4 DETERMINAN

4.1. PENDAHULUAN, PERMUTASI

Setiap matriks bujur sangkar A selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut DETERMINAN matriks tersebut, dan kita tulis sebagai det(A) atau A. Sebelum dimulai dengan yang lebih umum, kita ambil dahulu matriks A berukuran (2 x 2) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Didefinisikan; $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Contoh (4.1):

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.5 = -10$

Contoh (4.2):

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.2 = 0$

Catatan (1):

kita bedakan tanda kurung untuk matrks dengan determinan.

Determinan: $\left| \quad \right|$, matriks : $\left(\quad \right)$ $\left[\quad \right]$

DEFINISI:

Barisan bilangan-bilangan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ dimana berlaku $j_i \neq j_k$, untuk $i \neq k$ (i dan $k = 1,2,\ldots, n$) serta j_i salah satu dari bilangan asli $(1,2,\ldots, n)$ disebut suatu permutasi.

Contoh (4.3):

Sebagai contoh, (2,3,1,4,5) adalah permutasi.

Catatan (2):

Apabila kita mempunyai n buah bilangan asli 1,2, ..., n maka banyaknya permutasiyang dapat kita bentuk ada $n! = n(n - 1)(n - 2) \ldots 2 . 1$.

Misalnya n = 3, maka terdapat 3! = 3.2.1 = 6 buah permutasi yaitu: (1.2.3), (1.3.2), (2.1.3), (2.3.1), (3.1.2), (3.2.1).

DEFINISI:

Yang dimaksud dengan sebuah inversi pada suatu permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ialah adanya $j_k < j_i$ (j_k mendahului j_i) padahal $j_i < j_k$ (i dan k = 1, 2, ..., n).

Contoh (4.4):

Misalnya ada permutasi (2.1.4.3). Berapakah banyaknya inversi pada permutasi tersebut?

Kita tulis (2 1 4 3), akan terdapat 2 versi

(1) $j_1 = 2$ mendahului $j_2 = 1$, padahal $1 < 2$

(2) $j_3 = 4$ mendahului $j_4 = 3$, padahal $3 < 4$.

Contoh (4.5):

Permutasi $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \end{pmatrix}$ Banyaknya inversi ada lima yaitu:

(1) $j_1 = 4$ Mendahului $j_2 = 3$, padahal $3 < 4$.

(2) $j_1 = 4$ mendahului $j_3 = 1$, padahal $1 < 4$.

(3) $j_1 = 4$ mendahului $j_4 = 2$, padahal $2 < 4$.

(4) $j_2 = 3$ mendahului $j_3 = 1$, padahal $1 < 3$.

(5) $j_2 = 3$ mendahului $j_4 = 2$, padahal $2 < 3$.

PERMUTASI GENAP DAN GANJIL

DEFINISI:

Jika banyaknya inversi suatu permutasi adalah bilangan ganjil maka disebut permutasi ganjil dan dalam hal lain disebut genap.

Contoh (4.6):

Pada Contoh (4.4), banyaknya inversi dari permutasi (2,1,4,3) adalah 2, jadi permutasi genap. Pada Contoh (4.5) permutasi (4,3,1,2) adalah ganjil karena banyaknya inversi adalah 5.

Catatan (3):

Kalau kita mempunyai n bilangan asli 1,2, ..., n maka banyaknya permutasi $= n!$, disini $\frac{1}{2}(n!)$ adalah permutasi genap dan $\frac{1}{2}(n!)$ adalah permutasi ganjil.

DEFINISI:

Misalkan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ suatu permutasi, maka TANDA (SIGN) dari permutasi tersebut, kita tulis $\sigma\ (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah: $\sigma\ (j_1, j_2, \ldots, j_n) = +1$, bila $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ genap, $= -1$ bila $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ganjil.

Sekarang pandang matriks bujur sangkar A berordo n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kemudian pandang pula suatu hasil antara n elemen-elemen dari A yang masing -masing terletak pada baris yang berbeda dan kolom yang berbeda (suatu hasil kali yang mengandung hanya satu elemen dari setiap baris dan setiap kolom).

