6 PERSAMAAN-PERSAMAAN LINIER

6.1. PERSAMAAN LINIER

DEFINISI :

Bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ kita sebut persamaan linier a_i dan b adalah skalar, dimana a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta dari persamaan x_i: $x_1, x_2, ..., x_n$ disebut anu *(undeterminants, unkonws* atau *variables).* Sekumpulan harga dari anu katakanlah, $x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_3 = k_3$, disebut jawab (solusi) dari persamaan, apabila terpenuhi : $a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_nk_n = b$. Jawab tersebut dapat kita tulis dalam notasi vektor: $[k_1, k_1, ..., k_n]$ atau

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ k_n \end{bmatrix}$$

dan disebut jawab vektor dari persamaan.

Contoh (6.1.) :

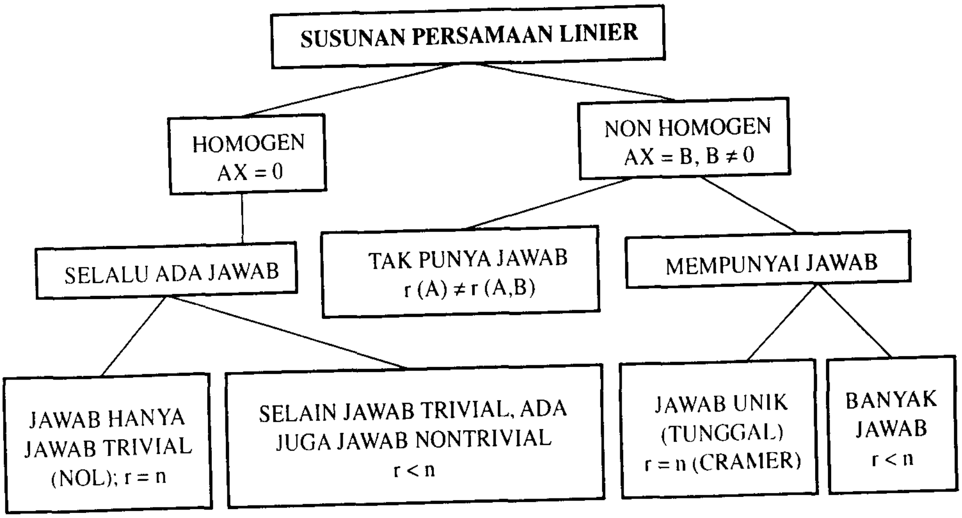
Persamaan $2x + 3y + z = 5$. Harga-harga $x = 0$, $y = 1$, dan $z = 2$ adalah suatu solusi, karena $2.0 + 3.1 + 1.2 = 5$, dan dapat kita tulis : [0, 1, 2].

Catatan (1) :

Jelas bahwa suatu persamaan bisa mempunyai solusi yang lebih dari satu. Misalnya pada Contoh (6.1) di atas, [0, 0, 5], [2, 0, 1], dan lain-lain lagi juga merupakan solusi persamaan.

6.2. SUSUNAN PERSAMAAN LINIER

Sebelum menguraikan tentang persamaan-persamaan linier, diberikan dahulu skema susunan persamaan linier, sebagai berikut :



Pandanglah m buah persamaan-persamaan linier dengan n anu :

$$\left.\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & \ldots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & \ldots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\
a_{i1}x_1 & + a_{i2}x_2 & + & \ldots & + a_{in}x_n & = & b_i \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & \ldots & + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (**)$$

a_{ij} dan b_i masing-masing koefisien-koefisien dan konstanta persamaan-persamaan linier (**) tersebut.

Dengan perkalian matriks, persamaan-persamaan di atas dapat ditulis :

$$AX = B, \text{ dimana } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

berukuran (m x n) dan disebut matriks koefisien dari susunan (**)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ x_m \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor kolom anu dan konstanta.

Teorema (1) :

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawab *(consistent)* apabila *rank matriks koefisien = rank matriks lengkap* atau bila *r(A) = r(A,B).*

*Matriks lengkap (A, B) adalah matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Bukti :

Persamaan (**) di atas dapat pula kita tulis sebagai :

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_n \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

atau $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B \ldots (*)$ dimana $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah vektor-vektor kolom dari A. Yang menjadi persoalan apakah ada $x_1, x_2, \ldots, x_n$, yaitu skalar-skalar yang memenuhi persamaan (*). Kalau ada, maka haruslah B merupakan kombinasi linier dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dengan perkataan lain banyak vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sama dengan banyak vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B, atau B harus di dalam ruang kolom dari matriks A. Jadi r(A) = r(A, B).

Contoh (6.2) :

Apakah susunan persamaan $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 = 13 \end{array}\right\}$ mempunyai jawab ?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Rank } (A) = 2$$

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 31 \end{bmatrix}$$

karena kolom 1 dan 3 tidak kelipatan maka r(A.B) = 3.
Jadi r(A) $\neq$ r(A,B). Tidak ada jawab.

Contoh (6.3) :

Susunan $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\}$ akan mempunyai jawab karena :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

berarti r(A) = 2

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

berarti r(AB) = 2.

Catatan (2) :

Dari Bab 3 (tentang rank matriks) kita tahu bahwa rank baris dan rank kolom sama, maka boleh pula mencari rank dengan transformasi elementer baris.

Catatan (3) :

Kita dapat mencari r(A) dari r (A,B) dengan sekali penulisan. Lalu untuk menetapkan r(A), kita hanya memandang matriks A saja, sedang untuk r(A,B) kita pandang matriks keseluruhannya.

Pada Contoh (6.2) dan (6.3) di atas, dapat kita tulis :

$$* \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 13 \end{bmatrix} \overset{H_{21}^{(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

jelas r(A) = 1, r(AB) = 2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

jelas secara baris bahwa karena baris 1 dan 2.

Baik kalau kita pandang A saja atau (A, B), tidak berkelipatan, jadi r(A) = r(A,B) = 2.

6.3. SUSUNAN PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

Kalau semua konstanta $b_i = 0$, persamaan menjadi AX = 0.

Susunan :

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_{22} & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & . \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & . \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & & \\ A_1x_1 & + & A_2x_2 & + & \ldots & + & A_nx_n & = & 0 \end{array}\right\} \text{atau}$$

disebut susunan persamaan linier homogen.

Jelas : $r(A) = r(A,0)$, jadi susunan persamaan linier homogen selalu mempunyai jawab. Harga-harga $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ jelas selalu memenuhi susunan di atas. Jadi $[0, 0, \ldots, 0]$ pasti merupakan jawab dari susunan persamaan homogen yang manapun.

Maka : suatu susunan persamaan linier homogen selalu mempunyai paling sedikit satu jawab $[0, 0, \ldots, 0]$, yang disebut *jawab nol* atau *jawab trivial.*

Teorema (2) :

Semua jawab vektor dari susunan persamaan linier homogen membentuk suatu ruang vektor di R^n yang disebut ruang jawab (solution space) L. Dimensi L = *(n – r)*. Dimana n = banyak anu dan r = rank matriks koefisien A (sebagai bukti lihat soal 6.17).

Catatan (4) :

Kalau $r < n$, berarti dimensi ruang jawab $n - r > 0$ maka didapatkan pula jawab yang tidak nol (nontrivial).

Catatan (5) :

Kalau $r = n$, maka dimensi ruang jawab $= n - r = 0$, jadi jelas *hanya didapatkan jawab nol (trivial).*

Catatan (6) :

Kalau banyak persamaan linier ada m buah, vektor-vektor kolom $A_1, A_2, \ldots, A_n$ berkomponen m buah, jadi $\in$ Rm. Maka jelas bahwa jumlah maksimum vektor-vektor kolom matriks A yang bebas linier = m, atau r(A) paling besar = m.

Jadi kalau $m < n$, pasti ada jawab nontrivial.

Contoh (6.4) :

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &=& 0 \end{array}\right\}$$ akan mempunyai jawab nontrivial karena jumlah persamaan $m = 2$, jumlah anu $n = 3$.

$[-2, 1, -1]$ adalah salah satu jawab yang nontrivial.

