

Outils Mathématiques TEE, 2nd semestre

Prof. Bijan Mohammadi

HAT203X

Contenu 1ère partie : HAT105X

- Rappels : fractions, développer, factoriser, identités remarquables.
- Chapitre1 : Equations: équations du 1er degré, systèmes d'équations, équations du 2nd degré
- Chapitre 2 : Dérivation: définition, exemples, opérations, Variations et courbes représentatives des fonctions
- Chapitre 3 : Fonctions usuelles: Fonction exponentielle, Fonction logarithme, Fonctions trigonométriques, fonctions hyperboliques
- Chapitre 4 : Calcul vectoriel et produit scalaire

Contenu 2ème partie : HAT203X

- Suites: modes de génération, arithmétiques et géométriques, sens de variation. Calcul de sommes.
- Primitive et intégrale d'une fonction d'une variable réelle.
Propriétés linéarité, positivité, relation de Chasles. Calcul masse de la Terre, signal sismographe.
- Equations différentielles linéaires du 1er ordre. Application radioactivité, Carbon 14.
- Courbes et surfaces. Représentation paramétrique d'une droite, équation cartésienne d'un plan, section et intersections (systèmes, lignes de niveau), coordonnées cylindriques et sphériques, Longueurs, surfaces, volumes des solides usuels

Suites

Suites

Les mesures sont souvent disponibles à certains instants. Il s'agit d'un ensemble d'informations discrètes.

En effet, considérons la discréétisation d'une fonction temporelle $y = f(t)$ pour $t \geq 0$ en des instants $t_n, n \in \mathbb{N}$.

Pour simplifier prenons $t_0 = 0$: l'instant initial.

On construit ainsi la suite $y_n = f(t_n)$.

Exemple: La discréétisation de $y = f(t) = 1/(t + 1)$ toutes les secondes permet la génération de la suite $y_n = 1/(n + 1)$:
 $\mathcal{S}_n : \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$

En pratique, on ne dispose pas de $f(t)$, mais des mesures y_n . Il est donc important de savoir étudier les suites directement sans besoin d'identifier la fonction génératrice.

Suites : récurrence

Les suites peuvent aussi être récurrentes, faisant intervenir l'information passée. Par exemple, si nous connaissons la fonction décrivant la vitesse d'une particule se déplaçant sur une ligne droite, ainsi que sa vitesse initiale:

$$y' = f(t), y'(0) = 1 \text{ m/s}$$

L'utilisation de l'approximation de la dérivée toutes les secondes ($t_n - t_{n-1} = 1s$, toute autre discrétisation est possible):

$$y'(t_n) \sim \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = y_n - y_{n-1}$$

permet de mettre en évidence la suite des positions de la particules:

$$y_n = y_{n-1} + f(t_n)$$

Par exemple, si la particule décélère suivant $1/(t+1)$, la position de la particule chaque seconde est donnée par la suite:

$$y_n = y_{n-1} + 1/(n+1) \text{ pour } n > 0 \text{ et } y(0) = 1$$

$$\mathcal{S}_n : \{1, 3/2, 11/6, \dots\}$$

Suites récurrentes arithmétique et géométrique

Deux classes importantes de suites récursives sont:

-les suites arithmétiques: $y_0 = a, \quad y_{n+1} = y_n + r, \quad a, r \in \mathbb{R}$

Le terme général d'une suite lie le $n^{i\text{eme}}$ terme de la suite à la première.

Vérifier que les suites arithmétiques s'écrivent: $y_n = a + nr$

-Les suites géométriques: $y_0 = a, \quad y_{n+1} = qy_n, \quad a, q \in \mathbb{R}$

Vérifier que le terme général d'une suite géométrique est: $y_n = aq^n$

La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci \mathcal{F}_n est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précédent:

$$\mathcal{F}_n : \{ F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \}$$

D'après wikipedia: La suite de Fibonacci apparaît sous de nombreuses formes biologique, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci. Chez les Astéracées, dans les inflorescences en capitule, la disposition des fleurons sur le réceptacle forme des spirales régulières, dextres et sénestres, qui suivent les règles de la phyllotaxie dans lesquelles on peut retrouver la suite de Fibonacci. Les abeilles domestiques ont une reproduction haplodiploïde : un œuf non fécondé donnera un mâle et un œuf fécondé donnera une ouvrière ou une reine. Ainsi, un mâle aura une mère, quand les ouvrières et reine auront une mère et un père. Par conséquent, le pedigree d'un mâle est constitué d'un parent, de deux grands-parents, de trois arrière-grands-parents, de cinq arrière-arrière-grands-parents, etc. ; il s'agit d'une suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci par Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n), \quad \text{avec} \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{a}$$

a est le nombre d'or (souvent noté φ).

On peut aussi utiliser cette approximation:

$$F_n = \text{arrondi}\left(\frac{1.618^n}{\sqrt{5}}\right)$$

Ces formules permettent de calculer F_n à n'importe quel rang sans calculer les étapes précédentes.

Suites : sens de variation

Il est possible d'étudier la variation locale de suite comme pour les fonctions en observant le signe de $y'_n \sim y_n - y_{n-1}$.

Ainsi, pour une suite arithmétique, on obtient:

$$y_n - y_{n-1} = a + nr - a - (n-1)r = r.$$

Une suite arithmétique est donc croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

De même, pour une suite géométrique, on obtient:

$$y_n - y_{n-1} = qy_{n-1} - y_{n-1} = (q-1)y_{n-1}.$$

Une suite géométrique est donc croissante si $q > 1$, décroissante si $q < 1$ et constante si $q = 1$.

Ceci peut se comprendre aussi par analogie avec l'équation $y' = \lambda y$ que nous verrons plus loin et dont la solution est $y(t) = y(0) \exp(\lambda t)$.

Suites : convergence

En plus de leur comportement local, on s'intéresse aussi souvent à leur comportement asymptotique (ou leur convergence lorsque $n \rightarrow \infty$).

Exemple: $y_n = (n - 1)/(n^2 - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
car $y_n = (n - 1)/((n - 1)(n + 1)) = 1/(n + 1)$.

On peut aussi utiliser la variation de la suite (analogie avec sa dérivée). En effet, dans notre exemple, on a toujours $y_n > 0$ et $y_n - y_{n-1} = -1/(n^2 + n) < 0$. La suite est donc strictement décroissante et bornée inférieurement par zéro.

Suites : convergence et fonction génératrice

Si on connaît la fonction génératrice de la suite ($y_n = f(t_n)$), il est plus aisé d'étudier le comportement de $f(t \rightarrow \infty)$, en utilisant notamment le théorème des gendarmes:

Si on connaît deux fonctions telles que $g(t) \leq f(t) \leq h(t)$ et si $g(t)$ et $h(t)$ ont la même limite en un point donné, alors $f(t)$ admet en ce point la même limite: $f(t)$ est encadrée par $g(t)$ et $h(t)$.