Contoh (4.7):

Contoh hasil kali yang dimaksud di atas misalnya hasil kali n elemen-elemen diagonal utama matriks A: $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$. Jelas dari setiap baris dan dari setiap kolom hanya diambil satu elemen. Untuk memudahkan diambil suatu hasil kali dari n elemen-elemen yang barisnya telah diurutkan (tentu saja boleh pula kalau kolomnya yang telah diurutkan), maka setiap hasil kali antara n elemen matriks A di atas selalu berbentuk:

(*) $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, \ldots, a_{nj_n}$, di mana *subscript* j_i menunjukkan kolomnya.

Karena masing-masing faktor haruslah elemen yang datang dari kolom yang berbeda maka barisan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah suatu permutasi. Apabila hasil kali (*) kita lengkapi dengan memberikan tanda *(sign)* dari permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ tersebut maka hasil kali:

(**) $\sigma(j_1, j_2, \ldots j_n) . a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$, kita sebut hasil kali bertanda dari n elemen-elemen $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$.

DEFINISI:

Determinan dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah jumlah dari semua n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks A tersebut. Dengan perkataan lain:

$$\det(A) = |A| = \Sigma\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\ a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots a_{njn}.$$

Contoh (4.8):

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka terdapat n! = 2.! = 2.1 = 2 buah

hasil kali sebagai berikut:

(1) $a_{11}a_{12}$, permutasi (1,2), banyaknya inversi = 0 (permutasi genap), maka $\sigma(1,2) = +1$, jadi $+a_{11}a_{22}$.

(2) $a_{12}a_{21}$, permutasi (2,1), banyaknya iversi = 1 (ganjil) maka $\sigma(2,1) = -1$, jadi $-a_{12}a_{21}$.

Maka $\det(A) = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Sesuai dengan definisi terdahulu.

Contoh (4.9):

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ berordo 3, terdapat 3! = hasil kali:

(1) $a_{11}a_{22}a_{33}$, permutasi (1,2,3) banyaknya inversi 0(+)

(2) $a_{12}a_{23}a_{31}$, permutasi (2,3,1) banyaknya inversi 2(+)

(3) $a_{13}a_{21}a_{32}$, permutasi (3,1,2) banyaknya inversi 2(+)

(4) $a_{13}a_{22}a_{31}$, permutasi (3,2,1) banyaknya inversi 3(-)

(5) $a_{11}a_{23}a_{32}$, permutasi (2,1,3) banyaknya inversi 1(-)

(6) $a_{12}a_{21}a_{33}$, permutasi (2,1,3) banyaknya inversi 1(-)

Jadi det(A) = $+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ atau untuk lebih mudah mengingat, kita pakai cara SARRUS (khusus untuk matriks ordo 3):

$$\begin{array}{ccc|cc} & & (-) & (-) & (-) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & (+) & (+) & (+) \end{array}$$

Contoh (4.10):

Hitung $\begin{bmatrix} 31 & 22 & 12 \\ 6 & 6 & -4 \\ 5 & 13 & 3 \end{bmatrix}$ secara Sarrus

Maka

$$\begin{array}{ccc|cc} & & (-) & (-) & (-) \\ 31 & 22 & 12 & 31 & 22 \\ 6 & 7 & -4 & 6 & 7 \\ 5 & 13 & 3 & 5 & 13 \\ & & (+) & (+) & (+) \end{array}$$

$= (31.7.3) + (22.-4.5) + (12.6.13) - (5.7.12) - (13.-4.31) - (3.6.22) = 1943$

Bila memakai kalkulator cara ini cukup menyenangkan dan teliti.

4.2. SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Deberikan beberapa sifat-sifat penting dan determinan:

(S1) $\det(A) = \det(A^T)$.

Contoh (4.11):

Bila $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

dan $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(S2) Tanda determinanan berubah apabila dua baris/kolom ditukar tempatnya.

Contoh (4.12):

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

atau : $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Catatan (4):

S2 menunjukkan bahwa dilakukan transformasi elementer jenis kesatu $H_{ij}(A)$ dan $K_{ij}(A)$ *satu kali* terhadap A, maka nilai determinannya *bertukar tanda*. Pada Contoh (4.12) misalnya:

$|A| = -|H_{12}(A)|$ dan $|A| = -|K_{13}(A)|$.

