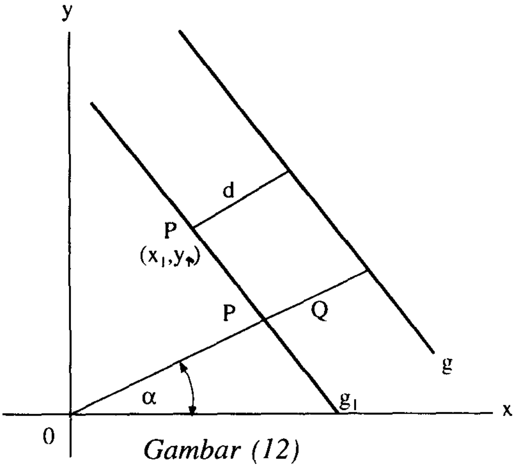
Tarik garis g' melalui P sejajar g yang bentuk normalnya : x cos a + y sin a - p' = 0 dan karena (x_1,y_1) pada g'

$x_1 \cos a + y_1 \sin a = p'$

$$d = p' - p$$

$$= x_1 \cos a + y_1 \sin a - p$$

$$\text{atau} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$$



Gambar (12)

Contoh (1.19) :

Hitung jarak titik (3,6) ke garis

$12x + 5y - 40 = 0$

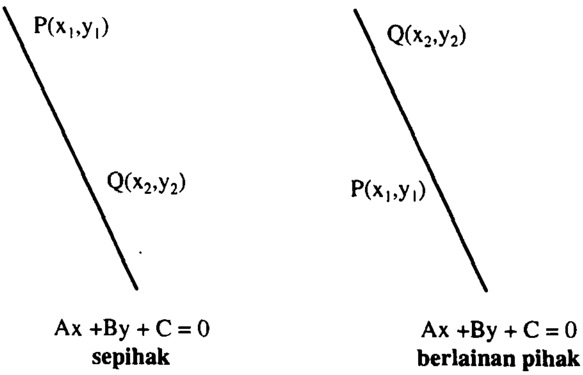
Jawab : $d = \dfrac{12{,}3 + 5{,}6 - 40}{\sqrt{144 + 25}} = 2$

1.16. LETAK 2 TITIK TERHADAP GARIS g : Ax + By + C = 0

Titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ yang tidak terletak pada garis g akan :

(a) Sepihak $\longleftrightarrow$ $Ax_1 + By_1 + C$ dan $Ax_2 + By_2 + C$ berlainan tanda. (sama-sama positif atau sama-sama negatif).

(b). Berlainan pihak $\longleftrightarrow$ $Ax_1 + By_1 + C$ dan $Ax_2 + By_2 + C$ berlainan tanda.



Gambar (13)

Contoh (1.20) :

Selidiki letak titik (2,1) dan (4,-2) terhadap garis $2x + 5y = 6$

Jawab :

$2x + 5y = 6 \rightarrow 2x + 5y - 6 = 0$

sebut $f(x,y) = 2x + 5y - 6$

$f(2,1) = 2.2 + 5.1 - 6 = 3$

$f(4,-2) = 2.4 + 5.(-2) - 6 = -8$

Jadi ke 2 titik (2,1) dan (4,-2) berlainan pihak terhadap garis $2x + 5y = 6$.

1.17. BERKAS GARIS

Untuk suatu harga t tertentu $A_1x + B_1y + C_1 + t(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ merupakan suatu garis lurus. Bila t diberi harga yang berlain-lainan maka akan diperoleh suatu kumpulan garis-garis yang disebut berkas garis.

Suatu garis lain yang melalui titik potong garis-garis

$g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan $g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

selalu dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$A_1 x + B_1y + C_1 t(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Contoh (1.21) :

Carilah persamaan garis yang melalui titik potong garis-garis 3x 4y + 7 = 0 dan 2x + y - 5 = 0 serta melalui titik (0,0)

Jawab :

persamaan garis yang melalui titik potong kedua garis di atas adalah

$3x - 4y + 7 + t(2x + y - 5) = 0$

Karena melalui (0,0) :

$3.0 - 4.0 + 7 + t(2.0 + 0 - 5) = 0$ atau $t = 7/5$

Persamaan garis yang diminta :

$3x - 4y + 7 + 7/5\ (2x + y - 5) = 0 \rightarrow$

$23x - 5y = 0$

1.18. CONTOH SOAL

Contoh (1.22) :

Jelaskan secara ilmu ukur tentang 2 persamaan linier dengan 2 anu :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

dalam hal

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} <> 0 \quad = \quad 0$$

Jawab :

Masing-masing persamaan linier merupakan garis lurus. Sedang solusi dari sistem di atas tak lain dai pada titik potong (titik persekutuan) kedua garis tersebut.

Dalam hal :

$$a_1b_2 - a_2b_1 <> 0 \rightarrow {}_a1_b2 <> {}_a2_b1 \rightarrow$$
$$a_1/a_2 \ <> \ b_1b_2$$

maka kedua garis berpotongan, artinya terdapat satu (dan hanya satu) solusi.

Dalam hal :

$$a_1b2 - a_2b1 <> 0 \rightarrow {}_a1_b2 = {}_a2_b1 \rightarrow$$
$$a_1/a_2 \ <> \ b_1b_2$$

maka dua kemungkinannya, yakni kedua garis sejajar atau berimpit.

Andaikan $a_1c_2 - a_2c_1 \ <> \ 0$

$a_1/a_2 \ <> \ c_1c_2$

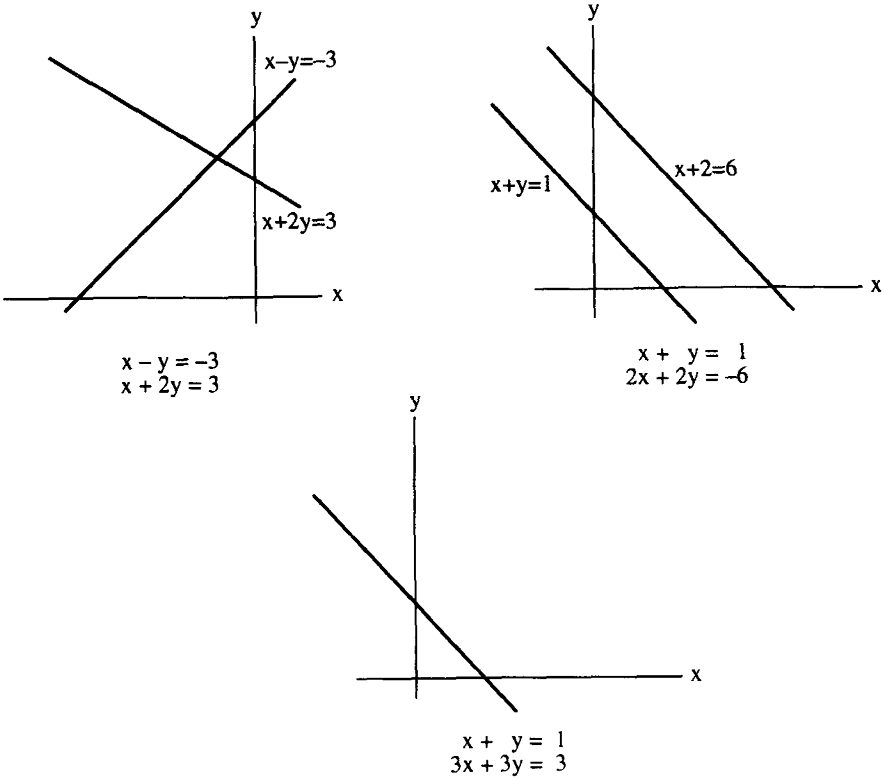
maka kedua garis sejajar artinya tidak terdapat solusi.

Andaikan $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$

$a_1/a_2 = c_1c_2$

maka kedua garis berimpit, artinya terdapat sebanyak tak hingga solusi.

Contoh :



Gambar (14)

Contoh (1.23) :

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3,1) dan koefisien arah $m = 3$.

Jawab :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ atau $y - 1 = 3(x - 3) \rightarrow y = 3x - 8$

Contoh (1.24) :

Tentukan persamaan garis melalui (-2,-3) dan (4,2).

Jawab :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ atau } \frac{x + 2}{4 + 2} = \frac{y + 3}{2 + 3} \text{ atau } 5x - 6y - 8 = 0$$

Contoh (1.25) :

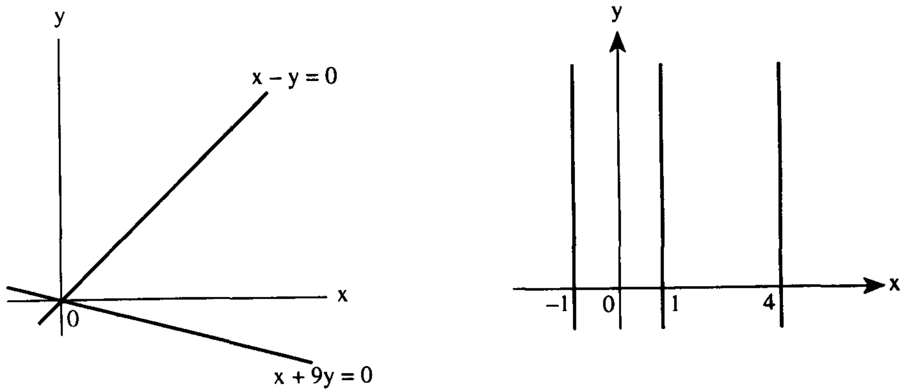
Apakah bentuk ilmu ukur dari persamaan :

a). $x^2 + 8xy - 9y^2 = 0$; b). $x^2 - 4x^2 - x \quad 4 = 0$

Jawab :

(a) Kita uraikan menjadi $(x + 9y)(x - y) = 0$ yang adalah persamaan 2 garis lurus $x + 9y = 0$ dan $x - y = 0$.

(b) Kita uraikan menjadi $(x - 1)(x + 1)(x - 4) = 0$ yang adalah persamaan tiga garis lurus sejajar sumbu y : $x = 1$, $x = 01$ dan $x = 4$.



Gambar (15)

Contoh (1.26) :

Tentukan persamaan garis melalui (-2,4) dan berjarak 2 dari titik asal (0,0).

Jawab :

Persamaan garis melalui (-2,4) dengan koefisien arah m adalah

$y - 4 = m(x + 2)$ atau $mx - y + (2m + 4) = 0$

bentuk normalnya adalah :

$$\frac{mx - y + (2m + 4)}{\pm\sqrt{(m^2+1)}} = 0, \text{ dengan diketahui } \frac{2m + 4}{\pm\sqrt{(m^2+1)}}$$

berarti $(2m + 4)^2 = 4(m^2 + 1)$.

Setelah diselesaikan diperoleh $m = -3/4$. Jadi persamaan garis yang diminta

$3x + 4y - 10 = 0$.

Di samping garis $3x + 4y - 10 = 0$, jelas bahwa garis $x = -2$ juga memenuhi

Contoh (1.27) :

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $4x + y = 1$ dan, melalui perpotongan garis $2x \;\; 5y + 3 = 0$ dan $x - 3y - 7 = 0$.

Penyelesaian :

Koefisien arah dari garis yang diminta $-1/m = 1/4$

Berkas garis $(2x - 5y + 3) + t(x - 3y - 7) = 0$ ....(*)

atau : $(2 + t)x + (-5 - 3t)y + (3 - 7t) = 0$

atau : $$y = \frac{2 + t}{5 + 3t} x + \frac{3 - 7t}{5 + 3t}$$

dengan $$\frac{2 + t}{5 + 3t} = 1/4, \text{ diperoleh } t = -3$$

Persamaan garis yang diminta diperoleh dengan mensubstitusikan = -3 ke (*), diperoleh $x - 4y - 24 = 0$

1.19. SOAL LATIHAN

1. Tentukan persamaan garis diketahui melalui sebuah titik dan koefisien arahnya:
   (a). (0,2), m = 3; (b). (0,-1), m = 0; (c). (0,3), m = -4/3.