Ex. Exprimer la suite $y_n = f(t_n)$ g  n  r  e  e en $t_n \in \mathbb{N}^*$ par $f(t) = (-1)^t/t$. Que peut-on dire de sa limite en bornant $f(t)$ par $g(t) = -1/t$ et $h(t) = 1/t$.

Suites : somme, moyenne, écart-type

Une autre information intéressante est la somme (ou le cumul) des termes de la suite jusqu'à un rang donné: $S = \sum_{i=0}^n y_i$.

Nous utiliserons cette information plus loin pour le calcul approché des intégrales.

Ex: cumul de la quantité de pluie journalière en mm sur 30 jours.

On déduit de cette information la moyenne et l'écart-type qui sont deux quantités statistiques fondamentales:

$$\mu_n = S/n \text{ et } \sigma_n = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (y_i - \mu)^2 \right)^{1/2}$$

Ex: moyenne de la quantité de pluie journalière et la dispersion des observations autour de cette moyenne.

Application à l'analyse de risques

Si les données historiques d'un mois donné sont normalement distribuées autour de μ , alors on pourra dire, par exemple, qu'il y a 5% de chance qu'il tombe moins de $\mu - 2\sigma$ ou plus de $\mu + 2\sigma$ mm de pluie dans le mois (environ 2 jours sur le mois en question).

On décrit ainsi la probabilité d'occurrence d'événements extrêmes.

Inversement, on peut dire qu'il y a 95% de chance qu'il tombe en moyenne entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$ mm de pluie (les autres 28 jours).

Calculer μ et σ pour Montpellier et comparer votre analyse aux historiques de précipitations observées.

Primitive et intégrale d'une fonction d'une variable réelle

Primitive et intégrale d'une fonction d'une variable réelle

Primitive:

$$\int u'(x)dx = u(x) + C$$

est définie à une constante additive près car la dérivée d'une constante est nulle.

Intégrale:

$$\int_a^b u'(x)dx = u(b) - u(a)$$

est un scalaire et correspond à l'aire entre le graphe de la fonction $u(x)$ et l'axe des x (ou la droite $y = 0$).

Exemples simples

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int_1^2 x dx = [\frac{x^2}{2}]_1^2 = 2 - 1/2 = 3/2$$

$$\int_2^3 x dx = [\frac{x^2}{2}]_2^3 = 9/2 - 4/2 = 5/2$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

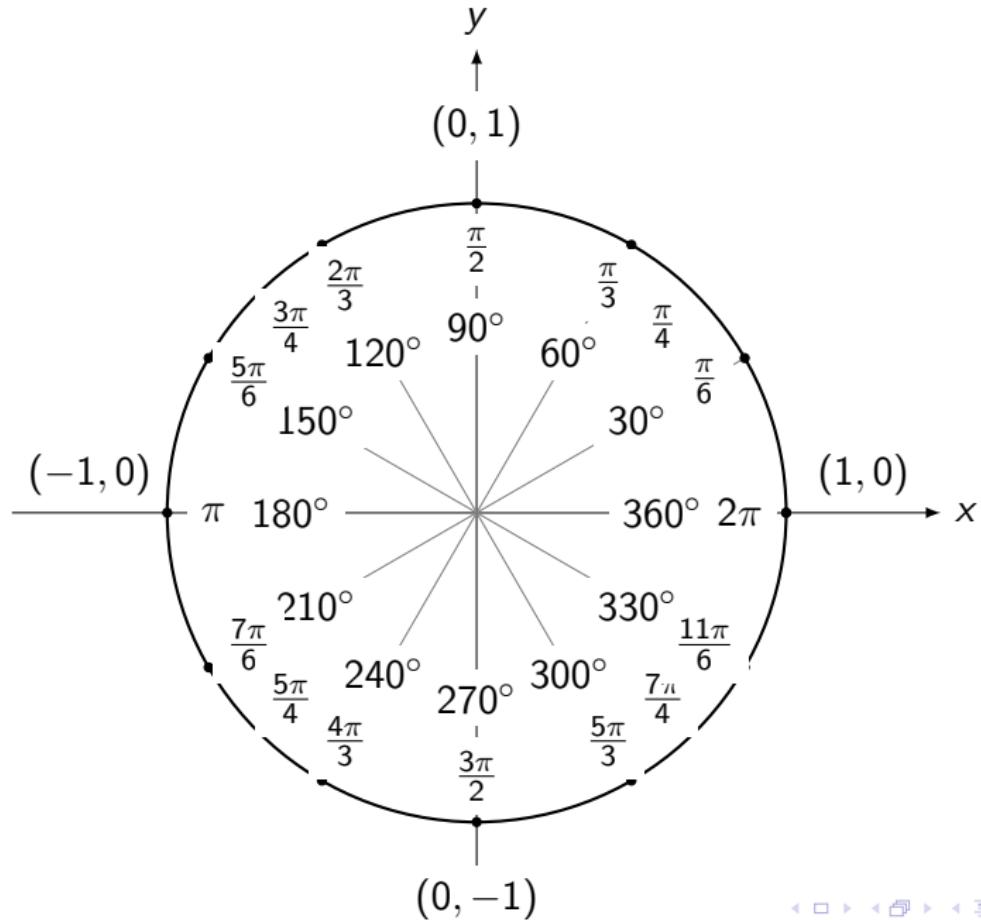
$$\int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi} = \sin(-\pi/2) - (\sin(\pi)) = -1 - 0$$

A inclure dans A4 aide-mémoire.

Cercle trigonométrique



Propriétés

Linéarité:

$$\int (\lambda u(x) + \mu v(x)) dx = \lambda \int u(x) dx + \mu \int v(x) dx$$

pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Positivité: Si $u(x) \geq 0$ alors $\int u(x) dx \geq 0$.

Si on décompose $u(x) = u_+(x) + u_-(x)$ avec $u_+(x) \geq 0$ et $u_-(x) \leq 0$, alors $\int u(x) dx = \int u_+(x) dx + \int u_-(x) dx$ avec $\int u_+(x) dx \geq 0$ et $\int u_-(x) dx \leq 0$.

Relation de Chasles (comme pour les vecteurs):

$$\int_a^b u(x) dx = \int_a^c u(x) dx + \int_c^b u(x) dx$$

pour tout a, b et c .

Voir calcul masse de la terre par couches.

Application aux exemples simples

$$\int (2x + 3)dx = \int 2xdx + \int 3dx = x^2 + 3x + C$$

$$\int_1^2 (2x + 3)dx = [x^2]_1^2 + [3x]_1^2 = (4 - 1) + (6 - 3) = 6$$

$$\int 2 \sin(x)dx = -2 \cos(x) + C$$

$$\int_0^\pi 2 \sin(x)dx = 2[-\cos(x)]_0^\pi = 2(-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = 4$$

$$\int (2 \sin(x) + \cos(x))dx = -2 \cos(x) + \sin(x) + C$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} (2 \sin(x) + \cos(x))dx = 1$$

D'autres propriétés

Décomposition de u en parties paire p et impaire i :

$$\int_a^b u(x)dx = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b i(x)dx$$

Primitive d'une fonction paire est impaire.