Atau: Bila B diperoleh dari A dengan satu kali transformasi elementer jenis kesatu maka $\det(A) = -\det(B)$.

Akibat:

Kalau dua baris/kolom dari determinan sama, maka determinan = 0.

Bukti:

Dari S2, misalnya kedua baris/kolom yang sama tersebut dipertukarkan, berarti det(A) = -det(A) (karena denga penukaran itu matriks A tetap), jadi 2 det(A) = 0 atau det(A) = 0.

Contoh (4.13):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{H_{13}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(S3) Harga determinan menjadi l kali, bila suatu baris/kolom dikalikan dengan l (suatu skalar).

Contoh (4.14):

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan determinan:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ maka bila baris 1 misalnya dikalikan 4 diperoleh:

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 & 8 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad |A|.$$

Jadi, kita dapat memasukkan/mengeluarkan skalar l dari suatu determinan secara bebas pada tiap-tiap baris/kolom.

Misalnya: $3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ dan lain-lain.

Catatan (5):

Jadi bila kita lakukan satu kali transformasi elementer jenis kedua ($H_j^{(\lambda)}(A)$, $K_j^{(\lambda)}(A)$ terhadap matriks A maka determinannya akan menjadi l kali.

Akibat:

Kalau suatu matriks, salah satu baris/kolomnya merupakan baris/kolom nol, maka determinannya = 0. Silakan dibuktikan sendiri.

(S4) Harga determinan tidak berubah apabila baris/kolom ke-i ditambah dengan λ baris/kolom ke-j.

Contoh (4.15):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{H_{21}^{(1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{H_{31}^{(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

dan lain-lain.

Catatan (6):

Jadi bila dilakukan tranformasi elementer jenis ketiga ($H_{ij}(\lambda)(A)$, $K_{ij}(\lambda)(A)$) pada matriks A, harga determinannya tidak berubah.

Akibat:

Bila terdapat baris/kolom berkelipatan maka harga determinan = 0.

Contoh (4.16):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} \overset{H_{31}^{(-2)}}{\sim} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

dan dari akibat S3 di atas maka det = 0.

Catatan (7):

Sebuah determinan selalu dapat dituliskan sebagai penjumlahan dua determinan (atau lebih), seperti terlihat pada Contoh (4.17). Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema pada 4.4.

Contoh (4.17):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 4 \\ 2+1 & 0 & 2 \\ 2+2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

4.3. MINOR DAN KOFAKTOR

Pandang matriks berukuran $(n \times n)$: $A = (A_{ij})$, dan M_{ij} suatu submatriks dari A dengan ukuran: $(n - 1) \times (n - 1)$ di mana baris ke-i dan kolom ke-j (dari A) dihilangkan.

Contoh (4.18):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{maka } M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(baris ke-3 dan kolom ke-2 dihilangkan).

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 14 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{maka } M_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

(baris ke-2 dan kolom ke-4 dihilangkan).

DEFINISI:

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks $A = (a_{ij})$ adalah $|M_{ij}|$ dan kofaktor dari a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ adalah suatu skalar.

Contoh (4.19):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Minor dari elemen $a_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6$

Kofaktor dari elemen $a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot -6 = 6$.

4.4. PENGURAIAN (EKSPANSI) SECARA BARIS DAN KOLOM

Teorema Laplace:

Determinan dari suatu matriks = jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Dengan perkataan lain:

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ dengan i sebarang, disebut uraian baris ke-i.

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$ dengan j sebarang, disebut uraian kolom ke-j.

Catatan (8):

Kalau elemen-elemen dari suatu baris/kolom dikalikan dengan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen baris/kolom lain, jumlahnya akan nol.

Misalnya : $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0$

atau : $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} + \ldots + a_{n1}A_{n2} = 0$

Jadi : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = |A|$ bila $i = k$,
$= 0$ bila $i \neq k$,

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = |A|$ bila $j = k$,
$= 0$ bila $j \neq k$.

Contoh (4.20):

Hitung det(A): $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

Kita ingin menguraikan menurut kolom 1:

$a_{11} = 1,\ a_{21} = 2,\ a_{31} = 1.$

$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1.$

$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1.$

$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$

Jadi $|A| = a_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$
$= 1.1 + 2.1 + 1.-1 = 2.$

Secara singkat kita tulis:

$|A| = +1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.$

Contoh (4.21):

Hitung det(A): $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Kita ingin menguraikan menurut baris 1.