6.4. PENINJAUAN SECARA BARIS

DEFINISI :

Suatu susunan persamaan linier disebut bebas atau tidak bebas, tergantung dari apakah vektor-vektor barisnya (vektor-vektor baris dari matriks koefisien) bebas linier atau tidak.

Contoh (6.5) :

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{array}\right\}$$

kita tulis $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

jelas ketiga vektor baris dari A tidak bebas linier (jumlah banyaknya vektor = 3 tetapi vektor-vektor tersebut $\in R^2$). Jadi susunan persamaan di atas tidak bebas.

Teorema (3) :

Kita tulis vektor-vektor baris dari A sebagai $\boldsymbol{B}_1 = [a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}]$, $\boldsymbol{B}_2 = [a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}]$, ..., $\boldsymbol{B}_m = [a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}]$, dan dapat menuliskan AX = 0 sebagai m buah dot produk : $\boldsymbol{B}_i.\boldsymbol{x}$ dimana i = 1, 2, ... m dan $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$.

Kalau r(A) = r, maka r buah baris akan bebas linier, katakanlah $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, ..., \boldsymbol{B}_r$ (kalau perlu dengan pertukaran indeks).

Ternyata jawab dari r persamaan/dot produk : $\boldsymbol{B}_1.\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{B}_2.\boldsymbol{x} = 0, ..., \boldsymbol{B}_r.\boldsymbol{x} = 0$, adalah jawab dari seluruh m buah persamaan mula-mula.

Bukti :

Misalkan x jawab persamaan-persamaan $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x} = 0$ (i = 1, 2, ..., r) akan dibuktikan x juga jawab dari persamaan-persamaan $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x} = 0$ untuk i = r + 1, r + 2, ..., m. Kalau $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, ..., \boldsymbol{B}_r$ bebas linier maka $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, ..., \boldsymbol{B}_r, \boldsymbol{B}_k$ (k = r +

2, ..., m) bergantung linier atau $\boldsymbol{B}_k$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, ..., \boldsymbol{B}_r$ yaitu sebagai : $B_k = \lambda_1\boldsymbol{B}_1 + \lambda_1\boldsymbol{B}_2 + ... + \lambda_r\boldsymbol{B}_r$. Kalau kedua ruas kita dot-produkkan dengan x : $\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{x} = (\lambda_1\boldsymbol{B}_1 + \lambda_2\boldsymbol{B}_2 + ... + \lambda_r\boldsymbol{B}_r).x = \lambda_1(\boldsymbol{B}_1.\boldsymbol{x}) + \lambda_2(\boldsymbol{B}_2.\boldsymbol{x}) + ... + \lambda_r(\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{x}) = 0 + 0 + ... + 0 = 0$.

Jadi juga $\boldsymbol{x}$ jawab dari pesamaan $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x} = 0$ untuk $i = r + 1, r + 2, ..., m$.

Akibat :

Kalau ada r vektor-vektor baris dari matriks koefisien A yang bebas linier maka sisa m − r persamaan dapat kita abaikan. Cukup kita pandang r persamaan yang bebas saja.

Catatan (7) :

Dari bab 3 tentang rank matriks kita tahu bahwa ranks matriks yang ekivalen baris (matriks yang didapatkan sebagai hasil transformasi elementer baris terhadap matriks lainnya) adalah sama. Suatu susunan persamaan linier tidak berubah (tetap mempunyai jawab yang sama) apabila dilakukan transformasi elementer baris terhadap matriks lengkapnya. Maka kadang-kadang lebih baik kalau kita lakukan transformasi elementer lebih dahulu sekaligus untuk memeriksa rank A, supaya lebih jelas kelihatan mana vektor-vektor baris yang bebas.

Contoh (6.6) :

Persamaan
$$\begin{aligned} 3x + 2y + x &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + y \quad &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{H_{12}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{H_{13}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka $\boldsymbol{B}_2$ dan $\boldsymbol{B}_3$ bebas linier dan $r(A) = 2$, serta kita mengambil persamaan

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + y \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ saja.}$$

CONTOH-CONTOH LAIN :

Contoh (6.7) :

Carilah jawab susunan persamaan ini :

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{Maka } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan karena $\boldsymbol{B}_1$ dan $\boldsymbol{B}_2$ tidak berkelipatan maka bebas linier, r(A) = 2. Karena r(A) = n = 2 maka susunan persamaan hanya mempunyai trivial : [0, 0].

Contoh (6.8) :

Carilah jawab : $2x + 3y + z = 0$

Dari catatan (6), m < n mengakibatkan susunan selalu mempunyai jawab nontrivial. Sebut matriks A = (2 3 1), jadi r(A) = 1. Maka dimensi ruang jawab adalah n − r = 3 − 1 = 2.

Kita dapat memilih suatu jawab, misalnya kita ambil x = 1 dan y = 1 maka z = −5.

Harga z selalu tergantung pada pemilihan harga dari x dan y, dengan perkataan lain xz = −2x − 3y dimana x dan y sebarang skalar. Karena itu, kita perkenalkan di sini pengertian "PARAMETER" atau "FREE VARIABLE" untuk x dan y. Jadi secara umum jawab persamaan adalah :

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = -2x - 3y \end{array}\right\}$$ (*) dimana kita boleh mengambil harga x dan y sebarang, misalnya kita sebut x = λ dan y = μ maka (*)

menjadi :

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + 0\mu \\ y = 0\lambda + \mu \\ z = -2\lambda - 3\mu \end{array}\right\}$$

dan secara vektor, jawab di atas dapat ditulis :

$$
\begin{aligned}
[x, y, z] &= [\lambda, \mu, -2\lambda - 3\mu] \\
&= [\lambda, 0\lambda\ -2\lambda] + [0\mu, \mu, -\mu] \\
&= \lambda[1, 0, -2] + \mu[0, 1, -3] \ (**)
\end{aligned}
$$

Jawab seperti ini disebut jawab umum, dan bila kita pilih suatu harga λdan μ tertentu akan diperoleh suatu jawab khusus (λ tidak harus = μ). Jawab di atas yaitu $x = 1$, $y = 1$, $z = -5$ atau $[x, y, z] = [1, 1, -5]$ adalah sebuah jawab khusus dengan mengambil $\lambda = 1$, $\mu = 1$ dari (*).

Catatan (8) :

Banyaknya parameter yang kita ambil adalah = dimensi ruang jawab = (n – r). Sebagai parameter boleh kita pilih anu yang mana saja asalkan : setelah anu-anu yang dipilih itu, bila dipindahkan ke ruas kanan, rank matriks koefisien dari anu-anu yang tinggal di ruas kiri tetap = r(A).

Contoh (6.9) :

Susunan persamaan linier :

$$
\left.
\begin{aligned}
3x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 0 \\
3x_2 \quad\quad + x_4 &= 0
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

jelas bahwa $r(A) = 2$, sehingga dimensi ruang jawab $= n - r = 4 - 2 = 2$.

Kita pilih 2 parameter, dimana tidak boleh pasangan x_1 dan x_3, atau x_2 dan x_4, karena misalnya kita pilih x_1 dan x_3 :

$$
\left.
\begin{aligned}
0 &= -3x_1 - x_3 \\
3x_2 + x_4 &= 0
\end{aligned}
\right\}
$$

maka rank dari

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah $1 \neq r(A) = 2$.

Kalau kita pilih misalnya x_1 dan x_2 :

$$\left.\begin{array}{llll} x_3 & = & -3x_1 & \\ & x_4 = & & -3x_2 \end{array}\right\}$$

rank dari :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ adalah tetap} = 2 = r(A)$$

Biasanya secara praktis kita tidak mengalami kesulitan dalam pemilihan parameter ini.

Contoh (6.10) :

Selesaikan :
$$\left.\begin{array}{rl} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} H_{12}^{(-3)} \\ \sim \\ H_{32}^{(-2)} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} H_{31}^{(-1)} \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Jadi $r(A) = 2$.

