$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \bullet \vec{y}$$

$$[A][x] = [b] \qquad \vec{x} \times \vec{y} \qquad \vec{a} \otimes \vec{b} \qquad [A][x] = [b]$$

Kumpulan Materi Kuliah #1 s/d #03 – Tahun Ajaran 2016/2016:

Aljabar Linier

FTUI

Oleh: Prof. Dr. Ir. Setijo Bismo, DEA.

$$\vec{x} \bullet \vec{y} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \vec{a} \otimes \vec{b}$$

Kuliah #01

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \bullet \vec{y}$$

$$[A][x] = [b]$$

$$\vec{x} \times \vec{y}$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b}$$

$$[A][x] = [b]$$

Aljabar Linier

Setijo Bismo & Bambang Heru Susanto

FTUI

$$\vec{x} \bullet \vec{y}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

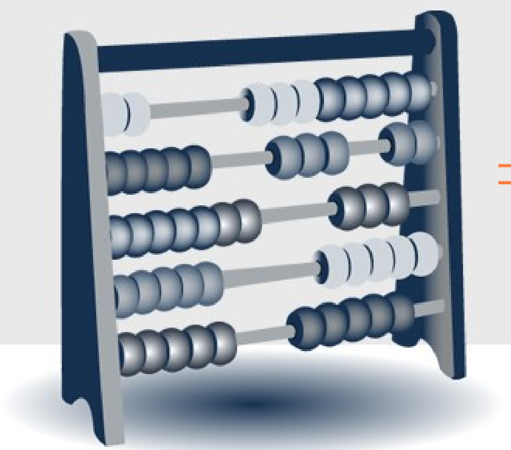
$$\vec{a} \otimes \vec{b}$$

Segmentasi Penilaian

Pak **Setijo Bismo**	Pak **Bambang Heru**
50 %	50 %
1. Tugas/PR/Kelompok (**10 %**) 2. **Kuis #1**: **SPL/SPAL, Determinan, Aplikasi MS-Excel** (**10 %**) 3. **Kuis #2**: **Vektor di R^2 dan R^3, Ruang Vektor Euclid, Ruang Vektor Umum** (**10 %**) 4. **UTS** (**20 %**) *) Tidak ada perbaikan Kuis atau pun UTS, dengan alasan apa pun. Jika tidak mengikuti Kuis, maka persentase UTS akan meningkat sesuai jumlah persentase Kuis tsb.	1. Tugas/PR/Kelompok 2. Ruang Vektor Umum (3) 3. Ruang Hasil Kali Dalam (4) 4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen (3) 5. Transformasi Linier (4) 6. Aplikasi: *Leat Square* (1) **7. UAS**

PENDAHULUAN

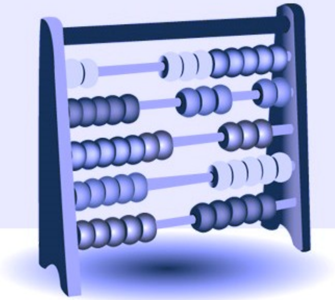
Aljabar Linier sesungguhnya merupakan topik penting dari matematika aljabar yang banyak digunakan dalam berbagai *dasar ilmu keteknikan*, dan juga diperdalam bahkan diperluas lagi dalam berbagai mata kuliah: komputasi numerik, fenomena perpindahan, aliran fluida, perancangan struktur, rekayasa reaksi kimia, pemodelan, dan lain sebagainya. Yang terbanyak digunakan adalah: **SPAL** (Solusi Persamaan Aljabar Linier).



$\Rightarrow$ **NOTASI** $\Rightarrow \begin{cases} \textbf{Skalar} \\ \textbf{Vektor} \\ \textbf{Matrik} \end{cases} \Rightarrow$ ***Operasinya***

NOTASI

- **Skalar**, suatu konstanta yang dituliskan dalam huruf kecil
- **Vektor**, simbol atau variabelnya juga akan dituliskan menggunakan huruf kecil (akan berbeda dengan skalar sesuai konteksnya): cetak tebal (***bold***) bila menggunakan “topi” (tanda caping, ^) di atasnya atau cetak biasa bila menggunakan tanda panah di atasnya.
- **Vektor satuan**, adalah suatu vektor yang ternormalisasi, yang berarti panjangnya bernilai 1 (satu satuan).



- Umumnya dituliskan dengan menggunakan topi (bahasa Inggris: *hat*), sehingga: $\hat{\boldsymbol{u}}$ dibaca "u-topi" ('u-*hat*').

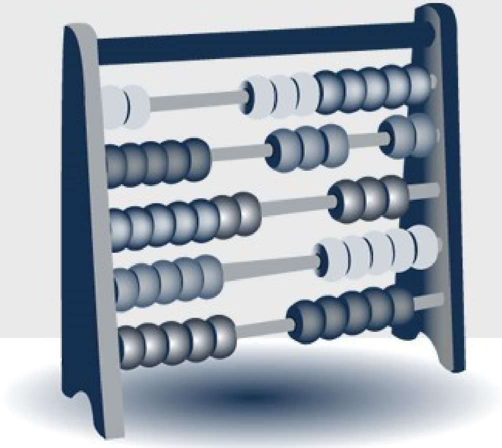
NOTASI

- *Secara umum*, suatu vektor merupakan **vektor kolom**,

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{k,1} \\ v_{k,2} \\ \vdots \\ v_{k,n} \end{bmatrix}$$

- namun jika ingin menuliskan **vektor baris**:

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_{b,1} & v_{b,2} & \cdots & v_{b,n} \end{bmatrix}$$

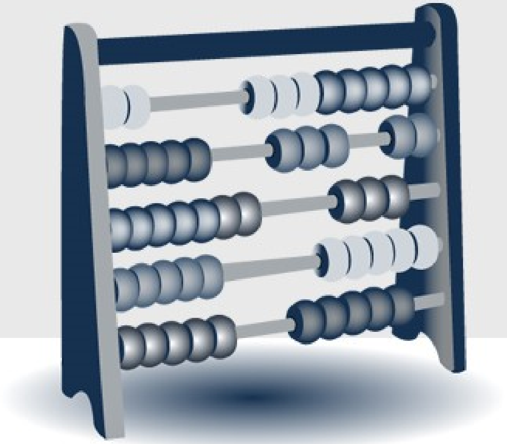


maka diberi indeks-atas yang menyatakan simbol “transpos” ($\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$)

- Jika diperlukan, **dimensi** vektor dan atau vektor dapat dituliskan dalam indeks-bawah (u_{mxn}, y_{nx1}, dlsb)

NOTASI

- **Matrik**, dalam **matematika** dan **fisika**, adalah kumpulan **bilangan**, **simbol**, atau **ekspresi** (ungkapan), berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom.
- **Bilangan-bilangan** yang terdapat di dalam suatu matriks disebut dengan **elemen** atau **anggota matriks**.
- **Matriks**, simbolnya dituliskan dalam huruf besar (kapital).
- **Contoh** matriks dengan 2 baris dan 3 kolom (2 x 3) yaitu:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -11 \\ 17 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

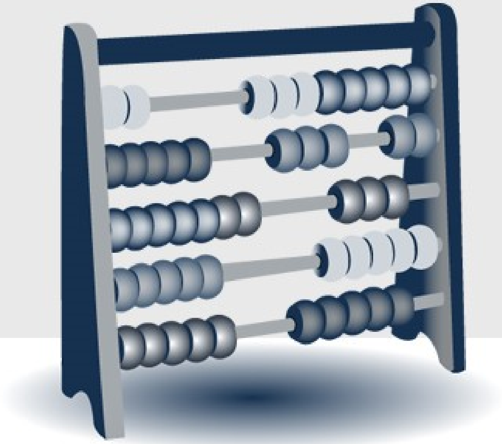
NOTASI

Definisi:

Persamaan berikut ini,

$$\boxed{a\,x + b\,y + c\,z + d\,w = h}$$

dengan a, b, c, dan d merupakan tetapan (konstanta) yang diketahui nilai-nilainya, sedangkan x, y, z, dan w merupakan bilangan yang tak deketahui (variabel), disebut juga sebagai PERSAMAAN LINIER.



- Jika $h = 0$, maka persamaan linier tersebut menjadi ***homogen***.
- Suatu sistem persamaan linier (**SPAL**) adalah suatu set persamaan yang terdiri atas persamaan-persamaan linier
- Suatu sistem persamaan linier homogen adalah SPAL yang berharga ***nol***.

