5 MATRIKS INVERS

5.1. MATRIKS INVERS

DEFINISI :

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ,,,, & a_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga AB = BA = I_n. Matrik B disebut invers matriks A, ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n.

Contoh (5.1) :

Carilah invers dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ maka berlaku $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bila dikalikan : $\begin{bmatrix} 2a_1 + a_3 & 2a_2 + a_4 \\ 4a_1 + 3a_3 & 4a_2 + 3a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

atau : $2a_1 + a_3 = 1$, $2a_2 + a_4 = 0$
$4a + 3a = 0$, $4a + 3a = 1$ dan bila kita selesaikan diperolah $a_1 = {}^3/_2$, $a_2 = -{}^1/_2$, $a_3 = -2$, $a_4 = 1$.

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} {}^3/_2 & -{}^1/_2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Catatan (1) :

Dapat diselidiki pada contoh di atas, bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Cara seperti di atas hanya baik untuk matriks yang berordo kecil, yaitu untuk n = 2. Untuk ordo-ordo yang lebih besar akan dibicarakan segera dalam bab ini.

Catatan (2) :

Ternyata bahwa matriks-matriks yang mempunyai invers adalah matriks-matriks yang nonsingular (determinannya $\neq 0$ atau ranknya $r = n$). Invers bila ada, tunggal (hanya satu)

Berlaku sifat :

(*) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(**) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5.2. MATRIKS ADJOIN (CLASSICAL ADJOINT) DAN INVERS

Pandang matriks $A = (a_{ij})$ di atas. Kita sebut kofaktor dari elemen a_{ij} sebagai A_{ij}, maka transpose dari matriks (A_{ij}) disebut MATRIKS ADJOIN dari A.

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh (5.2) :

Kita hendak mencari matriks adjoin dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Maka kofaktor dari kesembilan elemen dari A adalah sebagai berikut :

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18 \ , \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \ ,$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \ , \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \ ,$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 \ , \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \ ,$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10 \ , \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \ ,$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{Jadi adj. A} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Dengan pertolongan matriks adjoin kita dapat mencari invers suatu matriks, menggunakan rumus :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj.A}}{\det(A)} \text{, dengan syarat } \det(A) \neq 0. \text{ (Lihat Soal 5.15).}$$

Contoh (5.3) :

Pada Contoh 5.1, kita dapat mencari A^{-1} dengan menggunakan matriks adjoin sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{, maka } A_{11} = 3; \ A_{12} = -4; \ A_{21} = -1; \ A_{22} = 2.$$

$$\text{adj.A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Jadi } A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{2} & -{}^{1}/_{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh (5.4) :

Pada Contoh 5.2 kita dapat mencari A^{-1} sebagai berikut :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -36 - 10 - -46$$

$$\text{Jadi } A^{-1} = \frac{\text{adj.A}}{\det(A)} = \frac{1}{-46} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} {}^{9}/_{23} & {}^{11}/_{46} & {}^{5}/_{23} \\ -{}^{1}/_{23} & -{}^{7}/_{23} & {}^{2}/_{23} \\ -{}^{2}/_{23} & -{}^{5}/_{46} & {}^{2}/_{23} \end{bmatrix}$$

5.3. HUBUNGAN DENGAN TRANSFORMASI ELEMENTER

(a) Bentuk Normal Suatu Matriks

Bentuk matriks A, berukuran (m x n) dengan rank r > 0, selalu dapat diubah dengan transformasi elementer menjadi salah satu bentuk di bawah ini yang sering disebut bentuk normal.

I_r, $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$

dimana I_r adalah matriks identitas berordo r dan 0 adalah matriks nol.

Contoh (5.5) :

Ubahlah matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

menjadi bentuk normal, dan tunjukkan transformasi elementernya.

Petunjuk :

Kita usahakan mengubah semua elemen di bawah diagonal a_{11}, a_{22}, a_{33} menjadi nol, dengan transformasi elementer baris. Setelah itu dengan transformasi elementer kolom kita jadikan nol elemen-elemen di atas diagonal tersebut.