   Jawab : (a). $4 - 3x - 2 = 0$; (b). $y + 1 = 0$.

2. Tentukan persamaan garis melalui 2 titik : (a). (2, -3), (4,2); (b). (7,0), (0,4); (c). (-5,2), (3,2)

   Jawab : (a). $y - 3x - 2 = 0$; (b). $y + 1 = 0$; (c). $3y + 4x - 9 = 0$

3. Selidiki kedudukan 2 garis berikut dan kalau berpotongan tentukan titik potongnya :
   (a). $3x + 5y - 8 = 0$, $25x - 2y - 23 = 0$;
   (b). $-x - y - 3 = 0$, $6x + 6y - 100 = 0$;
   (c). $3x + 7y + 2 = 0$, $21x + 49y + 14 = 0$

   Jawab : (a). berpotongan di (1,1); (b) sejajar; (c) berimpit.

4. Berapa besar sudut antara kedua garis :
   (a). $4x - 10y + 5 = 0$, $4x + 3y - 12 = 0$;
   (b). $7x + y - 6 = 0$, $x - 7y + 3 = 0$;
   (c). $x + 2y + 2 = 0$, $-2x - 4y + 5 = 0$

   Jawab : (a). arc tg 26/7; (b). 90^{o}; (c). 0^{o}

5. Tentukan garis melalui (5, -1) dan sejajar garis $7x + 5y - 3 = 0$.

   Jawab : $7x + 5y = 30$.

6. Tentukan garis melalui (-2, -3) dan tegak lurus garis $3x - 2y + 4 = 0$.

   Jawab : $2x - 3y + 13 = 0$

7. Tentukan garis melalui (-3,-4) dan membuat sudut 45^{o} dengan garis $6x - 2y + 1 = 0$.

   Jawab : $x - 2y = 5$ dan $2x + y + 10 = 0$

8. Sisi miring sebuah segitiga siku-siku samakaki terletak pada garis $3x - 4y + 9 = 0$ sedang titik sudut siku-sikunya mempunyai koordinat (3, -1). Tentukan persamaan kedua sisi yang lain.

Jawab : $x + 7y + 4 = 0$ dan $7x - y - 22 = 0$.

9. Sebuah garis memotong sumbu x dan y masing-masing di A dan B serta memotong tegaklurus garis $3x + 7y + 8 = 0$ di P. Tentukan persamaan garis tersebut, bila P merupakan tengah-tengah AB.

Jawab : $35x - 15y = 42$.

10. Perlihatkan ketiga garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ dan $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ akan melalui satu titik

$$\longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

11. Selidiki apakah ketiga garis $2x - y - 3 = 0$, $4x + y = 9$ dan $3x + 2y = 8$ melalui satu titik atau tidak ?

Jawab : melalui satu titik.

12. Bagaimanakah persamaan bentuk normal dari garis-garis berikut :
(a). $2x + y = 5$; (b). $4x - y - 7 = 0$; (c). $12x - 5y + 1 = 0$

Jawab :

(a). $\dfrac{2x + y - 5}{\sqrt{5}} = 0$; (b). $\dfrac{4x - y - 7}{\sqrt{17}} = 0$;

(c) $\dfrac{12x - 5y + 1}{13} = 0$.

13. Hitung jarak antara kedua garis sejajar $5x + 12y + 9 = 0$ dan $5x + 12y - 17 = 0$.

Jawab : 2.

14. Carilah garis melalui (-5,-6) sehingga titik (4,6) mempunyai jarak = 9 terhadap garis tersebut.

Jawab : $x = -5$ dan $7x - 24y - 109 = 0$.

15. Tentukan garis melalui (-3,1) sehingga titik-titik (4,2) dan (6,8) mempunyai jarak sama terhadap garis tersebut.

Jawab : $x - 2y + 5 = 0$ dan $3x - y + 10 = 0$.

16. Dari segitiga ABC ditentukan A(-1,4) dan B(2,1). Titik C terletak pada garis $sx - y = 6$ sedang titik berat segitiga tersebut pada garis $x + y = 5$. Tentukan koordinat titik C.

Jawab : (5,4).

17. Ketiga garis berat sebuah segitiga yang luasnya = 12 mempunyai persamaan $2x - y - 4 = 0$, $x - 5y + 4 = 0$ dan $5x - 7y - 4 = 0$. Tentukan koordniat titik-titik sudut segitiga tersebut.

Jawab : (4,4), (-2,-2), (6,2) atau

$$\left(\frac{22}{3}, \frac{14}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

18. Tentukan persamaan garis sumbu AB bila A(4,-2) dan B(2,8).

Jawab : $x - 5y + 12 = 0$.

19. Garis g_1 dan g_2 masing-masing mempunyai persamaan $5x - y = 9$ dan $4x + y = 18$. Sebuah garis melalui P(3,3) memotong g_1 di A dan g_2 di B. Tentukan persamaan garis tersebut bila AP : PB = 2 : 1.

Jawab : $2x - y = 3$.

20. Carilah garis melalui titik potong $x - 3y + 1 = 0$, $2x + 5y - 9 = 0$ sehingga jarak dari (0,0) ke garis tersebut adalah 2.

Jawab : $x = -2$ dan $3x + 4y = 10$.

21. Selidiki letak 2 titik terhadap garis :
   (a). (4,1), (5,5) terhadap $2x + y = 10$.
   (b). (-1,-1), (2,-1) terhadap $x + y$ 25

   Jawab : (a). berlainan pihak; (b). sepihak.

22. Ubahlah garis pada soal (1) ke persamaan parameter dan persamaan vektor.

   Jawab : (a). $x = k$, $[x,y] = [0,2] + k[1,3]$
   $y = 2 + 3k$

   (b). $x = k$, $[x,y] = [0\text{-}1] + k[1,0]$
   $y = -1$

   (c). $x = 3k$, $[x,y] = [0,3] + k[3,-4]$
   $y = 3 - 4k$

23. Tentukan persamaan garisbagi sudut antara garis $g_1 : 3x - 4y + 8 = 0$ dan $g_2 : 5x + 12y - 15 = 0$.

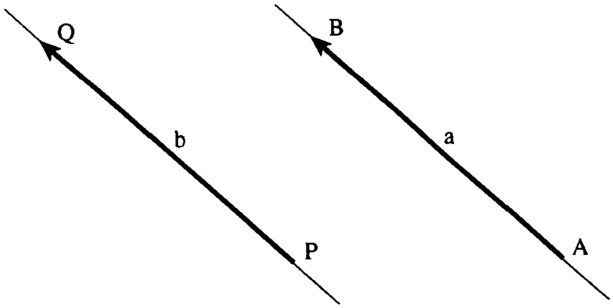
   Jawab : $14x - 112y + 179 = 0$ dan $64x + 8y + 29 = 0$.

1.20. VEKTOR SECARA ILMU UKUR

DEFINISI :

Vektor adalah suatu potongan (ruang, segmen) garis yang mempunyai arah.

Lihat Gambar 16. Titik awal dari vektor tersebut adalah titik A, dan titik ujungnya adalah titik B. Garis lurus yang melalui AB disebut garis pembawa dari vektor tersebut.



Gambar 16

Notasi :

Kita dapat menggambarkan suatu vektor dengan memberi tanda panah pada titik ujungnya. Sedangkan untuk menuliskannya, kita dapat memakai salah satu notasi berikut : $\bar{a}$, $\vec{a}$, A, $\vec{A}$, ***a***, ***A***, $\overline{AB}$, ataupun $\overrightarrow{AB}$, (yaitu vektor yang titik awalnya A dan titik ujungnya $\overline{B}$) (Pada buku-buku notasi vektor biasanya dicetak ***tebal***), Panjang dari vektor ***a*** kita tulis |***a***|.

Vektor pada Gambar 1, kita beri nama ***a*** atau $\overline{\boldsymbol{AB}}$, di mana potongan garis AB merupakan panjangnya dan arah vektor tersebut dari A ke B.

DEFINISI :

Dua buah vektor dikatakan sama, jika panjang dan arahnya sama. (Arah sama, artinya mempunyai garis pembawa yang berimpit atau sejajar, dengan arah panah sama). Jadi, vektor tidak tergantung kepada letaknya, tetapi tergantung pada panjang dan arahnya. Pada Gambar 1, vektor ***b*** = ***a***.

Operasi-operasi pada vektor

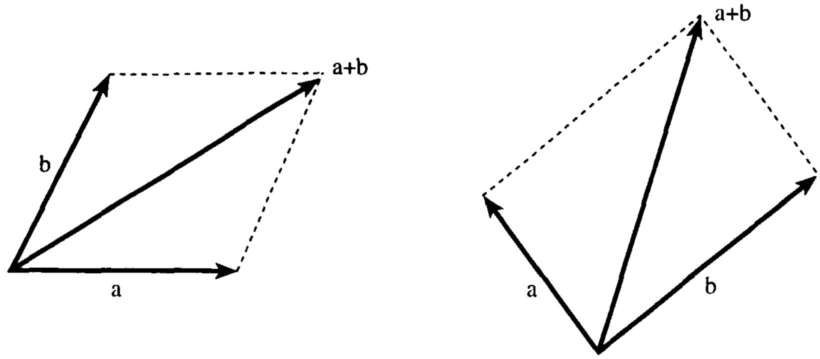
Yang akan dibicarakan adalah operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar.

1. Penjumlahan vektor

Misalkan kita hendak menjumlahkan vektor ***a*** dan ***b***. Kita mengenal dua metode sebagai berikut :

a. ***Metode jajaran genjang.***

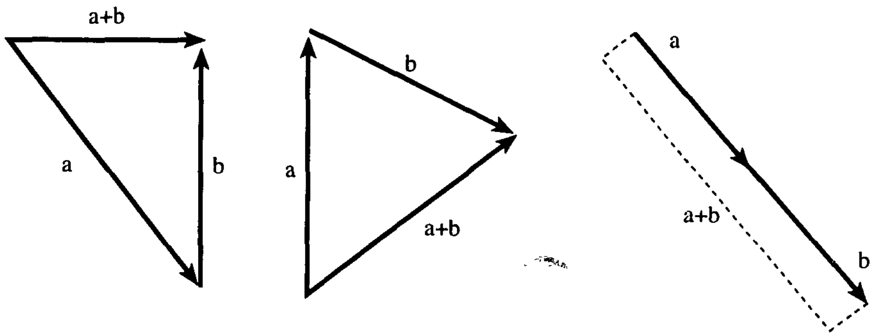
Vektor hasil *(resultan)* yaitu **a + b** diperoleh dari diagonal jajaran genjang yang dibentuk oleh ***a*** serta ***b*** setelah titik awal ditempatkan berimpit. Pada Gambar 17 diberikan contoh untuk beberapa kedudukan ***a*** dan ***b.***



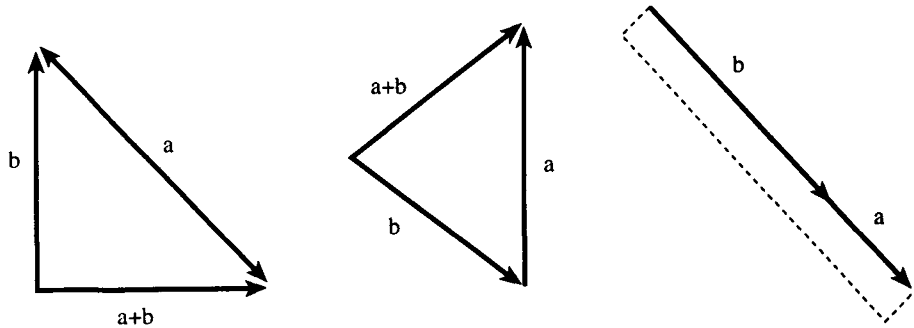
Gambar 17

b. Metode segitiga.