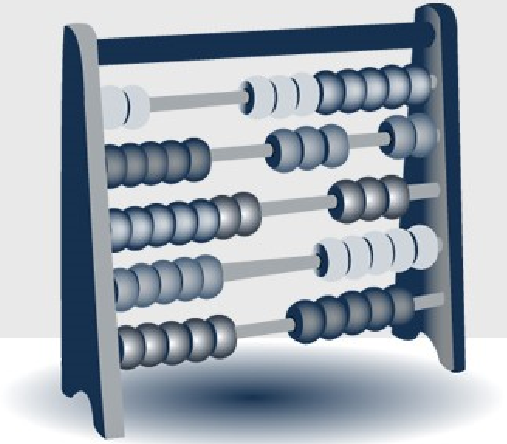
Aplikasi Vektor dan Matriks

Pemanfaatan (**matriks** dan juga **vektor**), misalnya dalam mencari solusi **Sistem Persamaan Aljabar Linear** (**SPAL**), sering juga disebut **SPL** (**Sistem Persamaan Linear**). Penerapan lainnya adalah dalam **transformasi linier**, yaitu bentuk umum dari **fungsi linear**, misalnya **rotasi** dalam 3-dimensi.

Persamaan di bawah ini,

$$\boxed{\begin{aligned} 3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 &= 1 \\ 2\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 &= -2 \end{aligned}}$$

Merupakan suatu sistem persamaan linier (SPAL), namun

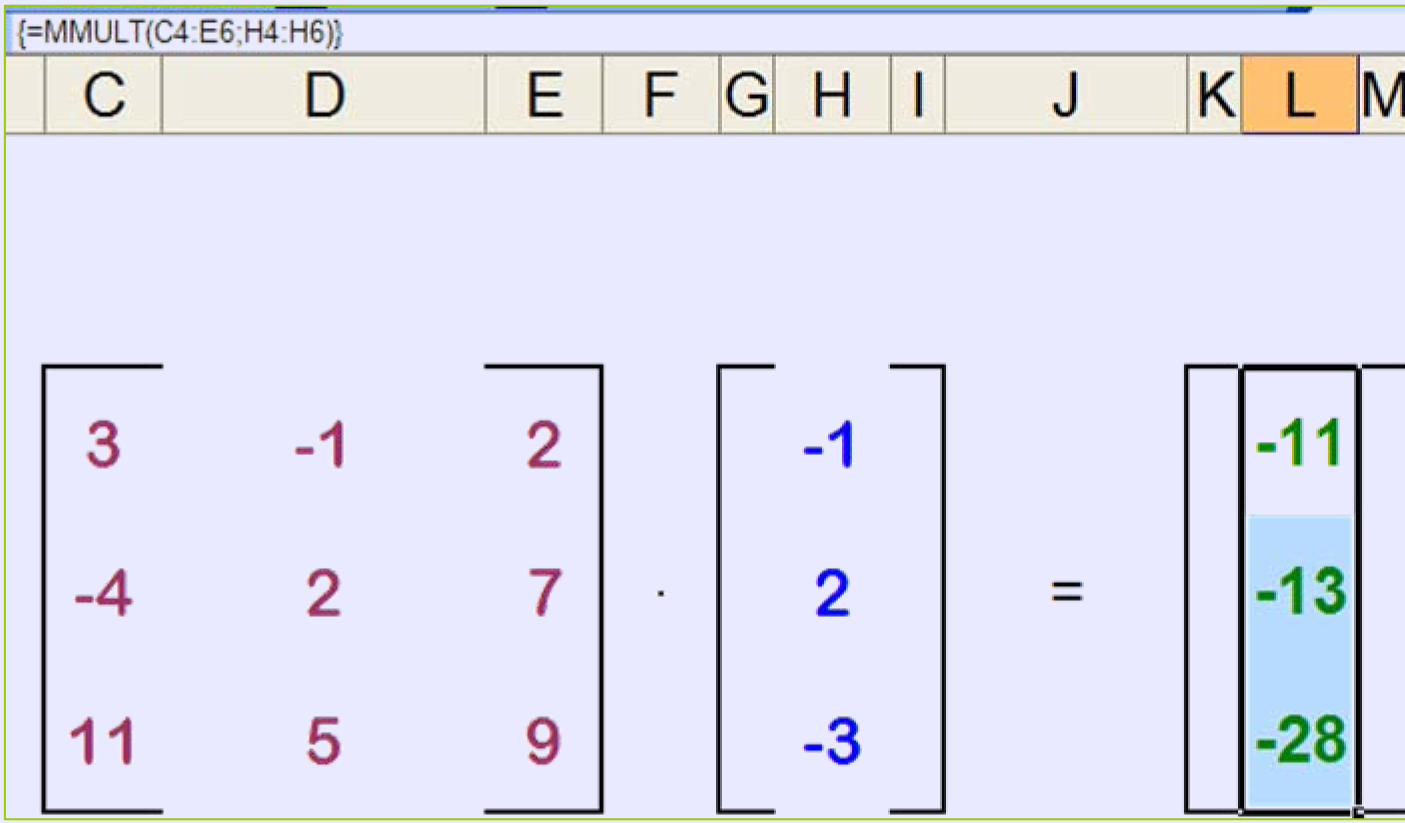


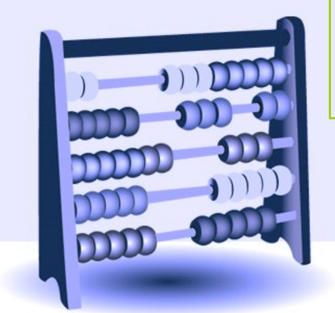
$$\boxed{\begin{aligned} 4\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2^2 &= 1 \\ \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 &= -1 \end{aligned}}$$

bukanlah SPAL, karena ada variabel yang berpangkat “tak satu” (non-linier).

Aplikasi Vektor dan Matriks dalam MS-Excel (1)

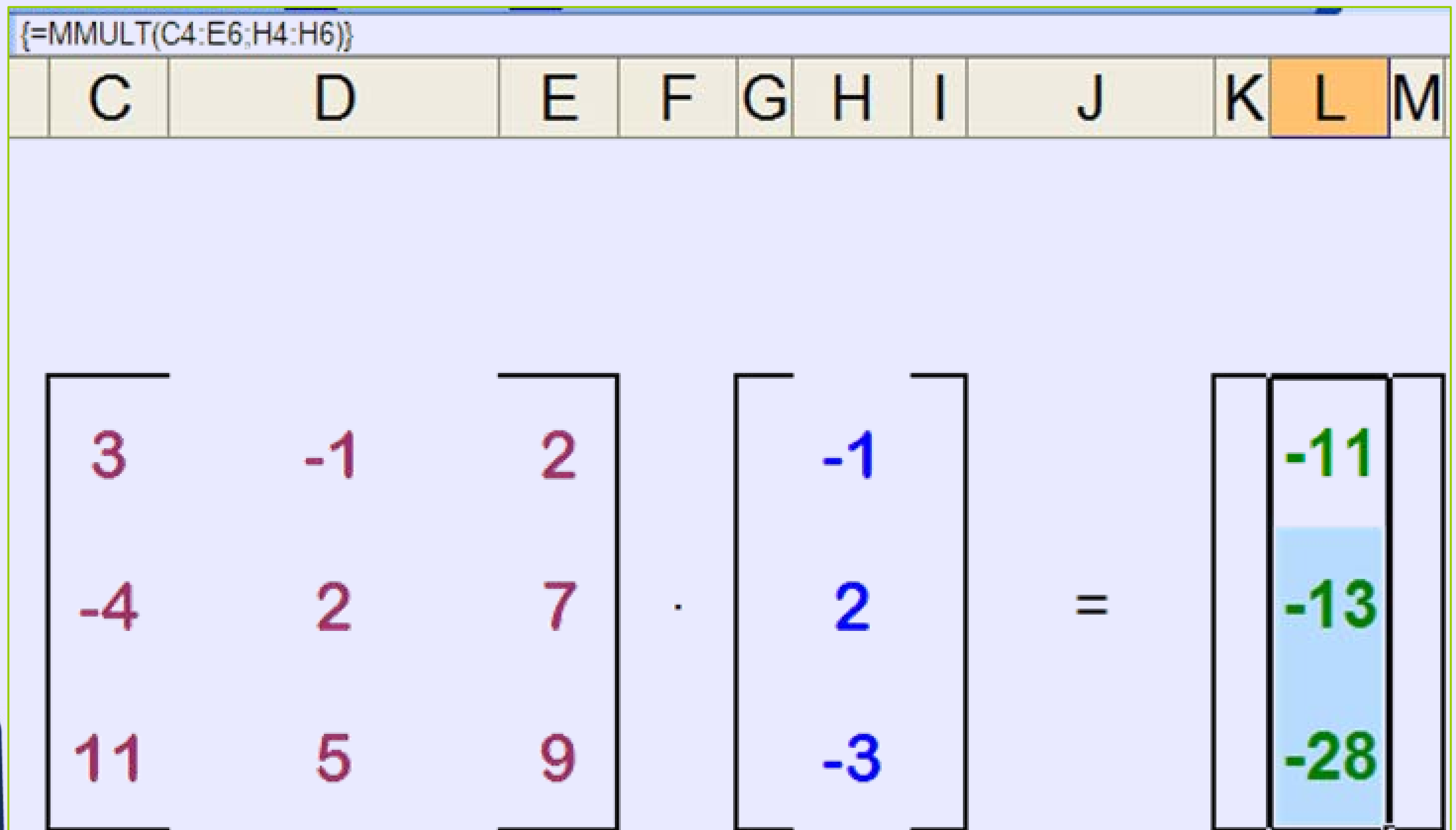
- Perkalian Matriks dengan Vektor ⇨ fungsi: **MMULT**

