3 MATRIKS

3.1. PENGERTIAN

DEFINISI:

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun/ dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Skalar-skalar itu disebut elemen matriks. Untuk batasnya kita berikan:

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{Vmatrix} & \\ & \end{Vmatrix}$$

Contoh (3.1):

Contoh matriks riil :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris } 1 \\ \rightarrow \text{baris } 2 \\ \rightarrow \text{baris } 3 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \text{kolom} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

Notasi Matriks

Matriks kita beri nama dengan huruf besar A, B, P, C dan lain-lain. Secara lengkap ditulis matriks $A = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} di mana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut.

Secara Umum:

Pandang sebuah matriks $A = (a_{ij})$, $i = 1,2,...,m$ dan $j = 1,2,...,n$; yang mana berarti bahwa banyaknya baris = m serta banyaknya kolom = n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Boleh pula kita tuliskan matriks $A_{(mxn)} = (a_{ij})$. (m x n) disebut ukuran (ordo) dari matriks.

Contoh (3.2):

Pada matriks A contoh (3.1) di atas, ukuran A adalah (3 x 4) sedangkan elemen-elemennya $a_{11} = 2.a_{12} = 3.a_{13} = 1.a14 = 1.a_{21} = 4.a_{22} = 0.a_{23} = 0.a_{24} = -3.a_{31} = 7.a_{32} = \sqrt{2}.a_{33} = 10$, dan $a_{34} = 1$ (semua ada 12 elemen).

Kesamaan Matriks

2 buah matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dikatakan sama A = B, bila ukurannya sama (m x n) dan berlaku a_{ij} = bij untuk setiap i dan j (i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n).

3.2. OPERASI PADA MATRIKS

(a) Penjumlahan matriks (berlaku untuk matriks-matriks berukuran sama).

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, matriks berukuran sama, maka A + B adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ di mana: $c_ij = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Atau $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Contoh (3.3):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{maka}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Contoh (3.4):

$A = [2 \quad -1 \quad 3]$, $\quad B = [2 \quad 2 \quad -1]$ maka:

$A + B = [2+2 \quad -1+2 \quad 3-1] = [4 \quad 1 \quad 2]$

Contoh (3.5):

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ maka A + B tidak terdefinisikan (tidak ada), karena ukuran A dan B berlainan.

(b) Perkalian skalar terhadap matriks

Kalau λ suatu skalar (bilangan) dan $A = (a_{ij})$ maka matriks $\lambda A = (\lambda a_{ij})$; dengan perkataan lain, matriks λA diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan λ.

Contoh (3.6):

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ maka } 3A = \begin{bmatrix} 3.\ 4 & 3.\ 3 & 3.\ 7 \\ 3.\ 3 & 3.\ 0 & 3.\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 21 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{dan } -\frac{1}{2} A = \begin{bmatrix} -2 & -^3/_2 & -^7/_2 \\ -^3/_2 & 0 & ^1/_2 \end{bmatrix}$$

Catatan (1):

Mengurangi matriks A dengan matriks B, yaitu A - B, adalah menjumlahkan matriks A dengan matriks -B.

Contoh (3.7):

Pada contoh (3.3) di atas: A - B = A + (-B) yaitu:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Bagaimana A - B pada contoh (3,4) dan (3.5)?

Catatan (2):

Beberapa hukum pada penjumlahan dan perkalian skalar: Kalau A, B, C matriks berukuran sama, dan λ skalar maka:

(1) A + B = B + A (komutatif)

(2) (A + B) + C = A + (B + C) (asosiatif)

(3) λ(A + B) = λA + λB (distributif)

(4) Selalu ada matriks D sedemikian sehingga A + D = B.

Contoh (3.8):

Misalnya: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Maka $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ sama dengan B + A

Sedangkan:

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan } 2B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A + 2B = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Jelas } 2(A + 2B) = 2 \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Jelas } 2A + 2B = 2(A + B)$$

(c) Perkalian matriks

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian: AB $\neq$ BA. Pada perkalian matriks AB, matriks A kita sebut matriks pertama dan B matriks kedua.

Syarat Perkalian Matriks:

Jumlah banyaknya kolom matriks pertama = jumlah banyaknya baris matriks kedua.

DEFINISI:

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran (pxq) dan $B = (b_{ij})$ berukuran (qxr). Maka perkalian AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ berukuran (pxr) di mana:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj}$$

Untuk setiap i = 1,2,...,p dan j = 1,2,...,r.

Contoh (3.9):

$$\underset{(1 \times 3)}{A = [3 \quad 2 \quad 1]} \quad \text{dan } \underset{(3 \times 1)}{B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Karena banyaknya kolom matriks A = 3

dan banyaknya baris matriks B = 3, AB ada , dan berukuran (1 x 1).

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 3.3 + 2.1 + 1.0 = 11$$

atau :

$$AB = [3 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [3.3 + 2.1 + 1.0] = [11].$$

Sekarang misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ukuran A = (2 x 3) dan ukuran B = (3 + 1) maka AB ada dengan ukuran (2 x 1), misalkan = C = $(c_{ij}$ = $\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}$ di mana

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3 \,.\, 3 + 2 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 = 11 \\ c_{21} &= 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 = 5 \end{aligned}$$

Jadi AB = $\begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$ Secara singkat dapat kita tulis:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3.3 + 2.1 + 1.0 \\ 1.3 + 2.1 + 1.) \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Contoh (3.10):

$$A_{(3x3)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , B_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

BA terdefinisi dengan ukuran (2 x 3).

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3+2.2+0.1 & 3.1+2.1+0.0 & 3.4 + 2.0 + 0.1 \\ 1.3+3.2+1.1 & 1.1+3.1+1.0 & 1.4 + 3.0 + 1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Catatan (3):

Beberapa hukum pada perkalian matriks: Jika A, B, C matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks yang diperlukan, maka:

(1) A(B + C) = AB + AC, (B + C) = BA + CA, memenuhi hukum distributif.

(2) A(BC) = (AB)C, memenuhi hukum asosiatif.

(3) Perkalian tidak komutatif, AB $\neq$ BA.

(4) Jika AB + 0 (matriks nol) yaitu matriks yang semua elemennya = 0, kemungkinan-kemungkinannya:
- (i) A = 0 dan B = 0.
- (ii) A = 0 atau B = 0.
- (iii) A $\neq$ 0 dan B $\neq$ 0.

(5) Bila AB = AC belum tentu B = C.

Contoh (3.11):

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 13 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ maka

$B + C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A(B + C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ sedangkan: } AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{sehingga } AB + AC = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = A(B + C).$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ maka:

$$A(BC) = A \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 27 \\ 22 & 21 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} C$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 27 \\ 22 & 21 \end{bmatrix}$$

Jelas A(BC) = (AB)C.

(3) Pada umumnya $AB \neq BA$. Misalnya $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

maka AB terdefinisi dengan ukuran (2 x 2):

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Sedangkan BA juga terdefinisi tetapi $\neq$ AB:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ternyata AB = 0 meskipun A $\neq$ 0, B $\neq$ 0.

(5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ternyata:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Ternyata meskipun B $\neq$ C tetapi AB = AC.

3.3 TRANSPOSE DARI SUATU MATRIKS

Pandang suatu matriks $A = (a_{ij})$ berukuran (m x n) maka transpose dari A adalah matriks AT berukuran (n x m) yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A, i = 1,2,...,m, sebagai kolom ke-i dari A^T. Dengan perkataan lain: $A^T = (a_j i)$.