$a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 3.$

$A_{11} = (-1)^{1+1}|M^{11}| = + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -13$

$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 10.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 24.$

$$\text{Jadi } |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 1.-13 - 2.10 + 3.24 = 39.$$

Catatan (9):

Tanda dari kofaktor elemen-elemen a_{ij} dari matriks dapat disimpulkan sebagai:

$$\begin{Vmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

Jadi tanda positif dan negatif berselang-seling. Misalnya pada matriks berordo 3: $\begin{Vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{Vmatrix}$

Contoh (4.22):

Hitungan determinan $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Kita ekspansikan menurut baris 1 dan dengan memperhatikan tanda dari kofaktor.

$$|A| = +2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-4)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +2(2 -3) + 4(-1 - 15) + (1 + 10) = -55.$$

Catatan (10):

Dalam pemilihan baris/kolom mana yang diekspansikan, tidak jadi persoalan, karena hasilnya akan sama.

4.5 MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN PERTOLONGAN SIFAT-SIFAT DETERMINAN

Dari ekspansi baris ataupun kolom, kita lihat bahwa apabila suatu elemen $a_{ij} = 0$ maka kita dapat langsung mengabaikan perkalian dengan kofaktornya, karena pasti = 0. Dalam hal ini lebih menguntungkan bila kita pilih baris/kolom yang mengandung nol itu untuk diekspansikan.

Contoh (4.23):

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

, untuk menghitungnya lebih menguntungkan kalau kita ekspansikan baris 1 (mengandung dua elemen nol).

Jadi
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -16$$

Jelas bahwa semakin banyak elemen nol dalam suatu baris/kolom, lebih mudah mencari determinan tersebut. Untuk itu dengan pertolongan sifat-sifat determinan kita usahakan menjadikan nol sebanyak mungkin elemen-elemen dari suatu baris/kolom. Dalam hal ini, S4 adalah teramat penting.

Contoh (4.24):

Misalnya kita ambil determinan pada Contoh 4.23, baris 1 sudah dua elemen yang nol. Kita usahakan sebuah elemen lagi menjadi nol, misalnya a_{12}, yaitu dengan mengurangi kolom 2 dengan tiga kali kolom 3 (melakukan transformasi elementer $K_{23}^{(-8)}(A)$ pada matriksnya).

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Sekarang terlihat bahwa pada baris 3 ada sebuah nol. Kita usahakan menjadikan nol sebuah elemen lagi dengan transformasi elementer $K_{31}^{(-1)}$:

Maka $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$

$= -16$

Catatan (11):

Cara seperti di atas adalah baik sekali untuk matriks yang berordo besar (> 3). Ekspansi kofaktor hanya untuk ordo yang kecil.

Petunjuk (untuk cara di atas)

(1) Carilah baris/kolom yang sudah banyak elemen nolnya, atau kalau tak ada carilah apakan ada elemen = -1 atau = 1, pilihlah baris/kolom tersebut. Kalau tak ada, usahakan dengan S4 atau S3 untuk mendapatkan elemen -1 atau 1.

(2) Jadikan nol (n - 1) elemen dari baris/kolom yang mengandung -1 atau 1 tadi, lalu ekspensikan (menurut baris/kolom tadi) dan seterusnya.

Contoh (4.25):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Kita pilih baris 3 sesuai dengan petunjuk (1) untuk kita ekspansikan, di mana sebelumnya, kita jadikan nol dahulu elemen-elemen lain pada baris 3 tersebut. ($K_{21}^{(3)}$, $K_{31}^{(2)}$, $K_{41}^{(4)}$).