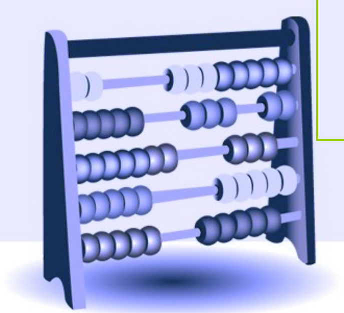




Aplikasi Vektor dan Matriks dalam MS-Excel (2)

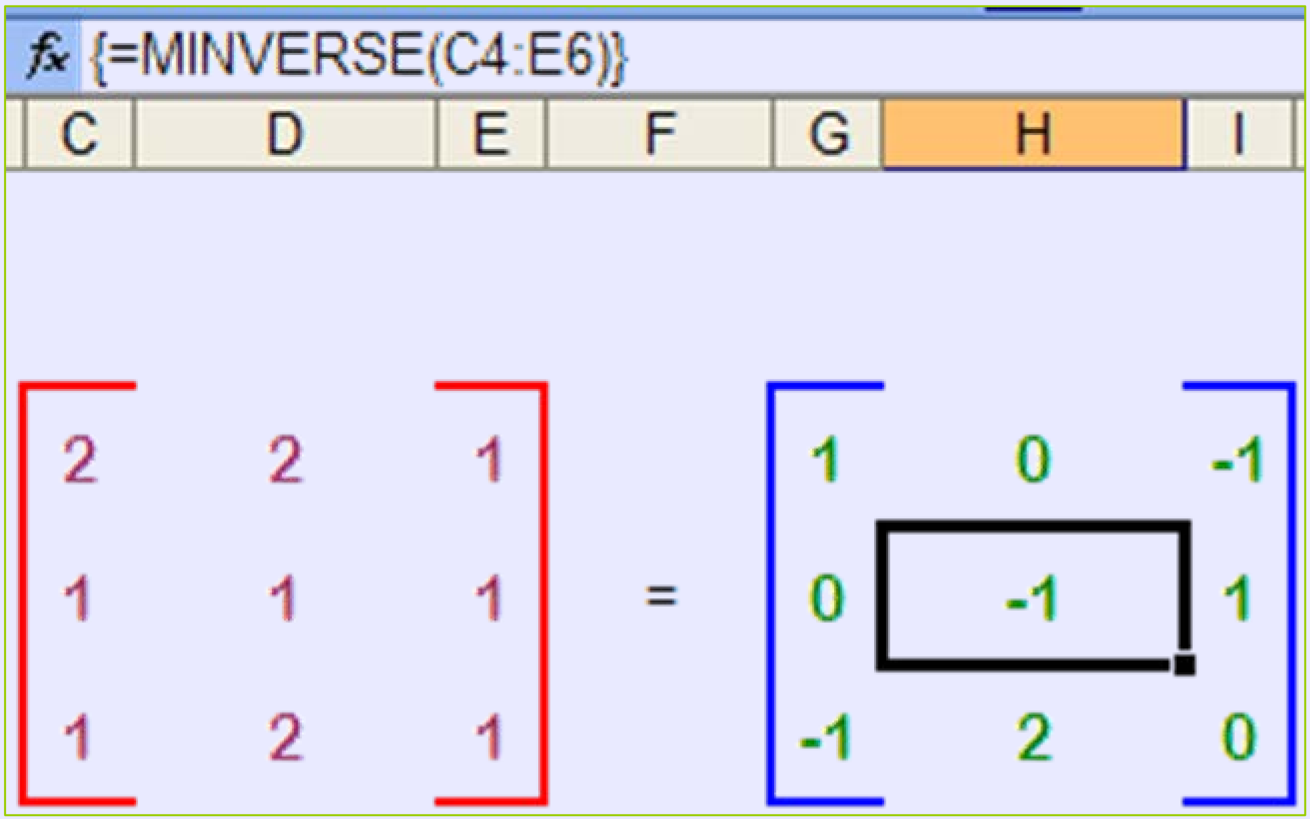
- Perkalian Matriks dengan Vektor ⇨ fungsi: **MMULT**





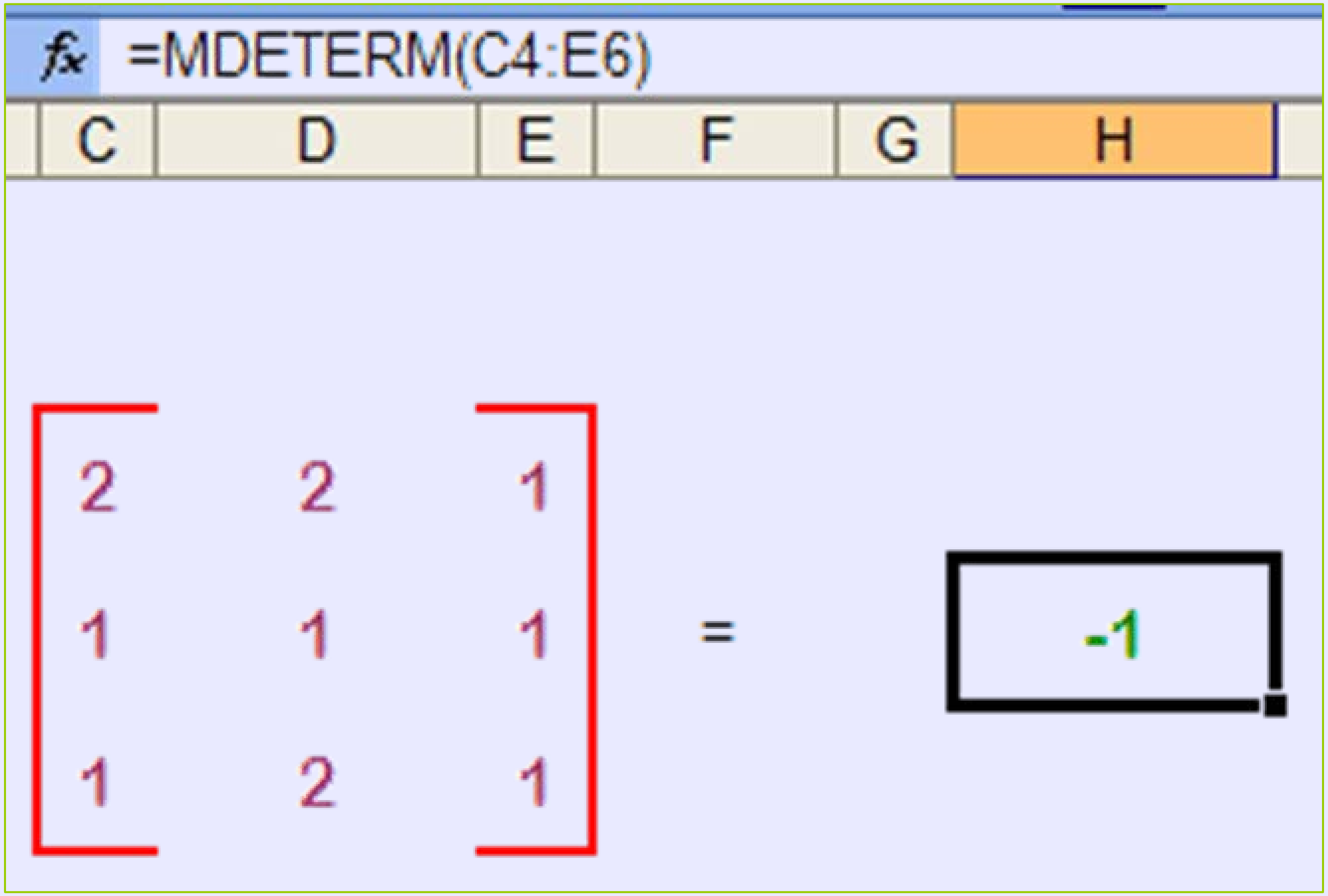
Aplikasi Vektor dan Matriks dalam MS-Excel (3)