Beberapa Sifat Matriks Transpose:

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Bukti:

Misalnya $A = (a_{ij})$ dan B (b_{ij}) maka:
$(A + B)^T = (a_{ij} + b_{ij})^T = (c_{ij})^T = (c_j i) = (a_j i + b_j i) = A^T + B^T$.

(ii) $(AT)T = A$

Bukti:
Misalnya $A = (a_{ij})$ maka $(A^T)^T = (a_ji)^T = (a_{ij}) = A$

(iii) $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$, bila suatu skalar.

Bukti:
$A = (a_{ij})$ maka $\lambda(A^T) = \lambda(a_ji) = (\lambda a_ji) = (\lambda a_{ij})^T = (\lambda A)^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Bukti:
Misalnya $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ maka elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari AB adalah:
$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$, yang merupakan juga elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari $(AB)^T$. Di lain pihak baris ke-j dari B^T adalah kolom ke-j dari B yaitu $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$ dan kolom ke-i dari A^T adalah baris ke-i dari A yaitu $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \bullet \\ \bullet \\ a_{in} \end{bmatrix}$

Jadi, elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari $B^T A^T$ adalah $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$

$$\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \bullet \\ \bullet \\ a_{in} \end{bmatrix} \begin{aligned} &= b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \ldots + b_{nj}a_{in} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

Hal ini benar untuk semua i dan j, sehingga $(AB)^T = B^T A^T$.

Contoh (3.12):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{maka bila} \begin{cases} \text{baris I ditulis sebagai kolom I} \\ \text{baris II ditulis sebagai kolom II} \\ \text{baris III ditulis sebagai kolom III} \end{cases}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Jelas pula bahwa:

a_{11} pada A = a_{11} pada A^T
a_{22} pada A = a_{22} pada A^T
a_{33} pada A = a_{33} pada A^T
a_{12} pada A = a_{21} pada A^T, dan seterusnya.

Terlihat pula bahwa $(A^T)^T$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} = A$$

Contoh (3.13):

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka:

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan

$(AB)^T = (4 \quad 3)$, sedangkan $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B^T = [1 \quad 2 \quad 0]$

$$B^TA^T = (1 \quad 2 \quad 0) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$= (1.2+2.1+0.2 \qquad 1.3+2.0+0.1)$

$= (4 \quad 3)$. Jelas bahwa $\underline{(AB)^T = B^TA^T}$

Catatan (4):

Bila matriks $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks kompleks, kita mengenal adanya transpose hermitan *(conjugate transpose)*, ditulis $A^H = \overline{(a_{ij})}^T = \overline{(a_j i)}$.

(Catatan: Bila $z = x - yi$ suatu bilangan kompleks maka conjugatenya $\bar{z} = e - yi$).

Contoh (3.14):

Bila A $\begin{bmatrix} 2-i & 3+i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ maka $A^H = \begin{bmatrix} 2+i & i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$

3.4. BEBERAPA JENIS MATRIKS KHUSUS

(1) Suatu matriks dengan banyak baris = banyak kolom = n disebut matriks bujur sangkar berukuran n (berordo n).
Barisan elemen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut diagonal utama dari matriks bujur sangkar A tersebut.

Contoh (3.15):

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar berukuran 2

$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matariks bujur sangkar berukuran 3.

(2) Matriks nol ialah matrik yang semua elemennya 0 (ditulis matrik 0). Sifat-sifatnya:
1) $A + 0 = A$ (bila ukuran A = ukuran 0.
2) $A0 = 0$; $0A = 0$ (kalau syarat-syarat perkalian terpenuhi).

(3) Matriks diagonal ialah matrik bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol. Dengan perkataan lain: (α_{ij}) adalah matriks diagonal bila $\alpha_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh (3.16):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ adalah matriks diagonal.}$$

(4) Matriks identity (satuan) ialah matrik diagonal yang elemen-elemen diagonal utamanya semua = 1, dengan perkataan lain: (u_{ij}) adalah matriks identity bila $u_{ij} = 1$, untuk $i = j$, dan $= 0$ untuk $i \neq j$. Matriks identity biasa ditulis I atau In di mana n menunjukkan ukuran matriks bujur sangkar tersebut.

Contoh (3.17):

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan lain-lain.}$$

Sifat matriks identity adalah seperti bilangan 1 (satu) dalam operasi-operasi dengan bilangan biasa, yaitu:

AI = A

IA = A (bila syarat-syarat terpenuhi).

Contoh (3.18):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } AI = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{maka } IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

(5) *Matriks skalar* ialah matriks diagonal dengan semua elemen diagonal utamanya sama = k. Matriks I adalah bentuk khusus dari matriks skalar, dengan k = 1.

Contoh (3.19):

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, adalah matriks skalar, dapat dituliskan pula sebagai

$$4I = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6) *Matriks segitiga bawah (lower triangular)*: Matriks bujur sangkar yang semua elemen di atas diagonal utama = 0. Dengan perkataan lain (a_{ij}) adalah matriks segitiga bawah bila $a_{ij} = 0$, untuk $i < j$.

Contoh (3.20):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ adalah matriks segitiga bawah

(7) *Matriks segitiga atas (upper triangular)* : Matriks bujur sangkar yang semua elemen di bawah diagonal utama = 0. Dengan perkataan lain (a_{ij}) adalah matriks segitiga atas bila $a_{ij} = 0$, $i > j$.

Contoh (3.21):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ adalah matriks segitiga atas.

(8) Matriks simetris: Matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri, dengan perkataan lain bila $A = A^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j. Jelas bahwa matriks simetris adalah bujur sangkar.

Conton (3.22):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka A adalah simetris.

(9) *Matriks antisimetris* ialah matriks yang transposenya adalah negatifnya, dengan perkataan lain bila $A^T = -A$ atau $a_{ij} = -a_{ij}$ untuk semua i dan j. Mudah dipahami bahwa semua elemen diagonal utama matriks antisimetris adalah = 0.

Contoh (3.23):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} , \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(10) *Matriks hermitian*: Matriks A disebut matriks hermitian bila transpose hermitiannya = dirinya sendiri, dengan perkataan lain bila $A^H = A$. Mudah dimengerti bahwa matriks yang simetris adalah matriks hermitian. Disebut antihermitian bila $A^H = -A$.

Contoh (3.24):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan } A^H = \begin{bmatrix} 3 & 2-1 \\ 2+i & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi hermitian.

(11) *Matriks invers (kebalikan)*: Kalau A dan B matriks-matriks bujur sangkar berordo n dan berlaku AB = BA = I maka dikatakan B invers dari A dan ditulis $B = A^{-1}$, sebaliknya A adalah invers dari B, dan ditulis $A = B^{-1}$

Catatan (5):

Tidak semua matriks bujur sangkar mempunyai invers (lebih lanjut lihat Bab 5). Sebuah matriks yang inversnya adalah dirinya sendiri, dengan perkataan lain AA = I, disebut matriks yang *Involutory*.

Contoh (3.25):

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

mempunyai invers $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

karena $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(perkalian di atas dapat pembaca selidiki).

(12) *Matriks komutatif.*

Kalau A dan B matriks-matriks bujur sangkar dan berlaku AB = BA, maka A dan B dikatakan berkomutatif satu sama lain. Jelas bahwa setiap matriks bujur sangkar berkomutatif dengan I (yang ukurannya sama) dan dengan inversnya (bila ada).