Resultan kita peroleh dengan menempatkan titik awal salah satu vektor (misalnya ***b***) pada titik ujung vektor yang lainnya, maka resultan adalah vektor bertitik awal di titik awal ***a,*** dan bertitik ujung di titik ujung **b.**



Gambar 18



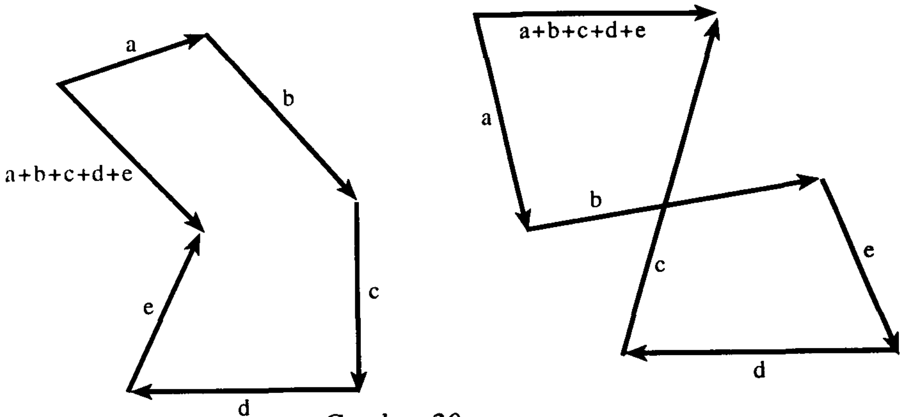
Gambar 19

Catatan :

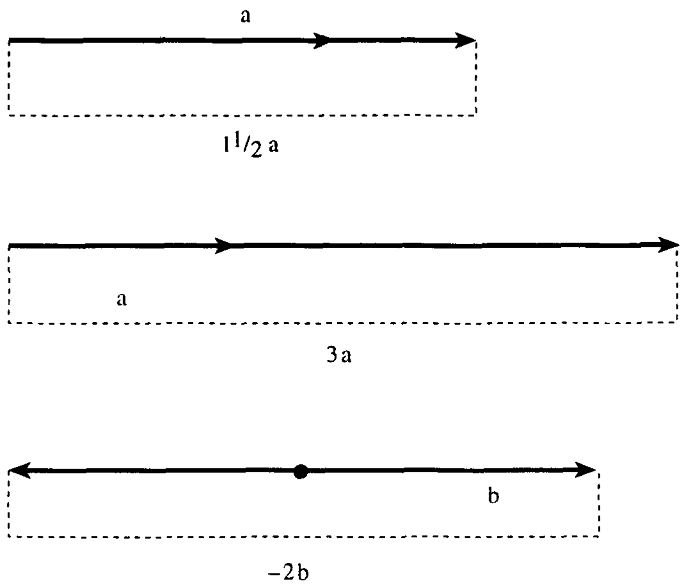
Penjumlahan vektor bersifat komutatif, artinya untuk setiap vektor ***a*** dan ***b*** berlaku ***a*** + ***b*** = ***b*** + ***a***; = maka pemilihan vektor mana yang didahulukan tidaklah menjadi persoalan. Dapat kita perbandingkan Gambar 3 dan Gambar 19 bahwa ***a*** + ***b*** = ***b*** + ***a***.

Catatan :

Metode segitiga baik sekali untuk menjumlahkan lebih dari dua vektor. Misalkan hendak menjumlahkan ***a*** + ***b*** + ***c*** + ***d*** + ***e***, maka berturut-turut kita tempatkan titik awal dari **b** pada titik ujung dari ***a***, titik awal dari ***c*** pada titik ujung dan ***b*** dan seterusnya (pemilihan urutan tidak menjadi persoalan). Resultannya adalah vektor yang titik awalnya di titik awal vektor pertama ***(a)*** dan titik ujung vektor terakhir ***(e)***.



Gambar 20



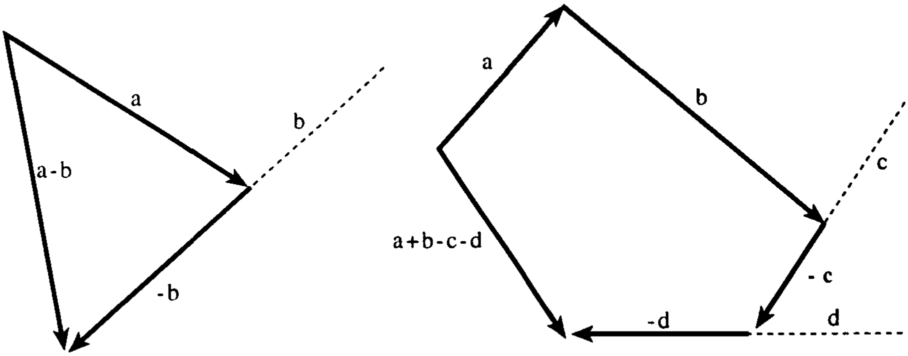
Gambar 21

2. *Perkalian Skalar*.

Kalau k suatu skalar bilangan riil, ***a*** suatu vektor, maka perkalian skalar K*A* menghasilkan suatu vektor yang panjangnya |k| kali panjang ***a***, dan arahnya sama dengan arah ***a*** bila k positif atau berlawanan dengan ***a*** bila k negatif. Bila k = 0 maka k*a* = *0;* disebut vektor nol yaitu vektor yang titik awal dan titik ujungnya berimpit.

Catatan :

Sebagai gabungan dari operasi penjumlahan serta perkalian skalar, kita dapat mengurangkan vektor-vektor. Misalnya ***a* – *b* = *a* + (–*b*)** yaitu menjumlahkan ***a*** dan ***–b***. Tentù saja pengurangan vektor tidak komutatif, ***a* – *b* ≠ *b* – *a***. Contoh pada Gambar 22.



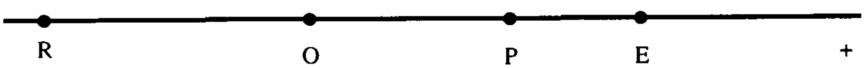
Gambar 22

1.21. SUSUNAN KOORDINAT RUANG R^n

Kalau pada pembicaraan yang lalu kita bahas hanya dimensi dua, sekarang kita perluas.

a. *Ruang berdimensi satu (R^1)*

Setiap bilangan riil dapat diwakili oleh sebuah titik pada suatu garis lurus, yang membentuk susunan koordinat di dalam ruang berdimensi 1, ditulis R^1. Untuk itu, kita pilih titik O sebagai titik awal susunan koordinat dan suatu titik E di mana panjang OE = 1 satuan. Lihat Gambar 23.

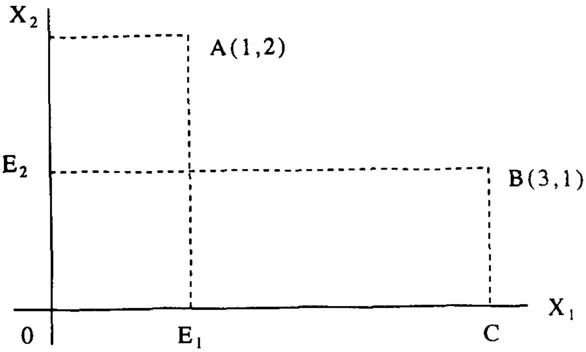


Gambar 23

Titik O mewakili bilangan nol, titik E mewakili bilangan satu. Kita tulis O(0), E(1). P($^2/_3$) artinya P mewakili bilangan $^2/_3$ dan kita letakkan P sehingga OP = $^2/_3$ satuan ke arah E (arah positif); atau R ($-\sqrt{3}$), kita letakkan R sehingga OR = $\sqrt{3}$ satuan ke arah yang berlawanan (arah negatif).

b. *Ruang berdimensi dua (R^2)*

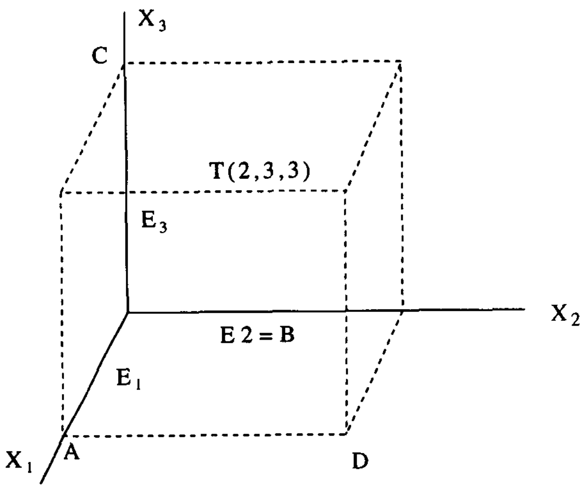
Setiap pasangan bilangan riil (disebut koordinat titik) dapat diwakili oleh sebuah titik pada suatu bidang rata, yang membentuk susunan koordinat di dalam ruang berdimensi dua, ditulis R^2. Untuk itu dibuat dua garis lurus (yang tidak sejajar) dan titik potongnya merupakan titik awal O. Masing-masing garis disebut sumbu koordinat. Lihat Gambar 24. Kita dapat menuliskan titik O(0,0), A(1,2), B(3,1), C(3,0), dan lain-lain.



Gambar 24

c. ***Ruang berdimensi tiga (R^3)***

Setiap tripel bilangan riil dapat diwakili oleh sebuah titik di dalam ruang berdimensi tiga, ditulis R^3, dengan membentuk suatu susunan koordinat, yaitu mengambil 3 garis lurus (tidak sebidang) yang berpotongan di titik awal O. Masing-masing garis disebut sumbu koordinat.



Gambar 25

Pada Gambar 25, misalnya titik A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2), D(2,3,0). Titik T(2,3,3) dapat kita ketahui dengan melukiskan *parallel-pipedum* yang rusuknya berturut-turut 2 pada sumbu X_1, 3 pada sumbu x_2, dan 3 pada sumbu X_3 semua ke arah positif.

Catatan :

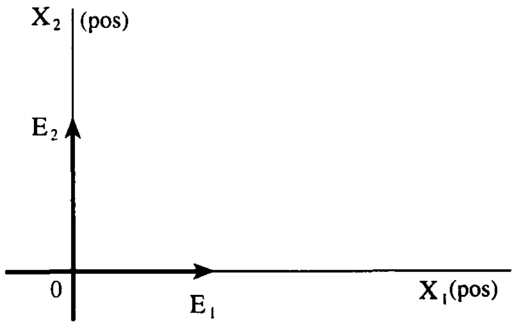
Sementara ini kita hanya memakai susunan koordinat yang tegak lurus *(orthogonal)* dengan satuan panjang yang sama; sampai kita mengenal pergantian basis.

d. Ruang berdimensi n (R^n)

Pembahasan dapat kita teruskan untuk R^4, R^5, ..., dan seterusnya, meskipun tidak dapat kita gambarkan secara ilmu ukur. Pada secara umum untuk R^n di mana n adalah bilangan bulat positif (kita batasi untuk n berhingga), suatu titik di dalam R^n dinyatakan sebagai n-*tupel* bilangan riil. Misalnya titik $X(x_1, x_2, ..., X_n)$.

1.22. VEKTOR DI DALAM R^N

Kita pandang lebih dahulu suatu susunan koordinat yang tegak lurus (disebut pula susunan koordinat *Cartesian*) di R^2. Suatu vektor disebut satuan bila panjangnya = 1. Kita ambil sekarang vektor-vektor satuan :



Gambar 26

$e_1 = OE_1$ yang titik awalnya O(0,0) dan titik ujungnya $E_1(1,0)$. $e_2 = OE_2$ yang titik awalnya O(0,0) dan titik ujungnya $E_2(0,1)$.