- Balikan (*Invers*) Matriks ⇨ fungsi: **MINVERSE**



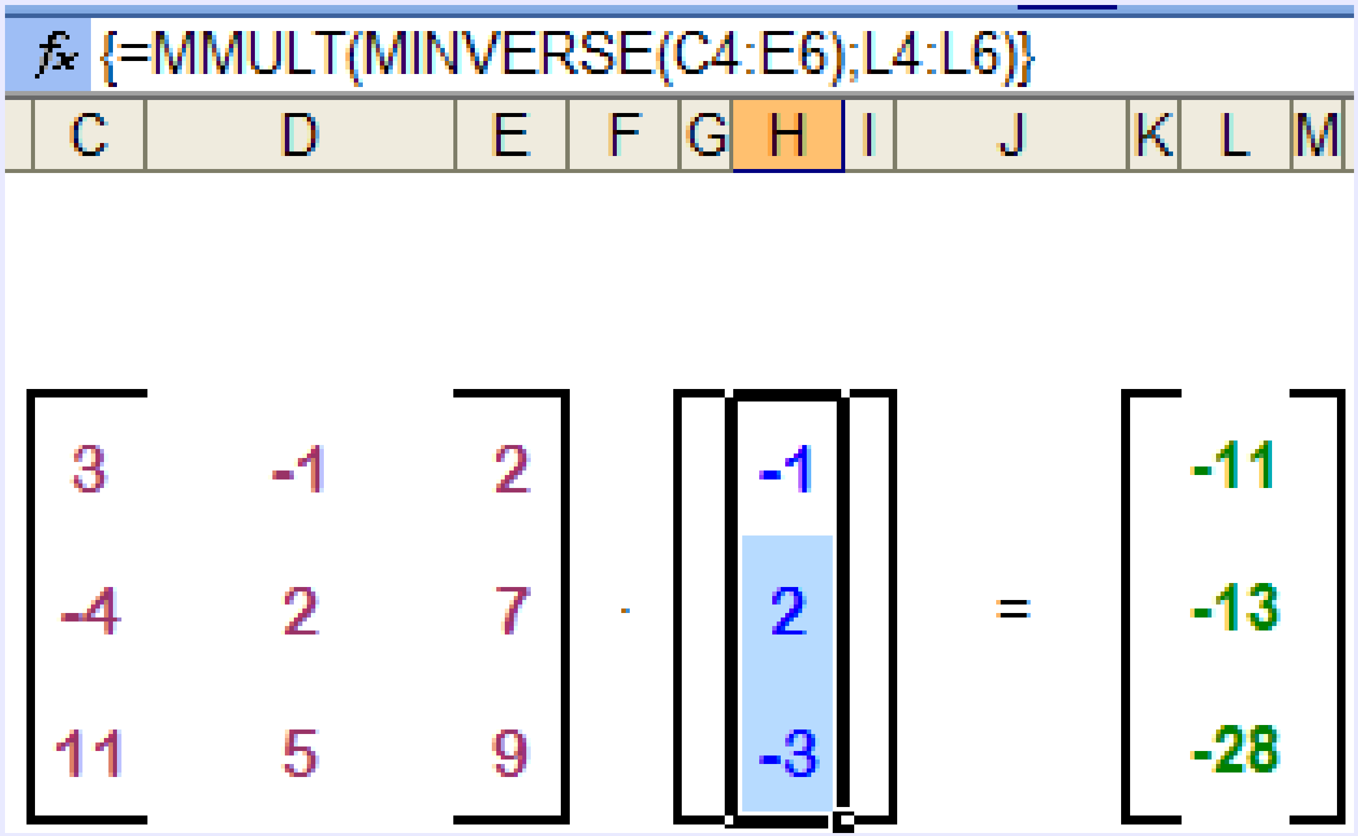
Aplikasi Vektor dan Matriks dalam MS-Excel (4)

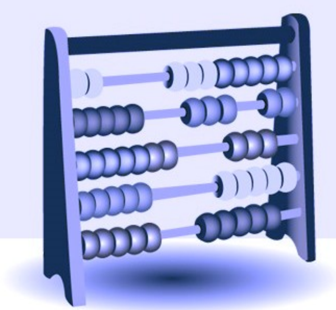
- Determinan Matriks ⇨ fungsi: **MDETERM**



Aplikasi Vektor dan Matriks dalam MS-Excel

- Solusi SPAL ⇨ fungsi: **MMULT** dan **MINVERSE**





Contoh SPAL

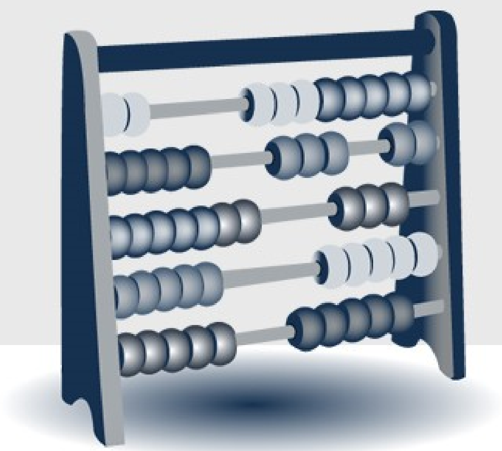
Persamaan di bawah ini,

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 &= 2 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3 &= 2 \\ 5\boldsymbol{x}_1 - 9\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \\ 5 & -9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}$$

merupakan suatu Sistem Persamaan Aljabar Linier (SPAL) ber-**ordo 3**, sedangkan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 &= 0 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 &= 0 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$



Adalah SPL yang ***homogen***.

Metode Penyelesaian (Solusi) SPAL

Dalam Kuliah ini akan dipelejari 4 buah metode penyelesaian Sistem Persamaan Aljabal Linier (**SPAL**), yaitu:

- ⇨ Bentuk Eselon-baris: **matriks**
- ⇨ Eliminasi Gauss: **matriks**
- ⇨ Eliminasi Gauss-Jordan: **matriks**
- ⇨ Aturan CRAMER: **determinan matriks**

SPAL dalam Bentuk Matriks

Sistem Persamaan Linear atau **SPAL**, misalnya:

$$
\begin{aligned}
3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 &= \mathbf{17} \\
\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 &= \mathbf{10} \\
2\boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 &= \mathbf{6}
\end{aligned}
$$

dapat dinyatakan dalam bentuk **matriks imbuhan** (matriks yang diperluas atau **teraugmentasi**), sbb:

$$
\begin{bmatrix}
3 & 4 & 2 & \mathbf{17} \\
1 & 3 & 5 & \mathbf{10} \\
2 & 5 & -2 & \mathbf{6}
\end{bmatrix}
$$

Matriks Eselon-baris (#1)

Susunan/Bentuk **Matriks Eselon-baris**, yaitu yang memiliki syarat berikut:

1. Di setiap baris, angka pertama selain 0 harus 1 (***leading 1***).
2. Jika ada baris yang bernilai NOL pada semua elemennya,, maka ia harus <u>dikelompokkan di baris akhir</u> dari matriks.
3. Jika ada baris yang bereperan sebagai "***leading 1***", maka posisi angka "**1**" dari "***leading 1***" di bawahnya haruslah lebih kanan dari yang di atasnya.
4. Jika kolom yang memiliki "***leading 1***", sedangkan angka selain 1-nya adalah NOL, maka matriksnya disebut **Eselon-baris tereduksi**.

Matriks Eselon-baris (#2)

Contoh **matriks eselon-baris**, memenuhi syarat:

⇨ **No. 1**: baris pertama matriks berikut, sebagai "***leading* 1**"

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

⇨ **No. 2**: baris ke-3 dan ke-4 memenuhi syarat **no. 2**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Eselon-baris (#3)

⇨ **No**. **3**: baris pertama dan ke-2 memenuhi syarat **no**. **3**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⇨ **No**. **4**: matriks berikut memenuhi syarat **no**. **4** (⇨ disebut juga: **matriks eselon-baris tereduksi**):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL dengan Metode Eliminasi Gauss

Metode “Eliminasi Gauss” merupakan suatu cara penyelesaian SPL dengan menggunakan bentuk matriks melalui teknik penyederhanaan matriks menjadi matriks yang lebih sederhana (diperkenalkan oleh **Carl Friedrich Gauss**), yaitu dengan melakukan operasi baris sehingga matriks tersebut menjadi matriks yang Eselon-baris.

Teknis operasionalnya: dengan mengubah persamaan linier tersebut ke dalam **matriks imbuhan** (matriks yang diperluas atau teraugmentasi) dan mengoperasikannya. Setelah terbentuk matriks eselon-baris, maka lakukanlah substitusi balik untuk mendapatkan nilai dari variabel-variabel tersebut.

Contoh Metode Eliminasi Gauss (#1)

Diberikan SPL berikut ini:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= \mathbf{17} \\ x - 3y + 5z &= \mathbf{10} \\ 2x + 5y - 2z &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

Tentukanlah harga-harga x, y, dan z !

<u>Jawab:</u>

- Ubahlah SPL di atas menjadi bentuk matriks (yang diperluas) sebagi berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- Dengan menggunakan Metode Eliminasi Gauss, maka Operasi penyelesaian SPL dari "Matriks Imbuhan" di atas adalah:

Contoh Metode Eliminasi Gauss (#2)

- Dari matriks $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, **B1** x $\frac{1}{3}$ untuk mengubah a_{11} menjadi 1
- Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, dengan **B2** – **B1** x 1 untuk mengubah a_{21} menjadi 0
- Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$, dengan **B3** – B1 x 2 untuk mengubah a_{31} menjadi 0
- Kemudian $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$, **B2** x $-\frac{3}{13}$ untuk mengubah a_{22} menjadi 1

Contoh Metode Eliminasi Gauss (#3)

- Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, dengan B3 – B2 x $\frac{7}{3}$ untuk mengubah a_{32} menjadi 0

- Maka didapatkan SPL baru, yaitu:

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z &= \frac{17}{3} \\ y - z &= -1 \\ -z &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 3}$$

- Kemudian lakukan "substitusi balik", sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ y - 3 &= -1 \\ &\boxed{y = 2} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z &= \frac{17}{3} \\ x + \frac{4}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 3 &= \frac{17}{3} \\ &\boxed{x = 1} \end{aligned}$$

Sampai Kuliah Mendatang...