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{12}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}^{(-2)} \\ H_{31}^{(-5)} \\ \sim \\ H_{41}^{(1)} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{32}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{K_{32}^{(-1/2)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} K_2^{(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} K_{31}^{(-1/2)} \\ \sim \\ K_{21}^{(1)} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Catatan (3) :

Apabila kita mengalikan matriks elementer baris H (matriks yang didapat dari satu kali transformasi elementer baris terhadap matriks I) dengan suatu matriks A, maka HA = matriks hasil transformasi elementer terhadap A dari jenis H yang sama.

Contoh (5.6) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{H_{21}^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Matriks elementer $H_{21}^{(1)}(I)$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = H,terlihat bahwa

$$HA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Contoh (5.7) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{H_{12}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

$$H_{12}^{(-1)}(I_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } HA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Catatan (4) :

Misalkan K matriks elementer kolom (yang didapat dari satu kali transformasi elementer pada kolom dari matriks I). Maka AK = matriks hasil transformasi elementer kolom terhadap matriks A dari jenis K yang sama.

Contoh (5.8) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{K_{31}^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{sedangkan}$$

$$K_{31}^{(1)}(I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K$$

$$\text{Terlihat bahwa } AK = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Catatan (5) :

Matriks B disebut ekivalen dengan A(B ~ A), yaitu B diperoleh dari A dengan satu atau sederetan transformasi-transformasi elementer baris dan/ atau kolom dari A, maka selalu ada matriks P dan Q sedemikian sehingga PAQ = B, berdasarkan *Catatan (3)* dan (4) *di atas.*

Contoh (5.9) :

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

dan misalnya dilakukan transformasi elementer sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{H_{21}^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{K_{13}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Jadi A ~ B (atau B ~ A).

Sedangkan $H_{21}^{(1)}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan

$$K_{13}(I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sebut $H_{21}^{(1)}(I) = P$ dan $K_{13}(I) = Q$, ternyata bahwa :

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

(b) Mencari Invers dengan Transformasi Elementer

Matriks bujur sangkar A berordo n yang non-singular mempunyai bentuk normal I_n, maka selalu ada matriks-matriks bujur sangkar P dan Q sedemikian sehingga $PAQ = I_n$. P dan Q diperoleh seperti pada Contoh 5.9 di atas, dimana P didapat dari sederetan transformasi elementer baris dan Q dengan sederetan transformasi elementer kolom terhadap matriks I_n.

Contoh (5.10) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

kita hendak mencari P dan Q sedemikian sehingga PAQ = 1.

Kita gandengkan matriks I di muka A, akan kita jadikan nol lebih dahulu elemen-elemen di bawah diagonal utama, dengan transformasi elementer baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{21}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-2)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} H_{32}^{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_{3}^{(1/7)} \\ \sim \\ . \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -^3/_7 & ^1/_7 & ^1/_7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Di sini } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -^3/_7 & ^1/_7 & ^1/_7 \end{bmatrix},$$

lalu kita lanjutkan dengan transformasi elementer kolom dan menggandengkan I di bawah matriks segitiga atas tadi.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} K_{21}^{(-3)} \\ \sim \\ K_{31}^{(-2)} \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} K_{32}^{(-4)} \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Di sini $Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jelas terlihat PAQ =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -^3/_7 & ^1/_7 & ^1/_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Dapat dicatat bahwa :

$$\underset{H_3(^1/_7)(I)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ^1/_7 \end{bmatrix}} \underset{H_{32}^{(1)}(I)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{H_{31}^{(-2)}(I)\ .}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{H_{21}^{(-1)}(I)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = P \text{ dan}$$

$$\underset{K_{21}^{(-3)}}{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{K_{31}^{(-2)}(I)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{K_{32}^{(-4)}(I)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = Q$$

Jadi : $H_3^{(1/7)}(I) \cdot H_{32}^{(1)}(I) \cdot H_{31}^{(-2)}(I) \cdot H_{21}^{(-1)}(I) \cdot A,$
$K_{21}^{(-3)}(I) \cdot K_{31}^{(-2)}(I) \cdot K_{32}^{(-4)}(I) = 1.$

Dari PAQ = I kita peroleh $P^{-1}PAQQ^{-1} = P^{-1}IQ^{-1} \rightarrow A = P^{-1}Q^{-1} = (QP)^{-1}$ atau $A^{-1} = QP^{-1}$.

