#### O Exercice 01:

⇒ Soit f la fonction définie sur R+ par:

$$f(2) = \frac{-1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x^2 - 5| - 1}; \text{ si } x \neq 2$$
.

- 1)- Déterminer  $D_f$ , puis calculer  $\lim_{x\to +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ .
- 2)- Montrer que f est continue en  $x_0 = 2$ .

#### O Exercice 02:

⇒ On considère la fonction f définie par :

$$f(2)=4$$
 et  $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$ , si  $x \neq 2$ .

- 1)- Déterminer  $D_f$  .
- 2)- Montrer que f est continue en  $x_0 = 2$ .
- 3)- a)- Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R} \{-1\}), f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}$ .
  - 6)- Justifier que f est continue sur chacun des intervalles  $]-\infty,-1[$  et  $]-1,+\infty[$  .

#### O Exercice 03:

⇒ On considère la fonction f définie par :

$$f(-1) = \frac{-1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1+x^3}, \text{ si } x \neq -1$$
.

- 1)- a)- Déterminer  $D_f$  .
  - 6)- Calculer  $\lim_{x\to 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ .
- 2)- a)- Vérifier que :  $(\forall x \in D_f)$ ,  $f(x) \approx \frac{2x-1}{(1-x)(1-x+x^2)}$ .
  - 6)- En déduire que f est continue en  $x_0 = -1$ .

# O Exercice 04:

⇒ On considère la fonction f définie par :

$$f(1) = a \text{ et } f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x + 3} - 2}{1 - x^2}, \text{ si } x \neq 1 \text{ Où } a \in \mathbb{R}.$$

- 1)- Déterminer  $D_f$  , puis calculer  $\lim_{x \to \infty} f(x)$  .
- 2)- Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en  $x_0 = 1$ ?



#### O Exercice 05:

⇒ Soit f la fonction définie par :

$$f(1) = \frac{4}{3}$$
 et  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{x} - 2}$ ; si  $x \ne 1$ .

- 1)- a)- Justifier que  $D_f = \mathbb{R}^+$ .
  - 6)- Montrer que f est continue en  $x_0 = 1$ .
- 2)- a)- Justifier que f est continue sur chacun des intervalles [0;1[ et  $]1;+\infty[$  .
  - 6)- En utilisant ce qui précède , montrer que f est continue sur  $\mathbb{R}^+$  .

#### O Exercice 06:

⇒ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x - 2}; & x \ge 2 \\ \frac{3}{3 - x}; & x < 2 \end{cases}.$$

- 1)- a)- Justifier que  $D_f = \mathbb{R}$  .
  - 6)- Montrer que f est continue en  $x_0 = 2$ .
- 2)- a)- Justifier que f est continue sur  $]-\infty; 2[$  et  $[2;+\infty[$  .
  - 6)- En utilisant ce qui précède , montrer que f est continue sur  $\mathbb R$  .

#### O Exercice 07:

 $\Rightarrow$  On considère la fonction f définie sur  $\mathbb R$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3 + \sin x + \cos x} - 2}{x}; & x > 0 \\ ax + \sqrt{x^2 + x + 1}; & x \le 0 \end{cases}; Ou \ a \in \mathbb{R}.$$

- 1)- Calculer  $\lim_{x \to \infty} f(x)$  et  $\lim_{x \to \infty} f(x)$ .
- 2)- Montrer que f est continue à droite en 0.
- 3)- a)- Montrer que f est continue sur  $]-\infty;0]$  et  $]0;+\infty[$ .
  - 6)- La fonction f est-elle continue sur  $\mathbb R$  ? Justifier votre réponse .

#### O Exercice 08:

⇒ Soit f la fonction définie sur R+ par:

$$f(1) = a \text{ et } f(x) = \frac{x^2 + x - 6\sqrt{x} + 4}{(x-1)^2}; \text{si } x \neq 1 ; Où a \in \mathbb{R}$$
.

 $\checkmark$  Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue sur  $\mathbb{R}^+$  .

#### O Exercice 09:



✓ Montrer que l'équation (E):  $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$  admet une solution unique α dans L'intervalle ]1;2[.

## O Exercice 10:

⇒ On considère la fonction f définie sur R par:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$
.

- 1)- Montrer que f est strictement croissante sur  $\mathbb R$  .
- 2)- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique a dans  $\left| \frac{-1}{2}; 0 \right|$ .
- 3)- Calculer  $f\left(\frac{-1}{4}\right)$ , puis en déduire un encadrement de a d'amplitude 0,25.
- 4)- Montrer que  $\sqrt{a+1} = \frac{-2a}{a+1}$ , puis en déduire que  $a < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ .

#### O Exercice 11:

- $\Rightarrow$  On considère la fonction f définie par :  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .
- 1)- Déterminer  $D_f$  , puis calculer les limites de f aux bornes de  $D_f$  .
- 2)- a)- Montrer que:  $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ .
  - 6)- Dresser le tableau de variation de f (en justifiant votre réponse).
- 3)- Déterminer  $f(]-\infty,-2]$ ), f([-2;-1[),f(]-1;0]) et  $f([0;+\infty[),-1]$
- 4)- On désigne par g la restriction de à l'intervalle  $I = ]-\infty; -2]$ .
  - a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g-1 définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
  - 6)- Montrer que:  $(\forall x \in J), g^{-1}(x) = \frac{x \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$ .