Kalau AB = -BA, dikatakan antikomutatif.

Contoh (3.26):

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ berkomutatif karena

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

sedangkan:

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Catatan 96):

Matriks bujur sangkar N disebut matriks normal bila berlaku $NN^H = N^HN$, yaitu bila N berkomutatif dengan transpose hermitiannya. Jelas bahwa matriks hermitian merupakan juga matriks normal.

(13) *Matriks Idempoten, Periodik, Nilpoten.*

Bila berlaku $AA = A^2 = A$, dikatakan matriks bujur sangkar A adalah matriks yang idempotent.

Secara umum bila p bilangan asli (bulat positif) terkecil sehingga berlaku $AAA \ldots A = A^P = A$, maka dikatakan A matriks periodik dengan periode p - 1. Kalau $A^r = 0$, dikatakan A nilpotent dengan indeks r (di mana r adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi hubungan di atas).

Contoh (3.27):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{adalah nilpoten dengan indeks} = 3.$$

$$\text{karena } A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

3.5. TRANSFORMASI (OPERASI) ELEMENTER PADA BARIS DAN KOLOM SUATU MATRIKS

Yang dimaksud dengan transformasi elementer pada baris/kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut:

(1a) Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j (baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-i), ditulis: H_{ij} (A).

Contoh (3.28):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{maka } H_{12}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_{23}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1b) Penukaran tempat kolom ke-i dan kolom k-j (kolom ke-i dijadikan kolom k-j dan kolom ke-i dijadikan kolom ke-i), ditulis: $K_{ij}(A)$.

Contoh (3.29):

Untuk A pada contoh (3.28), $K_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(2a) Memperkalikan baris ke-i dengan skalar $l \neq 0$, ditulis $H_i^{(l)}(A)$.

Contoh (3.30):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{maka } H_2^{(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3^{(1/2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ {}^3/_2 & 0 & {}^1/_2 \end{bmatrix}$$

(2b) Memperkalikan kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ ditulis $K_i^{(\lambda)}(A)$.

Contoh (3.31):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{maka } K_3^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_1^{(-1)}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3a) Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j, ditulis: $H_{ij}^{(l)}(A)$.

Contoh (3.32):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{maka } H_{31}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$H_{23}^{(-1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3b) Menambah kolom ki-i dengan λ kali kolom ke-j ditulis: $K_{ij}^{(l)}(A)$.

Contoh (3.33):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{maka } K_{23}^{(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Catatan (7):

Kadang-kadang operasi (2) dan (3) dapat dilakukan dalam satu langkah:

* Menambah λ_1 kali baris ke-i dengan λ_2 kali baris ke-j, ditulis $H_i(\lambda_1)$ $j(\lambda_2)(A)$. (Skalar $\lambda_1 \neq 0$).

Contoh (3.34):

Untuk A di atas, $H_2{}^{(2)}{}_3{}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

** Menambah λ_1 kali kolom ke-i dengan λ_2 kali kolom ke-j, ditulis: $K_i(\lambda_1)$ $j(\lambda_2)(A)$. (Skalar $\lambda_1 \neq 0$).

Contoh (3.35):

Untuk A pada contoh (3.33) di atas, $K_2{}^{(2)}{}_3{}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Misalnya kita telah mengetahui matriks B sebagai hasil transformasi elementer dari A. Kita dapat mencari A disebut invers dari transformasi elementer tersebut.

Contoh (3.36):

Misalkan $B = H_{31}{}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= H_{31}{}^{(1)}{}_{-1}(B)$$

Invers suatu transformasi elementer, juga suatu transformasi elementer, sebagai berikut:

(1) $A = H_{ij}^{-1}(B) = H_{ij}(B)$.
$A = K_{ij}^{-1}(B) = K_{ij}(B)$.

(2) $A = H_i^{(\lambda)^{-1}}(B) = H_i^{(1/\lambda)}(B)$.
$A = K_i^{(\lambda)^{-1}}(B) = K_i^{(1/\lambda)}(B)$.

(3) $A = H_{ij}^{(\lambda)^{-1}}(B) = H_{ij}^{(-\lambda)}(B)$.
$A = K_{ij}^{(\lambda)^{-1}}(B) = K_{ij}^{(-\lambda)}(B)$.

Contoh (3.37):

Kalau $B = H_{23}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka

$$A = H_{23}^{(1)^{-1}}(B) = H_{23}^{(-1)}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kalau $B = H_3^{(4)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$, maka $A = H_3^{(4)^{-1}}(B)$

$$= H_3^{(1/4)}(B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3.6. MATRIKS EKIVALEN

Dua matriks A dan B disebut ekivalen ($A \sim B$) apabila salah satunya dapat diperoleh dari yang lain dengan transformasi-transformasi elementer terhadap baris dan atau kolom. Kalau transformasi-transformasi elementernya pada baris saja, dikatakan ekivalen baris, kalau pada kolom saja dikatakan ekivalen kolom.

Contoh (3.38):

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ekivalen baris.

Karena: $B = H_{12}(A)$.

Contoh (3.39):

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ekivalen.

$$\text{Karena: } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{K_{12}(1)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{K_{42}(-1)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{12}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B$$

3.7. MATRIKS ELEMENTER

Kalau kita mengeluarkan satu kali (single) transformasi elementer terhadap suatu matriks identity I maka matriks hasil transformasi elementer itu disebut matriks elementer.

Contoh (3.40):

Matriks-matriks elementer dari I_3 misalnya:

$$H_{12}(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_{31}(k)(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{12}(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{31}(k)(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan lain-lain.

3.8. RUANG BARIS (ROW SPACE) DAN RUANG KOLOM (COLOMN SPACE) DARI SUATU MATRIKS

Pandang matriks A berukuran (m x n) dengan elemen-elemennya bilangan riil:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tiap-tiap baris dari A dapat kita pandang sebagai sebuah vektor $\boldsymbol{B}_1 = [a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}]$, $\boldsymbol{B}_2 = [a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}]$, ..., $\boldsymbol{B}_m = [a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn}]$ dapat kita sebut vektor-vektor baris dari matriks A.

DEFINISI:

Ruang baris dari matriks riil A (m x n) ialah suatu ruang vektor bagian dari R^n yang dibentuk oleh vektor-vektor baris dari A, dengan perkataan lain, ruang baris dari A ialah $L\ \{\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3, \ldots, \boldsymbol{B}_m\}$.

Analog dengan ruang baris dan vektor baris dari matriks A, adalah ruang kolom dan vektor kolom dari matriks A. Vektor-vektor kolom dari A adalah $A_1 = [a_{11},a_{21},\ldots,a_{m1}]$, $A_2 = [a_{12},a_{22},\ldots,a_{m2}],\ldots$, $A_n = [a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{mn}]$.

DEFINISI:

Ruang kolom dari matriks riil A adalah ruang vektor bagian dari R^m yang dibentuk oleh vektor-vektor kolom dari A, dengan perkataan lain, ruang kolom dari A ialah $L\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$

Catatan:

Kalau kita kerjakan transformasi elementer pada matriks A yaitu $H_{ij}(A)$, $H_i^{(\lambda)}(A)$, dan $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$, dan kita dapatkan matriks B, maka vektor-vektor baris matriks B adalah kombinasi linier dari vektor-vektor baris matriks A, berarti termasuk dalam ruang baris dari A.