Primitive d'une fonction impaire est paire.

$$\int_{-a}^a i(x)dx = 0$$

$$\int_{-a}^a p(x)dx = 2 \int_0^a p(x)dx$$

Intégration par parties

L'opération inverse de la dérivation de produit de fonctions s'appelle intégration par parties:

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \int (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x) + C$$

On peut, par linéarité, aussi écrire:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx + C$$

Exemple:

$$\int x \cos(x) = \int (x \sin(x))'dx - \int \sin(x)dx = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

où $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$.

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) = -1 + 1 = 0$$

Changement de variable

L'opération inverse de la dérivation d'une fonction composée s'appelle intégration par changement de variable:

$$\int u'(v(x))v'(x)dx = \int (u(v(x)))'dx = (u(v(x))) + C$$

Exemple:

$$\int \cos(x^2)2xdx = \int (\sin(x^2))'dx = \sin(x^2) + C$$

$$\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2}} \cos(x^2)2xdx = \sin(x^2)|_{-\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2}} = 0$$

Exercice

$$\begin{aligned}& \int_{-\pi}^{3\pi/2} (3x^2 \cos(x^3) + x \exp(x)) dx \\&= \int_{-\pi}^{3\pi/2} 3x^2 \cos(x^3) dx + \int_{-\pi}^{3\pi/2} x \exp(x) dx\end{aligned}$$

Changement de variable + IPP:

$$\begin{aligned}&= \int_{-\pi}^{3\pi/2} (\cos(x^3))' dx + [x \exp(x)]_{-\pi}^{3\pi/2} - \int_{-\pi}^{3\pi/2} 1 \exp(x) dx \\&= [\cos(x^3)]_{-\pi}^{3\pi/2} + [x \exp(x)]_{-\pi}^{3\pi/2} - [\exp(x)]_{-\pi}^{3\pi/2} \\&= \cos(27\pi^3/8) - \cos(\pi^3) + (3\pi/2) \exp(3\pi/2) + \pi \exp(-\pi) - \\&\quad \exp(3\pi/2) + \exp(-\pi)\end{aligned}$$

Exercice

$$\int_{-\pi}^{\pi} -2 \sin(x) \exp(\cos(x)) dx = 0$$

car la fonction est impaire (à vérifier).

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin(x)) \exp(\cos(x)) dx \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} (\exp(\cos(x)))' dx \\ &= 2[\exp(\cos(x))]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2(\exp(\cos(\pi)) - \exp(\cos(-\pi))) = 2(\exp(\cos(\pi)) - \exp(\cos(\pi))) = 0 \end{aligned}$$

Sismographe

Un sismographe permet de mesurer l'amplitude d'une secousse quelle que soit sa fréquence.

Le sismographe peut être modélisé par une masse m suspendue à un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 .

L'autre extrémité du ressort est accrochée à un support horizontal mobile.

Le mouvement est amorti par une force de frottement de type fluide de norme proportionnelle à la vitesse de la masse et de sens opposé à celle-ci ($\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ avec λ le coefficient de frottement). La masse du ressort est négligeable et la loi de Hooke est supposée vérifiée (force proportionnelle au déplacement).

Lorsqu'une secousse se produit, elle applique sur le support mobile une modulation sinusoïdale de la forme $x_s = a_s \cos(\omega t)$, où a_s est l'amplitude de la secousse et ω_s sa pulsation. On notera g l'accélération de la pesanteur.

<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/index.php>

Sismographe

Les oscillations du sismographe sont décrites par l'équation différentielle d'ordre 2 (à admettre):

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 a_s \cos(\omega t)$$

avec $\omega_s = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre de la masse et γ le taux d'amortissement.

Nous allons nous intéresser à un régime particulier où le frottement est négligeable et la pulsation propre de la masse très petite devant celle de la secousse. L'équation devient alors:

$$\ddot{x} = \omega^2 a_s \cos(\omega t)$$

En intégrant deux fois en temps, on obtient d'abord, $\dot{x} = \omega a_s \sin(\omega t)$ (car la vitesse initiale est nulle), puis $x(t) = -a_s \cos(\omega t) + C = a_s(1 - \cos(\omega t))$ car la position initiale de la masse est $x(0) = 0$. On mesure ainsi l'amplitude $a_s = \max(|x(t)|)/2$ du séisme car $0 \leq |1 - \cos(\omega t)| \leq 2$.

Intégration approchée : somme partielle d'une suite

Il est possible d'approcher la valeur d'une intégrale:

$$I = \int_a^b u'(x)dx = u(b) - u(a)$$

par la somme finie de la suite $v_i = u'(x_i)$, $i = 0, \dots, N$:

$$I \approx \sum_{i=0}^N u'(x_i) \Delta x$$

où $x_{i=0, \dots, N}$ est un échantillonnage de l'intervalle $[a, b]$ en $N + 1$ points, avec $x_0 = a$, $x_N = b$ et $\Delta x = (b - a)/N$.

C'est l'aire définie par la fonction en escalier $v(x) = v_i$ pour $x \in [x_i, x_i + \Delta x[$.

Nous verrons des exemples d'utilisation de cette formule.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Nous allons appliquer systématiquement la démarche suivante pour trouver la solution des EDL du 1er ordre.

Les solutions de $y'(t) = a(t)y(t) + f(t)$, $t \geq 0$ s'écrivent comme la somme de LA solution homogène + UNE solution particulière:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

avec

$$y_h(t) = C \exp(A(t)) \text{ et } y_p(t) = D(t) \exp(A(t))$$

où

$$A(t) = \int a(t)dt, \quad D(t) = \int f(t) \exp(-A(t))dt$$

où les constantes des primitives sont mises à zéro et C une constante que l'on identifie grâce à la condition initiale $y(0) = y_0$.

Pourquoi $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Considérons y_1 et y_2 , solutions de l'EDL:

$$y'_1(t) = a(t)y_1(t) + f(t)$$

$$y'_2(t) = a(t)y_2(t) + f(t)$$

La linéarité permet d'écrire:

$$(y_1 - y_2)'(t) = a(t)(y_1 - y_2)$$

Ainsi, la différence de deux solutions vérifie l'équation homogène:

$$y' = a(t)y.$$

Et donc n'importe quelle solution s'écrit comme somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution de l'équation complète.