#### O Exercice 12:

- $\Rightarrow$  Soit f la fonction définie sur  $I = ]-\infty;3]$  par :  $f(x) = x^2 6x + 8$ .
- 1)- Calculer  $\lim f(x)$ , puis montrer que f est strictement décroissante sur I.
- 2)- Montrer que f admet une bijection réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = [-1; +\infty[$  .
- 3)- Montrer que :  $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = 3 \sqrt{x+1}$ .

# Ş

#### O Exercice 13:

- $\Rightarrow$  Soit f la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{x} 2\sqrt{x+1}$ .
- 1)- Justifier que  $D_f = [-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .
- 2)- Calculer les limites de f aux bornes de  $D_f$ .
- 3)- Montrer que f est continue et strictement décroissante sur  $]0;+\infty[$  .
- 4)- a)- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\left| \frac{1}{4}; 1 \right|$ .

  6)- Vérifier que :  $4\alpha^3 + 4\alpha^2 1 = 0$ .

#### O Exercice 14:

- $\Rightarrow$  Soit f la fonction définie sur  $I = ]-\infty; -1]$  par :  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .
- 1)- Calculer  $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ; puis montrer que f est continue sur I.
- 2)- Montrer que :  $(\forall x \in I)$ ,  $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ ; puis déduire que f est strictement Décroissante sur I.
- 3)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur J = [-1; 0[ . b)- Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .

#### O Exercice 15:

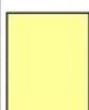
 $\Rightarrow$  Soit f la fonction définie sur  $I = [4; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1$$
.

- 1)- a)- Vérifier que :  $(\forall x \in I), f(x) = 1 \frac{1}{4} (x 2\sqrt{x})^2$ .
  - 6)- Montrer que  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ .
- 2)- a)- Montrer que :  $(\forall x \in I)$ ,  $f'(x) = \frac{-1}{2}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$ , puis en déduire Que f est strictement décroissante sur I.
  - 6)- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique  $\alpha$  dans I, puis Vérifier que  $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$ .
- 3)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = ]-\infty;1]$ .
  - 6)- Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .
  - c)- En déduire que  $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$ .

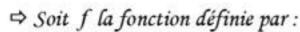


#### O Exercice 16:



- $\Rightarrow$  On considère la fonction :  $f: x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^2} x}{x}$  .
- $\checkmark$  Déterminer  $D_f$ ; puis calculer les limites de f aux bornes de  $D_f$ .

# O Exercice 17:



$$f(x) \approx x^4 - 6x^2 + x + 1$$
.

- 1)- Montrer que l'équation f'(x) = 0 admet une solution unique  $\alpha$  dans ]-1;1[.
- 2)- a)- Dresser le tableau de variation de f sur [-1;1].
  - 6)- Montrer que  $f(\alpha) > 0$ ; puis en déduire que l'équation f(x) = 0 admet Exactement deux solutions dans ]-1;1[.

#### O Exercice 18:

 $\Rightarrow$  Soit f la fonction définie sur  $I = ]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}$ .

- 1)- Calculer  $\lim_{x\to +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x\to (-1)^*} f(x)$ .
- 2)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = ]-1;+\infty[$  . 6)- Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .

# O Exercice 19:

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \to 2} \frac{1 + \sqrt[3]{4x} - \sqrt{4x + 1}}{x - 2} ; \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x + \sqrt[3]{x} - 2} ; \lim_{x \to 2} \frac{6 - \sqrt[3]{4x} \cdot \sqrt{4x + 1}}{x - 2} .$$

$$\mathcal{E}t \lim_{x \to 1} \frac{1}{2\left(1 - \sqrt{x}\right)} - \frac{1}{3\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)} .$$

### O Exercice 20:

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{3x^4 + x - 4}}{x} ; \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x}}{x} ; \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x - 3}}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1 + x^2} - \sqrt[3]{1 - x^3} et \lim_{x \to +\infty} x \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \right)$$

# Ş

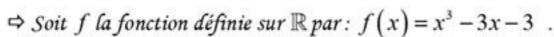
#### O Exercice 21:



 $\Rightarrow$  Soit a,b,c des nombres réels strictement positifs tel que :  $a+b \le c$ .

✓ Montrer que:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \Rightarrow (a+b-c)^3 + 27abc = 0$ .

#### O Exercice 22:



1)- Dresser le tableau de variation complet de f .

2)- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb R$  et que  $2 < \alpha < 3$ .

3)- On pose : 
$$a = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$$
 . Montrer que  $\alpha = a + \frac{1}{a}$ .

#### O Exercice 23:

 $\Rightarrow$  Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

1)- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique a dans  $\left[\sqrt[3]{2}; +\infty\right[$ .

2)- Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique b dans  $a; +\infty$ 

3)- Montrer que :  $(\exists c \in ]0; a[), \sqrt[3]{c+2}.f(c) = 2c-a$ .

#### O Exercice 24:

 $\Rightarrow$  Soit f la fonction définie sur  $I = [-1; 0[ par : f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}]$ .

1)- Calculer  $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ , puis montrer que f est continue sur I.

2)- Montrer que :  $(\forall x \in ]-1;0[), f'(x) = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$ , puis en déduire que fEst strictement décroissante sur I.

3)- Montrer que l'équation  $f(x) = x^3$  admet une solution unique a dans I et que  $\frac{-3}{4} < a < \frac{-1}{2}$ .

4)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle J Que l'on déterminera .

6)- Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

5)- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f^{-1}(x) = f(x)$ .

Fin Du Sujet

Bon Courage et Bonne Chance