Sedangkan dengan transformasi elementer invers terhadap B, kita dapatkan kembali A, jadi, jelas vektor-vektor baris dari A termasuk dalam ruang baris dari B. Kesimpulan kita: A dan B mempunyai ruang baris yang sama. *Jadi:* Matriks-matriks yang ekivalen baris mempunyai ruang baris yang sama.

Analog: Matriks-matriks yang ekivalen kolom mempunyai ruang kolom yang sama.

Contoh (3.41):

Ruang vektor L'{[1,2,-1], [2,4,1], [3,6,3]} dan L"{[1,2,-4], [2,4,-5]} adalah sama karena kalau kita anggap L' sebagai ruang baris dari suatu matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \underset{H_{31}^{(-3)}}{\overset{H_{21}^{(-2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \overset{H_{32}^{(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kita tahu bahwa [0,0,0] menyebabkan himpunan bergantung linier, jadi, vektor-vektor baris yang bebas linier [1,2,-1] dan [0,0,3] dapat dipilih sebagai basis.

Sedang L":

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \overset{H_{21}^{(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{H_{12}^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jelas L" juga mempunyai basis [1,2,-1] dan [0,0,3]. Jadi, L' = L".

3.9. RANK MATRIKS

DEFINISI:

Rank baris dari matriks A adalah *dimensi dari ruang baris matriks A. Rank kolom* dari matriks A adalah *dimensi ruang kolom matriks A*. akan ternyata bahwa rank baris = rank kolom, dari A tersebut, ditulis r(A).

Catatan (9):

Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier.

Catatan (10):

Karena matriks-matriks yang ekivalen baris/kolom mempunyai ruang yang sama, maka untuk mencari rank dari suatu matriks dapat digunakan transformasi elementer. Kita usahakan mengubah sebanyak mungkin baris/kolom menjadi vektor nol (karena vektor nol bergantung linier).

Contoh (3.42):

Cari rank dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Kita akan mengerjakan secara baris:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-3)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{32}^{(-1)} \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris ke-3 adalah vektor nol, jadi r(A) = 2.

Contoh (3.43):

Kita hendak mencari rank dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(Harap dibaca petunjuk di bawah):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (*) \\ H_{21}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-2)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -7 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ H_{34}^{(1)} \\ \sim \\ (*) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (*) \\ \sim \\ H_{32}^{(-1)} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh r(A) = 3.

Petunjuk:

(i) Kalau hanya dua baris, cukup diperiksa apakah berkelipatan.

Misalnya: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, jelas tidak berkelipatan, rank = 2.

$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, berkelipatan, jadi rank = 1

(ii) Secara Umum:

1. Pilih salah satu baris yang bukan vektor nol, untuk mudahnya kita beri tanda (*). Pada Contoh (3,43) di atas kita pilih baris 1. Pilih salah satu elemen dari baris tadi, yang $\neq 0$, kita sebut *elemen pivot.* Pada contoh adalah $a_{13} = 1$. (Untuk mempermudah perhitungan sedapat mungkin kita pilih baris yang mengandung elemen = 1 atau = -1 untuk digunakan sebagai pivot).

2. Jadikan nol semua elemen yang sekolom dengan pivot, melalui transformasi elementer baris oleh pivot tersebut. Pada contoh: a_{23}, a_{33}, dan a_{43} dijadikan nol.
3. Sekarang kita tak perlu memperhatikan lagi baris pivot di atas. Perhatikan baris-baris yang tinggal. Pada contoh adalah baris 2, 3, dan 4. Kerjakan langkah (1) terhadap mereka. Pada contoh dipilih baris 4 (diberi (*)) dengan pivot $a_{41} = 1$. Begitulah dikerjakan langkah (2) dan (3).
4. Pekerjaan ini kita akhiri apabila langkah (1) tidak dapat dikerjakan lagi, yaitu apabila semua baris telah bertanda (*) dan atau menjadi baris nol. Rank dari matriks tersebut = banyaknya baris yang bertanda (*), atau banyak baris semua dikurangi banyak baris yang menjadi baris nol.

Catatan (11):

Kita dapat pula mencari rank melalui transformasi elementer kolom.

Contoh (3.44):

Misalkan kita hendak mencari rank matriks A pada contoh yang lalu secara kolom. (Petunjuk yang lalu dapat kita gunakan dengan menggantikan perkataan baris menjadi kolom dan sebaliknya).

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ (*) \end{array} \underset{K_{41}^{(-5)}}{\overset{K_{21}^{(-5)}}{\sim}} \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 & -7 \\ 2 & -8 & 1 & -8 \\ 3 & -14 & 2 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (*) \end{array} \underset{K_{43}^{(9)}}{\overset{K_{23}^{(8)}}{\sim}}$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 22 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (*) \end{array} \overset{K_{42}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi r(A) = 3.

Catatan (12):

Suatu vektor $\in R^n$ dapat kita anggap sebagai suatu matrik berukuran (1 x n) bila kita menuliskan sebagai vektor baris, yaitu $[a_1,a_2,...,a_n]$ (boleh juga dengan membuang koma, menjadi $[a_1,a_2,...a_n]$), ataupun sebagai suatu matrik berukuran (n x 1) bila kita menuliskan sebagai vektor kolom, yaitu

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

Karenanya kita dapat melakukan berbagai operasi matriks terhadap vektor-vektor $\in R^n$ tersebut.

Operasi *dot product* dari 2 vektor $\in R^n$: $\boldsymbol{a} = [a_1,a_2,...,a_n]$, dan $\boldsymbol{b} = [b_1,b_2,...,b_n]$ dapat kita tulis sebagai perkalian matriks $\boldsymbol{a} \;.\; \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}^T = [a_1,a_2,...,a_n]$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 = a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

Catatan (13):

Skalar α dapat kita anggap sebagai matriks (1 x 1); $[\alpha]$ dan sebaliknya.

Catatan (14):

Bila matriksnya adalah matriks kompleks maka matriks berukuran (1 x n) dan (n x 1) berturut-turut disebut vektor baris dan vektor kolom kompleks, atau vektor $\in C^n$. Di sini operasi $\boldsymbol{a} \;.\; \boldsymbol{b}$ menjadi $\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}^H$ *(disebut operasi hermition product).*

Contoh (3.45) :

a = [i,2,4-i, b = [2, 3-i, -i] $\in C^3$ maka ***a . b = a b***^{H} = [i, 2, 4-i]

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3+1 \\ i \end{bmatrix} = 7 + 8i$$

3.10. SOAL-SOAL DAN PEMECAHANNYA

3.46. Diketahui matriks $P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Berapa ukuran P? Tentukan yang mana :

(i) baris 1, baris 3, kolom 2, kolom 4, baris 4.

(ii) p_{11}, p_{31}, p_{33}, p_{15}, p_{35}.

Penyelesaian :

Ukuran P = (3 x 5).

(i) Baris 1 : 3 -1 9 7 11, baris 3 : 3 7 3 5 - 1

kolom 2 : $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, kolom 4 : $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$, baris 4 tidak ada

(ii) $p_{11} = 3$, $p_{31} = 3$, $p_{33} = 3$, $p_{15} = 11$, $p_{35} = -1$

3.47. Diketahui : $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & x_1 & 6 \\ -1 & 2 & x_2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3+1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & {}^1/_2x_4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Carilah x_1, x_2, x_3, dan x_4

Penyelesaian :

Menurut kesamaan matriks maka :
$x_1 = 4$, $x_3 + 1 = 4 \rightarrow x_3 = 3$
$x_2 + 3 = 5 \rightarrow x_2 = 2$, $^1/_2 x_4 = 6 \rightarrow x_4 = 12$.