Kita cukup menyelesaikan persamaan yang diambil dari (*)

$$\begin{aligned} x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

dan kita pilih $n - r = 4 - 2 = 2$ parameter, misalnya $x_1 = \lambda$ dan $x_3 = \mu$ (tentu saja x_2 tak dapat dipilih); λ dan μ sebarang skalar.

$$\text{Maka : } \begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -x_1 + x_3 \end{aligned} \qquad \text{atau : } \begin{aligned} x_1 &= 1\lambda + 0\mu \\ x_2 &= 0\lambda + 0\mu \\ x_3 &= 0\lambda + 1\mu \\ x_4 &= -1\lambda + 1\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3, x_4] &= [\lambda, 0\lambda, 0\lambda, -\lambda] + [0\mu, 0\mu, \mu, \mu] \\ &= \lambda[1, 0, 0, -1] + \mu[0, 0, 1, 1] \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1) \end{aligned}$$

Catatan (9) :

Ruang jawab L di atas, berdimensi 2 dan kita dapat mengambil {[1, 0, 0, –1], [0, 0, 1, 1]} sebagai basisnya. Jelas kedua vektor tersebut bebas linier (bukan kelipatan). Kita tahu (dari Bab 2) bahwa pasangan-pasangan vektor lain yang bebas linier $\in$ L adalah basis dari L pula. Maka kita tidak heran bahwa pemilihan parameter yang berbeda akan menghasilkan basis yang berbeda, namun tetap sebagai basis ruang jawab yang sama.

Pada Contoh (6.10), kalau kita pilih x1 dan x4 sebagai parameter maka kita peroleh jawab umum : $\boldsymbol{x} = \lambda[1, 0, 1, 1] + \mu[0, 0, 1, 1]$ .... (2)

Dan kalau kita pilih x_3 dan x_4 sebagai parameter, maka jawab umum kita peroleh : $\boldsymbol{x} = \lambda[1, 0, 1, 0] + \mu[1, 0, 1, 1]$ .... (3)

Kita dapat menyelidiki bahwa ketiga jawab (1), (2), dan (3) adalah sama (dalam suatu ruang jawab yang sama), seperti pada contoh Bab 3 kita kerjakan :

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{H_{12}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$(3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{H_{21}^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi memang benar ketiga jawab pada ruang jawab yang sama. (Tentunya bisa dikerjakan dengan menyelidiki kombinasi linier seperti Bab 2).

Kita ingin mengambil sebuah jawab khusus, misalnya [1, 0, 1, 0] yang mana kita peroleh dari (1) dengan mengambil $\lambda = 1$, $\mu = 1$, atau dari (2) dengan $\lambda = 1$, $\mu = 0$ atau dari (3) dengan $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

6.5. SUSUNAN PERSAMAAN LINIER NONHOMOGEN

Pandang susunan persamaan linier $AX = B$, dimana $B \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{lllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & A_mx_n & = & b_m \end{array}\right\}\ ,\quad \text{atau :}$$

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2 + \dots + \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{B}$ dimana $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah vektor-vektor kolom dari matriks koefisien A_1. Susunan persamaan linier di atas disebut nonhomogen.

Catatan (10) :

Telah dibuktikan pada Teorema (1), bahwa suatu susunan persamaan linier nonhomogen akan mempunyai jawab bila $r(A) = r(A,B)$.

Teorema (4) :

Semua jawab vektor dari susunan persamaan linier nonhomogen $AX = B$ berbentuk $z = x' + y$, dimana x' adalah suatu jawab khusus nonhomogen

$AX = B$ dan y adalah jawab umum homogen $AX = 0$.
(Untuk buktinya lihat soal 6.23).

Keterangan : Persamaan $AX = 0$ yang dimaksud dı atas adalah sama dengan persamaan nonhomogen $AX = B$ dengan mengganti $B = 0$.

Misalnya persamaan : $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

yang nonhomogen, persamaan homogennya adalah :

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$$

Contoh (6.11) :

Carilah jawab umum persamaan : $2x + 3y + z = 5$. Jelas $r(A) = r(A,B) = 1$. Kita pandang persamaan homogennya $2x + 3y + z = 0$. Kita pilih $n - r = 2$ parameter misalnya x dan y, maka $z = -2x - 3y$, kita sebut $x = \lambda$ dan $y = \mu$, maka kita peroleh jawab umum homogen : $x = \lambda[1, 0, -2] + \mu[0, 1, -3]$. Untuk suatu jawab khusus nonhomogen misalnya kita pilih $x = 0$ dan $y = 0$, maka $z = 5$. Jadi jawab umum yang diminta $[x, y, x] = [0, 0, 5] + \lambda[1, 0, -2] + \mu[0, 1, -3]$.

Cara lain :

Kita boleh pula langsung memilih parameter (sebanyak $n - r$ buah), jadi misalnya kita pilih $x = \lambda$ dan $y = \mu$, maka $z = 5 - 2x - 3y$ atau

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + \lambda + 0\mu \\ y = 0 + 0\lambda + \mu \\ z = 5 - 2\lambda - 3\mu \end{array}\right\} \text{atau}$$

$$[x, y, z] = [0, 0, 5] + \lambda[1, 0, -2] + \mu[0, 1, -3].$$

Catatan (11) :

Pemilihan parameter sama seperti yang telah dibicarakan pada Catatan (8).

Catatan (12) :

Kalau r(A) < n maka persamaan homogen dari AX = B akan mempunyai jawab nontrivial. Jadi karena $z = x' + y$, dimana y tidak hanya ***0*** maka z yaitu jawab nonhomogen tidak tunggal.

Kalau r(A) = n, maka persamaan homogennya hanya mempunyai jawab 0. Sehingga $z = x + y$ menjadi $z = x + \mathbf{0}$, maka jawab akan tunggal (unik).

Contoh (6.12) :

Pada Contoh (6.11), karena r(A) = 1 < n = 3, maka jawab persamaan nonhomogen terebut banyak sekali.

Sedangkan persamaan : $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$

hanya mempunyai satu jawab, yaitu x = 1 dan y = 1 atau [x, y] = [1, 1]. Kita lakukan sebagai berikut :

Periksa dahulu apakah r(A) = r(A,B) :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

jelas karena baris 1 dan 2 tidak berkelipatan, maka r(A) = r(A,B) = 2.

Jadi konsisten (ada jawab).

Karena r(A) = 2 = n, maka susunan homogennya hanya mempunyai jawab ***0***. Jadi jawab susunan nonhomogen hanya satu (tunggal).

Salah satu cara adalah dengan transformasi elementer baris (lihat Catatan 7 dan soal 6.31).

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{H_{12}^{(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{H_{21}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

atau $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Cara lain adalah dengan aturan Cramer.

6.6. ATURAN CRAMER

Untuk mencari jawab dari persamaan linier nonhomogen yang mempunyai jawab tunggal (r = n), kita dapat mempergunakan aturan Cramer sebagai berikut : Untuk susunan persamaan linier nonhomogen :

AX = B, maka $x_k = D_k/D$, dimana :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

$$D_k = \text{det.} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kolom ke-k

dan D = det.(A) (determinan matriks koefisien) $\neq$ 0.

Catatan (13) :

Untuk menentukan Dk, kita tulis matriknya dengan mengganti kolom ke-k oleh kolom konstanta b.

Catatan (14) :

Jelas bahwa karena r(A) = n, kita akan mempunyai n persamaan yang bebas, dimana vektor-vektor barisnya bebas linier, atau determinan matriks koefisien $\neq$ 0. Jadi syarat dapat dipakainya aturan Cramer adalah : m = n (banyak persamaan yang bebas = banyaknya anu), atau det.(A) $\neq$ 0.

Contoh (6.13) :

Dari Contoh (6.12) : $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

$A = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

maka dapat dipakai aturan Cramer.

$$D = 1,\ x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1,\ \text{dan } y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1$$

Contoh (6.14) :

Carilah jawab dari :

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x + 2y &= 4 \\ 3x + y &= 2 \end{aligned}$$

Karena m > n, kita belum bisa menggunakan aturan Cramer.