Kemudian kita tulis : $e_1 = 1e_1 + 0e_2$

$$e_2 = 0e_1 + 1e_2$$

Yang selanjutnya penulisan itu kita singkat menjadi :

$$e_1 = [1,0]$$
$$e_2 = [0,1]$$

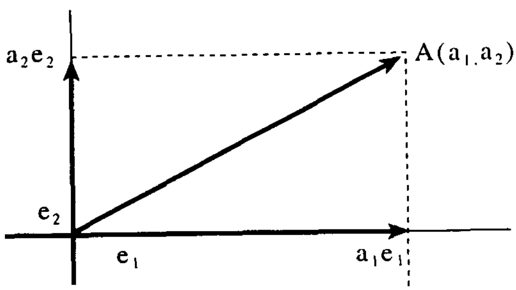
Pandang sekarang vektor $\boldsymbol{a}$ yang titik awalnya O(0,0) dan titik ujungnya titik $A(a_1,a_2)$. Vektor $\boldsymbol{a}$ disebut vektor posisi *(radius vector)* dari titik A.

Dari Gambar 27, jelas dari metode jajaran genjang bahwa :

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 \text{ atau } a = [a_1, a_2]$$

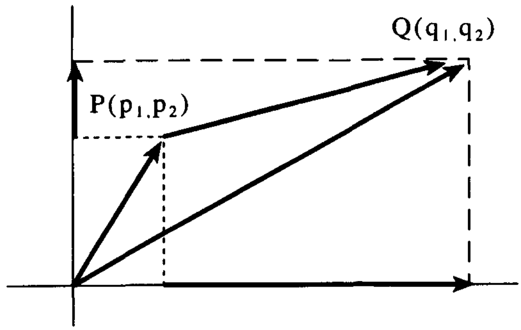
Bilangan-bilangan a_1, a_2, a_3 disebut komponen-komponen dari $\boldsymbol{a}$. Jelas bahwa panjang vektor $\boldsymbol{a}$: = $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Secara umum untuk vektor $\boldsymbol{p}$ yang titik awalnya $(P(P_1,P_2)$ dan titik ujungnya $Q(q_1,q_2)$;

$$\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{P} = (q_1 - p)e_1 + (q_2 - p_2)e_2$$
$$= [(q_1 - p_1), (q_2 - p_1)]$$



Gambar 27

Penyajian ini tidak menyalahi ketentuan-ketentuan tentang kesamaan vektor. Pada Gambar 28, apabila vektor $\boldsymbol{p}$ kita tempatkan dengan titik awalnya titik (0,0), maka titik ujungnya adalah titik $(q_1 - P_1, q_2 - p_2)$. Maka kesamaan vektor dapat kita definisikan kembali sebagai berikut :



Gambar 28

DEFINISI :

Vektor $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2]$ dan $b = [b_1, b_2]$ sama, jika $a_1 = b_1$ dan $a_2 = b_2$, dengan perkataan lain bila komponen yang sama letaknya mempunyai harga yang sama.

Untuk R^n kita dapat memperluas sebagai berikut :

(1) Vektor posisi dari titik $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ adalah $\boldsymbol{0A} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$

(2) Vektor bertitik awal di $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dan bertitik ujung di $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ adalah $\mathbf{PQ} = [q_1 - p_1, q_2, \ldots, q_n - p_n]$.

(3) Panjang vektor $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ adalah $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

Jarak 2 titik $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dan $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ adalah panjang vektor PQ yaitu :

$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_2)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \ldots + (q_n - p_n)^2}$

(4) Vektor $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ dan $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ sama, jika $a_1 = b_1$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, a_n$; dengan perkataan lain $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

(5) Vektor-vektor satuan dari susunan koordinat adalah $\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, ..., 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = [0, 1, ..., 0]$, ..., $\boldsymbol{e}_n = [0, 0, ...,1]$ dan berlaku bila $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ maka $\boldsymbol{a} = a_1,e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$.

(6) Penjumlahan vektor $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ dan $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, ..., b_n]$ berlaku :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= [a_1, a_2, ..., a_n] + [b_1, b_2, ..., b_n]\\ &= a_1, \boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + ... + a_n\boldsymbol{e}_n + b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + ... + b_n\boldsymbol{e}_n\\ &= (a_1 + b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\boldsymbol{e}_2 + ... +)a_n + b_n)\boldsymbol{e}\\ &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n].\end{aligned}$$

(7) Perkalian vektor $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ dengan skalar k, berlaku :

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{a} &= l[a_1, a_2, ..., a_n]\\ &= k(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + ... + a_n\boldsymbol{e}_n)\\ &= ka_1\boldsymbol{e}_1 + ka_2\boldsymbol{e}_2 + ... + ka_n\boldsymbol{e}_n\\ &= [ka_1, ka_2, ..., ka_n].\end{aligned}$$

Catatan :

Penyajian kurung [ ] dipilih untuk membedakan dengan kurung ( ) yang kita gunakan untuk koordinat titik ataupun kurng { } yang sering digunakan dalam teori himpunan. Namun beberapa buku mempergunakan kurung ( ) atau { } tersebut untuk vektor. Jadi, $\boldsymbol{a}$ $[a_1, a_2, ..., a_n]$ menjadi $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n)$ atau a $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ atau ada pula yang menuliskan sebagai :

$$a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ a_n \end{vmatrix}$$

Contoh (1.28) :

Vektor-vektor [0, 1], [1, -3], [-2, $\sqrt{2}$] adalah anggota R^2, karena masing-masing mempunyai 2 komponen, sedang vektor [-5, $^1/_2$, 4, π] $\in$ R^4, dan [3] $\in$ R^1.

Contoh (1.29) :

$\boldsymbol{a}$ = [1 -3, 2, 4] dan b = 3, 5, -1, -2] maka

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ = [1 + 3, -3 + 5, 2 - 1, 4 - 2] = [4, 2, 1, 2].

$5\boldsymbol{b}$ = [5.3, 5.5, 5.-1, 5.-2] = [15, 25, -5, -10].

$2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ = [2.1, 2.-3, 2.2, 2.4] + [-3.3, -3.5, -3.-1, -3.-2]

$2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ = [2.1, 2.-3, 2.2, 2.4] + [-3.3, -3.5, -3.-1, -3.-2]

= [2,-6, 4, 8] + [-9.-15, 3, 6] = [-7.-21, 7, 14]

Contoh (1.30) :

Vektor yang panjangnya = 0 disebut vektor nol, kita tulis $\boldsymbol{0}$ = [0, 0, ..., 0], dan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ berlaku $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Contoh (1.31) :

Diketahui persamaan vektor [2, x, y] = [z, 3, 7] maka haruslah z = 2, x = 3, y = 7.

1.23. BEBERAPA DALIL PADA OPERASI VEKTOR

Untuk setiap vektor $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$, $\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n] \in R_n$ dan k, m skalar-skalar, berlaku :

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (komutatif)

(2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (asosiatif)

(3) $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ (distributif)

(4) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$

(5) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$

(6) $(k + m)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}$

(7) $(km)\boldsymbol{a} = k(m\boldsymbol{a}) = m(k\boldsymbol{a})$

1.24. DOT PRODUK

Bila $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ vektor, dan $\in$ adalah sudut antara $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ $(0 \leq \in \geq \pi)$ maka didefinisikan :

DEFINISI :

Dot produk dari a dan b, disajikan sebagai a.b, dibca "a dot b" adalah suatu skalar :

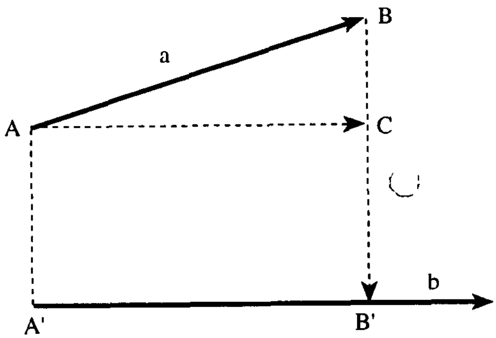
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos \theta$$

dengan perkataan lain, perkalian antara panjang $\boldsymbol{a}$, panjang $\boldsymbol{b}$ dan cosinus sudut antara $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$. Jelas bahwa $\boldsymbol{a.b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos \theta = |b|\ |a| \cos \theta = \boldsymbol{a.b}$.

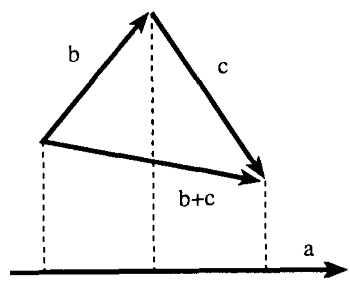
Pandang vektor $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b} \neq 0$. Proyeksi $\boldsymbol{a}$ pada $\boldsymbol{b}$ adalah potongan garis A' B' = AC

$$AC = |\boldsymbol{a}| \cos \theta = |\boldsymbol{a}| \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|} \cos \theta$$

$$= \frac{\boldsymbol{a.b}}{|\boldsymbol{b}|} \cos \theta$$



Gambar 29



Gambar 30

Pandang sekarang vektor-vektor ***a***, ***b*** dan ***c*** (Gambar 30). Akan dibuktikan hukum distributif :

$$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}.\boldsymbol{a}$$

Proyeksi (***b*** + ***c***) pada a = proyeksi ***b*** pada ***a*** + proyeksi ***c*** pada ***a***, atau :

$$\frac{(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{c}.\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

Jadi : $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}.\boldsymbol{a}$, ataupun

$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}.$

Catatan :

Kalau e_1 vektor-vektor satuan yang saling tegak lurus dan panjangnya = 1, maka :

Untuk $i \neq j : \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j = |\boldsymbol{e}_i||\boldsymbol{e}_j| \cos 90° = 0.$

$i = j : \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_1 = |\boldsymbol{e}_i||\boldsymbol{e}_i| \cos 0° = 1.$

Sebagai contoh $\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_3 = 0$, $\boldsymbol{e}_2.\ \boldsymbol{e}_4 = 0$, $\boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_2 = 1$ dan lain-lain.

Pandang vektor $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ dan $b = [b_1, b_2, ..., b_n] \in R_n$ maka :

$$\begin{aligned} a.b &= [a_1, a_2, ..., a_n] \ . \ [b_1, b_2, ..., b_n] \\ &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + ... + a_n\boldsymbol{e}_n) \ . \ (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + ... + b_n\boldsymbol{e}_n) \end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat distributif dan Catatan di atas diperoleh :

$$\boldsymbol{a}\ .\ \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \text{ , atau } a\ ,\ b = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

Catatan :

Dari hasil di atas maka panjang vektor a dapat ditulis :

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}}$$

atau : $\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2.$

Catatan :

Selalu berlaku sifat definit positif yaitu $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$ dan $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0$ bila $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

Catatan :

Bila $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, maka a tegak lurus b jika dan hanya jika $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = 0$. Hal ini jelas karena $0 = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \theta$, dimana $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ yang berarti $|a| \neq 0$, $|\boldsymbol{b}| \neq$; sehingga $\cos \theta = 0$ atau $\theta = 90°$. Sebaliknya bila a tegak lurus $\boldsymbol{b}$ maka $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos 90° = 0$.

Catatan :

Vektor a panjangnya $= |\boldsymbol{a}|$, maka vektor $\boldsymbol{e}a = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ adalah vektor satuan yang searah dengan $\boldsymbol{a}$.

Contoh (1.32) :

$\boldsymbol{a} = |a,-2,1]$ dan $b = [2,3,6]$ maka $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = 4$

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + I^2} = 3$ dan $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$ cos $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 4/21$

$\boldsymbol{e}a = {}^1/_3\ [2, -2, 1] = [{}^2/_3, -{}^2/_3, {}^1/_3]$.

Bila $c = [0, -1, -2]$ maka $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, berarti $\boldsymbol{a}$ tegak lurus $\boldsymbol{c}$. Panjang proyeksi a pada $\boldsymbol{b}$ adalah 4/21.