Kuliah #02

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{x} \bullet \vec{y}$

$[A]\,[x] = [b]$

$\vec{x} \times \vec{y}$

$\vec{a} \otimes \vec{b}$

$[A]\,[x] = [b]$

Aljabar Linier

Eliminasi Gauss & Eliminasi Gauss Jordan

FTUI

$\vec{x} \bullet \vec{y}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{a} \otimes \vec{b}$

Metode Penyelesaian (Solusi) SPAL

Dalam Kuliah ini akan dipelajari metode-metode penyelesaian Sistem Persamaan Linier (**SPL**), yaitu:

- Eliminasi Gauss: **matriks**
- Eliminasi Gauss-Jordan: **matriks**
- Aturan CRAMER: **determinan matriks**

Metode Eliminasi Gauss - Contoh#1 (ulangan)

Diberikan SPL berikut ini:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= \mathbf{17} \\ x - 3y + 5z &= \mathbf{10} \\ 2x + 5y - 2z &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

Tentukanlah harga-harga x, y, dan z !

Jawab:

- Ubahlah SPL di atas menjadi bentuk matriks (yang diperluas) sebagi berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- Dengan menggunakan Metode Eliminasi Gauss, maka Operasi penyelesaian SPL dari "Matriks Imbuhan" di atas adalah:

Metode Eliminasi Gauss - Operasi Baris Elementer (Tahap Eliminasi):

1. Baris#1: dari matriks $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, B1 x $\frac{1}{3}$ untuk mengubah $\boxed{a_{11}}$ menjadi 1

2. Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, dengan B2 – B1 x 1 untuk mengubah a_{21} menjadi 0

3. Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$, dengan B3 - B1 x 2 untuk mengubah a_{31} menjadi 0

4. Kemudian, pada baris#2: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$, B2 x $-\frac{3}{13}$ untuk mengubah $\boxed{a_{22}}$ menjadi 1

5. Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, dengan B3 – B2 x $\frac{7}{3}$ untuk mengubah a_{32} menjadi 0, dan tahap ELIMINASI hanya sampai di sini (!?!)

6. Maka didapatkan SPL baru, yaitu:

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z &= \frac{17}{3} \\ y - z &= -1 \\ -z &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 3}$$

⇨ Kemudian lakukan "substitusi balik", diperoleh:

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ y - 3 &= -1 \\ \boxed{y} &\boxed{= 2} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z &= \frac{17}{3} \\ x + \frac{4}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 3 &= \frac{17}{3} \\ \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

Metode Eliminasi Gauss - Contoh#2:

Sebagai **contoh #2**, diberikan SPL berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \mathbf{3} \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \mathbf{3} \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

Tentukanlah harga-harga x_1, x_2, dan x_3!

Jawab:

- Ubahlah SPL di atas menjadi bentuk matriks imbuhan (teraugmentasi) sbb:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Dengan menggunakan Metode Eliminasi Gauss, maka Operasi penyelesaian SPL dari "Matriks Imbuhan" di atas adalah:

Metode Eliminasi Gauss - Tahap OBE (Eliminasi):

1. Baris#1: dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, B1 : 1 untuk mengubah $\boxed{a_{11}}$ menjadi 1

2. Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, OBE dengan B2 – B1 x 2 untuk mengubah a_{21} menjadi 0

3. Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, OBE dengan B3 - B1 x 2 untuk mengubah a_{31} menjadi 0

4. Kemudian, pada baris#2: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, B2 : (-1) untuk mengubah $\boxed{a_{22}}$ menjadi 1

5. Didapatkan $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, dengan B3 – B2 x -3 untuk mengubah a_{32} menjadi 0,

6. Kemudian, pada baris#3: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, B3 : **8** dan

didapatkan SPL baru, yaitu:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

7. Sampai di sini tahap ELIMINASI (OBE) diakhiri (!?!)

⇨ Kemudian lakukan "substitusi balik", diperoleh:

$$\boxed{x_3 = 1} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_2 + 4\cdot(1) &= 3 \\ \boxed{x_2 = -1} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(1) &= 3 \\ \boxed{x_1 = 2} \end{aligned}$$

Dari SPL berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \mathbf{3} \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \mathbf{3} \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= \mathbf{5} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tahapan OBE dari matriksnya adalah sbb:

1. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}1:1]$: untuk mengubah $\boldsymbol{a}_{11}$ menjadi $\mathbf{1}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & -1 & -4 & -3 \\ \mathbf{2} & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}2 - \mathbf{2} \cdot \mathbf{B}1]$: untuk mengubah $\boldsymbol{a}_{21}$ menjadi $\mathbf{0}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & -1 & -4 & -3 \\ \mathbf{0} & -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}3 - \mathbf{2} \cdot \mathbf{B}1]$: untuk mengubah $\boldsymbol{a}_{31}$ menjadi $\mathbf{0}$

(lanjutan)...Tahapan OBE dari matriksnya adalah sbb:

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 & 3 \\ \mathbf{0} & -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}2:(-1)]$: untuk mengubah $\boldsymbol{a}_{22}$ menjadi **1**

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 8 & 8 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}3-(-3)\cdot\mathbf{B}2]$: untuk mengubah $\boldsymbol{a}_{32}$ menjadi **0**

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}3:8]$: untuk mengubah $\boldsymbol{a}_{33}$ menjadi **1**
(Matriks menjadi *Eselon-baris*)

7. Maka didapatkan SPL baru, yaitu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 &= 3 \\ \boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 &= 3 \\ \boldsymbol{x}_3 &= 1 \end{aligned}$$

⇨ $\boxed{\boldsymbol{x}_3 = 1}$; $\boxed{\boldsymbol{x}_2 = -1}$ $\boxed{\boldsymbol{x}_1 = 2}$

Dari SPL berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Tahapan OBE dari matriksnya adalah sbb:

1. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 6 \\ \mathbf{1} & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}1 \times 1]$: untuk mengubah a_{11} menjadi $\mathbf{1}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 3 \\ \mathbf{2} & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}2 - \mathbf{1} \cdot \mathbf{B}1]$: untuk mengubah a_{21} menjadi $\mathbf{0}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}3 - \mathbf{2} \cdot \mathbf{B}1]$: untuk mengubah a_{31} menjadi $\mathbf{0}$

(lanjutan)...Tahapan OBE dari matriksnya adalah sbb:

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}2:1]$: untuk mengubah a_{22} menjadi **1**

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 & 9 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}3-(-3)\cdot\mathbf{B}2]$: untuk mengubah a_{32} menjadi **0**

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{bmatrix}$ ⇨ $[\mathbf{B}3:3]$: untuk mengubah a_{33} menjadi **1**
(Matriks menjadi *Eselon-baris*)

7. Maka didapatkan SPL baru, yaitu:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

⇨ $\boxed{x_3 = 3}$; $\boxed{x_2 = 0}$ $\boxed{x_1 = 3}$

Eliminasi Gauss vs **Eliminasi Gauss-Jordan**

- Metode Eliminasi Gauss bertujuan untuk mengubah matriks **A** (**matriks Jacobi** atau matriks koefisien) menjadi matriks segitiga atas, yaitu berbentuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

- Metode Eliminasi Gauss-Jordan bertujuan untuk mengubah matriks **A** menjadi matriks diagonal (matriks identitas), yaitu semua elemen pada diagonal matriks bernilai 1, sedangkan semua elemen lainnya bernilai nol, sehingga bentuk matriksnya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

- Metode Eliminasi Gauss-Jordan "lebih berat" dalam realisasinya, karena memerlukan tahapan "operasi komputasi" yang lebih banyak dibandingkan **Eliminasi Gauss**. Oleh karena itu, **Eliminasi Gauss-Jordan** tidak banyak digunakan dalam **Komputasi Numerik dalam Ilmu Teknik**.