Kita periksa dahulu r(A) dan r(A,B) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{12}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{32}^{(-3)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{31}^{(-5)} \\ \sim \\ . \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (*)$$

ternyata r(A) = r(A,B) = 2, jadi ada jawab. Sekarang kita mengambil 2 persamaan yang bebas dari (*).

$$\begin{aligned} 0x - y &= -2 \\ x + 2y &= 4 \quad \text{atau} \quad y = 2 \text{ dan } x = 0. \end{aligned}$$

Boleh juga kita gunakan aturan Cramer karena m = n = 2 dan det.(A) =

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,\ \text{yaitu :}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 0 \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = 2$$

Contoh (6.15) :

Carilah x, y, z secara Cramer (bila mungkin) dari :

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & y & = & 7 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Meskipun m = n = 3, tetapi $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Sehingga aturan Cramer tidak dapat dipakai. Di sini diperoleh r(A) = r(A,B) = 2. Penyelesaian kita adalah seperti pada Contoh (6.11). Lihat pula Contoh (6.30).

Contoh (6.16) :

Cari jawab dari :
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

Lebih baik kita selidiki r(A) dan r(A,B) dahulu.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} H_{13}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{23}^{(-1)} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

jelas karena baris 1 dan 2 tidak berkelipatan maka r(A) = r(A,B) = 3.

Jadi benar r = n, jawab hanya satu. Kita boleh mengambil :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0x & - & y & - & 3z & = & -4 \\ 0x & - & 2y & - & 3z & = & -5 \\ x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

dan menggunakan aturan Cramer sebagai berikut :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1. & -4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

6.7. SOAL-SOAL DAN PEMECAHANNYA

6.17. Buktikan Teorema (2) : Semua jawab susunan persamaan linier homogen membentuk suatu ruang vektor di R^n dengan dimensi n – r.

Bukti :

Kalau jawab hanya ***0***, jelas ***0*** membentuk ruang vektor berdimensi 0 di R^n.

Kalau jawab tidak hanya ***0***.

- Ruang jawab L tidak kosong karena $\boldsymbol{0} \in L$.
- Misalkan $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$ dan $y = [y_1, y_2, ..., y_n] \in L$ (artinya $\boldsymbol{x}$ dan y jawab-jawab vektor dari susunan persamaan) maka $x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n] \in L$, karena ia memenuhi :

$A_1(x_1 + y_1) + A_2(x_2 + y_2) + ... + A_n(x_n + y_n) =$
$(A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n) + (A_1y_1 + A_2y_2 + ... + A_ny_n) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

Untuk skalar λ dan $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, ..., x_n] \in$ L maka :

$\lambda x = [\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n] \in$ L karena $A_1(\lambda x_1) + A_2(\lambda x_2) + ... + A_n(\lambda x_n)$
$= \lambda(A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n) = \lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$

Jadi terbukti L suatu ruang vektor.

(**) Dimensi L = (n − r) dibuktikan sebagai berikut :

Kalau r(A) = r maka ada r buah vektor kolom dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang bebas linier, katakanlah $A_1, A_2, ..., A_r$. Maka vektor-vektor $A_{r+1}, A_{r+2}, ..., A_n$ harus dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $(A_1, A_2, ..., A_r)$ misalnya untuk setiap k = r + 1, r + 2, ..., n :

$A_k = \alpha_{1k}A_1 + \alpha_{2k}A_2 + ... + \alpha_{rk}A_r$, dan kalau kita ganti $\alpha_{ik} = -\beta_{ik}$, untuk setiap i = 1, 2, ..., r maka :

$\beta_{1k}A_1 + \beta_{2k}A_2 + ... + \beta_{rk}A_r + A_k \overset{*}{=} 0$ ....

Karena k = r + 1, r + 2, ..., n (ada n − r buah), maka ada (n − r) buah persamaan seperti (*) di atas.

Kalau jawab-jawabnya kita sebut $y_1, y_2, ..., y_{n-r}$, maka :

$$
\begin{aligned}
y_1 &= [\beta_{1(r+1)}, \beta_{2(r+2)}, ..., \beta_{r(r+1)}, 1, 0, ..., 0] \\
y_2 &= [\beta_{1(r+2)}, \beta_{2(r+2)}, ..., \beta_{r(r+2)}, 0, 1, ..., 0] \\
&\;\;\vdots \\
y_{n-r} &= [\beta_{1n}, \beta_{2n}, ..., \beta_{rn}, 0, 0, ..., 1]
\end{aligned}
$$

Jelas kalau dilihat dari (n − r) komponen-komponen terakhir dari vektor-vektor di atas, (n − r) vektor-vektor $y_1, y_2, ..., y_{n-r}$ adalah bebas linier. Jadi, dimensi ruang jawab = n − r.

6.18. Tentukan apakah masing-masing susunan berikut mempunyai jawab nontrivial.

(i) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z + w &= 0 \\ 2x - 3y + z + w &= 0 \\ 4x + y - 2z - w &= 0 \end{aligned}\right\}$ (ii) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ 3x - y - 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Penyelesaian :

(i) Karena jumlah persamaan m = 3, sedang jumlah anu n = 4, jadi m < n, pasti ada jawab nontrivial.

(ii) m = 3, n = 3, kita harus periksa apakah r(A) < n.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} H_{21}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-3)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

jelas karena baris 2 dan 3 tidak berkelipatan, maka r(A) = 3 = n. Jadi tidak mempunyai jawab nontrivial.

6.19. Carilah jawab :

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 7z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Penyelesaian :

Cara I (secara baris). Kita periksa r(A) dahulu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} H_{31}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{41}^{(-1)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} H_{32}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{42}^{(-1)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Ternyata r(A) = 2. Dimensi ruang jawab = n − 2 = 1.
Kita cukup mengambil 1 parameter, dari (*) :

$$x + 2y - z = 0$$
$$0x + y + 4z = 0$$

dan memilih sebuah parameter misalnya z, jadi : y = −4z.

x = z − 2y = z + 8z = 9z.

Kita tulis :
$$\begin{aligned} x &= 9\lambda \\ y &= -4\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Jadi jawab umum : [x, y, z] = λ(9, −4, 1] (λ sebarang).

Catatan :

Silahkan selidiki apakah apabila kita memilih x atau y sebagai parameter, akan dihasilkan ruang jawab yang sama dengan ruang yang dibentuk oleh [9, –4, 1].

Cara II (secara kolom) :

Persamaan dapat kita tulis : $\boldsymbol{A}_1x + \boldsymbol{A}_2y + \boldsymbol{A}_3z = 0$ .... (*)
dimana $\boldsymbol{A1} = [1, 2, 1,1]^T$, $\boldsymbol{A}_2 = [2, 5, 4, 3]^T$, $\boldsymbol{A}_3 = [-1, 2, 7^T]^T$, yaitu vektor-vektor kolom dari matriks koefisien A. Kita cari r(A) (secara kolom) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{K_{31}^{(1)}}{\overset{K_{21}^{(-2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{K_{32}^{(-4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari transformasi elementer kolom di atas kita dapat mencari hubungan vektor-vektor kolom tersebut. Perhatikan kolom 3 yang berhasil dijadikan vektor nol : $(\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_1) - 4(\boldsymbol{A}_2 - 2\boldsymbol{A}_1) = \boldsymbol{0}$ atau $9\boldsymbol{A}_1 - 4\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 = 0$ (**)
Dari (*) dan (**), $[x, y, z] = \lambda[9, -4, 1]$ dimana λ sebarang bilangan, merupakan jawab umum.

6.20. Langsung dari definisi bebas linier, selidiki apakah himpunan vektor-vektor ini bebas linier :

(i) u = [1, 1 –1], v = [2, –3, 1]

(ii) a = $[a_1, a_2]$, b = $[b_1, b_2]$, dan c = $[c_1, c_2]$

Penyelesaian :

(i) Diselidiki apakah semua $\lambda_i = 0$ pada :

$\lambda_1[1, 1, -1] + \lambda_2[2, -3, 1] = [0, 0, 0]$ atau : $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$.
$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$, $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

$$r(A) : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{H_{31}^{(-1)}}{\overset{H_{21}^{(-1)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{H_{32}^{(3/5)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

r(A) = 2 = n, maka $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, jadi u dan v bebas linier.