3.48. Misalkan (r x s) menyatakan ukuran matriks. Cari hasil perkalian (kalau terdefinisi) dari ukuran-ukuran berikut :

(i) (2 x 1)(1 x 3);
(ii) (4 x 5)(2 x 3);
(iii) (1 x 1)(1 x 3);
(iv) (3 x 3)(3 x 4);
(v) (2 x 2)(3 x 2).

Penyelesaian :

Kita ingat syaratnya kalau matriks (p x q) dikalikan dengan matriks (r x s), maka q harus = r, dan matriks hasil perkalian berukuran (p x s).

(i) (2 x 1)(1 x 3) didapat (2 x 3).
(ii) (4 x 5)(2 x 3) tak terdefinisi.
(iii) (1 x 11)(1 x 3) didapat (1 x 3).
(iv) (3 x 3)(3 x 4) didapat (3 x 4).
(v) (2 x 2)(3 x 2) tak terdefinisi.

3.49. Carilah AB dan BA bila :

(i) $A = 2 \quad 1)$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

(i) Ukuran A = (1 x 2), ukuran B = (2 x 3), jadi : (1 x 2)(2 x 3) kita dapat ukuran AB = (1 x 3).

$$AB = (2 \quad 1) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= (2.1 + 1.4 \quad 2.-2 + 1.5 \quad 2.0+1.-3)$$
$$= (6 \quad 1 \quad -3).$$

BA tak terdefinisi karena (2 x 3)(1 x 2).

(ii) Ukuran A = (2 x 2); B = (2 x 3), jadi AB : (2 x 2)(2 x 3) terdefinisi dengan ukuran (2 x 3).

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2+3.3 & 1.0+3.-2 & 1.-4+3.6 \\ 2.2-1.3 & 2.0-1.-2 & 2.-4-1.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

BA tak terdefinisi karena (2 x 3)(2 x 2).

3.50. Diketahui $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan :

(i) 3A, 2B, 3A-b, 2B-A

(ii) (3A - B)(2B - A).

Penyelesaian :

(i) $3A = 3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & 21 \\ -6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

$2B = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 8 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

$3A - B = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & 21 \\ -6 & 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 10 & 9 \\ 2 & -1 & 21 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2B - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 8 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -5 & -8 \\ 6 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) (3A - B)(2B - A) terdefinisi dengan ukuran (3 x 3).

$$(3A - B)(2b - A) = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 9 \\ 2 & -1 & 21 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -5 & -8 \\ 6 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 71 & 72 & -3 \\ 99 & 51 & 54 \\ 5 & 50 & 17 \end{bmatrix}$$

3.51. Selidiki bahwa AB ≠ BA untuk $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.1+1.2+3.1 & 2.1+1.1+3.0 & 2.0+1.3+3.1 \\ 1.1+1.2+0.1 & 1.1+1.1+0.0 & 1.0+1.3+0.1 \\ 0.1+2.2+1.1 & 0.1+2.1+1.0 & 6.0+2.3+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sedangkan $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1.2+1.1+0.0 & 1.1+1.1+0.2 & 1.3+1.0+0.1 \\ 2.2+1.1+3.0 & 2.1+1.1+3.2 & 2.3+1.0+3.1 \\ 1.2+0.1+1.0 & 1.1+0.1+1.2 & 1.3+0.0+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 9 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Jelas $AB \neq BA$.

3.52. Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, carilah matriks P

sedemikian sehingga AP = B

Penyelesaian:

Ukuran P harus (2 x 2) dan kita misalkan :

$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ P_4 & P_5 \end{bmatrix}$ maka $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

dan kita kalikan:

$$\begin{bmatrix} p_1+3p_3 & p_2+3p_4 \\ p_1+2p_3 & p_2+3p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan :

$$\begin{aligned} p_1 \quad + 3p_3 &= 5 \\ p_1 \quad + 2p_3 &= 4 \\ p_2 \quad + 3p_4 &= 13 \\ p_3 \quad + 2p_4 &= 10 \end{aligned}$$

Dengan penyelesaian persamaan-persamaan di atas diperoleh $p_1 = 2$; $p_2 = 4$; $p_3 = 1$; $p_4 = 3$.

Jadi matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3.53. Carilah $3A^2 + 2A - 3I_2$, bila $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$3A^2 = 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 18 \\ 54 & 57 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{dan } 3I_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } 3A^2 + 2A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 21 & 18 \\ 54 & 57 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 20 \\ 60 & 62 \end{bmatrix}$$

3.54. Carilah A^T, bila A :

(i) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(i) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3.55. Tunjukkan bahwa A adalah matriks idempotent,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Harus ditunjukkan bahwa $A^2 = A.A = A$.

$$A.A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 4.$$

3.56. Tunjukkan bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ periodik, berapa periodenya?

Penyelesaian:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Jadi periode = p -1 = 5 - 1 = 4.

3.57. Carilah invers dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dan misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{atau:}$$

$$\begin{bmatrix} 3a_1+2a_3 \\ 4a_1+3a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3a_2+2a_4 \\ 4a_2+3a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi : $3a_1 + 2a_3 = 1$, $3a_2 + 2a_4 = 0$

$4a_1 + 3a_3 = 0$, $4a_2 + 3a_4 = 1$.

Keempat persamaan tersebut diselesaikan didapat a1 = 3; a_2 = -2; a_3 = -4; a_4 = 3; atau $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

Catatan:

Cara ini hanya baik untuk matriks bujur sangkar berukuran kecil, (2 x 2). Untuk yang lebih besar dipakai cara-cara lain (lihat pada Bab 5).

3.58. Periksa apakah matriks A dan B ekivalen:

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $H_{23}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = B$

Jadi $A \sim B$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \overset{H_{31}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\overset{H_{32}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi $A \sim B$.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan

$K_{24}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi $A \sim B$.

3.59. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriks B dihasilkan dari sederetan transformasi elementer $H_{31}^{(-1)}$, $H_2^{(2)}$, H_{12}, $K_{41}^{(1)}$, $K_3^{(2)}$ terhadap A. Carilah B tersebut.

Penyelesaian:

$$A = \begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \underset{H_2^{(2)}}{\overset{H_{31}^{(-1)}}{\sim}} \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{matrix} \quad \overset{H_{12}}{\sim}$$

$$\begin{matrix} 8 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{matrix} \quad \underset{K_3^{(2)}}{\overset{K_{41}^{(1)}}{\sim}} \quad \begin{matrix} 8 & 2 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{matrix} \quad = B.$$

3.60 Matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

diperoleh dari A dengan sederetan transformasi elementer berturut-turut: H_{12}, $H_{31}^{(1)}$, K_{13}, $K_2^{(2)}$. Carilah A.

Penyelesaian:

Kita melakukan transformasi elementer invers terhadap B untuk mendapatkan A. Jadi:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{K_2^{(1/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{K_{13}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{H_{31}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{H_{12}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

3.61. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 9 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, sebutkanlah semua vektor baris dan vektor kolom dari A.

Penyelesaian:

Vektor baris $\boldsymbol{B}_1$ = [9,2,5,1]; $\boldsymbol{B}_2$ = [4,0,3,2]; $\boldsymbol{B}_3$ = [1,1,2,1] dan vektor-vektor kolom $\boldsymbol{A}_1$ = [9,4,1]; $\boldsymbol{A}_2$ = [2.0.1]; $\boldsymbol{A}_3$ = [5.3.2]; dan $\boldsymbol{A}_4$ = [1,2,1].