Dari SPL berikut:

$$\begin{aligned} u + 2v + 3w &= \mathbf{3} \\ 2u + 3v + 2w &= \mathbf{3} \\ 2u + 1v + 2w &= \mathbf{5} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tahapan OBE dari matriksnya adalah sbb:

1. $[\mathbf{B}2 - 2 \times \mathbf{B}1] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

2. $[\mathbf{B}3 - 2 \times \mathbf{B}1] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

3. $[\mathbf{B}3 - 3 \times \mathbf{B}2] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

4. $[\mathbf{B}2:(-1)] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

5. $[\mathbf{B}3:8] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $[\mathbf{B}2-4\times\mathbf{B}3] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $[\mathbf{B}1-3\times\mathbf{B}3] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. $[\mathbf{B}1-2\times\mathbf{B}2] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (Matriks menjadi *Eselon-baris tereduksi*)

9. Maka, diperoleh: $\boldsymbol{u} = 2; \quad \boldsymbol{v} = -1; \quad \boldsymbol{w} = 1$

Metode Eliminasi Gauss - Jordan (Contoh#2 ⇨ Notasi yang dipersingkat)

Dari SPL berikut:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= \mathbf{17} \\ x - 3y + 5z &= \mathbf{10} \\ 2x + 5y - 2z &= \mathbf{6} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Tahapan OBE dari matriks di atas adalah sbb:

1. $[\mathbf{B}2 - \mathbf{B}1 : 3] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & -13/3 & 13/3 & 13/3 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\left[\mathbf{B}3 - 2/3 \times \mathbf{B}1\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & -13/3 & 13/3 & 13/3 \\ 0 & 7/3 & -10/3 & -16/3 \end{bmatrix}$

3. $\left[\mathbf{B}3 - (-7/13) \times \mathbf{B}2\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & -13/3 & 13/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & -3/3 & -9/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & -13/3 & 13/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Metode Eliminasi Gauss-Jordan - Tahap OBE (Eliminasi):

4. $\left[\mathbf{B}2:(-13/3)\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

5. $\left[\mathbf{B}3:(-1)\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\left[\mathbf{B}2-(-1)\times\mathbf{B}3\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\left[\mathbf{B}1-2\times\mathbf{B}3\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

8. $\left[\mathbf{B}1-4\times\mathbf{B}2\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\left[\mathbf{B}1:3\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (Matriks menjadi *Eselon-baris tereduksi*)

10. Maka, diperoleh: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$

Latihan Soal

1. Menggunakan metode EG (Eliminasi Gauss), hitunglah harga-harga variable x, y, dan z dari SPL berikut ini!

(a).
$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= \mathbf{1} \\ x - 3y + 5z &= \mathbf{22} \\ 2x + 5y - 2z &= \mathbf{-14} \end{aligned}$$

(b).
$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= \mathbf{11} \\ -4x + 2y + 7z &= \mathbf{13} \\ 11x + 5y + 9z &= \mathbf{28} \end{aligned}$$

2. Gunakan juga metode EGJ (Eliminasi Gauss-Jordan) untuk SPL berikut:

(a).
$$\begin{aligned} 3u + 4v + 2w &= \mathbf{1} \\ u - 3v + 5w &= \mathbf{22} \\ 2u + 5v - 2w &= \mathbf{-14} \end{aligned}$$

(b).
$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= \mathbf{11} \\ -4x + 2y + 7z &= \mathbf{13} \\ 11x + 5y + 9z &= \mathbf{28} \end{aligned}$$

3. Cobalah cari harga-harga variabel x_1, x_2, x_3, dan x_4 dari SPL di bawah ini menggunakan metode EG dan EGJ:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= \mathbf{9} \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= \mathbf{3} \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= \mathbf{9} \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

MATRIKS
dan
OPERASI MATRIKS

Macam Matriks

- **Matriks Nol** (0)

  Matriks yang semua entrinya nol.

  Contoh: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriks Identitas** (I)

  Matriks persegi dengan entri pada diagonal utamanya 1 dan 0 pada tempat lain.

  Contoh: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks Diagonal

- Matriks yang semua entri non diagonal utamanya nol.

  Secara umum:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriks Segitiga

- Matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utamanya nol disebut **matriks segitiga bawah**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal utamanya nol disebut **matriks segitiga atas**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Matriks Simetris

- Matriks persegi A disebut simetris jika
  $A = A^t$

- Contoh:

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{d}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{d}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{d}_4 \end{pmatrix}$$

Transpos Matriks (#1)

- Jika A matriks mxn, maka transpose dari matriks A (A^t) adalah matriks berukuran nxm yang diperoleh dari matriks A dengan menukar baris dengan kolom.

  Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Transpose Matriks (#2)

- Sifat:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$
4. $(kA)^t = kA^t$

Balikan (*Invers*) Matriks [#1]

- Jika A adalah sebuah matriks persegi dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga AB = BA = I, maka A disebut **dapat dibalik** dan B disebut **balikan (*invers*)** dari A.
- Suatu matriks yang dapat dibalik mempunyai tepat ***satu invers***.

Balikan (*Invers*) Matriks [#2]

- Contoh:

$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

karena $AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

dan $BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Balikan (*Invers*) Matriks [#3]

- Cara mencari invers khusus matriks 2x2:

  Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

  maka matriks A dapat dibalik jika ad-bc$\neq$0, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{b}{ad - bc} \\ -\dfrac{c}{ad = bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

Balikan (*Invers*) Matriks [#4]

- Contoh:

  Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

  Penyelesaian:

$$A^{-1} = \frac{1}{2(3) - (-5)(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Bagaimana jika matriksnya tidak 2x2???)

Sampai Hari Senin Depan...

Kuliah #02

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \bullet \vec{y}$$

$$[A][x] = [b]$$

$$\vec{x} \times \vec{y}$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b}$$

$$[A][x] = [b]$$

Aljabar Linier

Aljabar Matriks dan Mencari Matriks Balikan

FTUI

$$\vec{x} \bullet \vec{y}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b}$$

Matriks dan Operasi Matriks

Dalam kuliah hari ini akan dipelajari pokok-pokok bahasan lanjutan tentang matriks, yaitu:

- ⇨ **Matriks dan operasi matriks**
- ⇨ **Aljabar matriks**
- ⇨ **Matriks Elementer**
- ⇨ **Cara mencari matriks balikan (*Invers*)**

Matriks dan Operasi Penjumlahan Matriks [#01]

Diberikan matriks-matriks seperti di bawah ini:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks **A** dan matriks **B** dikatakan sama (identik) karena matriks-matriks tersebut mempunyai ordo yang sama dan setiap elemen yang seletak sama.
- Karena (**A** dan **B**) atau (**C** dan **D**) adalah 2 buah matriks yang mempunyai ordo sama, maka penjumlahan dari $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ atau $(\mathbf{C} + \mathbf{D})$ adalah matriks hasil dari penjumlahan elemen-elemen (**A** dan **B**) atau (**C** dan **D**) yang seletak.
- Begitu pula dengan hasil selisihnya.
- Matriks yang mempunyai ordo berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Matriks dan Operasi Penjumlahan Matriks [#02]

- ⇨ Untuk setiap **A** berlaku **A** + (– **A**) = 0.
- ⇨ Jumlah dari ***k*** buah matriks **A** adalah suatu matriks yang berordo sama dengan **A** dan besar tiap elemennya adalah k kali elemen **A** yang seletak.
- ⇨ Jika ***k*** sebarang skalar maka ***k*** **A** = **A** k adalah matriks yang diperoleh dari **A** dengan cara mengalikan setiap elemennya dengan ***k*** .
- ⇨ Negatif dari **A** atau –**A** adalah matriks yang diperoleh dari **A** dengan cara <u>mengalikan</u> semua elemennya dengan –**1**.

Hukum yang berlaku dalam penjumlahan dan pengurangan matriks:

a.) **A** + **B** = **B** + **A**

b.) **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**

c.) ***k*** (**A** + **B**) = ***k*** **A** + ***k*** **B** = (**A** + **B**) ***k*** , ***k*** = skalar

Matriks dan Operasi Penjumlahan Matriks [#03]

Sifat-sifat yang berlaku dalam operasi penjumlahan dan pengurangan matriks:

(a) **A** + **B** = **B** + **A** ⇨ (sifat KOMUTATIF)

(b) (**A** + **B**) + **C** = **A** + (**B** + **C**) ⇨ (sifat ASOSIATIF)

(c) k (**A** + **B**) = k **A** + k **B** ⇨ (perkalian dengan skalar)

(d) ($\alpha + \beta$) **A** = α **A** + β **A** ⇨ (perkalian dengan skalar)

(e) **A** – **A** = **A** + (–**A**) = (0) ⇨ (sifat ASOSIATIF)

(f) **A** (**B** + **C**) = **A B** + **A C** ⇨ (sifat DISTRIBUTIF)

(g) (**A** + **B**) **C** = **A C** + **B C** ⇨ (sifat DISTRIBUTIF)

(h) (**A B**) **C** = **A** (**B C**) ⇨ (sifat ASOSIATIF)

Pada umumnya:

- **A B** ≠ **B A**
- **A B** = **0**; tidak berakibat **A** = **0** atau **B** = **0**
- **A B** = **A C**; tidak berakibat **B** = **C**

Contoh Penjumlahan Matriks

$$\mathbf{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$\mathbf{C}_{2x3} = \mathbf{A}_{2x3} + \mathbf{B}_{2x3}$$

$$\mathbf{C}_{2x3} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 11 \\ 9 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks dan Operasi Perkalian Matriks [#04]

☑ **Perkalian Matriks dengan Skalar**:
Jika k sebarang skalar, maka $k\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,k$ adalah matriks hasil dari **A** yang setiap elemennya dikalikan dengan k .