(ii) $\lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2[b_1, b_2] + \lambda_3[c_1, c_2] = [0, 0]$

$$\left.\begin{aligned} a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 &= 0 \\ a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

karena jumlah persamaan = m lebih kecil dari jumlah anu : $2 < 3$, maka susunan persamaan homogen mempunyai jawab nontrivial, berarti ada λ_1, λ_2, λ_3 yang tidak semua = 0. {a, b, c} bergantung linier.

6.21. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

carilah vektor kolom $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

yang $\neq \boldsymbol{0}$, sedemikian sehingga $A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}$.

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix}$$

dengan perkalian matriks didapat :

$$\begin{vmatrix} x + 3y \\ 4x - 3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x \\ 3y \end{vmatrix}$$

Sehingga didapat persamaan :

$$\left.\begin{aligned} x + 3y = 3x &\rightarrow 2x - 3y = 0 \\ 4x - 3y = 3y &\rightarrow 4x - 6y = 0 \end{aligned}\right\}$$

yang adalah suatu susunan persamaan homogen.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{jadi } r(A) = 1.$$

Berarti ada jawab $[x, y]^T$ yang $\neq \boldsymbol{0}$. Dari persamaan $2x - 3y = 0$ diambil sebuah parameter, misalnya $x = \mu$. Maka $-3y = -2x$ atau $y = {}^2/_3\mu$, berarti jawab umumnya : $[x, y] = \mu[1, {}^2/_3]$ atau $\lambda[3, 2]$. Jadi $v = \lambda$

$\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ dimana λ sebarang bilangan.

Dan kita boleh mengambil sebuah jawab khusus misalnya :

$$v = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}, \text{ untuk } \lambda = 1.$$

6.22. Carilah suatu susunan persamaan linier homogen yang ruang jawabnya dibentuk oleh : $\{\boldsymbol{a} = [2, 1, 0], \boldsymbol{b} = [1, 1, 1]\}$.

Penyelesaian :

Karena $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ saling bebas linier maka dapat kita pilih sebagai basis ruang jawab; semua vektor jawab adalah kombinasi linier dari $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$, atau $[x, b, z] = \lambda[2, 1, 0] + \mu[1, 1, 1]$. Persoalan sekarang adalah mencari hubungan x, y, z.

Maka (1) $x = 2\lambda + \mu$, (2) $y = \lambda + \mu$, (3) $z = \mu$, kita lenyapkan λ dan μ diperoleh $\mu = z$ dan $\lambda = y - \mu = y - z$ kita masukkan ke (1), diperoleh $x = 2(y - z) + z$ atau $x - 2y + z = 0$ adalah persamaan homogen yang diminta.

Soal di atas sama saja dengan soal mencari persamaan linier dari bidang rata (Melalui titik (0, 0, 0) dengan vektor arah [2, 1, 1], [1, 1, 1]).

6.23. Buktikan : jawab vektor dari susunan persamaan linier nonhomogen berbentuk $z = \boldsymbol{x}' + y$ (Teorema 4).

Bukti :

z suatu jawab, berlaku :

$\boldsymbol{A}_1 z_1 + Z_2 A_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_n z_n = \boldsymbol{B}$, sedangkan $\boldsymbol{x}'$ suatu jawab pula maka $\boldsymbol{A}_1 x'_1 + \boldsymbol{A}_2 x'_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_n x'_n = \boldsymbol{B}$, kalau dikurangkan didapat $\boldsymbol{A}_1(z_1 - x'_1) + A_2(z_2 - x'_2) + \ldots + A_n(z_n - z'_n) = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ jadi $[z_1 - x'_1, z_2 - x'_n]$ atau $z - x'$ adalah jawab homogen, sebut $\boldsymbol{y}$, maka $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}$ atau : $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}$.

6.24. Periksa apakah persamaan-persamaan nonhomogen ini mempunyai jawab; lalu carilah jawabnya bila ada :

(i) $\left.\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 2 \\ 5x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$ (ii) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 3y &= 6 \\ 2x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned}\right\}$

Penyelesaian :

Kita periksa r(A) dan r(A,B)

(i) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{H_{21}^{(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{H_{32}^{(-1)}}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$

ternyata r(A) = 2, sedang r(A,B) = 3.
r(A) ≠ r(A,B) berarti tak ada jawab.

(ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{21}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-4)} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right] \underset{\sim}{J_{32}^{(-1)}}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (*)

Jadi r(A) = r(A,B) = 2, ada jawab.
Kita boleh mengambil persamaan-persamaan dari (*)

$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ -5y + 10z &= -10 \end{aligned}\right\}$ (**)

Langsung kita pilih parameter sebanyak $n - r = 3 - 2 = 1$ buah, misalnya $z = \lambda$. Maka dari (**) : $y = 2 + 2z = 2 + 2\lambda$, dan $x = 6 - 2y + 3z = 6 - 4 - 4z + 3z = 2 - z = 2 - \lambda$.

Jawab umum : $[x, y, z] \; = \; [2 \neq \lambda, 2 + 2\lambda, \lambda]$

$= \; [2, 2, 0] + \lambda[-1, 2, 1].$

Secara kolom :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{c} K_{21}^{(-2)} \\ \sim \\ K_{31}^{(3)} \\ K_{41}^{(-6)} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 4 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{c} K_{32}^{(2)} \\ \sim \\ K_{42}^{(-2)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Jelas $r(A) = r(A,B) = 2$.

Pandang bentuk homogen dari persamaan di atas yaitu persamaan $A_1x + A_2y + A_3z = 0$ dimana $A_1 = [1, 2, 4]^T$, $A_2 = [2, -1, 3]^T$, $A_3 = [-3, 4, -2]^T$ kolom-kolom dari A dan dari transformasi elementer kolom di atas kita peroleh hubungan : $(A_3 + 3A_1) + 2(A_2 - 2A_1) = 0$ atau : $-A_1 + 2A_2 + A_3 = 0$.

$[x, y, z] = [-1, 2, 1]$ adalah jawab, dan karena dimensi ruang jawab $= 1$, maka jawab umum homogen $y = \lambda[-1, 2, 1]$. Pilih jawab khusus nonhomogen : misalnya $z = 0$, kita peroleh $x = 2$ dan $y = 2$.

Jawab umum nonhomogen :

$[x, y, z] = [2, 2, 0] + \lambda[-1, 2, 1]$

6.25. Carilah matriks P sedemikian sehingga AP = Q bila

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{dan } Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Misalkan $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix}$ jadi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

atau : $\begin{bmatrix} p_1 + 2p_3 & p_2 + 2p_4 \\ p_1 + 2p_3 & p_2 + 2p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

jadi : $p_1 + 2p_3 = 2 \quad p_2 + 2p_4 = 3$

$p_1 + 2p_3 = 2 \quad p_2 + 2p_4 = 3$

adalah susunan persamaan nonhomogen.

Kita cari r(A) dan r(A, B).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{21}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{43}^{(-1)} \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (*)$$

r(A) = r(A,B) = 2.

kita ambil dari (*) :

$p_1 + 2p_3 = 2$ dan $p_2 + 2p_4 = 3$ kita lansung pilih $n - r = 2$ parameter, misalnya p_3 dan p_4, jadi $p_1 = 2 - 2p_3$, $p_2 = 3 - 2p_4$.

Secara umum $P = \begin{vmatrix} 2 - 2\lambda & 3 - 2\mu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}$

dimana λ dan μ sebarang skalar. Sebagai jawab khusus misalnya untuk $\lambda = 1$ dan $\mu = 0$ kita peroleh

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Catatan :

Pembaca dapat menyelidiki kebenaran jawab tersebut dengan mengalikan AP kembali.

6.26. Syarat apakah harus diberikan pada a, b, dan c supaya susunan berikut (dengan anu-anu x, y, dan z) mempunyai jawab.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}\right\}$$

Penyelesaian :

Kita tahu bahwa susunan mempunyai jawab bila r(A) = r(A,B).