Maka pada contoh di atas : $A^{-1} = QP$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/7 & -11/7 & 10/7 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Catatan (6) :

Kita dapat pula mencari invers dengan hanya melakukan transformasi elementer baris. Setelah matriks A menjadi matriks segitiga atas, maka baris yang lebih bawah dapat kita pakai "menyapu" semua elemen di atas diagonal utama menjadi nol. Cara seperti ini sering disebut cara *Penyapuan.*

Contoh (5.11) :

Dari Contoh 5.10 di atas, kita dapat mencari invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right] \underset{H_{31}^{(-2)}}{\overset{H_{21}^{(-1)}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \overset{H_{32}^{(1)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \overset{H_{3}^{(1/7)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{H_{23}^{(-4)}}{\overset{H_{13}^{(-2)}}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/7 & -2/7 & -2/7 & 1 & 3 & 0 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 & 0 & 1 & 0 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{12}^{(-3)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2/7 & -11/7 & 10/7 & 1 & 0 & 0 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 & 0 & 1 & 0 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi PA = I atau $P = A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/7 & -11/7 & 10/7 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}$

5.4. MENCARI MATRIKS INVERS DENGAN SEKATAN (PARTISI)

Kalau matriks berukuran besar, kadang-kadang lebih mudah bila dikerjakan secara bertahap, dengan membagi matriks tersebut menjadi submatriks-submatriks (membuat sekatan/partisi).

Sebuah submatriks (matrik bagian) dari matriks A adalah suatu matrik yang diperoleh dari A dengan menghapuskan beberapa baris/kolom A (ataupun sama sekali tidak menghapuskannya, artinya A merupakan submatriks A sendiri).

Misalnya :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}$$

, misalnya bentuk submatriks (a, b) dengan menghapuskan baris 2, baris 3, dan kolom 3, ataupun $\begin{bmatrix} a & c \\ g & j \end{bmatrix}$ diperoleh dengan menghapuskan baris 2 dan kolom 2.

Apabila suatu matriks A kita pecah-pecah menjadi submatriks-submatriks dengan memberi sekatan-sekatan garis horizontal di antara dua baris dan garis vertikal di antara dua kolom, maka matriks A tadi dikatakan telah dipartisi.

Contohnya :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}$$

kita partisi misalnya sebagai

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & j \end{array}\right]$$

ataupun

$$\left[\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & j \end{array}\right] \quad \text{ataupun} \quad \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & j \end{array}\right]$$

dan lain-lain. Jadi kita mempunyai banyak cara untuk membentuk partisi-partisi dari suatu matriks.

Pemecahan

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \quad (*)$$

ataupun

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \quad (**)$$

bukan suatu partisi, sebab misalnya pada (*) garis vertikal tidak memisahkan seluruh kolom 1 dan 2 dan pada (**) sekarang matriks-matriks yang telah dipartisi

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

maka :

(1) Jumlah $A + B = \begin{bmatrix} P + T & Q + U \\ R + V & S + W \end{bmatrix}$

asalkan syarat-syarat penjumlahan matriks terpenuhi (artinya ukuran-ukuran $P = T$, $Q = U$, $R = V$, $S = W$).

(2) Perkalian $AB = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} PT + QV & PU + QW \\ RT + SV & RU + SW \end{bmatrix}$$

asalkan segala syarat untuk perkalian dan penjumlahan dapat dipenuhi.

Contohnya :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 7 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}(0 \quad 0) & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}(3) \\ (0 \quad 2)\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (7)\,(0 \quad 0) & (0 \quad 2)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (7)\,(3) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \\ (2 \quad 4) + (0 \quad 0) & (6) + (21) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix} \\ (2 \quad 4) & (27) \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 14 \\ 5 & 10 & 13 \\ 2 & 4 & 27 \end{bmatrix}$$

Perkalian dan penjumlahan seperti di atas berlaku pula untuk matriks partisi dengan ukuran-ukuran yang lain. Yang penting diperhatikan cara melakukan partisi supaya perkalian dapat dilakukan.