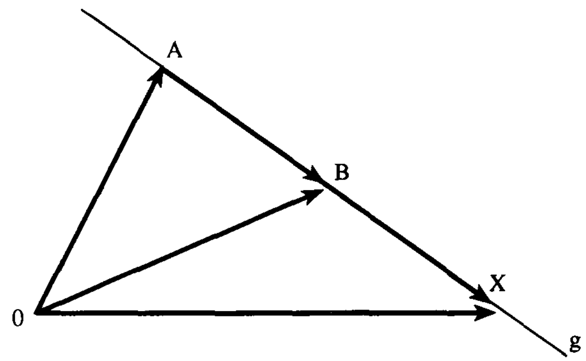
1.25. PERSAMAAN GARIS LURUS DAN BIDANG RATA DALAM RUANG

Sebuah garis lurus akan tertentu diketahui 2 titik pada garis tersebut. Kita pandang R^3. Misalkan titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dan $B(b_1, b_2, b_3)$ terletak pada garis lurus g. Maka $\boldsymbol{OA} = [a_1, a_2, a_3]$, $\boldsymbol{OB} = [b_1, b_2, b_3]$ dan $\boldsymbol{AB} = [b_1\text{-}a_1, b_2\text{-}a_2, b_3\text{-}a_3]$. Untuk setiap titik sebarang $X(x_1, x_2, x_3)$ pada g berlaku $\boldsymbol{AX} = \lambda\, \boldsymbol{AB}$, $(-\infty < \theta < \infty)$.

Jelas bahwa $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AX}$

$= \boldsymbol{OA} + \lambda\boldsymbol{AB}$ atau :

$$[x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + \lambda\ [b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3] \qquad \text{..............} \ (*)$$



Gambar 31

disebut persamaan vektoris garis lurus yang melalui 2 titik A (a_1, a_2, a_3) dan $B(b_1, b_2, b_3)$. Vektor $\boldsymbol{AB}$ (atau vektor-vektor lain $\neq 0$ yang terletak pada g, dengan perkataan lain, kelipatan dari $\boldsymbol{AB}$) disebut vektor arah garis lurus tersebut. Jadi, bila garis lurus melalui titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dengan vektor arah a = [a, b, c], persamaannya :

$$[x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + \lambda\ [a, b, c] \qquad \text{..............} \ (**)$$

dengan $(-\infty < \lambda\ \infty)$.

Persamaan (**) dapat kita tulis menjadi :

$$x_1 = a_1 + \lambda a, x_2 = a_2 + \lambda b, x_3 = a_3 + \lambda c \qquad \text{.....................} \ (***)$$

yang disebut persamaan parameter garis lurus. Kemudian, bila a $\neq$ 0, b $\neq$ 0, c $\neq$ 0, λ kita eliminasikan dari (***) diperoleh :

$$\lambda = \frac{(x_1 - a_1)}{a} = \frac{(x_2 - a_2)}{b} = \frac{(x_3 - a_3)}{c}$$, atau bila $(b_1 = a_1) \neq$

0, $(b, - b_2) \neq 0$, $(b_3 - a_3) \neq 0$ λ kita eliminasikan dari (*) diperoleh :

$$\lambda \frac{(x_1 - x_1)}{(b_1 - a_1)} = \frac{(x_2 - a_2)}{(b_2 - a_2)} = \frac{(x_3 - a_3)}{(b_3 - a_3)}$$

Bentuk :

$$\frac{(x_1 - x_1)}{a} = \frac{(x_2 - a_2)}{b} = \frac{(x_3 - a_3)}{c}$$

merupakan persamaan linier garis lurus melalui titik (a_1, a_2, a_3) dengan vektor arah [a, b, c], dan

$$\frac{(x_1 - a_1)}{(b_1 - a_1)} = \frac{(x_2 = a_2)}{(b_2 - a_2)} = \frac{(x_3 - a_3)}{(b_3 - a_3)} \qquad \text{.....................} (**)$$

merupakan persamaan linier garis lurus melalui (a_1, a_2, a_3) dan $b_1, b_2, b_3)$

Secara umum untuk R^n :

(1) Persamaan vektoris garis lurus melalui $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ dan $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ adalah :

$[x_1, x_2, ..., x_n] = [a_1, a_2, ..., a_n] + \lambda\ [b_1\text{-}a_1, b_1\text{-}a_2, ..., b_n\text{-}a_n]$ dan yang melalui $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ dengan arah $(p_1, p_2, ..., p_n]$:

$[x_1, x_2, ..., x_n] = [a_1, a_2, ..., a_n] + \lambda\ [p_1, p_2, ..., p_n]$.

(2) Persamaan parameternya :

$x_1 = a_1 + \lambda\ (b_1 - a_1),\ x_2 = a_2 + \lambda\ (b_2 - a_2),\ ....,\ x_n = a_n + \lambda\ (b_n - a_n)$

serta : $x_1 = a_1 + \lambda p_1,\ x_2 = a_2 + \lambda p_2,\ ....,\ x_n = a_n + \lambda p_n$.

(3) Persamaan parameternya :

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = ... \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}$$

bila $b_1 - a_1 \neq 0$ untuk setiap i = 1, 2, ..., n, serta :

$$\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = ... = \frac{x_n - a_n}{p_n}$$

bila $p_1 \neq 0$ untuk setiap i = 1, 2, ..., n

Catatan :

Komponen-komponen dari vektor arah, yaitu p_1, p_2, ..., p_n masing-masing disebut bilangan arah. Kalau ada $p_i = 0$ (tidak semua) berarti garis lurus tersebut tegak lurus sumbu x_i. Misalnya, garis lurus g di R_2 mempunyai arah [0, 3], berarti g tegak lurus sumbu X_1 yang berarti pula sejajar sumbu X_2. Atau garis lurus h di R_2 mempunyai arah [2, 0, 3], berarti h tegak lurus sumbu X_2 yang berarti pula sejajar bidang koordinat $X_1 OX_3$.

Contoh (1.33) :

Persamaan garis lurus di R^2 melalui (3, 0) dan (2, 1) adalah :

persamaan vektoris $[x_1, x_2] = [3, 0] + \lambda\,[2 - 3, 1 - 0]$

$$= [3, 0] + \lambda\,[-1, 1].$$

persamaan parameter $x_1 = 3 - \lambda$, $x_2 = \lambda$

persamaan linier $\dfrac{(x_1 - 3)}{-1} = \dfrac{x_2}{1}$ atau

$$-x_1 + x_2 - 3 = 0.$$

Dapat dilihat bahwa bila di R^2 kita menggunakan sumbu-sumbu X dan Y persamaan linier garis lurus melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah seperti yang kita kenal yaitu : $(y - y_1)/(y_2 - y_1) = (x - x)/(x_2 - x_1)$.

Contoh (1.34) :

Persamaan garis lurus melalui (3, -1, 0, 1) dan (2, 0, 1, 2) di R^4 adalah :

persamaan vektoris : $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [3, -1, 0, 1] + \lambda\,[2\text{-}3, 0\text{+}1, 1\text{-}0, 2\text{-}1]$

$$= [3,-1,0,1] + \lambda\,[-1, 1, 1, 1]$$

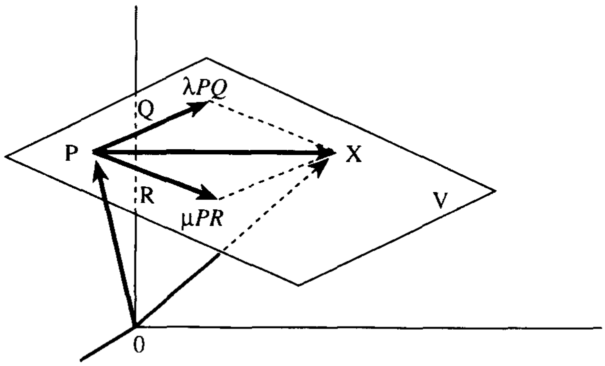
persamaan parameter : $x_1 = 3 - \lambda$, $x_2 = -1 + \lambda$ $x_3 = \lambda$, $x_4 = 1 + \lambda$

persamaan linier : $\dfrac{(x_1 - 3)}{-1} = \dfrac{x_2 + 1}{1} = \dfrac{x_3}{1} = \dfrac{x_4 - 1}{1}$

atau : $-x_1 + 3 = x_2 + 1 = x_3 = x_4 - 1.$

Bidang Rata

Sebuah bidang rata akan tertentu bila diketahui tiga titik (yang tidak segaris) yang terletak padanya. Misalnya bidang rata diketahui 3 titik $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$, $R(r_1, r_2, r_2)$.



Gambar 32

Maka $\boldsymbol{PQ} = [q_1\text{-}p_1, q_2\text{-}p_2, q_3\text{-}p_3]$

$\boldsymbol{PR} = [r_1\text{-}p_1, r_2\text{-}p_2, r_3\text{-}p_3]$

Untuk setiap titik $X(x_1, x_2, x_3)$ pada bidang berlaku $\boldsymbol{PX} = \lambda\boldsymbol{PQ} + \mu\boldsymbol{PR}$, dimana $(-\infty < \lambda < \infty\ ;\ -\infty < \mu\infty)$. Jelas dari Gambar 17; $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{PX} = \boldsymbol{OP} + \lambda.\boldsymbol{PQ} + \mu\boldsymbol{PR}$ atau :

$[x_1, x_2, x_3] = [p_1, p_2, p_3] + \lambda[q_1\text{-}p_1, q_2\text{-}p_2, q_3\text{-}p_3] + \mu[r_1\text{-}p_1, r_2\text{-}p_2, r_3\text{-}p_3]$..... (1)

adalah persamaan vektoris bidang rata melalui 3 titik. Kedua vektor ***PQ*** dan ***PR*** disebut vektor-vektor arah bidang (setiap 2 vektor yang tidak segaris dari bidang merupakan vektor-vektor arah bidang pula), sehingga persamaan vektoris bidang rata diketahui titik $P(p_1, p_2, p_3)$ dengan vektor-vektor arah $[u_1, u_2, u_3]$ dan $v_1, v_2, v_3]$

adalah : $[x_1, x_2, x_3] = [p_1, p_2, p_3] + \lambda[u_1, u_2, u_3] + \mu[v_1, v_2, v_3]$ .... (2)

dan persamaan parameternya :

$x_1 = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$ .... (3)

$x_2 = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$ .... (4)

$x_3 = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$ .... (5)

Kalau λ dan μ kita eliminasikan dari persamaan (3) dan (4) diperoleh :

$$\lambda = \frac{v_2(x_1 - p_1) - u_2(x_2 - p_2)}{C} \quad \text{dan}$$

$$\mu = \frac{u(x_2 - p_2) - v_1 (x_1 - p_1)}{C}$$

di sini $C = u_1v_2 - v_1u_2$ misalkan $\neq 0$. Kemudian kalau λ dan μ disubstitusikan ke persamaan (5) diperoleh :

$$C(x_3 - p_3) - u_3 \{v_2(x_1 - p_1) - v_1(x_2 - p_2)\} - v_3 \{u_1(x_2 - p_2) - u_2(x_1 - p_1)\} =$$
$$0 \text{ atau } (u_2v_3 - u_3v_2)(x_1 - p_1) + u_3v_1 - u_1v_3)(x_2 - p_2) + C(x_3 - p_3) = 0.$$

Kita sebut :

$u_2v_3 - u_3v_2 = A$

$v_1u_3 - u_1v_3 = B$

dan $\quad Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = -D;$

akan diperoleh persamaan linier bidang rata $Ax_1 + Bx_2 + C_3 + D = 0$.

Catatan :

Pada bidang rata $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$, vektor [A, B, C] disebut vektor normal dari bidang rata, karena ia tegak lurus bidang rata tersebut. Bila salah satu komponen vektor normal tersebut = 0, berarti bidang rata tersebut sejajar salah satu sumbu koordinat. Bidang $x_1 + 2x_3 = 5 \in R_3$ adalah sejajar sumbu X_2. Bidang rata dan garis lurus $\in R_3$ dibahas lebih lanjut pada ilmu ukur analitik ruang.