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 9 & 15 \\ 2 & 10 & 9 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 11 & 18 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 11 & 9 & 15 \\ 10 & 9 & 10 \\ 14 & 11 & 18 \end{vmatrix}$$

Karena tak ada elemen = -1 atau 1, kita usahakan dengan mengurangi kolom 2 dengan kolom 1:

$$-1 \begin{vmatrix} 11 & 9 & 15 \\ 10 & 9 & 10 \\ 14 & 11 & 18 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 11 & -2 & 15 \\ 10 & -1 & 10 \\ 14 & -3 & 18 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -9 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -16 & -3 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= (-)(-1) \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ -16 & -12 \end{vmatrix} = (108 - 80) = 28.$$

Catatan (12):

Untuk menghitung determinan suatu matriks ordo n, kita dapat pula menggunakan ekspansi LAPLACE terhadap beberapa baris/kolom. Misalnya akan diekspansikan m buah baris, maka:

$\det(A) = \sum \{A_{i_1,i_2,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_r}\} \{|M_{i_{r+1},i_{r+2},\ldots,i_n,j_{r+1},j_{r+2},\ldots,j_n}|\}$

Dimana $|M_{i_{r+1},i_{r+2},\ldots,i_n+j_{r+1},j_{r+2},\ldots,j_n}|$ adalah minor-minor yang mungkin dibentuk tanpa mengikutsertakan r baris-baris yang diekspansikan (jadi ordo matriks minor-minor tersebut n - r).

Dan $A_{i_1,i_1,i_r,j_1,j_2,\ldots,j_r}$

$= (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_r+j_1+j_2+\ldots+j_r} |M_{i_1,i_2,\ldots,i_r,j_1,j_2,\ldots,j_r}|$

di mana $|M_{i_1,i_2,\ldots,i_r,j_1,j_2,\ldots,j_r}|$ adalah minor-minor yang mungkin dibentuk oleh baris yang diekspansikan (jadi ordonya r). Untuk ekspansi kolom dapat diterangkan dengan cara yang sama.

Contoh (4.26):

Gunakan ekspansi Laplace pada baris ke-2 dan baris ke-4 untuk menghitung

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Jawab:

Kita hitung dahulu $A_{i1,i2,j1,j2}$, (i = 2, 4; j = 1, 2, 3, 4)

$$A_{2,4,1,2} = (-1)^{2+4+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{2,4,1,3} = (-1)^{2+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$S_{2,4,1,4} = (-1)^{2+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{2,4,2,3} = (-1)^{2+4+2+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{2,4,2,4} = (-1)^{2+4+2+4} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15;$$

$$A_{2,4,3,4} = (-1)^{2+4+3+4} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Lalu kita hitung $|M_{i_3,i_4,j_3,j_4}|$ (i = 1, 3; j = 1,2,3,4).

$$|M_{1,3,1,2}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad |M_{1,3,1,3}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$|M_{1,3,1,4}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad |M_{1,3,2,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$|M_{1,3,2,4}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad |M_{1,3,3,4}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

Kemudian untuk mencari determinannya kita lakukan penjumalahan atas perkalian pasangan-pasangan A_{i_1,i_2,j_1,j_2}, dan $|M_{i_3,i_4,j_3,j_4}|$, dan perhatikan bahwa j_1, j_2 dan j_3, j_4 harus berbeda supaya pasangan-pasangan tidak salah. Misalnya pasangan dari $A_{2,4,1,2}$ adalah $|M_{1,3,3,4}|$, pasangan $A_{2,4,2,4}$ adalah $|M_{1,3,1,3}|$, dan seterusnya.

Det(A) = (-3).8+(-2).2+3.(-2)+6.4+(-15).(-4)+(-4).0 = 50.

4.6 MATRIKS SINGULAR DAN NONSINGULAR

Suatu matriks bujur sangkar A disebut singular apabila det(A) = 0. Kalau det(A) ≠ 0 maka disebut matriks yang nonsingular. Matriks yang nonsingular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Catatan (13):

Matriks bujur sangkar A berordo n adalah singular bial r(A) < n. Hal ini berhubungan dengan S4 dan akibat S3 dari determinan (di mana determinan yang mempunyai baris/kolom nol, harga det = 0)

Contoh (4.27):

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks singular, karena

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{31}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{32}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi r(A) = 2 < n, juga det(A) = 0.

Catatan (15):

Determinan dari matriks A dikalikan dengan determinan dari matriks B = determinan matriks AB, atau:

|A| . |B| = |AB|. (Bila ordo A dan B sama).

Catatan (15):

Kita dapat pula mencari rank suatu matriks dengan pertolongan determinan: Suatu matriks A ≠ 0 mempunyai rank = r jika paling sedikit satu minor berukuran (r x r)-nya ≠ 0, sementara *setiap* minor berukuran (r + 1) x (r + 1)-nya, jika ada, berharga = 0.