(3) Det(A) = det(P) det(S) – det(Q) det(R), (asalkan P, Q, R, S bujur sangkar). Pandang sekarang matriks bujur sangkar A berordo n yang mempunyai invers $A^{-1} = B$. Kita lakukan partisi sebagai berikut :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ (p \times p & (p \times q) \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ (q \times p) & (q \times p) \end{array}\right]$$

dimana $p + q = n$

Karena $AB = BA = I_n$ maka diperoleh :

(i) $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p$

(ii) $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$

(iii) $B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0$

(iv) $B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q$

Misalkan $B_{22} = L^{-1}$,

dari (ii) $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})L^{-1}$,

dari (iii) $B_{21} = -L^{-1}(A_{21}A_{11})^{-1}$,

dari (i) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$

$= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})$

$L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$

dan bila disubstitusikan ke (iv) :

$-L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})\, A_{12} + L^{-1}A_{22} = I_q \rightarrow L = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})\, A_{12}$

$= A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$.

Jadi harus diperhatikan bahwa A_{11} harus nonsingular.

Contoh (5.12) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hitunglah A^{-1} dengan partisi. A kita partisikan sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

berarti $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = (1\ 3)$, $A_{22} = (4)$.

$$A_{11}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ (dengan menggunakan matriks adjoin).

$$A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}A_{11}^{-1} = (1 \quad 3) \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (1 \quad 0)$$

$$L = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}\ A_{12}) = (4) - (1.3) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = (1)$$ dan

$L^{-1} = (1)$.

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\ L^{-1}\ (A_{21}A_{11}^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} (1) \quad (1 \quad 0)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}\ A_{12})\ L^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} (1) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B_{21} = -L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = (-1 \quad 0)$

$B_{22} = L^{-1} = (1)$

$$\text{Jadi } A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.5. INVERS KIRI DAN INVERS KANAN DARI MATRIKS YANG TIDAK BUJUR SANGKAR

DEFINISI :

Matriks A berukuran (m x n) disebut invers kiri, bila ada matriks B sedemikian sehingga BA = In dan disebut mempunyai invers kanan bila ada matriks C sedemikian sehingga $AC = I_m$.

Catatan (7) :

Matriks A_{mxn} hanya mempunyai invers kiri, bila ranknya r(A) = n dan mempunyai invers kanan bila r(A) = m.

Catatan (8) :

Ukuran dari invers kiri maupun kanan adalah (n x m).

Catatan (9) :

Kalau matriks A tersebut mempunyai invers, maka invers tersebut salah satu : Invers kiri atau invers kanan, hal ini jelas karena kalau A mempunyai invers, r(A) harus salah satu = n atau m.

Catatan (10) :

Invers kiri atau invers kanan tidak tunggal.

Contoh (5.13) :

$$\text{Carilah invers dari } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Ukuran } A = (3 \times 4).$$

Di sini r(A) = 3. Jadi A mempunyai invers kanan. Kita boleh mengambil suatu submatriks dari A yang nonsingular R berukuran (3 x 3) :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$ maka invers kanan dari A yaitu :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$ berukuran (4 x 3)

$$R^{-1} = {}^1/_3 \begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ jadi } A^{-1} = {}^1/_3 \begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kita boleh mengambil submatriks yang lain dari matriks A, misalnya :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$, asalkan submatriks tersebut nonsingular

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, kita tulis invers kanan dari A :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (perhatikan baris dimana harus kita tulis vektor baris nol dari A^{-1} tersebut).

Jadi invers kanan dari A tidak tunggal.

5.6. SOAL DAN PEMECAHANNYA

5.14. Matriks A adalah matriks bujur sangkar.

Buktikan :

(a) Invers dari matriks A (bila ada) adalah tunggal.

(b) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti :

(a) Misalkan B dan C adalah invers-invers dari A. Maka : $AB = BA = I$ dan $AC = CA = I$, sedangkan $BAC = (BA)C = IC = C$ dan $BAC = B(AC) = BI = B$. Berarti $C = B$. Atau invers dari A adalah tunggal. (Di sini kita memakai sifat asosiatif dari perkalian matriks).