Par ailleurs, on a $\log(y_h) + c = \int dy_h/y_h = \int a(t)dt$

Ce qui donne l'expression $y_h = C \exp(\int a(t)dt)$

Application avec $a(t) = a$ et $f(t) = f$ constants

$$y'(t) = 3y(t) + 2, \quad y(0) = 0$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

avec

$$y_h(t) = C \exp(A(t)) \text{ et } y_p(t) = D(t) \exp(A(t))$$

où

$$A(t) = \int 3dt = 3t, \quad D(t) = \int 2 \exp(-3t)dt = \frac{-2}{3} \exp(-3t)$$

et $C = \frac{2}{3}$ est identifiée grâce à la condition initiale $y(0) = 0$.
La solution générale est: $y(t) = \frac{2}{3} \exp(3t) - \frac{2}{3}$

Vérification

On vérifie que $y_h(t) = C \exp(3t)$ est solution de l'équation homogène $y'(t) - 3y(t) = 0$.

On vérifie que $y_p(t) = (\frac{-2}{3} \exp(-3t)) \exp(3t) = \frac{-2}{3}$ est solution de $y'(t) - 3y(t) = 2$.

Un 1er exemple avec $a(t)$ et $f(t)$ variables

$$y'(t) + ty(t) = 2t, y(0) = 1.$$

On met sous forme standard: $y'(t) = -ty(t) + 2t, y(0) = 1$.

On a $a(t) = -t$ donc $y_h(t) = C \exp(-t^2/2)$

et $y_p(t) = D(t) \exp(-t^2/2)$ avec

$$D(t) = \int 2t \exp(t^2/2) dt = 2 \exp(t^2/2) + \alpha$$

Par technique de changement de variable.

On prend $\alpha = 0$ pour simplifier car il suffit de prendre une des primitives.

Pour vérifier qu'on a bien calculé, il suffit de dériver $D(t)$ pour retrouver $2t \exp(t^2/2)$.

Ainsi, la solution

$$y(t) = C \exp(-t^2/2) + 2 \exp(t^2/2) \exp(-t^2/2) = C \exp(-t^2/2) + 2$$

Enfin, on trouve C grâce à $y(0) = 1 = C + 2$ donc $C = -1$.

Un 2eme exemple avec $a(t)$ et $f(t)$ variables

$$y'(t) + \cos(t)y(t) = \cos(t), y(1) = 4.$$

On met sous forme standard:

$$y'(t) = -\cos(t)y(t) + \cos(t), y(1) = 4.$$

$$a(t) = -\cos(t) \text{ donc } y_h(t) = C \exp(-\sin(t))$$

$$\text{et } y_p(t) = D(t) \exp(-\sin(t)) \text{ avec}$$

$$D(t) = \int \cos(t) \exp(\sin(t)) dt = \exp(\sin(t)) + \alpha$$

Par technique de changement de variable.

On prend $\alpha = 0$ pour simplifier car il suffit de prendre une des primitives.

Pour vérifier qu'on a bien calculé, il suffit de dériver $D(t)$ pour retrouver $\cos(t) \exp(\sin(t))$.

Ainsi, la solution $y(t) =$

$$C \exp(-\sin(t)) + \exp(\sin(t)) \exp(-\sin(t)) = C \exp(-\sin(t)) + 1$$

Enfin, on trouve C grâce à $y(1) = 4 = C \exp(-\sin(1)) + 1$ donc

$$C = 3 \exp(\sin(1)).$$

Un 3eme exemple avec $a(t)$ et $f(t)$ variables

$$y'(t) + \frac{2}{1+t}y(t) = t^3, y(0) = 0.$$

On met sous forme standard: $y'(t) = -\frac{2}{1+t}y(t) + t^3, y(0) = 0.$

$$a(t) = -\frac{2}{1+t} \text{ donc } y_h(t) = C \exp(-2 \log(1+t)) = \frac{C}{(1+t)^2}$$

On rappelle que $\int \frac{dt}{1+t} = \log(1+t) + c$ et $\alpha \log(\beta) = \log(\beta^\alpha)$.

$$\text{et } y_p(t) = D(t) \exp(-2 \log(1+t)) = \frac{D(t)}{(1+t)^2} \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} D(t) &= \int t^3 \exp(2 \log(1+t)) dt = \int t^3 (1+t)^2 dt \\ &= \int t^3 (1+2t+t^2) dt = \int (t^3 + 2t^4 + t^5) dt \\ &= t^4/4 + 2t^5/5 + t^6/6 + \alpha \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégration.

On prend $\alpha = 0$ pour simplifier car il suffit de prendre une des primitives.

Pour vérifier qu'on a bien calculé, il suffit de dériver $D(t)$ pour retrouver $t^3 + 2t^4 + t^5$.

Ainsi, la solution $y(t) = \frac{C}{(1+t)^2} + (t^4/4 + 2t^5/5 + t^6/6) \frac{1}{(1+t)^2}$

Enfin, on trouve C grâce à $y(0) = 0 = C$.

Radioactivité, Carbon 14

On a vu cette question lors de l'étude des fonctions d'une variable.
Une matière radioactive se désintègre au cours du temps suivant:

$$y(t) = y(0) \exp(-\lambda t)$$

Cette formule est la solution de l'EDL:

$$y'(t) = -\lambda y(t), \quad y(0) = y_0$$

On cherche toujours la solution sous la forme: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
avec

$$y_h(t) = C \exp(A(t)) \text{ et } y_p(t) = 0$$

où

$$A(t) = \int -\lambda dt = -\lambda t$$

et $C = y_0$ est identifiée grâce à la condition initiale $y(0) = y_0$.
La solution générale est donc: $y(t) = y_0 \exp(-\lambda t)$

Suites d'observations et modélisation par EDL: mélange

Un récipient de volume V égal à un litre est rempli d'eau jusqu'à raz-bord. À partir de l'instant $t = 0$, on déverse un colorant dans le récipient, avec un débit constant d égal à un centimètre cube par seconde. On considère que le mélange s'effectue parfaitement et instantanément. On note $y(t)$ la concentration de colorant dans le récipient à l'instant t .

En considérant la variation de la suite y_n des concentrations à chaque seconde, trouver l'équation différentielle pour $y(t)$. En déduire l'expression de la concentration en colorant dans le récipient en fonction du temps.

Suites d'observations et modélisation par EDL: mélange

$$V = 1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3, d = 1 \text{ dm}^3 \text{s}^{-1}$$

Bilan : $y_{n+1} - y_n = d\Delta t$ avec $\Delta t = 1 \text{ s}$

Si Δt est petit, $(y(t + \Delta t) - y(t))/\Delta t$ est une approximation de $y'(t)$.

L'équation différentielle est $y'(t) = d$, dont la solution est aisée à calculer: $y(t) = d t + C$ avec $C = 0$ car $y(0) = 0$ (pas de colorant initialement). La concentration croît linéairement en fonction du temps, mais ne peut dépasser la valeur de 1.

Suites d'observations et modélisation par EDL: dépollution

On injecte dans un bassin un produit dépolluant à vitesse constante $v(l/s)$ avec une concentration μ (en g/l). Une partie du produit est éliminé par extraction. On note $y(t)$ sa quantité (en g) présent dans le bassin à l'instant t . On suppose que sur un intervalle Δt petit, la quantité extraite est proportionnelle (par un coefficient $k > 0$) à Δt et à la quantité du produit présente.

