ALJABAR LINIER DAN MATRIKS

MATRIKS
(DETERMINAN, INVERS, TRANSPOSE)

Macam Matriks

- Matriks Nol (0)

  Matriks yang semua entrinya nol.

  Ex: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Matriks Identitas (I)

  Matriks persegi dengan entri pada diagonal utamanya 1 dan 0 pada tempat lain.

  Ex: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks Diagonal

- Matriks yang semua entri non diagonal utamanya nol.

  Secara umum: $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$

  Ex: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Matriks Segitiga

- Matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utamanya nol disebut **matriks segitiga bawah**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal utamanya nol disebut **matriks segitiga atas**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Matriks Simetris

- Matriks persegi A disebut simetris jika $A = A^t$
- Ex:

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

Transpose Matriks (1)

- Jika A matriks mxn, maka transpose dari matriks A (A^t) adalah matriks berukuran nxm yang diperoleh dari matriks A dengan menukar baris dengan kolom.

  Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Transpose Matriks (2)

- Sifat:
  1. $(A^t)^t = A$
  2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
  3. $(AB)^t = B^t A^t$
  4. $(kA)^t = kA^t$

Invers Matriks (1)

- Jika A adalah sebuah matriks persegi dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga AB = BA = I, maka A disebut **bisa dibalik** dan B disebut **invers** dari A.
- Suatu matriks yang dapat dibalik mempunyai tepat satu invers.

Invers Matriks (2)

- Ex:

  $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

  karena $AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

  dan $BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Invers Matriks (3)

- Cara mencari invers khusus matriks 2x2:

  Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

  maka matriks A dapat dibalik jika ad-bc≠0, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad=bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Invers Matriks (4)

- Ex:

  Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

  Penyelesaian:

  $$A^{-1} = \frac{1}{2(3)-(-5)(-1)}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  (Bagaimana jika matriksnya tidak 2x2???)

Invers Matriks (5)

- Sifat:

  Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama, maka:

  1. AB dapat dibalik
  2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Pangkat Matriks (1)

- Jika A adalah suatu matriks persegi, maka dapat didefinisikan pangkat bulat tak negatif dari A sebagai:

  $A^0 = I$, $A^n = \underbrace{A\ A\ \ldots\ A}_{\text{n faktor}}$ $(n \geq 0)$

- Jika A bisa dibalik, maka didefinisikan pangkat bulat negatif sebagai

  $A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}\ A^{-1}\ \ldots\ A^{-1}}_{\text{n faktor}}$

Pangkat Matriks (2)

- Jika A adalah matriks persegi dan r, s adalah bilangan bulat, maka:
  1. $A^r A^s = A^{r+s}$
  2. $(A^r)^s = A^{rs}$
- Sifat:
  1. A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
  2. A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, n=0,1,2,…
  3. Untuk sebarang skalar tak nol k, matriks kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

Invers Matriks Diagonal

- Jika diketahui matriks diagonal

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

  maka inversnya adalah

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

Pangkat Matriks Diagonal

- Jika diketahui matriks diagonal

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

  maka pangkatnya adalah

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^{\,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{\,k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^{\,k} \end{pmatrix}$$

Invers Matriks dengan OBE (1)

- Caranya hampir sama dengan mencari penyelesaian SPL dengan matriks (yaitu dengan eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan)
- $A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \ldots E_2\, E_1\, I_n$
  dengan E adalah matriks dasar/ matriks elementer (yaitu matriks yang diperoleh dari matriks I dengan melakukan sekali OBE)

Invers Matriks dengan OBE (2)

- Jika diketahui matriks A berukuran persegi, maka cara mencari inversnya adalah reduksi matriks A menjadi matriks identitas dengan OBE dan terapkan operasi ini ke I untuk mendapatkan A^{-1}.
- Untuk melakukannya, sandingkan matriks identitas ke sisi kanan A, sehingga menghasilkan matriks berbentuk [A | I].
- Terapkan OBE pada matriks A sampai ruas kiri tereduksi menjadi I. OBE ini akan membalik ruas kanan dari I menjadi A^{-1}, sehingga matriks akhir berbentuk [I | A^{-1}].

Invers Matriks dengan OBE (3)

- Ex:
  Cari invers untuk
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
  Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow[b_3 - b_1]{b_2 - 2b_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Invers Matriks dengan OBE (4)

- Penyelesaian Cont.

$$\xleftrightarrow{b_3 + 2b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{-b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[b_2 + 3b_3]{b_1 - 3b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{b_1 - 2b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Invers Matriks dengan OBE (6)

- Penyelesaian Cont. (2)
  Jadi
  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

  (Adakah cara lain???)