3.62. Tetapkan apakah matriks-matriks A, B, dan C mempunyai ruang baris yang sama:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

dengan perkataan lain apakah:

L{[1, 1, 5], [2, 3, 13]} =

L{[1, -1, -2], [3, -2, -3]} =

L{[1, -1, -1], [4 ,-3, -1]. [3, -3, 3]}

Penyelesaian:

Kita coba dahulu mencari dimensi dari ruang baris matriks C yaitu = rank (C).

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}^{(-4)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-3)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{32}^{(-2)} \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensi dari ruang baris matriks C = 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}^{(-2)} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{12}^{(-2)} \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{21}^{(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa A dan C mempunyai ruang baris yang sama, sedangkan B berlainan.

3.63. Buktikan bahwa rank baris dan rank kolom sebuah matriks adalah sama.

Bukti:

Misalkan vektor-vektor baris dari matriks Amxn adalah:

$\boldsymbol{B}_1 = [a_{11},a_{12},...,a_{1n}]$, $\boldsymbol{B}_2 = [a_{21},a_{22},...,a_{2n}]$, ..., $\boldsymbol{B}_m = [a_{m1},a_{m2},...,a_{mn}]$ dan vektor-vektor kolom:

$\boldsymbol{A}_1 = [a_{11},a_{w1},...,a_{m1}]$, $\boldsymbol{A}_2 = [a_{12},a_{22},...,a_{m2}]$, ..., $\boldsymbol{A}_n = [a_{1n},a_{2n},...,a_{mn}]$. Misalkan rank baris = r, dan kita pilih r vektor berikut sebagai basis dari ruang baris:

$S_1 = [b_{11},b_{12},...,b_{1n}]$, $S_2 = [b_{21},b_{22},...,b_{2n}]$, ..., $S_r = [b_{r1},b_{r2},...,b_{rn}]$, maka setiap vektor baris adalah kombinasi linier dari S_1, S_2, ..., S_r :

$$\boldsymbol{B}_1 = \lambda_{11}\boldsymbol{S}_1 + \lambda_{12}\boldsymbol{S}_2 + ... + \lambda_{1r}\boldsymbol{S}_r$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \lambda_{21}\boldsymbol{S}_1 + \lambda_{22}\boldsymbol{S}_2 + ... + \lambda_{2r}\boldsymbol{S}_r$$

....

$$\boldsymbol{B}_m = \lambda_{m1}\boldsymbol{S}_1 + \lambda_{m2}\boldsymbol{S}_2 + ... + \lambda_{mr}\boldsymbol{S}_r$$

di mana $\alpha_{\imath}$ adalah skalar-skalar. Kita kumpulkan komponen ke-j dari masing-masing persamaan vektor di atas, maka kita dapatkan:

$$a_{1j} = \lambda_{11}b_{1j} + \lambda_{12}b_{2j} + ... + \lambda_{1r}b_{rj}$$
$$a_{2j} = \lambda_{21}b_{1j} + \lambda_{22}b_{2j} + ... + \lambda_{2r}b_{rj}$$

....

$$a_{mj} = \lambda_{m1}b_{1j} + \lambda_{m2}b_{2j} + ... + \lambda_{mr}b_{rj}$$

untuk tiap-tiap j = 1, 2, ..., n atau:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{m1} \end{bmatrix} b_{1j} + \begin{bmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{m2} \end{bmatrix} b_{2j} + \ldots + \begin{bmatrix} \lambda_{1r} \\ l_{2r} \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{mr} \end{bmatrix} b_{rj}$$

Ternyata setiap vektor kolom dari matriks A merupakan kombinasi linier dari r vektor-vektor: $\{[\lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{n:1}], [\lambda_{12}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{m2}], \ldots, [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{mr}]\}$, jadi dimensi ruang kolom tersebut $s \leq r$. Kemudian kita lakukan kita lakukan transpose terhadap A, secara yang sama kita peroleh dimensi ruang kolom A^T = dimensi ruang baris A = $r \leq s$. Jadi, Kesimpulan kita r = s, dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom atau rank baris = rank kolom.

3.64. Carilah rank dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \end{bmatrix}$

dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Karena jumlah baris matriks A lebih sedikit, dianjurkan untuk mencari ranknya secara baris (meskipun secara kolom hasilnya sama).

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} (*) \quad \begin{matrix} H_{21}^{(-1)} \\ - \\ H_{31}^{(-2)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} (*)$$

$$H_{32}^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh 2 baris bertanda (*) (atau 1 baris nol), maka r(A) = 2. Pada matriks B, jumlah kolom lebih sedikit, kita cari secara kolom. Langsung kita lihat bahwa kedua vektor kolom tak berkelipatan, jadi r(B) = 2.

3.65. Periksa apakah himpunan vektor-vektor berikut bebas linier.

(i) {[3,1,2], [2,0,1], [5,1,2]}

(ii) {[1,1,0], [2.2.0], [3.3.0]}

(iii) {[2,0,1], [1,2,1], [1,-2,0]}

Penyelesaian:

Kita selidiki dengan rank matriks, kita anggap vektor-vektor di atas sebagai vektor-vektor baris suatu matriks:

(i) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (*) \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \underset{\sim}{H_{31}^{(-1)}} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tidak ada sebuah baris pun yang dapat dijadikan nol, r = 3 berarti ketiga vektor di atas bebas linier.

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (*) \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} H_{21}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-3)} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jelas r = 1, jadi ketiga vektor bergantung linier.

(iii) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{H_{21}^{(-1)}} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{H_{32}^{(1)}} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

karena r = 2, maka ketiga vektor tersebut bergantung linier.

3.66. Diketahui {$\boldsymbol{a}$ = [1,3,-2,0], $\boldsymbol{b}$ = [2,3,0,1] $\boldsymbol{c}$ = [5,9,-2,2], $\boldsymbol{d}$ = [0,-3,4,1]} adalah sistem pembentuk sebuah ruang vektor L.

(i) Carilah dimensi dari L dan pilih suatu basis untuknya.

(ii) Nyatakan masing-masing vektor di atas sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis.

(iii) Carilah hubungan antara x_1, x_2, x_3, x_4 yaitu komponen-komponen sebarang vektor $\boldsymbol{x} \in L$.

Penyelesaian:

(i) Kita tulis a, b, c, d sebagai vektor-vektor baris matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{H_{31}^{(-5)}}{\overset{H_{21}^{(-2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{H_{24}^{(-1)}}{\overset{H_{34}^{(-2)}}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi dimensi L = 2.
Sebagai basis boleh kita ambil $\{\boldsymbol{a} = [1,3,-2,0], \boldsymbol{d} = [0,-3,4,1]\}$ yang bebas linier.

(ii) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{d}$; $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{d} = 0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$; $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{d}$

Catatan:

Hasil (ii) dapat langsung kita lihat dari transformasi elementer di atas. Misalnya $\boldsymbol{a}$ (baris 1) tidak berubah sampai transformasi selesai, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}$(baris 2), mengalami transformasi dua kali yaitu $H_{21}^{(-2)}$ dan $H_{24}^{(-1)}$ atau $-2\boldsymbol{a}$ dan $-\boldsymbol{d}$, sampai menjadi baris nol, jadi $\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d} = 0$ atau $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$.