Etudier la variation de la suite y_n entre les instants t et $t + \Delta t$.

En déduire que la fonction $y(t)$ est solution de l'équation différentielle : $y' + ky = \mu v$. Trouver son expression pour la condition initiale $y(0) = 0$.

Application numérique: $\mu = 60g/l$, $v = 0.1l/s$ et $k = 2s^{-1}$.

Tracer le graphe de $y(t)$ et vérifier si la quantité reste inférieure à $5g$ par sécurité.

Suites d'observations et modélisation par EDL: dépollution

Bilan: $y_{n+1} - y_n = y(t_n + \Delta t) - y(t_n) = (-ky(t_n) + \mu v)\Delta t$

En divisant par Δt et en supposant Δt petit,

$(y_{n+1} - y_n)/\Delta t$ est une approximation de $y'(t)$.

On trouve l'équation $y'(t) + ky(t) = \mu v$.

L'unité de μv est $(g/I)(I/s) = g/s$ qui est donc homogène à une vitesse et exprime la vitesse d'apport du produit.

L'équation différentielle à coefficient constant a comme solution la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière (constante dans ce cas):

$$y(t) = C \exp(-kt) + \frac{\mu v}{k}$$

La constante $C = -\frac{\mu v}{k}$ est trouvée grâce à la condition initiale $y(0) = 0$.

$$y(t) = (1 - \exp(-kt)) \frac{\mu v}{k}$$

Suites d'observations et modélisation par EDL: dépollution

La fonction est strictement croissante. Sa dérivée est donnée par l'équation (pas besoin de la calculer donc):

$y' = -ky + \mu v = \exp(-kt)$ $\mu v > 0$ et tend asymptotiquement vers $\mu v/k = 3$.

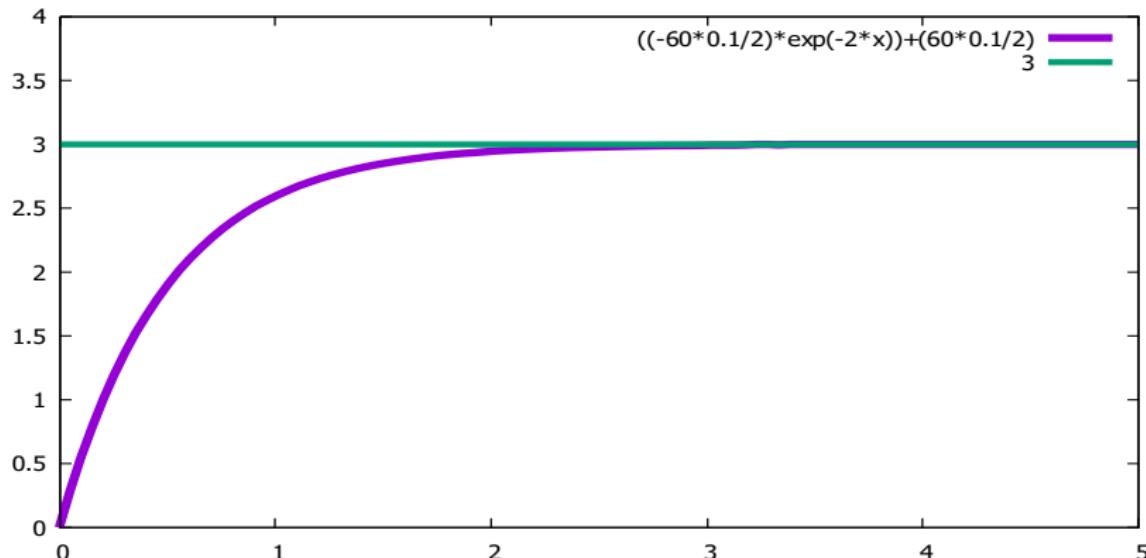


Figure: La fonction $y(t)$ pour $t \geq 0$ est strictement croissante avec $y(0) = 0$ et bornée asymptotiquement par $\mu v/k = 3$.

Trajectoire dans le plan d'une particule avec rebond

On considère une table de billard de côté $1m$ (pour simplifier) centrée en $(x, y) = (0, 0)$ avec les côtés parallèles aux axes. La table a 4 trous aux 4 coins.

On considère une boule située au centre en $t = 0$ et se déplaçant avec une vitesse constante de $v = (0, 1m/s)$. On néglige les dissipations (frottement,...).

Au bout de quel temps T_c la boule touche le bord et où ?

Si la boule rebondit suivant la loi de Snell-Descartes, exprimer la suite de ses positions en $t_n = nT_c$.

Calculer la longueur parcourue comme l'intégrale de la vitesse sur la durée et comparer à la valeur trouvée en utilisant la suite des positions.

Mêmes questions avec $v = (1m/s, 1m/s)$.

Courbes et surfaces

Droites et plans

Nous avons vu l'équation d'une droite dans le plan (\mathbb{R}^2):

$$ax + by = c.$$

Le cas $b \neq 0$ lie les coordonnées x et y par la relation:

$$y = -(a/b)x + (c/b).$$

Le cas $b = 0$ correspond à une droite verticale passant par $x = c/a$. Mais elle ne représente pas une fonction.

Il est possible de représenter, de la même façon, un plan dans \mathbb{R}^3 :

$$P : ax + by + cz = d.$$

L'intersection de deux plans 'non parallèles': $P_1 : ax + by + cz = d$

et $P_2 : a'x + b'y + c'z = d'$ définit alors une droite dans \mathbb{R}^3 :

P_1 et P_2 sont non parallèles si il n'existe pas de réel λ tel que:

$$(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$$

On peut aussi représenter une droite sous forme paramétrique

connaissant $A : (x_A, y_A, z_A)$, un de ses points, et un vecteur

directeur $\vec{u} = (a, b, c)$:

$$x = x_A + ta, \quad y = y_A + tb, \quad z = z_A + tc \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Détermination d'un plan dans R^3

Un plan est défini de façon unique par trois points non alignés. Cette information est équivalente à la donnée d'un des points et de deux vecteurs directeurs non colinéaires, ou bien d'un des points et d'un vecteur normal au plan. Le vecteur normal est le produit vectoriel des deux vecteurs directeurs.

Comme pour la droite, le plan peut être représenté de façon paramétrique grâce aux deux vecteurs directeurs $\vec{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$ et le points $A : (x_A, y_A, z_A)$:

$$x = x_A + tx_1 + sx_2, \quad y = y_A + ty_1 + sy_2, \quad z = z_A + tz_1 + sz_2$$

avec $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

Faire un schéma et trouver l'équation du plan passant par les points $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ en utilisant les 3 définitions.

Intersections de plans

Comme pour les droites, on peut chercher l'intersection de 3 plans quelconques. Les plans ne doivent pas être parallèles, même pas 2 d'entre eux. Sinon il n'y a pas d'intersection bien sur.