☑ **Perkalian Matriks dengan Matriks**:
Hasil kali matriks **A** yang ber-**ordo** (***orde***) $m \times p$ dengan matriks **B** yang berordo $p \times n$ dapat dituliskan sebagi matriks yang baru, sebut **C** = $\left[c_{ij} \right]$ berordo $m \times n$ dimana

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots\cdots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

☑ **Syarat perkalian Matriks dengan Matriks**:
Jika matriks $\mathbf{A}_{m\times n}$ dan matriks $\mathbf{B}_{p\times q}$ dikalikan, maka:

- Banyaknya <u>kolom</u> matriks **A** harus sama dengan banyaknya <u>baris</u> matriks **B** , sehingga $n = p$
- Matriks hasil perkalian antara **A** dan **B** adalah matriks dengan ordo $m \times q$
- Perkalian dilakukan dengan menjumlahkan hasil kali setiap elemen baris matriks **A** dengan setiap elemen kolom matriks **B** yang sesuai.

Contoh Perkalian Matriks

Diberikan berbagai matriks seperti di bawah ini:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka, di antara operasi-operasi perkalian matriks berikut ini:

- $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ dapat dilakukan, karena ordo matriks $\mathbf{A}$ adalah 2×3 dan ordo matriks $\mathbf{B}$ adalah 3×2, kolom matriks $\mathbf{A}$ sama dengan baris matriks $\mathbf{B}$.
- $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ dapat dilakukan, karena ordo matriks $\mathbf{A}$ adalah 2×3 dan ordo matriks $\mathbf{C}$ adalah 3×3, kolom matriks $\mathbf{A}$ sama dengan baris matriks $\mathbf{C}$.
- $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ tidak dapat dilakukan, karena ordo matriks $\mathbf{B}$ adalah 3×2 dan ordo matriks $\mathbf{C}$ adalah 3×3, kolom matriks $\mathbf{B}$ tidak sama dengan baris matriks $\mathbf{C}$.
- $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ tidak dapat dilakukan.
- $\mathbf{C} \times \mathbf{E}$ dapat dilakukan.
- $\mathbf{D} \times \mathbf{E}$ dapat dilakukan.

Ilustrasi Perkalian Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ordo 2×3 Ordo 3×2 Ordo 3×3

Maka, ilustrasi perkalian matriks berikut ini:

- $A \times B$ dapat dilakukan: **2 x 3 3 x 3**
- $B \times C$ tidak dapat dilakukan: **3 x 2 3 x 3**

Hasil Perkalian Matriks

Diberikan matriks: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Maka, hasil perkalian matriks-matriks terkait di atas adalah:

☑ $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 1 + 2\times 0 + 3\times 5) & (1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 3) \\ (5\times 1 + 1\times 0 + 3\times 5) & (5\times 3 + 1\times 4 + 3\times 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}$$

☑ $$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+0+15) & (2+4+3) & (3+8+9) \\ (5+0+15) & (10+2+3) & (15+4+9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 9 & 20 \\ 20 & 15 & 28 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks menggunakan MS-Excel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ordo 2×3 Ordo 3×2 Ordo 3×3

Cobalah, perkalian matriks berikut ini:

1	2	3
5	1	3

1	3
0	4
5	3

16	20
20	28

Hasil

1	3
0	4
5	3

1	2	3
0	2	4
5	1	3

###	###
###	###

Hasil ?

Matriks Bujur-Sangkar Istimewa

(a). Bila **A** dan **B** merupakan matriks-matriks bujur-sangkar sedemikian sehingga **AB** = **BA**, maka **A** dan **B** disebut COMMUTE (merubah).

(b). Bila **A** dan **B** sedemikian sehingga **AB** = -**BA**, maka **A** dan **B** disebut ANTI COMMUTE.

(c). Matriks **M** dimana $\mathbf{M}^{k+1} = \mathbf{M}$ untuk k bilangan bulat positif, disebut matriks PERIODIK.

(d). Jika k bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $\mathbf{M}^{k+1} = \mathbf{M}$, maka **M** disebut PERIODIK dengan PERIODE k.

(e). Jika $k = 1$ sehingga $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$, maka **M** disebut IDEMPOTEN.

(f). Matriks **A** dimana $\mathbf{A}^p = 0$ untuk p bilangan bulat positif disebut dengan matriks NILPOTEN.

(g). Jika p merupakan bilangan positif bulat terkecil sedemikian hingga $\mathbf{A}^p = 0$, maka **A** disebut NILPOTEN dari indeks p.

Latihan 1: (Perkalian Matriks)

Diberikan berbagai matriks berikut ini:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Hitunglah:

- $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$
- $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$
- $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$
- $\mathbf{C} \times \mathbf{E}$
- $\mathbf{D} \times \mathbf{E}$

Definisi:

Matriks **A** berukuran $m \times n$ ialah suatu susunan atau himpunan angka dalam **persegi empat** dengan ukuran $m \times n$, sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

Untuk menyatakan elemen matriks **A** yang ke (i,j), yaitu a_{ij}, digunakan notasi $(\mathbf{A})_{ij}$. Ini berarti $a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$.

Bila $m = n$, maka matriks disebut sebagai matriks bujur sangkar berukuran m atau n.

Operasi *Transpose* pada Matriks Bujur-Sangkar

Transpose matrik *A* dinotasikan $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ atau $\mathbf{A}'$ diperoleh dengan cara menukar elemen baris ke $\boldsymbol{i}$ dari matrik **A** menjadi elemen kolom ke $\boldsymbol{i}$. Bila matrik **A** berukuran $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ maka $\mathbf{A}'$ berukuran $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ dan elemen $\mathbf{A}'$ yang ke $(\boldsymbol{i,j})$ adalah a_{ji}; dapat pula dinyatakan $(\mathbf{A}')_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}$. Berikut ini adalah contoh matrik $\mathbf{A}'$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 23 & 34 \\ 5 & 18 & 28 & 31 \\ 4 & 14 & 25 & 37 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 5 & 4 \\ 2 & 13 & 18 & 14 \\ 3 & 23 & 28 & 25 \\ 4 & 34 & 31 & 37 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Operasi *Trace* pada Matriks Bujur-Sangkar

Trace didefinisikan hanya pada **matriks bujur-sangkar**. Bila matriks *A* berukuran mxm maka trace *A,* dinotasikan tr(*A*), adalah jumlah elemen diagonal matriks *A*,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

Matriks *A* berukuran mxn dan *B* berukuran nxm, maka matriks *AB* berukuran mxm. Berlaku:

$$\text{trace }(AB) = \text{trace }(BA)$$

Penjabaran:

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}(A)_{i.}(B)_{.i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(B)_{j.}(A)_{.j} = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = tr(BA)$$

Jadi : tr(*AB*) = tr(*BA*)

Aljabar Matriks Elementer

Matriks berukuran $m \times 1$ disebut **vektor kolom** dan berukuran $1 \times n$ disebut **vektor baris**.

<u>**Contoh**</u>:

- $\vec{a} = \hat{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, suatu **vektor kolom**

  a_i menyatakan komponen a ke i.

- $\vec{b} = \hat{b} = \begin{bmatrix} b_1, b_2, \cdots, b_n \end{bmatrix}$, suatu **vektor baris**

  b_i menyatakan komponen b ke i.

- $(\mathbf{A})_i$ menyatakan vektor baris ke i dalam matrik $\mathbf{A}$.
- $(\mathbf{A})_j$ menyatakan vektor kolom ke j dalam matrik $\mathbf{A}$.

<u>Latihan 2</u>: (Aljabar Matriks Elementer)

Berdasarkan matrik **A** seperti yang tercantum pada definisi di atas, sebutkan posisi dari elemen-elemen matriks berikut:

- $(\mathbf{A})_{i.}$
- $(\mathbf{A})_{1.}$
- $(\mathbf{A})_{2}$
- $(\mathbf{A})_{m.}$
- $(\mathbf{A})_{.j}$
- $(\mathbf{A})_{.1}$
- $(\mathbf{A})_{.2}$
- $(\mathbf{A})_{.n}$

Berbagai Jenis Matriks (#1)

1. **Matrik Diagonal**

   Elemen diagonal dari matriks **A** (khusus untuk **matriks bujur sangkar**) adalah: $\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{mm}$.

   Bedakanlah dengan vektor kolom $\hat{\boldsymbol{a}}$ yang memiliki $\boldsymbol{m}$ komponen, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

   Bila semua elemen selain $\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{mm}$ **bernilai 0** (nol), maka **A** disebut **matriks diagonal**.

   A = diag($\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{mm}$) menyatakan **matriks diagonal** dengan elemen diagonal a_{11}, a_{22}, ... , a_{mm}.