(iii) $\boldsymbol{x}$ harus kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}\}$:
$[x_1,x_2,x_3,x_4] = \lambda_1[1,3,-2,0] + \lambda_2[0,-3,4,1]$ dan diperoleh persamaan-persamaan:
$x_1 = \lambda_1 + 0\lambda_2, x_2 = 3\lambda_1 - 3\lambda_2, x_2, x_3 = -2\lambda_1 + 4\lambda_2, x_4 = 0\lambda_1 + \lambda_2$, serta dengan mengeleminasikan λ_1 dan λ_2 diperoleh hubungan-hubungan:
$x_2 = 3x_1 - 3x_4 \rightarrow 3x_1 - x_2 - 3x_4 = p$
$x_3 = -2x_1 + 4x_4 \rightarrow 2x_1 + x_3 - 4x_4 = 0$

SOAL TAMBAHAN

3.67. Buktikan bahwa matriks A adalah involutory (yaitu $A^2 = I$) jika dan hanya jika $(I - A)(I + A) = 0$.

Penyelesaian:

Bila $(I - A)(I + A) = 0 \rightarrow I^2 - AI + IA - A^2 = 0 \rightarrow A^2 = I^2 = I$, karena $AI = IA$.

Bukti sebaliknya:

$$\text{Bila } A^2 = I \text{ maka } (I - A)(I + A) = I^2 - AI + IA - A^2$$
$$= I^2 - A^2 = I - I = 0.$$

3.68. Buktikan bahwa bila A suatu matriks bujur sangkar maka $(A + A^T)$ adalah matriks simetris.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} (A + A^T)^T &= A^T + (A^T)^T && \text{(sifat)} \\ &= A^T + A && \text{(sifat)} \\ &= A + A^T. \end{aligned}$$

3.69. Himpunan dari semua matriks bujur sangkar berukuran (n x n) merupakan ruang vektor di atas field himpunan bilangan riil R maupun di atas *field* himpunan bilangan kompleks C terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar (untuk ini dipersilakan Pembaca menyelidikinya).

Misalkan V adalah ruang vektor dari matriks-matriks (n x n) di atas *field* R. Apakah W himpunan bagian dari V, merupakan ruang vektor bagian dari V bila:

(i) W himpunan matriks-matriks simetris (n x n).

(ii) W himpunan matriks-matriks yang komutatif dengan S sebuah matriks tertentu; atau $W = \{A \in V \mid AS = SA\}$.

(iii) W himpunan matriks-matriks idempoten (n x n); atau $W = \{A \in V \mid A^2 = A\}$.

Penyelesaian:

(i) – Matriks 0 adalah matriks simetris, jadi $W \neq \phi$.

– Bila matriks-matriks P dan Q $\in$ W berarti $P = P^T$ dan $Q = Q^T$, berarti $(P + Q)^T = P^T = P^T + Q^T = P + Q$, jadi P dan Q $\in$ W (simetris).

– Jelas bahwa bila P $\in$ W dan λ suatu skalar $\in$ R maka $(\lambda P)^T = \lambda P^T = \in P^T$ jadi $\lambda P \in W$.

W adalah ruang vektor bagian dari V.

(ii) – Jelas bahwa OS = SO, jadi $W \neq \emptyset$.

– Bila A dan B $\in$ W maka AS = SA dan BS = SB.

$(A + B)S = AS + BS = SA + SB = S(A + B)$. Jadi $(A + B) \in W$.

– Bila λ skalar AS = SA maka $(\lambda A)S = \lambda(SA) = S(\lambda A)$. Jadi $\lambda A \in W$.

Maka W ruang vektor bagian dari V.

(iii) W bukan ruang vektor bagian dari V, karena misalnya matriks identity $I_n \in W$ (sebab $I_n^2 = I_n$), tetapi $2I_n \notin W$ (sebab $(2I_n)^2 = 4I_n$).

3.70. Tulis matriks $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linier dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Tulis $M = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$ atau:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

diperoleh persaman-persamaan:

(1)... $3 = \lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3$

(2)... $1 = \lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3$

(3)... $1 = \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3$

(4)... $-1 = 0\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3$

Dari persamaan (1), (2), dan (3) deperoleh $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ dan bila dimasukkan ke (4) memenuhi.

Jadi, M = 3A - 2B - C.

3.11. SOAL-SOAL LATIHAN

3.71. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan:

(i) 3A;

(ii) 3A - B:

(ii) A + 2B:

(iv) 3B - 2A;

(v) carilah D sedemikian sehingga A + B - D = 0.

Jawab:

(i) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 3 & 9 & 6 \\ -3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 13 & 8 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 9 & 3 \\ -8 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -12 & -2 & 3 & 2 \\ 10 & 9 & 3 & 8 \\ 9 & 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} -11 & -6 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -6 & -! \\ 7 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

3.72 Carilah harga x,y,z, dan u bila:

$$3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+1 \\ 5 & z+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2+y \\ z & 4 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$x = 2^1/_2$; $y = 3$; $z = 2^1/_2$; $u = 2^1/_2$.

3.72. Carilah perkalian matriks-matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$\begin{bmatrix} 11, \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$ tidak terdefinisi, $(17 \quad 19 \quad 4)$.

3.74. $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$$

Carilah PA dan BP

Jawab:

3A, 3B.

3.75. Carilah matrıks Qsedemıkian sehingga QA = B, bila A

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} -1/5 & 9/5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

3.76. Pada Soal 3.75. Apakah diperoleh Q yang sama kalau AQ = B? Berapa Q?

Jawab:

tidak $\begin{bmatrix} 9/5 & 5 \\ 7/5 & -3 \end{bmatrix}$

3.77. Carilah X sedemikian sehingga AXB = 1 untuk A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

dan B = $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} -1/62 & -39/310 \\ -1/62 & 23/310 \end{bmatrix}$$

3.78. A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(i) Carilah A^2 dan A^3.

(ii) Kalau $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$; Carilah f(A).

Jawab:

(i) $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}$

3.79. Matriks P = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ Carilah vektor kolom ***a*** = $\begin{bmatrix} x \\ y- \end{bmatrix}$

sedemikian sehingga P***a*** = 6***a***.

Jawab:

a = μ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, μ sebarang bilangan.

3.80. Matriks P = . $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Carilah P^n (n bialngan bulat positif).

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.81. Tunjukkan bahwa A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

tidak komutatif (terhadap perkalian).

3.82. Tunjukkan bahwa A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ dan

B = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Komutatif.

3.83. Tunjukkan bahwa A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ adalah matriks

Involutory.

3.84. Tunjukkan bahwa A dan B, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

adalah antikomutatif, dan bahwa $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

3.85. Carilah Invers dari P = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} ^1/_2 & 0 \\ -^1/_6 & ^1/_3 \end{bmatrix}$$

3.86. Tunjukkan bahwa $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ adalah periodik dengan periodenya 2.

3.87. Tunjukkan bahwa $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ adalah nilpotent.

3.88. Carilah matriks hasil sederetan transformasi elementer dari:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ berturut-turut: $H_{21}^{(-3)}$, $H_{31}^{(2)}$

$K_{21}^{(-2)}$, $K_{41}^{(1)}$, K_{23}, H_{23}, $H_{31}^{(-2)}$, $K_{42}^{(-5)}$, $K_{32}^{(2)}$, $K_{3}^{(1/11)}$, $K_{43}^{(7)}$.

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.89. Matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ diperoleh dengan transformasi elementer $H_{31}^{(1)}$, $K_{21}^{(2)}$ terhadap A. Carilah A.