De même, il n'y a pas de solution si on considère plus de 3 plans indépendants.

On a donc 3 équations à 3 inconnus. On dit que les équations sont linéairement indépendantes: on ne peut pas exprimer une d'elle comme combinaison linéaire de deux autres.

Ex. Les plans $P_1 : \{x + y + z = 1\}$, $P_2 : \{x - y + z = -1\}$ et $P_3 : \{x + z = 0\}$ ne sont pas indépendantes, car l'équation de P_3 est combinaison linéaire de celles de P_1 et de P_2 .

Intersections de plans: systèmes d'équations linéaires et forme matricielle

On peut mettre ces 3 équations sous forme matricielle:

$AX = b$ avec $X(x, y, z) = A^{-1}b$ est l'intersection des 3 plans.

Ex. L'intersection des plans $P_1 : \{2x = 1\}$, $P_2 : \{3y = -1\}$ et $P_3 : \{z/2 = 1/2\}$ est le point $X = (1/2, -1/3, 1)$ et la matrice $A = \text{diag}(2, 3, 1/2)$ et le second membre $b = (1, -1, 1/2)$.

Intersections entre une surface quelconque et un plan: ligne de niveau

On peut, grâce aux cartes de randonnées type IGN, connaître les variations de dénivelé et la raideur des pentes. Ces cartes disposent d'un ensemble de lignes courbes plus ou moins parallèles, plus ou moins serrées. Ces lignes s'appellent des lignes de niveau et correspondent à l'intersection entre le plan $z = \text{donné}$ et la surface de la terre ou la topographie $z = f(x, y)$.

Exemple d'intersections entre une bosse et un plan

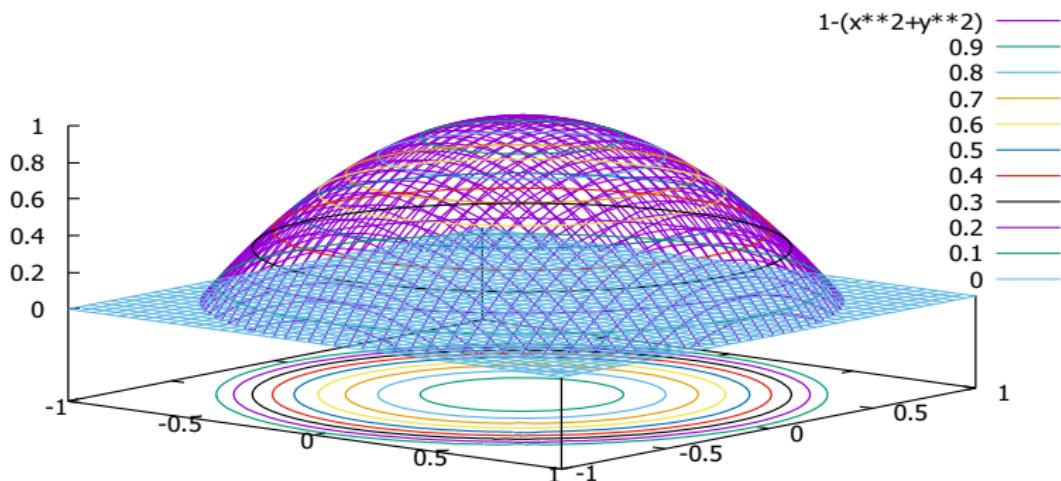


Figure: Lignes de niveau définies par les coupes de la surface
 $z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ avec des plans $z = c$. Tracer cette figure avec gnuplot avec la commande: `splot [-1:1] [-1:1] [0:1] 1-(x**2+y**2), 0.` Les lignes iso-niveaux sur le fond (pour $z = 0$) sont les projections des coupes (intersection entre la surface et les plans $z = c$).

Exemple d'intersections entre une bosse et un plan

On constate que $1 - (x^2 + y^2) = c$ définit les points (x, y) tels que: $x^2 + y^2 = 1 - c$ et que cette équation est l'équation d'un cercle de rayon $1 - c$. En particulier, au sol ($z = 0$) on a la ligne de niveau $x^2 + y^2 = 1$: le cercle unité.

Si l'image était alongée dans une direction, on chercherait une forme $z = f(x, y) = 1 - (\alpha x^2 + \beta y^2)$ (voir Ellipsoïdes).

D'autres exemples d'intersections entre surfaces fondamentales et plans

$g(x,y) : \text{splot } [0:5] [0:5] \ x^{**2}+y$

$i(x,y) : \text{splot } [-10:10] [-10:10] \ x^{**2}*y$

$f(x,y) : \text{splot } [-10:10] [-10:10] \ x^{**2}-y^{**2}$: convexe en x
et concave en y

$h(x,y) : \text{splot } [-10:10] [-10:10] \ x+y$

$f(x,y) : \text{splot } [-10:10] [-10:10] \ x^{**2}-y^{**2}$

D'autres exemples d'intersections entre surfaces fondamentales et plans

```
gnuplot> splot [-5:5] [-5:5] sqrt(x**2+y**2)
```

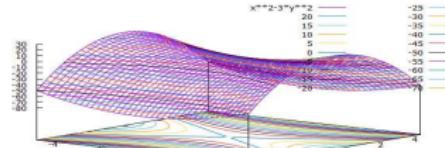
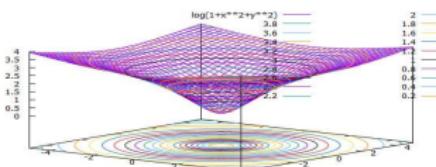
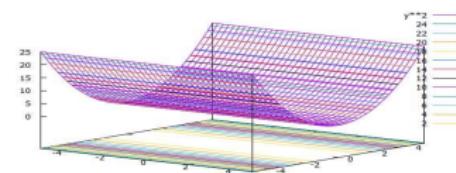
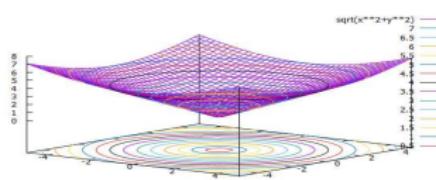
si on fait une coupe le long de $y = 0$ on retrouve la fonction $z = |x|$.

```
gnuplot> splot [-5:5] [-5:5] y**2
```

La coupe de la surface est invariante en x .

```
gnuplot> splot [-5:5] [-5:5] log(1+x**2+y**2)
```

```
gnuplot> splot [-5:5] [-5:5] x**2-3*y**2
```



Commandes Gnuplot et Python

Pour afficher les courbes de niveau sur gnuplot. Aller dans
3D/Contours/Contours on Both.

Augmenter le nombre de contours: Aller dans
3D/Contours/Number of Contours.

On peut utiliser d'autres logiciels ou librairies.

Sous Python :

<https://matplotlib.org/3.1.0/gallery/mplot3d/surface3d.html>

Dérivation de fonctions à deux variables

Pour calculer la dérivée partielle par rapport à une variable, on considère les autres variables comme des constantes.