Contoh (4.28):

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ mempunyai r = 2 karena $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

Sementara det(A) = 0.

4.7. SOAL-SOAL DAN PEMECAHANNYA

4.29. Buktikan sifat S2.

Bukti:

Akan kita buktikan untuk pertukaran kolom:

Pandang permutasi

$(j_1,j_2,\ldots,j_p,j_{p+1},\ldots,j_n)$

Kalau kita tukar urutan kolom ke-p dengan kolom ke-(p+1), maka terjadi sebuah inversi lagi atau $\sigma(j_1,j_2,\ldots,j_p,j_{p+1},\ldots,j_n) = -\sigma(j_1,j_2,\ldots,j_{p+1},j_p,\ldots,j_n)$. Hal ini berlaku untuksemua n! permuatasi $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$, berarti setiap kita menukar tempat dua kolom yang berurutan, tanda, determininan bertukar. Bukti dapat dilanjutkan untuk pertukaran dua kolom yang tidak berurutan, ternyata sifat berlaku pula. Untuk pertukaran baris dapat diterangkan secara yang sama setelah melakukan transpose serta S1.

4.30. Buktikan sifat S3.

Bukti:

Misalkan kita kalikan baris ke-p dari matriks A dengan skalar λ, dan kita sebut matriksnya B, maka:

$$|A| = \Sigma\,(j_1,j_2,\ldots,j_n)\; a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \quad \text{dan}$$

$$\begin{aligned} |B| &= \Sigma\,(j_1,j_2,\ldots,j_n)\; a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda)a_{pj_p} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \\ &= \lambda\Sigma\,(j_1,j_2,\ldots,j_n)\; a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{pj_p} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \\ &= \lambda|A| \end{aligned}$$

4.31. Buktikan sifat S4.

Bukti:

Misalkan kita jumlahkan baris ke-p dari matriks A dengan λ kali baris ke-q dan sebut matriksnya B, maka:

$$
\begin{aligned}
|B| &= \Sigma\,(j_1,j_2,\ldots,j_n)\; a_{1j_1}\cdot\ldots\cdot(a_{pj_p}+\lambda a_{qj_q})\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}\\
&= \Sigma\,(j_1,j_2,\ldots,j_n)\; a_{1j_1}\cdot\ldots\cdot a_{pj_p}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} +\\
&\quad \lambda\Sigma(j_1,j_2,\ldots,j_n)\; a_{1j_1}\cdot\ldots\cdot a_{qjq}\cdot\ldots\cdot a_{qj_q}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}\\
&= |A| + \lambda 0 \text{ (menurut akibat S3). Jadi } |B| = |A|.
\end{aligned}
$$

4.32. Buktikan: $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$.

Bukti:

Kita menuliskan: $|A| = a_{11}A_{11}{}^*{}_{11} + a_{12}A^*_{12} + \ldots + a_{in}A^*_{in}$, di mana A^*_{ij} adalah jumlah hasil kali elemen-elemen, tak termasuk elemen-elemen pada baris ke-i. Tinggal dibuktikan $A^*_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$, di mana M_{ij} adalah submatriks dari A dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari A. Misalkan i = j.

$$
\text{Maka } a_{nn}A^*_{nn} = \underbrace{a_{nn}\Sigma\sigma(j_1,j_2,\ldots,j_{n-1})\; a_{1j1}\cdot a_{2j2}\cdot\ldots\; a_{n-1jn-1}}_{\text{ordo } (n-1)}
$$

$$
= a_{nn}|M_{nn}|
$$

Jadi :

$A^*_{nn} = |M_{nn}| = (-1)^{n+n}|M_{nn}|$. Sekarang pandang untuk baris ke-i dan kolom ke-j sebarang.