Hyperplane

Secara umum, persamaan linier dengan n variabel x_1 :

$$a_1x_1 + z_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

disebut suatu *hyperplane* di R^n. Persamaan vektorisnya adalah :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + ... + \lambda_{n-1}\,\boldsymbol{u}_{n-1}$$

dimana $\boldsymbol{p}$ adalah vektor posisi salah satu titik pada *hyperplane* dan $\boldsymbol{u}_1$ adalah vektor-vektor arah. Banyaknya parameter ada (n - 1) buah. Vektor $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ disebut vektor normal dari *hyperplane.*

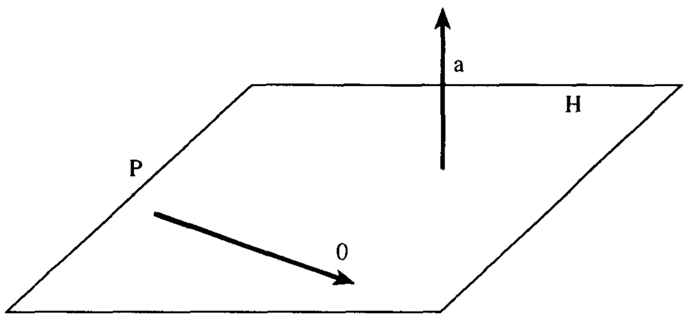
Bukti :

Misalkan $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ dan $Q(q_1, q_2, ..., 1_n)$ dua titik pada *hyperplane* $H : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$.

$\boldsymbol{PQ} = [q_1\text{-}p^1, q^2\text{-}p^2, ..., q^n\text{-}p^n]$ terletak pada H.

$\boldsymbol{a.PQ} = a^1(q^1\text{-}p^1) + a^2(q^2\text{-}p^2) + ... + a^n(q^n\text{-}p^n)$.

$= (a_1q_1 + a_2q_2 + ... + a_nq_n) - (a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n)$



Gambar 33

Tetapi P dan Q pada H berarti $a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n = b$ dan $a_1q_1 + a_2q_2 + ... + a_nq_n = b$. Jadi a. $\boldsymbol{PQ}$ = b - b = 0. Jadi a tegak lurus $\boldsymbol{PQ}$ yang kita ambil sebarang pada **H**. Berarti a tegak lurus *hyperplane* **H**.

Contoh (1.35) :

Persamaan bidang rata melalui 3 titik (0, 0, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 4) adalah :

$[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 1] + \lambda[1\text{-}0, 0\text{-}0, 2\text{-}1] + \mu[0\text{-}0, 1\text{-}0, 4\text{-}1]$

$= [0, 0, 1] + \lambda[1, 0, 1] + \mu[0, 1, 3]$.

Persamaan parameternya : $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = 1 + \lambda + 3\mu$.
Untuk mencari persamaan liniernya kita eliminasikan λ dan μ, diperoleh :

$$x_3 = 1 + x_1 + 3x_2 \text{ atau } x_1 + 3x_2 - x_3 + 1 = 0.$$

Contoh (1.36) :

Untuk mencari persamaan vektoris dari *hyperplane* **H** : $x_1 + 2x + x_3 + x_4 = 6\ \lambda\ R_4$ kita pilih $3 = (n - 1)$ parameter.

Misalkan $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \rho$, jadi $x_4 = 6 - \lambda - 2\mu - p$.

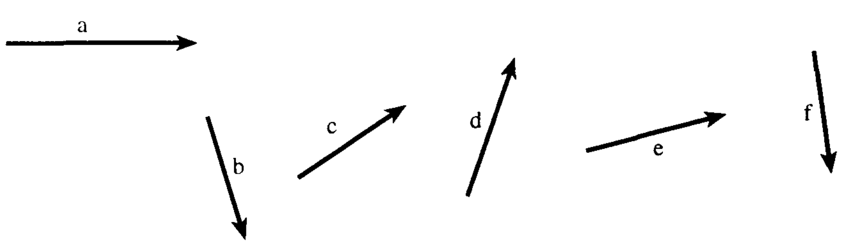
Persamaan vektorisnya :

$$\begin{aligned}[x_1, x_2, x_3, x_4] &= [\lambda,\mu,\rho,6-\lambda-2\mu-\rho] \\ &= [0,0,0,6] + \lambda[1,0,0,-1] + \mu[0,1,0,-2] + \rho[0,0,1,-1).\end{aligned}$$

1.26. CONTOH SOAL

1.37. Diketahui vektor-vektor ***a, b, c, d, e,*** dan ***f*** seperti pada Gambar 34.

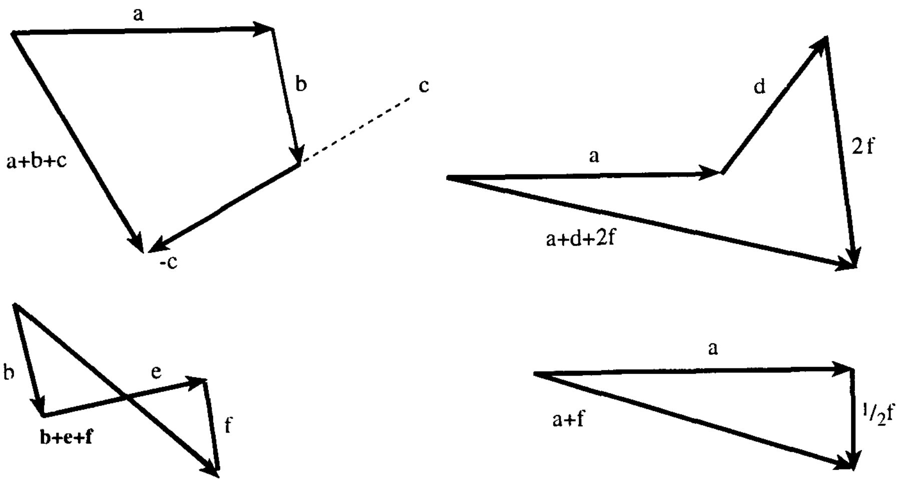
Tentukan : (i) $\boldsymbol{a + b - c}$
(ii) $\boldsymbol{a + d + 2f}$
(iii) $\boldsymbol{b + e + f}$
(iv) $\boldsymbol{a} + {}^1/_2\boldsymbol{f}$.



Gambar 34

Penyelesaian :

Menurut kesamaan vektor, jika selalu dapat memindahkan vektor, asalkan arah dan panjangnya tetap.



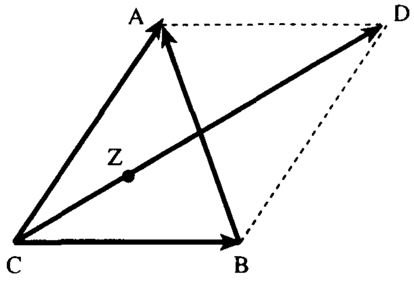
Gambar 35

1.38. Cari x dan y dari [4, y] = x [2,3]

Penyelesaian :
Dari kesamaan vektor : [4, y] = x [2, 3] = [2x, 3x] berakibat : 4 = 2x, y = 3x; berarti x = 2, y = 6.

1.39. Koordinat titik sudut segitiga ABC adalah A(2, 3, 3). B(4, 1, 0). dan C(0, 0, 0). Tentukan koordinat titik beratnya.

Penyelesaian :
Lihat Gambar 21. **Z** titik berat Δ **ABC**.
|**CZ**| = $^1/_3$|**CD**| jadi CZ = $^1/_3$ CD = $^1/_3$(CA + CB) = $^1/_3$[2,2,3] + $^1/_3$[4,1,0] = 2,1,1].
Berarti koordinat **Z** (2, 1, 1)



Gambar 36

1.40. (i) Tentukan ***a, b*** bila $\boldsymbol{a}$ = [2,-3,6], $\boldsymbol{b}$ = (8,2,-3]

(ii) Jarak A(2, 4, 0), B(-1, -2, 1).

(iii) Jarak vektor $\boldsymbol{a}$ = [1, 7] dan $\boldsymbol{b}$ = [6, -5].

Penyelesaian :

(i) ***a, b*** = [2, -3, 6] . [8, 2, -3] = 2, 8 + (-3) . 2 + 6 . (-3) = -8

(ii) Jarak A dan B : $d = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-2 - 4)^2 + (1 - 0)^2}$

$= \sqrt{46}.$

(iii) Jarak 2 vektor $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ kita tulis d(***a, b***) didefinisikan sebagai $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$.
Jadi

$d(a, b) = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-5 - 7)^2 = 13.}$

1.41. (1) Tentukan k supaya $\boldsymbol{a}$ = [1, k, -2, 5] mempunyai panjang = $\sqrt{39}$

(ii) Berapa sudut antara $\boldsymbol{a}$ = [1, 2, 3, 4] dan $\boldsymbol{b}$ (0, 0, 1, 1].

(iii) Tentukan k supaya $\boldsymbol{a}$ [1, k, 1-3] tegak lurus $\boldsymbol{b}$ = [4, -k, 1].

Penyelesaian :

(i) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + k^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{39}$. Berarti $k^2 + 30 = 39$ atau $k = \pm 3$.

(ii) Sudut antara a dan b :

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{a.b.}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

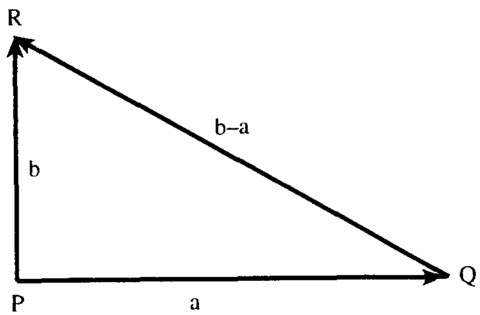
$$= \frac{1.0 + 2.0 + 3.1 + 4.1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}\ \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{60}}, \text{ Jadi } \theta \text{ arc cos } \frac{7}{\sqrt{60}}$$

(iii) $\boldsymbol{a}$ tegak lurus $\boldsymbol{b}$ berarti $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 = 1, 4 + k \cdot (-k) + (-3), 1.$
Diperoleh $k^2 = 1$ atau $k = \pm 1$.

1.42. Buktikan dalil Phytagoras dengan menggunakan vektor.

Penyelesaian : Lihat Gambar 37.



Gambar 37

$(QR)\ 2 = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2 = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$
$= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$
Tetapi $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ karena a tegak lurus $\boldsymbol{b}$.
Jadi
$(QR)^2 = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}|^2$. Terbukti
$(QR)^2 = (PR)^2 + (PQ)^2$.

1.43. Ketiga titik sudut suatu segitiga terletak pada lingkaran, dengan salah satu sisinya garis tengah lingkaran tersebut. Buktikan bahwa segitiga itu siku-siku.

Penyelesaian :

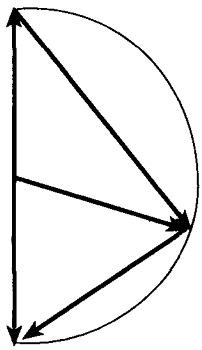
Lihat gambar 38.

Karena masing-masingnya jari-jari berarti :

$|\boldsymbol{MA}| = |\boldsymbol{MB}| = |\boldsymbol{MC}|$ dan jelas $\boldsymbol{MA} = -\boldsymbol{MB}$.

Sedangkan $\quad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{MC} - \boldsymbol{MA}$

$\boldsymbol{CB} = \boldsymbol{MB} - \boldsymbol{MC}$



Gambar 38

Berarti :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AC} \,.\, \boldsymbol{CB} &= (\boldsymbol{MC} - \boldsymbol{MA}) \,.\, (\boldsymbol{MB} - \boldsymbol{MC}) \\
&= \boldsymbol{MC} \,.\, \boldsymbol{MB} - \boldsymbol{MA} \,.\, \boldsymbol{MB} - \boldsymbol{MC} \,.\, \boldsymbol{MC} + \boldsymbol{MA} \,.\, \boldsymbol{MC} \\
&= \boldsymbol{MC} \,.\, \boldsymbol{MB} + \boldsymbol{MB} \,.\, \boldsymbol{MB} - \boldsymbol{MC} \,.\, \boldsymbol{MC} - \boldsymbol{MB} \,.\, \boldsymbol{MC} \\
&= \boldsymbol{MB} \,.\, \boldsymbol{MB} - \boldsymbol{MC} \,.\, \boldsymbol{MC} = |\boldsymbol{MB}|^2 - |\boldsymbol{MC}|^2 = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

Jadi $\boldsymbol{AC}$ tegak lurus $\boldsymbol{CB}$ atau segitiga ABC siku-siku.