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.90. Tentukan yang mana dari matriks-matriks berikut mempunyai ruang baris yang sama:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab: Tidak ada

3.91. Diketahui ruang-ruang vektor L' dibentuk oleh [2,1,4] dan [4,-1,3], L" dibentuk oleh [2,-2,-1], [2,3,7] dan [-2,7,9]. Berbentuk apakah L' dan L"? Cari basis untuk L' dan L", kemudian cari pula basis untuk perpotongan L' dan L".

Jawab:

Bidang rata {[9,1,4],[4 -1,3]},{[2,-2,-1],[2,3,7]}, {[2,-2.-1]}

3.92. Dengan mempergunakan rank matriks, selidiki bebas linier atau tidaknya vektor-vektor berikut:

(i) {[3,1,2], [2,0,0], [5,1,2]}.

(ii) {[1,3,2,0], [4,1,1,7], [3,2,0,1]}.

(iii) {[12,0,1], [27,13,11], [21,-13,-7]}.

(iv) {[$^1/_2$,-$^1/_2$,2], [$\sqrt{2}$, -$^1/_2\sqrt{2}$, 4$\sqrt{2}$], [-6,3,-24]}.

Jawab:

(i) tidak; (ii) bebas; (iii) tidak; (iv) tidak.

3.93. L adalah sebuah ruang vektor yang dibentuk oleh a = [1,-2,5,-3] b = [2,3,1,-4] dan c = [3,8,-3,-5]. Carilah basis dan dimensi dari L.

Jawab: Dimensi = 2.

Carilah rank dari matriks-matriks berikut (untuk Soal-soal 3.94. sampai 3.98).

3.94. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab: r = 3.

3.95. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Jawab: r = 3.

3.96. $\begin{bmatrix} 103 & 20 & 3 \\ 104 & 21 & -1 \\ 105 & 22 & -5 \end{bmatrix}$

Jawab: r = 2.

3.97. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 11 & 25 & 4 & 6 \\ 1 & 21 & 31 & 8 & 2 \\ 4 & 32 & 56 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

Jawab: r = 2.

3.98. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 14 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Jawab: r = 2.

3.99. Tentukan transpose hermitian dari:

$$Q = \begin{bmatrix} 2+i & i & \sin ix \\ 3+i & x^2 & \pi \end{bmatrix}$$

Jawab: $\begin{bmatrix} 2-i & 3-i \\ -i & x^2 \\ -\sin ix & \pi \end{bmatrix}$

3.100. Buktikan bahwa matriks bujur sangkar $A - A^T$ adalah matriks bujur sangkar antisimetris, sehingga setiap matriks bujur sangkar A selalu dapat ditulis sebagai penjumlahan matriks simetris dan matriks antisimetris: $A = {}^1/_2(A + A^T) + {}^1/_2(A - A^T)$.

3.101. Buktikan bahwa matriks AA^T maupun A^TA adalah matriks yang simetris.

3.101. Tunjukkan bahwa perkalian matriks-matriks segitiga salalu menghasilkan matriks segitiga lagi.

3.103. Tunjukkan bahwa bila $D = (d_{ij})$ suatu matriks diagonal maka $D^n = (d_{ij}{}^2)$ (di mana n = bilangan bulat positif).

3.104. Buktikan bahwa bila matriks A simetris atau antisimetris maka A^2 adalah matriks simetris.

3.105. Buktikan bahwa bila A dan B matriks-matriks simetris maka AB simetris jika dan hanya jika A serta B komutatif.

3.106. (i) Jika matriks A simetris berukuran (m x m) dan P matriks berukuran (m x n), maka matriks $B = P^TAP$, berukuran (n x n) juga simetris.

(ii) Jika matriks A antisimetris berukuran (m x m) dan P matriks berukuran (m x n), maka matriks $B = P^TAP$, berukuran (n x n) juga antisimetris.

3.107. Tunjukkan bahwa:

(i) $$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & {}^1/_2 n(n-1)\,\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$$

CONTOH PROGRAM

PENJUMLAHAN MATRIKS DAN PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

```
570 CLS
580 'program penjumlahan 2 matriks & perkalian dengan skalar
590 PRINT"MENGHITUNG p*A+q*B"
600 INPUT"banyak baris";M
610 INPUT"banyak kolom";N
620 DIM A(M,N),B(M,N),C(M,N)
630 INPUT" P =";P
640 INPUT" q =";Q
650 PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS 1 :"
660 FOR I=1 TO M
670 FOR J=1 TO N :PRINT"BARIS";I;"KOLOM";J;:INPUT A(I,J):NEXT J
680 NEXT I
690 PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS 2 :"
700 FOR I=1 TO M
710 FOR J=1 TO N :PRINT"BARIS";I;"KOLOM";J;:INPUT B(I,J):NEXT J
720 NEXT I
730 FOR I=1 TO M
740 FOR J=1 TO N
750 C(I,J)=P*A(I,J) + Q*B(IJ)
760 NEXT J
770 NEXT I
780 'mencetak hasilnya
790 CLS:PRINT"MATRIKS HASIL :":PRINT
800 FOR I = 1 TO M
810 FOR J = 1 TO N
820 PRINT USING"####.##";C(I,J);: NEXT J
830 PRINT
840 NEXT I
850 END
```

TRANSPOSE MATRIKS

```
860  CLS
870  'PROGRAM TRANSPOSE MATRIKS'
880  PRINT"UKURAN MATRIKS : "
890  INPUT"BANYAK BARIS";M
900  INPUT"BANYAK KOLOM";N
910  DIM A(M,N),AT(N,M)
920  PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS :":PRINT
930  FOR I = TO M:FOR J=1 TO N :PRINT"BARIS";I;"KOLOM";J;:INPUT
     A(I,J):NEXT J:NEXT I
940  FOR I = 1 TO M
950  FOR J = 1 TO N
960  AT(J,I) = A(I,J)
970  NEXT J
980  NEXT I
990  'Mencetaj transpose
1000 CLS:PRINT"MATRIKS TRANSPOSE :":PRINT
1010 FOR I = 1 TO N :FOR J=1 TO M :PRINT USING"####.#";AT(I,J);
1020 NEXT J :PRINT:NEXT I
1030 END
```

PERKALIAN MATRIKS

```
1040 'program perkalian matriks'
1050 CLS:INPUT"banyak baris, banyak kolom matriks 1 ";P,Q
1060 INPUT"banyak baris,banyak kolom matriks#2 ";R,S
1070 IF Q<> R THEN PRINT" TIDAK TERDEFINISI":STOP:GOTO 1050
1080 DIM A(P,Q),B(R,S),C(P,S)
1090 PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS 1 :":PRINT
1100 FOR I = 1 TO P :FOR J=1 TO S :PRINT"BARIS";I;"KOLOM";J;:INPUT
     A(I,J):NEXT J,I
1110 PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS 2 :":PRINT
1120 FOR I = 1 TO R:FOR J=1 TO S :PRINT"BARIS";I;"KOLOM";J;:INPUT
     B(I,J):NEXT J,I
1130 FOR I = 1 TO P
1140 FOR J=1 TO S
1150 C(I,J) = C(I,J) + A(I,K) * B(K,J)
1180 NEXT K
1190 NEXT J
1200 NEXT I
1210 'mencetak hasilkali
1220 CLS:PRINT"MATRIKS HASILKALI :":PRINT
1230 FOR I = 1 TO P
1240 FOR J = 1 TO S : PRINT USING"####.#";C(I,J);:NEXT J
1250 PRINT
1260 NEXT I
1270 END
```