Determinan Matriks 2x2 (1)

- Jika A adalah matriks persegi, determinan matriks A (notasi: det(A)) adalah jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari A.
- Jika diketahui matriks berukuran 2x2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan matriks A adalah: det (A) = |A| = ad-bc

Determinan Matriks 2x2 (2)

- Ex:
  Jika diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

  maka | P | = (2x5) – (3x4) = -2

  (Bagaimana kalau matriksnya tidak berukuran 2x2???)

Determinan Matriks 3x3 (1)

- Untuk matriks berukuran 3x3, maka determinan matriks dapat dicari dengan aturan Sarrus.

$$det\ A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$$

Determinan Matriks 3x3 (2)

- Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ tentukan determinan A}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) = 1(5)(1) + 2(4)(3) + 3(4)(2) - 3(5)(3) - 2(4)(1) - 1(4)(2)$$

Determinan Matriks nxn (1)

- Untuk matriks nxn, digunakan ekspansi kofaktor.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ tentukan determinan A}$$

Pertama buat minor dari a_{11}

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \text{detM} = a_{22}a_{33} \times a_{23}a_{32}$$

Kemudian kofaktor dari a_{11} adalah

$$c_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^{1+1}a_{22}a_{33} \times a_{23}a_{32}$$

Determinan Matriks nxn (2)

- Kofaktor dan minor hanya berbeda tanda $c_{ij} = \pm M_{ij}$.
- Untuk membedakan apakah kofator pada ij bernilai + atau -, bisa dilihat pada gambar ini, atau dengan perhitungan $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Determinan Matriks nxn (3)

- Determinan matriks dengan ekspansi kofaktor pada baris pertama

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka determinan dari matriks tersebut dengan ekspansi kofaktor adalah,

$$\det(A) = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinan Matriks nxn (4)

- Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ tentukan determinan A dengan metode ekspansi kofaktor baris pertama

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 1(-3) - 2(-8) + 3(-7) = -8$$

Adjoint Matriks (1)

- Jika diketahui matriks 3x3 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- Kofaktor dari matriks tersebut adalah:
  c_{11}=9 c_{12}=8 c_{13}=-2
  c_{21}=-3 c_{22}=-1 c_{23}=4
  c_{31}=-6 c_{32}=-12 c_{33}=3
- Matriks kofaktor yang terbentuk $\begin{pmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix}$

Adjoint Matriks (2)

- Adjoint matriks didapat dari transpose matriks kofaktor, didapat:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Invers Matriks nxn (1)

- Rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

  dengan det(A)≠0
- Ex: Cari invers dari

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Invers Matriks nxn (2)

Penyelesaian:

- det(A)=3(1)(1)+(-1)(4)(2)+2(0)(-2)-2(1)(2)-(-2)(4)(3)-1(0)(-1)
  =3-7-0-4+24+0 =16
- Adjoint A = $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
- Maka A^{-1} = $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/16 & -3/16 & -3/8 \\ 1/2 & -1/16 & -3/4 \\ -1/8 & 1/4 & 3/16 \end{pmatrix}$

Metode Cramer (1)

- Digunakan untuk mencari penyelesaian SPL selain dengan cara eliminasi-substitusi dan eliminasi Gauss/Gauss-Jordan.
- Metode Cramer hanya berlaku untuk mencari penyelesaian SPL yang mempunyai tepat 1 solusi.

Metode Cramer (2)

- Diketahui SPL dengan n persamaan dan n variabel

  $a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1$
  $a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = b_2$
  …………………
  $a_{n1}\ x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n = b_n$
  dibentuk matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Metode Cramer (3)

- Syaratnya $|A| \neq 0$
- Penyelesaian untuk variabel-variabelnya adalah:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

  dengan $|A_i|$ adalah determinan A dengan mengganti kolom ke-i dengan B.

Metode Cramer (4)

- Ex:
  Carilah penyelesaian dari:
  2x+3y-z = 5
  x+2z = -4
  -x+4y-z = 6

Soal

- Buktikan

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 t & a_2 + b_2 t & a_3 + b_3 t \\ a_1 t + b_1 & a_2 t + b_2 & a_3 t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Buktikan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Tugas

- Buat program untuk menghitung determinan matriks dengan ekspansi kofaktor dengan bahasa C++ !
- Input berupa ukuran matriks (harus persegi), elemen-elemen matriks, baris/kolom yang akan dijadikan patokan.
- Output berupa matriks yang bersangkutan dengan nilai determinannya.
- Dikumpulkan di alfry_cool@yahoo.com paling lambat saat TTS !

Kuis

- Cari a,b,c agar $\begin{pmatrix} -8 & 5+2b & 3a+2 \\ a+b-c-5 & 1 & -c+1 \\ a-8 & 2c+4 & 0 \end{pmatrix}$ simetris
- Cari invers dari $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- Cari matriks diagonal A supaya $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Cari nilai x supaya $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$