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 2 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{21}^{(-2)} \\ \sim \\ H_{21}^{(-1)} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{32}^{(2)} \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-a+2b-4a \end{array}\right]$$

r(A) = 2, jadi r(A, B) harus = 2.

berarti $c - a + 2b - 4a = 0 \rightarrow -5a + 2b + c = 0$.

Jadi syarat yang diminta : $-5a + 2b + c = 0$.

6.27. Diketahui susunan $\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \end{array}\right\}$

Tetapkan harga k supaya susunan tersebut : (i) mempunyai jawab tunggal, (ii) mempunyai jawab lebih dari atu, (iii) tidak mempunyai jawab.

Penyelesaian :

Kita lakukan dahulu transformasi elementer baris untuk mencari kemungkinan-kemungkinan persamaan-persamaan yang bebas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \\ 2 & 3 & k & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{21}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-2)} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{3}^{(k-1)} \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrl|l} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \\ 0 & k-1 & (k-1)(k+2) & k-1 \end{array}\right].$$

Kemungkinan-kemungkinan : r(A) = 2 haruslah $(k-1)(k+2) = 4 \rightarrow k = -3$ atau $k = 2$; r(A) = 3 berarti $k \neq -3$, dan $k \neq 2$.

r(A,B) = 2: haruslah $(k-1)(k+2) = 4$ dan $k - 1 = 1$, berarti $k = 2$.

Maka : tak punya jawab, r(A) ≠ r(A,B) : bila $k = -3$.

Jawab banyak, r(A) = r(A,B) = 2 : bila $k = 2$

Jawab tunggal, r(A) = r(A,B) = 3 : bila $k \neq -3$, dan $k \neq 2$.

6.28. Tulislah a = [9, 2, 2] sebagai kombinasi linier dari p = [2, 1, 0], q = [3, –1, 2] dan r = [5, 0, 2].

Penyelesaian :

$a = \lambda_1 \boldsymbol{p} + \lambda_2 \boldsymbol{q} + \lambda_3 \boldsymbol{r}$, kita akan mencari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$[9, 2, 2] = \lambda_1[2, 1, 0] + \lambda_2[3, -1, 2] + \lambda_3[5, 0, 2]$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \quad\quad &= 2 \\ + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

Susunan mempunyai jawab bila r(A) = r(A,B).

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{H_{12}^{(-2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{H_{13}^{(-5/2)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad (*)$$

r(A) = r(A,B) = 2.

Persamaan kita ambil dari (*) : $\lambda_1 - \lambda_2 = 2$

$2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 2$

dan kita dapat memilih 3 – 2 = 1 parameter misalnya λ_1.

Jadi $\lambda_2 = -2 + \lambda_1$ dan $\lambda_3 = 1 - \lambda_2 = 1 + 2 - \lambda_2 = 3 - \lambda_1$.

$$\begin{aligned} \text{Jawab umum } [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] &= [\lambda_1, -2+\lambda_1, 3-\lambda_1] \\ &= [0, -2, 3] + \lambda_1[1, 1, -1]. \end{aligned}$$

Jadi secara khusus boleh kita ambil $\lambda_1 = 0$, jawab = [0, –2, 3] atau : $a = 0\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q} + 3\boldsymbol{r}$.

6.29. Buktikan aturan Cramer !

Bukti :

Susunan persamaan dapat kita tulis :

$$AX = B \text{ jadi } X = A^{-1}B = \frac{\text{adj}.A}{\det(A)} . B$$

atau :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{nk} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_k \\ \\ \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{atau } x_k = \frac{1}{\det.(A)} (A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_k)$$

untuk $k = 1, 2, \dots, n$.

Jelas bahwa : $b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}$ adalah determinan dari matriks A dengan mengganti kolom ke-k dengan konstan $b_1, b_2, \dots, b_n$, sebut determinan itu = D_k.

Jadi terbukti :

$$x_k = \frac{D_k}{D} \text{ ; asalkan } D = \det.(A) \neq 0.$$

6.30. Selesaikan dengan aturan Cramer (bila terpenuhi syarat-syaratnya) :

$$\text{(i)} \left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 5y & + & 2z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & 4z & = & 3 \\ 3x & - & 4y & - & 6z & = & 5 \end{array}\right\} \quad \text{(ii)} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 2z & + & 3 & = & y & + & 3x \\ x & - & 3z & = & 2y & + & 1 \\ 3y & + & z & = & 2 & - & 2x \end{array}\right\}$$

Penyelesaian :

Kita dapat menggunakan aturan Cramer bila r = n atau bila m = n dan det(A) $\neq$ 0.

(i) Karena jumlah persamaan m = jumlah anu n = 3, kita cari det(A), determinan matriks koefisien.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -10 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-1 \begin{vmatrix} -9 & 10 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = -46 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix}}{-46} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 17 & -8 & 0 \\ 26 & -19 & 0 \end{vmatrix}}{-46}$$

$$= \frac{2 \begin{vmatrix} 17 & -8 \\ 26 & -19 \end{vmatrix}}{-46} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}}{-46} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 5 & 17 & 0 \\ 9 & 26 & 0 \end{vmatrix}}{-46}$$

$$= \frac{2 \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 9 & 26 \end{vmatrix}}{-46} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}}{-46} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -4 \end{vmatrix}}{-46}$$

$$= \frac{-1\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -10 & -4 \end{vmatrix}}{-46} = 1$$

Jadi x = 5, y = 1, z = 1

(ii) Kita susun dahulu persamaannya sebagai :

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

jadi kita tidak dapat menggunakan aturan Cramer, jawab susunan persamaan tidak tunggal. Kita periksa r(A) dan r(A,B) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{H_{32}^{(-2)}}{\overset{H_{12}^{(-3)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(*)}{\overset{H_{31}^{(-1)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A) = r(A,B) = 2.$$

Kita selesaikan persamaan, dari (*) : $\begin{array}{rcrcrcl} 0x & + & 7y & + & 7z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}$

Dengan mengambil n – r = 3 – 2 = 1 parameter, misalnya y = λ kita peroleh z = –y = –λ dan x = 1 + 2y + 3z = 1 – λ.
Jawab umum : [x, y, z] = [1–λ, λ, –λ] = [1, 0, 0] + λ[–1, 1, –1].

6.31. Cara lain untuk memecahkan susunan persamaan linier adalah dengan melakukan transformasi elementer baris terhadap matriks lengkap (lihat pula Catatan 7). Dengan transformasi elementer baris itu kita hendak mengubah ke suatu bentuk matriks yang disebut ROW REDUCED ECHELON MATRIX.

Contoh (*)

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}\right\}$$

ditulis :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 11 \end{bmatrix} \overset{H_{21}^{(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{H_{21}^{(-1)}}{\overset{H_{12}^{(1)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks (*) adalah "Row Reduced Echelon". Jawab susunan persamaan : $y = 1$, $x = 3$.

(**) $$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 4x + 6y &= 12 \end{aligned}\right\}$$

ditulis :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \underset{H_{21}^{(-4)}}{\overset{H_{1}^{(1/2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1^{1}/_{2} & 3^{1}/_{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Terlihat pada baris 2 terjadi $0x + 0y = -2$
Tidak ada jawab.

(***) $$\left.\begin{aligned} x - y - z + w &= 0 \\ 3x - 2y - 3z + 3w &= 1 \\ 2x - y - 2z + 2w &= 1 \end{aligned}\right\}$$

ditulis : $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{H_{31}^{(-2)}}{\overset{H_{21}^{(-3)}}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{32}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{12}^{(1)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jelas : $y = 1$, $x - z + w = 1$ atau $x = 1 + z - w$ dimana z dan w sebarang.