(b) Kalau $B = A^{-1}$ maka $BA = AB = I$ . . . . . . (1)
Sedangkan B^{-1} mempunyai sifat $BB^{-1} = B^{-1}B = I$. . . . . . . (2)
Jadi mengingat sifat matriks invers yang tunggal dari (2) dan (1) dapat ditarik kesimpulan bahwa $B^{-1} = A$, atau $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) (*) $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$
(**) $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(B.B^{-1})A = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$.
Jadi $(B^{-1}A^{-1})$ adalah invers dari AB atau $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

5.15. Buktikan bahwa bila A adalah matriks bujur sangkar ordo n :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj.}A}{\det(A)}, \quad \det(A) \neq 0.$$

Penyelesaian :

Misalkan $A = (a_{ij})$ dan misalkan pula $A\,(\text{Adj.}A) = (b_{ij})$. Baris ke-i dari A adalah $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ dan karena adj.A adalah transpose dari matriks kofaktor-kofaktor dari A, kolom ke-j dari adj.A adalah hasil transpose dari baris ke-j dari matriks kofaktor A tersebut : $(A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn})$. Jadi elemen b_{ij} dari A. (adj.A) adalah :

$$B_{ij} = (_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ A_{jn} \end{bmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$$

Kita ingat sifat kofaktor (pada determinan Bab 4, Catatab 8) :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= |A| \text{ untuk } i = j. \\ &= 0 \quad \text{untuk } i \neq j. \end{aligned}$$

Berarti A.(adj.A) adalah sebuah matriks diagonal sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & |A| \end{bmatrix} = |A| \,.\, I$$

Dengan cara yang sama diperoleh (adj.A).A = |A| . I

Jadi, bila $|A| \neq 0$ maka $A \,.\, \dfrac{\text{adj.}A}{|A|} = \dfrac{\text{adj.}A}{|A|} \,.\, A = 1$

atau $A^{-1} = \dfrac{\text{adj.}A}{|A|}$

5.16. Carilah matriks adjoin dari :

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(ii) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

(i) $A_{11} = 1$, $A_{22} = 1$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = -1$, adj.A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

det(A) = –1 berarti $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $A_{11} = 4$, $A_{22} = 3$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = -6$

adj.A = $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan karena det(A) = $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

A matriks yang singular dan tidak mempunyai invers.

5.17. Carilah x dan y dari susunan persamaan linier berikut :

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$ dengan menggunakan invers dari matriks koefisien.

Penyelesaian :

Secara matriks, susunan persamaan di atas dapat ditulis

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$ atau $A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$.

Jadi $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

dan dari Soal 5.16 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

atau $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

atau x = 0, y = 1

5.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, cari :

(a) adj.A;
(b) det(A);
(c) A^{-1}.

Penyelesaian :

(a) $$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -10.$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Adj.A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $$\det(A) : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} -2 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 2$$

(c) $$A^{-1} = {}^{1}/_{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 74 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & -{}^{1}/_{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ {}^{7}/_{2} & -{}^{3}/_{2} & -{}^{1}/_{2} \end{bmatrix}$$

5.19. Carilah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Karena $\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0$

Maka A singular, jadi tidak mempunyai invers.

5.20. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, carilah adj.A dan selidiki

bahwa adj.(adj.A) = A.

Penyelesaian :

$A_{11} = d$, $A_{22} = a$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$,

jadi adj.A $= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ adj.(adj.A) $= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{T}$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

5.21. Ubahlah matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ ke bentuk normal N dan carilah matriks P dan Q sedemikian sehingga PAQ = N (bentuk normal).

Penyelesaian :

Untuk mencari P kita gandengkan A dengan I_3, lalu kita lakukan transformasi elementer baris untuk menjadikan nol elemen-elemen di bawah diagonal $a_{11} - a_{22} - a_{33}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right] \overset{H_1^{(1/2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{21}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-1)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5/2 \end{array}\right] \overset{H_2^{(1/2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3/4 \\ -3/2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5/2 \end{array}\right] \overset{H_{32}^{(-1)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3/4 \\ -5/4 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7/4 \end{array}\right] \text{ maka } P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -5/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari Q kita gandengkan I4 dan dilakukan transformasi elementer kolom.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} K_{31}^{(-1)} \\ \sim \\ K_{41}^{(-1/2)} \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/4 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{K_{32}^{(-1)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/4 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} 0 \\ K_{42}^{(3/4)} \\ \sim \\ K_{43}^{(-7/4)} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dapat diselidiki bahwa

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (I_3 0)$

5.22. Carilah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$

dengan cara penyapuan.