Pour ne pas se tromper, remplacer y par c avant de dériver par rapport à x et inversement. Et, après dérivation remplacer la constante par la variable.

IL FAUT TOUJOURS COMMENCER PAR VERIFIER QU'ON A LE DROIT DE DERIVER PAR RAPPORT A x et y.

$$f_1(x, y) = x + xy^2$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 + y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 + 2xy$$

$$f_2(x, y) = \sin(x \cos(xy))$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \cos(x \cos(xy)) (\cos(x, y) - x y \sin(xy))$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \cos(x \cos(xy)) (-x^2 \sin(xy))$$

Dérivation de fonctions à deux variables

$$f_3(x, y) = x^y + xy + 1$$

Rappel: $x^a = \exp(a \log(x))$

On écrit f_3 sous forme: $f_3(x, y) = \exp(y \log(x)) + xy + 1$ avant de commencer.

Cette fonction est définie pour $x > 0$ uniquement.

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{y}{x} \exp(y \log(x)) + y = \frac{y}{x} x^y + y = yx^{y-1} + y$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \log(x)x^y + x$$

Extréma de fonctions à deux variables

$f_1(x, y) = x^2 + y^2$ a un minimum ou maximum en $(x, y) = (0, 0)$

car,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y = 0$$

et c'est un minimum car les dérivées secondes sont strictement positives et la fonction convexe.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 2 > 0$$

$f_2(x, y) = x^2 - y^2$ a un minimum ou maximum en $(x, y) = (0, 0)$

car,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2y = 0$$

et c'est ni un minimum, ni un maximum, mais un point-selle car les dérivées secondes sont de signes opposés:

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = -2 < 0$$

Extréma de fonctions à deux variables

$f_3(x, y) = x + y^2$ n'a pas de minimum ou de maximum car,

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = 2y = 0 \implies y = 0$$

f_3 tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Extréma de fonctions à deux variables

$$f_4(x, y) = x^{-2} + y^{-2} + x^2 + y^2$$

$f_4(x, y)$ n'est pas définie en $x = 0$ ou $y = 0$: tous les points des axes x et y . Elle est dérivable en dehors de ces points.

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = -2x^{-3} + 2x = x(-2x^{-4} + 2) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } -2x^{-4} + 2 = 0$$

f_4 n'y est pas définie en $x = 0$.

$$\text{Et } -2x^{-4} + 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

De même,

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = -2y^{-3} + 2y = y(-2y^{-4} + 2) = 0 \implies y = 0 \text{ ou } -2y^{-4} + 2 = 0$$

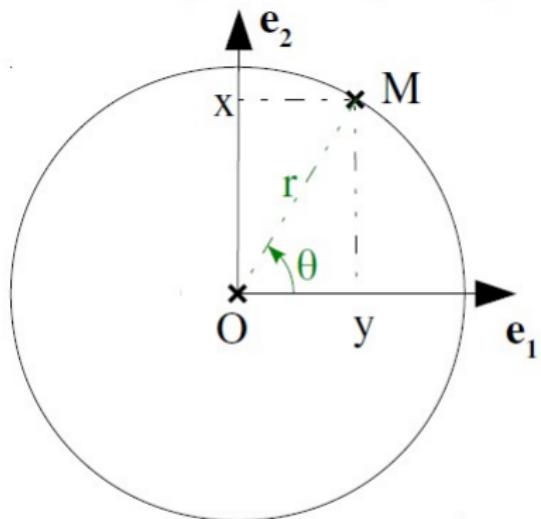
f_4 n'y est pas définie en $y = 0$.

$$\text{Et } -2y^{-4} + 2 = 0 \Leftrightarrow y^4 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

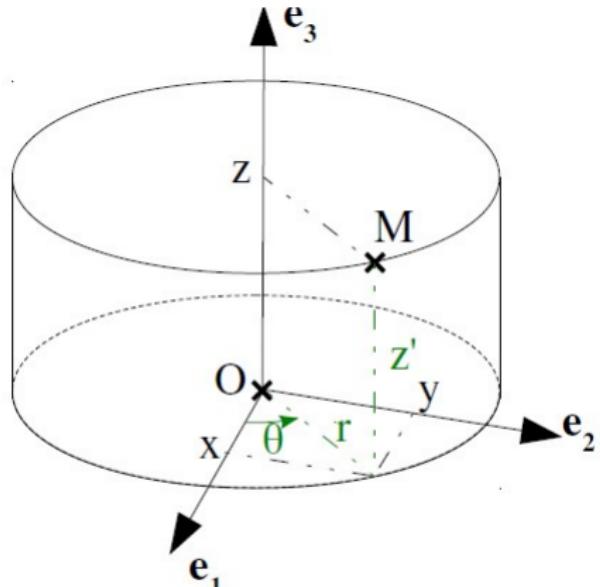
$f_4(x, y)$ a des minima ou maxima en 4 points $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$.

Pour voir si c'est un min, un max ou point-selle, il faut calculer les dérivées secondes et regarder leurs signes en ces 4 points.

Coordonnées cylindriques



Coordonnées polaires



Coordonnées cylindriques

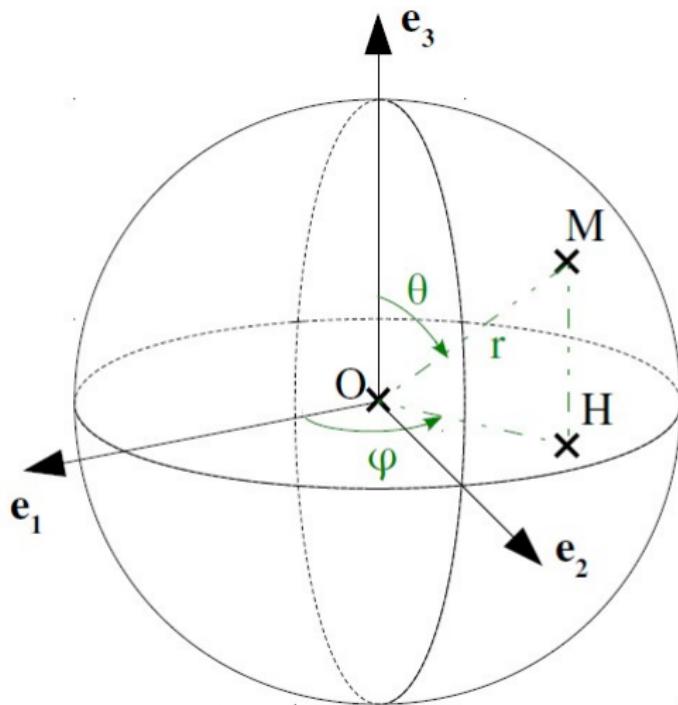
Calcul du volume d'un cylindre

Nous connaissons le volume d'un cylindre (R, H): $V = \pi R^2 H$

On peut retrouver cette formule en intégrant l'unité élémentaire volumique $dV = r \ dr \ d\theta \ dz$ en coordonnées cylindriques entre les bornes de variations des variables: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z \leq H$:

$$\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R r \ dr \ d\theta \ dz = \left(\frac{r^2}{2}\right)|_0^R \ \theta|_0^{2\pi} \ z|_0^H = \pi R^2 H$$