Kita pertukarkan berturut-turut baris ke-i sampai ia berada pada baris ke-n. ada (n - i) kali pertukaran. Juga berturut-turut kita tukar kolom ke-j sampai menjadi kolom ke-n, jadi ada (n - j) kali pertukaran. Maka dari S2, tanda dari A^*_{ij} akan bertukar (n - i) + (n - j) kali, sedang harga $|M_{ij}|$ tak berubah dengan adanya pertukaran ini. Jadi $A^*_{ij} = (-1)^{2n-i-j}|M_{ij}|$, terbukti benar bahwa A^*_{ij} kofaktor a_{ij}.

$$
\begin{aligned}
\text{Jadi terbukti: } |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}
\end{aligned}
$$

(Bukti untuk ekspansi kolom, analog).

4.33. Buktikan bahwa: $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + ... + a_{in}A_{kn} = 0$

atau $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$ untuk $i \neq k$.

Bukti:

Pandang det(A') yaitu determinan dengan mengganti baris ke-k dengan baris ke-i dari matriks A, di mana baris ke-i tetap. Maka $|A'| = 0$. (karena ada dua baris yang sama). Karena yang diganti baris ke-k maka kofaktor-kofaktor $A_{k1}, A_{k2}, ..., A_{kn}$ tetap. Jadi kalau diekspansikan menurut baris ke-k maka $|A'| = 0 = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + ... + a_{in}A_{kn}$
Jadi terbukti: $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + ... + a_{in}A_{kn} = 0$.

4.34. Hitung determinan dari matriks A: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 11 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

kita pilih kolom i untuk diekspansikan karena ada e nol disitu. Jadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3.(-2) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

4.35. Hitung determinan $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Penyelesaian:

Menurut petunjuk kita cari yang ada elemen 1, dan kita jadikan nol sisa elemen pada baris/kolomnya. Di sini kita pilih kolom 1, dan kita jadikan nol a_{21}, a_{41}, dan a_{51}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -5 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -6 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -4 & -6 & 9 \\ 1 & 5 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 23 & 21 & 9 \\ -14 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 23 & 21 \\ -14 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= -(-230 + 294) = -64.$$

4.36. Buktikan bahwa $\det(A) = \begin{vmatrix} 103 & 20 & 43 \\ 104 & 21 & 44 \\ 105 & 22 & 45 \end{vmatrix} = 0$

Penyelesaian:

Kalau kita kurangi baris 3 dengan baris 2, sesudah itu baris 2 kita kurangi dengan baris 1:

$$\begin{vmatrix} 103 & 20 & 43 \\ 104 & 21 & 44 \\ 105 & 22 & 45 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 103 & 20 & 43 \\ 104 & 21 & 44 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 103 & 20 & 43 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

maka ada dua baris yang sama, sehingga (akibat S2) determinan = 0.

4.37. Buktikan: $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = -\frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

dan dengan

$$S3 : \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ bca & b^2 & b^3 \\ cab & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

4.38. Hitung determinan $|A| = \begin{vmatrix} 623 & 20{,}5 & 62{,}5 \\ 276 & 8{,}5 & 27{,}5 \\ 439 & 14 & 44 \end{vmatrix}$

Penyelesaian:

Dengan sifat-sifat determinan (S3) dan (S4):

$$A = \underset{10X}{\begin{vmatrix} 623 & 20{,}5 & 62{,}5 \\ 276 & 8{,}5 & 27{,}5 \\ 439 & 14 & 44 \end{vmatrix}} = \underset{3X}{\begin{vmatrix} -2 & 20{,}5 & 62{,}5 \\ 1 & 8{,}5 & 27{,}5 \\ -1 & 14 & 44 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 20{,}5 & 1 \\ 1 & 8{,}5 & 2 \\ -1 & 14 & 2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 41 & 1 \\ 1 & 17 & 2 \\ -1 & 28 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -15 & -3 \\ 0 & 45 & 4 \\ -1 & 28 & 2 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -15 & -3 \\ 45 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{75}{2}$$

4.8. SOAL-SOAL LATIHAN

4.39. Carilah banyak inversi pada permutasi-permutasi:

(i) (4,1,2,3), (4,3,2,1), (1,3,2,4).

(ii) (5,3,2,1,4), (1,3,5,4,2), (2,3,5,4,1).

Jawab:

(i) 3, 6,1. (ii) 7, 4, 5. 4/40.

4.40. Hitung determinan matriks:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 44 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 3 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Jawab:

(i) 85; (ii) 1; (ii) -10.