6.32. Kita mengenal pula suatu metode untuk mencari solusi dari suatu susunan persamaan linier, yang dikenal dengan metode eliminasi Gauss. Sebagai contoh pandang susunan persamaan linier dengan 4 anu, x_1, x_2, x_3, dan x4 berikut :

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Dasar dari eliminasi Gauss ini adalah mereduksi suaunan 4 persamaan dengan 4 anu di atas menjadi susunan 3 persamaan dengan 3 anu dengan cara menggunakan salah satu persamaan untuk mengeliminasi salah satu anu dari 3 persamaan yang tinggal. Demikian seterusnya. Sesudah itu, kita lakukan substitusi kembali sehingga diperoleh solusi yang dicari. Eliminasi-eliminasi dikerjakan dengan transformasi elementer baris.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_1^{(1/2)} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1\frac{1}{2} & 1 & 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} H_{21}^{(-1)} \\ H_{31}^{(-3)} \\ H_{41}^{(-1)} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1\frac{1}{2} & 1 & 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6\frac{1}{2} & -1 & -6\frac{1}{2} & -4\frac{1}{2} \\ 0 & 2\frac{1}{2} & -4 & -3\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad H_2^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1\frac{1}{2} & 1 & 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6\frac{1}{2} & -1 & -6\frac{1}{2} & -4\frac{1}{2} \\ 0 & 2\frac{1}{2} & -4 & -3\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{32}^{(-6 1/2)} \\ \sim \\ H_{42}^{(-2 1/2)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1\frac{1}{2} & 1 & 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} H_3^{(-1)} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1^1/_2 & 1 & 2^1/_2 & 1^1/_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{32}^{(4)} \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1^1/_2 & 1 & 2^1/_2 & 1^1/_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_4^{(-1)} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1^1/_2 & 1 & 2^1/_2 & .1^1/_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Kita peroleh persamaan :

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 - 1^1/_2x_2 & + & x_3 & + & 2^1/_2x_4 & = & 1^1/_2 \\ x_2 & + & 0x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & + & 0x_4 & = & -2 \\ & & & & x_4 & = & 7 \end{array}\right\}$$

Dengan substitusi kembali diperoleh $x_4 = 7$, $x_3 = -2$, $x_2 = 6$, $x_1 = -5$.

Kita dapat juga tidak mengerjakan substitusi kembali, tetapi dengan transformasi elementer baris menjadikan nol semua (n – 1) elemen yang sekolom. Metode ini dikenal dengan METODE GAUSS JORDAN. Pada metode Gauss Jordan, hasil akhir dari transformasi elementer baris terhadap contoh di atas adalah:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$ dan solusi langsung dapat kita baca.

6.33. Coba manfaatkan matriks partisi untuk solusi susunan persamaan linier pada Contoh (6.32) di atas !

Penyelesaian :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

kita hendak memanfaatkan dua elemen nol pada vektor B. Kita lakukan partisi seperti di atas dan kita sebut sebagai :

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ O \end{bmatrix}$$

maka :

$Pu + Qv = W$ .... (*)

$Ru + Sv = 0 = 0 \rightarrow u = -R^{-1}Sv$ (bila $\det(R) \neq 0$)

Substitusi ke (*) : $-PR^{-1}Sv + Qv = W$

$(-PR^{-1}S + Q)v = W$

Berarti $v = (-PR^{-1}S + Q)^{-1}W$.

Untuk contoh di atas : $R^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$(-PR^{-1}S + Q) =$

$$-\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 & -13 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(-PR^{-1}S + Q)^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 18 & -47 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 18 & -47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$u = -r^{-1}Sv = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -5$, $x_2 = 6$, $x_3 = -2$, $x_4 = 7$.

6.8. SOAL-SOAL LATIHAN

6.34. Carilah jawab umum dan pilihlah sebuah jawab khusus dari susunan persamaan linier berikut :

(i)
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 8x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(ii)
$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(iii)
$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 5z + 4w &= 0 \\ 2x + 3y + 2z + 3w &= 0 \\ 4x + 7y - 8z + 11w &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Jawab :

(i) $\lambda[-8, 10, 11]$

(ii) nol

(iii) $\lambda[-19, 12, 1, 0] + \mu[6, -5, 0, 1]$

6.35. Carilah dimensi ruang jawab dari susunan persamaan linier :

$$\left.\begin{aligned} 2x - 4y + 7z + 4v - 5w &= 0 \\ 9x + 3y + 2z + 7v + w &= 0 \\ 5x + 2y - 3z + v + 3w &= 0 \\ 6x - 5y + 4z - 3v + 2w &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(Jawab : Dimensi 1).

6.36. Bila A $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Carilah vektor kolom $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

yang $\neq$ sehingga $Av = 5v$

(Jawab : tak ada).

6.37. Carilah matriks X yang bukan matriks nol sedemikian sehingga :

$$AXB = 0 \text{ bila } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.38. Carilah matriks P yang bukan matriks nol, sehingga untuk :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{berlaku } AP = 0$$

$$\text{dimana } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(Jawab) : } \begin{bmatrix} -2\lambda & -2\mu \\ \lambda & \mu \end{bmatrix}$$

6.39. Carilah harga k_1, k_2, dan k_3 yang tidak semua 0 dan memenuhi $k_1[2, 3, 1] + k_2[0, 2, 3] + k_3[2, 5, 4] = [0, 0, 0]$

(Jawab : $k_1 = k_2 = \lambda$, $k_3 = -\lambda$, λ sebarang).

6.40. Selain harga $x = y = z = 0$, harga-harga x, y, z yang manakah memenuhi persamaan matriks berikut :

$$x \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Jawab : $x = \lambda$, $y = 4\lambda$, $z = -3\lambda$, λ sebarang).

6.41. Carilah suatu susunan persamaan linier homogen yang ruang jawabnya dibentuk oleh : (i) $\boldsymbol{a} = [1, 1, 2]$; (ii) $\boldsymbol{a} = [2, 1, 0]$, $\boldsymbol{b} = [1, 0, 1]$; (iii) $\boldsymbol{a} = [1, 1, 2]$, $\boldsymbol{b} = [2, 2, 4]$.

6.42. Apakah susunan-susunan persamaan linier nonhomogen berikut mempunyai jawab? Bila ada jawab, carilah jawab umumnya dan pilihlah sebuah jawab khusus !

$$\text{(i)} \left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 6 \\ 4x + 6y + 2z &= 12 \\ 8x + 12y + 4z &= 24 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(ii)} \left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 6 \\ x + y + 2z &= 4 \\ 3x + 4y + 3z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{(iii)}\quad \left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z - 5w = 3 \\ x - y + 5z + 4w = 2 \\ 3x + 2y + 9z - w = 5 \end{array}\right\} \qquad \text{(iv)}\quad \left.\begin{array}{l} 4x + y = 0 \\ 3x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ 5x + y = 9 \end{array}\right\}$$

6.43. Carilah jawab susunan persamaan linier berikut dengan mempergunakan aturan Cramer (bila terpenuhi syarat-syaratnya) :

$$\text{(i)}\quad \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 12 \\ 3x + 6y + z = 42 \\ y + z = 5 \end{array}\right\} \qquad \text{(ii)}\quad \left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ y + z = 4 \end{array}\right\}$$

$$\text{(iii)}\quad \left.\begin{array}{l} 3x + 2y = z + 5 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{array}\right\} \qquad \text{(iv)}\quad \left.\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x - 3z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{array}\right\}$$

6.44. Carilah harga k, supaya susunan persamaan linier (dengan anu-anu x, y, z). (i) mempunyai jawab tunggal. (ii) tak mempunyai jawab. (iii) jawabnya banyak.

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{array}{l} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{array}\right\} \qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{array}{l} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array}\right\}$$

6.45. Carilah matriks P sedemikian sehingga APB = C bila

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

6.46. Carilah hubungan antara a, b, c, supaya susunan persamaan linier berikut mempunyai jawab :

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{array}\right\}$$

6.47. Carilah x, y, z, dari persamaan matriks :

$$x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(Jawab : $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$).

6.48. Selesaikan :
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right\}$$

(Jawab : $x = 2,\ \ y = 1,\ \ z = -1$)

6.49. Tulis $\boldsymbol{a}$ = [3, –3, 0, –5] sebagai kombinasi linier dari $\boldsymbol{p}$ = [1, 2, 1, 3], $\boldsymbol{q}$ = [5, 1, 2, 1], $\boldsymbol{r}$ = [4, –1, 1, –2].

JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

6.37. $\begin{bmatrix} \lambda & -2\lambda \\ \mu & -2\mu \end{bmatrix}$ λ dan μ sebarang.

6.41. (i) $\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ 2x & - & z & = & 0 \end{array}$

(ii) $x - 2y - z = 0$

(iii) $\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ 2x & - & z & = & 0 \end{array}$

6.42. (i) [3, 0, 0] + λ[1, 0, –2] + [0, 1, –3];
(ii) tak ada jawab;
(iii) [–2, 1, 1, 1, 0] + λ[–19, 6, 5, 0] + μ[–7, 13, 0, 5];
(iv) tak ada jawab;

6.43. (i) tak ada jawab
(ii) $x = -2,\ y = y = -1,\ z = 2$;
(iii) $x = 3,\ y = -1,\ z = 2$;
(iv) $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$

6.44. (a) $k \neq 1$ dan $k \neq -2$, $k = -2$, $k = 1$;
(b) $k \neq 3$, selalu mempunyai jawab, $k = 3$.

6.45. $\begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -1-2\lambda+4\mu+\alpha & \alpha \end{bmatrix}$; λ, μ, α sebarang.

6.49. $a = -2p + q + 0r$ atau $a = -p + 0q + r$.

ELIMINASI GAUSS

```
10 'METODE ELIMINASI GAUSS UNTUK PERSAMAAN LINIER
   SIMULTAN*"
20 'Enter banyak persamaan, koefisien, dan konstanta
40 PRINT:PRINT "BANYAK PERSAMAAN";:INPUT N
50 DIM A(N,N+1), B(N,N+1), X(N), NPIVROW(N,2),NPIVCOL(N,2)
160 PRINT:PRINT "ENTER KOEFISIEN DAN KONSTANTA SETIAP
   PERSAMAAN"
170 FOR K = 1 TO N
180 PRINT : PRINT "PERSAMAAN ";K: PRINT
190 FOR K = 1 TO N
200 PRINT " KOEFISIEN (";K;",";J;") =";: INPUT B(K,J)
210 NEXT J
220 PRINT:PRINT " KONSTANTA ";K;" = ";: INPUT B(K,N+1)
230 NEXT K
240 NC=N+1
250 PRINT
260 PRINT"BERIKAN NILAI MINIMUM PIVOT YANG
   DIPERKENANKAN";:INPUT EPS
270 PRINT CHR$(12)
280 DET=1
290 FOR K = 1 TO N
300 FOR J = 1 TO NC
310 A(K,J)=B(K,J)
320 NEXT J : NEXT K
330 PRINT:PRINT
350 PRINT"MATRIKS LENGKAP:"
360 GOSUB 2000
370 PRINT: INPUT"APAKAH MATRIKS SUDAH BENAR(Y/T)"; Q$:PRINT
380 IF Q$ ="Y" OR Q$ = "y" THEN 450
390 PRINT"BERIKAN POSISI ELEMEN YANG DIPERBAIKI:":PRINT
400 INPUT " NOMOR BARIS";NROW :INPUT " NOMOR KOLOM";NCOL
410 PRINT:INPUT " NILAI YANG BENAR"; B(NROW,NCOL):PRINT
420 GOTO 270
440 'Mulai dengan Prosedur Eliminasi Gauss
450 INPUT "INGIN MELIHAT HASIL STEP-BY-STEP (Y/T)";Q2$:PRINT
460 PRINT
480 'Gunakan strategi pivoting lengkap
```

```
490 MAXPIVOT = ABS(A(K,K))
500 NPIVROW(K,1)=K: NPIVROW(K,2)=K
510 NPIVCOL(K,1)=K: NPIVCOL(K,2)=K
520 FOR I = K TO N
530 FOR J = K TO N
540 IF MAXPIVOT > = ABS(A(I,J)) GOTO 580
550 MAXPIVOT=ABS(A(I,J))
560 NPIVROW(K,1)=K: NPIVROW(K,2)=I
570 NPIVCOL(K,1)=K: NPIVCOL(K,2)=J
580 NEXT J:NEXT I
590 IF MAXPIVOT > = EPS GOTO 610
600 PRINT"PIVOT LEBIH KECIL DARI";EPS;
    ".MATRIKS BOLEH JADI SINGULAR.":GOTO 910
610 IF NPIVROW(K,2)=K GOTO 690
620 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT"PIVOT BARIS:"
630 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT "PERTUKARAN BARIS";
640 FOR J = K TO NC
650 SWAP A(NPIVROW(K,2),J),A(K,J)
660 NPIVROW(K,1)=K: NPIVROW(K2)=I
670 NPIVCOL(K,1)=K: NPIVCOL(K2)=J
680 NEXT J:NEXT I
590 IF MAXPIVOT > = EPS GOTO 610
600 PRINT"PIVOT LEBIH KECIL DARI";EPS;
    ".MATRIKS BOLEH JADI SINGULAR.":GOTO 910
610 IF NPIVROW(K,2)=K GOTO 690
620 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT"PIVOT BARIS:"
630 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT "PERTUKARAN BARIS";
    NPIVROW(K,2);" AN ";K
640 FOR J = K TO NC
650 SWAP A(NPIVROW(K,2),J),A(K,J)
660 NEXT J
670 DET=DET*(-1)
680 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN GOSUB 2000
690 IF NPIVCOL(K,2)=K GOTO 770
700 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT"PIVOT KOLOM:"
710 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT "PERTUKARAN KOLOM ";
    NPIVCOL(K,2);" DAN ";K
720 FOR I = 1 TO N
730 SWAP A(I,NPIVCOL(K,2)),A(I,K)
740 NEXT I
750 DET=DET*(-1)
760 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT "LAKUKAN ELIMINASI:"
```

```
790 FOR I = K+1 TO N
800 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT "BAGI BARIS ";K;
    " DENGAN ";A(K,K)
810 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN PRINT "BAGI BARIS ";K;
    " DENGAN ";A(I,K) ;"DAN KURANGKAN DARI BARIS ";I
820 MULT = - A(I,K) ;"DAN KURANGKAN DARI BARIS ";I
820 MULT = - A(I,K)/A(K,K)
830 FOR J = NC TO K STEP -1
840 A(I,J) = A(I,J) + MULT * A(K,J)
850 NEXT J
860 IF Q2$="Y" OR Q2$="y" THEN GOSUB 2000
870 NEXT I
880 NEXT K
890 '
900 'Gunakan formula substitusi kembali
910 RANK=K-1 :PRINT"RANK =";RANK:NMR=N-RANK
920 IF RANK=N THEN X(N) = A(N,N+1) / A(N,N) :
    NCOUNT=N-1: GOTO 970
930 PRINT"PROGRAM MENJADIKAN ";NMR:' ANU MENJADI =1,"
940 PRINT"DAN REDUKSI PROBLEMA PENENTUAN ";RANK;" ANU."
950 FOR JJ=1 TO NMR : X(N+1-JJ) = 1: NEXT JJ
960 NCOUNT=RANK
970 FOR I = NCOUNT TO 1 STEP -1
980 SUM = 0
990 FOR J = I+1 TO N
1000    SUM = SUM + A(I,J) * X(I,I)
1030    NEXT I
1040    '
1050    'Mengubah urutan Anu
1060    FOR K=N TO 1 STEP -1
1070    SWAP X(NPIVCOL(K,2)), X(NPIVCOL(K,1)
1080    NEXT K
1090    '
1100    'Menghitung determinan matriks
1110    FOR I=1 TO N
1120    DET=DET*A(I,I)
1130    NEXT I
1140    PRINT
1150    PRINT:PRINT"NILAI DETERMINAN=";DET:PRINT
1200    PRINT
1210    PRINT
1320    END
```

```
2000    '***** Subrutin : Cetak matriks*********
2020    FOR KA = 1 TO N
2030    PRINT
2040    FOR J = 1 TO NC
2050    PRINT A(KA,J),
2060    NEXT J:PRINT: NEXT KA:PRINT
2070    PRINT
2080    FOR IPAUSE = 1 TO 3000 : NEXT
2090    RETURN
```