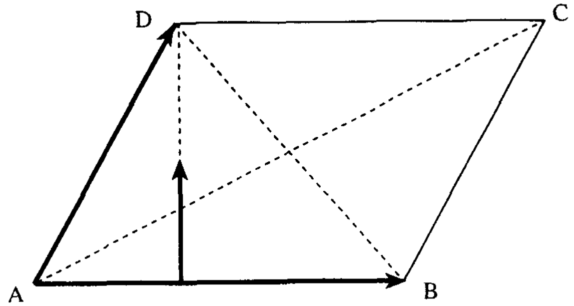
1.44. Jajaran genjang ABCD, alasnya vektor $\boldsymbol{AB} = [4, -4]$ dan sisi yang lain **AD** = [2, 1]. Carilah :

(i) Sudut-sudut jajaran genjang.

(ii) Vektor satuan searah dengan tinggi, dan tinggi dari jajaran genjang tersebut.

(iii) Luas jajaran genjang.

(iv) Koordinat vektor diagonal-diagonalnya.



Gambar 39

Penyelesaian :

(i) Sudut DAB = arc cos $\dfrac{[2,1]\ .\ [4,-2]}{\sqrt{5}\ .\sqrt{20}}$

= arc cos 6/10 = 53°

Sudut ABC = 180° – 53° = 127°

(ii) t tegak lurus $\boldsymbol{AB}$ = [4, -2] dengan $|t|$ = 1. Misalkan $t = |t_1, t_2|$
Berarti $t_1^2 + t_2^2 = 1$ . ... (*)
Sedangkan t . ($\boldsymbol{AB}$) = 0 berarti $4t_1^2 = 2t_2 = 0$ atau $t_2 = 2t_1$.
Substitusikan ke (*) : $t_1^2 + 4t_1 - 1$, berarti $t_1 = \pm 1/\sqrt{5}$, t = $[1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}]$, atau $[-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}]$. Tinggi jajaran genjang adalah proyeksi $\boldsymbol{AD}$ pada t yaitu = $\boldsymbol{AD}$. t = [2, 1] . $[1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}] = 4/\sqrt{5}$.
(Panjang proyeksi kita ambil selalu yang positif).

(iii) Luas = $|\boldsymbol{AB}|$. tinggi = $\sqrt{20}$. $4/\sqrt{5}$ = 8 satuan luas.

(iv) Vektor diagonal $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AD}$ [6, -1] dan
$\boldsymbol{BD} = \boldsymbol{AD} - \boldsymbol{AB}$ = [-2, 3].

1.45. Tentukan persamaan garis lurus g yang melalui titik A (2, 3, 1) dan sejajar BC bila B(4, -5, 1) dan C(2, 7, -3).

Penyelesaian :

Vektor $\boldsymbol{BC}$ = [2-4, 7+5, -3-1] = [-2, 12, -4], karena g sejajar BC, maka {-2, 12, -4], merupakan vektor arah dari g. Sehingga persamaan garis g : $[x_1, x_2, x_3]$ = [2, 3, 1] + λ[-2, 12, -4].

1.46. Tunjukkan bahwa :

(i) Titik A(1, 1, 1) terletak pada g.

(ii) Titik B(6, 2, 1) tidak terletak pada g, bila g : (x1, x2, x3] = [2, 1, 0] + λ[1, 0, -1].

Penyelesaian :

(i) Kita tunjukkan pada λ yang memenuhi persamaan : [1, 1, 1] = [2, 1, 0] + λ[1, 0, -1] atau : 1 = 2 + λ, 1 = 1 dan 1 = -λ. Jadi λ = -1 memenuhi menunjukkan bahwa [1, 1, 1] terletak pada g.

(ii) Persamaan [6, 2, 1] = [2, 1, 0] + λ[1, 0, -1] tidak memenuhi, karena 6 = 2 + λ, 2 = 1 dan 1 = -λ; menunjukkan bahwa (6, 2, 1) tidak terletak pada g.

1.47. Tentukan persamaan parameter dan persamaan vektor garis lurus $(x_1 - 2)/3 = (x_2 - 1)/4 = x_3 - 1$

Penyelesaian :

Parameter dari persamaan garis lurus ada satu. Tulis $(x_1 - 2)/3 = (x_2 - 1)/4 = x_3 - 1 = \lambda$, diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= 2 + 3\lambda \\ x^2 &= 1 + 4\lambda \\ x^3 &= 1 + \lambda \end{aligned}\right\}$$ adalah persamaan parameternya, dan persamaan vektorisnya $[x_1, x_2, x_3] = [2, 1, 1] + \lambda[3, 4, 1]$

1.48. Tentukan persamaan garis lurus g yang melalui titik P[2, 3, 4] dan tegak lurus bidang W : $[x_1, x_2, x_3] = [1, 1, 1] + \lambda[2, 1, 1] + \mu[1, 2, 1]$.

Penyelesaian :

Persamaan linier dari W : $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ dimana [A, B, C] vektor normal (vektor yang tegak lurus W) jadi juga merupakan vektor arah dari g.

$A = u_2v_3 - u_3v_2 = 1.1 - 1.2 = -1$

$B = u_3v_1 - u_1v_3 = 1.1 - 2.1 = -1$

$C = u_1v_2 - u_2v_1 = 2.2 - 1.1 = 3.$

Jadi, persamaan garis g yang melalui P(2, 3, 4) dan mempunyai arah [-1, -1, 3] adalah $[x_1, x_2, x_3] = [2, 3, 4] + \lambda[-1, -2, -1,3]$.

1.49. Tentukan persamaan bidang rata W yang melalui titik (0, 0, 0) dan garis lurus g : $[x_1, x_2, x_3] = [1, -1, 0] + \lambda[2, 1, 1]$.

Penyelesaian :

Titik (1, -1, 0) pada g berarti juga pada W, sehingga vektor [1-0, -1-0, 0-0] = [1, -1, 0] adalah salah satu vektor arah W, vektor arah yang lain adalah vektor arah g yaitu [2, 1, 1]; jadi W : $[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 0] + \lambda[1, -1, 0] + \mu[2, 1, 1]$ atau $[x_1, x_2, x_3] = \lambda[1, -1, 0] + \lambda[2, 1, 1]$.

1.50. Tentukan persamaan bidang rata V yang melalui (2, 1, 1) dan sejajar garis lurus g : $[x_1, x_2, x_3] = [2, 1, 0] + \lambda[1, 1, 1]$ serta h : $(x_1, x_2, x_3] = \lambda[2, 3, 1]$.

Penyelesaian :

Karena V sejajar g dan h maka vektor arah dari V dapat kita ambil [1, 1, 1] dan [2, 1, 1]. Jadi, persamaan V : $[x_1, x_2, x_3] = [2, 1, 1] + \lambda[1, 1, 1] + \mu[2, 3, 1]$.

1.51. Tentukan titik tembus garis lurus g : $[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, -1] + \lambda[2, 1, 0]$ pada bidang rata V : $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$.

Penyelesaian :

Titik tembus tersebut P terletak baik pada g maupun pada V. Persamaan parameter dari g : $x_1 = 1 + 2\lambda$ $x_2 = 2 + \lambda$, $x_3 = -1$ kita substitusikan ke V, diperoleh $2(1 + 2\lambda) - (2 + \lambda) + 3(-1) = 0$, diperoleh $\lambda = 1$. Jadi, titik tembus mempunyai vektor posisi $[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, -1] + 1[2, 1, 0] = [3, 3, -1]$. Atau P(3, 3, -1).

1.52. Tentukan persamaan *hyperplane* **H** di R_4 bila :

(i) **H** melalui P(3, -2, 1, -4) dan tegak lurus a = [2, 5, -6, -2).

(ii) **H** melalui r (1, -2, 3, 5) dan sejajar **H'** = $4x - 5y + 2z - w = 11$.

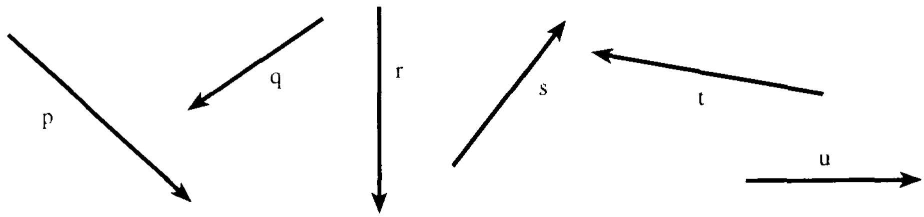
Penyelesaian :

(i) Vektor a = [2, 5, -6, -2] adalah vektor normal dari **H**, jadi **H** berbentuk $2x + 5y - 6z - 2w + k = 0$ dan karena melalui P berarti $2(3) + 5(-2) - 6(1) - 2(-4) + k = 0$, jadi $k = 2$.
Sehingga **H** : $2x + 5y - 6z - 2w + 2 = 0$.

(ii) Karena **H** sejajar dengan **H'** maka vektor normal **H** berbentuk merupakan vektor normal **H**, yaitu [4, -5, 2, -1]. Jadi **H** berbentuk 4x - 5y + 2z - w + k = 0 dan karena melalui R maka 4(1) - 5(-2) + 2(3) - (5) + k = 0, atau k = -15.
Jadi **H** : 4x - 5y + 2z - w - 15 = 0.

1.28. SOAL-SOAL LATIHAN

1.53. Diketahui vektor-vektor p, q, r, s, t dan u sebagai berikut :



Gambar 40

Carilah :

(i) $p + q + r + s$
(ii) $p - q + s - r$
(iii) $u - p + q - r$
(iv) $s + t + p - r$
(v) $2u - 3p + \frac{1}{2}t$
(vi) $-p + 3u - r$
(vii) $3(p + q - r) - s + u - t$
(viii) $p + q + r + s + t + u$

1.54. Tentukan x dan y untuk soal (i) dan (ii) serta x, y dan z untuk soal (iii) dan (iv).
(i) [x, x+y] = [y-2, 6]
(ii) x[1, 2] = -4[y, 3]
(iii) [3, -1, 3] = x[1, 1, 1] + y[1, -1, 0] + z[1, 0, 0]
(iv) [-1, 3, 3] = x[1, 0, 0] + y[0, 0, -1] + z[0, 1, 1]

Jawab :

(i) $x = 2, y = 4$
(ii) $x = -6, y = {}^3/_2$
(iii) $x = 2, y = 3, z = -2$
(iv) $x = -1, y = 0, z = 3,$

1.55. Diketahui u = 1, -2, 5], v = [3, 1, 2].

Carilah :

(i) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$	(ii) $-6\boldsymbol{u}$
(iii) $2\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v}$	(iv) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$
(v) $\lvert \boldsymbol{u} \rvert \cdot \lvert \boldsymbol{v} \rvert$	(vi) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(vii) sudut antara ***u*** dan ***v***	(viii) proyeksi ***u*** pada ***v***

Jawab :

(i) [4, -1, 3]	(v) $\sqrt{30}, \sqrt{14}$
(ii) [-6, 12, -30]	(vi) $\sqrt{62}$
(iii) [-12, -9, 20]	(vii) arc cos $-9/(2\sqrt{105})$
(iv) -9	(viii) $-{}^9/_{14}[3, 1, -2]$

1.56. Diketahui vektor-vektor melalu dua titik sebagai berikut :

vektor	**titik awal**	**titik ujung**
a	(0, 0, 0)	(2, 2, 1)
b	(0, 0, 0)	(4, 0, 0)
c	(2, 2, 1)	(4, 2, 1)
d	(4, 2, 1)	(4, 0, 0)

Keempat vektor tersebut membentuk sebuah segi empat
(i) Tunjukkan bahwa segi empat tersebut trapesium siku-siku.
(ii) Tentukan keliling trapesium tersebut.
(iii) Carilah luas trapesium tersebut.
(iv) Tentukan panjang, dan koordinat titik potong, dari diagonal trapesium tersebut.