Peyelesaian :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 14 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{c} (a) \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 14 & 14 \end{array}\right] \overset{(b)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8 & 10 \end{array}\right] \overset{(c)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8 & 10 \end{array}\right] \overset{(d)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 5/2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 7/2 & 11 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right] \overset{(e)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 13 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 10 & -10 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \overset{(f)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -23 & 29 & -64/5 & -18/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -12 & 26/5 & 7/5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6/5 & 2/5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\text{Jadi } A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -{}^{64}/_5 & -{}^{18}/_5 \\ 10 & -12 & {}^{26}/_5 & {}^{7}/_5 \\ 1 & -2 & {}^{6}/_5 & {}^{2}/_5 \\ 2 & -2 & {}^{3}/_5 & {}^{1}/_5 \end{bmatrix}$$

Catatan :

Transformasi-transformasi elementer baris di atas adalah :

(a) $H_1^{(1/2)}$;

(b) $H_{21}^{(-3)}$, $H_{31}^{(-2)}$, $H_{41}^{(-4)}$;

(c) H23;

(d) $H_{12}^{(-2)}$, $H_{42}^{(3)}$;

(e) $H_{43}^{(-5)}$, $H_{23}^{(1)}$, $H_{13}^{(-7/2)}$

(f) $H_4^{(1/5)}$, $H_{14}^{(-18)}$, $H_{24}^{(7)}$, $H_{34}^{(2)}$

5.23. Carilah harga x, y, z, dan w yang memenuhi susunan persamaan linier berikut :

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z + 2w &= 1 \\ 3x + 6y + 5z + 2w &= 1 \\ 2x + 5y + 2z - 3w &= 0 \\ 4x + 5y + 14z + 14w &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

Persamaan-persamaan linier di atas dapat kita tulis AX = B yaitu :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Di sini dapat mencari jawab X dengan invers dari A; $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$.

Kita telah mendapatkan A^{-1} pada Soal 5.22, Jadi

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -^{64}/_5 & -^{18}/_5 \\ 10 & ^{26}/_5 & ^{7}/_5 \\ 1 & ^{6}/_5 & ^{2}/_5 \\ 2 & ^{3}/_5 & ^{1}/_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $x = 6$, $y = -2$, $z = -1$, $w = 0$.

5.24. Uraikan $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ sebagai perkalian dua buah matriks segitiga.

Penyelesaian :

Kita tahu bahwa dengan sederetan transformasi elementer terhadap matriks bujur sangkar A yang nonsingular, akan didapat matriks-matriks segitiga sedemikian sehingga $PAQ = I$.

Jadi $\quad P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = P^{-1}IQ^{-1}$

$\quad (P^{-1}P)A(QQ^{-1}) = P^{-1}Q^{-1}$ atau $A = P^{-1}Q^{-1}$

Dapat dicatat bahwa invers dari matriks segitiga, juga berupa matriks segitiga. Kita kerjakan :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \overset{H_1^{(1/4)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ^1/_4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{21}^{(-1)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-1)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ^1/_4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ ^1/_4 & 1 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ ^1/_4 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \overset{H_2^{(1/9)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ^1/_4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -^1/_{36} & ^1/_9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -^1/_9 & -^1/_{12} & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \overset{H_{32}^{(-3)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ^1/_4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -^1/_{36} & ^1/_9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -^1/_6 & -^1/_3 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \overset{H_3^{(1/4)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ^1/_4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ ^1/_{36} & ^1/_9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -^1/_{24} & -^1/_{12} & ^1/_4 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \overset{H_{34}^{(-3)}}{\sim}$$

Jadi P = $\begin{bmatrix} {}^1/_4 & 0 & 0 \\ -{}^1/_{36} & {}^1/_9 & 0 \\ -{}^1/_{24} & -{}^1/_{12} & {}^1/_4 \end{bmatrix}$

Untuk mencari Q :

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{K_{21}^{(-3)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi Q = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dengan matriks adjoin kita peroleh :

$$P^{-1} = 144 \begin{bmatrix} {}^1/_{36} & 0 & 0 \\ {}^1/_{144} & {}^1/_{16} & 0 \\ {}^1/_{144} & {}^1/_{48} & {}^1/_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = P^{-1}Q^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

5.25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Carilah A^{-1}, B^{-1} (gunakan matriks adjoin), dan C^{-1} (dengan cara penyapuan). Apakah hubungan antara A^{-1}, B^{-1}, dan C^{-1}?