Coordonnées sphériques



Coordonnées sphériques

Calcul du volume de la terre

Nous connaissons le volume d'un sphère de rayon R : $V = 4/3 \pi R^3$

On peut retrouver cette formule en intégrant l'unité élémentaire volumique $dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$ en coordonnées spéhriques entre les bornes de variations des variables: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \left(\frac{r^3}{3}\right)|_0^R (-\cos(\theta))|_0^\pi \varphi|_0^{2\pi} \\ &= \frac{R^3}{3} (1 + 1) 2\pi = 4/3 \pi R^3 \end{aligned}$$

Calcul approché du volume de la terre

Nous voulons calculer ce volume de façon approchée en utilisant des sommes finies de suites, sans passer par les calculs de primitives.

$$V \approx \left(\sum_{i=0}^{N_r} r_i^2 \Delta r \right) \left(\sum_{j=0}^{N_\theta} \sin(\theta_j) \Delta \theta \right) \left(\sum_{k=0}^{N_\varphi} \Delta \varphi \right)$$

avec $\Delta r = R/N_r$, $\Delta \theta = \pi/N_\theta$ et $\Delta \varphi = 2\pi/N_\varphi$.

Calcul approché du volume de la terre en coordonnées cartésiennes

Si $(x_i, y_j, z_k) = (-R + i\Delta x, -R + j\Delta y, -R + k\Delta z) \in [-R, R]^3$ un échantillonnage uniforme en $(N+1)^3$ points:

$$V \approx \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \chi_{r \leq 0}(x_i, y_j, z_k) \Delta v$$

où $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ est le volume élémentaire avec $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2R/N$ et $\chi_{r \leq 0}(x_i, y_j, z_k) = 1$ si $r = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2} \leq R$ et 0 sinon.

Une discréétisation/échantillonnage en 64^3 mène à une erreur relative de 2.3% avec l'approximation cartésienne et de 0.3% en coordonnées sphériques.

Ceci est liée au fait que le volume élémentaire est fonction du rayon en sphérique et que le bord est mieux défini.

Calcul du volume de tranches de la terre

Considérons la variable z allant de $-R$ à R . Le volume de la tranche de forme cylindrique, entre z et $z + dz$, avec dz petit et de rayon r_z ($r_z^2 = R^2 - z^2$), est $\pi r_z^2 dz$. Le volume de la terre est la somme des volumes des tranches:

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - h^2) dh = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Le volume d'une calotte entre $z = D \leq 2R$ et $z = 2R$ est:

$$V_D = \int_{R-D}^R \pi(R^2 - h^2) dh = \frac{\pi D^2(3R - D)}{3}$$

Et, on retrouve $V_{2R} = V$.

Calcul de la masse de la terre par couches

ρ_1, ρ_2, ρ_3 : densités volumiques de la graine (de rayon R_1), le noyau (entre les rayons R_1 et R_2) et le manteau (entre les rayons R_2 et R) (rechercher les valeurs numériques).

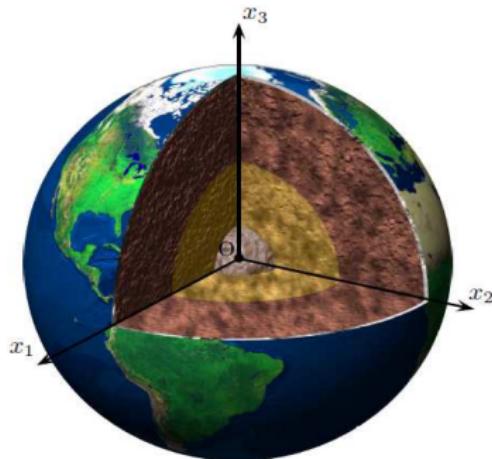
$$M = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \rho_3 V_3$$

Par Chasles:

$$V_1 = 4/3\pi R_1^3$$

$$V_2 = 4/3\pi(R_2^3 - R_1^3)$$

$$V_3 = 4/3\pi(R^3 - R_2^3)$$



Moment d'inertie de la terre

Le moment d'inertie I peut être vu comme l'effet de masse d'un objet lors de sa rotation à vitesse angulaire ω :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 mr^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}I\omega^2$$

Ainsi, pour la même énergie cinétique, un objet qui a un moment d'inertie plus faible, tournera plus vite. I est calculé par intégration volumique du carré de la distance d de chaque point de l'objet à l'axe de rotation:

$$I = \int_{Terre} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{Terre} \rho d^2 dx dy dz = \int_{Terre} d^2 dM$$

avec dM la variation massique. En coordonnées sphériques, on a:

$$I = \int_{Terre} \rho (r \sin(\theta))^2 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \int_{Terre} \rho r^4 \sin^3(\theta) dr d\theta d\varphi$$

Cette intégration est compliquée à cause de $\sin^3(\theta)$ (besoin de IPP). Voyons si on peut faire plus simple.

Moment d'inertie par sommation sur les tranches de la terre

Considérons la variable z allant de $-R$ à R . Le volume de la tranche de forme cylindrique, entre z et $z + dz$, avec dz petit et de rayon r_z ($r_z^2 = R^2 - z^2$), est $\pi r_z^2 dz$. Le moment d'inertie de la terre est la somme des moments des tranches:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^R \rho \pi (R^2 - h^2)^2 dh \\ &= \frac{\pi \rho}{2} \left(R^4 h - \frac{2}{3} R^2 h^3 + \frac{1}{5} h^5 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{8\pi\rho R^5}{15}. \end{aligned}$$

On a supposé la densité volumique ρ constante.

On constate que le calcul aurait mené au même résultat pour toute autre tranchisation, horizontale par exemple, plutôt que verticale.

Moment d'inertie de la terre et ellipsoïde d'inertie

Supposons la densité volumique ρ constante. Les moments d'inertie au centre O d'une boule homogène par rapport aux trois axes sont égaux:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}(I_{Ox} + I_{OY} + I_{OZ}) = \frac{1}{3} \int_{Terre} [(y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) + (x^2 + y^2)] dM \\ &= \frac{2}{3} \int_{Terre} (x^2 + y^2 + z^2) dM = \frac{2}{3} \int_{Terre} r^2 dM \end{aligned}$$

La masse d'une boule homogène de rayon r est $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, la variation massique $dM = \rho 4\pi r^2 dr$. Nous avons donc:

$$I = \frac{2}{3} \int_0^R r^2 (\rho 4\pi r^2 dr) = \frac{8}{15} \pi R^5 \rho$$

Pour une boule homogène, le moment d'inertie est le même quelque soit l'axe de rotation (voir Ellipsoïde d'inertie).