4.41. Carilah determinan dari matriks:

(i) $\begin{bmatrix} t-2 & 2 \\ -4 & t-1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{bmatrix}$

Jawab:

(i) $t^2 - 3t + 10$; (ii) $t^2 - 2t - 8$.

4.42. Carilah determinan dari matriks-matriks:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

4.43. Cari determinan dari matriks-matriks:

(i) $\begin{bmatrix} 43 & 6 & 7 \\ 2 & 51 & 4 \\ 21 & -11 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 13 & 16 & 19 \\ 20 & 20 & 70 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 11 \\ {}^{8}/_{3} & {}^{17}/_{3} & 7 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab:

(i)7839; (ii)-1350; (iii) 0.

4.44. Cari determinan matriks-matriks:

(i) $\begin{bmatrix} {}^{1}/_{2} & -1 & -{}^{1}/_{3} \\ {}^{3}/_{4} & {}^{1}/_{3} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} {}^{1}/_{5} & {}^{2}/_{5} & 1 \\ {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

(i) ${}^{37}/_{36}$; (ii) $-{}^{38}/_{15}$

4.45. Carilah determinan dari matriks-matriks:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

(i) 38; (ii) -55.

4.46. (i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab:

(i) -85; (ii) -286.

4.47. Cari:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Jawab: 446

4.48. Buktikan: $\mathrm{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, setelah membuktikan bahwa $\det(AB) =$

$= \det(A)\det(B)$

4.49. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

Buktikan !

4.50. Buktikan:

$$\begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ca & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$= (c - a)(c - b)(b - a).$

4.51. Buktikan:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$= (d - a)(d - b)(d - c)(c - a)(c - b)(b - a).$

4.52. Hitung determinan ordo n.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Jawab: 1

4.53. Hitung determinan ordo n.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & 1 & . & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & . & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Jawab: $(-1)^{n-1}$

4.54. Hitung determinan ordo n.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & 1 & . & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & . & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Jawab: $(-1)^{n-1}(n-1)$.

4.55. Buktikan:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ d+e & e+f & f+d \\ g+h & h+j & j+g \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}$$

DETERMINAN MATRIKS ORDO N

```
20  'menghitung determinan
30  'dengan metode maksimum pivot
40  INPUT"ORDO MATRIKS";N
50  DIM A(N,N)
60  PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS:":PRINT
70  FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:PRINT"BARIS";1;
    "KOLOM",J;:INPUY A(I.J):NEXT J,I
80  IF N=1 THEN D=A(1,1):GOTO 150
90  D=1;'Nilai awal determinan
100 GOSUB 210
110 GOSUB 310
120 GOSUB 420
130 GOSUB 540
140 GOTO 100
150 PRINT:PRINT" DETERMINAN =";USING####.##";D
200 END
210 'mencari elemen terbesar
220 'B=terbesar pada baris K kolom L
230 K=1 :L=1: B=A(k,l)
240 FOR I = 1 TO N
250 FOR J = 1 TO N
260 IF ABS(A(I,J)) <= ABS(B) THEN 280
270 K=I :L=J: B=A(K,L_
280 NEXT J
290 NEXT I
300 RETURN
310 'elemen terbesar diletakkan di baris ini
320 FOR J = 1 TO N
330 IF K = 1 THEN 350
340 P=A(1,J);A(1,J) :A(K,J)=P
350 NEXT J
360 D=-D
370 FOR I = 1 TO N
380 IF L=1 THEN 400
390 P=A(I,1):A(I,1)=A(I,L):A(I,L)=P
400 NEXT 1
410 D=-D : RETURN
```

```
420 'menolkan elemen sekolom pivot
430 FOR J = 1 TO N
440 A(1,J) = A(1,J)/B
450 NEXT J
460 D = D*B
470 FOR I = 2 TO N
480 R=A(I,1)
490 FOR J= 1 TO N
500 A(I,J) - R*A(1,J)
510 NEXT J
520 NEXT I
530 RETURN
540 'mereduksi ukuran matriks
550 IF N = 2 THEN D = D*A(2,2) : GOTO 150
560 N = N-1
570 FOR I = 1 TO N
580 FOR J = 1 TO N
590 A(I,J) = A(I+1,J+1)
600 NEXT J
610 NEXT I
620 RETURN
```