Penyelesaian :

Dengan matriks adjoin, $A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

dan $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, sedangkan C^{-1} kita cari sebagai

berikut :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} H_{21}^{(-2/3)} \\ \sim \\ H_{43}^{(-2/3)} \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{3} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} H_{1}^{(1/3)} \\ H_{2}^{(-3)} \\ H_{3}^{(1/3)} \\ H_{4}^{(3)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \tfrac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & \tfrac{2}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & \tfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} H_{12}^{(-2/3)} \\ \sim \\ H_{34}^{(-4/3)} \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi $C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 10 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Ternyata bahwa $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$

Jadi dapat pula disimpulkan bahwa bila $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

Maka $C^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$

dan untuk buktinya dapat pembaca cari dari rumus-rumus matriks invers dengan sekatan, dimana A_{12} dan A_{21} diganti dengan matriks 0.

5.7. SOAL-SOAL LATIHAN

5.26. Carilah invers dari matriks-matriks berikut (bila ada).

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

5.27. Carilah adj.A dan A^{-1} bila :

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

5.28. Dengan mempergunakan matriks-matriks invers pada Soal 5.27. Carilah jawab susunan persamaan-persamaan berikut :

(i)
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y + z &= 0 \\ 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 0 \\ 3x + y &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} 4x + 5z &= 9 \\ y - 6z &= -4 \\ 6x + 8z &= 14 \end{aligned}$$

5.29. Carilah invers dari matriks AB bila

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.30. Apakah matriks-matriks berikut nonsingular ? Carilah inversnya !

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

5.31. Carilah bentuk normal matriks-matriks berikut :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

5.32. Ubahlah B ke bentuk normal N, dan carilah matriks-matriks P dan Q sedemikian sehingga PBQ = N, bila

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

5.33. Carilah matriks-matriks P dan Q sedemikian sehingga PAQ = I, bila

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

5.34. Setelah didapat P dan Q pada Soal 5.33. Carilah A^{-1}.

5.35. Carilah A^{-1} dengan cara penyapuan, bila A :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

5.36. Carilah dengan sekatan, invers dari matriks :

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5.37. Carilah jawab susunan persamaan linier berikut dengan mencari lebih dahulu matriks invers :

(i) $\left.\begin{aligned} x + y + z + w + u &= 1 \\ x + 2y + 3z + 4w + 5u &= 0 \\ x + 3y + 6z + 10w + 15u &= 0 \\ x + 4y + 10z + 20w + 35u &= 0 \\ x + 5y + 15z + 35w + 70u &= 0 \end{aligned}\right\}$

(ii) $\left.\begin{aligned} 10x + 7y + 8z + 7w &= 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5w &= 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9w &= 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10w &= 31 \end{aligned}\right\}$

5.38. Uraikan A menjadi perkalian 2 buah matriks segitiga, bila :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

5.39. Carilah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.40. Tunjukkan bawa $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

tidak mempunyai baik invers kiri maupun invers kanan.

5.41. Carilah salah satu invers kiri dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab :

5.26. (i) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{bmatrix}$

(iii) dan (iv) tidak ada.

(v) $\begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$

5.27. (i) $-1/2 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $-1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $1/2 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 \\ -36 & 2 & 24 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5.28. (i) $1/2$, $2\,1/2$, -3; (ii) 2, -6, 5; (iii) 1, 2, 1.

5.29. Tak ada.

5.30. Singular.

5.31. $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.32. $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.33. dan 5.34 :

(i) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -{}^{1}/_{2} & -{}^{5}/_{4} \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{2} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -{}^{8}/_{3} \\ -4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -{}^{1}/_{5} \\ 0 & 1 & -{}^{8}/_{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{5} & 0 & 0 \\ -{}^{2}/_{15} & {}^{1}/_{3} & 0 \\ -4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

5.35. (1) ${}^{1}/_{8} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & / & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

5.36. (i) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

5.37. $\begin{bmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ -10 & 30 & -35 & 19 & -4 \\ 10 & -35 & 46 & -27 & 6 \\ -5 & 19 & -27 & 17 & -4 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

5, −10, 10, −5, dan 1, 1, 1, 1.