Berbagai Jenis Matriks (#1)

Contoh Matrik Diagonal:

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Berbagai Jenis Matriks (#2)

2. Matrik Identitas

Bila $\boldsymbol{a}_{ii} = \mathbf{1}$, sedangkan lainnya bernilai 0 (nol) untuk $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{m}$, maka **A** disebut **matriks identitas** berukuran $\boldsymbol{m}$, dinotasikan: $\mathbf{I}_{\boldsymbol{m}}$ atau $\boldsymbol{I}$.

Perhatikan juga penulisan elemen-elemen matriks diagonal di bawah ini, bila dalam notasi matrisial ($\boldsymbol{D}_A$) ataupun dalam notasi vektorial ($\boldsymbol{D}_a$):

⇨ $\boldsymbol{D}_A = diag(\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{mm})$

$$\boldsymbol{D}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Berbagai Jenis Matriks (#3)

⇨ $\boldsymbol{D}_a = diag(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Bila

$\mathbf{A} = diag(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ dan

$\boldsymbol{b}$ adalah **skalar**,

maka

$$\mathbf{A}^b = diag(\boldsymbol{a}_1^b, \boldsymbol{a}_2^b, \ldots, \boldsymbol{a}_m^b).$$

Berbagai Jenis Matriks (#4)

Bila **A** = $\mathbf{I}_m$, maka akan terdapat vektor-vektor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, yang masing-masingnya menyatakan suatu vektor dengan komponen ke 1, 2, ... $\boldsymbol{m}$ bernilai 1, sedangkan komponen yang lain bernilai 0, dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berbagai Jenis Matriks (#5)

3. Matriks Segitiga

Matriks segitiga ialah matriks dengan elemen di atas atau di bawah diagonal bernilai 0. Matriks segitiga terdiri dari dua macam, **segitiga atas** dan **segitiga bawah**.

Disebut **segitiga atas** bila yang bernilai 0 adalah semua elemen **di bawah diagonal**, dan **segitiga bawah** bila semua yang bernilai 0 **di atas diagonal**.

Contoh matrik segitiga atas (disebut: $\boldsymbol{P}$) dan segitiga bawah (disebut: $\boldsymbol{Q}$) adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1m} \\ 0 & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mm} \end{bmatrix}$$

Berbagai Jenis Matriks (#6)

3. Matriks dan Notasi Lain

- 0 menyatakan skalar bernilai 0.
- $\vec{\mathbf{0}}$ atau $\hat{\mathbf{0}}$ atau $\mathbf{0}$ menyatakan vektor dengan semua komponennya bernilai 0.
- $(\mathbf{0})$ menyatakan matriks dengan semua elemennya bernilai 0.
- $\vec{\mathbf{1}}$ atau $\hat{\mathbf{1}}$ atau $\mathbf{1}$ menyatakan vektor dengan semua komponennya bernilai 1.
- $\mathbf{1}_m$ menyatakan vektor berukuran m komponen yang semuanya bernilai 1.

MENGHITUNG/MENCARI Matriks Balikan (*Invers*)

Definisi Matriks Balikan (*Invers*)

Definisi:

1. Jika **A** adalah sebuah matriks persegi dan jika sebuah matriks **B** yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga **AB** = **BA** = I , maka **A** disebut **dapat dibalik** dan **B** disebut **balikan (*invers*)** dari **A**.
2. Suatu matriks yang dapat dibalik mempunyai tepat ***satu invers***.

Contoh:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ adalah } \textbf{\textit{invers}} \text{ dari } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

karena

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{dan}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Sifat Balikan Matriks

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama, maka berlaku:

⇨ **AB** dapat dibalik, maka

⇨ $\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$

Matriks SINGULAR vs Non-SINGULAR

- Matriks **SINGULAR** adalah matriks yang nilai **DETERMINAN**-nya **NOL**
- Matriks **Non-SINGULAR** adalah matriks yang nilai **DETERMINAN**-nya **tak NOL**

Contoh:

Buktikan bahwa matriks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}$ adalah SINGULAR!

Penyelesaian:

Determinan matriks **A** adalah

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (2\times 2) - (0,5\times 8) \\ &= (4) - (4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cara Mencari Matriks Balikan (ordo 2 x 2)

Khusus Matriks ordo 2 x 2:

⇨ Jika diketahui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka matriks **A** dapat dibalik jika $|\mathbf{A}|$ atau $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$, dimana inversnya dapat dicari dengan rumus:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{d}{a \cdot d - b \cdot c} & -\dfrac{b}{a \cdot d - b \cdot c} \\ -\dfrac{c}{a \cdot d - b \cdot c} & \dfrac{a}{a \cdot d - b \cdot c} \end{pmatrix}$$

Matriks Balikan ordo (2 x 2) dalam notasi baku

Khusus Matriks ordo 2 x 2:

⇨ Jika diketahui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, maka matriks **A** dapat dibalik jika $|\mathbf{A}|$ atau $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$, dimana inversnya dapat dicari dengan rumus:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \end{pmatrix}$$

Contoh Mencari Matriks Balikan ordo (2 x 2)

- Carilah invers dari matriks

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Penyelesaian:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2(3)-(-5)(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks Balikan ordo (3 x 3)

Untuk mendapatkan matriks matriks balikan ordo (3 x 3) kita perlu memahami matriks-matriks berikut :

- Matriks Kofaktor
- Adjoin
- Nilai elemen
- rumus invers Matriks ordo 3 x 3

Pelajari juga dari situs-situs berikut:

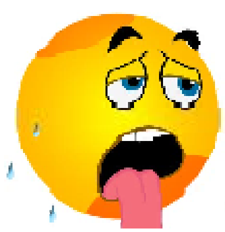
- http://javaandro.blogspot.com/2014/05/cara-mencari-invers-matriks-ordo-3x3.html
- http://soulmath4u.blogspot.com/2014/03/invers-matriks.html
- http://id.wikipedia.org/wiki/Aljabar_linear

Matriks Balikan ordo lebih tinggi

Secara umum, digunakan:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \cdot \boldsymbol{adj}(\mathbf{A}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \boldsymbol{adj}(\mathbf{A})$$

Namun, untuk mendapatkan matriks balikan dengan ordo yang lebih tinggi dari (3 x 3), akan lebih rumit lagi dan dapat dipastikan **tidak praktis** dan **memerlukan waktu lama** !



Mencari Matriks Balikan “ordo TINGGI” Menggunakan OBE

Prinsip:

⇨ Caranya hampir sama dengan metode penyelesaian SPL menggunakan metode **EG** atau **EGJ**

⇨ Relasi Umum: $\mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}-1} \cdot \cdots \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$

dengan $\boldsymbol{E}$ adalah **matriks dasar** (matriks elementer, yaitu matriks yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{I}$ dengan melakukan sekali **OBE**)

Prosedur Mencari Matriks Balikan Menggunakan OBE

- Jika diketahui matriks $\mathbf{A}$ berukuran persegi, maka cara mencari inversnya adalah: mereduksi matriks $\mathbf{A}$ menjadi **matriks identitas** dengan **OBE** dan terapkan operasi ini pada matriks I agar supaya mendapatkan $\mathbf{A}^{-1}$.
- Untuk melakukannya, sandingkan matriks identitas I ke sisi kanan matriks $\mathbf{A}$, sehingga menghasilkan matriks berbentuk $\left[\mathbf{A} \mid I\right]$.
- Terapkan **OBE** pada matriks $\mathbf{A}$ sampai ruas kiri terreduksi menjadi I. OBE ini akan membalik ruas kanan dari I menjadi $\mathbf{A}^{-1}$, sehingga matriks akhir berbentuk $\left[I \mid \mathbf{A}^{-1}\right]$

Mencari Matriks Balikan “ordo TINGGI” Menggunakan OBE

Contoh:

Carilah invers dari matrik **A** $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

☑ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow[\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_1]{\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\boldsymbol{b}_3 + 2\boldsymbol{b}_2}$$

☑ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{-\boldsymbol{b}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xleftrightarrow[\boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3]{\boldsymbol{b}_1 - 3\boldsymbol{b}_3}$$

☑ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Mencari Matriks Balikan "ordo TINGGI" Menggunakan OBE

Penyelesaian:

- ☑ Dari matriks imbuhan berikut:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

- ☑ Diperoleh:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Mencari Matriks Balikan “ordo TINGGI” Menggunakan MS-Excel

Menggunakan prosedur: **minverse**()

1	2	3
2	5	3
1	0	8

-40	16	9
13	-5	-3
5	-2	-1

PR – Individu (untuk Minggu Depan)

Carilah harga-harga operasi matriks balikan berikut, periksalah ulang jawabnya menggunakan fungsi "**minverse**()" dari MS-Excel:

(a). $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b). $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -6 & 7 \\ 5 & 0 & 6 & -8 \\ -3 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

(c). $(\mathbf{AB})^{-1}$ dan $(\mathbf{CD})^{-1}$

(d). $(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{BA})$

(e). $(\mathbf{CD})^{-1}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})$

Sampai Kuliah Mendatang...