Jawab :

(ii) $9 + \sqrt{5}$
(iii) $3\sqrt{5}$
(iv) $\sqrt{21}$, 3, $({}^8/_3, {}^4/_3, {}^2/_3)$

1.57. Titik-titik sudut sebuah segitiga adalah : A(2, 3, 1), B(-1, 1, 2), C(1, -2, 3). Tentukan panjang garis berat yang ditarik dari titik B ke sisi AC, dan sudut antara garis berat tersebut dengan sisi AC.

Jawab :

$^{1}/_{2}\sqrt{26}$, arc cos $(\sqrt{91})/14$.

1.58. Diketahui sebarang vektor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \in \mathbf{R}^n$.

Vektor $z = \boldsymbol{x} - \dfrac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}$

Buktikan : z tegak lurus $\boldsymbol{y}$, serta $\left| \dfrac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}} \boldsymbol{y} \right|^2 + |z|^2 = |\boldsymbol{x}|^2$

1.59. Buktikan dengan vektor bahwa diagonal belah ketupat saling tegak lurus.

1.60. Buktikan dengan vektor bahwa ketiga garis tinggi sebuah segitiga bertemu di satu titik.

1.61. ABCD jajaran genjang, buktikan :

$(AC)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2$.

1.62. Tunjukkan apakah ketiga vektor a, b, c berikut membentuk sebuah segitiga.

	a	***b***	***c***
(i)	[2, 1, 3]	[1, -1, 2]	[3, 0, 5]
(ii)	[0, 1, 4]	[1, 3, 2]	[1, 4, 2]
(iii)	[2, 3, 1]	[-1, 2, 1]	[1, -5, -2]

Jawab : (1) ya; (ii) tidak; (iii) tidak.

1.63. Diketahui $\boldsymbol{i} = [1, 0, 0], \boldsymbol{j} = [0, 1, 0], \boldsymbol{k} = [0, 0, 1]$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $v = [a, b, c] \in R^3$ berlaku $v = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ dan $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i} = \mathbf{a}$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j} = $ b, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = $ c.

1.64. Tentukan persamaan vektoris, parameter, dan linier garis lurus melalui A(2, 1, 1) dengan vektor arah :

(i) [1, 1, 1]

(ii) [2, 1, 0]

(iii) [0, 3, 0]

Jawab :

(i) $[x_1, x_2, x_3] = [2, 1, 1] + \lambda[1, 1, 1]$;
$x_1 = 2 + \lambda$, $x_2 = 1 + \lambda$, $x_3 = 1 + \lambda$;
$x_1 - 2 = x_2 - 1 = x_3 - 1$.

(ii) $[x_1, x_2, x_3] = [2, 1, 1] + \lambda[2, 1, 0]$;
$x_1 = 2 + 2\lambda$, $x_2 = 1 + \lambda$, $x_3 = 1$;
$x_1 = 2x_2$ dan $x_3 = 1$ (garis lurus sejajar bidang X_1, OX_2 atau tegak lurus sumbu X_3).

(iii) $[x_1, x_2, x_3] = [2, 1, 1] + \lambda[0, 3, 0]$,
$x_1 = 2$, $x_2 = 1 + 3\lambda$, $x_3 = 1$; garis lurus tegak lurus bidang $X_1 OX_3$ atau sejajar sumbu x_2, persamaan liniernya $x_1 = 2$, $x_3 = 1$.

1.65. Tentukan persamaan vektoris garis lurus $x_1 - 3 = x_2 - 4 = -x_3 + 2 = 3x_4 + 2$.

Jawab :

$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [3, 4, 2, -{}^2/_3] + \lambda[1, 1, -1, {}^1/_3]$.

1.66. Periksa apakah garis-garis lurus g : $(x_1, x_2, x_3] = [3, 1, 1] + \lambda[-1, -2, 9]$ dan h : $[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 3] + \lambda[-2, 1, 2]$ berpotongan.
Jika benar, tentukan titik potongnya.

Jawab :

Berpotongan di (3, 1, 1)

1.67. Tentukan persamaan bidang rata yang melalui (1, 1, 1) dan garis lurus g : $[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 1] + \lambda[1, 0, 2]$

Jawab :

$[x_1, x_2, x_3] = [1, 1, 1] + \lambda[0, 1, 0] + \mu[-1, 0, 2]$

1.68. Tentukan titik tembus garis lurus [x, y, z] = [2, 1, 1] + + λ[1, 2, 1] pada bidang rata [x, y, z] = [3, 0, 0] + λ[1, 3, 1] + μ[-1, 0, 1].

Jawab :

(3, 3, 2)

1.69. Tentukan persamaan bidang rata melalui garis lurus g : [x, y, z] = [1, 2, 3] + λ[4, 5, 6] serta sejajar garis lurus h : [x, y, z] = [7, 8, 10] + λ[1, 2, 31].

Jawab :

[x, y, z] = [1, 2, 3] + λ[4, 5, 6] + μ[1, 2, 3].

1.70. Tentukan persamaan bidang rata *(hyperplane)* di R^3 yang :

(i) melalui (2, -7, 1) dan tegak lurus [3, 1, -11]

(ii) melalui (1, -2, 2), (0, 1, 3) dan (0, 2, -1).

Jawab :

(i) $3x + y - 11z + 12 = 0$;

(ii) $13x + 4y + z - 7 = 0$.

1.71. Tentukan nilai k supaya kedua hyperplane $2x - ky + 4z - 5u = 11$ dan $7x + 2y - z + 2u = 8$ saling tegak lurus.

Jawab :

k = 0 (2 *hyperplane* saling tegak lurus bila vektor-vektor normalnya saling tegak lurus).

1.72. Diketahui garis g : [x, y, z] = [11, 18, 4] + λ[2, 5, -2]. Tentukan :

(i) Bidang V yang tegak lurus pada g melalui P(1, 1, 1), lalu cari titik tembus g pada V.

(ii) Hitung jarak titik P ke titik tembus tersebut, jarak tersebut adalah jarak titik P ke garis lurus g.

Jawab :

(i) $2x + 5y - 2z - 5 = 0$, (5, 3, 10);

(ii) $\sqrt{101}$

1.73. Tentukan persamaan garis lurus melalui (3, 2, 1) sejajar bidang rata $[x_1, x_2, x_3] = \lambda[1, 2, 3] + \mu[1, 1, 1]$ dan tegak lurus garis lurus $[x_1, x_2, x_3] = \lambda[-1, 2, 1]$.

Jawab :

$[x_1, x_2, x_3] = [3, 2, 1] + \lambda[2, 1, 0]$.

DETERMINAN ORDO 2

```
10 CLS:PRINT"MENGHITUNG DETERMINAN ORDO 2"
20 PRINT"DETERMINAN: ":PRINT
30 PRINT" A B "
40 PRINT" C D ":PRINT
50 PRINT " Harga A :";
60 INPUT A
70 PRINT " Harga B :";
80 INPUT B
90 PRINT " Harga C :";
100 INPUT C
110 PRINT "Harga D : ";
120 INPUT D
130 DET=A*D-B*C
150 PRINT"DETERMINAN = ";USING"###.##";DET
160 END
```

DETERMINAN ORDO 3

```
10 CLS:PRINT"MENGHITUNG DETERMINAN ORDO 3"
20 PRINT"DETERMINAN: ":PRINT
30 PRINT" A B C"
40 PRINT" D E F"
50 PRINT" G H I":PRINT
60 PRINT " Harga A :";: INPUT A
70 PRINT " Harga B :";: INPUT B
80 PRINT " Harga C :";: INPUT C
90 PRINT " Harga D :";: INPUT D
100 PRINT " Harga E :";: INPUT E
110 PRINT " Harga F :";: INPUT F
120 PRINT " Harga G :";: INPUT G
130 PRINT " Harga H :";: INPUT H
140 PRINT " Harga I :";: INPUT I
150 DET+ = A*E*I + B*F*G + C*D*H
160 DET- = C*E*G + A*F*H + B*D*I
170 DET = DET+ - DET-
180 PRINT"DETERMINAN =";USING"###.##";DET
190 END
```

DOT PRODUK DAN SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

```
30 'DOT PRODUK DUA VEKTOR
40 CLS:INPUT"UKURAN/ORDER VEKTOR ";N
50 DIM A(N),B(N)
60 PRINT:PRINT"VEKTOR 1":PRINT"KOMPONEN KE :"
70 FOR J = 1 TO N
80 PRINT"        ";J;:IONPUT A(J)
90 NEXT J
100 PRINT:PRINT:PRINT"VEKTOR 2":PRINT"KOMPONEN KE :"
110 FOR J = 1 TO N
120 PRINT"       ";J;:INPUT B(J)
130 NEXT J
140 D=0
150 FOR K=1 TO N
160 D=D+A(K)*B(K)
170 NEXT K
180 PRINT:PRINT "DOT PRODUK= ";D
190 IF D=0 THEN PRINT:PRINT"kedua vektor saling orthogonal, sudut = 90
    derajat"
200 'Menghitung panjang vektor
210 P1=0
220 FOR K= 1 TO N
230 P1=P1+A(K)^2
240 NEXT K
250 PA1=SQR(P1)
260 PRINT:PRINT"PANJANG VEKTOR 1 =";USING"###.####";PA1
270 P2=0
280 FOR K=1 TO N
290 P2=P2+B(K)^2
300 NEXT K
310 PA2=SQR(P2)
320 PRINT"PANJANG VEKTOR 2 = ";USING"###.####";PA2
330 SDT=D/PA1*PA2)
340 PRINT"COSINUS SUDUT KE 2 VEKTOR = ";USING"#.####";SDT
350 END
```

JENIS IRISAN KERUCUT

```
10 'menentukan jenis irisan kerucut
20 'A11(x^2 + 2*A12*x*y + A22*y^2
   + 2*A13*x + 2*A23*y + A33 = 0
30 PRINT " Harga A11 :";: INPUT A11
40 PRINT " Harga A12 :";: INPUT A12
50 PRINT " Harga A22 :";: INPUT A22
60 PRINT " Harga A13 :";: INPUT A12
70 PRINT " Harga A23 :";: INPUT A23
80 PRINT " Harga A33 :";: INPUT A33
90 'menghitung H
100 DET+ = A11*A22*A33 + A12*A23*A13 + A13*A12*A23
110 DET- = A13*A22*A13 + A11*A23*A23 + A12*A12*A33
120 H = DET + - DET-
130 D = A11*A22 - A12*A12
140 IF H = 0 THEN 240
150 PRINT"IRISAN KERUCUT SEJATI"
160 IF D > 0 THEN 200
170 IF D < 0 THEN 190
180 PRINT:PRINT"BERBENTUK PARABOLA":GO TO 330
190 PRINT:PRINT"BERBENTUK HIPERBOLA":GO TO 330
200 S = A11 + A22
210 IF S/H > 0 THEN 230
220 PRINT:PRINT"BERBENTUK ELIPS NYATA":GO TO 330
230 PRINT:PRINT"BERBENTUK ELIPS KHAYAL":G TO 330
240 PRINT"IRISAN KERUCUT BERUBAH CORAK MENJADI
    SEPASANG GARIS LURUS"
250 IF D > 0 THEN 320
260 IF D < 0 THEN 310
270 F = A22*A33 - A23*A23
280 IF F = 0 THEN 300
290 PRINT:PRINT"BERBENTUK SEPASANG GARIS SEJAJAR": GO TO
    330
300 PRINT:PRINT"BERBENTUK SEPASANG GARIS BERPOTONGAN
    NYATA": GO TO 330
320 PRINT:PRINT"BERBENTUK SEPASANG GARIS BERPOTONGAN
    KHAYAL"
330 END
```