5.38. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.39. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 \\ 3/7 & -2/7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.41. $\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}$

INVERS MATRIKS ORDO 2

```
10  'menghitung invers matriks ordo 2
10  PRINT"MATRIKS: ":PRINT
30  PRINT" A B "
40  PRINT" C C ":PRINT
50  PRINT " Harga A :";:INPUT A
70  PRINT " Harga B :";:INPUT B
90  PRINT " Harga C :";:INPUT C
110 PRINT " Harga D :";:INPUT D
130 DET=A*D-B*C
140 IF DET=0 THEN PRINT"TIDAK ADA INVERS":GO TO 220
150 P=D/DET
160 Q=-B/DET
170 R=-C/DET
180 S=A/DET
190 PRINT"MATRIKS INVERS : ":PRINT
200 PRINT USING"###.##";:PRINT USING"###.##";Q
210 PRINT USING"###.##";:PRINT USING"###.##";S
220 END
```

MATRIKS AJOIN

```
20  'program matriks ajoin
30  CLS:PRINT"MASUKKAN ORDO MATRIKS >1":PRINT
40  GOSUB 380
50  IF N=2 THEN GOSUB 970:GOTO 260
60  'Mencari submatriks minor
70  W = 1:'baris
80  E = 1:'kolom
90  FOR K = 1 TO N-1
100 FOR S = 1 TO N
110 IF K<W WHEN B(K,S)=A(K,S) :GOTO 130
120 B(K,S)=A(K+1,S)
130 NEXT S
140 NEXT K
150 FOR L = 1 TO N-1
160 FOR R = 1 TO N-1
170 IF L<E THEN 190
```

```
180 B(R,L)=B(R,L+1)
190 NEXT R
200 NEXT L
210 'menghitung determinan
220 GOTO 450
230 KOFA(E,W)=(-1)^(W+E)*DET
240 IF E<N THEN E=E+1:GOTO 90
250 IF W<N THEN W=W+1:GOTO 80
260 CLS:PRINT"MATRIKS AJOIN :":PRINT
270 FOR I=1 TO N
280 FOR I=1 TO N
290 PRINT USING"###.##";KOFA(I,J);
300 NEXT J
310 PRINT
320 NEXT I
330 NEXT I
330 END
380 '
390 INPUT"ORDO MATRIKS ";N
400 IF N<2 THEN 390
410 DIM A(N,N),B(N,N),KOFA(N,N)
420 PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS:":PRINT
430 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:PRINT"BARIS";I;
    "KOLOM";J;:INPUT A(I,J):NEXT J,I
440 RETURN
450 D=1:'Nilai awal determinan
460 'menghitung determinan/minor
470 M=N-1
480 GOSUB 540
490 GOSUB 640
500 GOSUB 760
510 GOSUB 880
520 GOTO 480
530 DET=D :GOTO 230
540 'mencari elemen terbesar
550 'B=terbesar pada baris K kolom L'
560 K=1:L=1:B=B(K,L)
570 FOR I = 1 TO M
580 FOR J = 1 TO M
590 IF ABS(B(I,J)) <= ABS(B) THEN 610
600 K=I :L=J: B=B(K,L)
```

```
610 NEXT J
620 NEXT I
630 DET=D :GOTO 230
640 'elemen terbesar diletakkan di baris ini
650 FOR J = 1 TO M
660 IF K = 1 THEN 680
670 P=B(1,J):B(1,J)=B(K,J) :B(K,J)=P
680 NEXT J
690 D=-D
700 FOR I = 1 TO M
710 IF N<3 THEN 40
720 IF L=1 THEN 740
730 P=B(I,1):B(I,1)=B(I,L):B(I,L)=P
740 NEXT I
750 D=-D : RETURN
760 'menolkan elemen sekolom pivot
770 FOR J = 1 TO M
780 B(1,J) = B(1,J)/B
790 NEXT J
800 D = D*B
810 FOR I = 2 TO M
820 R=B(I,1)
830 FOR J = 1 TO M
840 B(I,J) = B(I,J) - R*B(1,J)
850 NEXT J
860 NEXT I
870 RETURN
880 'mereduksi ukuran matriks
890 IF M=2 THEN D=D*B(2,2) : GOTO 530
900 M = M-1
910 FOR I = 1 TO M
920 FOR J = 1 TO M
930 B(I,J) = B(I+1,J+1)
940 NEXT J
950 NEXT I
960 RETURN
970 'Khusus ordo 2
980 KOFA(1,1)=A(2,2)
990 KOFA(1,2)=-A(1,2)
1000 KOFA(2,1)=-A(2,1)
1010 KOFA(2,2)=A(2,1)
1020 RETURN
```